

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

Speciale problemen uit de
PLASTICITEITSTHEORIE

Syllabus naar het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1981

Syllabus verzorgd door

Dr.ir. A.A.F. van de Ven

Bike Mag



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.295
Prijs f. 2,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Aspecten van de continuumsmechanica

Onderdeel van Fysica 40 (W-IV)
Prof.dr. J.B. Alblas

Deel 3
Speciale problemen uit de

Plasticiteitstheorie

(inclusief vraagstukken)

Syllabus verzorgd door
dr.ir. A.A.F. van de Ven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

ASPECTEN VAN DE CONTINUUMSMECHANICA

Onderdeel van Fysica 40 (W - IV)

Prof.dr. J.B. Alblas

DEEL 3

Speciale problemen uit de

PLASTICITEITSTHEORIE

(incl.Vraagstukken)

Verzorgd door: Dr.Ir. A.A.F. van de Ven

Voorjaarssemester 1981

Inhoudsopgave	pag.
H.1. Basisvergelijkingen	1
H.2. Plastische torsie van een cirkelcylinder:	
2.1. Begin van vloeien	7
2.2. Elastoplastische torsie. Bezwijkwaarde	8
2.3. Residuspanningen	11
2.4. Zandhoopanaloon van Nadai	14
H.3. Cirkelvormige pijp onder inwendige druk:	
3.1. Elastisch gebied. Begin van vloeien	16
3.2. Elastoplastisch gebied. Bezwijkwaarde	18
3.3. Residuspanningen. Vloeistop	21
3.4. Verplaatsingen	23
3.5. Het vlakspanningsprobleem	25
Vraagstukken	28
Antwoorden	34

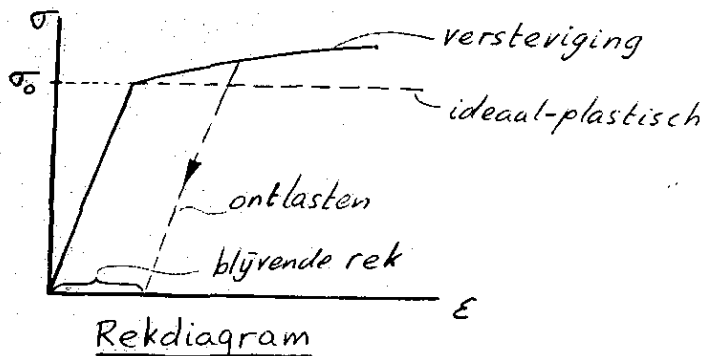
Hoofdstuk I

Basisvergelijkingen

Indien een lichaam, dat zich voor kleine waarden van de belasting elastisch gedraagt, te zwaar wordt belast kunnen er twee dingen gebeuren:

- i) Het materiaal gaat scheuren en er treedt breuk op. Een dergelijk materiaal noemen we bros. Voorbeelden van brosse materialen zijn gietijzer en steen.
- ii) Het materiaal gaat plastisch deformeren (we noemen dit vloeien). Een dergelijk materiaal heet ductiel of taai en een voorbeeld hiervan is staal.

In dit college zullen we een aantal speciale voorbeelden van het tweede geval bekijken. Plastisch gedrag van een materiaal wordt getypeerd door het optreden van blijvende vervormingen; dit betekent dat het lichaam na het wegnemen van de belasting niet meer in zijn oorspronkelijke toestand terugkeert (dit in tegenstelling tot elastische lichamen). Een gevolg hiervan is o.a. dat in een plastisch gedeformeerd lichaam na het ontlasten nog restspanningen (z.g. residu-spanningen) kunnen overblijven. We lichten dit eerst toe met het eenvoudige voorbeeld van een een-assige rek.



Uit het rekdiagram zien we dat voor voldoende kleine trekspanning σ de staaf zuiver elastisch deformeert en na het ontlasten in zijn oorspronkelijke toestand terugkeert. Zodra σ echter boven een kritische waarde σ_0 , de vloeigrens, komt vervormt de staaf niet meer elastisch; de spanning neemt niet meer even-

redig met de deformatie toe. In het algemeen zal de spanning nog wel iets toenemen met toenemende deformatie, we noemen dit verstevinging, maar deze toename is veel kleiner dan in het elastische gebied. In het model van het ideaal-plastische lichaam kan de spanning zelfs niet boven de vloeigrens σ_0 uitkomen; in dit model is er dus geen verstevinging. Belasten we de staaf eerst tot in het plastische gebied en nemen we daarna de belasting weg, dan geschiedt de ontlasting weer elastisch. Zoals uit het rekdiagram blijkt, blijft er dan ook als $\sigma = 0$ is geworden nog een blijvende rek over.

In het meer algemene drie-dimensionale geval treedt vloeï op indien een bepaalde spanningscombinatie een kritische waarde bereikt. Een dergelijke spanningscombinatie noemen we een vloeivoorwaarde en de kritische waarde heet vloeigrens.

Er zijn meerdere vloeivoorwaarden in gebruik, maar we zullen ons hier beperken tot de eenvoudigste: de vloeivoorwaarde volgens von Mises. Deze vloeivoorwaarde wordt geformuleerd in de zogenaamde deviatorische spanningen s_{ij} gedefinieerd door

$$(1) \quad s_{ij} := t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk} .$$

De reden waarom deze deviatorische spanningen zo'n grote rol spelen in de theorie van de plasticiteit is gelegen in het feit dat, zoals experimenteel is uitgewezen, de volumeveranderingen in een plastische deformatie zoveel kleiner zijn dan de vormveranderingen, dat de eerste mogen worden verwaarloosd. We mogen in een zeer goede benadering een plastisch lichaam als incompressibel beschouwen.

De vloeivoorwaarde van von Mises luidt als volgt

$$(2) \quad \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2 .$$

Dit betekent dat vloeïen optreedt, indien de deviatorische spanningen zo groot worden dat aan (2) wordt voldaan. In het elastische gebied geldt

$$(3) \quad \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} < k^2 ,$$

terwijl in het plastische gebied (2) blijft gelden, ook bij toenemende belasting. In het algemeen zal de factor k , de vloeigrens, dan echter niet constant zijn maar toenemen met de belasting: dit is versterking (vergelijk het een-dimensionale voorbeeld). Voor een ideaal-plastisch medium is de vloeigrens echter wel een constante, onafhankelijk van de belasting.

In de nu volgende voorbeelden zullen we ons steeds beperken tot ideaal-plastische, isotrope en homogene materialen. Verder zullen we ons beperken tot een in kinematisch opzicht lineaire theorie. Dit laatste houdt in dat de deformaties klein moeten blijven. Een consequentie hiervan is dat de deformatie-verplaatsingsrelaties, de evenwichtsvergelijkingen en de randvoorwaarden lineair blijven. Essentieel niet-lineair is echter, naast de constitutieve vergelijking, de vloeivoorwaarde. Aan de eis tot kleine deformaties is bij plastische vervormingen dikwijls niet voldaan. Echter voor problemen, waarbij het begin van vloeien van belang is, kan een lineaire theorie reeds veel inzicht in het probleem geven.

We besluiten deze inleiding met een samenvatting van de belangrijkste vergelijkingen voor een elasto-plastisch materiaal.

We hebben op de eerste plaats

$$(4) \quad t_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad , \quad (\text{evenwicht}) \quad ,$$

en

$$(5) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad .$$

Deze relaties gelden zowel in het elastische als in het plastische gebied. Dikwijls wordt in de plasticiteitstheorie niet met de spanningen of deformaties zélf gewerkt maar met incrementele veranderingen of tijdsafgeleiden daarvan (dus bijvoorbeeld in plaats van (4)

$$\dot{t}_{ij,j} + \rho \dot{f}_i = 0 \quad) .$$

De deformaties splitsen we in een elastisch en een plastisch stuk:

$$(6) \quad e_{ij} = e_{ij}^{(el)} + e_{ij}^{(pl)} \quad .$$

De elastische deformaties voldoen aan de wet van Hooke:

$$(7) \quad e_{ij}^{(el)} = \frac{1}{2G} (t_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} t_{kk}) ,$$

terwijl voor de plastische deformaties een constitutieve vergelijking van de vorm

$$(8) \quad \dot{e}_{ij}^{(pl)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ,$$

geldt.

Hierin is λ een nog onbekende parameter (λ is beslist niet een materiaalconstante) en is

$$f = f(s_{ij}, t) ,$$

de zogenoemde plastische potentiaal. Voor de problemen die we hier zullen bekijken mogen we deze plastische potentiaal gelijk nemen aan de vloeivoorwaarde, en meer speciaal, aan die van von Mises. Dus

$$(9) \quad f = f(s_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 .$$

Hiermee wordt (8)

$$(10) \quad \dot{e}_{ij}^{(pl)} = \lambda s_{ij} .$$

Met deze wet is automatisch de incompressibiliteit van de plastische deformaties verzekerd. Immers, uit (10) volgt direct

$$e_{kk}^{(pl)} = 0 .$$

De constitutieve vergelijking (10) wordt de Prandtl-Reuss-wet genoemd.

We krijgen hieruit voor de plastische energie per seconde

$$(11) \quad \dot{A}^{(pl)} = s_{ij} \dot{e}_{ij}^{(pl)} = \lambda s_{ij} s_{ij} = 2\lambda k^2 ,$$

waaruit volgt dat λ een maat is voor de plastische arbeid die per seconde wordt verricht. Dat we, in de vorm van λ , in de plasticiteitstheorie een extra onbekende moeten hebben, volgt uit het feit dat we met de vloeivoorwaarde

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2 ,$$

waaraan in elk punt van het plastische gebied moet zijn voldaan, ook een extra vergelijking hebben (vergeleken met de elasticiteitstheorie). Zonder deze extra onbekende zou het systeem dus overbepaald zijn door de vloeivoorwaarde. Een voordeel van deze vloeivoorwaarde is het feit dat door deze voorwaarde verschillende problemen in de plasticiteitstheorie statisch bepaald worden; d.w.z. dat we dan uit de evenwichtsvergelijkingen tezamen met de vloeivoorwaarde de spanningen kunnen bepalen, zonder de deformaties in de berekeningen te hoeven te betrekken.

