

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Speciale problemen uit de

ELASTOSTATICA

Syllabus naar het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1981

Syllabus verzorgd door

Dr.ir. A.A.F. van de Ven



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.282
Prijs f. 6,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Aspecten van de continuummechanica

Onderdeel van Fysica 40 (W - IV)

Prof.dr. J.B. Alblas

Deel 1
Speciale problemen uit de

Elastostatica

Syllabus verzorgd door
Dr.ir. A.A.F. van de Ven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

ASPECTEN VAN DE CONTINUUMSMECHANICA

Onderdeel van Fysica 40 (W - IV)

Prof. Dr. J.B. Alblas

DEEL I

Speciale problemen uit de
ELASTOSTATICA

Syllabus verzorgd door
Dr. Ir. A.A.F. v.d. Ven

Voorjaarssemester 1981

INHOUDSOPGAVE

	pag.
<u>HOOFDSTUK 1. BASISVERGELIJKINGEN</u>	
1.1. Locale vergelijkingen	1
1.2. Randvoorwaarden	3
1.3. Energie	4
1.4. Principe van de Saint-Venant	6
1.5. Energieprincipes	9
 <u>HOOFDSTUK 2. BALKEN</u>	
2.1. Inleiding. Snedegrootheden	22
2.2. Rek van balken	26
2.3. Momentenbuiging van balken	30
2.4. Een-dimensionale buigingstheorie voor rechte balken (FACULTATIEF)	36
2.5. Torsie van een cirkelcylinder	44
2.6. Torsie van een cylinder met willekeurige doorsnede	49
2.6.1. Energieprincipes toegepast op torsie. Benadering voor de torsiestijfheid	63
2.7. Buiging van een cirkelcylinder door een dwarskracht. Exacte theorie (facultatief)	68
 <u>HOOFDSTUK 3. TWEE-DIMENSIONALE PROBLEMEN. PLATEN</u>	
3.1. Vlakke vervormings- en vlakspanningstoestand	75
3.1.1. Voorbeeld: Cirkelvormige pijp onder in- en uitwendige druk	85
3.2. Rek van dunne platen. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand	87
3.2.1. Voorbeeld: Rek van een plaat met een cirkelvormig gat	99
3.2.2. Energieprincipes toegepast op rek van platen	105
 <u>LITERATUUR</u>	 112
 <u>APPENDIX. Transformatie van cartesische coördinaten naar orthogonale kromlijnige coördinaten.</u>	 113

VOORWOORD

Het doel van het deel Elastostatica van Fysica 40 is het toepasbaar maken van de theorie, welke is gegeven in het voorafgaande college Fysica 30 van Prof. Esmeyer, door het geven van oplossingsmethoden voor een aantal problemen uit de lineaire elasticiteitstheorie.

De, bekend veronderstelde, basiskennis van dit college bestaat voor wat Fysica 30 betreft uit de theorie van de lineaire deformaties (verband verplaatsingen - deformaties, compatibiliteit), de, lineaire, locale balanswetten, speciaal de impulswet (evenwichtsvergelijkingen), plus de materiaalvergelijkingen voor lineaire elastische materialen (wet van Hooke).

In dit college zullen van een aantal elementaire problemen, zoals rek, buiging en torsie van cilindrische staven alsmede rek van (dunne) platen, waar mogelijk de exacte formuleringen worden gegeven met daarnaast de in de sterkteleer gebruikelijke benaderingen, zoals bijv. de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. Aangegeven zal worden wanneer deze benaderingen mogen worden toegepast en hoe groot dan de orde van de gemaakte fouten zal zijn. Verder worden energieprincipes besproken, zoals minimum potentiële energie en minimum complementaire energie, welke de basis vormen van benaderingsmethoden in de technische mechanica, zoals onder andere de eindige elementen methode. In dit college zullen deze principes o.a. worden toegepast op het bepalen van benaderingen voor de torsiestijfheid van staven met willekeurige doorsneden en op het zoeken van benaderingsoplossingen voor dunne platen onder rek.

Het dictaat is opgedeeld in twee stukken:

- i) De directe toepassingen op praktische problemen. Deze delen zijn met een normaal lettertype getikt en vormen de feitelijke tentamineerbare stof.
- ii) De meer theoretische achtergronden. Deze delen zijn speciaal bedoeld voor die studenten die wat dieper op de stof willen ingaan en behoefte voelen aan een meer fundamentele kennis. Deze stukken zijn in script getikt en behoren in principe niet tot de tentamineerbare stof.

We willen er echter met nadruk op wijzen dat deze syllabus slechts een hulpmiddel is bij de bestudering van het college en dat de te tentamineren stof uiteindelijk bepaald wordt door hetgeen op de colleges en de instructies behandeld is.

Tot slot wijzen we er nog op dat naast dit dictaat nog een vraagstukkenbundel verschijnt, welke de oefenstof voor de instructies (en de tentamens) bevat.

HOOFDSTUK 1. BASISVERGELIJKINGEN

1.1. Locale vergelijkingen

We beschouwen in dit college alleen statische vervormingen van homogene, isotrope, isotherme, lineair elastische lichamen.

Een drie-dimensionaal probleem uit de lineaire elasticiteitstheorie heeft over het algemeen 15 onbekenden, te weten:

6 deformaties e_{ij} ($= e_{ji}$) , $(i, j = 1, 2, 3)$,

6 spanningen t_{ij} ($= t_{ji}$) ,

3 verplaatsingen u_i .

Opmerking

De spanningscomponent t_{ij} is hier gedefinieerd als de kracht per oppervlakte-eenheid (= spanningsvector) werkend in de x_i -richting op een vlakje waarvan de normaal in de x_j -richting staat. De spanningen t_{ij} in een punt hangen samen met de spanningsvector $\underline{t}^{(n)}$ op een vlakje door dit punt met normaal \underline{n} volgens

$$t_i^{(n)} = t_{ij} n_j .$$

De spanning t_{ij} wordt positief genomen, indien hij, werkend op een vlakje met de normaal in de positieve (negatieve) x_j -richting, wijst in de positieve (negatieve) x_i -richting.

Hiervoor hebben we het volgende stelsel van 15 vergelijkingen tot onze beschikking:

(i) verband deformaties en verplaatsingen: *)

$$(1) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ;$$

(ii) evenwichtsvergelijkingen:

*) We geven in dit hoofdstuk alle vergelijkingen zonder afleidingen. Hiervoor verwijzen we naar Fysica 30 van Prof. Esmeyer.

$$(2) \quad t_{ij,j} + \rho f_i = 0 ;$$

(iii) wet van Hooke:

$$(3) \quad t_{ij} = 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}) ,$$

of, uitgeschreven in x,y,z-coördinaten,

$$t_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz})] , \text{ etc.}$$

(3')

$$t_{xy} = 2G e_{xy} , \text{ etc.}$$

Hierin is ρ de dichtheid (\equiv massa per volume-eenheid) welke in de lineaire theorie gelijk genomen mag worden aan ρ_0 , de dichtheid in de ongedeformeerde toestand; ρf is de volumekracht en G en ν zijn materiaalconstanten (afschuif- resp. dwarscontractiecoëfficiënt).

Een derde, belangrijke, materiaalconstante is de elasticiteitsmodulus E , welke met G en ν samenhangt volgens

$$(4) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

Door (3) te inverteren vinden we de deformaties als functies van de spanningen:

$$(5) \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} [t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} t_{kk}] ,$$

of, uitgeschreven in x,y,z-coördinaten:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [t_{xx} - \nu(t_{yy} + t_{zz})] , \text{ etc.}$$

(5')

$$e_{xy} = \frac{1}{2G} t_{xy} , \text{ etc.}$$

Door uit (1) t/m (3): e_{ij} en t_{ij} te elimineren, krijgen we de Navier-vergelijkingen:

$$(6) \quad \Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + \frac{\rho}{G} f_i = 0 , \quad (\Delta u_i = u_{i,jj}) .$$

Bij een gegeven, voldoende differentieerbaar, verplaatsingsveld $\underline{u}(\underline{x})$ kunnen we uit (1) altijd de deformaties bepalen. Omgekeerd is het echter niet altijd mogelijk om bij gegeven $e_{ij}(\underline{x})$'s de bijbehorende verplaatsingen te vinden. De vergelijkingen (1) vormen dan namelijk zes (6 gegeven e_{ij} 's) vergelijkingen voor drie onbekende verplaatsingen u_i . Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat uit gegeven deformaties verplaatsingen zijn te bepalen is dat de e_{ij} 's voldoen aan de compatibiliteitsvergelijkingen:

$$(7) \quad 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \quad (\text{cyclisch}),$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \quad (\text{cyclisch}).$$

Door de cyclische verwisseling

$$x, y, z \rightarrow y, z, x \rightarrow z, x, y.$$

krijgen we nog vier andere vergelijkingen.*)

1.2. Randvoorwaarden

De vergelijkingen (1) t/m (3), welke gelden in het inwendige van een lichaam, kunnen alleen opgelost worden indien in elk punt van het oppervlak van dat lichaam drie randvoorwaarden zijn gegeven, welke fysisch consistent moeten zijn. We kennen:

(i) Randvoorwaarden van de eerste soort:

over het gehele oppervlak zijn in elk punt drie spanningen voorgeschreven:

$$(8) \quad t_{ij} n_j = t_i^*, \quad (t_i^* : \text{voorgeschreven}).$$

(ii) Randvoorwaarden van de tweede soort:

over het gehele oppervlak zijn in elk punt drie verplaatsingen

*) Voor de transformaties van de in deze paragraaf gegeven vergelijkingen naar de orthogonale kromlijnige coördinaten (i.h.b. cylindercoördinaten) verwijzen we naar de Appendix aan het einde van dit dictaat.

voorgeschreven:

$$(9) \quad u_i = u_i^*, \quad (u_i^* : \text{voorgeschreven}) .$$

(iii) Gemengde randvoorwaarden:

op een deel (S_p) van het oppervlak zijn de spanningen voorgeschreven (volgens (8)) en op het resterende deel (S_u) van het oppervlak de verplaatsingen (volgens (9)).

(Er geldt: $S = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$).

(iv) Gemengd-gemengde randvoorwaarden:

op een deel van (of op het totale) oppervlak zijn een of twee spanningen en twee of een verplaatsingen gegeven.

Bedenk dat niet elk willekeurig gesteld probleem fysisch zinvol is en een oplossing heeft.

1.3. Energie

Voor de inwendige elastische energie W geldt

$$(10) \quad W = \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dV =: \int_V W_s dV ,$$

waarin W_s de specifieke inwendige elastische energie (per volume-eenheid) is.

Met de wet van Hooke (3) resp. (5) kunnen we W_s schrijven als

$$(11) \quad W_s = W_s^{(e)}(e_{ij}) = G \{ e_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{kk})^2 \} ,$$

of als:

$$(12) \quad W_s = W_s^{(t)}(t_{ij}) = \frac{1}{4G} \{ t_{ij} t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} (t_{kk})^2 \} .$$

Uit het feit dat G positief is en dat $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$, volgt dat W_s

positief-definiet is, d.w.z.

$$(13) \quad W_s \geq 0 ,$$

en

$$W_s = 0, \text{ alleen als } \underline{\text{alle}} \ e_{ij} = 0 .$$

Uit (11) en (12) volgt:

$$(14) \quad t_{ij} = \frac{\partial W_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} , \quad e_{ij} = \frac{\partial W_s^{(t)}}{\partial t_{ij}} .$$

Verder geldt nog de volgende energiebetrekking:

$$(15) \quad 2W = \int_V \rho f_i^* u_i dv + \int_{S_p} t_i^* u_i ds + \int_{S_u} t_i u_i^* ds ,$$

waarin de sterren wijzen op voorgeschreven waarden.

Uit (15) en (13) volgt de eenduidigheidsstelling:

Een goed gesteld lineair elasticiteitsprobleem heeft hoogstens één oplossing.

Korte schets van het bewijs:

Neem aan dat er twee oplossingen zijn. Aangezien we een lineaire theorie hebben, is dan op grond van het superpositie-beginsel ook het verschil van deze twee oplossingen een oplossing, maar deze is in evenwicht met

$$f_i^* = u_i^* = t_i^* = 0 .$$

Volgens (15) is dan W gelijk aan nul, en op grond van het positief-definiet zijn van W kan dit alleen maar als de verschiloplossing gelijk is aan de nuloplossing. In dat geval moeten de in het begin aangenomen twee oplossingen dus identiek zijn.

Opmerking

We noemen twee oplossingen identiek indien de bijbehorende spannings- en deformatievelden gelijk zijn; de verplaatsingen mogen dan nog een starre lichaams-translatie of -rotatie verschillen.

1.4. Principe van de Saint-Venant

Vaak is het moeilijk om de exacte oplossing van een randvoorwaardeprobleem te bepalen; soms is het zelfs al onmogelijk om de exacte formulering van de randvoorwaarden te geven (denk aan een in een muur ingeklemde blak). Het is dan nuttig, of zelfs noodzakelijk, om een zeer verwant probleem te vinden, dat in de randvoorwaarden slechts weinig verschilt van het oorspronkelijke probleem, maar waarvan de oplossing eenvoudiger te bepalen is. Een dergelijk vereenvoudigd probleem noemen we het gerelaxeerde probleem. Het vervangen van het oorspronkelijke probleem door het gerelaxeerde heeft natuurlijk alleen nut indien de bij beide problemen behorende oplossingen ook zeer verwant zijn. Uitsluitel hierover geeft het Principe van de Saint-Venant.

Voor we dit principe formuleren, definiëren we eerst de begrippen "nulbelasting" en "nuloplossing".

Onder een "nulbelasting" verstaan we in dit kader een belasting welke aangrijpt op een klein deel van het totale oppervlak van het lichaam en welke geïntegreerd over dit kleine oppervlakje een resulterende kracht en een resulterend moment gelijk aan nul oplevert.

Onder een "nuloplossing" verstaan we dan de exacte oplossing behorend bij een lichaam onder een nulbelasting.

Het Principe van de Saint-Venant zegt nu:

De "nuloplossing" gaat asymptotisch naar nul; d.w.z. op een afstand van het deel van het oppervlak waar de belasting aangrijpt die groot is t.o.v. een karakteristieke lengtemaat van dit oppervlak zijn de waarden van de spanningen en de deformaties $o(1)$.

Op grond van dit principe mogen we vaak het exacte, moeilijke, probleem vervangen door het gerelaxeerde probleem, dat min of meer gelijkwaardig is aan het oorspronkelijke probleem, maar waarvan de oplossing veel gemakkelijker is te bepalen. Dit is een in de sterkteleer veelvuldig toegepaste methodiek, en wij zullen hier in de nu volgende hoofdstukken ook regelmatig gebruik van maken.

Vragen

1. Hoeveel onbekenden heeft een willekeurig, drie-dimensioneel probleem in de lineaire elasticiteitstheorie en welke zijn dat? Hoeveel en welke vergelijkingen heeft U hiervoor tot Uw beschikking?
2. Gelden de evenwichtsvergelijkingen ook in een niet-elastisch lichaam?
3. Bewijs, uitgaande van de Navier-vergelijkingen, dat bij afwezigheid van volumekrachten de volumerek (e_{kk}) een potentiaalfunctie is en dat de cartesische componenten van de verplaatsingsvector (u_i) bi-potentiaalfuncties zijn.
4. Leidt (naar analogie van de Navier-vergelijkingen) de Beltrami-vergelijkingen voor de spanningen, bij afwezigheid van volumekrachten, af:

$$\Delta t_{ij} + \frac{1}{1+\nu} t_{kk,ij} = 0 .$$

Bewijs met deze vergelijkingen dat:

$$\Delta t_{kk} = \Delta \Delta t_{ij} = 0 .$$

5. Hoe luiden de compatibiliteitsvergelijkingen en waartoe dienen ze?

Beschouw:

a) Gegeven:

$$e_{xz} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} , \quad e_{yz} = - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} , \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0 .$$

Aan welke vergelijking moet $F(x,y)$ voldoen opdat dit deformatieveld compatibel is?

- b) Gegeven: $e_{xx} = cy^2$, $e_{yy} = \pm cx^2$, $e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0$.

Welke van deze twee velden is compatibel? Laat zien dat uit het niet-compatibele veld geen verplaatsingen zijn te bepalen. Bereken de verplaatsingen behorende bij het compatibele veld.

c) Gegeven: $e_{xx} = c[y^2 + 2v(x^2 - y^2)]$, $e_{xy} = cxy$, $e_{yy} = -cx^2$,
 $e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0$.

Bepaal c opdat dit veld compatibel is en bepaal dan de bijbehorende verplaatsingen.

6. Hoeveel randvoorwaarden moeten in elk punt van het oppervlak van een elastisch lichaam gegeven worden? Geef voorbeelden van randvoorwaardeproblemen van de 1^o, de 2^o, de 3^o en de 4^o soort. Aan welke conditie moeten randvoorwaarden van de 4^o soort voldoen opdat een oplossing existeert?

7. Bewijs dat $w_s^{(e)}(e_{ij})$ en/of $w_s^{(t)}(t_{ij})$ positief-definiet zijn (geef een exacte definitie van dit begrip). Welke relaties (grenzen) voor E , G en ν hebt U hiervoor gebruikt? Geef een verplaatsingsveld ongelijk aan nul, waarvoor toch $w_s = 0$.

8. Bewijs de relaties

$$t_{ij} = \frac{\partial w_s^{(e)}}{\partial e_{ij}} \quad \text{en} \quad e_{ij} = \frac{\partial w_s^{(t)}}{\partial t_{ij}},$$

uitgaande van de uitdrukkingen voor $w_s^{(e)}(e_{ij})$ en $w_s^{(t)}(t_{ij})$. Zijn deze relaties niet in strijd met:

$$w_s = \frac{1}{2} t_{ij} e_{ij} ?$$

9. Bepaal W voor een lineaire veer, veerstijfheid c , indien:

a) de kracht P , b) de uitrekking u ,

gegeven is. Laat voor beide gevallen zien dat $2W$ gelijk is aan de uitwendig verrichte arbeid.

10. Bewijs dat:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho f_i^* u_i dV + \frac{1}{2} \int_{S_p} t_i^* u_i dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} t_i u_i^* dS.$$

Formuleer deze relatie in woorden.

11. Op welke twee belangrijke principes is de eenduidigheidsstelling gebaseerd? Geldt deze stelling ook nog in de niet-lineaire theorie, en zo neen, waarom niet?
12. Zijn twee oplossingen: $\{t_{ij}^{(1)}, e_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}\}$ en $\{t_{ij}^{(2)}, e_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}\}$ behorende bij dezelfde voorgeschreven belasting volledig identiek?
13. Formuleer het Principe van de Saint-Venant algemeen en voor het geval van een cilindrische staaf welke alleen in zijn einddoorsneden belast wordt. Beschouw een lichaam L, dat op twee verschillende manieren belast wordt door spanningsverdelingen t_1^* en t_2^* , werkend op een klein deel (S_p) van het oppervlak van L. Indien deze spanningsverdelingen statisch equivalent zijn (wat betekent dit exact?), wat houdt dit dan in voor de bij t_1^* en bij t_2^* behorende oplossingen? Is dit niet in strijd met de eenduidigheidsstelling? Waarom is het principe van de Saint-Venant praktisch van zulk groot nut?

1.5. Energieprincipes

In § 1.3 hebben we ingevoerd de elastische, potentiële, energie W als

$$(16) \quad W = \int_V w_s \, dv,$$

met

$$(17) \quad w_s = \frac{1}{2} e_{ij} t_{ij},$$

de specifieke elastische energie (per volume-eenheid).

Tevens hadden we daar gezien hoe we, m.b.v. de wet van Hooke, w_s konden uitdrukken in alléén e_{ij} (verg. (11): $w_s^{(e)}$) of in alléén t_{ij} (verg. (12): $w_s^{(t)}$). Uit deze uitdrukkingen blijkt dan dat w_s positief-definiet is (mits $G > 0$ en $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$), dat wil zeggen:

$$(18) \quad \begin{aligned} w_s &> 0 && \text{als } e_{ij} \neq 0, \\ w_s &= 0 && \text{als } e_{ij} = 0, \end{aligned} \quad \forall_{i,j \in [1,3]}.$$

De elastische energie is de energie die t.g.v. de deformaties in een elastisch lichaam is opgeslagen (denk aan een uitgerekte veer: indien we deze

loslaten gaat de veer trillen, d.w.z. de in de veer opgeslagen elastische, potentiële, energie komt vrij in de vorm van kinetische energie). Deze elastische energie is echter niet de enige potentiële energie die in een elastisch, gedeformeerd, lichaam is opgeslagen. Om een lichaam te deformeren moeten er uitwendige krachten op dat lichaam worden uitgeoefend. Bij deformaties (\rightarrow verplaatsingen) verrichten deze krachten arbeid. Er is dus ook nog potentiële energie van de uitwendige krachten, welke gelijk maar tegengesteld is aan de arbeid verricht door deze krachten, Om dit te kunnen formaliseren definiëren we eerst de reguliere evenwichtstoestand (of oplossing) S als de verzameling

$$S = \{u_i, e_{ij}, t_{ij}; f_i^* \in V, t_i^* \in S_p, u_i^* \in S_u\},$$

waarbij u_i, e_{ij} en t_{ij} aan alle vergelijkingen en randvoorwaarden voldoen. Hierin zijn verder:

- ρf_i^* : voorgeschreven volumekrachten in V ,
- t_i^* : voorgeschreven oppervlaktetensiespanningen op S_p ,
- u_i^* : voorgeschreven verplaatsingen op S_u .

We definiëren dan de totale potentiële energie van de reguliere evenwichtstoestand door

$$(19) \quad U(S) = W(S) - \int_V \rho f_i^* u_i \, dV - \int_{S_p} t_i^* u_i \, dS.$$

In (19) vormen de laatste twee termen tezamen de potentiële energie van de uitwendige, voorgeschreven krachten.

Opmerking. De bovenstaande definities gelden in feite alleen voor die situaties dat S_u en S_p volledig gescheiden oppervlakken voorstellen (dus geen gemengd-gemengde randvoorwaarden) en hetzelfde geldt voor de nu volgende bewijzen. De hierna komende stellingen gelden echter ook voor gemengd-gemengde problemen, alleen moeten dan de uitdrukkingen voor de energiefunctionalen enigszins worden aangepast.

We definiëren een kinematisch toelaatbaar stelsel \bar{S} als de verzameling

$$\bar{S} = \{\bar{u}_i, \bar{e}_{ij}, \bar{t}_{ij}; u_i^* \in S_u\},$$

welke voldoet aan

$$i) \quad \bar{u}_i \in C^2, \quad \bar{e}_{ij} \in C^1, \quad \bar{t}_{ij} \in C^1$$

(deze eisen zijn voldoende, maar niet noodzakelijk),

$$ii) \quad \bar{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}),$$

$$iii) \quad \bar{t}_{ij} = 2G(\bar{e}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \bar{e}_{kk}), \quad (\text{Hooke}),$$

$$iv) \quad \bar{u}_i = u_i^* \text{ op } S_u.$$

Dit stelsel hoeft dus niet aan alle vergelijkingen en randvoorwaarden te voldoen, namelijk niet aan de evenwichtsvergelijkingen en aan de randvoorwaarden op S_p ; diensgevolge is dus ook \bar{S} niet eenduidig. Er zijn in feite oneindig veel kinematisch toelaatbare stelsels. De volledige klasse van alle \bar{S} vormt een ∞ -dimensionale ruimte.

We kunnen nu ook voor \bar{S} een soort potentiële energie definiëren. We noemen dit de potentiële energie-functionaal $U(\bar{S})$ (bedenk dat dit niet de echte potentiële energie is, omdat \bar{S} in het algemeen niet de echte oplossing is), welke we definiëren door

$$(20) \quad U(\bar{S}) = w^{(e)}(\bar{S}) - \int_V \rho f_i^* \bar{u}_i dv - \int_{S_p} t_i^* \bar{u}_i ds.$$

Voor deze energie-functionaal geldt nu de volgende

Stelling.

$$(21) \quad U(S) = \min_{\bar{S}} U(\bar{S}).$$

In woorden: de potentiële energie-functionaal $U(\bar{S})$ neemt zijn minimum over de klasse van alle kinematisch toelaatbare stelsels \bar{S} aan in de reguliere evenwichtstoestand S . Dus de waarde van $U(\bar{S})$ is altijd groter dan de exacte potentiële energie, behalve in het geval dat $\bar{S} = S$.

Bewijs. Voor het bewijs van (21) voeren we een nieuw stelsel S' in door

$$(22) \quad S' = \bar{S} - S.$$

Dan is dus, bijvoorbeeld, $u'_i = \bar{u}_i - u_i$ en aangezien

$$\bar{u}_i = u_i^* \text{ op } S_u \quad \text{en} \quad u_i = u_i^* \text{ op } S_u ,$$

geldt dus

$$(23) \quad u'_i = 0 \text{ op } S_u .$$

Nu volgt direct uit de definities dat

$$(24) \quad U(\bar{S}) - U(S) = W(\bar{S}) - W(S) - \int_V \rho f_i^* u'_i dV - \int_{S_P} t_i^* u'_i dS .$$

We werken eerst $W(\bar{S})$ uit:

$$\begin{aligned} 2W(\bar{S}) &= \int_V \bar{t}_{ij} \bar{e}_{ij} dV = \int_V (t'_{ij} + t_{ij}) (e'_{ij} + e_{ij}) dV = \\ &= \int_V t_{ij} e_{ij} dV + \int_V t'_{ij} e'_{ij} dV + \int_V (t'_{ij} e_{ij} + t_{ij} e'_{ij}) dV = \\ (25) \quad &= 2W(S) + 2W(S') + \int_V (t'_{ij} e_{ij} + t_{ij} e'_{ij}) dV . \end{aligned}$$

Voor de verdere uitwerking bewijzen we eerst het volgende

Lemma.

$$(26) \quad t'_{ij} e_{ij} = t_{ij} e'_{ij} .$$

Bewijs. Elimineer t'_{ij} met Hooke:

$$\begin{aligned} t'_{ij} e_{ij} &= 2G(e'_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e'_{kk}) e_{ij} = \\ &= 2G(e'_{ij} e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e'_{kk} e_{ii}) = \\ &= 2G(e_{ij} e'_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{ii} e'_{kk}) = \\ &= 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{kk}) e'_{ij} = t_{ij} e'_{ij} , \end{aligned}$$

weer volgens Hooke.

□

Hiermee wordt (25)

$$(27) \quad W(\bar{S}) = W(S) + W(S') + \int_V t_{ij} e'_{ij} dv .$$

De laatste integraal nog verder uitwerken geeft (bedenk dat t_{ij} de exacte spanningen zijn)

$$\begin{aligned} \int_V t_{ij} e'_{ij} dv &= \int_V t_{ij} \cdot \frac{1}{2} (u'_{i,j} + u'_{j,i}) dv = \quad (\text{want } t_{ij} = t_{ji}) \\ &= \int_V t_{ij} u'_{i,j} dv = \int_V (t_{ij} u'_i)_{,j} dv - \int_V t_{ij,j} u'_i dv = \end{aligned}$$

(met de stelling van Gauss en de evenwichtsvergelijkingen)

$$\begin{aligned} &= \int_S t_{ij} u'_i n_j dS + \int_V \rho f_i^* u'_i dv = \\ (28) \quad &= \int_{S_p} t_i^* u'_i dS + \int_V \rho f_i^* u'_i dv , \end{aligned}$$

want $u'_i = 0$ op S_u .

