

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# **TECHNISCHE BALKENTHEORIE**

Syllabus naar het College van

**Prof. Dr. J.B. Alblas**

**Najaarssemester 1970**

2256

Bibl. Mag

~~Leeszaal der  
Centrale Bibliotheek~~

## Onderafdeling der Wiskunde

---

BmA

### Technische balkentheorie

SYLLABUS NAAR HET COLLEGE VAN  
PROF. DR. J.B. ALBLAS

Wij verzoeken u, dit college-dictaat niet  
mee te nemen buiten de leeszaal en het na  
gebruik in te leveren bij de assistente.

NAJAARSSEMESTER 1970



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT.NR. 2.256  
PRIJS f 2,50

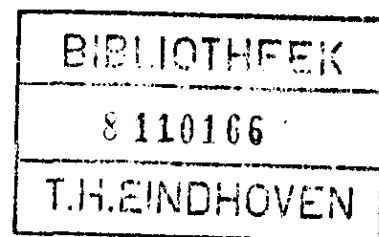
2.256

Onderafdeling der wiskunde

---

Technische balkentheorie

Syllabus naar het college van prof. dr J.B. Alblas



Najaarssemester 1970

---

Technische Hogeschool Eindhoven

## Inhoudsopgave

	blz.
<u>Inleiding</u>	1
I. <u>Samenvatting van de elementaire balkentheorie uit de sterkteleer</u>	
I.1. Basisvergelijkingen van de lineaire elasticiteitstheorie	3
I.2. Snedegrootheden en globale evenwichtsvergelijkingen	5
I.3. Vervorming bij zuivere buiging	8
I.4. Dwarskrachtenbuiging	10
II. <u>Balken met dunwandige doorsnede</u>	
II.1. Torsie van balken met gesloten dunwandige doorsnede	15
II.2. Dwarskrachtenmiddelpunt	19
II.3. Torsie met verhinderde welving	24
III. <u>Gekromde balken</u>	
III.1. Geometrie van de kromme lijn	29
III.2. Kinematica van de deformatie van kromme lijnen	33
III.3. Evenwichtsvergelijkingen voor kromme balken	37
III.4. Constitutieve vergelijkingen voor slanke gekromde balken	39
III.5. Ringen	43
IV. <u>Trillingen van balken</u>	
IV.1. Trillingen van rechte balken	47
IV.2. Trillingen van ringen	53
V. <u>Stabiliteit onder conservatieve belasting</u>	
V.1. Knik van rechte balken	58
V.2. Knik van ringen	59
V.3. Kiep van rechte balken	62
V.4. Thermische knik van rechte balken	64

## Inhoudsopgave (vervolg)

	blz.
VI. <u>Stabiliteit onder niet-conservatieve belasting</u>	
VI.1. Follower force	68
VI.2. Torsie-instabiliteit	71
VI.3. Koppeling van vloeistofstroming en deformatie. Flutter	72
VII. <u>Twee-dimensionale balkentheorie</u>	
VII.1. Inleiding. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand	76
VII.2. Ingekleemde balk in einddoorsnede belast door dwarskracht	78
VII.3. Opgelegde balk met verdeelde belasting	81
VII.4. Cirkelvormige balk belast door buigende momenten	83
VII.5. Cirkelvormige balk belast door dwarskracht	87
VIII. <u>Plasticiteitstheorie van balken</u>	
VIII.1. Rechte balk	89
VIII.2. Bezwijkanalyse (limit analysis)	94
VIII.3. Vloeistop (shake down)	95
VIII.4. Plastische vervorming bij scheve buiging	97
VIII.5. Plastische golven.	100

## Inleiding

In dit college zal een overzicht worden gegeven van de technische balkentheorie. De balkentheorie is een onderdeel van de lineaire elasticiteitstheorie (plastische vervormingen even buiten beschouwing gelaten), welke in wezen drie-dimensionaal is. In de praktijk zijn drie-dimensionale problemen moeilijk oplosbaar, wat er toe geleid heeft dat men vereenvoudigde theorieën heeft afgeleid. Voorbeelden hiervan zijn de twee-dimensionale theorie van dunne platen en schalen en de balkentheorie. Deze laatste, welke geldt voor balken, waarvan de doorsnedematen klein zijn ten opzichte van de lengte (slanke balken), is een één-dimensionale theorie. De karakteristiek van een balk is zijn neutrale lijn, dit is die lijn van de balk welke bij buiging geen rek ondervindt. Aan ieder punt van deze neutrale lijn wordt een doorsnede, loodrecht op de neutrale lijn, toegevoegd. In deze doorsneden werken spanningen, welke als resultanten doorsnedegrootheden hebben als: normaalkrachten, dwarskrachten, buigende en wringende momenten. De balkentheorie is gebaseerd op de Bernoulli-hypothese, welke stelt: doorsneden loodrecht op de neutrale lijn blijven ook na deformatie loodrecht op de neutrale lijn. Verder wordt in het algemeen de doorsnede als ondeformeerbaar aangenomen. Voor de deformatie van de balk kunnen we dus volstaan met de neutrale lijn, maar voor de evenwichtsbeschouwingen hebben we de doorsnedegrootheden nodig. We zouden daarom de balkentheorie beter een één-plus-twee-dimensionale theorie kunnen noemen.

In dit college zal de meeste aandacht besteed worden aan de technische aspecten van de balkentheorie. Zo zullen we geen afleiding geven van de balkentheorie uit de exacte drie-dimensionale theorie, waaruit de voorwaarden volgen, waaronder de balkentheorie een technisch aanvaardbare benadering is. Het blijkt dat de balkentheorie overeenkomt met de exacte theorie in de limiet ( $d/\ell$ ) gaat naar nul, waarbij  $d$  een karakteristieke doorsnedemaat en  $\ell$  de lengte van de balk is.

We beginnen dit college met een overzicht van de elementaire balkentheorie van rechte, slanke balken. Vervolgens behandelen we enkele onderwerpen uit de theorie van balken met dunwandige doorsneden, zoals de formules van Bredt, het dwarskrachtenmiddelpunt en de verhinderde welving. In hoofdstuk III bespreken we de theorie van slanke gekromde balken, met een specialisatie op ringen en in hoofdstuk IV de trillingen van rechte balken, o.a. de Timoshenko-balk, en van ringen. Dit laatste als een toe-

passing van de theorie van H.III. In de hoofdstukken V en VI wordt ingegaan op enkele conservatieve en niet-conservatieve stabiliteitsproblemen. Deze hoofdstukken hebben een inleidend karakter en zijn slechts bedoeld als een kennismaking met het gebied van de stabiliteitstheorie. In hoofdstuk VII wordt de buiging van rechte en gekromde balken met dunne rechthoekige doorsneden behandeld vanuit de platentheorie. De met deze nauwkeurigere theorie verkregen resultaten worden vergeleken met die van de elementaire balkentheorie. In het laatste hoofdstuk verlaten we het gebied van de elasticiteitstheorie en gaan we in het kort enige problemen uit de plasticiteitstheorie bekijken. Ook dit hoofdstuk heeft enkel een inleidend karakter. Voor meer uitvoerige studies wordt steeds verwezen naar de referenties aan het einde van ieder hoofdstuk (aangeduid met [ ]).

Dit nakandidaatscollege is een keuzevak voor studenten uit de afdelingen wiskunde, werktuigbouwkunde en bouwkunde. De afrekening van dit college kan op verschillende manieren geschieden, bijvoorbeeld door een mondeling tentamen (met eventueel een specialisatie op een bepaald onderwerp), een stage-opdracht of een voordracht.

# I. Samenvatting van de elementaire balkentheorie uit de sterkteleer

## I. 1. Basisvergelijkingen van de lineaire elasticiteitstheorie

We willen in dit hoofdstuk een overzicht geven van de elementaire sterkteleer van rechte balken, zoals die wordt behandeld in de voor-kandidaatscolleges:

inleiding technische mechanica III (voor W) [1],

technische mechanica II en III (voor B) [2] en

toegepaste mechanica (voor WSK) [3].

Het doel van de sterkteleer is het bepalen van de sterkte (spanningsverdeling, maximale spanning), de stijfheid (vervormingen) en de stabiliteit (knik e.d.) van een constructie.

De mechanica van elastische lichamen is gebaseerd op de volgende begrippen en formules.

Beschouw een cartesisch coördinatenstelsel:

$$x, y, z \text{ of } x_1, x_2, x_3 .$$

Noem de verplaatsingsvector  $\vec{u}$ , of in componenten ten opzichte van het  $(x, y, z)$ -stelsel

$$u, v, w \text{ of } u_1, u_2, u_3 .$$

De deformatietensor wordt gedefinieerd door

$$e_{ij} := \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) , \quad ( ,_i := \frac{\partial}{\partial x_i} ) \quad (1.1)$$

of, uitgeschreven

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} , & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} , & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} , \\ e_{xy} &= e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , & e_{yz} &= e_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) , \\ e_{zx} &= e_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (1.2)$$

We voeren verder in de spanningstensor  $t_{ij}$ , welke is gedefinieerd als de kracht per oppervlakte-eenheid werkend in de positieve  $x_i$ -richting op een oppervlak waarvan de uitwendige normaal wijst in de positieve  $x_j$ -richting. De spanningstensor is symmetrisch:

$$t_{ij} = t_{ji} , \quad (1.3)$$



of

$$t_{xy} = t_{yx}, \quad t_{yz} = t_{zy}, \quad t_{zx} = t_{xz}. \quad (1.4)$$

De spanningen moeten voldoen aan de lokale evenwichtsvergelijkingen

$$t_{ij,j} + f_i = 0, \quad (1.5)$$

waarin  $f$  de volumekracht is.

Verg. (1.5) uitschrijven geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Voor een isotroop materiaal geldt voor het verband tussen de deformaties en de spanningen de wet van Hooke

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2 \mu e_{ij}, \quad (1.7)$$

met

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{als } i \neq j \\ 1, & \text{als } i = j \end{cases}, \quad \text{en } e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad (1.8)$$

en  $\lambda, \mu$  : Lamé-parameters.

Verg. (1.7) luidt, uitgeschreven in een in de sterkteleer meer gebruikelijke vorm,

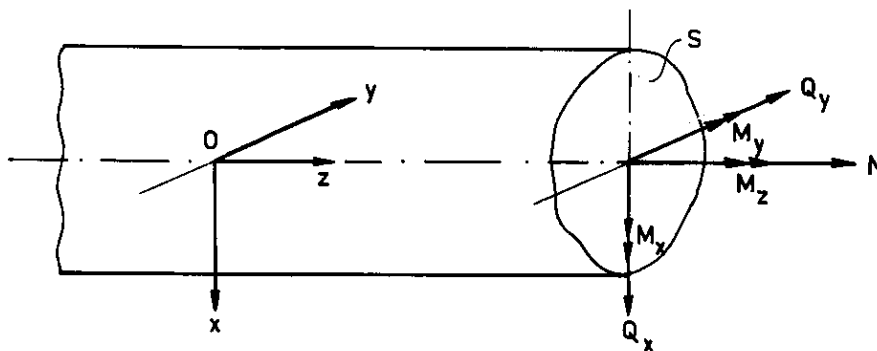
$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [t_{xx} - \nu(t_{yy} + t_{zz})], \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [t_{yy} - \nu(t_{zz} + t_{xx})], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [t_{zz} - \nu(t_{xx} + t_{yy})], \\ e_{xy} &= \frac{1}{2G} t_{xy}, \\ e_{yz} &= \frac{1}{2G} t_{yz}, \\ e_{xz} &= \frac{1}{2G} t_{xz}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

waarbij  $E$  de elasticiteitsmodulus is,  $G$  de glijdingsmodulus en  $\nu$  de dwarscontractiecoëfficiënt.