RECAPITULATIE : Plasticiteitstheorie

In elastisch en plastisch gebied:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) ,$$

$$t_{ij,j} + \rho f_i = 0 ,$$

$$e_{ij} = e_{ij}^{(el)} + e_{ij}^{(pl)} .$$

In elastisch gebied:

$$e_{ij}^{(el)} = \frac{1}{2G} \left[t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} t_{kk} \right] ,$$

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} < k^2 , \quad (s_{ij} := t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk}) .$$

In plastisch gebied:

$$\dot{e}_{ij}^{(pl)} = \lambda s_{ij} , \quad (\rightarrow e_{kk}^{(pl)} = 0) ,$$

en

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2 .$$

Vloeivoorwaarde uitgeschreven in t_{ij} 's :

$$(t_{xx} - t_{yy})^2 + (t_{yy} - t_{zz})^2 + (t_{xx} - t_{zz})^2 + 6(t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{xz}^2) = 6k^2 .$$

VRAGEN

1. Moeten $e_{ij}^{(el)}$ en $e_{ij}^{(pl)}$ afzonderlijk aan de compatibiliteitsvoorwaarden voldoen?
2. Hoe groot is de relatieve volumeverandering bij een elasto-plastische deformatie?
3. Gelden de evenwichtsvergelijkingen alleen in het elastische gebied of ook in het plastische gebied en, zo ja, gelden ze daar in dezelfde vorm?
4. Wat zijn residu-spanningen? Waarom kunnen deze in een plastisch gedeformeerd lichaam optreden? Hoe groot zijn de resulterende krachten en momenten van een stelsel residu-spanningen?
5. Hoe luidt de vloeivoorwaarde van von Mises? Waarom worden hierin deviatorische spanningen gebruikt? Schrijf deze voorwaarde uit in de spanningen t_{ij} en in de hoofdspanningen σ_1 , σ_2 en σ_3 .
Beschouw een zuivere rek en een zuivere afschuiving. Druk de kritische trekspanning en de kritische schuifspanning uit in k . Is k altijd constant?
6. Hoe luidt de Prandtl-Reuss-wet? Wat stelt de coëfficiënt λ in deze wet voor? Is dit een materiaalconstante? Is dit een onbekende van het probleem en zo ja, waarom is deze nodig?
7. Volgens welke constitutieve wet vindt het ontlasten van een plastisch gedeformeerd lichaam plaats? Welke restrictie geldt hierbij?

Hoofdstuk 2

Plastische torsie van een cirkelcylinder

2.1. Begin van vloeien

We beschouwen een cirkelcylinder, met straal R , welke in zijn einddoorsneden wordt belast door een wringend moment M dat goed over de einddoorsneden is verdeeld.

In dat geval zijn alleen de spanningen t_{xz} en t_{yz} ongelijk aan nul (de z -as valt langs de centrale as van de cylinder). We bekijken eerst het geval dat de cylinder nog zuiver elastisch deformeert. In dat geval geldt:

$$(12) \quad t_{xz} = -G\alpha y, \quad t_{yz} = G\alpha x,$$

waarin α de hoekverdraaiing per lengte-eenheid van de cylinder is.

Wanneer zal de cylinder plastisch gaan vloeien? Voor (12) wordt (1)

$$(13) \quad s_{xz} = s_{zx} = t_{xz} = -G\alpha y, \quad s_{yz} = s_{zy} = t_{yz} = G\alpha x,$$

en hiermee gaat de vloeivoorwaarde van von Mises over in

$$t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = k^2,$$

of

$$(14) \quad G^2 \alpha^2 (x^2 + y^2) = k^2.$$

Het linkerlid van (14) is maximaal aan de rand van de cirkelvormige doorsnede, dus voor $(x^2 + y^2) = R^2$. We zien hieruit dat begin van vloeien optreedt indien

$$(15) \quad G^2 \alpha^2 R^2 = k^2, \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{k}{GR}, \quad (k > 0),$$

en dat dit vloeien begint aan de cylindermantel.

2.2. Elastoplastische torsie. Bezwijkwaarde

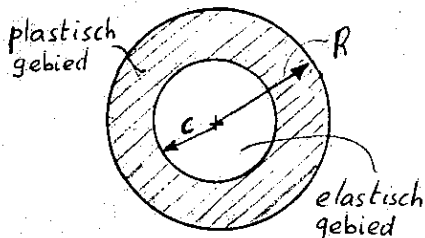
Gaan we nu de belasting verhogen dan zien we dus dat voor:

$\alpha < \frac{k}{GR}$: de doorsnede nog volledig elastisch is,

$\alpha = \frac{k}{GR}$: begin van vloeien op $r := \sqrt{x^2 + y^2} = R$,
(het bijbehorende moment geven we aan met M^*)

$\alpha > \frac{k}{GR}$: dan doorzetten van de vloeï; het plastische gebied
in de doorsnede breidt zich naar binnen toe uit.

Dus voor $\alpha > k/GR$ moeten we onderscheiden:



$r < c$: elastische gebied

$c < r \leq R$: plastische gebied

Tengevolge van de rotatiesymmetrie van het probleem is de vorm van de grens tussen het elastische en het plastische gebied weer een cirkel, waarvan de straal c echter nog een onbekende van het probleem is.

We bepalen eerst de spanningsverdeling in het plastische gebied: $c < r \leq R$.
Hier gelden de vergelijkingen:

$$(16) \quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0, \quad t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = k^2,$$

en

$$(17) \quad t_{xz} n_x + t_{yz} n_y = 0, \quad \text{op } r = R.$$

Aangezien we met (16) twee vergelijkingen hebben voor de twee onbekende spanningen t_{xz} en t_{yz} is dit probleem dus statisch bepaald.

Aan de evenwichtsvergelijking (16)¹ is te voldoen door invoering van een spanningsfunctie $F(x,y)$ volgens:

$$(18) \quad t_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad t_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Aan de randvoorwaarde (17) is dan tevens voldaan door $F = 0$ op $r = R$ te nemen. Met (16)² vinden we de volgende vergelijking voor $F(x,y)$:

$$(19) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = k^2 .$$

Aangezien het probleem rotatie-symmetrisch is, mag F , beschouwd als functie van de poolcoördinaten r en θ , alleen van r afhangen en niet van θ . Dus

$$(20) \quad F = F(x,y) = F(r) ,$$

waarmee (19) wordt

$$(21) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = \pm k .$$

Zoals we iets verderop zullen zien, moeten we in (21)² het minteken nemen, althans voor positieve k , omdat we een wringend moment in de positieve z -richting hebben.

Met

$$F(R) = 0 ,$$

krijgen we dan uit (21)

$$(22) \quad \begin{aligned} F(r) &= k(R - r) = \\ &= kR - k\sqrt{x^2 + y^2} . \end{aligned}$$

Hieruit krijgen we met (18) de spanningsverdeling in het plastische gebied

$$(23) \quad \begin{aligned} t_{xz} &= -\frac{ky}{r} , \\ t_{yz} &= \frac{kx}{r} , \quad \text{voor } c < r \leq R . \end{aligned}$$

De spanningsverdeling in het elastische gebied ($0 \leq r < c$) blijft voldoen aan (12). De waarde van c kunnen we nu bepalen met de eis dat aan de rand van het elastische gebied ($r = c$) de elastische spanningen juist moeten voldoen aan de vloeivoorwaarde ("ze staan op het punt om plastisch te worden").

Dus

$$(t_{xz}^2 + t_{yz}^2)_{r=c} = (G^2 \alpha^2 y^2 + G^2 \alpha^2 x^2)_{r=c} = G^2 \alpha^2 c^2 = k^2 ,$$

of

$$(24) \quad c = \frac{k}{G\alpha} , \quad (k > 0 , c > 0) .$$

Met (12) en (23) volgt hieruit dat de schuifspanningen hier continu zijn over de rand $r = c$ (merk op dat dit geen noodzakelijke eis is). Tevens volgt hieruit dat voor eindige α de waarde van c altijd groter dan nul is; het middelpunt van de doorsnede blijft altijd elastisch. Dit moet natuurlijk zo zijn, omdat in dit punt de spanningen altijd nul blijven en dus nooit de vloeiwaaarde kunnen bereiken. De doorsnede wordt bij torsie dus nooit volledig plastisch.

We wijzen er hier op dat in het geval dat het moment is voorgeschreven de hoekverdraaiing per lengte-eenheid α nog een onbekende is. Deze onbekende kan worden bepaald met het nu volgende verband tussen α en M , geldend voor het geval dat de cylinder elastoplastisch is gedeformeerd ($\alpha \geq k/GR$):

$$\begin{aligned} M &= \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = \\ &= 2\pi G\alpha \int_0^c r^2 \cdot r dr + 2\pi k \int_c^R r \cdot r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} G\alpha c^4 + \frac{2}{3} \pi k (R^3 - c^3) , \end{aligned}$$

hetgeen met (24) nog is uit te werken tot

$$(25) \quad M = \frac{2\pi k R^3}{3} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{GR\alpha} \right)^3 \right] ,$$

of, uitgedrukt in c ,

$$(26) \quad M = \frac{2\pi k R^3}{3} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{R} \right)^3 \right] .$$

Uit de relatie (26) is bij gegeven M ($M > M^*$) de grens (c) van het plastische gebied te bepalen. Uit deze betrekkingen kunnen we twee belangrijke conclusies trekken:

i) Uit (26), door daarin $c = R$ te stellen, vinden we voor het moment M^* , waarop de cylinder begint te vloeien:

$$(27) \quad M^* = \frac{1}{2} \pi k R^3 .$$

ii) Uit (25) zien we dat M zijn grootste waarde bereikt voor $\alpha \rightarrow \infty$. Formeel zal dus op dat moment de cylinder bezwijken (we zijn dan natuurlijk allang buiten het gebied van de lineaire theorie). We zouden op deze manier voor het bezwijkmoment M^{**} vinden

$$(28) \quad M^{**} = \frac{2}{3} \pi k R^3 .$$

We zien dus dat voor

$$\begin{aligned} M < M^* & : \text{ geen vloeien ,} \\ M^* \leq M < M^{**} & : \text{ vloeien ,} \\ M \geq M^{**} & : \text{ bezwijken.} \end{aligned}$$

Door vergelijken van (27) en (28) zien we dat M^{**} relatief slechts een factor $1/6$ groter is dan M^* . De winst in het moment door het toelaten van vloeien is dus vrij klein.