Substitutie van (27) en (28) in (24) geeft dan

$$(29) \quad U(\bar{S}) - U(S) = W(S') .$$

Aangezien

$$W(S') \geq 0 ,$$

en alleen gelijk aan nul als $S' = 0$, d.w.z. als $\bar{S} = S$, geldt dus ook:

$$U(\bar{S}) \geq U(S) ,$$

waarbij het gelijkteken alleen geldt als $\bar{S} = S$.

Hiermee is (21) bewezen. □

Met de stelling van de minimale potentiële energie kunnen we een bovengrens voor de potentiële energie aangeven. We zoeken echter ook een ondergrens. Hiertoe voeren we in de complementaire energie $U^*(S)$ door

$$(30) \quad U^*(S) = W(S) - \int_{S_u} t_i u_i^* dS .$$

De laatste integraal in deze uitdrukking stelt voor de uitwendige arbeid verricht door de voorgeschreven verplaatsingen (onder zg. "dead load" condities).

We voeren tevens een nieuwe klasse in, namelijk de klasse van statisch toelaatbare stelsels \underline{S} , gedefinieerd door

$$\underline{S} = \{ \underline{t}_{ij}, \underline{e}_{ij}; f_i^* \in V, t_i^* \in S_p \},$$

zodanig dat

$$i) \quad \underline{e}_{ij} \in C^1, \quad \underline{t}_{ij} \in C^1 \quad (\text{voldoende maar niet noodzakelijk}),$$

$$ii) \quad \underline{t}_{ij,j} + \rho f_i^* = 0 \quad \text{en} \quad \underline{t}_{ji} = \underline{t}_{ij},$$

$$iii) \quad \underline{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\underline{t}_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \underline{t}_{kk} \right],$$

$$iv) \quad \underline{t}_{ij} n_j = t_i^*, \quad \text{op } S_p.$$

De statisch toelaatbare \underline{e}_{ij} hoeven dus niet compatibel te zijn, d.w.z. bij een \underline{S} hoeven geen verplaatsingen \underline{u}_i te bestaan. Bestaan deze \underline{u}_i wel, dan hoeven ze nog niet te voldoen aan de randvoorwaarden op S_u (doen ze dit wel dan hebben we de echte oplossing S).

We definiëren de complementaire energie-functionaal behorende bij de statisch toelaatbare toestand \underline{S} door

$$(31) \quad U^*(\underline{S}) = W^{(t)}(\underline{S}) - \int_{S_u} \underline{t}_i u_i^* ds,$$

waarin

$$\underline{t}_i = \underline{t}_{ij} n_j \quad (\text{op } S_u).$$

Hiervoor geldt de volgende

Stelling.

$$(32) \quad U^*(S) = \min_{\underline{S}} U^*(\underline{S}).$$

Bewijs. Voer in:

$$S' = \underline{S} - S.$$

Dan geldt voor $t'_{ij} = \underline{t}_{ij} - t_{ij}$, dat

$$(33) \quad t'_{ij,j} = 0 \quad \text{en} \quad t'_i = t'_{ij} n_j = 0 \quad \text{op } S_p.$$

Uitgaande van

$$(34) \quad u^*(\underline{S}) - u^*(S) = w(\underline{S}) - w(S) - \int_{S_u} t'_i u_i^* ds,$$

bewijzen we eerst dat

$$\begin{aligned} w(\underline{S}) - w(S) &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{t}_{ij} e_{ij} - t_{ij} e_{ij}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [(t'_{ij} + t_{ij})(e'_{ij} + e_{ij}) - t_{ij} e_{ij}] dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [t'_{ij} e'_{ij} + t'_{ij} e_{ij} + t_{ij} e'_{ij}] dv = \quad (\text{zie (26)}) \\ &= w(S') + \int_V t'_{ij} e_{ij} dv = w(S') + \int_V t'_{ij} u_{i,j} dv = \\ &= w(S') + \int_V (t'_{ij} u_i)_{,j} dv - \int_V t'_{ij,j} dv = \quad (\text{zie (33)}^1) \\ &= w(S') + \int_S t'_{ij} u_i n_j ds = \quad (\text{zie (33)}^2) \\ &= w(S') + \int_{S_u} t'_i u_i^* ds, \end{aligned}$$

waarmee (34) wordt

$$u^*(\underline{S}) - u^*(S) = w(S') \geq 0,$$

of

$$u^*(\underline{S}) \geq u^*(S),$$

waarbij het gelijkteken weer alleen geldt als $\underline{S} = S$ ($S' = 0$).

Hiermee is (32) bewezen. □

Voor het verband tussen $U(S)$ en $U^*(S)$ geldt de

Stelling.

$$(35) \quad U(S) + U^*(S) = 0 .$$

Bewijs. Voor het bewijs van (35) gaan we uit van de definities van $U(S)$ en $U^*(S)$ volgens (19) resp. (30), welke geven

$$U(S) + U^*(S) = 2W(S) - \int_V \rho f_i^* u_i \, dv - \int_{S_p} t_i^* u_i \, dS - \int_{S_u} t_i u_i^* \, dS$$

en dit is nul op grond van verg. (15) uit § 1.3. □

De voorgaande drie stellingen zijn nu samen te voegen tot het volgende insluittheorema:

$$(36) \quad -U^*(\underline{S}) \leq -U^*(S) = U(S) \leq U(\bar{S}) .$$

Met dit theorema kunnen we boven- en ondergrenzen voor de potentiële energie aangeven. We moeten er hier echter wel aan denken dat $U(S)$ een globale maat is (i.e. een integraal over het totale volume). Dit houdt in dat als $U(\bar{S}) \geq U(S)$, dit nog niet wil zeggen dat elke locale grootheid uit \bar{S} (\bar{u}_i , \bar{e}_{ij} of \bar{t}_{ij}) ook persé groter is dan de overeenkomstige grootheid uit S . Zo hoeft dus bijvoorbeeld niet te gelden

$$|\bar{u}_i| > |u_i| , \quad \forall_{x \in V} .$$

We hebben hier een methode beschreven om onder- en bovengrenzen voor de potentiële energie af te leiden. De vraag is of we hier veel aan hebben.

We noemen daarom twee toepassingsgebieden:

- i) In veel gevallen is $U(S)$ evenredig met een mechanische grootheid, bijvoorbeeld een stijfheidscoëfficiënt. In dat geval geeft het insluittheorema onder- en bovengrenzen voor deze mechanische grootheid.
- ii) De in deze paragraaf besproken energieprincipes vormen de basis van de eindige-elementenmethode.

Recapitulatie. Insluittheorema

$$-U^*(\underline{S}) \leq -U^*(S) = U(S) \leq U(\bar{S}),$$

met

$$U(\bar{S}) = W^{(e)}(\bar{S}) - \int_V \rho f_i^* \bar{u}_i \, dV - \int_{S_p} t_i^* \bar{u}_i \, dS$$

en

$$\bar{S} = \{\bar{u}_i, \dots \mid \bar{u}_i = u_i^* \text{ op } S_u, \dots\}$$

(hoeft niet te voldoen aan evenwicht en aan de randvoorwaarden op S_p),

$$\begin{aligned} W^{(e)}(\bar{S}) &= \int_V G\{\bar{e}_{ij} \bar{e}_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \bar{e}_{kk} \bar{e}_{\ell\ell}\} \, dV = \\ &= \int_V G\{\bar{e}_{xx}^2 + \bar{e}_{yy}^2 + \bar{e}_{zz}^2 + 2\bar{e}_{xy}^2 + 2\bar{e}_{yz}^2 + 2\bar{e}_{xz}^2 + \\ &\quad + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\bar{e}_{xx} + \bar{e}_{yy} + \bar{e}_{zz})^2\} \, dV, \end{aligned}$$

en met

$$U^*(\underline{S}) = W^{(t)}(\underline{S}) - \int_{S_u} t_i u_i^* \, dS$$

en

$$\underline{S} = \{t_{ij}, \dots \mid t_{ij,j} + \rho f_i^* = 0, t_{ij} n_j = t_i^* \text{ op } S_p, \dots\}$$

(hoeft niet compatibel te zijn),

$$\begin{aligned} W^{(t)}(\underline{S}) &= \int_V \frac{1}{4G} \{t_{ij} t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} t_{kk} t_{\ell\ell}\} \, dV = \\ &= \int_V \frac{1}{4G} \{t_{xx}^2 + t_{yy}^2 + t_{zz}^2 + 2t_{xy}^2 + 2t_{yz}^2 + 2t_{xz}^2 + \\ &\quad - \frac{\nu}{(1+\nu)} (t_{xx} + t_{yy} + t_{zz})^2\} \, dV. \end{aligned}$$

Vragen.

1. Ga na of de volgende beweringen altijd waar zijn:

- i) De spanningen behorende bij een kinematisch toelaatbaar stelsel \bar{S} voldoen niet aan de evenwichtsvergelijkingen.
- ii) In een statisch toelaatbaar stelsel \underline{S} bestaan geen verplaatsingen.
- iii) De klassen \bar{S} en \underline{S} hebben slechts één punt gemeenschappelijk.
- iv) De spanningen behorende bij een statisch toelaatbaar stelsel zijn in elk punt van het lichaam groter dan de spanningen behorende bij de reguliere evenwichtstoestand.

2. Teken Venn-diagrammen van de klassen \bar{S} en \underline{S} ; ga speciaal na of deze klassen elkaar wel of niet overlappen.

3. In Wiskunde 40 wordt de stelling van Gauss gegeven in de vorm

$$\int_V \operatorname{div} \underline{v} \, dV = \int_S (\underline{v}, \underline{n}) \, dS .$$

Laat zien dat dit identiek is met de stelling van Gauss zoals die gebruikt is in het bewijs van (28) (wat is de vector \underline{v} in dit geval?).

4. Bewijs dat de in (19) gedefinieerde $U(S)$ eenduidig is.

Bedenk hierbij dat van S : e_{ij} en t_{ij} eenduidig zijn, maar u_i niet (er kunnen nog starre-lichaamsverplaatsingen optreden). Neem nu $S_u = 0$, zodat er starre-lichaamsverplaatsingen kunnen optreden, en laat zien dat in een evenwichtstoestand de waarde van $U(S)$ niet wordt beïnvloed door starre-lichaamsverplaatsingen.

(Voor de beantwoording van de vragen 5 t/m 8 kan kennis van de §§ 2.2, 2.3 en 2.5 benodigd zijn.)

5. Beschouw een balk onder

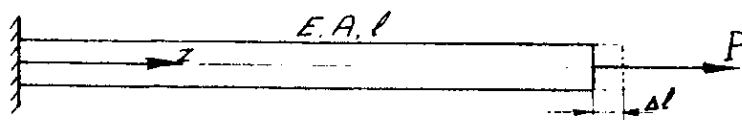
- i) uniforme rek,
- ii) momentenbuiging,
- iii) torsie.

Geef voor alle drie gevallen expliciete uitdrukkingen voor $w^{(e)}$ en $w^{(t)}$.

6. Leid voor de drie bij vraag 5 genoemde problemen op eenvoudige wijze af dat de trek-, buig-, resp. torsiestijfheid evenredig is met de potentiële energie.

Hint: Ga uit van de relatie (15) uit § 1.3.

7.



Beschouw een trekstaaf onder uniforme rek. Neem de axiale verplaatsing (w) in $z = 0$ gelijk aan nul. Laat P de trekkracht zijn en Δl de uitrekking van de staaf.

Onderscheid

- P voorgeschreven,
- Δl voorgeschreven.

Beantwoord zowel voor probleem a) als voor b) de volgende vragen:

- Bereken $U(\underline{S})$ en $U^*(\underline{S})$.
- Kies een \bar{S} , die lineair is in \underline{x} , d.w.z. kies:

$$\underline{u}_x = \underline{u} = -v c_1 x, \quad \underline{u}_y = \underline{v} = -v c_1 y, \quad \underline{u}_z = \underline{w} = c_1 z.$$

Is c_1 in beide gevallen nog vrij? Zo ja, hoe bepaalt U dan de beste keuze voor c_1 ?

Bereken de beste $U(\bar{S})$.

- Kies een \underline{S} met constante spanningen, d.w.z. kies:

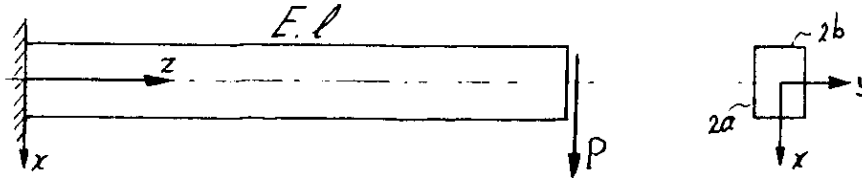
$$\underline{t}_{zz} = c_2, \quad \text{overige } \underline{t}_{ij} = 0.$$

Is c_2 in beide gevallen nog vrij? Zo ja, hoe bepaalt U dan de beste keuze voor c_2 ?

Bereken de beste $U^*(\underline{S})$.

- Hoe kunt U met bovenstaande resultaten boven- en ondergrenzen voor de trekstijfheid bepalen? Denkt U dat U zo de exacte trekstijfheid kunt krijgen?

8.



Beschouw een ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) in zijn einddoorsnede belast door een dwarskracht P .

i) Bepaal voor dit probleem een statisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$t_{zz} = f(z)x, \quad t_{xz} = g(x,z), \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{zy} = 0.$$

ii) Bereken de hierbij behorende elastische energie $W^{(t)}(\underline{S})$. Wat kunt U zeggen van de verhouding van de bijdrage aan $W^{(t)}(\underline{S})$ afkomstig van t_{xz} en die van t_{zz} (speciaal voor slanke balken: $a \ll l$)? In hoeverre rechtvaardigt dit de volgende relatie voor $W^{(t)}(\underline{S})$ voor een balk onder (willekeurige) buiging om de y -as:

$$W^{(t)}(\underline{S}) = \frac{1}{2} \int_V \frac{M_y^2(z)}{EI_Y} dz,$$

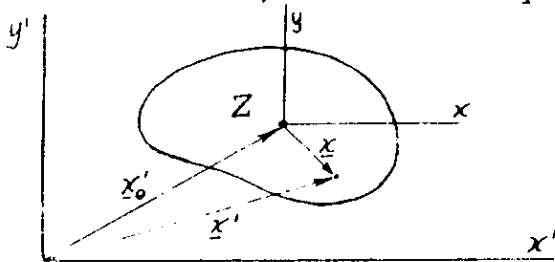
waarin $M_y(z)$ een statisch toelaatbaar buigend moment is.

HOOFDSTUK 2. BALKEN

2.1. Inleiding. Snedegrootheden

We zullen in dit hoofdstuk de deformaties en de spanningen bepalen in balken onder verschillende klassen van belastingen (rek, buiging, torsie). Onder een balk verstaan we een cilindrisch (of prismatisch) lichaam, met lengte l en oppervlak van de doorsnede S , waarvan we bovendien meestal, zonder dit steeds expliciet te vermelden, aannemen dat de lengte veel groter is dan de doorsnedemaat (slanke balken: $l \gg r$, met r = karakteristieke doorsnedemaat).

Voor de beschrijving van het elastische gedrag van een balk gebruiken we een assenstelsel $Oxyz$, waarvan we de z -as steeds in de lengterichting van de balk kiezen, en de x - en de y -as in een loodrechte doorsnede leggen.



Beschouw een willekeurig assenkruis $O'x'y'$ gelegen in het vlak van de doorsnede. We definiëren dan de positie van het zwaartepunt Z van de doorsnede door (zie figuur):

$$(1) \quad \underline{x}'_0 = \frac{1}{S} \int_S \underline{x}' dS, \quad (\underline{x}' = (x', y', 0)) .$$

In het vervolg zullen we de oorsprong O van het Oxy -stelsel steeds in het zwaartepunt Z leggen zodat dan

$$(2) \quad \int_S x dS = \int_S y dS = 0 .$$

In het Oxy -stelsel met oorsprong in Z definiëren we de volgende oppervlaktetraagheidsmomenten

$$(3) \quad J_{xx} = \int_S y^2 dS ; \quad J_{xy} = J_{yx} = - \int_S xy dS ; \quad J_{yy} = \int_S x^2 dS .$$

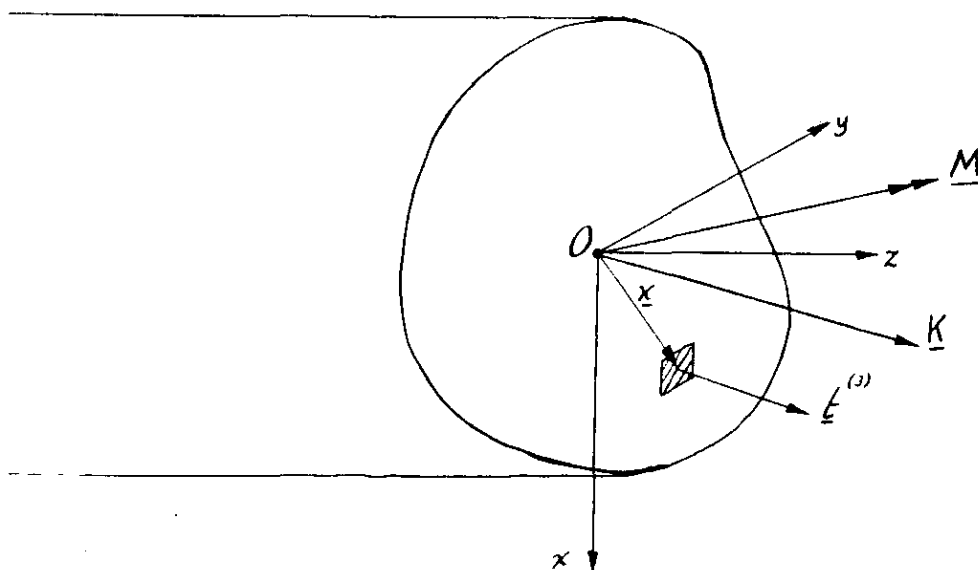
Deze grootheden vormen een symmetrische tensor en zijn dus op hoofdassen te brengen, waarvoor geldt

$$(4) \quad J_{xy} = J_{yx} = - \int_S xy \, dS = 0 .$$

De assen waarvoor (4) geldt noemen we hoofdtraagheidsassen van de doorsnede.

In het vervolg zullen we voor de x- en y-assen steeds centrale (d.w.z. door het zwaartepunt Z) hoofdtraagheidsassen nemen, zodat dus steeds (2) en (4) gelden.

In Fysica 20 (eenheid 13) zijn reeds op globale wijze zogenaamde snede-grootheden (i.e. normaalkracht, dwarskracht, buigend moment, wringend moment) geïntroduceerd. Hier zullen we het verband tussen deze snede-grootheden en de locale grootheden, dus de spanningen, geven. We beschouwen een doorsnede van de balk waarvan de normaalvector in de positieve z (of x_3 -) richting werkt. De spanningsvector in een punt van de doorsnede geven we aan met $\underline{t}^{(3)}$. Er kunnen in zo'n doorsnede alleen spanningen werken, waarvan de tweede index: 3, of z, is, dus t_{xz} , t_{yz} en t_{zz} .



De totale kracht \underline{K} op de doorsnede is dan

$$(5) \quad \underline{K} = \int_S \underline{t}^{(3)} dS ,$$

of, in indices,

$$(6) \quad K_i = \int_S t_i^{(3)} dS = \int_S t_{i3} dS .$$

Door deze kracht te ontbinden in z-, x- en y-richting, resp., krijgen we de volgende relaties voor de snedegrootheden:

normaalkracht:

$$(7) \quad N (= K_z) = \int_S t_{zz} dS ;$$

dwarskrachten:

$$(8) \quad \begin{cases} Q_x (= K_x) = \int_S t_{xz} dS ; \\ Q_y (= K_y) = \int_S t_{yz} dS . \end{cases}$$

Op analoge wijze krijgen we voor het totale moment \underline{M} om O van de spanningen in de doorsnede ($\underline{x} = (x, y, 0)$ is de positievector van het oppervlakte-elementje dS t.o.v. O):

$$(9) \quad \underline{M} = \int_S \underline{x} \times \underline{t}^{(3)} dS .$$

Ontbonden in x-, y- en z-richting levert dit

buigende momenten:

$$M_x = \int_S y t_{zz} dS ;$$

(10)

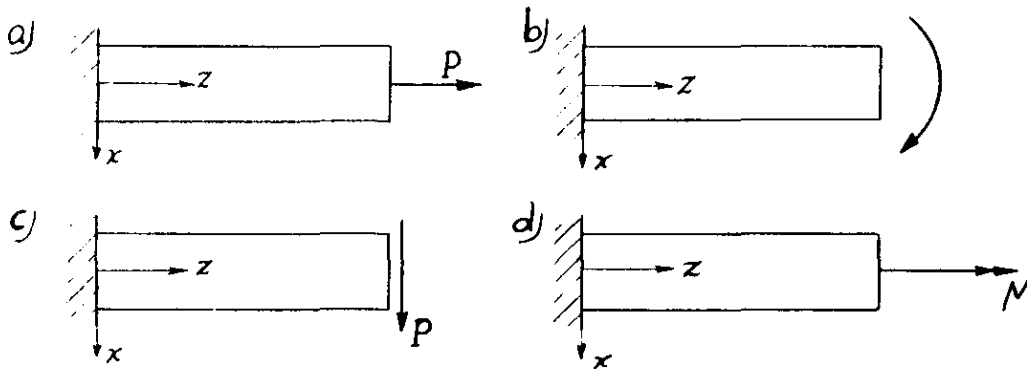
$$M_y = - \int_S x t_{zz} dS ;$$

wringend moment:

$$(11) \quad M_z = \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS .$$

Vragen

1. Welke spanningen zullen in een loodrechte doorsnede optreden bij de volgende problemen:

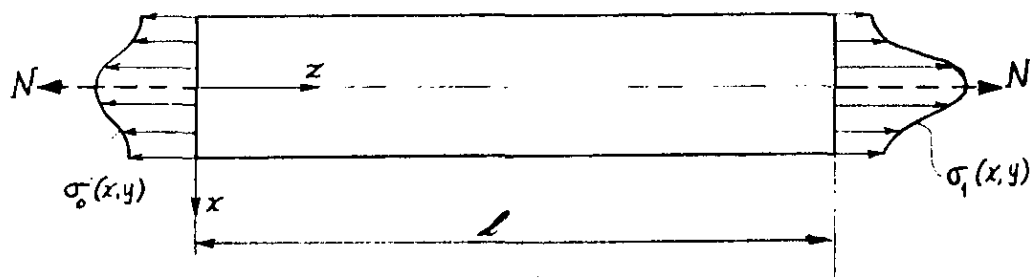


2. Geef de definities, uitgedrukt in de spanningen in een loodrechte doorsnede, van de doorsnedegrootheden: N , M_x , M_y , Q_x , Q_y en M_z .
3. Bereken de doorsnedegrootheden behorende bij de volgende spanningsverdelingen (x , y zijn centrale hoofdtraagheidsassen van de doorsnede):

- a) $t_{xz} = t_{yz} = 0$, $t_{zz} = c$,
 b) $t_{xz} = c_1$, $t_{yz} = 0$, $t_{zz} = c_2 x$,
 c) $t_{xz} = c_1 x + c_2 y$, $t_{yz} = c_3 x + c_4 y$, $t_{zz} = 0$.

2.2. Rek van balken

Als eerste voorbeeld bekijken we de rek van een cilindrische staaf of balk:



We veronderstellen de balk in zijn einddoorsneden belast door een normaalspanning t_{zz} volgens:

$$(12) \quad t_{zz}(x,y,0) = \sigma_0(x,y), \quad t_{zz}(x,y,l) = \sigma_1(x,y) ,$$

($\sigma_0(x,y)$ en $\sigma_1(x,y)$: gegeven (voorgeschreven) functies), terwijl alle andere spanningen in deze doorsneden nul zijn ($t_{xz} = t_{yz} = 0$, voor $z = 0$ en l). De mantel van de staaf is spanningsvrij. Verder nemen we de verdelingen $\sigma_0(x,y)$ en $\sigma_1(x,y)$ zodanig dat ze als enige resulterende snedegrootte een normaalkracht N opleveren. Aangezien $t_{xz} = 0$ en $t_{yz} = 0$, op $z = 0, l$, volgt triviaal dat de dwarskrachten en het wringend moment nul zijn, terwijl uit (7) en (10) volgt dat $\sigma_0(x,y)$ en $\sigma_1(x,y)$ zodanig moeten zijn dat

$$\begin{aligned} & \int_S t_{zz} dS = N , \\ \text{en} \\ (13) \quad & \int_S x t_{zz} dS = \int_S y t_{zz} dS = 0 , \quad \text{op } z = 0, \text{ of } l. \end{aligned}$$

Het probleem geformuleerd door (12) is voor willekeurige $\sigma_0(x,y)$ en $\sigma_1(x,y)$

zeer moeilijk oplosbaar. Indien nu de lengte van de balk $l \gg r$ (r is een karakteristieke lengtemaat van de doorsnede) mogen we op grond van het Principe van de Saint-Venant het probleem volgens (12) vervangen door het gerelaxeerde probleem, dat als randvoorwaarden heeft:

$$(14) \quad t_{zz}(x,y,0) = t_{zz}(x,y,l) = \sigma ,$$

waarin σ een constante normaalspanning is. Volgens de Saint-Venant is dan op enige afstand van de einddoorsneden (enige malen r) de oplossing van het gerelaxeerde probleem bij benadering gelijk aan die van het oorspronkelijke probleem.

Omdat σ een normaalkracht N moet opleveren, moet gelden dat:

$$(15) \quad N = \int_S t_{zz} dS = \sigma S \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S} ,$$

terwijl aan (13)^{2,3} is voldaan op grond van het feit dat x en y vanuit het zwaartepunt zijn genomen.