Tussen  $G$ ,  $\nu$  en  $E$  geldt de relatie

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} . \quad (1.10)$$

### I. 2. Snedegrootheden en globale evenwichtsvergelijkingen



We brengen in een rechte balk een  $Oxyz$ -stelsel aan, waarbij de  $z$ -as gaat door de zwaartepunten van de doorsnede, terwijl de in de doorsnede gelegen  $x$ - en  $y$ -assen hoofdtraagheidsassen van de doorsnede zijn. Dit houdt in dat

$$\int_S x dS = \int_S y dS = \int_S xy dS = 0 , \quad (1.11)$$

waarbij  $S$  het oppervlak van de doorsnede is.

Voor het definiëren van de krachten en momenten in de doorsnede gaan we uit van de aanname:

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{yz} = 0 . \quad (1.12)$$

Aan deze aanname zal in het algemeen niet exact voldaan zijn. Deze veronderstelling is identiek met de aanname dat de doorsnede in zijn vlak onvervormbaar is.

In de doorsnede kunnen dan nog de volgende krachten en momenten werken

$$\text{normaalkracht} \quad : N = \int_S t_{zz} dS , \quad (1.13)$$

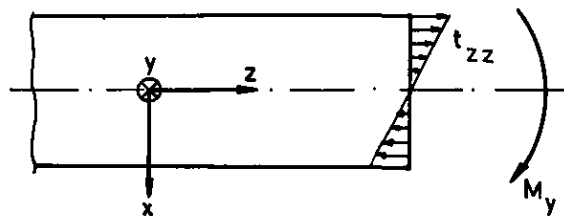
$$\text{dwarskrachten} \quad : \quad Q_x = \int_S t_{xz} \, dS, \quad Q_y = \int_S t_{yz} \, dS, \quad (1.14)$$

$$\text{buigende momenten} \quad : \quad M_x = \int_S y t_{zz} \, dS, \quad M_y = - \int_S x t_{zz} \, dS, \quad (1.15)$$

$$\text{wringend moment} \quad : \quad M_z = \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) \, dS. \quad (1.16)$$

Uit deze definities volgt de volgende tekenafspraken: een kracht of moment in x-, y- of z-richting wordt positief genomen indien hij, werkende op een doorsnede waarvan de uitwendige normaal in de positieve z-richting wijst, gericht is langs de positieve x-, y- of z-as.

We beschouwen een buiging in het x-z-vlak:



Als we aannemen, dat de  $t_{zz}$  lineair verdeeld is over de doorsnede, dan moet gelden

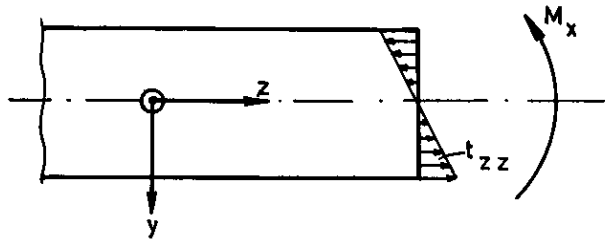
$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x, \quad (1.17)$$

$$\text{met} \quad I_y = \int_S x^2 \, dS. \quad (1.18)$$

Immers, volgens (1.15)<sup>2</sup> is

$$M_y = - \int_S x t_{zz} \, dS = \frac{M_y}{I_y} \int_S x^2 \, dS = M_y.$$

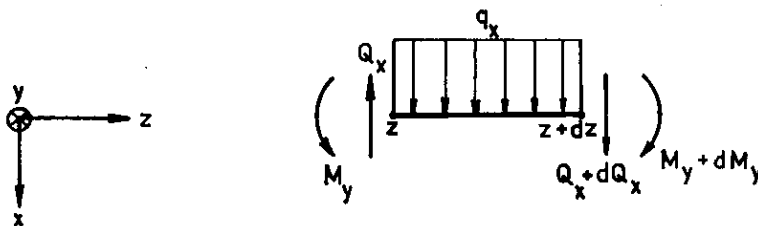
Op analoge wijze vinden we voor buiging in het y-z-vlak:



dat 
$$t_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (1.19)$$

met 
$$I_x = \int_S y^2 dS. \quad (1.20)$$

We gaan nu kijken, voor buiging in het x-z-vlak, naar het evenwicht van een elementje dz van een balk belast door een buigend moment, een dwarskracht en een verdeelde belasting.



Het krachtenevenwicht geeft

$$- Q_x + q_x dz + Q_x + dQ_x = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{dQ_x}{dz} = - q_x(z). \quad (1.21)$$

Het momentenevenwicht ten opzichte van het punt  $z = z$  levert

$$- M_y + Q_x dz + M_y + dM_y + 0((dz)^2) = 0,$$

of

$$\frac{dM_y}{dz} = - Q_x(z). \quad (1.22)$$

Combinatie van (1.21) en (1.22) leidt tot

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x(z) . \quad (1.23)$$

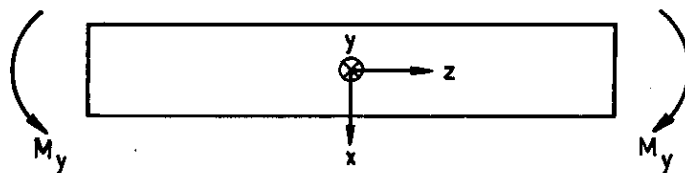
Op identieke wijze kunnen we voor buiging in het y-z-vlak afleiden

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y(z), \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y(z), \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y(z) . \quad (1.24)$$

### I. 3. Vervorming bij zuivere buiging

Onder zuivere buiging verstaan we buiging door alleen een buigend moment (dus geen dwarskrachten).

Beschouw zuivere buiging in het x-z-vlak.



Voor dit probleem geldt exact ([3])

$$t_{zz} = -\frac{M_y}{I_y} x, \quad t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = t_{yz} = t_{xz} = 0. \quad (1.25)$$

Met de wet van Hooke vinden we hieruit

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu M_y}{EI_y} x, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu M_y}{EI_y} x \quad (1.26)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{M_y}{EI_y} x, \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{xz} = 0 .$$

Door integratie volgt uit (1.26) het verplaatsingsveld

$$u = \frac{M_y}{2EI_y} (z^2 + \nu x^2 - \nu y^2) ,$$

$$v = \frac{M_y}{EI_y} \nu xy , \quad (1.27)$$

$$w = -\frac{M_y}{EI_y} xz .$$

We definiëren in de balk een zogenaamde neutrale lijn als de meetkundige plaats van die punten van de balk welke geen rek in z-richting ondergaan. Uit (1.27)<sup>3</sup> volgt dat deze neutrale lijn overeenkomt met de z-as. Voor de verplaatsing in x-richting van de neutrale lijn volgt uit (1.27)<sup>1</sup>

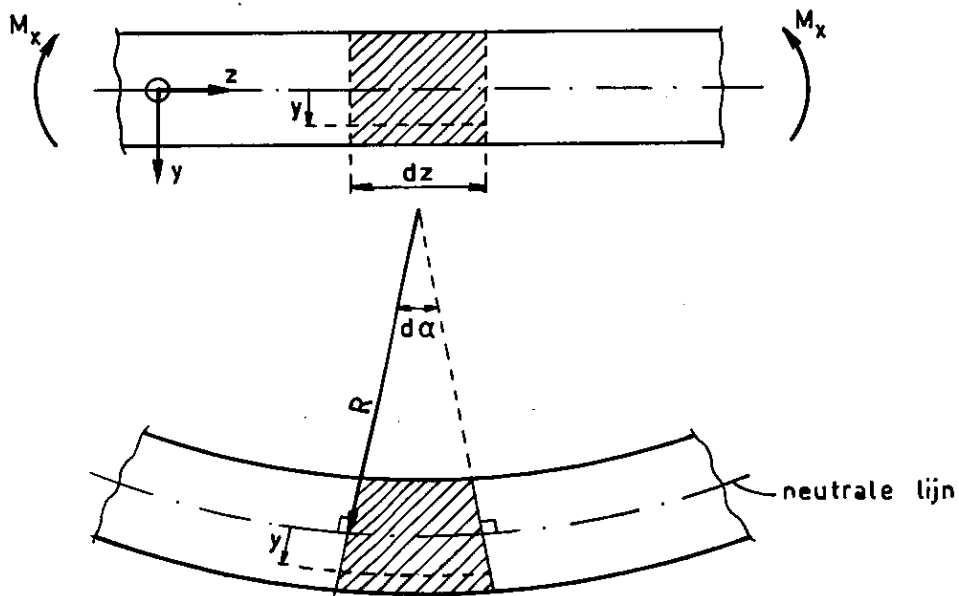
$$u_0 := u(x = 0, y = 0) = \frac{M}{2EI} z^2. \quad (1.28)$$

Uit (1.28) volgt, door tweemaal te differentiëren naar z, de belangrijke relatie

$$M_y = EI_y \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{EI}{R} y, \quad (1.29)$$

met R: kromtestraal van de neutrale lijn na de buiging.

We kunnen deze betrekking ook nog op een andere manier afleiden. Hiertoe beschouwen we, voor de verandering, een zuivere buiging in het y-z-vlak.



We gaan uit van de volgende fundamentele hypothese genaamd: Bernoulli-hypothese: doorsneden welke aanvankelijk loodrecht op de neutrale lijn staan, blijven ook na de deformatie loodrecht op deze lijn staan. Met deze aanname vinden we uit bovenstaande figuur voor de rek in de z-richting op de plaats  $y$  :

$$e_{zz} = \frac{(R+y)d\alpha - R d\alpha}{dz} = + y \frac{d\alpha}{dz} . \quad (1.30)$$

Verg. (1.9)<sup>3</sup> geeft met  $t_{xx} = t_{yy} = 0$  :

$$t_{zz} = E e_{zz} = + E y \frac{d\alpha}{dz} = + \frac{E y}{R} . \quad (1.31)$$

Dus, met (1.15)<sup>1</sup>

$$M_x = \int_S y t_{zz} dS = + \frac{EI_x}{R} = - EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} , \quad (1.32)$$

want  $\frac{d^2 v_0}{dz^2}$  is hier kleiner dan nul.

Vergelijken we deze laatste beschouwing met de voorgaande dan kunnen we de belangrijke conclusie trekken dat de Bernoulli-hypothese bij zuivere buiging exact geldt. In de balkentheorie wordt de Bernoulli-hypothese algemeen geldig verklaard, dus ook voor dwarskrachtenbuiging. Vanuit de driedimensionale elasticiteitstheorie is te bewijzen dat deze hypothese inderdaad geldt voor een grote klasse van balkenproblemen in de limiet ( $d/\ell$ ) gaat naar nul, waarbij  $\ell$  de lengte van de balk is en  $d$  een of andere karakteristieke doorsnedemaat (zie: [3], H VII).