Uit de voorgaande analyse blijkt dat de waarde van M^* als gegeven in (27) wel betrouwbaar is (de waarde van α is bij het begin van vloeien, voor een materiaal als staal, nog erg klein), maar dat de waarde (28) in feite alleen een bovengrens voor bezwijken aangeeft: de cylinder zal reeds voor een betrekkelijk kleine waarde van α (in ieder geval veel eerder dan $\alpha = \infty$) gaan scheuren. Het bezwijkmoment zal dus kleiner zijn dan M^{**} , maar in ieder geval groter dan M^* .

2.3. Residuspanningen

We gaan nu de cylinder ontlasten, d.w.z. we nemen het belastende moment weg. Indien het belastende moment groter was dan M^* , zodat de cylinder dus plastisch gedeformeerd is, zal er na het ontlasten nog een blijvende deformatie overblijven. Tengevolge hiervan zullen er in de cylinder ook

residuspanningen overblijven. Deze spanningen moeten weliswaar statisch equivalent zijn met een nulbelasting maar hoeven zelf lokaal niet nul te zijn.

We zullen nu deze residuspanningen gaan bepalen. We veronderstellen hierbij dat de ontlasting volledig elastisch geschiedt; d.w.z. er treedt bij het ontlasten niet opnieuw plastische vloei op. We zullen deze onderstelling achteraf moeten verifiëren (bij lang niet alle problemen is hieraan voldaan!). Door de ontlasting krijgt de staaf een hoekverdraaiing per lengte-eenheid β tegengesteld gericht aan α ($\beta > 0$). Aangezien de ontlasting elastisch geschiedt moeten we dan op (12) en (23) superponeren het spanningsveld (voor de gehele doorsnede)

$$t_{xz} = G\beta y \quad , \quad t_{yz} = -G\beta x \quad ,$$

waarmee we vinden voor de residuspanningen

$$r \leq c \quad , \quad t_{xz} = G(-\alpha + \beta)y \quad , \quad t_{yz} = G(\alpha - \beta)x \quad ,$$

(29)

$$c \leq r \leq R \quad , \quad t_{xz} = \left(-\frac{k}{r} + G\beta\right)y \quad , \quad t_{yz} = \left(\frac{k}{r} - G\beta\right)x \quad .$$

De factor β moeten we bepalen uit de eis dat de spanningsverdeling (29) statisch equivalent moet zijn met een nulbelasting. Dit houdt o.a. in dat het wringende moment nul moet zijn (alle andere snedegrootheden zijn triviaal nul), of

$$0 = \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = M - \frac{\pi}{2} GR^4 \beta \quad ,$$

dus

$$(30) \quad \beta = \frac{2M}{\pi GR^4} \quad ,$$

waarin M het belastende moment is. Met (25) en (26) kunnen we β ook uitdrukken in α en c . We krijgen dan

$$(31) \quad \beta = \frac{4k}{3GR} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{GR\alpha} \right)^3 \right] = \frac{4k}{3GR} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{R} \right)^3 \right] \quad .$$

Door (30) te substitueren in (29) zijn de residusspanningen volledig bepaald. Rest ons nu nog te bewijzen dat deze residusspanningen niet opnieuw aanleiding geven tot vloeien. Hiervoor is het noodzakelijk dat voor de spanningsverdeling volgens (29) geldt:

$$(32) \quad t_{xz}^2 + t_{yz}^2 < k^2, \text{ voor } 0 \leq r \leq R.$$

We bekijken eerst het gebied : $r \leq c$. Hier geldt volgens (29)

$$t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = G^2 r^2 (\alpha - \beta)^2,$$

en dit is maximaal voor $r = c$. Dus voor $r \leq c$ is aan (32) voldaan als

$$(33) \quad |\alpha - \beta| < \frac{k}{Gc} = \alpha,$$

volgens (24) . Hieraan is steeds voldaan, immers volgens (31)² geldt

$$(34) \quad \beta = \frac{k}{Gc} \cdot \frac{4c}{3R} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{R} \right)^3 \right] = \alpha \left[\frac{4}{3} \frac{c}{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{c}{R} \right)^4 \right] < \alpha,$$

voor alle (c/R) uit $0 \leq \frac{c}{R} < 1$.

Fysisch is het ook triviaal dat $\beta < \alpha$ moet zijn: de cylinder zal immers bij ontlasten niet verder terugdraaien dan hij in eerste instantie plastisch getordeerd was.

Met (34) is (33) bewezen. Blijft tenslotte nog over het gebied $c \leq r \leq R$. Hier geldt:

$$t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = (k - G\beta r)^2,$$

dus moet

$$(36) \quad |k - G\beta r| < k, \quad c \leq r \leq R.$$

Voor $r = c$ wordt dit

$$|k - G\beta c| = k \left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| < k,$$

op grond van (34) .

Voor $r = R$ krijgen we (met (24) en (34))

$$\begin{aligned} |k - G\beta R| &= k \left| \frac{\beta}{\alpha} \frac{R}{c} - 1 \right| = k \left| \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{c}{R} \right)^3 - 1 \right| = \\ &= \frac{1}{3} k \left| 1 - \left(\frac{c}{R} \right)^3 \right| < k \quad , \quad \text{voor } 0 \leq \frac{c}{R} \leq 1 . \end{aligned}$$

In de eindpunten van het traject $c \leq r \leq R$ is dus aan (36) voldaan en het is dan eenvoudig in te zien dat dan in het gehele interval hieraan is voldaan. Hiermee is aangetoond dat overal aan (32) is voldaan: de residuspanningen geven geen aanleiding tot hernieuwde vloeï.

2.4. Zandhoopanaloon van Nadai

Omdat een algemene beschouwing van de elasto-plastische torsie van een cylinder met een willekeurige doorsnede op dit moment een te grote voorkennis van de wiskunde verlangt, zullen we deze hier achterwege laten. We willen echter toch nog wel op een enkel aspect ingaan.

Uit de elastische torsie van een cylinder met een willekeurige doorsnede kunnen we het z.g. membraanalogon (C.D. Elastostatica: 2.6.). Voor de plastische torsie bestaat een soortgelijk analogon. Aangezien de evenwichtsvergelijkingen in het plastische gebied gelijk zijn aan die in het elastische gebied, kunnen we ook aan deze voldoen door invoering van een spanningsfunctie $F = F(x,y)$, zodanig dat

$$t_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad t_{yz} = - \frac{\partial F}{\partial x} .$$

Hiervoor wordt de vloeivoorwaarde van von Mises

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = (\text{grad } F)^2 = k^2 ,$$

of

$$\text{grad } F = k = \text{constant} .$$

We veronderstellen nu de gehele doorsnede plastisch. In dat geval geldt voor alle punten (x,y) van de doorsnede de betrekking (37); dit wil zeggen dat de helling van het oppervlak $F(x,y)$, gedefinieerd op de doorsnede overal constant moet zijn. Een voorstelling van een dergelijk oppervlak

kunnen we verkrijgen door op de doorsnede een hoop zand te storten. We krijgen dan een berg waarvan in ieder punt de helling constant is en waarvan de vorm overeenkomt met die van $F(x,y)$. Op deze manier zouden we dus in principe $F(x,y)$ kunnen bepalen. We noemen dit de zandhoop-analogie van Nadai. Het zal duidelijk zijn dat de nauwkeurigheid van een dergelijke methode niet erg groot zal zijn. Toch is deze methode zeer geschikt om ons inzicht in bepaalde aspecten van de plastische torsie van een cylinder met willekeurige doorsnede te vergroten.

Zo weten we bijvoorbeeld uit de theorie van de elastische torsie dat het torsiemoment M gelijk is aan

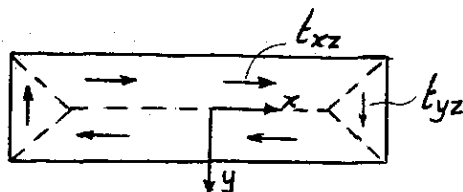
$$M = 2 \int_S F(x,y) dS .$$

Deze relatie geldt ook in het plastische gebied en we kunnen hiermee de bezwijkwaarde bepalen. Immers de inhoud van de zandhoop is gelijk aan $\int_S F dS$ en dus evenredig met het moment benodigd om de gehele doorsnede plastisch te maken. Dit moment is juist het bezwijkmoment. Het bezwijkmoment is dus evenredig met het volume van de hoeveelheid zand die we op de doorsnede kunnen storten.

Een tweede aspect dat we met dit analogon kunnen illustreren is het volgende:

Stel de doorsnede is cirkelvormig. In dat geval vormt de zandhoop een kegeloppervlak. De punt van deze kegel, gelegen boven $(x,y) = (0,0)$ is dus een singulier punt. In werkelijkheid kunnen we met een zandhoop nooit deze spitse punt bereiken. Dit betekent dat het middelpunt van een cirkel nooit plastisch kan worden, maar altijd elastisch blijft. Dit volgt ook uit de voorgaande analyse. Immers, volgens (12) blijven de spanningen in $(x,y) = (0,0)$ altijd nul, dus kleiner dan de vloeigrens. Ook uit (24) - (26) blijkt dat $c = 0$ voor $\alpha < \infty$ niet kan optreden. (Zie ook de opmerking aldaar).

Een gelijksoortig verschijnsel treedt ook op bij de torsie van een rechtehoekige doorsnede. Het bovenaanzicht van de zandhoop ziet er dan als volgt uit:



In dit geval blijven de stippellijnen, welke in de hoekpunten onder 45° met de rechthoekzijden verlopen, altijd elastisch. We zien hier tevens uit dat aan de zijvlakken grenzend aan $x = \pm a$, waar $\partial F/\partial y = 0$, geldt

$$t_{yz} = \pm k, \quad t_{xz} = 0,$$

en aan de zijvlakken bij $y = \pm b$:

$$t_{xz} = \pm k, \quad t_{yz} = 0.$$

Hieruit kunnen we dan het bezwijkmoment bepalen als zijnde gelijk aan (voor $a \geq b$)

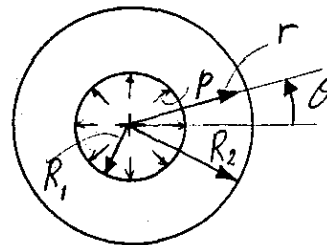
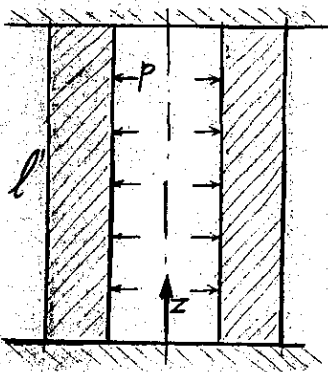
$$(38) \quad M^{**} = \frac{4}{3} kb^2 (3a - b).$$

Hoofdstuk 3

Cirkelvormige pijp onder inwendige druk

3.1. Elastische gebied. Begin van vloeien

(Zie ook C.D. Elastostatica, §3.1)



Een cirkelvormige buis, met binnenstraal R_1 en buitenstraal R_2 , wordt inwendig belast door een normale druk p . De einddoorsneden van de buis zijn zodanig ingeklemd dat axiale verplaatsingen worden verhinderd ($w = 0$). De buis is dan in een toestand van vlakke vervorming.