Recapitulerend kunnen we het gerelaxeerde probleem dus als volgt formuleren:

Voor de 15 onbekenden: u_i , e_{ij} en t_{ij} hebben we de 15 vergelijkingen (1), (2) en (3) van Hoofdstuk 1, aangevuld met de randvoorwaarden:

$$i) \text{ op } z = 0 \text{ of } l : t_{xz} = t_{yz} = 0 , \quad t_{zz} = \frac{N}{S} ,$$

$$ii) \text{ op de mantel (bedenk dat daar } n_z = 0, \text{ dus } \underline{n} = (n_x, n_y, 0)):$$

$$t_{ix} n_x + t_{iy} n_y = 0 , \quad (i = 1, 2, 3) .$$

De oplossing van het gerelaxeerde probleem luidt simpel:

$$(16) \quad t_{zz} = \frac{N}{S} , \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0 .$$

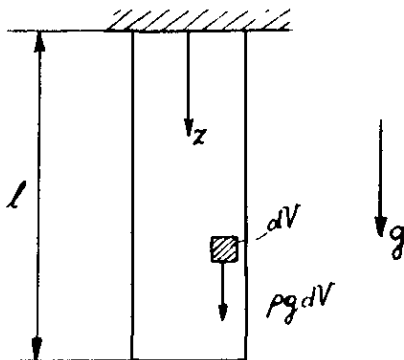
We krijgen hieruit de volgende deformaties:

$$(17) \quad e_{xx} = -\frac{\nu N}{ES} , \quad e_{yy} = -\frac{\nu N}{ES} , \quad e_{zz} = \frac{N}{ES} ,$$

$$e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0 .$$

De bijbehorende verplaatsingen zijn, afgezien van starre-lichaams-verplaatsingen,

$$(18) \quad \begin{aligned} u = u_x &= -\frac{\nu N}{ES} x, & v = u_y &= -\frac{\nu N}{ES} y, \\ w = u_z &= \frac{N}{ES} z. \end{aligned}$$



We zullen hier ook nog bekijken de rek van een verticale balk onder zijn eigen gewicht. Dit eigen gewicht brengen we in rekening door invoering van een volumekracht volgens:

$$(19) \quad \rho f_x = \rho f_y = 0, \quad \rho f_z = \rho g.$$

We veronderstellen*) weer alle spanningen behalve t_{zz} gelijk aan nul en t_{zz} alleen een functie van z . In dat geval blijft van de evenwichtsvergelijkingen (2) alleen over:

$$(20) \quad \frac{dt_{zz}}{dz} + \rho g = 0.$$

Verder is gegeven dat de doorsnede $z = l$ spanningsvrij is:

$$(21) \quad t_{zz}(z = l) = 0,$$

waaruit volgt de oplossing:

$$(22) \quad t_{zz} = \rho g(l - z), \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0.$$

Met de wet van Hooke volgens (5), en (4), vinden we uit (22) de deformaties

$$(23) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{\nu \rho g}{E} (l - z), & e_{yy} &= -\frac{\nu \rho g}{E} (l - z), & e_{zz} &= \frac{\rho g}{E} (l - z), \\ e_{xy} &= e_{xz} = e_{yz} = 0. \end{aligned}$$

*) Het uitgaan van een bepaald spanningsveld is gerechtvaardigd, indien we hiermee aan alle elasticiteitsverg. (i.e. (1), (2) en (3)) en alle randvoorwaarden kunnen voldoen. Op grond van de eenduidigheidsstelling hebben we dan de enige goede oplossing te pakken.

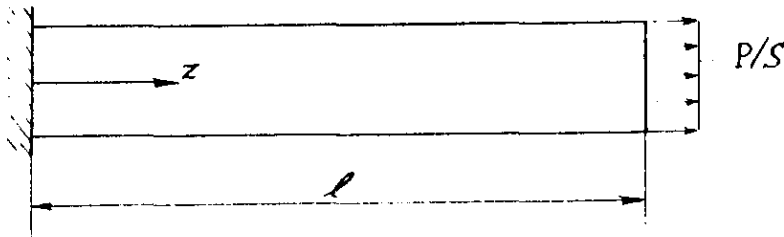
Dit deformatieveld is triviaal compatibel (waarom?) en levert, indien we beletten dat het punt $(0,0,l)$ verplaatst, de verplaatsingen:

$$(24) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g}{E} x(l-z) , & v &= -\frac{\nu \rho g}{E} y(l-z) , \\ w &= -\frac{\rho g}{2E} (z^2 + \nu x^2 + \nu y^2 - 2lz) . \end{aligned}$$

Merk op dat uit het verplaatsingsveld (24) volgt dat bij rek onder eigen gewicht vlakke doorsneden niet meer vlak blijven.

Vragen

1. Geef de exacte en de gerelaxeerde formulering van:

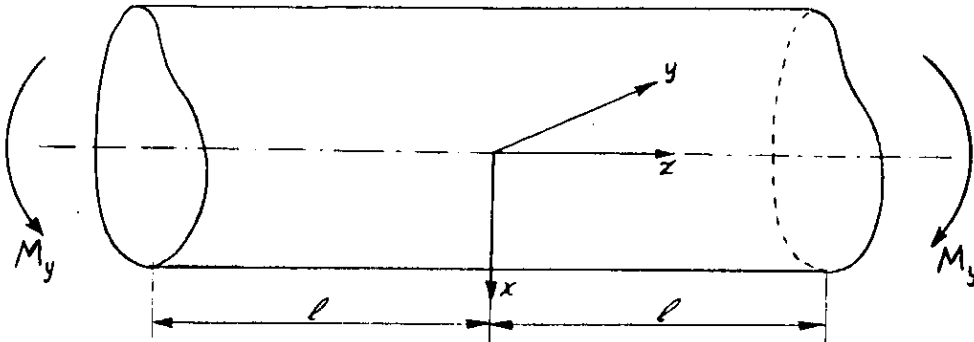


een prismatische staaf, welke in zijn einddoorsnede $z = l$ belast wordt door een gelijkmatig over de doorsnede verdeelde trekspanning: P/S , terwijl de doorsnede $z = 0$, zodanig is ingeklemd dat alle verplaatsingen van deze doorsnede nul zijn. Verder is de mantel spanningsvrij. Waarom is het niet-gerelaxeerde probleem veel moeilijker dan het gerelaxeerde? Teken voor beide problemen de staaf in de gedeformeerde toestand. Betekent het gegeven: de mantel is spanningsvrij, dat in een punt van de mantel alle spanningen nul zijn?

2. Geef de uitdrukking voor de elastische energie W voor een geval van een-assige rek.

2.3. Momentenbuiging van balken

We beschouwen een cilindrische staaf met doorsnede S en lengte $2l$, welke we in zijn einddoorsneden belasten door een buigend moment.



We nemen weer de x - en y -assen als centrale hoofdtraagheidsassen van de doorsneden en de z -as door de zwaartepunten van de doorsneden. We veronderstellen verder dat het buigend moment valt langs de y -as: M_y . Indien het moment niet valt langs een van de hoofdtraagheidsassen moeten we het moment ontbinden langs deze assen en de twee aldus ontstane problemen afzonderlijk oplossen. Op grond van de lineariteit mogen we dan deze twee oplossingen optellen (superponeren), hetgeen dan de totale oplossing oplevert.

Voor dit probleem is de cylindermantel spanningsvrij; de belasting moet dus afkomstig zijn van spanningen (t_{xz} , t_{yz} , t_{zz}) aangrijpend in de einddoorsneden. We beschouwen alleen het gerelaxeerde probleem, waarbij we aannemen dat in de einddoorsneden de schuifspanningen t_{xz} en t_{yz} nul zijn en dat de normaalspanning is voorgeschreven, dus:

$$(25) \quad t_{xz} = t_{yz} = 0, \quad t_{zz} = t_z^*(x, y), \quad \text{in de einddoorsneden.}$$

Deze spanningsverdeling moet echter zodanig zijn dat hij als enige doorsnedegrootheid het buigend moment M_y oplevert. Er moet dus gelden (Q_x, Q_y en M_z zijn triviaal nul)

$$(26) \quad N = \int_S t_z^*(x, y) dS = 0, \quad M_x = \int_S y t_z^*(x, y) dS = 0,$$

en

$$(27) \quad M_y = - \int_S x t_z^*(x, y) dS .$$

Een verdeling die aan (26) voldoet is:

$$(28) \quad t_z^*(x, y) = - \alpha x ,$$

immers

$$(29) \quad \int_S t_z^*(x, y) dS = -\alpha \int_S x dS = 0 ,$$

en

$$(30) \quad \int_S y t_z^*(x, y) dS = -\alpha \int_S xy dS = 0 ,$$

op grond van (2) en (4). Aan (27) is dan nog te voldoen door α zodanig te kiezen dat:

$$(31) \quad - \int_S x t_z^*(x, y) dS = \alpha \int_S x^2 dS = \alpha I_y = M_y ,$$

of

$$(32) \quad \alpha = \frac{M_y}{I_y} \Rightarrow t_z^* = - \frac{M_y}{I_y} x ,$$

waarin

$$(33) \quad I_y := \int_S x^2 dS (= J_{0yy}) .$$

We formuleren nu de randvoorwaarden voor het gerelaxeerde probleem van de momentenbuiging van een balk als volgt:

$$(34) \quad \begin{cases} t_{xz} = t_{yz} = 0 , & t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x , & \text{op } z = \pm l , \\ t_{ij} n_j = 0 , & \text{op de mantel, } (\underline{n} = (n_x, n_y, 0)) . \end{cases}$$

We proberen als oplossing (dus voor de hele balk)

$$(35) \quad t_{zz} = -\frac{M}{I_y} x, \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0.$$

Deze voldoet aan de randvoorwaarden en aan het evenwicht, aangezien de enige overblijvende evenwichtsvergelijking luidt:

$$(36) \quad t_{zz,z} = 0.$$

Uit de wet van Hooke volgt met (35)

$$(37) \quad e_{xx} = e_{yy} = \frac{\nu M}{EI_y} x, \quad e_{zz} = -\frac{M}{EI_y} x, \\ e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0.$$

We zien hieruit dat op de lijn gaande door de punten $(x,y) = (0,0)$ de rek $e_{zz} = 0$. We noemen deze lijn, die dus nóch langer nóch korter wordt, de neutrale lijn. Voor momentenbuiging valt de neutrale lijn dus samen met de lijn door de zwaartepunten: de z-as.

Bij meer gecompliceerde problemen (bijvoorbeeld rek-buiging) hoeft dit echter niet het geval te zijn.

De deformaties volgens (37) zijn lineaire functies van x en dus triviaal compatibel en leveren, afgezien van starre-lichaamsverplaatsingen, het verplaatsingsveld:

$$(38) \quad u = \frac{M}{2EI_y} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \\ v = \frac{\nu M}{EI_y} xy, \\ w = -\frac{M}{EI_y} xz.$$

Noemen we de verplaatsing in x-richting van de neutrale lijn: $u_0(z)$
dan volgt uit (38)¹

$$(39) \quad u_0(z) = u(0,0,z) = \frac{M_y}{2EI_y} z^2 ,$$

en dus

$$(40) \quad \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} = \frac{M_y}{EI_y} .$$

Nu geldt in een lineaire benadering tevens dat

$$(41) \quad \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} = \frac{1}{R}$$

waarin R de kromtestraal is (en $1/R$ de kromming).

Dus:

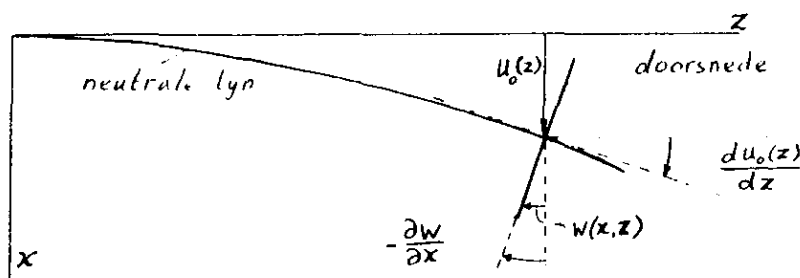
$$(42) \quad \frac{M_y}{EI_y} = \frac{1}{R} , \quad \text{of} \quad M_y = EI_y \cdot \frac{1}{R} ,$$

ofwel:

het buigend moment is evenredig met de kromming. De evenredigheidsconstante: EI_y heet de buigstijfheid.

De vergelijking (42) wordt de wet van Bernouilli genoemd en geldt binnen de lineaire elasticiteitstheorie exact voor de buiging door een moment.

Uit (38)³ zien we dat de verplaatsing w in z-richting voor een vaste doorsnede t.p.v. z evenredig is met x. Hieruit concluderen we dat vlakke doorsneden ($z = \text{constant}$) ook na de buiging vlak blijven.



Uit (38) volgt dat:

$$(43) \quad \frac{du_0(z)}{dz} = - \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M}{EI_y} z ,$$

waaruit we concluderen dat een doorsnede, welke voor de buiging loodrecht op de neutrale lijn stond, na de buiging nog steeds loodrecht op deze lijn staat. We zeggen: normale doorsneden blijven normaal.

Recapitulerend hebben we dus dat bij een momentenbuiging:

- i) vlakke doorsneden vlak blijven;
- ii) normale doorsneden normaal blijven;
- iii) de kromming evenredig is met het buigend moment.

Al deze resultaten gelden binnen de lineaire theorie exact.

Opmerkingen

- i) We hebben in het voorgaande gezien dat bij een buigend moment langs een hoofdtraagheidsas de neutrale lijn verplaatst loodrecht op dat moment (bijv. M_y geeft $u_0(z) \neq 0$, $v_0(z) = 0$). Indien het moment niet langs een hoofdtraagheidsas valt, moeten wij het ontbinden in een M_x - en een M_y -moment, welke aanleiding zullen geven tot verplaatsingen: $v_0(z)$ en $u_0(z)$ respectievelijk. Aangezien deze verplaatsingen evenredig zijn met de buigstijfheden in x- en y-richting resp., en omdat voor een willekeurige doorsnede deze stijfheden in x- en y-richting niet even groot hoeven te zijn, zal de resulterende verplaatsingsvector $\underline{u}_0(z) = (u_0(z), v_0(z))$ in het algemeen niet meer loodrecht op het buigend moment staan. We spreken dan van scheve buiging.
- ii) Technisch belangrijker dan de buiging door een moment is de buiging door een dwarskracht. Bij buiging door één dwarskracht gelden de hier boven genoemde resultaten i) en ii) niet meer exact (er treden dan schuifspanningen op welke aanleiding geven tot afschuiven van de doorsneden) maar resultaat iii) nog wel. Bij buiging door meer dan een dwarskracht of een verdeelde belasting geldt ook iii) niet meer exact. Voor slanke balken zijn de afwijkingen over het algemeen erg klein ($O(S/l^2)$) en de punten i), ii) en iii) worden dan ook in de technische mechanica als basishypothesen aangenomen.

Recapitulatie: Pure momentenbuiging:

Buiging door M_y :

$$t_{zz} = -\frac{M_y}{I_y} x, \quad t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = t_{xz} = t_{yz} = 0,$$

$$e_{xx} = e_{yy} = \frac{\nu M_y}{EI_y} x, \quad e_{zz} = -\frac{M_y}{EI_y} x, \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

$$u = \frac{M_y}{2EI_y} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2), \quad v = \frac{\nu M_y}{EI_y} xy, \quad w = -\frac{M_y}{EI_y} xz.$$

Verband moment-kromming:

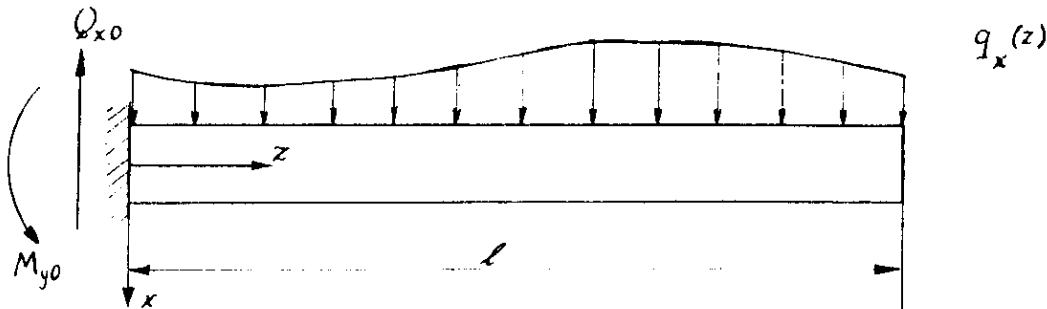
$$\frac{M_y}{EI_y} = \frac{1}{R} = u_0''(z).$$

Vragen

1. Beschouw een balk welke wordt gebogen door een moment om de y-as. Hoe wordt voor het gerelaxeerde probleem de spanningsverdeling over de doorsnede genomen? Bewijs dat voor deze spanningsverdeling de normaalkracht en het buigend moment om de x-as nul zijn.
2. Bepaal de elastische energie voor een balk onder zuivere momentenbuiging (neem $M = M_y$). Indien \underline{M} niet langs een hoofdtraagheidsas valt, hoe groot is dan W ?
3. Bij momentenbuiging is de mantel spanningsvrij.
Betekent dit dat in een punt van de mantel alle spanningen nul zijn?
4. Blijft bij momentenbuiging:
 - a) de vorm van de doorsnede onveranderd;
 - b) de doorsnede vlak;
 - c) de doorsnede loodrecht op de centrale lijn?
 - d) Bewijs Uw antwoorden op a), b) en c).

5. Leidt uitgaande van de spanningsverdeling m.b.v. de wet van Hooke het deformatieveld af. Waarom is dit deformatieveld triviaal compatibel? Leidt uit dit deformatieveld de verplaatsingen af, onder de conditie dat in het punt $(x,y,z) = (0,0,0)$ zowel de verplaatsingen als de hoekverdraaiingen nul zijn.
6. Hoe luidt de Bernoulli-hypothese? Geldt deze exact bij zuivere momentenbuiging?
-

2.4. Een-dimensionale buigingstheorie voor rechte balken (FACULTATIEF)

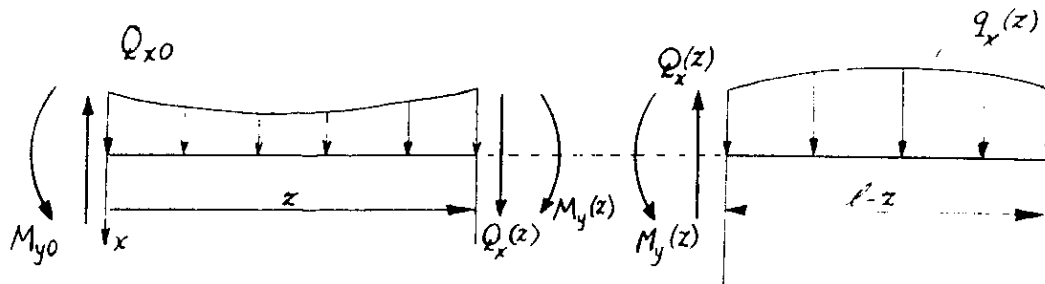


We beschouwen een balk welke in de x-richting wordt belast door een willekeurig verdeelde belasting per lengte-eenheid $q_x(z)$.

Klemmen we de balk in op $z = 0$ dan treden daar een reactiekracht en een reactiemoment op, welke volgen uit het totale evenwicht en gelijk zijn aan:

$$(44) \quad Q_{x0} = \int_0^l q_x(z) dz, \quad M_{y0} = \int_0^l z q_x(z) dz.$$

We maken een snede ter plaatse z :



Uit het evenwicht van het $(\ell - z)$ -stuk volgt voor de doorsnedegrootheden op z :

$$(45) \quad \begin{aligned} Q_x(z) &= \int_z^\ell q_x(\zeta) d\zeta, \\ M_y(z) &= \int_z^\ell (\zeta - z) q_x(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Door deze relaties naar z te differentiëren krijgen we de globale evenwichtsvergelijkingen:

$$(46) \quad \frac{dQ_x(z)}{dz} = -q_x(z),$$

$$(47) \quad \frac{dM_y(z)}{dz} = -Q_x(z),$$

en, na substitutie van (47) in (46):

$$(48) \quad \frac{d^2 M_y(z)}{dz^2} = q_x(z).$$

Uit voorgaande afleiding blijkt dat deze evenwichtsvergelijkingen exact gelden.

We kunnen deze vergelijkingen ook afleiden uit de lokale evenwichtsvergelijkingen tezamen met de randvoorwaarden op de cylindermantel. We veronderstellen hierbij dat de belasting $q_x(z)$ afkomstig is van een volumekracht f_x en dat de mantel spanningsvrij is:

$$(49) \quad t_{ij} n_j = 0, \quad (\underline{n} = (n_x, n_y, 0)), \quad \text{op } R,$$

waaronder R de rand van de doorsnede is.

We starten met de eerste evenwichtsvergelijking en de eerste randvoorwaarde, welke uitgeschreven luiden:

$$(50) \quad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 ,$$

en

$$(51) \quad t_{xx} n_x + t_{xy} n_y = 0 , \quad \text{op } R .$$

We integreren (50) over de doorsnede, hetgeen met de stelling van Gauss (2-dimensionaal) en met (8) en (51) leidt tot

$$\begin{aligned} & \int_S \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} \right) dS + \int_S \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} dS + \int_S f_x dS = \\ & = \int_R (t_{xx} n_x + t_{xy} n_y) ds + \frac{dQ_x(z)}{dz} + q_x(z) = \\ (52) \quad & = \frac{dQ_x(z)}{dz} + q_x(z) = 0 , \end{aligned}$$

waarin $q_x(z)$ is gedefinieerd als

$$(53) \quad q_x(z) = \int_S f_x dS .$$

Opmerking: Indien de belasting niet als volumekracht aangrijpt, maar aan de mantel, gaat bovenstaande afleiding analoog, alleen moet dan het rechterlid van (51) ongelijk aan nul genomen worden. De verdeelde belasting komt dan van de integraal langs de rand R van dit rechterlid. De vergelijking (47) kan worden afgeleid uit de derde evenwichtsvergelijking met randvoorwaarde:

$$(54) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0 ,$$

en

$$(55) \quad t_{zx} n_x + t_{zy} n_y = 0 , \quad \text{op } R .$$

We vermenigvuldigen (54) met x en integreren over S , hetgeen met (8) en (10) leidt tot:

$$\begin{aligned}
 & \int_S \left[x \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + x \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + x \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \right] dS = \\
 & = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (x t_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (x t_{yz}) \right] dS - \int_S t_{xz} dS + \frac{d}{dz} \int_S x t_{zz} dS = \\
 & = \int_R x (t_{xz} n_x + t_{yz} n_y) ds - Q_x(z) - \frac{dM_y(z)}{dz} = \\
 (56) \quad & = - Q_x(z) - \frac{dM_y(z)}{dz} = 0 .
 \end{aligned}$$

Op deze wijze hebben we dus de globale evenwichtsvergelijkingen afgeleid door integratie over de doorsnede van de locale vergelijkingen. Hiermee zijn de drie-dimensionale evenwichtsvergelijkingen teruggebracht tot een stelsel een-dimensionale vergelijkingen (twee vergelijkingen voor twee onbekenden, bijv. Q_x en M_y). Ofschoon deze vergelijkingen op zich voldoende zijn om de buigende momenten en de dwarskrachten te bepalen: de een-dimensionale balkentheorie is statisch bepaald, kunnen we hieruit geen conclusies trekken omtrent de deformaties van de balk.

Om deze te bepalen, nemen we aan dat de in de vorige paragraaf afgeleide resultaten voor de momentenbuiging (d.i. de punten i), ii), en iii) op pagina 23) ook hier geldig zijn; en meer speciaal dat voor de uitbuiging $u_0(z)$ van de neutrale lijn geldt:

$$(57) \quad \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} = \frac{M_y(z)}{EI_y} ,$$

de Bernouilli-hypothese.

Hiermee, en met (47), verkrijgen we de volgende constitutieve vergelijkingen voor het buigend moment en de dwarskracht: (voor constante EI_y)

$$(58) \quad M_y(z) = EI_y \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} ; \quad Q_x(z) = - EI_y \frac{d^3 u_0(z)}{dz^3} ,$$

terwijl (48) leidt tot

$$(59) \quad \frac{d^4 u_0(z)}{dz^4} = \frac{q_x(z)}{EI_y} .$$

Deze laatste vergelijking wordt de balkenvergelijking genoemd. Om deze vergelijking te kunnen oplossen, hebben we nog vier randvoorwaarden nodig. Hiertoe moeten we op twee verschillende punten van de balk (bijv. $z = 0$ en $z = l$) telkens twee van de volgende vier grootheden voorschrijven:

- i) de verplaatsing u_0 ,
- ii) de hoekverdraaiing $\frac{du_0}{dz}$,
- iii) het buigend moment; dit komt overeen met $\frac{d^2 u_0}{dz^2}$ voorgeschreven,
- iv) de dwarskracht; komt overeen met $\frac{d^3 u_0}{dz^3}$.

Voor het aangeven van de randvoorwaarden wordt de volgende symboliek gebruikt:

$$(60) \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \text{---} \quad \text{ingeklemd: } u_0 = \frac{du_0}{dz} = 0 .$$

$$(61) \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ | \end{array} \text{---} \quad \text{opgelegd: } u_0 = M = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0 .$$

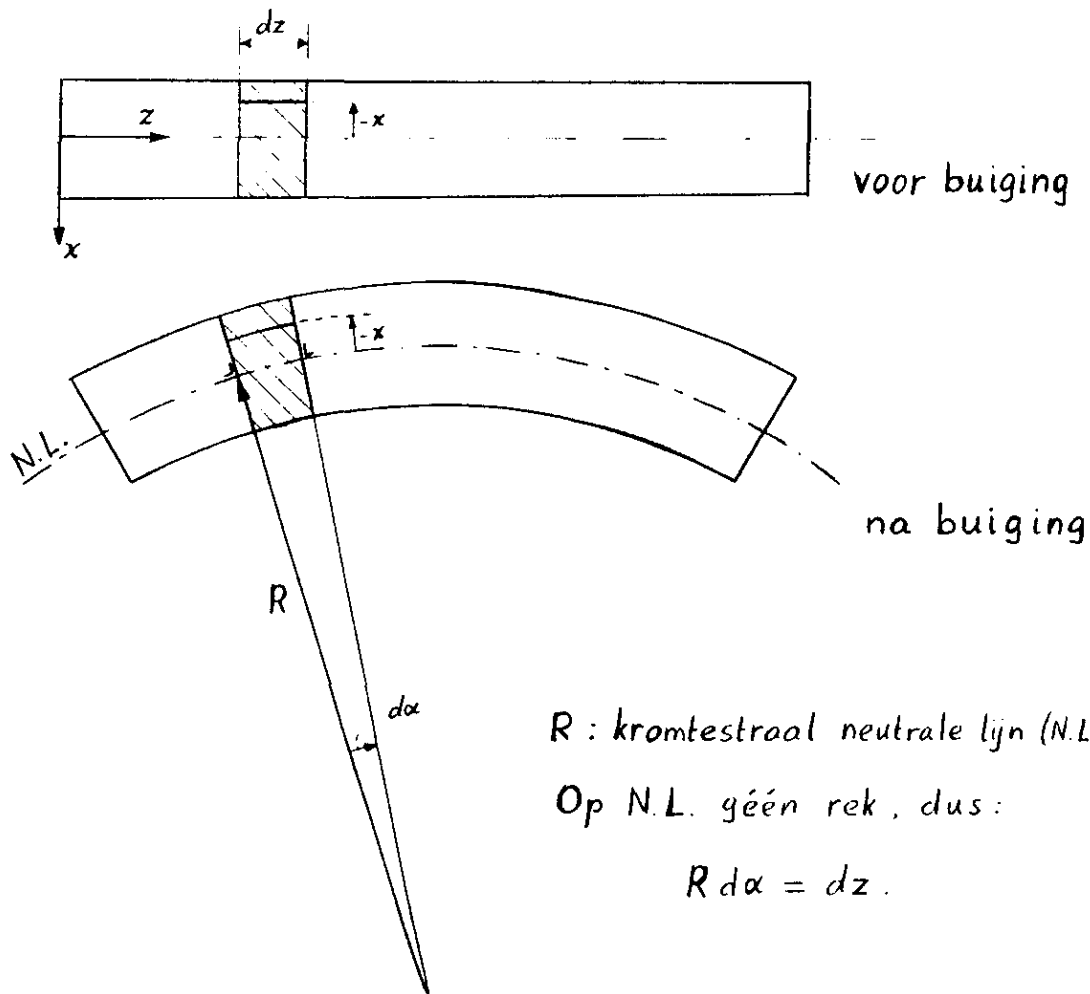
$$(62) \quad \text{---} \quad \text{vrij: } M = Q = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{d^3 u_0}{dz^3} = 0 .$$

In het bovenstaande is aangetoond, dat het buigend moment en de dwarskracht evenredig zijn met de tweede resp. de derde afgeleide van de doorbuiging $u_0(z)$. Dit betekent dus dat er bij discontinuïteiten in de momenten- en/of dwarskrachtenlijn (bijv. bij puntmomenten of -krachten) ook sprongen in de tweede of derde afgeleide van $u_0(z)$ zullen optreden. De balkenvergelijking (59) geldt in dat geval dus slechts stuksgewijs, d.w.z. alleen

in de trajecten tussen twee discontinuïteiten. In deze discontinuïteitspunten moeten dan aansluit- en sprongcondities worden geformuleerd om de doorzakking over de gehele balk te kunnen berekenen.