Bij een samengestelde belasting bestaande uit de buigende momenten  $M_x$  en  $M_y$  en de normaalkracht  $N$  geldt exact

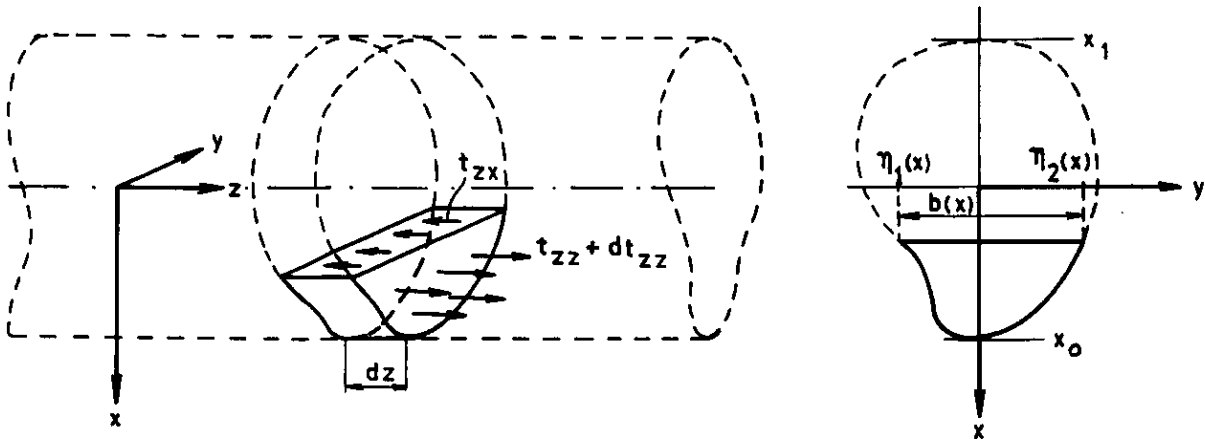
$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{S} . \quad (1.33)$$

#### I. 4. Dwarskrachtenbuiging

We beschouwen een buiging door een dwarskracht in het  $x$ - $z$ -vlak.

We nemen aan dat

$$t_{zz} = - \frac{M_y}{I_y} x , \quad t_{zx} \neq 0, \quad t_{zy} \neq 0 \quad \text{en} \quad t_{xx} = t_{yy} = t_{xy} = 0. \quad (1.34)$$



We bekijken een plakje  $dz$  van de balk, dat we op een hoogte  $x$  doorsnijden loodrecht op de  $x$ -as. Van het aldus verkregen volume-element beschouwen we het evenwicht in de  $z$ -richting. Aangezien het buitenoppervlak van de balk spanningsvrij is, krijgen we

$$\begin{aligned}
 dz \int_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)} t_{zx} dy + \int_{x_0}^x \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} [t_{zz} - (t_{zz} + dt_{zz})] dy d\xi = \\
 = dz \int_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)} t_{zx} dy - \int_{x_0}^x (d t_{zz}) b(\xi) d\xi .
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

We definiëren de gemiddelde schuifspanning over de breedte van de doorsnede

$$\bar{t}_{zx} := \frac{1}{b(x)} \int_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)} t_{zx} dy . \tag{1.36}$$

Met (1.36), (1.34)<sup>1</sup> en (1.22) kunnen we uit (1.35) afleiden

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_{zx} &= \frac{1}{b(x)} \int_{x_0}^x \frac{dt_{zz}}{dz} b(\xi) d\xi = \frac{-1}{I_y b(x)} \frac{dM}{dz} \int_{x_0}^x \xi b(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{Q_x S_y(x)}{I_y b(x)} ,
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

waarbij het statisch moment  $S_y(x)$  gedefinieerd is door

$$S_y(x) := \int_{x_0}^x \xi b(\xi) d\xi . \tag{1.38}$$

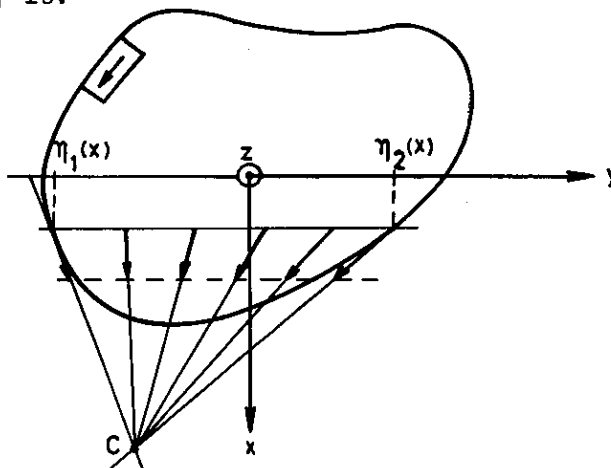


In de balkentheorie wordt gebruik gemaakt van de benadering dat men de echte schuifspanning  $t_{zx}$  gelijk stelt aan zijn gemiddelde over de breedte van de doorsnede  $\bar{t}_{zx}$ . Deze schuifspanning moet in evenwicht zijn met de dwarskracht, dat wil zeggen (verg. (1.14)<sup>1</sup>)

$$Q_x = \int_S \bar{t}_{zx} dS = \int_{x_0}^{x_1} \frac{Q_x}{I_y} \cdot \frac{S_y(x)}{b(x)} \cdot b(x) dx = Q_x ,$$

waaraan dus inderdaad is voldaan.

Voor de bepaling van de schuifspanning  $t_{zy}$  wordt de volgende benaderingsmethode gebruikt, welke uitgaat van de voorwaarde dat het buitenoppervlak van de balk spanningsvrij is.



Aangezien het buitenoppervlak spanningsvrij is, moet de schuifspanning in een vlakje aan de rand van de doorsnede evenwijdig zijn aan die rand. Een schuifspanningscomponent loodrecht op die rand geeft immers een schuifspanning op het buitenoppervlak van de balk. Uitgaande van  $t_{zx} = \bar{t}_{zx}$  wordt een  $t_{zy}$  aan de rand gekozen welke zodanig is dat de totale schuifspanning tangential aan de rand van de doorsnede is. De schuifspanningen in de doorsnede worden op de volgende manier bepaald: men trekt in de randpunten  $y = \eta_1(x)$  en  $y = \eta_2(x)$  de raaklijnen aan de rand van de doorsnede, welke elkaar snijden in het punt C; de schuifspanning  $t_{zy}$  in een willekeurig punt op de lijn  $\eta_1-\eta_2$  kiest men dan zodanig dat hij samen met  $\bar{t}_{zx}$  een resulterende schuifspanning geeft, waarvan de werklijn door het punt C gaat. Deze benaderingsmethode wordt in de technische balkenleer algemeen gebruikt. Zij vindt haar motivatie in het feit dat zij, indien toegepast op een lange balk met cirkelvormige doorsnede, welke in zijn einddoorsnede wordt belast door een dwarskracht, de exacte schuifspanningsverdeling geeft.

Passen we dit toe op een balk met rechthoekige doorsnede (breedte  $b$ , hoogte  $h$ ), dan krijgen we

$$t_{zx} = \frac{3 Q_x}{bh} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right], \quad t_{zy} = 0. \quad (1.39)$$

Voor de verplaatsing van de neutrale lijn in  $x$ -richting ten gevolge van afschuiving kunnen we het volgende zeggen.

Uitgaande van de formule

$$t_{zx} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

krijgen we voor de zakking van de neutrale lijn als gevolg van afschuiving:

$u_o^{(s)}$ , met  $w_o = 0$

$$\frac{du_o^{(s)}}{dz} = \frac{1}{G} (t_{zx})_o = \frac{Q_x}{GI_y} \cdot \frac{S_y(0)}{b(0)}, \quad (1.40)$$

waaruit volgt, als  $Q_x = \text{constant}$ ,

$$u_o^{(s)} = K \cdot \frac{Q_x}{GS} \cdot z, \quad (1.41)$$

waarbij

$$K := \frac{S_y S_y(0)}{I_y b(0)}, \quad (1.42)$$

een faktor is afhankelijk van de vorm van de doorsnede en in het algemeen van de orde één. Voor een rechthoek bijvoorbeeld is  $K = \frac{3}{2}$ .

Beschouwen we een balk met rechthoekige doorsnede welke in zijn beide einddoorsneden is opgelegd en welke op zijn halve lengte wordt belast door een puntlast  $P$ , dan vinden we met

$$Q_x = \frac{1}{2} P$$

uit (1.41)

$$u_o^{(s)} = \frac{3}{4} \frac{Pl}{Gbh}. \quad (1.43)$$

Voor hetzelfde probleem geldt voor de verplaatsing ten gevolge van buiging

$$u_o^{(b)} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4Pl^3}{Eb^3}. \quad (1.44)$$

Met:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , en  $0 \leq \nu \leq 0,5$ ,

volgt uit (1.43) en (1.44)

$$\frac{u_o^{(s)}}{u_o^{(b)}} = O \left[ \left( \frac{h}{\ell} \right)^2 \right]. \quad (1.45)$$

Aangezien voor een balk  $h \ll \ell$  geldt:  $u_o^{(s)} \ll u_o^{(b)}$ .

We kunnen hieruit de volgende conclusie trekken: we moeten in de balkentheorie bij evenwichtsbeschouwingen de dwarskracht wél in rekening brengen, maar voor het bepalen van vervormingen kunnen we in het algemeen de invloed van de dwarskracht verwaarlozen.

#### Literatuur

- [1] Collegedictaat Inleiding Technische Mechanica III (voor W),
- [2] Collegedictaat Technische Mechanica II en III (voor B),
- [3] Collegedictaat Toegepaste Mechanica (voor WSK),
- [4] Den Hartog, J.P., Strength of Materials (ook als nederlandse uitgave: Sterkteleer),
- [5] Timoshenko, Strength of materials.

## II. Balken met dunwandige doorsnede

### II. 1. Torsie van balken met gesloten dunwandige doorsnede

Bij torsie van een cilindrische staaf gelden de volgende relaties voor de verplaatsingen ([1], H VI)

$$\begin{aligned} u &= -\alpha z y, \\ v &= \alpha z x, \\ w &= \alpha \Phi(x,y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

waarbij:  $\alpha z$  = hoek waarover de z-doorsnede draait,

$$\Phi(x,y) = \text{welvingsfunctie,}$$

en voor de spanningen

$$\begin{aligned} t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = 0, \\ t_{xz} = G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \quad t_{yz} = G\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Uit de evenwichtsvergelijking

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0,$$

volgt dat  $\Phi(x,y)$  moet voldoen aan de potentiaalvergelijking

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.3)$$

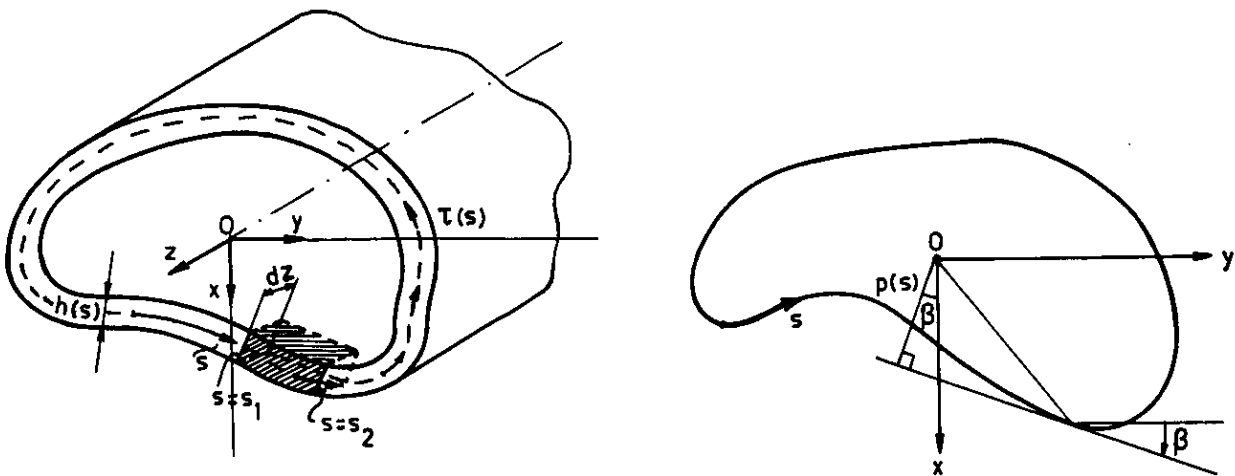
Voor het wringend moment geldt

$$M_w = \int_S (x t_{yz} - y t_{xz}) dS = G\alpha \int_S \int_S (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy. \quad (2.4)$$

We gaan nu kijken naar balken met gesloten dunwandige doorsnede. We noemen een doorsnede dunwandig, indien de wanddikte  $h$  veel kleiner is dan de karakteristieke doorsnedemaat  $d$ .