Het elastische deel van dit probleem is al opgelost in C.D. Elastostatica, §3.1. We nemen de daar gevonden oplossing over, maar voor het speciale geval dat $\nu = 0.5$ (incompressibel materiaal). Dit vereenvoudigt de rekenkundige bewerkingen aanmerkelijk zonder aan de mechanische aspecten iets te

kort te doen. Dit vanwege het feit dat in het plastische gebied het materiaal ook incompressibel wordt genomen.

Uit de vergelijkingen (29) - (31) uit §3.1, Elastostatica, vinden we voor $p_i = p$, $p_u = 0$ en $\nu = 0.5$ de spanningsverdeling voor het geval dat de buis nog volledig elastisch is

$$(39) \quad \begin{aligned} t_{rr} &= \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \\ t_{\theta\theta} &= \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \\ t_{zz} &= \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \end{aligned}$$

We zien hieruit dat de grootste waarde van $t_{\theta\theta}$ optreedt voor $r = R_1$; het zal blijken dat hier het vloeien begint. Verder zien we dat

$$(40) \quad t_{rr} < t_{zz} < t_{\theta\theta}$$

Tenslotte weten we nog dat de schuifspanningen nul zijn, dus

$$(41) \quad t_{r\theta} = t_{rz} = t_{\theta z} = 0,$$

waaruit volgt dat t_{rr} , $t_{\theta\theta}$ en t_{zz} hoofdspansingen zijn.

Von Mises wordt dan

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) = k^2,$$

of

$$(42) \quad \begin{aligned} & [t_{rr} - \frac{1}{3}(t_{rr} + t_{\theta\theta} + t_{zz})]^2 + [t_{\theta\theta} - \frac{1}{3}(t_{rr} + t_{\theta\theta} + t_{zz})]^2 + \\ & + [t_{zz} - \frac{1}{3}(t_{rr} + t_{\theta\theta} + t_{zz})]^2 = 2k^2. \end{aligned}$$

Substitueren we hierin dat (zie (39)); bedenk dat $\nu = 0.5$)

$$t_{zz} = \frac{1}{2}(t_{rr} + t_{\theta\theta}) ,$$

dan kunnen we dit uitwerken tot

$$(43) \quad t_{\theta\theta} - t_{rr} = 2k .$$

Met (39) geeft dit de vloeiconditie

$$(44) \quad \frac{pR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{R_2^2}{r^2} \leq k , \quad (R_1 \leq r \leq R_2) .$$

Vloeien begint dus aan de binnenkant van de buis (op $r = R_1$) en wel voor

$$p = p^* = k \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

3.2. Elastoplastisch gebied. Bezwijkwaarde

We maken p nu groter dan de vloeigrens : $p > p^*$ en we nemen aan dat voor:

$R_1 \leq r \leq c$: vloeien optreedt, terwijl het gebied

$c < r \leq R_2$: elastisch blijft.

De factor c hierin is nog steeds een onbekende. De onbekende spanningen zijn t_{rr} en $t_{\theta\theta}$; de derde spanningscomponent ongelijk aan nul: t_{zz} volgt uit

$$(46) \quad t_{zz} = \frac{1}{2}(t_{rr} + t_{\theta\theta}) ,$$

welke ook in het plastische gebied geldt.

Deze relatie volgt uit de eis dat $e_{zz} = 0$. Voor het elastische gebied uit de wet van Hooke met $\nu = 0.5$ en voor het plastische gebied uit Prandtl-Reuss-wet (10). Immers met $\dot{e}_{zz}^{(pl)} = 0$ en $\dot{\lambda} \neq 0$, geeft deze

$$s_{zz} = (t_{zz} - \frac{1}{3}(t_{rr} + t_{\theta\theta} + t_{zz})) = 0 ,$$

waaruit direct (46) volgt.

In het plastische gebied: $R_1 \leq r \leq c$, gelden voor t_{rr} en $t_{\theta\theta}$ de twee vergelijkingen (het systeem is hier dus statisch bepaald):

$$(47) \quad \frac{dt_{rr}}{dr} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} = 0, \text{ (evenwicht) ,}$$

en

$$(48) \quad t_{\theta\theta} - t_{rr} = 2k, \text{ (vloeivoorwaarde) .}$$

Door met (47) $t_{\theta\theta}$ uit (48) te elimineren krijgen we

$$(49) \quad \frac{dt_{rr}}{dr} - \frac{2k}{r} = 0 .$$

Deze differentiaalvergelijking heeft als algemene oplossing

$$(50) \quad t_{rr} = 2k \ln r + A. \quad (\log \ln)$$

De constante A bepalen we uit de randvoorwaarde:

$$t_{rr} = -p, \text{ op } r = R_1,$$

wat leidt tot

$$(51) \quad A = -2k \ln R_1 - p .$$

Met (50) en (51) is t_{rr} bepaald; $t_{\theta\theta}$ en t_{zz} krijgen we dan uit (48) en (46), respectievelijk. Dit geeft

$$t_{rr} = -p + 2k \ln (r/R_1),$$

$$(52) \quad t_{\theta\theta} = -p + 2k(1 + \ln (r/R_1)),$$

$$t_{zz} = -p + k(1 + 2 \ln (r/R_1)), \text{ voor } R_1 \leq r \leq c.$$

De spanningen in het elastische gebied: $c < r \leq R_2$ zijn van dezelfde vorm als (39), maar, aangezien de spanning t_{rr} op $r = c$ in principe nog een onbekende is, met een onbekende voorfactor S:

$$t_{rr} = s \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

$$(53) \quad t_{\theta\theta} = s \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

$$t_{zz} = s, \quad \text{voor } c < r \leq R_2.$$

De waarde van s kunnen we bepalen uit de conditie dat s zodanig moet zijn dat op $r = c$ juist vloeien optreedt. Volgens (43) moet dus gelden

$$(54) \quad 2s \frac{R_2^2}{c^2} = 2k, \quad \text{of: } s = \frac{kc^2}{R_2^2}.$$

De buis zal bezwijken indien de doorsnede volledig plastisch is geworden, dus voor $c = R_2$. In dat geval geldt (52) voor de gehele buis, dus ook voor $r = R_2$. Voor $r = R_2$ is echter $t_{rr} = 0$, waarmee we uit (52)¹ voor de bezwijkdruk p^{**} vinden

$$(55) \quad p^{**} = 2k \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

((Bewijs zelf dat $p^{**} > p^*$)).

We moeten nu nog c bepalen. Deze volgt uit de eis dat, t.g.v. het radiale evenwicht (zie (47)) t_{rr} continu moet zijn voor $r = c$. Uit (52)¹ en (53)¹, met (54), volgt dat hieraan is voldaan indien

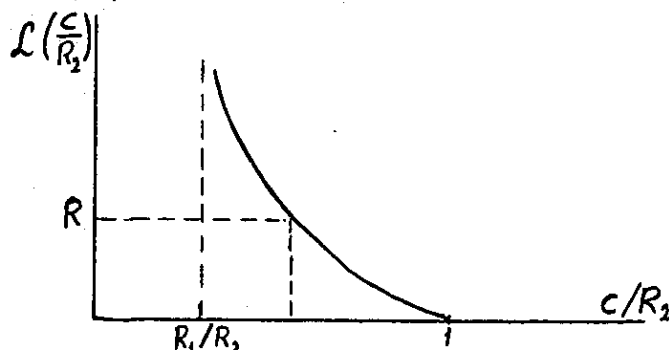
$$-p + 2k \ln \left(\frac{c}{R_1} \right) = \frac{kc^2}{R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{c^2} \right),$$

of

$$(56) \quad \mathcal{L} \left(\frac{c}{R_2} \right) := \frac{c^2}{R_2^2} - 2 \ln \left(\frac{c}{R_2} \right) - 1 = 2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{p}{k} =: R.$$

(Controleer dat (56) voor $c = R_1$ en $c = R_2$ geeft $p = p^*$ resp. $p = p^{**}$).

In grafiek geeft (56)



3.3. Residuspanningen. Vloeistop

We gaan nu eerst de buis belasten met een druk p met $p^* < p < p^{**}$, zodat de buis dus gedeeltelijk vloeit, en daarna ontlasten. We nemen hierbij aan dat deze ontlasting puur elastisch geschiedt. Zoals we zo dadelijk zullen zien geeft dit een bovengrens voor p . In dit geval kunnen we de spanningsverdeling t.g.v. het ontlasten vinden uit (39) door daarin p door $-p$ te vervangen. Voor de totale residu-spanningsverdeling vinden we dan met (52) en (53) :

$$\text{voor } \underline{R_1 \leq r < c} : t_{rr} = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) - \frac{pR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

$$(57) \quad t_{\theta\theta} = -p + 2k \left[1 + \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) \right] - \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

$$\text{voor } \underline{c < r \leq R_2} \quad t_{rr} = \left(\frac{kc^2}{R_2^2} - \frac{pR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \right) \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right),$$

$$t_{\theta\theta} = \left(\frac{kc^2}{R_2^2} - \frac{pR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \right) \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right).$$

Deze spanningen zijn in evenwicht met een nulbelasting, immers $t_{rr} = 0$ voor $r = R_1$ en $r = R_2$. (Geldt dit ook voor t_{zz} ?)

Doordat de elastisch gedeformeerde buitenste ring ($c < r \leq R_2$) na ontlasten terugveert en de plastisch gedeformeerde binnenste ring ($R_1 \leq r < c$) niet, zal het materiaal in de binnenring worden samengedrukt door de buitenring.

Er kan hier dus opnieuw vloeien optreden in compressie. We zoeken nu de maximale druk p waarbij het materiaal na het ontlasten niet meer vloeit.

We wijzen echter eerst nog op een ander effect van de residuspanningen: deze residuspanningen zorgen er voor dat indien de buis opnieuw op druk wordt belast, er pas vloeien optreedt bij een hogere druk dan p^* . Door het materiaal eerst plastisch te deformereren kan het elastische gebied dus worden uitgebreid. We noemen dit verschijnsel vloeistop of shake-down.