Opmerkingen:

- i) De globale evenwichtsvergelijkingen (46) en (47) kunnen ook worden afgeleid door het evenwicht van een stukje dz van de balk te bekijken. Voor de details van deze afleiding verwijzen we naar Fysica 20.
- ii) De constitutieve vergelijking (57) is hier gepostuleerd. We willen laten zien dat deze overeenkomt met de aanname dat normale, vlakke doorsneden bij buiging normaal en vlak blijven.



Als normale vlakke doorsneden normaal en vlak blijven, geldt voor de rek van een vezel t.p.v.: $-x$:

$$(63) \quad e_{zz} = \frac{(R - x)d\alpha - dz}{dz} = \frac{(R - x)d\alpha - R d\alpha}{R d\alpha} = -\frac{x}{R}.$$

Verwaarlozen we de spanningen t_{xx} en t_{yy} dan geeft Hooke:

$$(64) \quad t_{zz} = E e_{zz} = -\frac{E x}{R},$$

en hieruit volgt:

$$(65) \quad M_y = - \int_S x t_{zz} dS = \frac{E}{R} \int_S x^2 dS = \frac{EI}{R} y,$$

de Bernouilli-hypothese. Aangezien echter voor buiging door een willekeurig verdeelde belasting het uitgangspunt dat normale, vlakke doorsneden normaal en vlak blijven niet meer exact opgaat, geldt ook relatie (65) niet exact. De afwijkingen zijn echter voor slanke balken in het algemeen erg klein ($O(S/l^2)$).

Recapitulatie: Een-dimensionale buigingstheorie.

Buiging in x - z -vlak:

Evenwichtsvergelijkingen:

$$\frac{dQ_x(z)}{dz} = -q_x(z); \quad \frac{dM_y(z)}{dz} = -Q_x(z); \quad \left(\frac{d^2 M_y(z)}{dz^2} = q_x(z) \right),$$

Constitutieve vergelijking:

$$\frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} = \frac{M_y(z)}{EI_y}.$$

Balkvergelijking:

$$\frac{d^4 u_0(z)}{dz^4} = \frac{q_x(z)}{EI_y}.$$

Randvoorwaarden:

ingeklemd : $u_0 = \frac{du_0}{dz} = 0$,

opgelegd : $u_0 = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0$,

vrij : $\frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{d^3 u_0}{dz^3} = 0$.

Vragen

1. Wat is de basishypothese van de technische balkentheorie?
2. Welke van de volgende vergelijkingen gelden exact en welke niet:

$$Q'_x(z) = -q(z) ; \quad M'_y(z) = Q_x(z) ; \quad M_y(z) = EIu''_0(z) ?$$

Wat is de grootte-orde van de fout? Voor welke soort balken geldt de technische balkentheorie dus en voor welke niet?

3. Leidt de globale evenwichtsvergelijkingen voor buiging in het y-z-vlak t.g.v. een verdeelde belasting $q_y(z)$ af uit:
 - a) de locale evenwichtsvergelijkingen;
 - b) de snedegrootheden.

Let op de tekens!

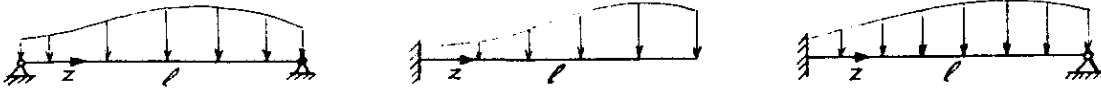
4. Geef de definitie en voorbeelden van een statisch bepaalde en een statisch onbepaalde balk. Hoe is een statisch onbepaalde reactiekracht te bepalen?
5. Hoe luidt de een-dimensionale balkenvergelijking?
Geef de algemene oplossing van deze vergelijking voor:

$$q(z) = 0 , \quad q(z) = q(= \text{constant}) .$$

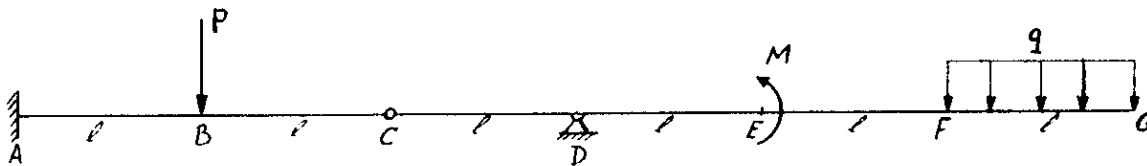
Bewijs dat de algemene oplossing kan worden geschreven als

$$u(z) = u(0) + u'(0)z + \frac{1}{2}u''(0)z^2 + \frac{1}{6}u'''(0)z^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^z (z-\zeta)^3 q(\zeta) d\zeta .$$

6. Formuleer de randvoorwaarden in $z = 0$ en $z = l$ voor:

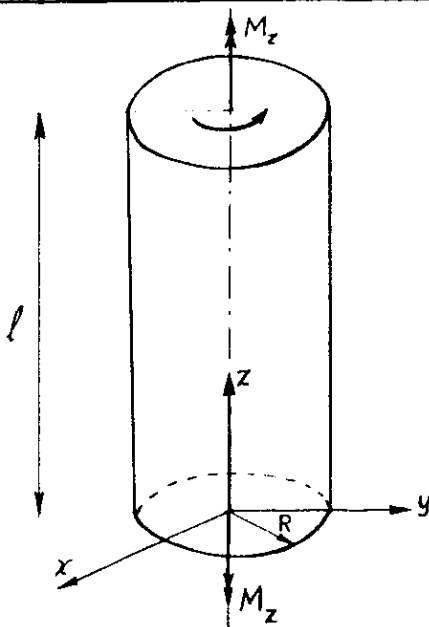


7. Beschouw:



Geef precies aan voor welke trajecten de een-dimensionale buigingsvergelijking geldt. Treden er in de punten B t/m F discontinuïteiten in de doorbuiging $u(z)$ of zijn afgeleiden op en, zo ja, welke. Formuleer de sprongcondities in deze punten in termen van $u(z)$ en zijn eerste drie afgeleiden.

2.5. Torsie van een cirkelcilinder



We beschouwen een cilindrische staaf, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, straal R , welke in zijn einddoorsneden wordt belast door een wringend moment M_z . We kiezen een x - y - z -stelsel met de z -as langs de cylinderas en de x - en y -as in het vlak van de doorsnede.

Ten gevolge van het wringende moment M_z zullen de doorsneden van de staaf t.o.v. elkaar verdraaien om de z -as. We houden de doorsnede

$z = 0$ op zijn plaats en nemen aan dat de doorsnede z verdraait over een hoek $\theta(z)$. (Aangezien we ons beperken tot lineaire theorieën zullen we aannemen dat $|\theta(z)| \ll 1$).

We zullen hier alleen het gerelaxeerde probleem oplossen (we komen daar later op terug).

We gaan uit van de volgende aannamen voor het verplaatsingsveld, (waarmee aan alle elasticiteitsvergelijkingen én randvoorwaarden kan worden voldaan, zodat deze keuze dus correct is)

$$(66) \quad \theta(z) = \alpha z ,$$

waarin α de hoekverdraaiing per lengte-eenheid is, én

$$(67) \quad \begin{aligned} u &= -\alpha z y , \\ v &= \alpha z x , \\ w &= 0 . \end{aligned}$$

Dit verplaatsingsveld stelt een starre rotatie van de z -doorsnede over een hoek αz voor. Zoals we in de volgende paragraaf zullen zien gaat de keuze: $w = 0$ voor elke andere dan de cirkelvormige doorsnede niet meer op. Uit (67) volgen de deformaties

$$(68) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0 , \\ e_{xz} &= -\frac{1}{2} \alpha y , \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \alpha x , \end{aligned}$$

waaruit we dan met de wet van Hooke de spanningen:

$$(69) \quad \begin{aligned} t_{xx} &= t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 , \\ t_{xz} &= -G \alpha y , \quad t_{yz} = G \alpha x , \end{aligned}$$

krijgen, welke spanningen, zoals zeer eenvoudig is in te zien, aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen.

We moeten dan nog aan twee voorwaarden voldoen:

i) De schuifspanningen moeten het moment M_z opleveren:

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = G\alpha \int_S (x^2 + y^2) dS = \\
 (70) \quad &= G\alpha \int_S r^2 dS = G\alpha I_p,
 \end{aligned}$$

met

$$(71) \quad I_p = \int_S r^2 dS = \int_{r=0}^R r^2 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} R^4:$$

het polaire oppervlaktetraagheidsmoment.

Bij gegeven M_z volgt α dus uit:

$$(72) \quad \alpha = \frac{M_z}{GI_p}.$$

ii) De randvoorwaarden op de mantel. De mantel is spanningsvrij, d.w.z. de spanningsvector op een willekeurig oppervlakte-element van de mantel is nul:

$$(73) \quad t_{ij} n_j = t_i^{(n)} = 0, \quad \text{op } r = R.$$

Voor een zuiver cilindrische staaf staat de normaalvector \underline{n} op de mantel loodrecht op de z-as, dus

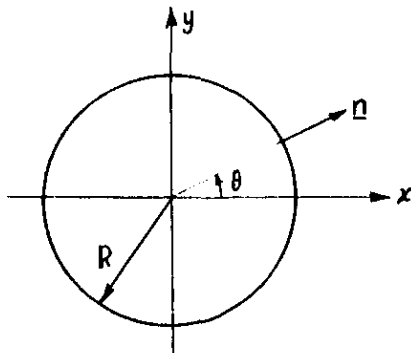
$$(74) \quad n_z = 0, \quad \text{of } \underline{n} = (n_x, n_y, 0),$$

waarmee (73) uitgeschreven wordt:

$$\begin{aligned}
 t_{xx} n_x + t_{xy} n_y &= 0, \\
 (75) \quad t_{yx} n_x + t_{yy} n_y &= 0, \\
 t_{zx} n_x + t_{zy} n_y &= 0, \quad \text{op } r = R.
 \end{aligned}$$

Met het spanningsveld (69) is aan de eerste twee randvoorwaarden triviaal voldaan, terwijl de laatste geeft:

$$(76) \quad G\alpha(-y n_x + x n_y) = 0, \quad \text{op } r = R.$$



We geven een punt op de mantel aan met:

$$(77) \quad x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta,$$

en de normaal \underline{n} door:

$$(78) \quad n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta,$$

waarmee (76) overgaat in:

$$(79) \quad G\alpha(-R \sin \theta \cos \theta + R \cos \theta \sin \theta) = 0.$$

zodat dus ook aan de randvoorwaarde op de mantel voldaan is.

Merk op dat: "de mantel is spanningsvrij" niet wil zeggen dat in een punt van de mantel alle spanningen nul zijn. Immers, definiëren we

$$\tau = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2},$$

dan volgt uit (69) dat

$$(80) \quad \tau = G\alpha r,$$

en zien we dat de maximale schuifspanning

$$(81) \quad \tau_{\max} = G\alpha r,$$

optreedt aan de rand R. Deze spanning werkt echter niet op een oppervlakte-element van de mantel maar op een vlakje loodrecht op de mantel.

Met (72) gaat (81) over in:

$$(82) \quad \tau_{\max} = \frac{RM_z}{I_p} = \frac{2M_z}{\pi R^3}.$$

Opmerking:

We hebben tot nu toe nog niet gesproken over de verdeling van het moment M_z over de einddoorsneden. Het zal duidelijk zijn dat de spanningsverdeling (69) alleen dan de goede spanningsverdeling is, indien de spanningen ook in de einddoorsneden op deze wijze verdeeld zijn. We noemen de spanningen dan "goed verdeeld", en spreken van het gerelaxeerde probleem.

Indien het moment niet-goed verdeeld is, is het verschil tussen dit probleem en het gerelaxeerde een zogenaamd nulprobleem. De oplossing

van dit probleem dempt volgens de Saint-Venant snel uit op enige afstand van de einddoorsneden. De hierboven beschreven gerelaxeerde oplossing kan dus worden opgevat als de asymptotiek van de echte oplossing op een afstand van enkele malen de straal R van de einddoorsneden.

Recapitulatie: Torsie cirkelcylinder.

$$u = -azy, \quad v = \alpha z x, \quad w = 0,$$

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0, \quad t_{xz} = -G\alpha y, \quad t_{yz} = G\alpha x,$$

$$\alpha = \frac{2M_z}{\pi G R^4}.$$

Vragen

1. Waarom is de oplossing gebaseerd op de veronderstelling:

$$u = -\alpha z y, \quad v = \alpha z x, \quad w = 0,$$

de enige juiste oplossing van het (gerelaxeerde) probleem van de torsie van een cirkelcylinder?

Laat zien dat bovenstaande verplaatsingsveld een starre rotatie van de doorsnede om zijn middelpunt voorstelt. Van welke belangrijke, veronderstelling is hierbij dan uitgegaan?

2. Aan de rand van de cirkelvormige doorsnede zijn t_{xz} en t_{yz} ongelijk aan nul. Hoe is dit te rijmen met de eis dat de mantel spanningsvrij moet zijn?

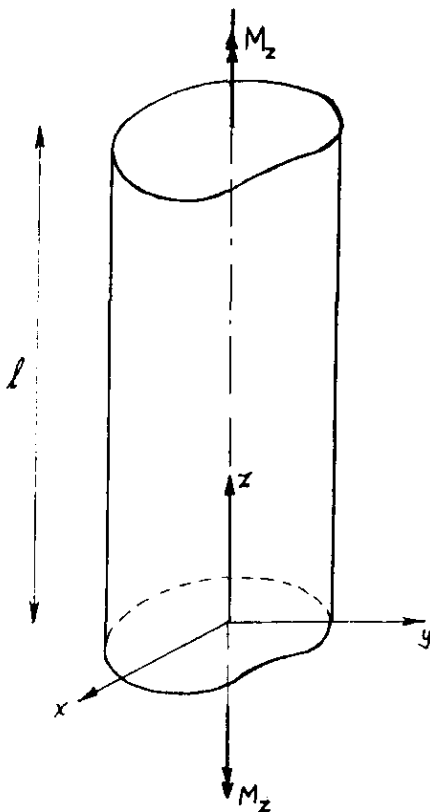
3. Stel dat we i.p.v. $\theta = \alpha z$, uit zouden gaan van:

$$\theta = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2.$$

Waaruit volgt dan dat $\alpha_2 = 0$ moet zijn?

4. Construeer een "niet-goed verdeelde" schuifspanning, welke statisch equivalent is met een wringend moment M_z . Waarom is dit probleem veel moeilijker dan het gerelaxeerde probleem.
5. Waarom zal het gerelaxeerde probleem van de torsie van een slanke staaf een goede benadering geven voor de torsiestijfheid van die staaf?
6. Waarom is het probleem van de torsie van een staaf met veranderlijke cirkelvormige doorsneden zoveel moeilijker dan dat van de torsie van een cirkelcylinder?

2.6. Torsie van een cylinder met willekeurige doorsnede



We beschouwen weer een cylinder met lengte l , maar nu met willekeurige doorsnede, welke in de einddoorsneden wordt belast door een wringend moment M_z . De mantel van de cylinder is onbelast en verder kunnen de punten van de einddoorsneden vrij verplaatsen in axiale richting (de welving van de einddoorsneden is niet verhinderd). Het x - y - z -stelsel kiezen we op de gebruikelijke wijze langs de centrale hoofdtraagheidsassen. We proberen als oplossing van het gerelaxeerde probleem de spanningsverdeling:

$$\begin{aligned}
 & t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0, \\
 & (83) \quad t_{xz} \neq 0, \quad t_{yz} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Uit de evenwichtsvergelijkingen in x - en y -richting volgt dan dat

$$(84) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 ,$$

of

$$(85) \quad t_{xz} = t_{xz}(x,y) \quad \text{en} \quad t_{yz} = t_{yz}(x,y) ,$$

terwijl de derde evenwichtsvergelijking geeft:

$$(86) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 .$$

Aan deze vergelijking is te voldoen door invoering van de spanningsfunctie $F(x,y)$:

$$(87) \quad t_{xz} = G \frac{\partial F}{\partial y} , \quad t_{yz} = -G \frac{\partial F}{\partial x} .$$

Met Hooke kunnen we nu ook de deformaties uitdrukken in $F(x,y)$. We krijgen dan:

$$(88) \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0 ,$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} , \quad e_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} .$$

Deze deformaties zijn niet triviaal compatibel. In feite zal uit de compatibiliteitsvergelijkingen de nog onthbrekende vergelijking voor $F(x,y)$ volgen.

We beschouwen eerst de vergelijking (zie (7), H.1.)

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right] ,$$

wat met (88) leidt tot

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] ,$$

of

$$(89) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\Delta F) = 0 , \quad (\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}) .$$

Op analoge wijze volgt uit de compatibiliteitsvergelijking, welke we uit de bovenstaande verkrijgen door de cyclische verwisseling:
 $x, y, z \rightarrow y, z, x$ de relatie

$$(90) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\Delta F) = 0 .$$

Alle overige compatibiliteitsvergelijkingen zijn met (88) identiek voldaan (ga dit zelf na).

Uit (89) en (90) volgt de vergelijking voor $F(x, y)$:

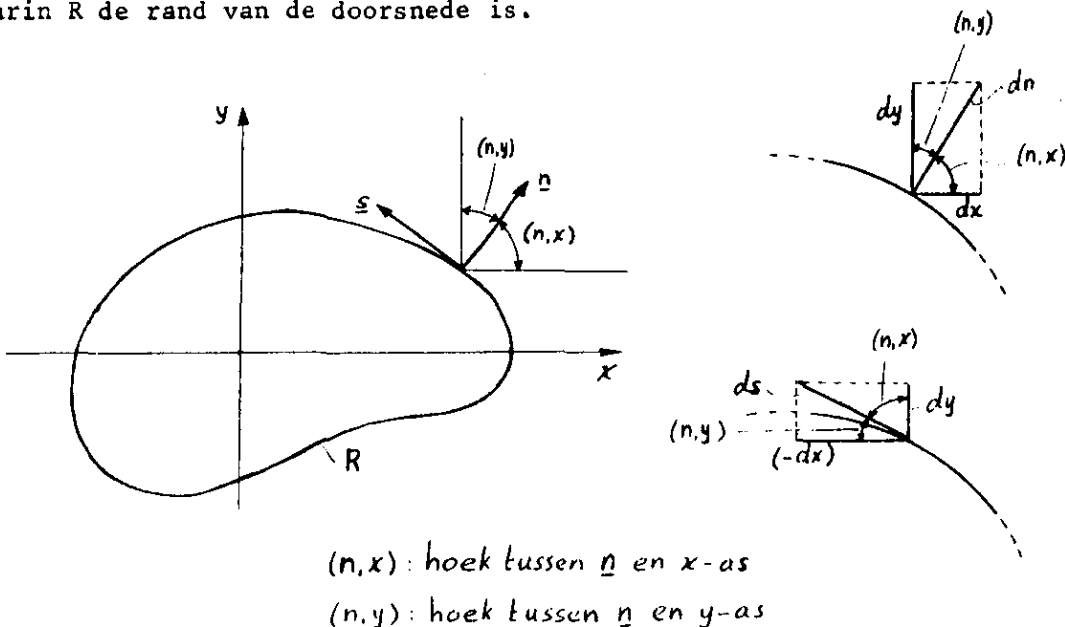
$$(91) \quad \Delta F = C .$$

De in (91) voorkomende constante C is nog een onbekende van het probleem. Hij volgt uit de eis dat de schuifspanningen het wringend moment M_z moeten opleveren. Alvorens dit echter uit te werken, gaan we eerst kijken naar de randvoorwaarden op de mantel.

De voorwaarde dat de mantel spanningsvrij is, levert op analoge wijze als in de vorige paragraaf de randvoorwaarde:

$$(92) \quad t_{xz} n_x + t_{yz} n_y = 0 , \quad \text{op } R ,$$

waarin R de rand van de doorsnede is.



Voor een verdere uitwerking van de randvoorwaarde (92) hebben we de volgende relaties, welke volgen uit bovenstaande figuur, nodig:

$$(93) \quad n_x = \cos(n, x) = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$n_y = \cos(n, y) = \frac{\partial y}{\partial n} = - \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Met (87) en (93) gaat (92) over in

$$G \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - G \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \left(- \frac{\partial x}{\partial s}\right) = G \frac{\partial F}{\partial s} = 0,$$

of:

$$(94) \quad F = \text{constant langs } R.$$

F komt in het voorgaande alleen als afgeleide voor; we mogen daarom de constante in (94) gelijk aan nul nemen. Dit gaat echter alleen op voor enkelvoudig samenhangende doorsneden. Bij meervoudig samenhangende doorsneden krijgen we meerdere, gescheiden randen en daardoor meerdere constanten. We kunnen dan slechts één van deze constanten gelijk aan nul kiezen.

Dus, voor enkelvoudig samenhangende doorsneden, waartoe we ons verder zullen beperken, geldt

$$(95) \quad F = 0, \quad \text{op } R.$$

Dit is de bij de differentiaalvergelijking (91) behorende randvoorwaarde.

We moeten nu nog de constante C bepalen. We hebben:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = -G \int_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dS = \\ &= -G \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (xF) + \frac{\partial}{\partial y} (yF) \right] dS + 2G \int_S F dS, \end{aligned}$$

hetgeen met de stelling van Gauss, in twee dimensies, en met (95) leidt tot:

$$(96) \quad M_z = -G \int_R [x n_x + y n_y] ds + 2G \int_S F dS = 2G \int_S F dS ,$$

want $F = 0$ op R volgens (95) .

Door $F(x,y)$ te vervangen door $\tilde{F}(x,y)$ d.m.v.

$$(97) \quad F(x,y) = C\tilde{F}(x,y) , \quad \text{of} \quad \tilde{F}(x,y) = \frac{F(x,y)}{C} ,$$

gaan (91) en (95) over in

$$\Delta \tilde{F} = 1 ,$$

en

$$(98) \quad \tilde{F} = 0 , \quad \text{op } R ,$$

waaruit $\tilde{F}(x,y)$ op eenduidige wijze te bepalen is. De constante C volgt dan uit (96):

$$(99) \quad C = \frac{M_z}{2G \int_S \tilde{F} dS} .$$

Als aan (91) voldaan is, kunnen we uit (88) de verplaatsingen bepalen.

We hebben:

$$(100) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} , \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial x} . \end{aligned}$$

Uit de 3^o vergelijking volgt

$$(101) \quad w = w(x,y) ,$$

en daarmee, aangezien ook $F = F(x,y)$, uit de laatste twee vergelijkingen dat u en v hooguit lineair van z kunnen afhangen. Nemen we u en v gelijk aan nul op $z = 0$, dan moet op grond van de eerste en tweede vergelijking van (100) gelden:

$$(102) \quad u = f(y)z, \quad v = g(x)z.$$

Substitutie van (102) in de vierde vergelijking van (100) geeft

$$(103) \quad \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0,$$

waaruit volgt:

$$(104) \quad f(y) = -\alpha y + c_1, \quad g(x) = \alpha x + c_2, \quad (\alpha, c_1, c_2: \text{constanten})$$

hetgeen, afgezien van starre-lichaamsverplaatsingen (we houden de z-as op zijn plaats) leidt tot verplaatsingen:

$$(105) \quad u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz.$$

Hieruit blijkt dat α de draaiing van de doorsnede om de z-as per lengte-eenheid is.

Opmerking: Indien c_1 en c_2 wel zouden worden meegenomen, leidt dit tot twee extra termen in w , namelijk:

$$-c_1 x - c_2 y;$$

we zien hieruit dat c_1 en c_2 een starre lichaamsrotatie om de y-as resp. de x-as voorstellen (Ga dit zelf na).

Uit (105) volgt dat

$$(106) \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Hiermee kunnen we het verband tussen α en C bepalen. Door de vijfde vergelijking van (100) naar y en de zesde naar x te differentiëren en van elkaar af te trekken krijgen we:

$$(107) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Delta F = C.$$

Vergelijken van (107) met (106) geeft:

$$(108) \quad C = -2\alpha.$$

Met (97), (108) en (87) vinden we t_{xz} en t_{yz} als functie van $F(x,y)$:

$$(109) \quad t_{xz} = -2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}, \quad t_{yz} = 2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}.$$

Bovendien volgt uit (99) het verband tussen α en M_z :

$$(110) \quad \alpha = - \frac{M_z}{4G \int_S \tilde{F} dS} =: \frac{M_z}{D},$$

waarin $D := M_z/\alpha$ de torsiestijfheid genoemd wordt. Deze is dus te bepalen uit

$$(111) \quad D = - 4G \int_S \tilde{F} dS.$$

Blijft nog over te bepalen de welving $w = w(x,y)$. Differentiëren we de vijfde vergelijking van (100) naar x en de zesde naar y en tellen we deze bij elkaar op dan krijgen we m.b.v. (105):

$$(112) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w = 0.$$

Het is gebruikelijk om w te normeren op α ; d.w.z. we voeren in een functie $\phi(x,y)$ door

$$(113) \quad w(x,y) = \alpha \phi(x,y),$$

waarvoor dan ook geldt:

$$(114) \quad \Delta \phi = 0.$$

De randvoorwaarde voor ϕ vinden we weer uit (92). Hiertoe drukken we eerst de spanningen t_{xz} en t_{yz} m.b.v. de wet van Hooke en met (105) en (113) uit in ϕ . We krijgen dan:

$$(115) \quad t_{xz} = G\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right); \quad t_{yz} = G\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right).$$

Hiermee gaat (92) over in

$$(116) \quad G\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right)n_x + G\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right)n_y = 0, \quad \text{op } R,$$

of met (93)

$$(117) \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = y n_x - x n_y, \quad \text{op } R,$$

waarin het rechterlid een, bekende, functie van de vorm van de doorsnede is. De functie $\phi(x,y)$ moet dus in het inwendige van de doorsnede voldoen aan de potentiaalvergelijking, terwijl op de rand de normale afgeleide is voorgeschreven. Een dergelijk probleem heet een Neumann-probleem. Voor het torsie-probleem heeft dit stelsel altijd een oplossing en deze oplossing is eenduidig op een, irrelevante, constante na. Voor een cirkelvormige doorsnede is het rechterlid van (117) gelijk aan nul (zie (77) - (79)). We krijgen dan dat

$$(118) \quad \Delta\phi = 0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \text{op } R,$$

welke als oplossing heeft, afgezien van een arbitraire constante,

$$(119) \quad \phi = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Bij een cirkelcylinder treedt dus inderdaad geen welving van de doorsneden op. Dit is tevens de enige doorsnede-vorm waarvoor dit het geval is.

Voorbeeld: Ellipsvormige doorsnede.