We zullen gebruik maken van de volgende twee aannamen

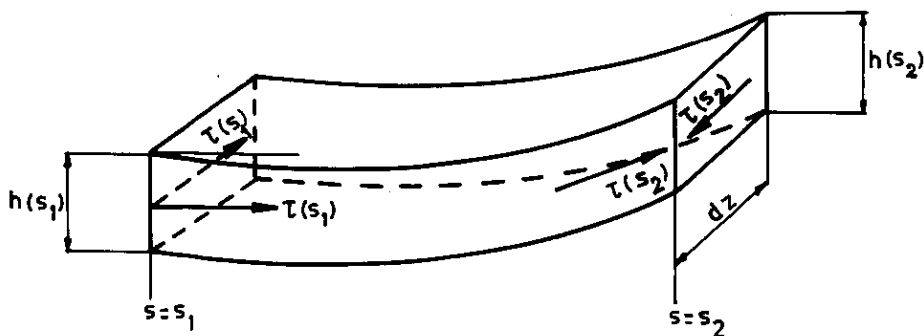
- i) de doorsneden zijn in hun vlak ondeformeerbaar,
- ii) de spanningen worden over de wanddikte constant genomen.



We noemen de schuifspanning over de wand:  $\tau(s)$  en we definiëren de schuifstroom  $T$  door

$$T := \tau(s) h(s). \quad (2.5)$$

We bekijken het evenwicht van het gearceerde elementje in bovenstaande figuur.



Het evenwicht in  $z$ -richting geeft

$$\tau(s_1) h(s_1) dz - \tau(s_2) h(s_2) dz = T(s_1) dz - T(s_2) dz = 0, \quad (2.6)$$

waaruit we concluderen

$$T = \text{constant}. \quad (2.7)$$

Voor het wringend moment krijgen we, als  $p(s)$  de lengte is van de loodlijn uit  $O$  op de raaklijn aan de wand in  $s$

$$M_w = \int \tau(s) h(s) p(s) ds = T \int p(s) ds = 2TF, \quad (2.8)$$

of

$$\tau(s) = \frac{M_w}{2h(s)F}, \quad (2.9)$$

waarin

$$F = \frac{1}{2} \oint p(s) ds, \quad (2.10)$$

het oppervlak van de doorsnede is.

Verg. (2.9) wordt de eerste formule van Bredt genoemd.

Noemen we de hoek die de raaklijn aan de wand maakt met de y-as:  $\beta$ , en bedenken we dat de schuifspanning  $\tau(s)$  tangentiaal gericht is, dan zien we dat

$$\tau(s) = t_{xz} \sin \beta + t_{yz} \cos \beta. \quad (2.11)$$

Verder geldt

$$\sin \beta = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos \beta = \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.12)$$

en

$$p(s) = x \sin \beta - y \cos \beta.$$

Substitutie van (2.2) en (2.12) in (2.11) geeft:

$$\tau(s) = G\alpha \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + p(s) \right] = G\alpha \left[ \frac{d\phi}{ds} + p(s) \right]. \quad (2.13)$$

Hiermee krijgen we

$$\oint \tau(s) ds = G\alpha \oint \left[ \frac{d\phi}{ds} + p(s) \right] ds = 2FG\alpha. \quad (2.14)$$

Ook geldt, volgens (2.9)

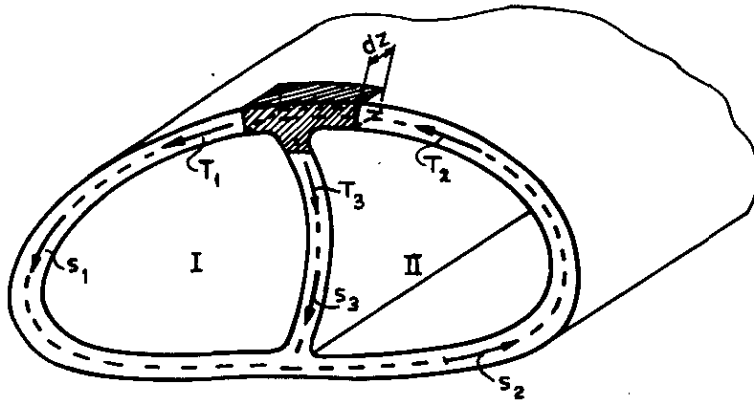
$$\oint \tau(s) ds = \frac{M_w}{2F} \oint \frac{ds}{h(s)}. \quad (2.15)$$

Gelijkstellen van (2.14) en (2.15) geeft voor de hoekverdraaiing per lengte-eenheid

$$\alpha = \frac{M_w}{4GF^2} \oint \frac{ds}{h(s)}. \quad (2.16)$$

Dit is de tweede formule van Bredt.

We gaan nu kijken naar een gesloten doorsnede met tussenschot.



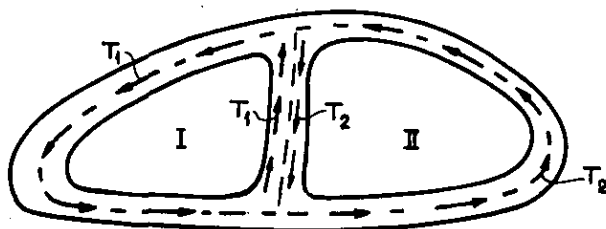
Uit het evenwicht van het gearceerde stukje volgt

$$T_3 = T_2 - T_1 . \quad (2.17)$$

Gebruik makend van de aanname dat de doorsnede ondeformeerbaar is, kunnen we, door de tweede formule van Bredt toe te passen op resp. het rechter- en linkerdeel van de doorsnede, afleiden dat

$$\begin{aligned} 2G\alpha &= \frac{1}{F_2} \left\{ T_2 \int \frac{ds_2}{h(s_2)} + T_3 \int \frac{ds_3}{h(s_3)} \right\} = \\ &= \frac{1}{F_1} \left\{ T_1 \int \frac{ds_1}{h(s_1)} - T_3 \int \frac{ds_3}{h(s_3)} \right\} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Voor het wringend moment krijgen we, analoog aan (2.8) en met (2.17), door rond te lopen in cel I en cel II :

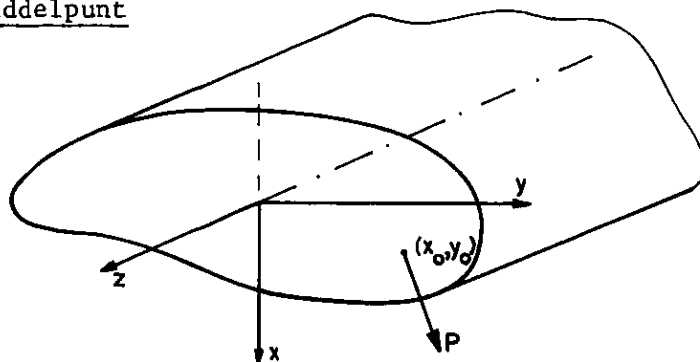


$$M_w = 2F_1 T_1 + 2F_2 T_2 . \quad (2.19)$$

Hiermee hebben we vier vergelijkingen afgeleid voor de vier onbekenden:

$T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  en  $\alpha$  (of  $M_w$ ).

## II. 2 Dwarskrachtenmiddelpunt



We hebben een balk welke belast wordt door een dwarskracht  $P$ , aangrijpend in het punt  $(x_0, y_0)$ . We kunnen deze dwarskracht in de doorsnede verschuiven, door een wringend moment in te voeren. We kunnen hieruit concluderen dat een dwarskracht  $P$  in het algemeen niet alleen zal leiden tot buiging maar ook tot torsie. Er bestaat echter in de doorsnede een punt, het zogenaamde dwarskrachtenmiddelpunt ( $D$ ), met de eigenschap dat als de dwarskracht door  $D$  gaat de buiging "torsievrij" is. Er zijn echter meerdere definities van "torsievrij" mogelijk, welke tot verschillende dwarskrachtenmiddelpunten aanleiding geven. We zullen hier een drietal definities bespreken.

### Definitie 1.

Deze leidt tot het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz (zie [2], III 2).

Door de dwarskracht  $P$  ontstaan de spanningen:  $t_{zz}$ ,  $t_{zx}$  en  $t_{zy}$ . De schuifspanningen  $t_{zx}$  en  $t_{zy}$  komen voor een deel van de buiging door  $P$

$(t_{zx}^{(b)}, t_{zy}^{(b)})$  en voor een deel van de torsie door  $P$   $(t_{zx}^{(t)}, t_{zy}^{(t)})$ .

Voor dit spanningsveld luidt de uitdrukking voor de elastische energie

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2E} \int_V t_{zz}^2 dV + \frac{1}{2G} \int_V (t_{zx}^2 + t_{zy}^2) dV = \\
 &= \int_V \left\{ \frac{1}{2E} t_{zz}^2 + \frac{1}{2G} [(t_{zx}^{(b)})^2 + (t_{zy}^{(b)})^2] \right\} dV + \\
 &+ \frac{1}{2G} \int_V [(t_{zx}^{(t)})^2 + (t_{zy}^{(t)})^2] dV + \frac{1}{G} \int_V [t_{zx}^{(b)} t_{zx}^{(t)} + t_{zy}^{(b)} t_{zy}^{(t)}] dV = \\
 &=: A_b + A_t + A_{bt} , \tag{2.20}
 \end{aligned}$$



waarbij  $A_b$  en  $A_t$  de energie zijn van resp. alléén de buiging en alléén de torsie, terwijl  $A_{bt}$  een koppelterm is. We noemen nu de buiging torsievrij als  $A_{bt} = 0$ .

Dus als de werklijn van  $P$  gaat door het dwarskrachtenmiddelpunt volgens Trefftz is de totale elastische energie gelijk aan de som van de energie van de buiging en de energie van de torsie.

Dit dwarskrachtenmiddelpunt is vooral van belang indien de methode van Castigliano wordt toegepast.