Wil er voor $R_1 \leq r < c$ na het ontlasten geen vloeï optreden, dan moet volgens (48) en met (45) en (57)

$$|t_{\theta\theta} - t_{rr}| = \left| -2k \left(\frac{pR_1^2}{p^*r^2} - 1 \right) \right| < 2k$$

of

$$(58) \quad \frac{p}{p^*} < \frac{2r^2}{R_1^2}, \quad \text{voor } R_1 \leq r < c.$$

Er treedt dus na het ontlasten niet opnieuw vloeï op indien:

$$(59) \quad p < 2p^*.$$

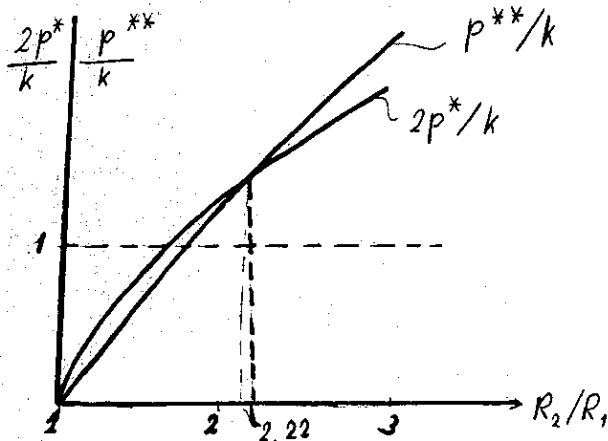
Voor een constructeur is het belangrijk te weten dat er hier twee verschillende mogelijkheden om te bezwijken zijn:

- i) op de eerste plaats bezwikt de buis indien $p > p^{**}$; en
- ii) er kan plastische vermoeïing optreden: indien de buis meerdere keren wordt belast en ontlast en indien hierbij zowel vloeïen in rek (bij belasten) als in druk (bij ontlasten) optreedt, zal de buis bezwijken door plastische vermoeïing. (Vergelijk dit met een spijker welke enige malen heen en weer wordt gebogen).

Voor veilig construeren is het dus noodzaak om er voor te zorgen dat in ieder geval

$$(60) \quad p < \min(2p^*; p^{**}).$$

In onderstaande grafiek hebben we $2p^*$ en p^{**} uitgezet als functie van R_2/R_1 .



We zien hieruit dat het kritische punt optreedt bij $R_2/R_1 = 2,22$:

voor $R_2/R_1 < 2,22$ moeten we de buis beschermen tegen plastische breuk;

voor $R_2/R_1 > 2,22$ moeten we de buis beschermen tegen plastische vermoeiing.

3.4. Verplaatsingen

Voor de bepaling van de verplaatsingen in de buis, nemen we eerst aan dat de buis volledig elastisch blijft. Voor een rotatiesymmetrische, vlakke vervormingstoestand is er slechts één verplaatsing ongelijk aan nul, namelijk de radiale verplaatsing: $u = u_r$. Deze kunnen we bepalen uit:

$$(61) \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \frac{(1 + \nu)}{E} [-\nu t_{rr} + (1 - \nu)t_{\theta\theta}] = \frac{3}{4E}(t_{\theta\theta} - t_{rr}) ,$$

waarbij in de laatste stap $\nu = 0,5$ is ingevuld. Met (39) krijgen we dan voor de elastische verplaatsingen

$$(62) \quad u = \frac{3pR_1^2 R_2^2}{2E(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{1}{r} , \quad v = u_\theta = 0 , \quad w = u_z = 0 .$$

Voor de verplaatsing aan de binnenkant van de buis krijgen we hieruit

$$(63) \quad \frac{u_0}{R_1} = \frac{u(r = R_1)}{R_1} = \frac{3pR_2^2}{2E(R_2^2 - R_1^2)} .$$

Voor de bepaling van de deformaties in het elasto-plastische gebied gaan we uit van de incompressibiliteit van het materiaal. Aangezien $e_{zz} = 0$ luidt de incompressibiliteitsvoorwaarde

$$(64) \quad e_{kk} = e_{rr} + e_{\theta\theta} = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 , \quad \text{voor } R_1 \leq r \leq R_2 .$$

Dit geldt voor de gehele doorsnede en leidt tot

$$(65) \quad u = \frac{c_1}{r} ,$$

en tot de deformaties

$$(66) \quad e_{rr} = -\frac{c_1}{2r^2} , \quad e_{\theta\theta} = \frac{c_1}{2r^2} .$$

Omdat de verplaatsingen overal (dus ook voor $r = c$) continu moeten zijn, moet de constante c_1 in (65) over de gehele doorsnede dezelfde waarde hebben. De betrekking (61) geldt ook voor belastingen boven de vloeigrens in het elastische gebied: $c < r \leq R_2$. Alleen moeten we in dit geval (53) i.p.v. (39) substitueren. Met (54) leidt dit dan tot de volgende relatie voor de radiale verplaatsing

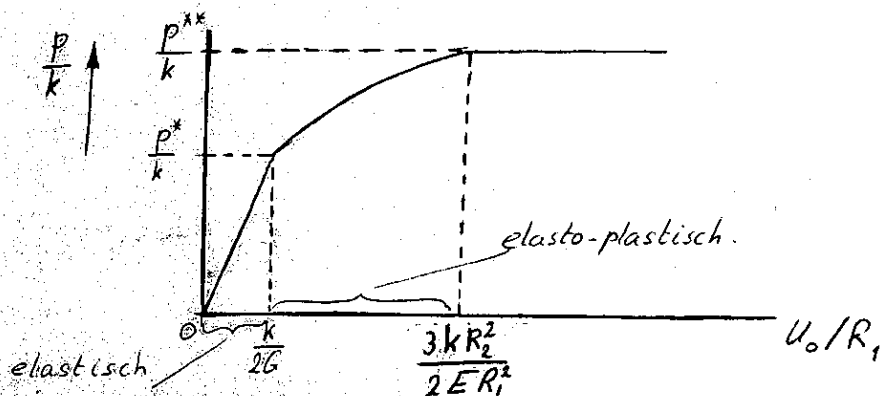
$$(67) \quad u = \frac{3kc^2}{2E} \cdot \frac{1}{r}$$

Deze relatie is hier afgeleid voor het elastische gebied, maar omdat een relatie als (65) in het gehele gebied geldt met overal dezelfde c_1 , moet (67) gelden voor alle $R_1 \leq r \leq R_2$.

Voor de verplaatsing aan de binnenkant van de buis krijgen we dan in het elasto-plastische geval ($p^* < p < p^{**}$)

$$(67) \quad \frac{u_0}{R_1} = \frac{3kc^2}{2ER_1^2}$$

waarin c , numeriek of grafisch, is te bepalen uit (56). Indien $p \gg p^{**}$ gaat, voor een ideaal plastisch materiaal (d.w.z. zonder versteviging), de verplaatsing u_0 naar oneindig. In onderstaande grafiek hebben we u_0 als functie van p uitgezet.



3.5. Het vlakspanningsprobleem

Tot besluit bekijken we het overeenkomstig probleem, maar nu als vlakspanningstoestand. Dit betekent dat we de einddoorsneden vrijlaten. Dit probleem treedt echter, zij het bij benadering, ook op voor een dunne schijf met een gat, welke aan de binnenkant door een druk p belast wordt (gegeneraliseerde vlakspanningstoestand).

Voor dit probleem geldt i.p.v. $w = 0$:

$$(69) \quad t_{zz} = t_{rz} = t_{\theta z} = 0.$$

Met de nu volgende analyse zal blijken dat dit probleem rekenkundig veel lastiger is dan het vorige. De oorzaak hiervan ligt in de vloeivoorwaarde.

Voor $t_{zz} = 0$ wordt de vloeivoorwaarde (42) namelijk

$$(70) \quad t_{rr}^2 - t_{rr} t_{\theta\theta} + t_{\theta\theta}^2 = 3k^2,$$

en deze voorwaarde is in tegenstelling tot (43) niet-lineair.

We bepalen eerst de waarde van p waarvoor de buis, op $r = R_1$, begint te vloeien. Voor $p < p^*$ is de buis nog volledig elastisch en is de spanningsverdeling volgens (39), echter met $t_{zz} = 0$. Nemen we in (39) : $r = R_1$ en substitueren we het resultaat in (70) dan vinden we

$$(71) \quad p^* = \frac{k \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{R_1^4}{3R_2^4}}}$$

Vervolgens berekenen we de bezwijkwaarde p^{**} . Voor $p = p^{**}$ is de gehele buis plastisch en geldt dus (70) overal. Uit (70) volgt

$$(72) \quad t_{\theta\theta} = \frac{1}{2} (t_{rr} + \sqrt{12k^2 - 3t_{rr}^2}).$$

Het minteken in bovenstaande oplossing van de vierkantsvergelijking (70) moet vervallen, omdat $t_{\theta\theta}$ als functie van p continu moet verlopen en dus voor $p = p^*$ en $r = a$ moet aansluiten bij de elastische waarde van $t_{\theta\theta}$ aldaar.