Als voorbeeld bekijken we de torsie van een cylinder met een ellipsvormige doorsnede, waarvan de rand wordt gegeven door

$$(120) \quad R: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Een functie $\tilde{F}(x,y)$ welke nul is op R is

$$(121) \quad \tilde{F}(x,y) = \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Hiermee is tevens voor een bepaalde keuze van λ te voldoen aan (98)¹.

Immers

$$\Delta \tilde{F} = \lambda \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = 1 ,$$

mits

$$\lambda = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} ,$$

of

$$(122) \quad \tilde{F}(x,y) = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) .$$

Voor de torsiestijfheid D krijgen we met (111)

$$D = - \frac{2Ga^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \int_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) ds$$

(stel: $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$(123) \quad D = \frac{\pi Ga^3 b^3}{(a^2 + b^2)} .$$

De hoekverdraaiing per lengte-eenheid vinden we dan uit

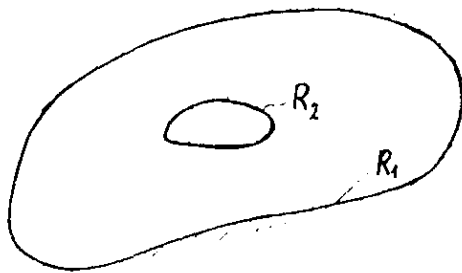
$$(124) \quad \alpha = \frac{M_z}{D} = \frac{(a^2 + b^2) M_z}{\pi Ga^3 b^3} .$$

Door $a = b = R$ te nemen, krijgen we weer de resultaten van § 2.5 voor de cirkelcylinder.

Opmerkingen

- 1) In de technische mechanica is het gebruikelijk om de torsiestijfheid D gelijk te nemen aan GI_p . Voor doorsneden waarvan de vorm nogal sterk verschilt van een cirkel kunnen hierbij echter behoorlijke afwijkingen optreden. Door de I_p 's te nemen behorende bij de grootste binnen de doorsnede passende cirkel en de kleinste de hele doorsnede omvattende cirkel kunnen we echter wel onder- en bovengrenzen voor de torsiestijfheid aangeven.

ii) De zakking van een vlak membraan, waarvan de rand is ingeklemd en dat belast wordt door een constante druk, voldoet aan dezelfde vergelijkingen als $F(x,y)$. Dus een membraan van dezelfde vorm als de doorsnede van de torsiestaaf onder beschouwing en belast door een constante druk, heeft een zakking welke evenredig is met F . Bovendien is het zo dat (zie (96)) het wringend moment M_z (en ook D) evenredig zijn met het doorgezakte volume. Dit heet het: membraan-analogon. We kunnen dat gebruiken om de na (94) gemaakte opmerking over meervoudig samenhangende doorsneden te illustreren. Neem als voorbeeld een tweevoudig samenhangende doorsnede (zie figuur). We krijgen dan het analogon van het torsieprobleem, indien we de



buitenrand R_1 inklemmen en de binnenrand R_2 vastmaken aan een vrij, vlak, star plaatje. Belasten we nu dit membraan, dan zien we dat de zakking van R_1 nul is (wat overeenkomt met $F = 0$, op R_1),

maar de zakking van R_2 weliswaar constant maar ongelijk aan nul is.

Recapitulatie: Torsie

Spanningen:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0 ,$$

$$t_{xz} = -2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} ; \quad t_{yz} = 2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} .$$

met $\tilde{F}(x,y)$ uit: $\Delta \tilde{F} = 1$; $\tilde{F} = 0$, op R .

Hoekverdraaiing per lengte-eenheid en torsiestijfheid:

$$\alpha = \frac{M}{D} , \quad \text{met } D = -4G \int_S \tilde{F} dS .$$

Verplaatsingen:

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha zx, \quad w = \alpha \phi(x, y),$$

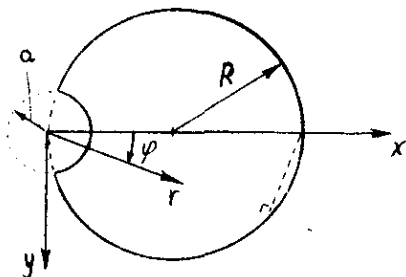
met $\phi(x, y)$ uit: $\Delta \phi = 0$; $\frac{\partial \phi}{\partial n} = y n_x - x n_y$, op R .

Verband $\tilde{F}(x, y)$ en $\phi(x, y)$ (uit (109) en (115))

$$(126) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = y - 2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x + 2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}.$$

Voorbeeld

We beschouwen de torsie van een cylinder met een cirkelvormige doorsnede waarin een cirkelvormige inkeping is aangebracht (zie figuur). De straal van de grote cirkel is R en van de kleine cirkel, waarvan het middelpunt op de omtrek van de grote cirkel ligt, is de straal a . We kiezen een x - y -stelsel in het vlak van de doorsnede met oorsprong in het middelpunt van



de kleine cirkel (dus niet in het zwaartepunt van de doorsnede!) en voeren t.o.v. dit assenkruis de poolcoördinaten r en φ in.

Om (98) op te kunnen lossen, splitsen we \tilde{F} eerst in een particuliere op-

lossing: $\tilde{F} = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}r^2$,
plus een homogene oplossing \tilde{F}_1 , dus:

$$(127) \quad F = F_1 + \frac{1}{4}(x^2 + y^2),$$

en dan is

$$(128) \quad \Delta \tilde{F}_1 = 0, \quad \tilde{F}_1 = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2) = -\frac{1}{4}r^2, \quad \text{op } R.$$

De rand R wordt, in r en φ , beschreven door

$r = a$: kleine cirkel,

$r = 2R \cos \varphi$: grote cirkel.

We proberen daarom de oplossing van (128) te separeren als:

$$\tilde{F}(r, \varphi) = f(r) \cdot \cos \varphi .$$

De twee fundamentele oplossingen van de potentiaalvergelijking zijn dan

$$(130) \quad \tilde{F}_1^{(1)}(r, \varphi) = \frac{\cos \varphi}{r} , \quad \tilde{F}_1^{(2)}(r, \varphi) = r \cos \varphi ,$$

(bedenk dat steeds: $r \geq a > 0$).

We kunnen hiermee de volgende oplossing voor $\tilde{F}(r, \varphi)$ samenstellen, welke bovendien voldoet aan $\tilde{F} = 0$, op R:

$$(131) \quad \tilde{F}(r, \varphi) = \frac{r^2}{4} - \frac{R}{2} r \cos \varphi + \frac{a^2 R}{2r} \cos \varphi - \frac{a^2}{4} .$$

Dat (131) inderdaad nul is op R is het makkelijkste te zien door hem te schrijven als

$$\tilde{F}(r, \varphi) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) \left(1 - \frac{2R}{r} \cos \varphi\right) ,$$

$$= 0 , \quad \text{op R} , \quad \text{volgens (129).}$$

In x en y uitgedrukt luidt \tilde{F} :

$$(132) \quad \tilde{F}(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - a^2) - \frac{1}{2}Rx + \frac{a^2 Rx}{2(x^2 + y^2)} .$$

$$\text{(controleer hiermee dat inderdaad: } \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1 \text{).}$$

Met (125) kunnen we hieruit de schuifspanningen bepalen. We vinden dan:

$$(133)^1 \quad \begin{aligned} t_{xz} &= -2G\alpha \left[\frac{1}{2}y - \frac{a^2 Rxy}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\ &= G\alpha \left[\frac{2a^2 R}{r^2} \cos \varphi - r \right] \sin \varphi , \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 t_{yz} &= 2G\alpha \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}R + \frac{a^2 R}{2(x^2 + y^2)} - \frac{a^2 R x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\
 (133)^2 \quad &= G\alpha \left[r \cos \varphi - R + \frac{a^2 R}{r^2} - \frac{2a^2 R}{r^2} \cos^2 \varphi \right].
 \end{aligned}$$

Nu treedt bij torsie de maximale schuifspanning altijd op langs de rand van de doorsnede. In dit voorbeeld blijkt hij op te treden langs de kleine cirkel waar geldt (stel $r = a$ in (133)):

$$(134) \quad \tau := \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2} = G\alpha (2R \cos \varphi - a),$$

waaruit volgt dat de maximale schuifspanning optreedt bij $\varphi = 0$ en gelijk is aan:

$$(135) \quad \tau_{\max} = G\alpha (2R - a).$$

Indien $a \ll R$ wordt dit

$$(136) \quad \tau_{\max} = 2G\alpha R.$$

Voor een cirkel is deze waarde volgens (81) gelijk aan: $G\alpha R$. We concluderen hieruit dat bij een heel kleine inkeping een spanningsconcentratie met een factor 2 optreedt.

Opmerking: Uit (134), of (133), volgt dat in de snijpunten van de grote en de kleine cirkel (daar is: $2R \cos \varphi = a$) de schuifspanningen nul zijn.

Vragen

1. i) Verandert bij torsie de vorm van de doorsnede?
- ii) Blijven bij torsie vlakke doorsneden vlak?
- iii) Treedt er bij torsie rek in de z-richting op?

2. Formuleer, in woorden, het principe van de Saint Venant voor de torsie van een lange cilindrische staaf. Aan welke conditie(s) moet een "goed verdeelde" spanningstensor in de einddoorsneden voldoen?
3. In hoeverre wordt het torsieprobleem moeilijker, indien de welving van de einddoorsneden verhinderd wordt. Zal bij welvingsverhindering in de einddoorsneden een normaalkracht optreden?
4. Bewijs dat voor een spanningsverdeling volgens (83) en (87), met $F = 0$ op R , de volgende doorsnedegrootheden:

$$N, Q_x, Q_y, M_x \text{ en } M_y,$$

nul zijn.

5. Bewijs dat bij een verplaatsingsveld volgens

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz, \quad w = \alpha \phi(x,y) :$$

- i) de doorsneden in hun vlak niet deformeren;
- ii) een doorsnede t.p.v. z roteert om zijn zwaartepunt over een hoek αz om de z -as;
- iii) er geen welvingsverhindering is.

6. Bewijs dat het uitgangspunt

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz, \quad w = \alpha \phi(x,y),$$

correspondeert met het uitgangspunt

$$t_{xz} = -2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}, \quad t_{yz} = 2G\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}, \quad t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0,$$

en geef het verband tussen $\phi(x,y)$ en $\tilde{F}(x,y)$.

7. Tot welke vergelijkingen voor $\tilde{F}(x,y)$ en/of $\phi(x,y)$ leiden:

- i) de evenwichtsvergelijkingen;
- ii) de compatibiliteitsvergelijkingen;
- iii) de randvoorwaarden op de mantel;
- iv) het globale evenwicht tussen de schuifspanningsverdeling en het wringend moment.

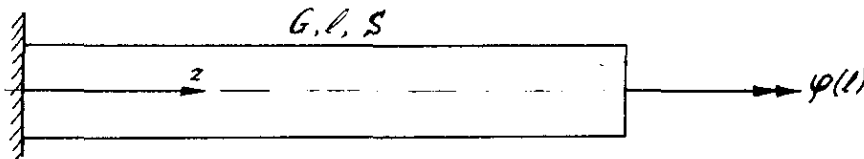
2.6.1. Energieprincipes toegepast op torsie. Benaderingen voor de torsiestijfheid

We zullen hier de in § 1.5 afgeleide energiestellingen gaan toepassen op torsieproblemen. Speciaal zullen we hier laten zien hoe we m.b.v. deze stellingen boven- en ondergrenzen kunnen bepalen voor de torsiestijfheid, welke in (110) is gedefinieerd als

$$D = \frac{M}{\alpha} ,$$

waarin M dus het wringend moment is en α de hoekverdraaiing per lengte-eenheid.

We beschouwen eerst het probleem van een cilindrische staaf, lengte l , met willekeurige doorsnede, welke wordt getordeerd, waarbij we de hoekverdraaiing van de einddoorsnede ($z = l$) t.o.v. de begindoorsnede ($z = 0$) als voorgeschreven beschouwen. Het wringend moment M is dan een onbekende van het probleem.



Voor het gemak nemen we de doorsnede $z = 0$ ingeklemd. Dan is dus de hoekverdraaiing van de einddoorsnede

$$(134) \quad \varphi(l) = \alpha l ,$$

voorgeschreven (we mogen dus ook zeggen dat α is voorgeschreven). Meer specifiek moeten we stellen dat op het S_u -oppervlak: $z = l$, zijn voorgeschreven (vergelijk (105))

$$(135) \quad u_x^* = -y\varphi(l) = -\alpha ly ; \quad u_y^* = x\varphi(l) = \alpha lx , \quad \text{op } z = l .$$

Verder zijn in dit geval de volumekrachten en de voorgeschreven spanningen (op de mantel) nul:

$$(136) \quad f_i^* = t_i^* = 0 .$$

Uit (15), § 1.3, volgt met (136)

$$(137) \quad W(S) = \frac{1}{2} \int_{S_u} t_i u_i^* dS = \frac{1}{2} \int_S t_i(x, y, l) u_i^*(x, y, l) dx dy ,$$

of met (135) en met (geen welgingsverhinderings)

$$t_z(x, y, \ell) = 0 ,$$

en

$$(138) \quad M = \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS ,$$

dat

$$(139) \quad W(S) = \frac{1}{2} \int_S (t_x u_x^* + t_y u_y^*) \Big|_{z=\ell} dS = \frac{1}{2} \varphi(\ell) \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = \\ = \frac{1}{2} M \varphi(\ell) = \frac{1}{2} M \alpha \ell .$$

Deze relatie is fysisch direct te interpreteren als: "de inwendige energie $W(S)$ is gelijk aan de helft van de uitwendig verrichte arbeid (bij constante M): $M \varphi(\ell)$ ".

Met D volgens (110) gaat (139) over in

$$(140) \quad W(S) = \frac{1}{2} D \alpha^2 \ell .$$

Voor de potentiële energie als gegeven in (19), § 1.5, leidt dit dan met (136) tot

$$(141) \quad U(S) = W(S) = \frac{1}{2} D \alpha^2 \ell .$$

Dit betekent dus dat bij voorgeschreven hoekverdraaiing α de potentiële energie evenredig is met D of, meer specifiek,

$$(142) \quad D = \frac{U(S)}{\frac{1}{2} \alpha^2 \ell} .$$

Met het insluittheorema (36), § 1.5, kunnen we onder- en bovengrenzen voor $U(S)$ afleiden, waarmee we dan tevens via bovenstaand resultaat onder- en bovengrenzen voor de torsiestijfheid D gevonden hebben.

Voor de verdere uitwerking kiezen we nu eerst een:

i) kinematisch toelaatbaar stelsel van de vorm

$$(143) \quad \bar{S}: \bar{u}_x = -\alpha y z , \quad \bar{u}_y = \alpha x z , \quad \bar{u}_z = \alpha \varphi(x, y) .$$

Dit verplaatsingsveld voldoet dus aan de randvoorwaarden op S_u : de hoekverdraaiing is nul op $z = 0$ en $\varphi(\ell) = \alpha \ell$ op $z = \ell$. (Bedenk dat de hoekverdraaiing om de z -as gelijk is aan:

$$\frac{1}{2}(u_{y,x} - u_{x,y}) \dots)$$

Verder is dit verplaatsingsveld in overeenstemming met (105) en (113).

Alleen stellen we hier aan $\phi(x,y)$ geen verdere eisen.

Uit (143) vinden we voor de deformaties

$$(144) \quad \bar{e}_{xz} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \quad \bar{e}_{yz} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right), \quad \text{overige } \bar{e}_{ij} = 0.$$

Substitutie van (144) in (20), § 1.5, leidt tot

$$(145) \quad \begin{aligned} U(\bar{S}) &= W^{(e)}(\bar{S}) = 2G \int_V (\bar{e}_{xz}^2 + \bar{e}_{yz}^2) dV = \\ &= \frac{1}{2} G \alpha^2 \ell \int_S \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dS. \end{aligned}$$

ii) Vervolgens kiezen we een statisch toelaatbaar stelsel S volgens

$$(146) \quad \underline{S}: t_{xz} = G \frac{\partial F}{\partial y}, \quad t_{yz} = -G \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \text{overige } t_{ij} = 0,$$

met

$$F(x,y) = 0, \quad \text{op } R (\equiv \text{mantel}).$$

Dit spanningsveld voldoet, voor alle $F(x,y)$, aan de evenwichtsvergelijkingen en met de tweede eis voor $F(x,y)$ tevens aan de randvoorwaarde dat de spanningen op de mantel ($\equiv S_p$ -oppervlak) nul moeten zijn. Met deze keuze vinden we dan dat

$$(147) \quad W^{(t)}(\underline{S}) = \frac{1}{2G} \int_V (t_{xz}^2 + t_{yz}^2) dV = \frac{1}{2} G \ell \int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dS,$$

terwijl, bedenkt dat op $z = \ell$ ($\equiv S_u$ -oppervlak) (136) geldt,

$$\begin{aligned} \int_{S_u} t_{-i} u_i^* dS &= \varphi(\ell) \int_S (x t_{-yz} - y t_{-xz}) dS = \\ &= -G \alpha \ell \int_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dS = \\ &= -G \alpha \ell \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (xF) + \frac{\partial}{\partial y} (yF) - 2F \right\} dS = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 G \alpha l \int_S F dS - G \alpha l \int_R (x n_x + y n_y) F dS = \\
 (148) \quad &= 2 G \alpha l \int_S F dS,
 \end{aligned}$$

want $F = 0$ langs de mantel R .

Met (147) en (148) vinden we voor de complementaire energiefunctionaal

$$(149) \quad U^*(S) = \frac{1}{2} G l \int_S \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 4 \alpha F \right\} dS.$$

Toepassing van het insluittheorema met (142), (145) en (149) levert de volgende onder- en bovengrenzen voor de torsiestijfheid D :

$$\begin{aligned}
 (150) \quad &\frac{G}{\alpha^2} \int_S \left\{ 4 \alpha F - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \leq D \leq \\
 &\leq G \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dS.
 \end{aligned}$$

We kunnen deze uitdrukking nog iets vereenvoudigen door (bedenk dat α gegeven is) $F(x,y)$ te vervangen door

$$(151) \quad \tilde{F}(x,y) = \frac{F(x,y)}{-2\alpha},$$

waarmee (150) onafhankelijk wordt van α :

$$\begin{aligned}
 (152) \quad &-4G \int_S \left\{ 2\tilde{F} + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \leq D \leq \\
 &\leq G \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dS.
 \end{aligned}$$

Met dit uiteindelijke resultaat hebben we het gereedschap verkregen om boven- en ondergrenzen voor D te berekenen. Wat we nu nog moeten doen is het kiezen van expliciete uitdrukkingen voor $\Phi(x,y)$, welke nog willekeurig mag worden gekozen, en voor $\tilde{F}(x,y)$, welke alleen hoeft te voldoen aan $\tilde{F}(x,y) = 0$ op R . Hoe beter onze keuze voor Φ en \tilde{F} , des te beter zijn de grenzen van (152).

Indien de keuze voor ϕ en/of \tilde{F} nog een of meer parameters bevatten, kunnen we de optimale waarden voor deze parameters vinden door de minima voor $U(\tilde{S})$ en $U^*(\underline{S})$ te zoeken.

Alle voorgaande resultaten zijn afgeleid onder de conditie dat de hoekverdraaiing als voorgeschreven wordt beschouwd. Als alternatief probleem kunnen we het wringend moment als voorgeschreven beschouwen (de hoekverdraaiing is dan een onbekende van het probleem). Deze formulering is echter veel minder elegant dan de voorafgaande en aangezien we, door het lineaire verband tussen α en M , de hoekverdraaiing altijd als voorgeschreven kunnen beschouwen, laten we deze laatste formulering hier achterwege.

Recapitulatie. Energieprincipes - torsie.

Beschouw α voorgeschreven, dan

$$\begin{aligned} -4G \int_S \left\{ 2\tilde{F} + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right)^2 \right\} dS &\leq D \leq \\ &\leq G \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dS \end{aligned}$$

met

$$\tilde{F}(x,y) = 0, \quad \text{op } R$$

en

$$\tilde{F}(x,y) \in C^2; \quad \phi(x,y) \in C^2 \quad (\text{voldoende, niet noodzakelijk}).$$

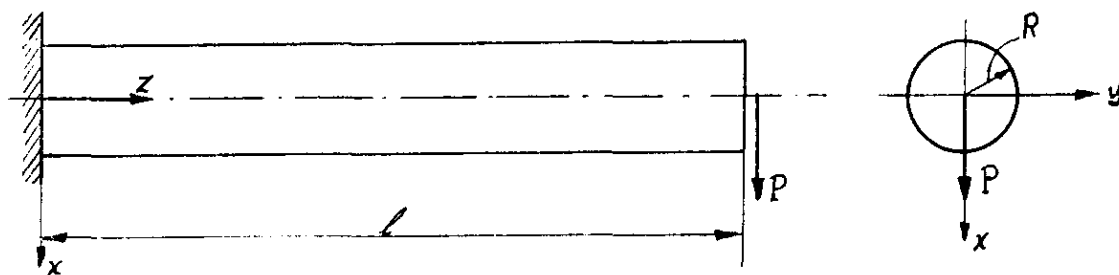
Vragen

1. Geef aan, waarom het verplaatsingsveld volgens (143) in het algemeen, d.w.z. voor willekeurige ϕ , niet exact zal zijn.
2. Bewijs dat het spanningsveld volgens (146) inderdaad statisch toelaatbaar is. Geef aan waarom dit spanningsveld in het algemeen niet exact zal zijn.
3. Pas de insluiting (152) toe op een cylinder met cirkelvormige doorsnede. Laat zien hoe dit dan leidt tot de exacte torsiestijfheid.

2.7. Buiging van een cirkelcylinder door een dwarskracht.

Exacte theorie *)

We beschouwen een lange staaf, lengte l , met cirkelvormige doorsnede, straal R , welke in de ene einddoorsnede ($z = 0$) is ingeklemd en in de andere ($z = l$) belast wordt door een dwarskracht P in de x -richting welke aangrijpt in het zwaartepunt van de doorsnede.



We bekijken weer alleen het gerelaxeerde probleem; d.w.z. we nemen aan dat de spanningen in de einddoorsneden "goed verdeeld" (nadere definitie volgt) zijn. Zoals we verderop zullen zien, heeft dit tot gevolg dat in de doorsnede $z = 0$ de verplaatsingen niet exact nul zijn. De hier te construeren oplossing geldt dus, volgens de Saint-Venant, alleen op

*) Deze paragraaf is facultatief, behoort dus niet tot de te tentamineren stof.

voldoende afstand van de beide einddoorsneden.

We gaan uit van de volgende veronderstelling voor het spanningsveld:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0, \quad t_{xz} \neq 0, \quad t_{yz} \neq 0, \quad (153)$$

$$t_{zz} = -\frac{M(z)}{I} x = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad (I = I_y = \frac{\pi}{4} R^4).$$

Uit de eerste en tweede evenwichtsvergelijking volgt dan

$$(154) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0,$$

terwijl de derde geeft:

$$(155) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = -\frac{P}{I} x.$$

De mantel van de cylinder is spanningsvrij. Dit levert drie randvoorwaarden op de rand van de cirkel, waarbij aan de eerste twee triviaal is voldaan, terwijl de derde luidt:

$$(156) \quad t_{xz} n_x + t_{yz} n_y = 0, \quad \text{op } r := \sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

We zoeken nu eerst een particuliere oplossing van (155), welke bovendien aan (156) voldoet. Een particuliere oplossing van (155) is:

$$(157) \quad t_{xz} = -\frac{P}{2I} x^2 + f(y), \quad t_{yz} = 0,$$

en door:

$$(158) \quad f(y) = \frac{P}{2I} (R^2 - y^2),$$

te kiezen is dan tevens aan (156) voldaan.

Let op: dat de oplossing (157), (158) niet de totale oplossing kan zijn omdat ze niet compatibel is.

We kunnen dus aan (154) en (155) voldoen door te stellen (vergelijk (87))

$$(159) \quad t_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{P}{2I} (R^2 - x^2 - y^2) ; \quad t_{yz} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} ,$$

met

$$(160) \quad \Phi = \Phi(x, y) .$$

Hiermee wordt (156):

$$(161) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_y = 0 , \quad \text{op } r = R ,$$

hetgeen op analoge wijze als in § 2.6 ((93) t/m (95)) kan worden herleid tot

$$(162) \quad \Phi = 0 , \quad \text{op } r = R ,$$

voor enkelvoudig samenhangende doorsneden.

De functie $\Phi(x, y)$ kan worden bepaald uit de compatibiliteitsvergelijkingen. Door uit het spanningsveld volgens (153) en (159) m.b.v. Hooke de deformaties te bepalen en deze te substitueren in de compatibiliteitsvergelijkingen krijgen we de relaties (Ga dit zelf na)

$$(163) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \Phi) = \frac{(1 + 2\nu)P}{(1 + \nu)I} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Phi) = 0 .$$

Opmerking: Deze relaties kunnen ook worden verkregen uit de zgn. Beltrami-vergelijkingen, welke luiden (zie opgave 9 uit H.1. van de vraagstukkenbundel)

$$\Delta t_{ij} + \frac{1}{(1 + \nu)} t_{kk,ij} = 0 ,$$

door hierin (153) en (159) te substitueren.

Uit (163) volgt

$$(164) \quad \Delta \Phi = \frac{(1 + 2\nu)P}{(1 + \nu)I} y + C .$$

We bepalen eerst de constante C. De bij C behorende oplossing van (164) en (162) luidt:

$$(165) \quad \Phi = \frac{C}{4} (x^2 + y^2 - R^2) ,$$

hetgeen leidt tot de schuifspanningen

$$(166) \quad t_{xz} = \frac{C}{2} y , \quad t_{yz} = -\frac{C}{2} x ,$$

welke op hun beurt weer aanleiding geven tot een wringend moment evenredig met C . Aangezien er geen wringend moment is, moet dus $C = 0$ genomen worden. (We hadden in § 2.6 al gezien dat de constante C het torsieprobleem karakteriseert.)

Opmerking: We hebben hierbij aangenomen dat de dwarskracht P in het middelpunt van de doorsnede aangrijpt. Indien dit niet het geval is, is C wel degelijk ongelijk aan nul.

Als oplossing van (164), met $C = 0$, en (165) proberen we de functie

$$(167) \quad \Phi(x,y) = c(x^2 + y^2 - R^2)y ,$$

welke in ieder geval aan (165) voldoet. Het blijkt dat ook aan (164), met $C = 0$, is voldaan als

$$(168) \quad c = \frac{(1 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I} .$$

Met (167) en (168) vinden we dan uit (153) en (159) de volgende spanningsverdeling in de cylinder

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0 , \quad t_{zz} = -\frac{P(l-z)x}{I} ,$$

$$(169) \quad t_{xz} = \frac{(3 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I} [R^2 - x^2 - \frac{(1 - 2\nu)}{(3 + 2\nu)} y^2] ,$$

$$t_{yz} = -\frac{(1 + 2\nu)P}{4(1 + \nu)I} xy .$$

Opmerkingen:

i) We hadden in het begin van deze paragraaf gezegd dat de spanningen

"goed verdeeld" moesten zijn over de einddoorsneden. Dit nu is het geval indien t_{xz} , t_{yz} en t_{zz} ook in de einddoorsneden $z = 0$ en $z = l$ verdeeld zijn volgens (169). Als dat zo is, vormt (169) de enige, exacte oplossing van dit probleem.

ii) We hebben tot nu toe nog niet gecontroleerd of de spanningen volgens (169) in elke doorsnede als enige doorsnedegrootheden het buigende moment

$$M_y(z) = P(l - z) ,$$

en de dwarskracht: $Q_x = P$, opleveren.. Wij beweren dat dit inderdaad het geval is, maar we laten het bewijs als een oefeningsopgave aan de lezer zelf over.