### Definitie 2.

Voor de locale rotatie in de doorsnede geldt

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.21)$$

De locale rotatie per lengte-eenheid is gelijk aan

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right). \quad (2.22)$$

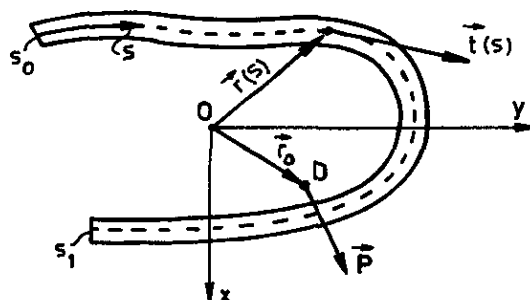
Deze uitdrukking verschilt van punt tot punt over de doorsnede en is dus nooit overal tegelijk nul te krijgen. We spreken nu van torsievrij als de gemiddelde rotatie over de doorsnede nul is, dus als

$$\frac{1}{S} \int_S \frac{\partial \omega}{\partial z} dS =: g(x_0, y_0) = 0. \quad (2.23)$$

Een opvallend verschil tussen de eerste en de tweede definitie is het feit dat het dwarskrachtenmiddelpunt van Trefftz onafhankelijk is van de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ , terwijl het tweede hier wel van afhangt.

### Definitie 3.

Deze definitie is speciaal van belang voor dunwandige doorsneden, en dan vooral voor open dunwandige doorsneden, omdat de torsiestijfheid van open dunwandige doorsneden vele malen kleiner is dan van gesloten.



We zeggen dat  $P$  aangrijpt in het dwarskrachtenmiddelpunt als het wringend moment van  $P$  ten opzichte van  $O$  gelijk is aan het moment om  $O$  van de schuifspanningen ten gevolge van de buiging door  $P$ . In formule uitgedrukt moet gelden

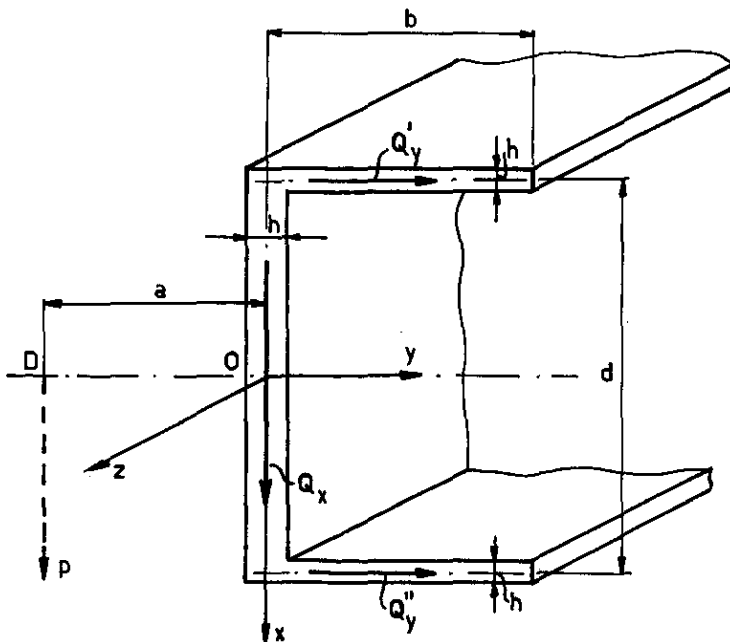
$$\vec{r}_O \times \vec{P} = \int_{s_0}^{s_1} [\vec{r}(s) \times \vec{t}(s)] \tau^{(b)}(s) h(s) ds, \quad (2.24)$$

met  $\vec{t}(s)$  : eenheidsvector rakend aan de contourlijn,  
 $\vec{r}_O, \vec{r}(s)$  : positievectoren vanuit  $O$  (zie figuur),  
 $\tau^{(b)}(s)$  : schuifspanning ten gevolge van buiging.

#### Opmerking

Indien een doorsnede een lijn van symmetrie heeft, ligt het dwarskrachtenmiddelpunt op deze symmetrielijns.

We zullen als voorbeeld het dwarskrachtenmiddelpunt volgens de derde definitie voor een U-balk bepalen.



De  $y$ -as is een symmetrielijns, zodat  $D$  op de  $y$ -as ligt en wel op  $y = -a$ .  
 Gevraagd is  $a$  te bepalen.

De belastende kracht  $P$  geeft aanleiding tot de dwarskrachten in de doorsnede

$$Q_x = P, \quad Q_y' \text{ en } Q_y'' . \quad (2.25)$$

Dit stelsel moet gelijkwaardig zijn met de kracht  $P$  door  $D$ , dus

$$- Q_y' = Q_y'' =: H , \quad (2.26)$$

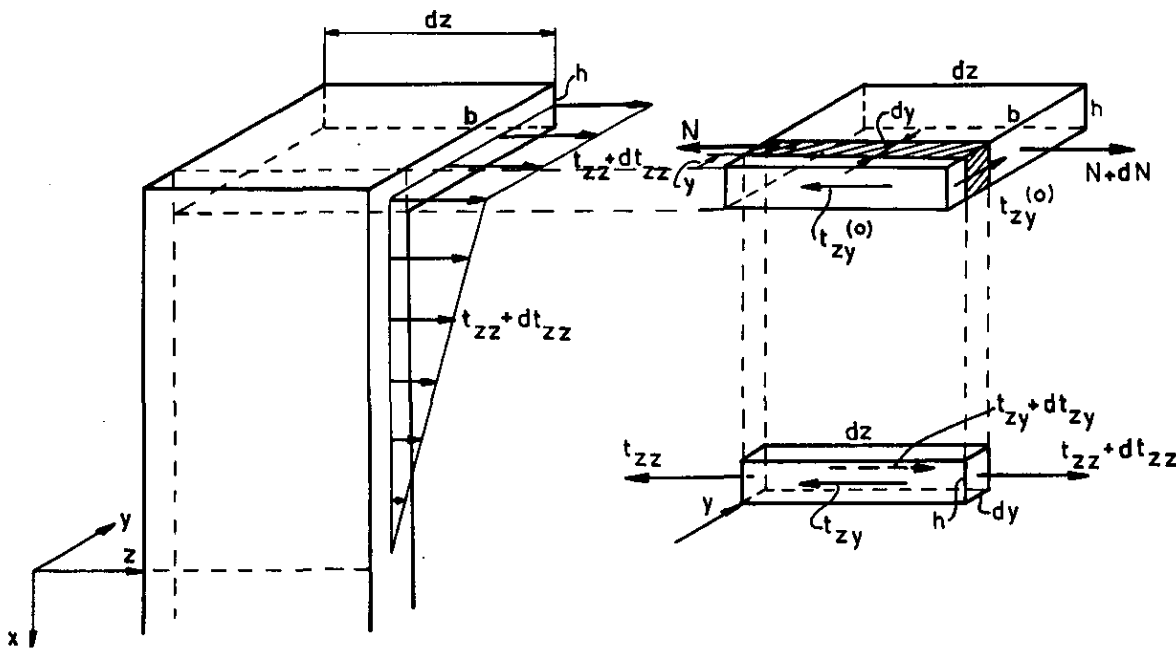
en

$$-\frac{1}{2} Q_y' d + \frac{1}{2} Q_y'' d = P a . \quad (2.27)$$

Uit (2.25) - (2.27) volgt

$$a = \frac{H}{P} d = \frac{-Q_y'}{Q_x} d . \quad (2.28)$$

We gaan nu het evenwicht van een plakje  $dz$  van de balk bekijken.



De normaalspanning  $t_{zz}$  is lineair verdeeld:

$$t_{zz} = - \frac{M}{I_y} y . \quad (2.29)$$

Dus in de bovenste flank ( $x = - \frac{1}{2}d$ ) geldt

$$t_{zz} = \frac{M d}{2I_y} , \quad (2.30)$$

dus onafhankelijk van  $y$ . De normaalkracht werkend op deze flank is dan

$$N = t_{zz} hb = \frac{M_y d h b}{2I_y} . \quad (2.31)$$

Het evenwicht in  $z$ -richting van deze flank geeft dan

$$-N - t_{zy}^{(0)} h dz + N + dN = 0, \quad (t_{zy}^{(0)} = t_{zy} \quad (y = 0))$$

of, met (2.31)

$$\frac{dN}{dz} = \frac{d h b}{2I_y} \frac{dM_y}{dz} = h t_{zy}^{(0)} . \quad (2.32)$$

Met (1.22) krijgen we uit (2.32):

$$t_{zy}^{(0)} = - \frac{d b}{2I_y} Q_x . \quad (2.33)$$

Het evenwicht van een strookje  $dy$  uit de bovenflank geeft

$$-t_{zz} h dy + (t_{zz} + dt_{zz}) h y - t_{zy} h dz + (t_{zy} + dt_{zy}) h dz = 0,$$

of, met (2.30) en (1.22), toegepast op  $x = -\frac{1}{2}d$ ,

$$\frac{dt_{zy}}{dy} = - \frac{dt_{zz}}{dz} = \frac{d}{2I_y} \frac{dM_y}{dz} = - \frac{d}{2I_y} Q_x . \quad (2.34)$$

Bedenken we dat

$$t_{zy} = t_{zy}^{(0)} = - \frac{d b}{2I_y} Q_x , \quad \text{voor } y = 0 ,$$

dan vinden we uit (2.34) voor de schuifspanning in de bovenste flank

$$t_{zy} = - \frac{d Q_x}{2I_y} (b-y) . \quad (2.35)$$

Integreren we dit over het oppervlak van de bovenflank dan krijgen we

$$Q_y' = -h \int_0^b t_{zy} dy = - \frac{h d b^2}{4I_y} Q_x . \quad (2.36)$$

Uit (2.28) volgt dan

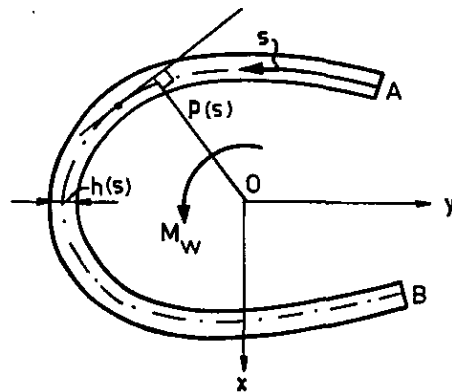
$$a = \frac{hd^2b^2}{4I_y} = \frac{3b^2}{(h+6b)}, \quad (2.37)$$

want

$$I_y = hd^2 \left( \frac{d}{12} + \frac{b}{2} \right). \quad (2.38)$$

### II. 3. Torsie met verhinderde welving

Uit verg. (2.1)<sup>3</sup> blijkt dat bij torsie van een staaf in het algemeen een verplaatsing in z-richting optreedt. We noemen dit de welving van de doorsnede. We zullen in deze paragraaf beschouwen de torsie van een staaf, waarvan een doorsnede zodanig is ingeklemd dat verplaatsingen in de z-richting zijn uitgesloten: de welving is verhinderd. Deze welvingsverhindering zal aanleiding geven tot een systeem van normaalspanningen en een verandering van de torsiestijfheid. Deze verschijnselen treden het sterkste op bij open dunwandige doorsneden, waartoe we ons hier zullen beperken.