Substitutie van (72) in (47) geeft:

$$(73) \quad \frac{dt_{rr}}{dr} - \frac{\sqrt{12k^2 - 3t_{rr}^2} - t_{rr}}{2r} = 0 .$$

Door deze vergelijking te schrijven als

$$\frac{dr}{r} = \frac{2dt_{rr}}{\sqrt{12k^2 - 3t_{rr}^2} - t_{rr}} ,$$

en vervolgens te integreren krijgen we

$$(74) \quad \ln r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{t_{rr}}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln \left[\sqrt{1 - \left(\frac{t_{rr}}{2k}\right)^2} - \frac{t_{rr}}{2k\sqrt{3}} \right] + C .$$

De constante C bepalen we uit de eis : $t_{rr} = 0$, voor $r = R_2$. Dit geeft:

$$(75) \quad C = \ln R_2 .$$

De tweede eis

$$t_{rr}(r = R_1) = -p = -p^{**} ,$$

levert de volgende impliciete relatie voor p^{**} (uit (74) en (75))

$$(76) \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2}\sqrt{3} \arcsin \left(\frac{p^{**}}{2k} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{p^{**}}{2k} \right)^2} + \frac{p^{**}}{2k\sqrt{3}}}$$

Deze vergelijking heeft niet voor alle waarden van R_1/R_2 een oplossing p^{**} . Immers uit de eis dat $t_{\theta\theta}$ reëel moet zijn, volgt via (72)

$$|t_{rr}| < 2k ,$$

en dus moet ook

$$p^{**} < 2k .$$

Er is voldaan aan deze eis als

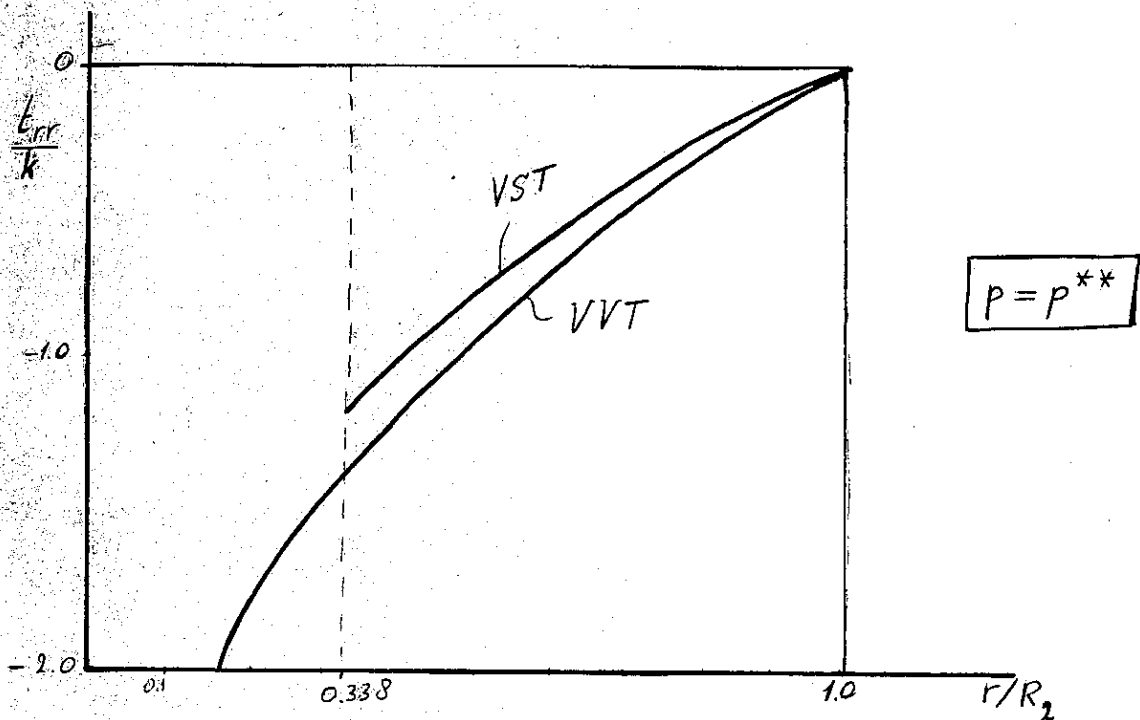
$$R_1/R_2 \geq 0.338 ,$$

en in dit geval kan de buis dus volledig gaan vloeien. Indien

$$R_1/R_2 < 0.338 ,$$

blijft er in de buis altijd een elastisch gebied over.

Tenslotte zullen we nog in onderstaande grafiek de oplossingen behorende bij de vlakvervormingstoestand (V.V.T.) en de vlakspanningstoestand (V.S.T.) met elkaar vergelijken. We doen dit voor het geval dat $p = p^{**}$ en we zetten t_{rr} als functie van r uit.

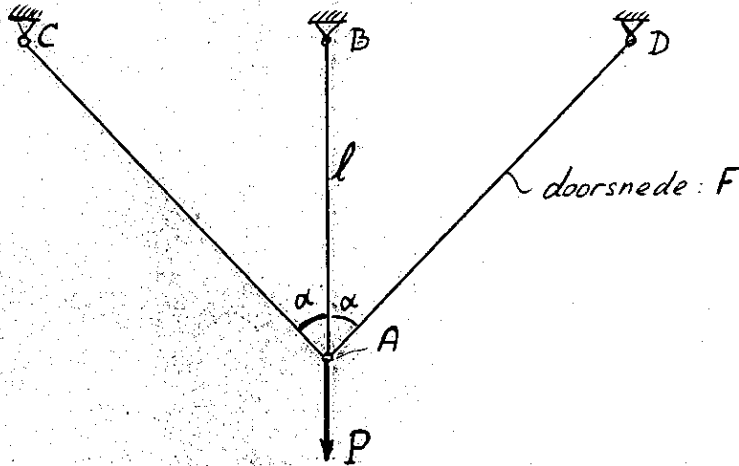


We zien hieruit dat de numerieke verschillen tussen de vlakke vervormings-
toestand en de vlakspanningstoestand, welke mathematisch veel lastiger is,
klein zijn. Uit een vergelijking van (45) met (71) blijkt dit ook, en zeker
voor kleinere waarden van R_1/R_2 , te gelden voor de vloeigrens p^* .

VRAAGSTUKKEN

Bij alle nu volgende vraagstukken wordt het materiaal steeds elastisch-ideaal-plastisch genomen. Verder moet als vloeiconditie steeds de von Mises-conditie worden gebruikt.

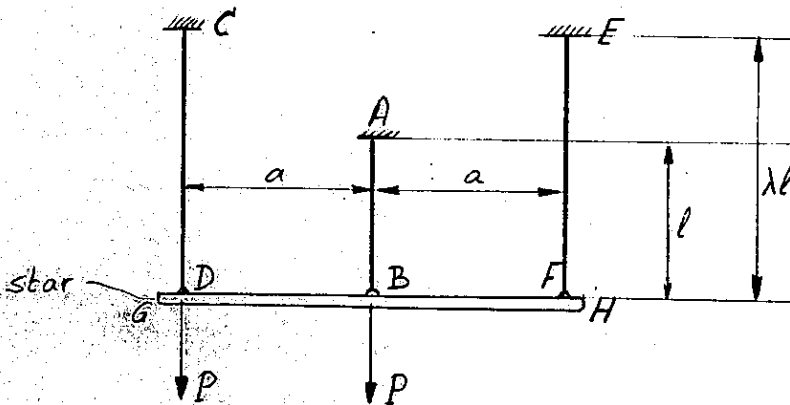
1.



Bovenstaand vakwerk, waarvan alle staven van hetzelfde materiaal zijn en hetzelfde doorsnedeoppervlak F hebben, wordt belast door een verticale kracht P .

- i) Bepaal de zakking δ van A en de staafkrachten als functie van P in het elastische gebied ($0 < P < P^*$).
- ii) Waar treedt voor het eerst vloeien op en voor welke waarde van $P (= P^*)$ gebeurt dit? Hoe groot is dan de zakking δ^* van A?
- iii) Voor welke waarde van $P (= P^{**})$ is de constructie volledig plastisch geworden (en bezwijkt hij dus)? Hoe groot is op dat moment de zakking δ^{**} van A?
- iv) Neem P in het plastische gebied: $P^* < P < P^{**}$. Bepaal nu de staafkrachten en de zakking δ .
- v) Belast de constructie eerst door een kracht P_1 met $P^* < P_1 < P^{**}$ (zie iv) en ontlast daarna de constructie. Bereken de residu-spanningen in de staven.
- vi) Belast de volgens v) plastisch voorbelaste constructie opnieuw met $P = P_2$. Wanneer zal nu hernieuwd vloeien optreden?

2.

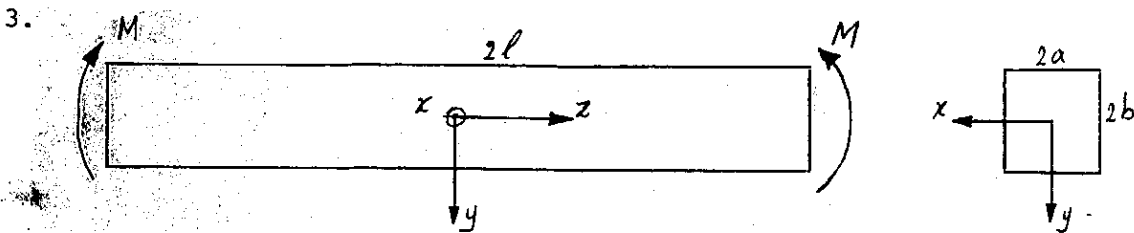


Van bovenstaande constructie zijn de staven: AB, CD en EF van hetzelfde materiaal, alle met doorsnede-oppervlak F , en is de staaf GH star. De constructie wordt belast door twee gelijke krachten P (zie figuur).

- i) Bepaal voor het elastische gebied ($0 < P < P^*$) de staafkrachten en de zakkingen van B, D en F als functies voor P en λ .
- ii) Waar treedt voor het eerst vloeien op (let op: dit is afhankelijk van λ) en voor welke waarde van P ($= P^*$) gebeurt dit?
- iii) Wanneer zal de constructie bezwijken? Voor welke waarde van P ($= P^{**}$) zal dit gebeuren?

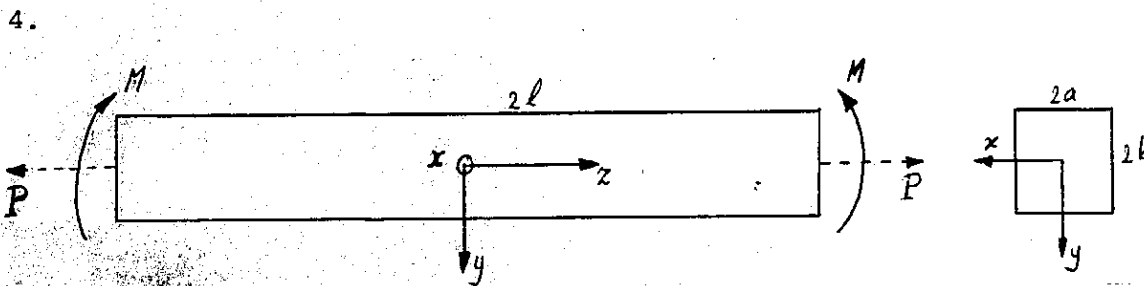
Neem voor de volgende vragen: $\lambda = 1$.

- iv) Belast de constructie eerst tot in het plastische gebied met $P = pFk\sqrt{3}$ en $\frac{6}{7} < p < 1$ (dan $P^* < P < P^{**}$).
Bereken de staafkrachten.
- v) Ontlast de volgens iv) belaste constructie. Bereken de residuspanningen.