Uit (169) vinden we voor de schuifspanningen in een doorsnede langs de horizontale middellijn: $x = 0$:

$$(170) \quad t_{xz}(0, y) = \frac{(3 + 2\nu)P}{8(1 + \nu)I} [R^2 - \frac{(1 - 2\nu)}{(3 + 2\nu)} y^2] , \quad t_{yz}(0, y) = 0 .$$

De maximale waarde van $t_{xz}(0, y)$ treedt dus op in $y = 0$ en is gelijk aan

$$(171) \quad t_{xz}(0, 0) = \frac{(3 + 2\nu)PR^2}{8(1 + \nu)I} .$$

In de randpunten $y = \pm R$ is

$$(172) \quad t_{xz}(0, \pm R) = \frac{(1 + 2\nu)PR^2}{4(1 + \nu)I} .$$

we zien dat t_{xz} van ν afhangt. Voor $\nu = 0,3$ krijgen we

$$(173) \quad t_{xz}(0, 0) = 1,38 \frac{P}{S} , \quad t_{xz}(0, \pm R) = 1,23 \frac{P}{S} , \quad (S = \pi R^2) .$$

De elementaire (technische) balkentheorie veronderstelt dat t_{xz} uniform (d.w.z. onafhankelijk van y) is langs $x = 0$. Er geldt dan volgens deze theorie dat

$$(174) \quad \tau_{xz}(0,y) = \frac{4}{3} \frac{P}{S}.$$

Door (174) te vergelijken met (173) zien we, dat voor dit probleem de verschillen tussen de exacte oplossing en de technische gebruikelijke benadering van de orde van 4% zijn. Merk op dat dit onafhankelijk is van de "slankheid" van de balk (= verhouding R^2/l^2).

Uit de spanning volgens (169) kunnen we m.b.v. de wet van Hooke de deformaties bepalen. Aangezien deze compatibel zijn (zo was $\phi(x,y)$ immers bepaald) kunnen we hieruit de verplaatsingen bepalen. We laten de details van de berekeningen weg en geven direct het eindresultaat:

$$u = \frac{P}{EI} \left[-\frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{2} lz^2 + \frac{\nu}{2}(l-z)(x^2 - y^2) \right],$$

$$(175) \quad v = \frac{\nu P}{EI} (l-z)xy,$$

$$w = -\frac{P}{EI} \left[(lz - \frac{1}{2} z^2)x + \frac{1}{4}(x^3 + xy^2) - \left(\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}\right)R^2x \right].$$

(Controleer zelf, door differentiëren, de juistheid van deze relaties).

De neutrale lijn is dus: $(x,y) = (0,0)$. Langs deze lijn zijn de verplaatsingen:

$$(176) \quad u_0(z) = \frac{P}{EI} \left(-\frac{z^3}{6} + \frac{lz^2}{2} \right), \quad v_0 = w_0 = 0.$$

Hieruit vinden we dat

$$(177) \quad \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} = \frac{P(l-z)}{EI} = \frac{M}{EI}.$$

Conclusie: de wet van Bernouilli geldt hier nog exact.

Echter, de twee resultaten: vlakke doorsneden blijven vlak en normale doorsneden blijven normaal gelden hier niet meer.

Hiertoe bekijken we eerst hoe de positie van een punt van een z -doorsnede verandert. De coördinaat z gaat na buiging over in: $z + w$, en dit is volgens (175)³ een functie van x en y , waarin termen als x^3 en y^2 voorkomen: de doorsnede blijft dus niet vlak.

Vervolgens vergelijken we

$$\text{en } \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)(0,0,z) = \frac{P}{EI} z \left(l - \frac{z}{2}\right),$$

(178)

$$- \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(0,0,z) = \frac{P}{EI} z \left(l - \frac{z}{2}\right) - \frac{(3 + 2\nu)}{4} \frac{PR^2}{EI}.$$

We zien hieruit dat deze hoeken niet precies gelijk zijn: de doorsneden blijven dus niet normaal. De afwijkingen zijn echter klein ($O(R^2/l^2)$). Met (169) kunnen we aantonen dat de hoek tussen de z - en de x -as na deformatie gelijk is aan:

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\tau_{xz}(0,0)}{G}\right].$$

Het niet meer normaal zijn van de doorsnede is dus een gevolg van de afschuiving door de schuifspanning τ_{xz} .

Opmerking: Uit (175) volgt dat de verplaatsingen op $z = 0$ niet nul zijn. Dit is in strijd met de voorwaarde dat de staaft daar ingeklemd is. De verplaatsingen zijn echter klein ($O(R^2/l^2)$) en bovendien is, volgens de Saint-Venant, de invloed van dit effect beperkt.

3. TWEE-DIMENSIONALE PROBLEMEN. PLATEN

3.1. Vlakke vervormings- en vlakspanningstoestand

Een vlakke vervormingstoestand wordt gekarakteriseerd door:

$$(1) \quad u = u(x,y) , \quad v = v(x,y) , \quad w = 0 .$$

Op grond hiervan zijn alle mechanische grootheden (deformaties, spanningen) onafhankelijk van z :

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 .$$

Een voorbeeld hiervan is een cylinder, welke aan zijn mantel belast wordt door een belasting welke onafhankelijk van de z -richting, i.e. de axiale richting, is en welke aan zijn einddoorsneden dusdanig is ingeklemd dat axiale verplaatsingen verhinderd worden.

Op grond van (1) is

$$(3) \quad e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0 .$$

Met de wet van Hooke krijgen we dan voor de spanningen:

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu e_{yy}] , \\ t_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu e_{xx} + (1-\nu)e_{yy}] , \\ (4) \quad t_{zz} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{xx} + e_{yy}) (= \nu(t_{xx} + t_{yy})) , \\ t_{xy} &= 2Ge_{xy} , \quad t_{xz} = t_{yz} = 0 . \end{aligned}$$

Een vlak-vervormingsprobleem heeft acht onbekenden (t_{zz} is wel $\neq 0$, maar geen fundamentele onbekende) te weten:

$$u, v, e_{xx}, e_{xy}, e_{yy}, t_{xx}, t_{xy}, t_{yy} .$$

Hiervoor hebben we behalve de drie verbanden tussen verplaatsingen en deformaties

$$(5) \quad e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

en drie Hooke-relaties voor t_{xx} , t_{xy} en t_{yy} volgens (4) nog twee evenwichtsvergelijkingen:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \rho f_x &= 0, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \rho f_y &= 0. \end{aligned}$$

Aan de derde evenwichtsvergelijking (in z-richting) is identiek voldaan, mits, en dit is een noodzakelijke voorwaarde voor het kunnen bestaan van een vlakke vervormingstoestand, de volumekracht in z-richting nul is.

$$\rho f_z = 0.$$

Technisch belangrijk is het speciale geval dat ook:

$$(7) \quad \rho f_x = \rho f_y = 0.$$

In dat geval kunnen we aan de evenwichtsvergelijkingen (6) voldoen door het invoeren van een Airy-functie $U = U(x, y)$, zodanig dat

$$(8) \quad t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Met de wet van Hooke, in feite de inverse van (4), kunnen we nu ook de deformaties in U uitdrukken. We krijgen dan

$$(9) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right], \\ e_{xy} &= - \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ e_{yy} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

De nu nog ontbrekende vergelijking voor $U(x,y)$ vinden we uit de conditie dat de deformaties volgens (9) compatibel moeten zijn. Van de in H.1. geformuleerde compatibiliteitsvergelijkingen blijkt er hier nog slechts één over te blijven (alle overige geven identiek $0 = 0$) namelijk

$$(10) \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} .$$

Door (9) in (10) te substitueren vinden we de volgende vergelijking voor $U(x,y)$:

$$(11) \quad \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \Delta \Delta U = 0 ,$$

waarin

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

de twee-dimensionale Laplace-operator. Een vergelijking van de vorm (11) noemen we een bipotentiaal-vergelijking en we zeggen dat de Airy-functie $U(x,y)$ een bipotentiaalfunctie is.

Om de functie $U(x,y)$ volledig te kunnen bepalen zijn behalve (11) nog twee randvoorwaarden nodig. We moeten dus in elk punt van de rand in het x - y -vlak twee grootheden voorschrijven, bijvoorbeeld de twee componenten van de spanningsvector: $t_x^{(n)}$ en $t_y^{(n)}$ ($t_z^{(n)}$ moet nul zijn).

Sterk verwant aan de vlakke vervormingstoestand is de vlakspanningstoestand. Deze wordt gekenmerkt door

$$(12) \quad t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0 .$$

Voor de overblijvende drie spanningen (t_{xx} , t_{yy} en t_{xy}) gelden dan weer de evenwichtsvergelijkingen (6), terwijl de deformaties volgen uit:

$$(13) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (t_{xx} - \nu t_{yy}) , \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (t_{yy} - \nu t_{xx}) , \\ e_{xy} &= \frac{(1 + \nu)}{E} t_{xy} , \\ e_{zz} &= - \frac{\nu}{(1 - \nu)} (e_{xx} + e_{yy}) , \quad e_{xz} = e_{yz} = 0 . \end{aligned}$$

Hoewel deze toestand formeel gelijkwaardig lijkt met de vorige is er toch een groot verschil: het uitgangspunt (12) sluit niet uit dat de mechanische grootheden nog van z kunnen afhangen. In dat geval hebben we dus geen echte twee-dimensionale toestand.

Indien we aannemen dat we wel een echte tweedimensionale toestand hebben (dus geen z -afhankelijkheid), krijgen we vanwege het feit dat $e_{zz} \neq 0$ een aantal extra condities waaraan moet worden voldaan, opdat zo'n toestand mogelijk is. We hebben in dat geval namelijk niet alleen de compatibiliteitsvergelijking (10), maar bovendien nog (zie het stelsel (7) uit § 1.1)

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Volgens (13)⁴ betekent dit, dat dan ook:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_{xx} + e_{yy}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e_{xx} + e_{yy}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (e_{xx} + e_{yy}) = 0 .$$

We concluderen hieruit dat het voor het kunnen bestaan van een twee-dimensionale vlakspanningstoestand noodzakelijk is dat de som van de rekken e_{xx} en e_{yy} hooguit een lineaire functie in x en y is.

Een vlakspanningstoestand welke wél twee-dimensionaal is, treedt slechts bij zeer speciale problemen op (zie bijv. opgave 1 uit § 7. van de vraagstukkenbundel). Technisch belangrijker is daarom de toestand zoals die optreedt bij de rek van dunnen platen. In dat geval is in het algemeen niet exact aan (12) voldaan, maar wel in zeer goede benadering. Gemiddeld over de dikte gelden de relaties (12) en (13) dan wel. We spreken dan over een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. We zullen in de nu volgende paragraaf echter laten zien dat in een plaat welke aan zijn zijrand wordt belast door een goed verdeelde spanning (nadere definitie volgt) een exacte vlakspanningstoestand kan optreden. We kunnen dan tevens de fouten-orde aangeven van de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

Alvorens we dit gaan doen, geven we echter eerst nog de elasticiteitsvergelijkingen voor een twee-dimensionale toestand, uitgeschreven in poolcoördinaten: r en θ .*) In poolcoördinaten zijn de onbekenden van een vlakke vervormings- (of spannings-) toestand: $u(\equiv u_r)$, $v(\equiv u_\theta)$, e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, $e_{r\theta}$, t_{rr} , $t_{\theta\theta}$ en $t_{r\theta}$. Hiervoor hebben we de volgende vergelijkingen:

evenwicht

$$(14) \quad \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 .$$

verband deformaties en verplaatsingen

$$(15) \quad e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) .$$

plus

de wet van Hooke:

deze heeft dezelfde vorm als (4) resp. (13), alleen moeten we daarin

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}, t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} ,$$

vervangen door resp.

$$e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{r\theta}, t_{rr}, t_{\theta\theta}, t_{r\theta} .$$

De deformaties moeten voldoen aan de compatibiliteitsvergelijking:

$$(16) \quad \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} .$$

Bij afwezigheid van volumekrachten ($f_r = f_\theta = 0$) kunnen we aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen door invoering van een Airy-functie $U(r, \theta)$ zodanig dat

*) Voor de afleidingen van de nu volgende formules verwijzen wij naar Fysica 30. Zie ook de Appendix aan het eind van het diktaat.

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2},$$

$$(17) \quad t_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

$$t_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right).$$

Dit spanningsveld is compatibel indien U een bipotentiaalfunctie is, d.w.z.

$$(18) \quad \Delta \Delta U = 0,$$

met

$$(19) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Deze vergelijkingen vereenvoudigen aanzienlijk voor een rotatie-symmetrisch probleem. In dat geval is

$$v = 0, \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0.$$

Dientengevolge zijn dan ook: $e_{r\theta}$ en $t_{r\theta}$ gelijk aan nul (echter niet: $e_{\theta\theta}$ en $t_{\theta\theta}$!).

We hebben dan nog vijf onbekenden over:

$$u (= u_r), \quad e_{rr}, \quad e_{\theta\theta}, \quad t_{rr} \quad \text{en} \quad t_{\theta\theta},$$

welke alleen nog van r afhangen en welke buiten de wet van Hooke, die niet verandert (twee vergelijkingen voor t_{rr} en $t_{\theta\theta}$), nog moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$(20) \quad \frac{dt_{rr}}{dr} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0,$$

$$e_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}.$$

Uit bovenstaande formules voor e_{rr} en $e_{\theta\theta}$ volgt direct dat de volgende vereenvoudigde compatibiliteitsvergelijking moet gelden:

Uit bovenstaande formules voor e_{rr} en $e_{\theta\theta}$ volgt direct dat de volgende vereenvoudigde compatibiliteitsvergelijking moet gelden:

$$(21) \quad \frac{d}{dr} (r e_{\theta\theta}) - e_{rr} = 0 .$$

Bovendien kan op een eenvoudiger wijze dan volgens (17) een spanningsfunctie worden ingevoerd, waarmee identiek aan (20)¹ wordt voldaan, voor het geval dat $\rho f_r = 0$. Immers, door voor dit geval de evenwichtsvergelijking te schrijven als

$$(22) \quad \frac{d}{dr} (r t_{rr}) - t_{\theta\theta} = 0 ,$$

zien we direct dat hieraan is te voldoen door invoering van een spanningsfunctie $F(r)$ volgens

$$(23) \quad t_{rr} = \frac{1}{r} F(r) , \quad t_{\theta\theta} = \frac{dF(r)}{dr} .$$

Met de wet van Hooke kunnen we dan ook de deformaties in $F(r)$ uitdrukken. Voor de vlakke vervormingstoestand krijgen we dan

$$(24) \quad \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \left[(1 - \nu) \frac{F(r)}{r} - \nu \frac{dF(r)}{dr} \right] , \\ e_{\theta\theta} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \left[-\nu \frac{F(r)}{r} + (1 - \nu) \frac{dF(r)}{dr} \right] , \end{aligned}$$

en door dit te substitueren in de compatibiliteitsvergelijking (21) krijgen we de volgende vergelijking voor $F(r)$:

$$(25) \quad \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} F(r) = 0 , \quad (\text{of: } \Delta F = \frac{F}{r^2}) .$$

De algemene oplossing van deze vergelijking luidt: (stel $F(r) = Ar^\lambda$)

$$(26) \quad F(r) = Ar + \frac{B}{r} .$$

De constanten A en B moeten bepaald worden uit de randvoorwaarden. Er moeten dus steeds twee randvoorwaarden voor $F(r)$ worden gegeven. We wijzen er tenslotte nog op dat indien het punt $r = 0$ een punt van de plaat is, de coëfficiënt $B = 0$ genomen moet worden, omdat anders de spanningen in $r = 0$ oneindig zouden worden. In dat geval is er dus nog slechts één randvoorwaarde voor $F(r)$ nodig.

Recapitulatie

Vlakke vervormingstoestand:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0.$$

$$t_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{xx} + \nu e_{yy}], \quad \Leftrightarrow e_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)t_{xx} - \nu t_{yy}],$$

$$t_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu e_{xx} + (1-\nu)e_{yy}], \quad \Leftrightarrow e_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu t_{xx} + (1-\nu)t_{yy}],$$

$$t_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} e_{xy}, \quad \Leftrightarrow e_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{xy},$$

$$t_{xz} = t_{yz} = 0, \quad \Leftrightarrow e_{xz} = e_{yz} = 0,$$

$$t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy}), \quad \Leftrightarrow e_{zz} = 0.$$

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = 0; \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = 0; \quad (f_z = 0).$$

Airy-functie ($f_x = f_y = 0$)

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

met

$$\Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

Formulering in poolcoördinaten:

$$u = u_r(r, \theta), \quad v = u_\theta(r, \theta), \quad w = \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right),$$

$$t_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\theta\theta}], \quad e_{rr} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}],$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\theta\theta}], \quad e_{\theta\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu t_{rr} + (1-\nu)t_{\theta\theta}],$$

$$t_{r\theta} = \frac{E}{(1+\nu)} e_{r\theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{(1+\nu)}{E} t_{r\theta},$$

$$t_{rz} = t_{\theta z} = 0, \quad e_{rz} = e_{\theta z} = 0,$$

$$t_{zz} = \nu(t_{rr} + t_{\theta\theta}), \quad e_{zz} = 0.$$

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0.$$

Airy-functie ($f_r = f_\theta = 0$), $(U = U(r, \theta))$

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

$$t_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta},$$

met

$$\Delta \Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 U = 0.$$

Vlakspanningstoestand:

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0.$$

Als boven, met uitzondering van wet van Hooke:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (t_{xx} - \nu t_{yy}) , \Leftrightarrow t_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (e_{xx} + \nu e_{yy}) ,$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} (t_{yy} - \nu t_{xx}) , \Leftrightarrow t_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu e_{xx} + e_{yy}) ,$$

$$e_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{xy} , \Leftrightarrow t_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} e_{xy} ,$$

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 , \Leftrightarrow t_{xz} = t_{yz} = 0 ,$$

$$e_{zz} = - \frac{\nu}{(1 - \nu)} (e_{xx} + e_{yy}) , \Leftrightarrow t_{zz} = 0 .$$

(zie ook § 3.2) .

Vragen

1. i) Wat zijn de basiscondities voor de vlakke vervormingstoestand (V.V.T.)?
ii) Welke zijn hier de essentiële onbekenden?
iii) Hoe luiden hier de evenwichtsvergelijkingen en de wet van Hooke?
2. Beantwoord dezelfde vragen voor de vlakspanningstoestand (V.S.T.).
3. i) Wat zijn de verschillen tussen V.V.T. en V.S.T.?
ii) Leid voor beide systemen de Navier-vergelijkingen af.
iii) Hoe kunt U formeel de resultaten van het ene systeem transformeren naar die van het andere?
4. Hoeveel compatibiliteitsvergelijkingen blijven er over in de V.V.T. (of V.S.T.). Was dit aantal à priori te verwachten?
5. i) Wat is een Airy-functie U?
ii) Druk de spanningen en deformaties uit in U.
iii) Aan welke vergelijking moet U voldoen? Waaruit is deze vergelijking afgeleid?

iv) Hoeveel randvoorwaarden zijn er nodig? Geef een voorbeeld voor deze randvoorwaarden (uitgedrukt in U).

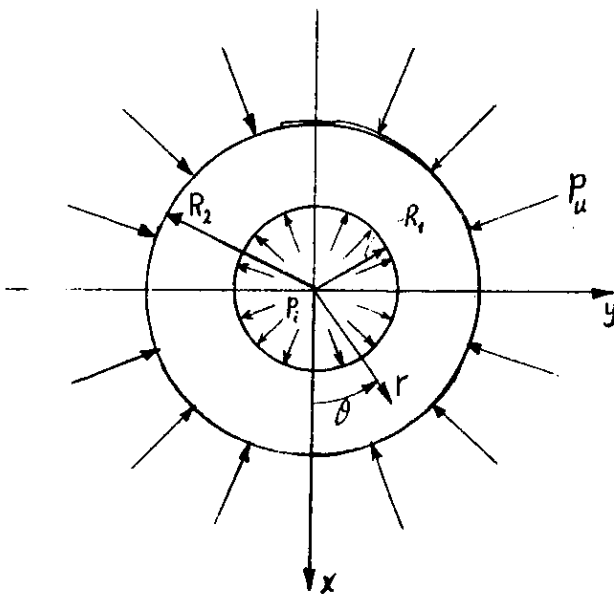
6. Beschouw een rotatie-symmetrische vlakke vervormingstoestand. Wat zijn dan de onbekenden en welke vergelijkingen gelden hiervoor? Laat zien dat de spanningsverdelingen

$$t_{rr} = t_{\theta\theta} = C_1, \quad \text{en} \quad t_{rr} = -t_{\theta\theta} = -\frac{C_2}{r^2},$$

aan al deze vergelijkingen voldoen.

3.1.1. Voorbeeld: Cirkelvormige pijp onder in- en uitwendige druk

Als voorbeeld van een vlakke vervormingstoestand behandelen we het volgende probleem, dat echter met enkele kleine aanpassingen ook als een vlakspanningsprobleem kan worden beschouwd:



Een lange, holle cirkelcylinder, binnenstraal R_1 , buitenstraal R_2 , wordt zowel inwendig (p_i) als uitwendig (p_u) door een uniforme druk belast.

We nemen de uiteinden van de buis zodanig ingeklemd dat axiale verplaatsingen verhinderd worden. We hebben dan een vlakke vervormingstoestand. Dit probleem zullen we hier beschouwen.

We hadden echter ook de uiteinden vrij kunnen laten. In dat geval

zouden we een vlakspanningstoestand gekregen hebben.

Dit probleem is duidelijk rotatie-symmetrisch. Volgens (23) en (26) hebben we dan de algemene oplossing

$$t_{rr} = \frac{1}{r} F(r) = A + \frac{B}{r^2}, \quad (27)$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{dF(r)}{dr} = A - \frac{B}{r^2}.$$

De constanten A en B volgen uit de randvoorwaarden:

$$t_{rr} = -p_i, \quad \text{op } r = R_1, \quad (28)$$

$$t_{rr} = -p_u, \quad \text{op } r = R_2,$$

waaruit volgt

$$t_{rr} = \frac{R_1^2 R_2^2 (p_u - p_i)}{(R_2^2 - R_1^2)} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i R_1^2 - p_u R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (29)$$

$$t_{\theta\theta} = - \frac{R_1^2 R_2^2 (p_u - p_i)}{(R_2^2 - R_1^2)} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i R_1^2 - p_u R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Doordat de axiale verplaatsingen van de buis zijn verhinderd ($e_{zz} = 0$) ontstaat er in de buis een axiale normaalspanning gelijk aan

$$(30) \quad t_{zz} = \nu(t_{rr} + t_{\theta\theta}) = \frac{2\nu(p_i R_1^2 - p_u R_2^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Zijn daarentegen de uiteinden vrij, dan is

$$t_{zz} = 0,$$

en hebben we een, exacte, vlakspanningstoestand.

We merken nog op dat voor beide toestanden de spanningen t_{rr} en $t_{\theta\theta}$ voldoen aan (29), maar dat de deformaties verschillen in beide toestanden.

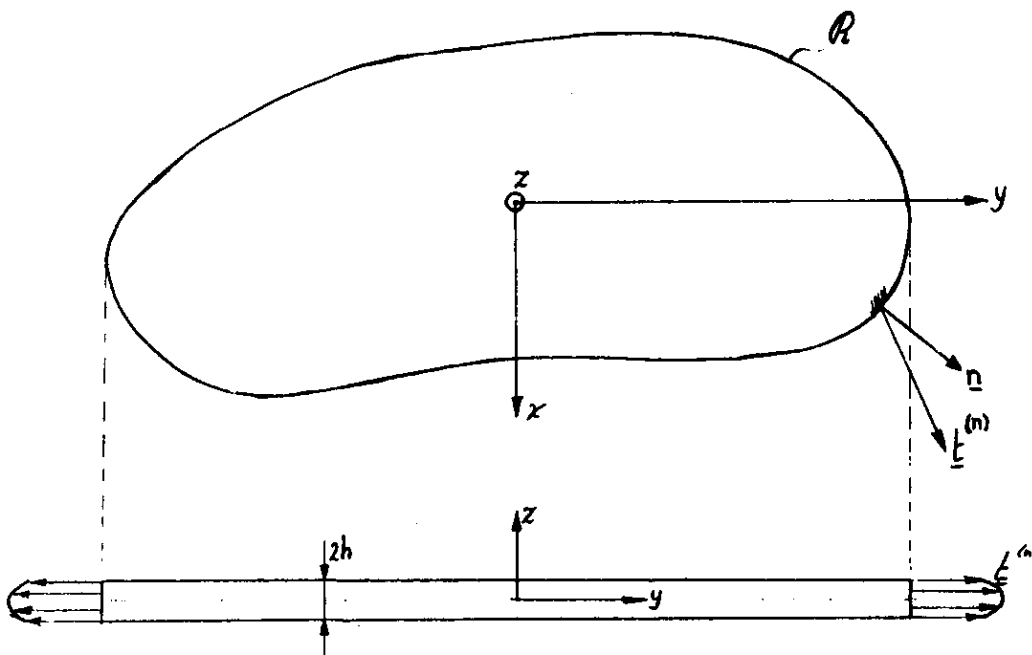
Nemen we de uitwendige druk nul ($p_u = 0$) dan krijgen we

$$(31) \quad t_{rr} = \frac{p_1 R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right); \quad t_{\theta\theta} = \frac{p_1 R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right).$$

We zien hieruit dat t_{rr} een druk- en $t_{\theta\theta}$ een trekspanning is. $t_{\theta\theta}$ is maximaal voor $r = R_1$ en daar gelijk aan

$$(32) \quad (t_{\theta\theta})_{\max} = \frac{(R_1^2 + R_2^2)}{(R_2^2 - R_1^2)} p_1.$$

3.2. Rek van dunne platen. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand



We beschouwen een dunne plaat met dikte $2h$. We noemen een plaat dun, indien h veel kleiner is dan de een of andere karakteristieke maat in het vlak van de plaat (R). We kiezen x - en y -assen in het middenvlak van de plaat en de z -as loodrecht erop.

We belasten de plaat alleen langs de zijrand (de vlakken $z = \pm h$ zijn dus spanningsvrij en er zijn geen volumekrachten) en wel door een belasting welke geen componenten in de z -richting heeft. Verder beperken

we ons in deze paragraaf tot randbelastingen welke symmetrisch in z zijn.

We zullen in deze paragraaf eerst een exacte twee-dimensionale formulering van het hiervoor beschreven probleem geven. Hiertoe moeten we echter aannemen dat de spanningsvector $\underline{t}^{(n)}$ aan de zijrand "goed verdeeld" is. Zoals we verderop zullen zien houdt dit in dat deze spanningen aan de rand parabolisch verdeeld moeten zijn, volgens

$$(33) \quad \underline{t}^{(n)} = \underline{t}_0^{(n)}(x,y) + \frac{1}{2} z^2 \underline{t}_2^{(n)}(x,y), \quad (\underline{t}^{(n)} = (t_x^{(n)}, t_y^{(n)})) ,$$

waarin $\underline{t}_0^{(n)}$ willekeurig kan worden voorgeschreven, maar $\underline{t}_2^{(n)}$ dan niet meer.