We gaan uit van verg. (2.13)

$$\tau(s) = G\alpha \left[ \frac{d\phi}{ds} + p(s) \right]. \quad (2.39)$$

Hierin is  $\tau(s)$  de gemiddelde schuifspanning over de wanddikte. Voor een open doorsnede is deze gemiddelde schuifspanning echter nul, want volgens (2.7) is

$$T = \tau(s) h(s) = C,$$

terwijl de schuifspanning in het punt A (èn B) nul moet zijn, omdat het buitenoppervlak spanningsvrij is, waaruit volgt

$$C = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0. \quad (2.40)$$

Opmerking. Verg. (2.40) is een benadering, omdat de schuifspanning niet constant over de wanddikte is, maar op een zodanige manier over de wanddikte verdeeld is, dat de gemiddelde schuifspanning nul is. Deze schuifspanningen kunnen niet identiek nul zijn, omdat zij als resultante het wringend moment  $M_w$  moeten opleveren.

Substitutie van (2.40) in (2.39) geeft

$$\frac{d\phi}{ds} = -p(s), \quad (2.41)$$

of

$$\phi(s) = \phi_0 - \int_0^s p(\sigma) d\sigma = \phi_0 - 2F(s), \quad (2.42)$$

$$\text{met: } F(s) := \frac{1}{2} \int_0^s p(\sigma) d\sigma. \quad (2.43)$$

Met (2.42) gaat (2.1)<sup>3</sup> over in

$$w = \alpha \phi(s) = \alpha \phi_0 - 2\alpha F(s). \quad (2.44)$$

Bij de welvingsvrije torsie was  $\alpha$  een constante. Bij verhinderde welving zal  $\alpha$  echter van  $z$  moeten afhangen, dus

$$w(z,s) = \alpha(z) \phi_0 - 2\alpha(z) F(s). \quad (2.45)$$

Met de wet van Hooke krijgen we

$$t_{zz} = E e_{zz} = E \frac{\partial w}{\partial z} = E[\phi_0 \alpha'(z) - 2\alpha'(z) F(s)], \quad \alpha'(z) = \frac{d\alpha}{dz}. \quad (2.46)$$

Deze normaalspanning moet een normaalkracht gelijk aan nul opleveren (we belasten immers enkele door een wringend moment), dus

$$\int_L t_{zz} ds = E \alpha'(z) \int_L [\phi_0 - 2F(s)] ds = 0,$$

of

$$\phi_0 = \frac{2}{L} \int_L F(s) ds, \quad (2.47)$$

waarbij  $L$  de hele contourlijn voorstelt.

Deze normaalspanning zal een extra welvingsschuifspanning ten gevolge hebben ( $\tau_w$ ). Bekijken we het evenwicht van een elementje  $ds, dz$ , dan krijgen we

$$\tau_w dz + t_{zz} ds = 0 ,$$

of

$$\frac{\partial \tau_w}{\partial s} = - \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} . \quad (2.48)$$

Oplossen van (2.48) met de voorwaarde dat

$$\tau_w = 0, \text{ voor } s = 0, \quad (2.49)$$

geeft

$$\tau_w = - \int_0^s \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} ds = - E \alpha''(z) \int_0^s \phi(s) ds . \quad (2.50)$$

Aan de conditie dat  $\tau_w = 0$  in B is dan tevens voldaan.

Voor de welvingsschuifstroom  $T_w$  geldt

$$T_w = \tau_w h(s) = - E \alpha''(z) h(s) \int_0^s \phi(\sigma) d\sigma . \quad (2.51)$$

Deze schuifstroom geeft als resultante een wringend moment

$$M_w = \int_L T_w p(s) ds = - E \alpha''(z) \int_L p(s) h(s) \int_0^s \phi(\sigma) d\sigma ds . \quad (2.52)$$

We beperken ons nu tot een constante wanddikte  $h$ .

Met (2.41) kunnen we schrijven

$$- p(s) ds = d\phi ,$$

waarmee we door partiële integratie uit (2.52) krijgen

$$\begin{aligned} M_w &= E h \alpha''(z) \left[ \phi(s) \int_0^s \phi(\sigma) d\sigma \Big|_L - \int_L \phi^2(s) ds \right] = \\ &= - E h \alpha''(z) \int_L \phi^2(s) ds, \end{aligned} \quad (2.53)$$

want  $\int_L \phi(s) ds = 0$ ,

volgens (2.47).

Definiëren we

$$C_w := \int_L \phi^2(s) ds, \quad (2.54)$$

dan is het extra wringend moment als gevolg van de welvingsverhinderingsgelijk aan

$$M_w = -EC_w \alpha''(z). \quad (2.55)$$

Nemen we het wringend moment ten gevolge van de zuivere torsie gelijk aan:

$S_w \alpha(z)$ , dan moet voor het totale moment gelden

$$M_{\text{tot}} = S_w \alpha(z) - EC_w \alpha''(z). \quad (2.56)$$

Beschouwen we  $M_{\text{tot}}$  als gegeven, dan vormt (2.56) een differentiaalvergelijking voor  $\alpha(z)$ , die als oplossing heeft

$$\alpha(z) = \frac{M_{\text{tot}}}{S_w} [1 + C_1 \cosh(\lambda z) + C_2 \sinh(\lambda z)], \quad (2.57)$$

met

$$\lambda := \sqrt{\frac{S_w}{EC_w}}. \quad (2.58)$$

Nemen we de balk op  $z = 0$  ingeklemd en op  $z = \ell$  vrij, dan luiden de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} z = 0 : w &= 0 \Rightarrow \alpha = 0, \\ z = \ell : t_{zz} &= 0 \Rightarrow \alpha' = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Hiermee gaat (2.57) over in

$$\alpha(z) = \frac{M_{\text{tot}}}{S_w} [1 - \cosh(\lambda z) + \tanh(\lambda \ell) \sinh(\lambda z)]. \quad (2.60)$$

Als we de hoekverdraaiing  $\varphi(z)$  noemen dan is

$$\alpha(z) = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.61)$$



Met  $\varphi(0) = 0$ , krijgen we uit (2.60) en (2.61)

$$\varphi(z) = \frac{M_{\text{tot}}}{S \lambda} [\lambda z - \sinh(\lambda z) + \tanh(\lambda \ell) (\cosh(\lambda z) - 1)]. \quad (2.62)$$

Bij welvingsvrije torsie is

$$\varphi(z) = \frac{M}{S} z. \quad (2.63)$$

De extra-termen in (2.62) zijn termen welke bij groter wordende  $z$  uitsterven. Dit is een zogenaamd Saint-Venant-effect. Dit uitsterven gaat bij dunwandige balken echter veel langzamer dan bij balken met een volle doorsnede.

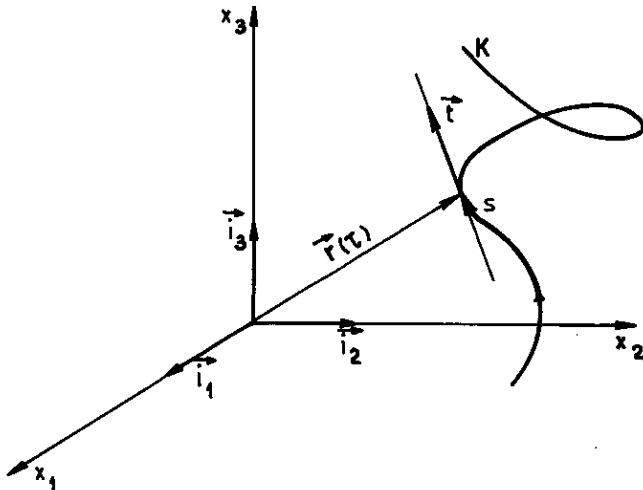
Voor meer uitgebreide informatie over welving van dunwandige doorsneden zij verwezen naar [4].

#### Literatuur.

- [1] Collegedictaat Toegepaste Mechanica
- [2] Collegedictaat Lineaire Elasticiteitstheorie
- [3] Timoshenko, Strength of Materials II (H VII)
- [4] Vlasov, Thin walled beams.

### III. Gekromde balken

#### III. 1. Geometrie van de kromme lijn



We beschouwen de ruimtekromme  $K$ . Een punt van  $K$  wordt gekarakteriseerd door zijn radiusvector  $\vec{r}(\tau)$ , waarbij  $\tau$  een willekeurige parameter is. Voor de lengte van een lijnelementje van  $K$  geldt

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 ,$$

of

$$ds = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}} d\tau . \quad (3.1)$$

De raaklijn aan de kromme is een lijn die gaat door  $\vec{r}(\tau)$  en die als richting heeft

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(\tau+h) - \vec{r}(\tau)}{h} = \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} . \quad (3.2)$$

We zullen van nu af voor de parameter  $\tau$  de booglengte  $s$  nemen.

De raaklijnvector wordt dan

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} . \quad (3.3)$$

Deze vector is een eenheidsvector. Immers, stellen we  $\tau = s$  in (3.1), dan krijgen we

$$ds = \sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} ds \Rightarrow \vec{r}' \cdot \vec{r}' = 1. \quad (3.4)$$

We noemen deze eenheidsvector de tangent- of raaklijnvector  $\vec{t}$  :

$$\vec{t} := \vec{r}'(s) . \quad (3.5)$$

Aangezien  $\vec{t}$  een eenheidsvector is

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 ,$$

moet gelden

$$\vec{t}' \cdot \vec{t} = 0 , \quad (3.6)$$

oftewel de vector  $\vec{t}'$  staat loodrecht op  $\vec{t}$ .

We noemen het vlak dat opgespannen wordt door  $\vec{t}$  en  $\vec{t}'$  het osculatievlak.

Het is te bewijzen dat dit vlak gaat door drie dicht bij elkaar gelegen punten van de kromme. We noemen de eenheidsvector in de richting  $\vec{t}' = \vec{r}''$  de hoofdnormaal  $\vec{n}$ . Deze hoofdnormaal ligt in het osculatievlak en staat loodrecht op  $\vec{t}$ .

We definiëren de kromming  $\kappa$  als de lengte van de vector  $\vec{t}'$

$$\kappa := \sqrt{\vec{r}''(s) \cdot \vec{r}''(s)} . \quad (3.7)$$

Noemen we de hoek die twee naburige raaklijnvectoren  $\vec{t}(s)$  en  $\vec{t}(s+\Delta s)$  met elkaar maken:  $\Delta\alpha$ , dan blijkt dat

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} . \quad (3.8)$$

Voor de eenheidsvector  $\vec{n}$  geldt dan

$$\vec{n} = \frac{1}{\kappa} \vec{r}''(s) = \rho \vec{r}''(s) , \quad (3.9)$$

waarbij  $\rho$ , welke is gedefinieerd door

$$\rho := \frac{1}{\kappa} , \quad (3.10)$$

de kromtestraal wordt genoemd.

We definiëren nog een derde eenheidsvector, de binormaal  $\vec{b}$ , welke loodrecht staat op  $\vec{t}$  en  $\vec{n}$ , en die zodanig gericht is dat de driepoot  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  een rechtsdraaiend stelsel vormt.

Uit deze definitie volgt dat

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} . \quad (3.11)$$

We definiëren tenslotte nog de torsie  $\tau^*$  en de torsiestraal  $\sigma^*$  door

$$\tau^* := \frac{1}{\sigma^*} := \vec{b} \cdot \vec{n}' . \quad (3.12)$$

Het blijkt dat

$$\tau^* = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha_1}{\Delta s}, \quad (3.13)$$

als  $\Delta \alpha_1$  de hoek is die twee naburige binormalen  $\vec{b}(s)$  en  $\vec{b}(s+\Delta s)$  met elkaar maken.