Een balk met een rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt belast door een buigend moment M langs de x -as.

- i) Bepaal voor het elastische gebied ($0 < M < M^*$) de spanningen in de balk. Waar treedt de maximale spanning op?
- ii) Waar treedt voor het eerst vloeien op? Bepaal de waarde van $M (= M^*)$ waarvoor voor het eerst vloeien optreedt.
- iii) Neem $M > M^*$, maar kleiner dan de bezwijkwaarde ($= M^{**}$). Verdeel de doorsnede in een elastisch en een plastisch gebied? Bepaal de spanningen in het elastische en in het plastische gebied.
- iv) Bepaal het bezwijkmoment M^{**} .
- v) Belast de balk eerst door een moment M_1 met $M^* < M_1 < M^{**}$ en ontlast hem daarna. Bereken de residuspanningen.
- vi) Belast de balk voor met een moment M_1 , zodanig dat de doorsnede van de balk voor de helft plastisch vloeit. Bepaal M_1 . Ontlast de balk en belast hem daarna opnieuw, nu met een moment M_2 . Voor welke waarde van $M_2 (= M_2^*)$ treedt nu vloeien op? Met welke factor is de vloeigrens verhoogd door de voorbelasting?



Beschouw weer de rechthoekige balk van opgave 3. Belast deze eerst door een buigend moment langs de x -as tot aan het begin van vloeien ($M_x = M^*$; zie 3.) Belast hem daarna extra door een normaalkracht P . Het buigende moment blijft bij alle nu volgende vragen gelijk aan M^* .

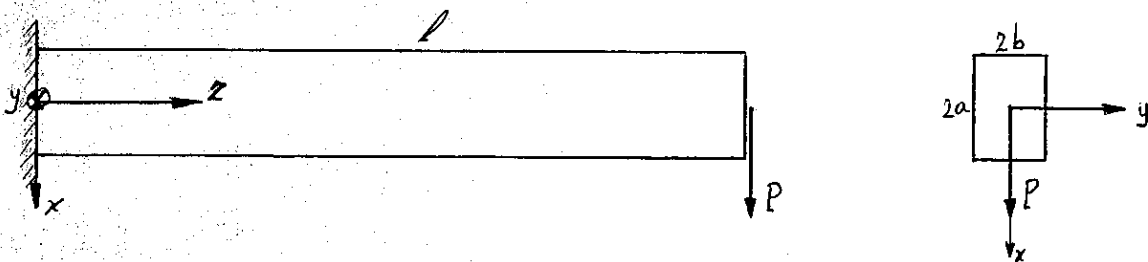
- i) Laat P aangroeien van nul tot een zekere, niet te grote waarde, Hoe zal het plastische gebied zich dan uitbreiden? Geef de grens van het plastische gebied aan met $y = \eta b$ (we beperken ons voorlopig tot die waarden van P , waarvoor $0 < \eta < 1$). Neem aan dat de spanningsverdeling in het elastische gebied lineair in y is, volgens

$$t_{zz} = c_1 y + c_2 \quad , \quad (\text{voor } -b \leq y < \eta b) \quad ,$$

en geef drie (impliciete) relaties waaruit c_1 , c_2 en η als functies van P zijn te bepalen. Maak hiervoor gebruik van de continuïteit van t_{zz} en het feit dat t_{zz} in globaal evenwicht moet zijn met de doorsnedegrootheden.

- ii) Neem P zo groot dat de balk voor de helft vloeit ($\eta = 0$). Bereken deze waarde van P en geef de expliciete spanningsverdeling. Bewijs dat de balk nog steeds slechts aan één zijde van de doorsnede (namelijk $y > 0$) vloeit.
- iii) Hoe breidt het plastische gebied zich uit als P groter wordt dan de bij ii) gevonden waarde?
- iv) Schets de spanningsverdeling bij bezwijken. Bepaal hieruit de bezwijkwaarde P^{**} .
- v) Geef P weer de waarde volgens ii) ($\eta = 0$). Ontlast daarna de balk volledig ($P \rightarrow 0$ en $M \rightarrow 0$). Bepaal de residu-spanningen.

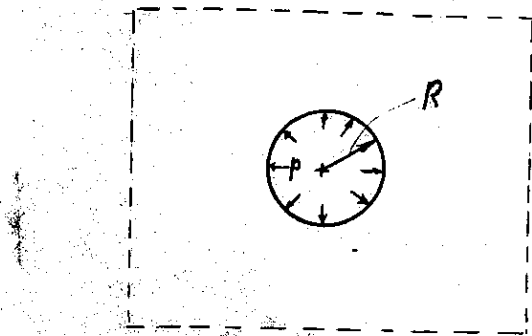
5.



Een eenzijdig ingeklemde balk met rechthoekige doorsnede ($2a \times 2b$) wordt in zijn vrije einddoorsnede ($z = l$) belast door een dwarskracht P in x -richting.

- i) Bepaal voor het elastische gebied ($P < P^*$) de normaalspanningsverdeling in de balk. In de nu volgende beschouwingen mag de schuifspanning worden verwaarloosd. Ga na waarom dit voor een lange, slanke balk geoorloofd is.

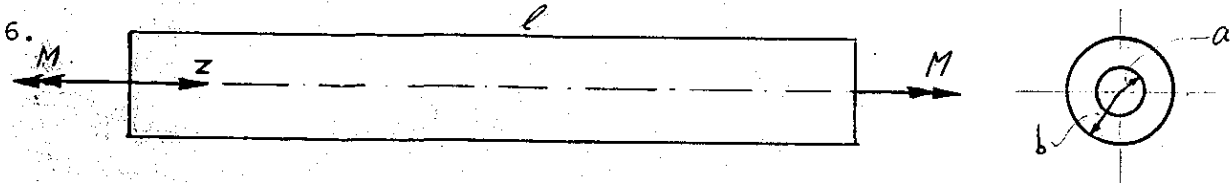
7.



Een groot, rechthoekig blok bevat een cilindrisch, cirkelvormig gat met straal R . De afmetingen van het blok zijn veel groter dan die van het gat; in feite mag het blok oneindig worden genomen. Het gat wordt aan de binnenkant belast door een druk p . De randen van het blok evenwijdig aan de as van de cylinder zijn vrij. Van de vlakken loodrecht op de cylinder zijn de axiale verplaatsingen verhinderd. Het materiaal van het blok is incompressibel.

- i) Verkeert het blok in een vlakspannings- of een vlakke vervormings-toestand?
 - ii) Bereken voor het elastische gebied ($p < p^*$) de spanningsverdeling in het blok.
 - iii) Waar treedt voor het eerst vloeien op en voor welke waarde van $p (= p^*)$?
 - iv) Neem $p > p^*$. Geef de grens van het plastische gebied aan met c . Bepaal de spanningsverdeling in het blok en bereken c .
 - v) Belast het blok tot $c = 2R$. Bereken de bijbehorende waarde van $p (= p_1)$ en de spanningsverdeling in het blok.
 - vi) Ontlast het volgens v) belaste blok en bereken de residusspanningen. Aan welke condities moet deze spanningsverdeling voldoen? Ga na of hier inderdaad aan voldaan is.
8. Een dunne cirkelvormige plaat, straal R , is aan de buitenrand ingeklemd en bevat een starre, cirkelvormige kern, straal a . De kern wordt belast door een moment M loodrecht op de plaat.
- i) Bepaal voor het elastische gebied ($M < M^*$) de spanningen in de plaat, de verplaatsingen en de hoekverdraaiing φ van de kern.
 - ii) Waar treedt voor het eerst vloeien op? Bereken de hierbij behorende waarden van $M (= M^*)$ en $\varphi (= \varphi^*)$.
 - iii) Wat gebeurt er als M groter dan M^* wordt? Schets in een grafiek het verloop van φ als functie van M .

- ii) In welk punt van de balk is de normaalspanning maximaal? Waar zal het begin van vloeien optreden en voor welke waarde van $P (= P^*)$.
- iii) In welk punt (doorsnede) zal breuk optreden en voor welke waarde van $P (= P^{**})$.



Een cirkelvormige buis, binnenstraal a , buitenstraal b , wordt getordeerd door een wringend moment M .

- i) Bereken voor het elastische gebied ($M < M^*$) de spanningsverdeling in de buis.
- ii) Waar begint de cylinder voor het eerst te vloeien en voor welke waarde van $M (= M^*)$?
- iii) Neem M groter dan M^* , maar kleiner dan de bezwijkwaarde M^{**} . Bepaal de spanningsverdeling in de buis, uitgedrukt in de straal c van het vloeigebied ($c < r \leq b$). Geef het verband tussen c en M .
- iv) Bepaal het bezwijkmoment M^{**} . Wat is het verschil tussen M^* en M^{**} voor een dunne buis ($a = b - t$, $t/b \ll 1$).
- v) Neem voor de nu volgende vragen $b = 2a$. Belast de buis met een moment M_1 tot $\frac{3}{2}a$. Bereken M_1 en bepaal de spanningsverdeling in de buis.
- vi) Ontlast de volgens v) belaste buis en bereken de residuspanningen. Controleer of deze residuspanningen inderdaad een nulmoment opleveren.
- vii) Belast de volgens v) en vi) voorbelaste buis opnieuw met een moment M_2 . Bereken voor het elastische gebied ($M_2 < M_2^*$) de spanningsverdeling in de buis. Waar is deze spanning maximaal? Bereken het moment M_2^* , waarvoor de buis opnieuw begint te vloeien. Met welke factor is de vloeigrens verhoogd door deze voorbelasting?

Opmerking: Voor tentamenopgaven, zie Vraagstukkenbundel Elastostatica.

ANTWOORDEN

1. i)

$$\delta = \frac{P\ell}{(1 + 2\cos^3\alpha)EF}$$

$$AB : S_1 = \frac{P}{(1 + 2\cos^3\alpha)} \quad , \quad AC \text{ en } AD : S_2 = \frac{P \cos^2\alpha}{(1 + 2\cos^3\alpha)}$$

ii) Vloeien in AB als : $P = P^* = (1 + 2\cos^3\alpha)kF\sqrt{3}$.

$$\delta^* = \frac{k\ell\sqrt{3}}{E}$$

iii) $P^{**} = (1 + 2\cos\alpha)kF\sqrt{3}$, $\delta^{**} = \frac{k\ell\sqrt{3}}{E \cos^2\alpha}$.

iv) $S_1 = kF\sqrt{3}$, $S_2 = (P - kF\sqrt{3})/(2\cos\alpha)$,

$$\delta = \frac{(P - kF\sqrt{3})\ell}{2EF \cos^3\alpha}$$

v) $AB : \sigma_1^{(r)} = - \frac{(P_1 - P^*)}{(1 + 2\cos^3\alpha)F}$,

$$AC \text{ en } AD : \sigma_2^{(r)} = \frac{(P_1 - P^*)}{2\cos\alpha(1 + 2\cos^3\alpha)F}$$

vi) Hernieuwd vloeien als $P_2 = P_2^* = P_1$.