We kunnen de randvoorwaarden nu dus als volgt formuleren (R is de rand van de plaat in het x - y -vlak)

$$(34) \quad \begin{cases} \underline{z} = \pm h : & t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0 . \\ \text{langs } R : & t_{ij} n_j = t_{0_i}^{(n)}(x,y) + \frac{1}{2} z^2 t_{2_i}^{(n)}(x,y) , \quad (i,j = 1,2) . \end{cases}$$

We zoeken nu een bij deze randvoorwaarden behorende oplossing welke een exacte vlakspanningstoestand is, dus welke voldoet aan

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0 ,$$

overal in de plaat.

We trachten dit te bereiken door uit te gaan van het volgende verplaatsingsveld (bedenk dat u en v symmetrisch in z zijn en w antisymmetrisch):

$$(35) \quad \begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + \frac{z^2}{2} u_2(x,y) , \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + \frac{z^2}{2} v_2(x,y) , \\ w(x,y,z) &= z w_1(x,y) . \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we de deformaties bepalen en daaruit met Hooke de spanningen.

Voor de schuifspanningen t_{xz} en t_{yz} vinden we aldus:

$$(36) \quad t_{xz} = Gz(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x}) , \quad t_{yz} = Gz(v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y}) .$$

Omdat deze, volgens (34), voor $z = \pm h$ nul moeten zijn voor alle x en y , moet dus

$$(37) \quad u_2 = - \frac{\partial w_1}{\partial x} , \quad v_2 = - \frac{\partial w_1}{\partial y} ,$$

waarmee dan tevens

$$(38) \quad t_{xz} = t_{yz} = 0 , \quad \text{overall} .$$

Op analoge wijze vinden wij voor t_{zz} , gebruikmakend van (37)

$$(39) \quad \begin{aligned} t_{zz} &= \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu)w_1 + \nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\nu z^2}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu)w_1 + \nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{\nu z^2}{2} \Delta w_1 \right] . \end{aligned}$$

Met (38) en $\rho f_z = 0$, wordt de evenwichtsvergelijking in z -richting

$$t_{zz,z} = 0 ,$$

en we zien dat (39) daar alleen aan voldoet als

$$(40) \quad \Delta w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 .$$

Met (40) voldoet t_{zz} volgens (39) dus aan de randvoorwaarden op $z = \pm h$ ((34)³) als

$$(41) \quad w_1 = - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) .$$

De functie $\varphi(x,y)$ gedefinieerd door

$$(42) \quad \varphi(x, y) := \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = - \frac{(1 - \nu)}{\nu} w_1$$

moet dan volgens (40) voldoen aan

$$(43) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 .$$

Met (37) en (42) kunnen we (35) herschrijven tot:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\nu}{2(1 - \nu)} z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \\ (44) \quad v &= v_0 + \frac{\nu}{2(1 - \nu)} z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} , \\ w &= - \frac{\nu}{(1 - \nu)} z \varphi . \end{aligned}$$

We hebben nu dus nog twee onbekende functies u_0 en v_0 over, welke worden bepaald door de twee overblijvende evenwichtsvergelijkingen (in x- en y-richting) tezamen met de randvoorwaarden op R (let echter op dat tegelijkertijd ook nog aan (43) moet worden voldaan).

Uit (44) krijgen we met Hooke en met (42) en (43):

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \frac{2G}{(1 - \nu)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] , \\ (45) \quad t_{yy} &= \frac{2G}{(1 - \nu)} \left[\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] , \\ t_{xy} &= \frac{2G}{(1 - \nu)} \left[\frac{(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] . \end{aligned}$$

Door (45) te substitueren in de evenwichtsvergelijkingen in x- en y-richting (met $f_x = f_y = 0$) krijgen we de volgende twee vergelijkingen voor u_0 en v_0 :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} &= 0 , \\ (46) \quad (1 - \nu) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} &= 0 . \end{aligned}$$

Door de eerste vergelijking van (46) naar x te differentieren en de tweede naar y en deze dan bij elkaar op te tellen krijgen we: $\Delta\phi = 0$. De oplossing van (46) voldoet dus automatisch aan (43).

Blijven tenslotte nog over de randvoorwaarden op R . Deze luiden (zie (34)):

$$(47) \quad \begin{aligned} t_{xx}n_x + t_{xy}n_y &= \frac{2G}{(1-\nu)} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) n_x + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) n_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} z^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} n_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_y \right) \right] = t_{0x}^{(n)} + \frac{1}{2} z^2 t_{2x}^{(n)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{xy}n_x + t_{yy}n_y &= \frac{2G}{(1-\nu)} \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) n_x + \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) n_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} z^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_y \right) \right] = t_{0y}^{(n)} + \frac{1}{2} z^2 t_{2y}^{(n)}, \quad \text{op } R. \end{aligned}$$

In bovenstaande randvoorwaarden zijn $t_{0x}^{(n)}$ en $t_{2x}^{(n)}$ voorgeschreven functies. We kunnen nu u_0 en v_0 bepalen uit (46) tezamen met de randvoorwaarden (47) voor $z = 0$. Hiermee zijn u_0 , v_0 en ϕ volledig bepaald. De oplossing is echter alleen dan niet in strijd met (47), indien de spanningen $t_{2x}^{(n)}$ zodanig zijn voorgeschreven dat ook aan de termen met z^2 in (47) is voldaan. We zeggen dat dan de spanningen op goed zijn verdeeld. Dit is dus zo als

$$(48) \quad t_{2x}^{(n)} = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_y \right), \quad t_{2y}^{(n)} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_y \right),$$

op R .

We concluderen hieruit dat, indien de randbelasting op bovenstaande wijze verdeeld is, in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst. Indien de spanningen aan de rand niet goed verdeeld zijn, maar wel statisch equivalent met de "goede" belasting zijn, zal er aan de buurt van de rand geen vlakspanningstoestand heersen. Op grond van het principe van de Saint-Venant gaat deze oplossing echter op enige afstand van de

rand toch weer asymptotisch naar een vlakspanningstoestand toe, zodat dit voor dunne platen dan ook een zeer goede benadering is. Dit geldt des te meer, omdat de "correctieterm" $z^2 t_2^{(n)}$ van de orde (h^2/R^2) t.o.v. $t_0^{(n)}$ is.

Technisch belangrijker dan deze exacte theorie is voor dunne platen echter een twee-dimensionale benaderingstheorie, welke ontstaat door de drie-dimensionale theorie te integreren (of te middelen) over de dikte van de plaat. De aldus verkregen twee-dimensionale toestand noemen we een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

De onbekende grootheden in deze theorie zijn op de eerste plaats de verplaatsingen in x- en y-richting van het middenvlak van de plaat:

$$u_x = u = u(x,y) , \quad u_y = v = v(x,y) ,$$

en drie snedengrootheden

$$N_x(x,y) , \quad N_y(x,y) \quad \text{en} \quad N_{xy}(x,y) ,$$

welke integralen van de spanningen t_{xx} , t_{yy} en t_{xy} over de dikte zijn.
Dus

$$(49) \quad N_x := \int_{-h}^h t_{xx} dz , \quad N_y := \int_{-h}^h t_{yy} dz , \quad N_{xy} := \int_{-h}^h t_{xy} dz .$$

Uit de definities volgt dat N_x , N_y en N_{xy} krachten per lengte-eenheid zijn. N_x en N_y kunnen worden geïnterpreteerd als normaalkrachten en N_{xy} als een afschuifkracht, alle werkende in het vlak van de plaat.

Voor praktische berekeningen wordt echter liever dan met deze snedengrootheden, gewerkt met de gemiddelde spanningen \bar{t}_{xx} , \bar{t}_{yy} en \bar{t}_{xy} gedefinieerd door

$$(50) \quad \begin{aligned} \bar{t}_{xx} &= \frac{N_x}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_{xx} dz , & \bar{t}_{yy} &= \frac{N_y}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_{yy} dz , \\ \bar{t}_{xy} &= \frac{N_{xy}}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_{xy} dz . \end{aligned}$$

Voor de eenvoud van de notatie zullen we in het vervolg de streep boven deze grootheden weglaten; we moeten echter wel blijven bedenken dat we steeds de gemiddelde spanningen bedoelen en niet de exacte. Bij een voldoende nette belasting zal het verschil tussen deze twee echter klein zijn (i.q. $O(h^2/R^2)$). Verder worden in deze theorie t_{xz} , t_{yz} en t_{zz} gelijk aan nul genomen (vanwege de symmetrie zijn \bar{t}_{xz} en \bar{t}_{yz} exact nul, terwijl \bar{t}_{zz} hoogstens $O(h^4/R^4)$ kan zijn).

De gegeneraliseerde vlakspanningstoestand beperkt zich dus duidelijk tot platen die alleen aan hun zijranden worden belast en wel op een symmetrisch in z zijnde wijze (en voldoende glad). Randbelastingen die antisymmetrisch zijn in z en belastingen loodrecht op het vlak van de plaat geven aanleiding tot buiging van de plaat; dit probleem wordt in het parallel-college Sterkteleer behandeld.

Door de evenwichtsvergelijkingen in x - en y -richting te integreren over de dikte, daarbij gebruikmakend van het nul zijn van t_{xz} en t_{yz} op $z = \pm h$, krijgen we een tweetal globale evenwichtsvergelijkingen voor N_x , N_y en N_{xy} . Delen we deze door $2h$ dan krijgen we de "gemiddelde" evenwichtsvergelijkingen:

$$(51) \quad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Een stelsel constitutieve vergelijkingen krijgen we door de relaties (45) te integreren over de dikte en orde (h^2/R^2) -termen te verwaarlozen. Na deling door $2h$ leidt dit tot ($u \equiv u_0$, $v \equiv v_0$)

$$(52) \quad t_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad t_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right);$$

$$t_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Deze vergelijkingen hadden we ook direct kunnen verkrijgen door uit te gaan van $t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0$.

(Vergelijk de constitutieve vergelijkingen voor de vlakspanningstoestand: (13)).

Met (51) en (52) hebben we nu 5 vergelijkingen voor de 5 onbekenden:

u , v , t_{xx} , t_{yy} , t_{xy} , welke alle alleen van x en y afhangen. Mits aangevuld met voldoende randvoorwaarden kunnen we dan in principe het probleem oplossen.

Indien we t_{xx} , t_{yy} en t_{xy} kennen, levert (52) drie vergelijkingen voor de twee onbekenden u en v . Dit stelsel zal in het algemeen niet oplosbaar zijn. Noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid is dat t_{xx} , t_{yy} en t_{xy} voldoen aan de compatibiliteitsvergelijking: (vergelijk (10)):

$$(53) \quad \frac{\partial^2 t_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x \partial y}$$

We kunnen aan (51) voldoen door het invoeren van een Airy-functie $U(x,y)$ zodanig dat

$$(54) \quad t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Door (54) te substitueren in (53) zien we dat $U(x,y)$ moet voldoen aan de bipotentiaalvergelijking

$$(55) \quad \Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

Omdat U moet voldoen aan een bipotentiaalvergelijking, moeten we nu in ieder punt van de rand \mathcal{R} , twee randvoorwaarden voor U formuleren. Deze mogen hoogstens tweede afgeleiden van U bevatten.

Indien de volumekrachten niet nul zijn, lossen we het probleem meestal op door eerst een particuliere oplossing te zoeken waarmee we de volumekrachten elimineren, waarna we het aldus ontstane homogene stelsel trachten op te lossen door het invoeren van een Airy-functie.

Uit de voorgaande afleiding blijkt dat de evenwichtsvergelijkingen (51) exact zijn, maar dat de constitutieve vergelijkingen (52) slechts correct zijn op $O(h^2/R^2)$ -termen na. Deze theorie geldt dus alleen voor dunne platen ($h \ll R$). Verder is hierbij stilzwijgend aangenomen dat termen als:

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = O(h^2/R^2).$$

Dit is niet meer zo indien de variabelen als functie van x en/of y te snel variëren. Deze theorie mag dus niet meer worden toegepast indien de belasting langs de rand te snel (als functie van x of y) varieert: de periode van de variaties in de randbelasting moet van dezelfde orde van grootte zijn als R .

Recapitulatie: Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand

$$t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 .$$

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = 0 , \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = 0 ,$$

$$t_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (e_{xx} + \nu e_{yy}) , \quad \Leftrightarrow e_{xx} = \frac{1}{E} (t_{xx} - \nu t_{yy}) ,$$

$$t_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu e_{xx} + e_{yy}) , \quad \Leftrightarrow e_{yy} = \frac{1}{E} (t_{yy} - \nu t_{xx}) ,$$

$$t_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} e_{xy} , \quad \Leftrightarrow e_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{xy} .$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) .$$

Airy-functie: $U = U(x, y)$, $(\rho f_x = \rho f_y = 0)$

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} , \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad t_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} .$$

met

$$\Delta \Delta U = 0 .$$

Formulering in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} (t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}) , \Leftrightarrow t_{rr} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (e_{rr} + \nu e_{\theta\theta}) ,$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) , \Leftrightarrow t_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu e_{rr} + e_{\theta\theta}) ,$$

$$e_{r\theta} = \frac{(1 + \nu)}{E} t_{r\theta} , \Leftrightarrow t_{r\theta} = \frac{E}{(1 + \nu)} e_{r\theta} ,$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} , \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) .$$

Airy-functie: $U = U(r, \theta)$, $(f_r = f_\theta = 0)$

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} , \quad t_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} ,$$

$$t_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} ,$$

met

$$\Delta \Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 U = 0 .$$

Rotatie-symmetrisch probleem:

$$\nu = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 , \quad (\rightarrow e_{r\theta} = t_{r\theta} = 0) .$$

Onbekenden: $u, e_{rr}, e_{\theta\theta}, t_{rr}, t_{\theta\theta}$: alle functies van r .

$$\frac{dt_{rr}}{dr} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} (t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}) , \Leftrightarrow t_{rr} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (e_{rr} + \nu e_{\theta\theta}) ,$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}) , \Leftrightarrow t_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu e_{rr} + e_{\theta\theta}) ,$$

$$e_{rr} = \frac{du}{dr} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} .$$

Compatibiliteit: $\frac{d}{dr} (r e_{\theta\theta}) - e_{rr} = 0$.

Spanningsfunctie $F(r)$, ($\rho f_r = 0$),

$$t_{rr} = \frac{F(r)}{r}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{dF(r)}{dr},$$

met

$$\Delta F = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{1}{r^2} F,$$

en als algemene oplossing

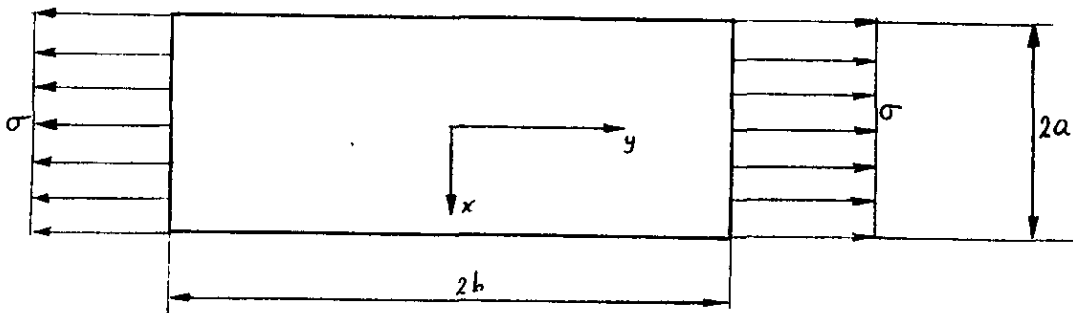
$$F(r) = Ar + \frac{B}{r}.$$

Vragen

1. Beschouw een plaat welke aan zijn rand wordt belast.

Aan welke condities moet deze randbelasting voldoen opdat in de plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst?

2.



Een rechthoekige plaat, $2a \times 2b$, wordt langs de randen $y = \pm b$ belast door een constante normaalspanning σ . De randen $x = \pm a$ zijn spanningsvrij.

- i) Laat zien dat in deze plaat een exacte vlakspanningstoestand heerst.
- ii) Bepaal de spanningsverdeling in de plaat.
- iii) Bepaal de verplaatsingen. Wat is de dikte van de plaat na de deformatie?

3. Wat verstaat U onder een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand? Welke eisen worden hierbij aan de belasting gesteld?
4. Welke zijn de onbekenden in de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand (G.V.S.T.)? Welke vergelijkingen heeft U hiervoor? Welke vergelijkingen gelden exact en welke niet? Is deze theorie statisch bepaald of onbepaald?
5. Wat is de orde van grootte van de fouten in G.V.S.T.? Geef twee voorbeelden van problemen waarvoor G.V.S.T. niet mag worden toegepast.
6. Leidt de globale evenwichtsvergelijkingen voor G.V.S.T. af uit de locale. Bewijs dat de derde (in z-richting) locale evenwichtsvergelijking identiek: $0 = 0$ geeft.
7. Leidt de compatibiliteitsvergelijking (53) af.
8. Neem de volumekrachten nul ($f_x = f_y = 0$). Hoe kunt U nu identiek aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen en welke vergelijking ontstaat dan? Formuleer de randvoorwaarden indien langs R de kracht per lengte-eenheid: $\underline{T} = (T_x, T_y)$ is voorgeschreven.
9. Laat $U(x,y)$ een Airy-functie zijn. Bewijs dan dat de verplaatsingen voldoen aan

$$E u = - (1 + \nu) \frac{\partial U}{\partial x} + p(x,y) ; \quad E v = - (1 + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} + q(x,y) ,$$

waarbij

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial y} = \Delta U .$$

10. Van de zes volgende functies kunnen er vier worden gebruikt als Airy-functies en twee niet. Bepaal deze twee en bereken voor de overige vier de bijbehorende spanningen.

- a) $U_1(x,y) = C \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) ;$
- b) $U_2(x,y) = C \left[x^2 (y^3 - 3c^2 y + 2c^3) - \frac{y^3}{5} (y^2 - 2c^2) \right] ;$
- c) $U_3(x,y) = C \left[x^4 + \frac{1}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{5} xy^5 \right] ;$
- d) $U_4(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 ,$
- e) $U_5(r) = C r \ln r ,$
- f) $U_6(r,\theta) = [C_1 r^2 + C_2 r^4 + C_3 r^{-2} + C_4] \cos 2\theta .$

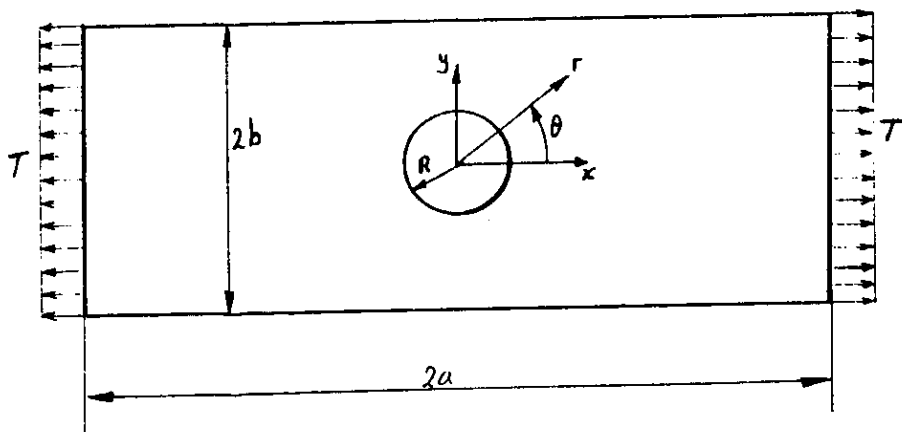
11. Beschouw de functie: $U(r) = Cr^2 \ln r$.

- i) Bewijs dat deze functie aan de bipotentiaalvergelijking voldoet (en dus een Airy-functie is).
- ii) Bepaal de hierbij behorende spanningen en deformaties. Laat zien dat deze niet aan de compatibiliteitsvergelijking (21) voldoen, maar wel aan (16).
- iii) Probeer uit de bij ii) gevonden deformaties de verplaatsing $u(r)$ te bepalen. Laat zien dat dit niet kan.
- iv) Laat zien dat het wél bij ii) behorende verplaatsingsveld luidt

$$u = 2(1-\nu)r \ln r - (1+\nu) , \quad v = 4\theta r ,$$

hetgeen ten eerste niet rotatie-symmetrisch is en ten tweede niet-eenduidig als θ alle waarden kan aannemen (d.w.z. als θ niet begrensd is tot een gebied kleiner dan 2π).

3.2.1. Voorbeeld: Rek van een plaat met een cirkelvormig gat



In deze paragraaf beschouwen we een voorbeeld van een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

Een rechthoekige plaat ($2a \times 2b$) met een cirkelvormig gat (straal R) wordt langs de randen $x = \pm a$ belast door een uniforme trekspanning T . Gevraagd wordt de spanningsverdeling in de plaat en in het bijzonder de spanningsconcentratie aan de rand van het gat.

Om de oplossing te vereenvoudigen zullen we aannemen dat de afmetingen van de plaat veel groter zijn dan die van het gat ($a \gg R$, $b \gg R$); in feite zullen we aannemen dat de plaat oneindig groot is. Op zeer grote afstand van het gat heerst dan de uniforme spanningsverdeling

$$(56) \quad t_{xx} = T, \quad t_{xy} = t_{yy} = 0, \quad \text{voor } r \rightarrow \infty.$$

Door de spanningen te transformeren op poolcoördinaten volgens *)

$$(57) \quad \begin{aligned} t_{rr} &= t_{xx} \cos^2 \theta + t_{yy} \sin^2 \theta + 2t_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ t_{\theta\theta} &= t_{xx} \sin^2 \theta + t_{yy} \cos^2 \theta - 2t_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ t_{r\theta} &= (t_{yy} - t_{xx}) \sin \theta \cos \theta + t_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

wordt (56)

$$(58) \quad \left. \begin{aligned} t_{rr} &= T \cos^2 \theta = \frac{1}{2}T(1 + \cos 2\theta), \\ t_{\theta\theta} &= T \sin^2 \theta = \frac{1}{2}T(1 - \cos 2\theta), \\ t_{r\theta} &= -T \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}T \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad \text{voor } r \rightarrow \infty.$$

Geleid door de vorm van deze condities op oneindig, proberen we een Airy-functie $U(r, \theta)$ van de vorm

$$(59) \quad U(r, \theta) = U_1(r) + U_2(r) \cos 2\theta.$$

Met (17) krijgen we dan voor de spanningen

*) (Leidt deze relaties zelf af door het x-y-stelsel over θ te verdraaien).

$$t_{rr} = \frac{1}{r} U_1'(r) + \left[\frac{1}{r} U_2'(r) - \frac{4}{r^2} U_2(r) \right] \cos 2\theta ,$$

$$(60) \quad t_{r\theta} = \left[-\frac{2}{r^2} U_2(r) + \frac{2}{r} U_2'(r) \right] \sin 2\theta ,$$

$$t_{\theta\theta} = U_1''(r) + U_2''(r) \cos 2\theta .$$

De functie $U_1(r)$ moet voldoen aan de θ -onafhankelijke bipotentiaalvergelijking:

$$(61) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 U_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1(r)}{dr} \right) = 0 .$$

De algemene oplossing van deze vergelijking luidt:

$$U_1(r) = A_1 \log r + B_1 r^2 \log r + C_1 r^2 + D_1 .$$

De algemene oplossing bevat echter een oneigenlijke term, nl.

$$B_1 r^2 \log r ,$$

welke is ontstaan doordat in de afleiding van de bipotentiaalvergelijking eenmaal naar r gedifferentieerd is. Deze term geeft namelijk aanleiding tot een deformatieveld dat niet voldoet aan de θ -onafhankelijke compatibiliteitsvergelijking (21). Immers, met (zie (17))

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} , \quad t_{\theta\theta} = \frac{d^2 U_1}{dr^2} , \quad t_{r\theta} = 0 ,$$

en met Hooke vinden we

$$(63) \quad e_{rr} = \frac{1}{E} [2(1-\nu) \log r + 1 - 3\nu] , \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [2(1-\nu) \log r + 3 - \nu] ,$$

een deformatieveld dat niet voldoet aan (21). Deze term moet dus worden verworpen ^{*)}. Verder mag ook $D_1 = 0$ worden genomen, omdat deze toch geen bijdrage geeft tot de spanningen en deformaties. We houden dus over

$$(64) \quad U_1(r) = A_1 \log r + C_1 r^2$$

^{*)} Zie ook Vraag 11 na § 3.2.

Opmerking: Dat het deformatieveld volgens (63) niet compatibel is, heeft zijn diepere oorzaak in het feit dat e_{zz} , welke evenredig is met $(e_{rr} + e_{\theta\theta})$, géén lineaire functie in x en y is, en dus niet aan de compatibiliteitsvergelijkingen voldoet (zie ook opmerking na verg. (13)).

Opgave: Ga na dat het bij (64) behorende spanningsveld overeenkomt met dat volgens (27).

De tweede functie $U_2(r)$ moet voldoen aan de volgende vergelijking, welke we verkrijgen door: $U_2(r) \cos 2\theta$ te substitueren in (18) - (19):

$$(65) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 U_2(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2(r)}{dr} - \frac{4}{r^2} U_2(r) \right) = 0 .$$

De algemene oplossing van deze vergelijking luidt

$$(66) \quad U_2(r) = A_2 r^2 + B_2 r^4 + C_2 \frac{1}{r^2} + D_2 .$$

Door (64) en (66) te substitueren in (60) krijgen we de volgende uitdrukkingen voor de spanningen:

$$(67) \quad \begin{aligned} t_{rr} &= \left(A_1 \frac{1}{r^2} + C_1 \right) - \left(2A_2 + \frac{6C_2}{r^4} + \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta , \\ t_{\theta\theta} &= \left(-A_1 \frac{1}{r^2} + C_1 \right) + \left(2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos 2\theta , \\ t_{r\theta} &= \left(2A_2 + 6B_2 r^2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{2D_2}{r^2} \right) \sin 2\theta . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat aan de condities voor $r \rightarrow \infty$ volgens (58) is voldaan als

$$(68) \quad C_1 = \frac{1}{2}T , \quad A_2 = -\frac{1}{2}T \quad \text{en} \quad B_2 = 0 .$$

Blijft nog te voldoen aan de randvoorwaarden aan de rand van het gat. Aangezien deze rand spanningsvrij is, moet daar gelden

$$(69) \quad t_{rr} = t_{r\theta} = 0 , \quad \text{voor } r = R .$$

Met (67) en (68) geeft dit:

$$(70) \quad \begin{aligned} \frac{A_1}{R^2} &= -\frac{1}{2}T, & \frac{6C_2}{R^4} + \frac{4D_2}{r^2} &= \frac{1}{2}T, \\ & & -\frac{6C_2}{R^4} - \frac{2D_2}{R^2} &= \frac{1}{2}T, \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$(71) \quad A_1 = -\frac{1}{2}TR^2, \quad C_2 = -\frac{1}{4}TR^4, \quad D_2 = \frac{1}{2}TR^2.$$

Hiermee krijgen we dan voor de spanningsverdeling:

$$(72) \quad \begin{aligned} t_{rr} &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\ t_{\theta\theta} &= \frac{T}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{T}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{T}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt voor $t_{\theta\theta}$ op $r = R$:

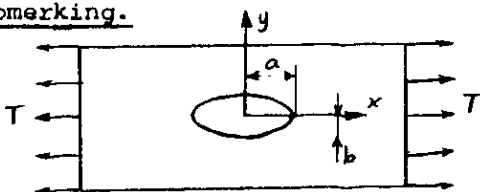
$$(73) \quad t_{\theta\theta}(R, \theta) = T - 2T \cos 2\theta,$$

waaruit direkt volgt dat $t_{\theta\theta}$ maximaal is voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ of $\theta = \frac{3\pi}{2}$ en daar gelijk is aan

$$(74) \quad (t_{\theta\theta})_{\max} = 3T.$$

Indien er geen gat zou zijn, zou de spanning hier gelijk aan T zijn. De spanningsconcentratie-factor t.g.v. het cirkelvormige gat is drie.