Resumerend kunnen we stellen dat in ieder punt van de ruimtekromme K een rechtsdraaiend triëder  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  is aan te brengen, waarbij

$$\vec{t} = \vec{r}'(s); \quad \vec{n} = \rho \vec{r}''(s); \quad \vec{b} = \rho \vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s). \quad (3.14)$$

Voor de afgeleiden van deze eenheidsvectoren gelden de formules van Serret-Frenet

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= \vec{r}'''(s) = \frac{1}{\rho} \vec{n}, \\ \vec{b}' &= -\frac{1}{\sigma^*} \vec{n}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\vec{n} = \vec{b}' \times \vec{t} + \vec{b} \times \vec{t}' = -\frac{1}{\rho} \vec{t} + \frac{1}{\sigma^*} \vec{b}.$$

De afleiding van de eerste formule is triviaal. De tweede vinden we door differentiatie van de relaties

$$\vec{b} \cdot \vec{t} = 0; \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = 1,$$

met gebruikmaking van (3.12) en (3.15)<sup>1</sup>, waarna de derde weer triviaal uit de eerste en tweede volgt.

De stelsels  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  op de plaats  $s$  en op de plaats  $(s+\Delta s)$  zullen in het algemeen ten opzichte van elkaar verdraaid zijn. De draaiing wordt gekarakteriseerd door de rotatievector  $\vec{\omega}^*$  welke voldoet aan

$$\vec{\omega}^* = \frac{1}{\sigma^*} \vec{t} + \frac{1}{\rho} \vec{b} = \tau^* \vec{t} + \kappa \vec{b}. \quad (3.16)$$

#### Bewijs.

We gaan uit van de algemene uitdrukking voor de rotatievector  $\vec{\omega}^*$  van een willekeurige eenheidsvector  $\vec{e}(s)$

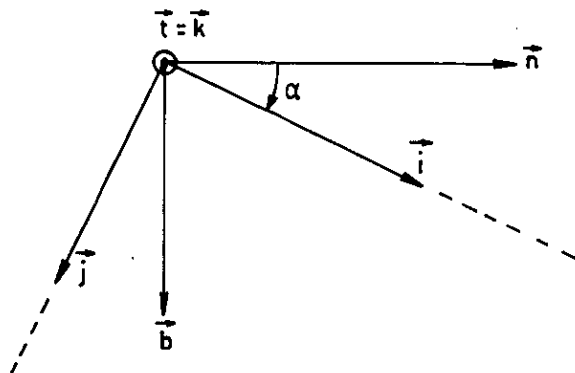
$$\frac{d}{ds} \vec{e}(s) = \vec{\omega}^* \times \vec{e}(s). \quad (3.17)$$

Kiezen we in (3.17)  $\vec{e}(s)$  achtereenvolgens gelijk aan:  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  en  $\vec{t}$  en vermenigvuldigen we dan de verkregen relaties scalair met  $\vec{b}$ ,  $\vec{t}$  en  $\vec{b}$  resp. dan krijgen we met (3.15) en (3.11)

$$\begin{aligned}\vec{n}' \cdot \vec{b} &= \tau^* = (\vec{\omega}^* \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = \vec{\omega}^* \cdot (\vec{n} \times \vec{b}) = \vec{\omega}^* \cdot \vec{t}, \\ \vec{n} \cdot \vec{t}' &= -\kappa = (\vec{\omega}^* \times \vec{n}) \cdot \vec{t} = \vec{\omega}^* \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) = -\vec{\omega}^* \cdot \vec{b}, \\ \vec{t}' \cdot \vec{b} &= 0 = (\vec{\omega}^* \times \vec{t}) \cdot \vec{b} = \vec{\omega}^* \cdot (\vec{t} \times \vec{b}) = -\vec{\omega}^* \cdot \vec{n},\end{aligned}\quad (3.18)$$

waaruit direct (3.16) volgt.

We voegen nu aan ieder punt van de kromme een doorsnede gelegen in het  $\vec{b}$ - $\vec{n}$ -vlak toe.



Langs de hoofdassen van deze doorsnede leggen we de eenheidsvectoren  $\vec{i}$  en  $\vec{j}$  ( $\vec{i} \perp \vec{j}$ ). In het algemeen zullen deze hoofdassen niet samenvallen met de  $\vec{n}$ - en  $\vec{b}$ -richtingen maar een hoek  $\alpha = \alpha(s)$  met hen maken.

We kiezen nog een derde eenheidsvector  $\vec{k}$ :

$$\vec{k} = \vec{t}, \quad \vec{k} \perp \vec{i}, \quad \vec{k} \perp \vec{j}, \quad (3.19)$$

zodat we van het triëder  $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$  kunnen overgaan op  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tussen  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  en  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  gelden de volgende verbanden

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{n} \cos \alpha + \vec{b} \sin \alpha, & \vec{n} &= \vec{i} \cos \alpha - \vec{j} \sin \alpha, \\ \vec{j} &= -\vec{n} \sin \alpha + \vec{b} \cos \alpha, & \vec{b} &= \vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha,\end{aligned}\quad (3.20)$$

Met deze relaties en de formules van Serret-Frenet kunnen we afleiden (bedenk dat  $\alpha = \alpha(s)$ )

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= -\frac{\cos \alpha}{\rho} \vec{k} + \left(\frac{1}{\sigma^*} + \alpha'\right) \vec{j}, \\ \vec{j}' &= \frac{\sin \alpha}{\rho} \vec{k} - \left(\frac{1}{\rho} + \alpha'\right) \vec{i}, \\ \vec{k}' &= \frac{\cos \alpha}{\rho} \vec{i} - \frac{\sin \alpha}{\rho} \vec{j}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Met de definities

$$\begin{aligned}\tau &:= \frac{1}{\sigma^*} + \alpha' = \tau^* + \alpha', \\ \kappa_i &:= \frac{1}{\rho} \sin \alpha, \quad \kappa_j := \frac{1}{\rho} \cos \alpha,\end{aligned}\tag{3.22}$$

kunnen we (3.21) schrijven als

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= -\kappa_j \vec{k} + \tau \vec{j}, \\ \vec{j}' &= \kappa_i \vec{k} - \tau \vec{i}, \\ \vec{k}' &= \kappa_j \vec{i} - \kappa_i \vec{j}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

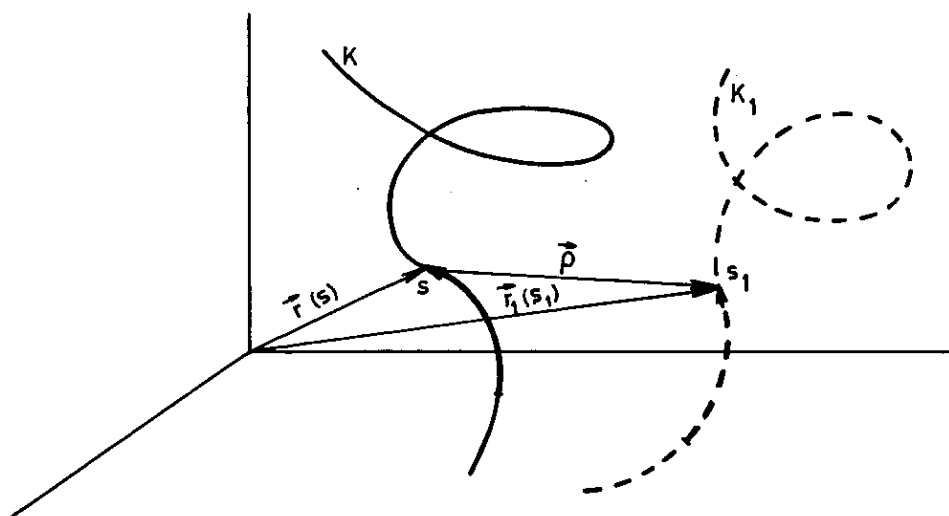
Voor de rotatievector  $\vec{\omega}$  van het stelsel  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  vinden we op analoge wijze als bij (3.16)

$$\vec{\omega} = \tau \vec{k} + \kappa \vec{b} = \tau \vec{k} + \kappa_i \vec{i} + \kappa_j \vec{j}.\tag{4.24}$$

Uit (3.23) volgen direct de relaties

$$\begin{aligned}\tau &= \vec{j} \cdot \vec{i}' = -\vec{j}' \cdot \vec{i}, \\ \kappa_i &= \vec{k} \cdot \vec{j}', \quad \kappa_j = \vec{i} \cdot \vec{k}'.\end{aligned}\tag{3.25}$$

### III. 2. Kinematica van de deformatie van kromme lijnen



We laten de ruimtekromme  $K$  deformeren tot een nieuwe ruimtekromme  $K_1$ . De positievector van een punt van de kromme gaat dan over van  $\vec{r}(s)$  in  $\vec{r}_1(s_1)$  ( $s_1$  is de booglengte langs  $K_1$ ). We noemen de verplaatsingsvector  $\vec{p}$ , dus

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{p} . \quad (3.26)$$

De verplaatsing  $\vec{p}$  heeft de componenten  $u$ ,  $v$  en  $w$  ten opzichte van  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{p} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} . \quad (3.27)$$

We zullen ons beperken tot infinitesimale vervormingen. Dit houdt in dat  $u$ ,  $v$  en  $w$  klein zijn.

Aan ieder punt van de kromme  $K_1$  kunnen we weer een stelsel eenheidsvectoren  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  toevoegen.

Voor  $\vec{k}_1$  geldt

$$\vec{k}_1 = \vec{t}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{ds_1} . \quad (3.28)$$

We laten ook een kleine lengteverandering van de kromme toe, dat wil zeggen

$$ds_1 = [1 + \epsilon_0(s)] ds, \text{ met } |\epsilon_0(s)| \ll 1 . \quad (3.29)$$

Dan wordt

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \frac{d\vec{r}_1}{ds} \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1 + \epsilon_0} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{p}}{ds} \right) = \\ &= \frac{1}{1 + \epsilon_0} \left( \vec{k} + \frac{d\vec{p}}{ds} \right) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nu is volgens (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{ds} &= \frac{du}{ds} \vec{i} + \frac{dv}{ds} \vec{j} + \frac{dw}{ds} \vec{k} + u \frac{d\vec{i}}{ds} + v \frac{d\vec{j}}{ds} + w \frac{d\vec{k}}{ds} = \\ &= \frac{du}{ds} \vec{i} + \frac{dv}{ds} \vec{j} + \frac{dw}{ds} \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{p} , \end{aligned} \quad (3.31)$$

waarbij gebruik gemaakt is van een relatie als (3.17), en  $\vec{\omega}$  gegeven is door (3.24).

Substitutie van (3.31) en (3.24) in (3.30) geeft

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 (1 + \epsilon_0) &= \left( \frac{du}{ds} - v \tau + \kappa_j w \right) \vec{i} + \left( \frac{dv}{ds} - \kappa_i w + u \tau \right) \vec{j} + \\ &+ \left( 1 + \frac{dw}{ds} + \kappa_i v - \kappa_j u \right) \vec{k} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

We gaan nu de richtingscosinussen van  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ten opzichte van  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  bepalen. We hebben het volgende schema

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}_1$	$L_1$	$M_1$	$N_1$
$\vec{j}_1$	$L_2$	$M_2$	$N_2$
$\vec{k}_1$	$L_3$	$M_3$	$N_3$

$$L_1 = \vec{i} \cdot \vec{i}_1, L_2 = \vec{i} \cdot \vec{j}_1, \text{ etc.}$$

Aangezien we ons beperken tot infinitesimale deformaties en dus het stelsel  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  slechts weinig ten opzichte van  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  verdraaid kan zijn, zullen  $L_1, M_2$  en  $N_3$  op tweede orde termen na gelijk aan één zijn (want:  $\cos \epsilon = 1 + \epsilon^2 + \dots$ ), terwijl de overige termen van de eerste orde zullen zijn ( $\sin \epsilon = \epsilon + \dots$ ).