2. i) $AB : S_1 = \frac{2\lambda}{(2 + \lambda)} P$, $u_1 = \frac{2\lambda\ell}{(2 + \lambda)} \frac{P}{EF}$

$$CD : S_2 = \frac{(\lambda + 6)}{2(2 + \lambda)} P$$
 , $u_2 = \frac{\lambda(\lambda + 6)\ell}{2(2 + \lambda)} \frac{P}{EF}$

$$EF : S_3 = \frac{(2 - \lambda)}{2(2 + \lambda)} P$$
 , $u_3 = \frac{\lambda(2 - \lambda)\ell}{2(2 + \lambda)} \frac{P}{EF}$

ii) $\lambda > 2$: dan eerst vloeien in AB, met

$$P^* = \frac{(2 + \lambda)}{2\lambda} kF\sqrt{3} ,$$

$\lambda < 2$: dan eerst vloeien in CD, met

$$P^* = \frac{2(2 + \lambda)}{(6 + \lambda)} kF\sqrt{3} .$$

Voor $\lambda = 2$ vloeien AB en CD tegelijk.

iii) De constructie bezwijkt als AB en CD beide vloeien.

Dan

$$P = P^{**} = kF\sqrt{3} , \text{ voor } 0 < \lambda \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 2 .$$

iv) AB : $S_1 = 3P - 2kF\sqrt{3} ,$

CD : $S_2 = kF\sqrt{3} ,$

EF : $S_3 = -P + kF\sqrt{3} ,$

v) $\sigma_1^{(r)} = \left(\frac{7}{3}P - 2\right)k\sqrt{3} , \sigma_2^{(r)} = \left(-\frac{7}{6}P + 1\right)k\sqrt{3} , \sigma_3^{(r)} = \left(-\frac{7}{6}P + 1\right)k\sqrt{3} .$

3. i) $t_{zz} = \frac{3M}{4ab^3} y ,$ overige $t_{ij} = 0 .$

$|t_{zz}|$ maximaal in $y = \pm b .$

ii) Vloeien in $y = \pm b$ voor $M = M^* = \frac{4}{3}kab^2\sqrt{3} .$

iii) Grens elastische gebied : $y = \pm \eta b$ met

$$\eta = \sqrt{3 - \frac{3M}{2ab^2k\sqrt{3}}} .$$

$$\begin{aligned}
 t_{zz} &= k\sqrt{3} \quad , \quad \eta b \leq y \leq b \quad , \\
 &= \frac{k\sqrt{3}}{\eta b} y \quad , \quad -\eta b \leq y \leq \eta b \quad , \\
 &= -k\sqrt{3} \quad , \quad -b \leq y < -\eta b \quad .
 \end{aligned}$$

iv) $M^{**} = 2ab^2 k\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{v) } t_{zz}^{(r)} &= k\sqrt{3} - \frac{3M_1}{4ab} y \quad , \quad \eta_1 b \leq y \leq b \quad , \quad (\eta_1 = \eta(M_1)) \\
 &= \left(\frac{k\sqrt{3}}{\eta_1 b} - \frac{3M_1}{4ab^3} \right) y \quad , \quad -\eta_1 b \leq y \leq \eta_1 b \quad , \\
 &= -k\sqrt{3} + \frac{3M_1}{4ab^3} y \quad , \quad -b \leq y < -\eta_1 b \quad .
 \end{aligned}$$

vi) $M_1 = \frac{11}{6} ab^2 k\sqrt{3}$, $M_2^* = M_1$, $\frac{M_2^*}{M^*} = \frac{11}{8}$.

4. i) $-b \leq y < \eta b$: elastisch ; $\eta b < y \leq b$: plastisch .

$$c_1 \eta b + c_2 = k\sqrt{3} \quad ,$$

geeft: $t_{zz}^{(el)} = c(y - \eta b) + k\sqrt{3}$, $(c \equiv c_1)$,

en dan:

$$4abk\sqrt{3} - ac(1 + \eta^2)b^2 = P \quad ,$$

$$\frac{1}{3} ab^3 c(2 + 3\eta - \eta^3) = \frac{4}{3} ab^2 k\sqrt{3} \quad (= M^*) \quad .$$

ii) $P = 2abk\sqrt{3}$,

$$t_{zz} = \left(1 + \frac{2y}{b} \right) k\sqrt{3} \quad , \quad -b \leq y \leq 0 \quad ,$$

$$= k\sqrt{3} \quad , \quad 0 \leq y \leq b \quad .$$

iii) In dat geval treedt er zowel boven- als onderaan de doorsnede een plastisch gebied op:

$$-b \leq y \leq -\eta_1 b : t_{zz} = -k\sqrt{3} ; \quad \eta_2 b \leq y \leq b : t_{zz} = k\sqrt{3} .$$

iv) (Dan $\eta_1 = \eta_2$) . $P^{**} = 4abk .$

v) $t_{zz}^{(r)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) k\sqrt{3} , \quad -b \leq y \leq 0 ,$
 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) k\sqrt{3} , \quad 0 \leq y \leq b .$

5. i) $t_{zz} = -\frac{3P(\ell - z)}{4a^3 b} x .$

ii) $P^* = \frac{4a^2 bk\sqrt{3}}{3\ell} .$

iii) $P^{**} = \frac{2a^2 bk\sqrt{3}}{\ell} \left(= \frac{3}{2} P^* \right) .$

6. i) $t_{\theta z} = \frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} r .$

ii) Vloeien op $r = b$ voor $M = M^* = \frac{\pi}{2} \frac{(b^4 - a^4)}{b} k .$

iii) $t_{\theta z} = \begin{matrix} kr/c , & \text{voor } a \leq r \leq c , \\ k , & \text{voor } c \leq r \leq b . \end{matrix}$

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{k}{c} (c^4 - a^4) + \frac{2\pi}{3} k (b^3 - c^3) .$$

iv) $M^{**} = \frac{2\pi}{3} k (b^3 - a^3) .$

$$M^* \approx M^{**} = 2\pi k b^3 t (1 + O(t/b)) .$$

v) $M_1 = \frac{213}{48} \pi k a^3 ; \quad t_{\theta z} = \frac{2k}{3a} r , \quad a \leq r \leq \frac{3}{2} a ,$

$$= k , \quad \frac{3}{2} a \leq r \leq 2a .$$

$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad t_{\theta z} &= \frac{3k}{40a} r, \quad a \leq r \leq \frac{3}{2} a, \\ &= k - \frac{71k}{120a}, \quad \frac{3}{2} a \leq r \leq 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vii)} \quad t_{\theta z} &= \frac{3k}{40} \frac{r}{a} + \frac{2M_2}{15\pi a^3} \frac{r}{a}, \quad a \leq r \leq \frac{3}{2} a, \\ &= k - \frac{71k}{120} \cdot \frac{r}{a} + \frac{2M_2}{15\pi a^3} \cdot \frac{r}{a}, \quad \frac{3}{2} a \leq r \leq 2a, \end{aligned}$$

$$M_2^* = \frac{71}{16} k\pi a^3; \quad \frac{M_2^*}{M^*} = \frac{71}{60}.$$

7. i) Vlakke vervormingstoestand.

$$\text{ii)} \quad t_{rr} = -\frac{pR^2}{r^2}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{pR^2}{r^2}, \quad t_{zz} = 0.$$

iii) Vloeien op $r = R$ voor $p = p^* = k$.

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad t_{rr} &= 2k \ln(r/R) - p, \quad t_{\theta\theta} = 2k[1 + \ln(r/R)] - p, \quad t_{zz} = k[1 + 2 \ln(r/R)] - p \\ &\text{voor } R \leq r < c. \end{aligned}$$

$$t_{rr} = -\frac{kc^2}{r^2}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{kc^2}{r^2}, \quad t_{zz} = 0, \quad \text{voor } r > c,$$

$$c = R e^{\frac{1}{k}(p-1)}.$$

$$\text{v)} \quad p_1 = k(1 + 2 \ln 2),$$

$$t_{rr} = k[-1 + 2 \ln(r/2R)], \quad t_{\theta\theta} = k[1 + 2 \ln(r/2R)], \quad t_{zz} = 2k \ln(r/2R),$$

voor $R \leq r < 2R$.

$$t_{rr} = -\frac{4kR^2}{r^2}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{4kR^2}{r^2}, \quad t_{zz} = 0, \quad \text{voor } r > 2R.$$

$$\text{vi) } t_{rr}^{(r)} = k \left[\left(\frac{R^2}{2} - 1 \right) (1 + 2 \ln 2) + 2 \ln(r/R) \right],$$

$$t_{\theta\theta}^{(r)} = k \left[\left(1 - \frac{R^2}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{R^2}{2} \right) \ln 2 + 2 \ln(r/R) \right],$$

$$t_{zz}^{(r)} = 2k \ln(r/2R), \quad \text{voor } R \leq r < 2R,$$

$$t_{rr}^{(r)} = (-3 + 2 \ln 2) \frac{kR^2}{r^2}, \quad t_{\theta\theta}^{(r)} = (3 - 2 \ln 2) \frac{kR^2}{r^2}, \quad t_{zz} = 0,$$

voor $r > 2R$.

Conditie:

$$t_{rr}(r=0) = 0 \quad \text{en} \quad t_{rr}(r=2R) : \text{continu.}$$

8. i) $t_{r\theta} = \frac{M}{2\pi h r^2}$, (h is dikte van plaat),

$$v = u_\theta = \frac{M}{4\pi h G} \left[\frac{r}{R^2} - \frac{1}{r} \right]; \quad \varphi = - \frac{M}{4\pi a h R G} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right).$$

ii) Vloeien op $r = a$ voor $M = M^* = 2\pi h a^2 k$.

iii) Zoek dit maar eens lekker zelf uit!