Opmerking.

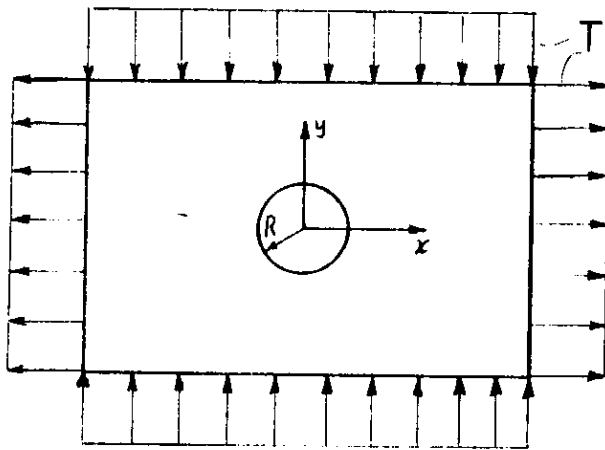


Indien we i.p.v. een cirkelvormig gat een ellipsvormig gat hebben (volgens figuur) is de spanningsconcentratie:

$$(75) \text{ en } \begin{aligned} & \left(1 + \frac{2b}{a}\right), \quad \text{als } b \geq a, \\ & \left(1 + \frac{2a}{b}\right), \quad \text{als } b \leq a. \end{aligned}$$

We zien dat deze waarden voor $a = b = R$ overeenkomen met die van de cirkel.

Verder zien we dat als $(a/b) \rightarrow 0$ (d.i. een scheur loodrecht op de trekrichting) de spanningsconcentratie ∞ wordt, terwijl voor $(b/a) \rightarrow 0$ (scheur in trekrichting) deze één wordt (dus géén spanningsconcentratie).



Tot slot bekijken we nog het probleem van een plaat met een cirkelvormig gat met op oneindig behalve een trekspanning T in x -richting ook nog een drukspanning T in y -richting. In plaats van (56) hebben we hier

$$(76) \quad t_{xx} = T, \quad t_{yy} = -T, \quad t_{xy} = 0.$$

Op oneindig is de plaat dus in een toestand van pure afschuiving (langs de diagonalen).

De oplossing van dit probleem wordt verkregen door op de oplossing (72) te superponeren de spanningen die ontstaan, indien in (72) T door $-T$ en θ door $\theta + \frac{\pi}{2}$ wordt vervangen.

Langs de rand van het gat vinden we dan (vergelijk (73))

$$(77) \quad \begin{aligned} t_{\theta\theta}(R, \theta) &= T - 2T \cos 2\theta - [T - 2T \cos(2\theta - \pi)] = \\ &= -4T \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ krijgen we

$$(78) \quad (t_{\theta\theta})_{\max} = 4T,$$

zodat we voor dit geval dus een spanningsconcentratiefactor van vier hebben.

3.2.2. Energieprincipes toegepast op rek van platen

We zullen in deze paragraaf de in § 1.5 afgeleide energieprincipes gaan toepassen op twee-dimensionale problemen, meer speciaal op de (gegeneraliseerde) vlakspanningstoestand.

In een (gegeneraliseerde) vlakspanningstoestand zijn

$$(79) \quad t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 .$$

Van de elastische energie $W(S)$ blijft dan over

$$(80) \quad W(S) = \frac{1}{2} \int_V t_{ij} e_{ij} dV = h \int_S (t_{xx} e_{xx} + 2t_{xy} e_{xy} + t_{yy} e_{yy}) dx dy ,$$

waarin S het oppervlak van de plaat voorstelt, terwijl $2h$ de dikte van de plaat is.

Met de constitutieve vergelijkingen voor de (gegeneraliseerde) vlakspanningstoestand kunnen we $W(S)$ uitdrukken in alleen e_{ij} of alleen t_{ij} , hetgeen leidt tot

$$(81) \quad W^{(e)}(S) = \frac{hE}{(1-\nu^2)} \int_S \{e_{xx}^2 + 2\nu e_{xx} e_{yy} + e_{yy}^2 + 2(1-\nu)e_{xy}^2\} dx dy ,$$

respectievelijk

$$(82) \quad W^{(t)}(S) = \frac{h}{E} \int_S \{t_{xx}^2 - 2\nu t_{xx} t_{yy} + t_{yy}^2 + 2(1+\nu)t_{xy}^2\} dx dy .$$

Voor de overeenkomstige uitdrukkingen voor de vlakke vervormingstoestand verwijzen we naar vraag 1.

We zullen ons nu in het vervolg van deze paragraaf beperken tot de rek van platen (gegeneraliseerde vlakspanningstoestand). De resultaten die we zullen verkrijgen zijn echter ook met geringe, triviale aanpassingen toe te passen op andere twee-dimensionale problemen (V.V.T. of V.S.T.).

Aangezien bij platenrek de uitwendige belasting geen component in de z -richting mag hebben, d.w.z.

$$(83) \quad f_z^* = t_z^* = u_z^* = 0 ,$$

worden de uitdrukkingen voor de potentiële en de complementaire energie hier

$$(84) \quad U(S) = W^{(e)}(S) - 2h \int_S (f_x^* u_x + f_y^* u_y) dx dy - 2h \int_{R_p} (t_x^* u_x + t_y^* u_y) ds ,$$

en

$$(85) \quad U^*(S) = W^{(t)}(S) - 2h \int_{R_u} (t_x u_x^* + t_y u_y^*) ds ,$$

waarin R_p en R_u resp. het deel van de rand R van de plaat zijn waar de spanningen resp. de verplaatsingen zijn voorgeschreven.

Door op analoge wijze als in § 1.5 in (84) en (85) de echte oplossing S te vervangen door een kinematisch resp. statisch toelaatbaar stelsel krijgen we uitdrukkingen voor de potentiële en de complementaire energiefunctionaal, waarvoor soortgelijke stellingen als in § 1.5 afgeleid gelden.

Als kinematisch toelaatbaar stelsel kunnen we eenvoudig elk voldoende continu (bijv. een polynoom) verplaatsingsveld $u(x,y)$, $v(x,y)$ kiezen dat aan de randvoorwaarden op R_u voldoet, dus

$$(86) \quad \underline{S}: \{ \bar{u}_x = u(x,y), \bar{u}_y = v(x,y) \mid u,v \in C^2, u = u_x^*, v = u_y^* \text{ op } R_u \} .$$

Voor de keuze van een statisch toelaatbaar stelsel zullen we ons hier beperken tot problemen waarin geen volumekrachten optreden. Indien de volumekrachten ongelijk aan nul zijn, moeten we deze eerst elimineren m.b.v. een particuliere oplossing.

In het geval dat de volumekrachten nul zijn

$$f_x^* = f_y^* = 0 ,$$

kunnen we een statisch toelaatbaar stelsel kiezen in de vorm

$$(87) \quad t_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} , \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad t_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} ,$$

waarmee aan de evenwichtsvergelijkingen is voldaan, maar waarbij echter nog wel aan de randvoorwaarden op R_p moet worden voldaan. $U(x,y)$ hoeft nu echter niet meer persé een bipotentiaalfunctie te zijn. $U(x,y)$ moet dus nog wel zodanig worden gekozen dat

$$t_{xx} n_x + t_{xy} n_y = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) n_x - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_y = t_x^*,$$

$$t_{xy} n_x + t_{yy} n_y = - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) n_y = t_y^*, \quad \text{op } R_p.$$

Bij gecompliceerde randen en/of randbelastingen kan deze laatste eis het construeren van een statisch toelaatbaar stelsel \underline{S} nog wel eens bemoeilijken. We concluderen hieruit dat de constructie van een \bar{S} in het algemeen eenvoudiger is dan die van een \underline{S} , maar daar staat tegenover dat \underline{S} dikwijls dichter bij de exacte oplossing zit.

Met bovenstaande keuzen voor \bar{S} en \underline{S} krijgen we de volgende uitdrukkingen voor de potentiële en de complementaire energiefunctieaal, geldend voor rek van vlakke, dunne platen,

$$(89) \quad U(\bar{S}) = \frac{hE}{(1-\nu^2)} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\ - 2h \int_{R_p} (t_x^* u_x + t_y^* u_y) ds,$$

en

$$(90) \quad U^*(\underline{S}) = \frac{h}{E} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \\ - 2h \int_{R_u} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) n_x - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_y \right] u_x^* + \right. \\ \left. + \left[- \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) n_y \right] u_y^* \right\} ds.$$

Deze laatste uitdrukking vereenvoudigt nog aanmerkelijk in het veel voorkomende geval dat de voorgeschreven verplaatsingen nul zijn (opleggingen, in-klemmingen), in welk geval de laatste randintegraal in (90) verdwijnt.

We besluiten deze paragraaf met het geven van de formules (89) en (90) in poolcoördinaten. Gebruikmakend van de formules als gegeven in de recapitulatie aan het einde van § 3.2 kunnen we afleiden dat (we geven alleen de resultaten; de afleiding laten we aan de lezer over: zie vraag 3)

$$(91) \quad \bar{S}: \{\bar{u}_r = u(r, \theta), \bar{u}_\theta = v(r, \theta) \mid u, v \in C^2, u = u_r^*, v = u_\theta^* \text{ op } R_u\},$$

$$(92) \quad U(\bar{S}) = \frac{hE}{(1-\nu^2)} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta + \\ - 2h \int_{R_p} (t_r^* u + t_\theta^* v) ds,$$

en

$$(93) \quad \underline{S} = \left\{ t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, t_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, t_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \mid \right. \\ \left. u(r, \theta) \in C^2; \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) n_r + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) n_\theta = t_r^*, \right. \\ \left. \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) n_r + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) n_\theta = t_\theta^*, \text{ op } R_p \right\},$$

en, met $\underline{u}_r^* = \underline{u}_\theta^* = 0$ op R_u :

$$(94) \quad U^*(\underline{S}) = \frac{h}{E} \int_S \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)^2 + 2(1+\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta.$$

Recapitulatie

Insluittheorema voor rek van platen, voor $\underline{u}_i^* = 0$ op R_u :

$$- \frac{h}{E} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \leq$$

$$\begin{aligned} \leq -U^*(S) = U(S) \leq & \frac{hE}{(1-\nu^2)} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\ & - 2h \int_{R_p} (t_x^* u_x + t_y^* u_y) ds , \end{aligned}$$

met

$$u, v \in C^2, \quad u = u_x^* = 0, \quad v = u_y^* = 0, \quad \text{op } R_u,$$

en

$$\begin{aligned} U(x, y) \in C^2, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) n_x - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_y &= t_x^*, \\ - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) n_y &= t_y^*, \quad \text{op } R_p. \end{aligned}$$

Vragen

1. Bewijs dat de uitdrukkingen (81) en (82) voor de vlakke vervormingstoestand overgaan in

$$W^{(e)}(S) = \frac{hE}{(1-\nu^2)} \int_S \{ (1-\nu) (e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + 2\nu e_{xx} e_{yy} + 2(1-2\nu) e_{xy}^2 \} dx dy ,$$

$$W^{(t)}(S) = \frac{(1+\nu)h}{E} \int_S \{ (1-\nu) (t_{xx}^2 + t_{yy}^2) - 2\nu t_{xx} t_{yy} + 2t_{xy}^2 \} dx dy .$$

2. Pas het insluittheorema toe op een rechthoekige plaat onder constante eenassige rek (zie vraag 2 bij § 3.2). Ga na of U zo de exacte oplossing kunt vinden.
3. Leidt de vergelijkingen (91) t/m (94) af.
4. Bewijs, uitgaande van (91) t/m (94), dat het insluittheorema voor een rotatiesymmetrisch probleem:

$$u_r = u_r(r) , \quad u_\theta = 0 , \quad t_\theta^* = 0$$

reduceert tot ($u_r^* = 0$ op R_u ; $r \in [R_1, R_2]$)

$$\begin{aligned} & - \frac{2\pi h}{E} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \left(\frac{1}{r} U' \right)^2 - \frac{2\nu}{r} U' U'' + (U'')^2 \right\} r dr \leq -U^*(S) = U(S) \leq \\ & \leq \frac{2\pi h E}{(1-\nu^2)} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ (u')^2 + \frac{2\nu}{r} uu' + \frac{u^2}{r^2} \right\} r dr - 2h \int_{R_P} t_r^* u ds , \end{aligned}$$

met

$$u(r) \in C^2 \quad \text{en} \quad u = u_r^* = 0 , \quad \text{op } R_u ,$$

$$U(r) \in C^2 \quad \text{en} \quad \frac{1}{r} U' = t_r^* , \quad \text{op } R_P .$$

Schrijf bovenstaande formulering ook uit in de spanningsfunctie $F(r)$ als geïntroduceerd in (23).

Pas bovenstaande toe op een volle, cirkelvormige plaat aan zijn rand belast door een constante normaalspanning σ . Ga na of U zo de exacte oplossing kunt vinden.

5. Bewijs, uitgaande van (91) t/m (94), dat het insluittheorema voor een zogenaamd torsie-probleem:

$$u_r = 0 , \quad u_\theta = u_\theta(r) , \quad t_r^* = 0 , \quad \left(\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} =: V(r) \right)$$

reduceert tot ($u_\theta^* = 0$, op R_u , $r \in [R_1, R_2]$)

$$\begin{aligned} & - \frac{2\pi h}{E} \int_{R_1}^{R_2} \frac{2(1+\nu)}{r^4} (v - r v')^2 r dr \leq -U^*(S) = U(S) \leq \\ & \leq \frac{2\pi h E}{(1-\nu^2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{(1-\nu)}{2} \left(v' - \frac{v}{r} \right)^2 r dr - 2h \int_{R_P} t_\theta^* v ds , \end{aligned}$$

met:

$$v(r) \in C^2 \quad \text{en} \quad v = u_{\theta}^* = 0, \quad \text{op } R_u,$$

$$v(r) \in C^1 \quad \text{en} \quad \frac{1}{r^2} v - \frac{1}{r} v' = t_{\theta}^*, \quad \text{op } R_p.$$

Pas bovenstaande toe op een cirkelvormige schijf met een gat, aan zijn buitenrand belast door een constante schuifspanning τ , waarvan de binnenrand vastgehouden wordt. Ga na of U zo de exacte oplossing kunt vinden.

LITERATUUR

- Timoshenko, S & J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw Hill B.C.,
New York, 1951.
- Sokolnikoff, I.S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw Hill B.C.,
New York, 1956.
- Love, A.E.H., Mathematical Theory of Elasticity, Dover Pub., New York, 1926.
- Filonenko-Borodich, M., Theory of Elasticity, Foreign Languages Publishing
House, Moskou.
- Godfrey, D.E.R., Theoretical Elasticity and Plasticity for Engineers,
Thames and Hudson, London 1959.
- Timoshenko, S., & S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells,
McGraw-Hill, New York, 1940.
- Lure, A.I., Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity,
Interscience Publishers, New York, 1964.

APPENDIX: Transformatie van cartesische coördinaten naar orthogonale kromlijnige coördinaten

A.1. Algemene relaties

Laat

(A.1) $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$: een stelsel cartesische coördinaten zijn en

(A.2) $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$: een stelsel orthogonale kromlijnige coördinaten.

Laat verder het verband tussen \underline{x} en \underline{q} gegeven zijn door

(A.3) $\underline{x} = \underline{x}(q_1, q_2, q_3)$.

We definiëren een bij (q_1, q_2, q_3) behorend rechtsdraaiend, orthogonaal stelsel eenheidsvectoren: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ door:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_1}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_2}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_3},$$

of

$$(A.4) \quad \underline{e}_a = \frac{1}{h_a} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_a}, \quad (a = 1, 2, 3; \text{NIET SOMMEREN over } a),$$

waarin h_a de schaalfactoren zijn, gedefinieerd door

$$(A.5) \quad h_a = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_a} \right|, \quad (a = 1, 2, 3) \quad *).$$

Laat \underline{v} een (willekeurig) vectorveld zijn en T een 2-tensor (\equiv matrix).

Betrokken op de \underline{e}_a -basis kunnen we deze schrijven als:

$$(A.6) \quad \underline{v} = \sum_{a=1}^3 v_a \underline{e}_a, \quad T = \sum_{a,b=1}^3 T_{ab} \underline{e}_a \underline{e}_b,$$

met

$$(A.7) \quad v_a = (\underline{v}, \underline{e}_a) \quad \text{en} \quad T_{ab} = (\underline{e}_a, T \underline{e}_b).$$

*) Zie Collegedictaat Wiskunde 40, § 1.9. Zie ook Lure, §§ 1.6-1.7.

Hiermee krijgen we voor de \underline{e}_a -component van de $\underline{\nabla}$ -operator ($\underline{\nabla} = \partial/\partial \underline{x}$)

$$(A.8) \quad (\underline{\nabla})_a = (\underline{e}_a, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}) = (\frac{1}{h_a} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_a}, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}) = \frac{1}{h_a} \frac{\partial}{\partial q_a},$$

of

$$(A.9) \quad \underline{\nabla} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{h_a} \underline{e}_a \frac{\partial}{\partial q_a}.$$

We starten met de bepaling van de componenten van de deformatietensor

$$(A.10) \quad E = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} u + (\underline{\nabla} u)^T].$$

Hiertoe bepalen we eerst

$$(A.11) \quad F = \underline{\nabla} u.$$

Met (A.6)¹ en (A.9) vinden we

$$(A.12) \quad \begin{aligned} F &= \sum_{a,b=1}^3 \frac{1}{h_a} \underline{e}_a \frac{\partial}{\partial q_a} (u_{b-b}) = \\ &= \sum_{c,d=1}^3 \left\{ \frac{1}{h_d} \frac{\partial u}{\partial q_d} \underline{e}_d \underline{e}_c + \frac{u}{h_d} \underline{e}_d \frac{\partial \underline{e}_c}{\partial q_d} \right\}. \end{aligned}$$

Met (A.7)² en de orthogonaliteitseigenschap

$$(A.13) \quad (\underline{e}_a, \underline{e}_b) = \delta_{ab}.$$

krijgen we dan uit (A.12)

$$(A.14) \quad F_{ab} = (\underline{e}_a, F \underline{e}_b) = \frac{1}{h_a} \frac{\partial u_b}{\partial q_a} + \sum_{c=1}^3 \frac{u_c}{h_a} \left(\frac{\partial \underline{e}_c}{\partial q_a}, \underline{e}_b \right).$$

Met (A.10) vinden we dan de volgende algemene uitdrukking voor de componenten van de (lineaire) deformatietensor t.o.v. orthogonale kromlijnige coördinaten.

$$(A.15) \quad E_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_a} \frac{\partial u_b}{\partial q_a} + \frac{1}{h_b} \frac{\partial u_a}{\partial q_b} \right) + \sum_{c=1}^3 \frac{u_c}{2} \left\{ \frac{1}{h_a} \left(\frac{\partial e_c}{\partial q_a}, e_b \right) + \frac{1}{h_b} \left(\frac{\partial e_c}{\partial q_b}, e_a \right) \right\}.$$

We wijzen er hier nog op dat de combinatie

$$\left(\frac{\partial e_c}{\partial q_a}, e_b \right)$$

bij toepassingen op speciale coördinatensystemen slechts bij enkele waarden van (a,b,c) een bijdrage ongelijk aan nul levert. Zo is, bijvoorbeeld, bij cylindercoördinaten deze term alleen $\neq 0$ voor

$$(a,b,c) = (2,2,1) \text{ of } (2,1,2).$$

Als tweede zullen we gaan uitwerken de evenwichtsvergelijkingen

$$(A.16) \quad (\underline{\nabla}, \underline{T})^T + \rho \underline{f} = 0,$$

waarin \underline{T} dus de spanningstensor is en \underline{f} de volumekracht.

Met (A.7)² en (A.9) kunnen we de eerste term in (A.16) uitschrijven tot:

$$(A.17) \quad \begin{aligned} (\underline{\nabla}, \underline{T})^T &= \sum_{a,b,c=1}^3 \left(\frac{1}{h_c} e_c, \frac{\partial}{\partial q_c} (T_{ab} e_b e_a) \right) = \\ &= \sum_{a,b,c=1}^3 \frac{1}{h_c} \left\{ \frac{\partial T_{ab}}{\partial q_c} (e_c, e_b) e_a + T_{ab} (e_c, \frac{\partial e_b}{\partial q_c}) e_a + \right. \\ &\quad \left. + T_{ab} (e_c, e_b) \frac{\partial e_a}{\partial q_c} \right\} = \\ &= \sum_{a,b=1}^3 \frac{1}{h_b} \frac{\partial T_{ab}}{\partial q_b} e_a + \sum_{a,b,c=1}^3 \frac{1}{h_c} T_{ab} \left(\frac{\partial e_b}{\partial q_c}, e_c \right) e_a + \\ &\quad + \sum_{c,b=1}^3 \frac{1}{h_b} T_{cb} \frac{\partial e_c}{\partial q_b}, \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van (A.13).

Door (A.17) te substitueren in (A.16) en vervolgens de \underline{e}_a -component hiervan te nemen (m.b.v. (A.7)¹) krijgen we de volgende algemene uitdrukking voor de evenwichtsvergelijkingen in orthogonale kromlijnige coördinaten:

$$(A.18) \quad \sum_{b=1}^3 \frac{1}{h_b} \frac{\partial T_{ab}}{\partial q_b} + \sum_{b,c=1}^3 \frac{1}{h_c} T_{ab} \left(\frac{\partial \underline{e}_b}{\partial q_c}, \underline{e}_c \right) + \sum_{b,c=1}^3 \frac{1}{h_b} T_{cb} \left(\frac{\partial \underline{e}_c}{\partial q_b}, \underline{e}_a \right) + \rho f_a = 0 .$$

Als een voorbeeld zullen we deze algemene uitdrukkingen nu gaan uitwerken voor het geval van cylindercoördinaten.

A.2. Cylindercoördinaten

We passen het voorgaande toe op cylindercoördinaten (r, θ, z) ; dus voor

$$(A.19) \quad q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = z .$$

Dan is

$$(A.20) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z ,$$

of

$$(A.21) \quad \underline{x}(q) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) .$$

(A.5) en (A.4) geeft dan achtereenvolgens

$$h_1 = h_r = |(\cos \theta, \sin \theta, 0)| = 1 ,$$

$$(A.22) \quad h_2 = h_\theta = |(-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)| = r ,$$

$$h_3 = h_z = |(0, 0, 1)| = 1$$

en (in cartesische componenten t.o.v. $x_1 x_2 x_3$ -stelsel)

$$(A.23) \quad \underline{e}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \underline{e}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \underline{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

Uit (A.23) volgt

$$(A.24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial e_{-c}}{\partial q_1} = \frac{\partial e_{-c}}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial e_{-c}}{\partial q_3} = \frac{\partial e_{-c}}{\partial z} = 0, \quad (c = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial e_{-1}}{\partial q_2} = \frac{\partial e_{-1}}{\partial \theta} = e_{-2}, \quad \frac{\partial e_{-2}}{\partial q_2} = \frac{\partial e_{-2}}{\partial \theta} = -e_{-1}, \quad \frac{\partial e_{-3}}{\partial q_2} = \frac{\partial e_{-3}}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de term

$$\left(\frac{\partial e_{-c}}{\partial q_a}, e_{-b} \right)$$

alleen iets geeft voor $a = 2$ en voor $(b, c) = (1, 2)$ of $(2, 1)$ en wel voor

$$(A.25) \quad \begin{aligned} (a, b, c) = (2, 2, 1) : \left(\frac{\partial e_{-1}}{\partial q_2}, e_{-2} \right) &= 1, \\ (a, b, c) = (2, 1, 2) : \left(\frac{\partial e_{-2}}{\partial q_2}, e_{-1} \right) &= -1. \end{aligned}$$

Hiermee kan (A.15) nu worden uitgeschreven en krijgen we

$$(A.26) \quad \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r, \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Voor de uitwerking van de evenwichtsvergelijkingen gebruiken we dat volgens (A.25) moet gelden

$$(A.27) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial e_{-b}}{\partial q_c}, e_{-c} \right) &= \delta_{c2} \delta_{b1}, \\ \left(\frac{\partial e_{-c}}{\partial q_b}, e_{-a} \right) &= \delta_{b2} (\delta_{c1} \delta_{a2} - \delta_{a1} \delta_{c2}), \end{aligned}$$

waarmee (A.18) reduceert tot

$$(A.28) \quad \sum_{b=1}^3 \frac{1}{h_b} \frac{\partial T_{ab}}{\partial q_b} + \frac{1}{r} T_{ar} + \frac{1}{r} (\delta_{a2} T_{r\theta} - \delta_{a1} T_{\theta\theta}) + \rho f_a = 0 .$$

Uitgeschreven voor $a = 1, 2, 3$ resp. geeft dit ($T_{ab} = T_{ba}$)

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \rho f_r = 0 ,$$

$$(A.29) \quad \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} + \rho f_{\theta} = 0 ,$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} T_{rz} + \rho f_z = 0 .$$

Opmerking

De algemene uitdrukkingen voor de compatibiliteitsvergelijkingen in kromlijnige coördinaten zijn zeer ingewikkeld. De daar in geïnteresseerde lezer kan deze vinden in *LURE*, § 1.7. Daar zijn ook de uitgeschreven compatibiliteitsvergelijkingen in cylindercoördinaten te vinden (pag. 33, verg. (1.7.9)).

OPGAVEN

1. Leid zelf de volgende relaties voor de deformaties en de evenwichtsvergelijkingen in bolcoördinaten (r, θ, φ) af:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} ,$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r ,$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_{\theta} \cotan \theta + \frac{1}{r} u_r ,$$

$$2e_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta} - u_{\varphi} \cotan \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \varphi} ,$$

$$2e_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi} ,$$

$$2e_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

en:

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2t_{rr} - t_{\varphi\varphi} - t_{\theta\theta} + t_{r\theta} \cotan \theta}{r} + \rho f_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{3t_{r\varphi} + 2t_{\theta\varphi} \cotan \theta}{r} + \rho f_{\varphi} = 0 ,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3t_{r\theta} + (t_{\theta\theta} - t_{\varphi\varphi}) \cotan \theta}{r} + \rho f_{\theta} = 0 .$$

2. Leid, uitgaande van verg. (1.7.9), pag. 33 van *LURE*, de volgende compatibiliteitsvergelijking in poolcoördinaten af voor een rotatiesymmetrisch, tweedimensionaal probleem:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} = 0 .$$

Bewijs hiermee tevens dat voor het kunnen bestaan van zo'n vlakke toestand noodzakelijk is dat e_{zz} onafhankelijk is van r .