We vermenigvuldigen (3.32) achtereenvolgens scalair met  $\vec{i}, \vec{j}$  en  $\vec{k}$ , wat leidt tot

$$\vec{i} \cdot \vec{k}_1 (1 + \epsilon_0) = (1 + \epsilon_0) L_3 = \frac{du}{ds} - v \tau + \kappa_j w,$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k}_1 (1 + \epsilon_0) = (1 + \epsilon_0) M_3 = \frac{dv}{ds} - \kappa_i w + \tau u, \quad (3.33)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k}_1 (1 + \epsilon_0) = (1 + \epsilon_0) N_3 = 1 + \frac{dw}{ds} + \kappa_i v - \kappa_j u.$$

Uit (3.33) vinden we na verwaarlozing van de hogere orde termen en met  $N_3 = 1$

$$L_3 = \frac{du}{ds} - v \tau + \kappa_j w,$$

$$M_3 = \frac{dv}{ds} - \kappa_i w + \tau u, \quad (3.34)$$

$$\epsilon_0 = \frac{dw}{ds} + \kappa_i v - \kappa_j u.$$

We voeren in een getal  $\beta$  door

$$\beta := -L_2. \quad (3.35)$$

Er moet gelden

$$L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3 = 0. \quad (3.36)$$

Met  $L_1 = M_2 = 1$  en na verwaarlozing van de tweede-orde term  $L_3 M_3$ , krijgen we hieruit

$$M_1 = -L_2 = \beta. \quad (3.37)$$



Op analoge wijze vinden we uit

$$L_1 N_1 + L_2 N_2 + L_3 N_3 = 0,$$

en

$$(3.38)$$

$$M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 = 0,$$

dat

$$N_1 = -L_3, \text{ en } N_2 = -M_3. \quad (3.39)$$

Het schema van de richtingscosinussen komt er dus als volgt uit te zien

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}_1$	1	$\beta$	$-L_3$
$\vec{j}_1$	$-\beta$	1	$-M_3$
$\vec{k}_1$	$L_3$	$M_3$	1

$$L_3 = \frac{du}{ds} - v \tau + \kappa_j w,$$

$$M_3 = \frac{dv}{ds} - \kappa_j w + \tau u.$$

De grootheid  $\beta$  is nog onbepaald. Deze geeft de kleine hoek aan waarover  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$  ten opzichte van  $(\vec{i}, \vec{j})$  verdraaid is.

Voor de torsie en de krommingen in de gedeformeerde toestand geldt

$$\tau_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_1', \quad \kappa_{i1} = \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_1', \quad \kappa_{j1} = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1'. \quad (3.40)$$

Nu is

$$\begin{aligned} \vec{i}_1' &= \frac{d\vec{i}_1}{ds_1} = \frac{1}{(1+\epsilon_0)} \frac{d\vec{i}_1}{ds} \approx \frac{d\vec{i}_1}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{i} + \beta \vec{j} - L_3 \vec{k}) = \beta' \vec{j} - L_3' \vec{k} + \\ &+ \vec{i}' + \beta \vec{j}' - L_3 \vec{k}' = \beta' \vec{j} - L_3' \vec{k} + (\vec{\omega} \times \vec{i}) + \beta (\vec{\omega} \times \vec{j}) - L_3 (\vec{\omega} \times \vec{k}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Hiermee wordt  $\tau_1$  :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (-\beta \vec{i} + \vec{j} - M_3 \vec{k}) \cdot [\beta' \vec{j} - L_3' \vec{k} + (\vec{\omega} \times \vec{i}) + \beta (\vec{\omega} \times \vec{j}) - L_3 (\vec{\omega} \times \vec{k})] = \\ &= \beta' + (\vec{\omega} \times \vec{i}) \cdot \vec{j} - L_3 (\vec{\omega} \times \vec{k}) \cdot \vec{j} - M_3 (\vec{\omega} \times \vec{i}) \cdot \vec{k} + \dots = \\ &= \beta' + \vec{\omega} \cdot \vec{k} + L_3 \vec{\omega} \cdot \vec{i} + M_3 \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \\ &= \beta' + \tau + \kappa_i L_3 + \kappa_j M_3, \end{aligned} \quad (3.42)$$

waarbij (3.24) is gebruikt.

Op analoge wijze kunnen betrekkingen voor  $\kappa_{i1}$  en  $\kappa_{j1}$  worden afgeleid.

We krijgen dan

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \tau + \frac{d\beta}{ds} + \kappa_i L_3 + \kappa_j M_3, \\
 \kappa_{i1} &= \kappa_i + \beta \kappa_j - \frac{dM_3}{ds} - \tau L_3, \\
 \kappa_{j1} &= \kappa_j - \beta \kappa_i + \frac{dL_3}{ds} - \tau M_3.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

### III. 3. Evenwichtsvergelijkingen voor kromme balken

We hebben tot hier toe alleen over kromme lijnen gesproken.

We gaan nu over op slanke gekromde balken. Slank houdt hier in dat de doorsnedematen klein zijn ten opzichte van de lengte en de kromtestralen van de balk. De hiervoor afgeleide relaties kunnen we dan toepassen op de neutrale lijn van de balk. Voor slanke balken valt de neutrale lijn samen met de lijn door de zwaartepunten van de doorsneden.

We hebben de volgende krachten en momenten in een doorsnede

de normaalkracht, in  $\vec{k}_1$ -richting:  $N$ ,  
 de dwarskracht in  $\vec{i}_1$ -richting:  $Q_i$ ,  
 idem in  $\vec{j}_1$ -richting:  $Q_j$ ,  
 het wringend moment, in  $\vec{k}_1$ -richting:  $W$ ,  
 het buigend moment in  $\vec{i}_1$ -richting:  $M_i$ ,  
 idem in  $\vec{j}_1$ -richting:  $M_j$ .

Voor het krachtenevenwicht van een elementje  $ds_1$  van de balk geldt

$$\begin{aligned}
 &N(s_1+ds_1)\vec{k}_1(s_1+ds_1)+Q_i(s_1+ds_1)\vec{i}_1(s_1+ds_1)+Q_j(s_1+ds_1)\vec{j}_1(s_1+ds_1) + \\
 &- N(s_1)\vec{k}_1(s_1)-Q_i(s_1)\vec{i}_1(s_1)-Q_j(s_1)\vec{j}_1(s_1)+\vec{F} ds_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

$\vec{F}$  is de uitwendige kracht per lengte-eenheid. Bij trillende balken moet voor  $\vec{F}$  de traagheidskracht genomen worden.

Omdat  $ds_1$  infinitesimaal is, is

$$N(s_1+ds_1) = N(s_1) + \frac{dN(s_1)}{ds_1} ds_1 + \dots$$

en

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_1(s_1+ds_1) &= \vec{k}_1(s_1) + \frac{d\vec{k}_1(s_1)}{ds_1} ds_1 + \dots = \\
 &= \vec{k}_1(s_1) + [\kappa_{j1}(s_1)\vec{i}_1(s_1) - \kappa_{i1}(s_1)\vec{j}_1(s_1)] ds_1.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

We kunnen de andere krachten en eenheidsvectoren op analoge wijze naar  $ds_1$  ontwikkelen. We substitueren deze uitdrukkingen in (3.44), delen door  $ds_1$  en nemen vervolgens de limiet voor  $ds_1$  gaat naar nul. Door de coëfficiënten van  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$  en  $\vec{k}_1$  nul te stellen, krijgen we, omdat

$$\frac{d}{ds_1} = \frac{1}{1+\epsilon_0} \frac{d}{ds} \approx \frac{d}{ds},$$

het volgende stelsel evenwichtsvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{ds} - \tau_1 Q_j + \kappa_{j1} N + F_i &= 0, \\ \frac{dQ_j}{ds} - \kappa_{i1} N + \tau_1 Q_i + F_j &= 0, \\ \frac{dN}{ds} - \kappa_{j1} Q_i + \kappa_{i1} Q_j + F_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

In deze vergelijkingen zijn  $F_i$ ,  $F_j$  en  $F_k$  de componenten van  $\vec{F}$  in resp. de  $\vec{i}_1$ -,  $\vec{j}_1$ - en  $\vec{k}_1$ -richting.

In de lineaire theorie zijn de verschillen tussen  $\tau_1$  en  $\tau$ ,  $\kappa_{i1}$  en  $\kappa_i$  en  $\kappa_{j1}$  en  $\kappa_j$  infinitesimaal. Bovendien zijn de krachten infinitesimaal. Het is dus niet consistent om in de vergelijkingen (3.46) onderscheid te maken tussen  $\tau_1$  en  $\tau$  e.d. Ook maakt het geen verschil of we voor  $F_i$  de component in de  $\vec{i}$ - dan wel in de  $\vec{i}_1$ -richting nemen. Consistent zijn de verg. (3.46) in de vorm

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{ds} - \tau Q_j + \kappa_j N + F_i &= 0, \\ \frac{dQ_j}{ds} - \kappa_i N + \tau Q_i + F_j &= 0, \\ \frac{dN}{ds} - \kappa_j Q_i + \kappa_i Q_j + F_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Deze evenwichtsvergelijkingen worden toegeschreven aan Kirchhoff.

Voor het momentenevenwicht van een lijnelementje  $ds_1$  krijgen we, als  $\vec{L}$  het uitwendige moment per lengte-eenheid is

$$\begin{aligned}
& W(s_1+ds_1)\vec{k}_1(s_1+ds_1)+M_i(s_1+ds_1)\vec{i}_1(s_1+ds_1)+M_j(s_1+ds_1)\vec{j}_1(s_1+ds_1) + \\
& -W(s_1)\vec{k}_1(s_1)-M_i(s_1)\vec{i}_1(s_1)-M_j(s_1)\vec{j}_1(s_1)+[\vec{r}_1(s_1+ds_1)-\vec{r}_1(s_1)] \times \\
& \times [Q_i(s_1)\vec{i}_1(s_1)+Q_j(s_1)\vec{j}_1(s_1)+N(s_1)\vec{k}_1(s_1)] + \vec{L} ds_1 = 0 . \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Op analoge wijze als bij de krachten kunnen hieruit de evenwichtsvergelijkingen voor de momenten worden afgeleid

$$\begin{aligned}
\frac{dM_i}{ds} - \tau M_j + \kappa_j W - Q_j + L_i &= 0 , \\
\frac{dM_j}{ds} - \kappa_i W + \tau M_i + Q_i + L_j &= 0 , \quad (3.49) \\
\frac{dW}{ds} - \kappa_j M_i + \kappa_i M_j + L_k &= 0 .
\end{aligned}$$

Resumerend kunnen we stellen dat we voor de 14 onbekenden:  $Q_i$ ,  $Q_j$ ,  $N$ ,  $M_i$ ,  $M_j$ ,  $W$ ,  $\tau_1$ ,  $\kappa_{i1}$ ,  $\kappa_{j1}$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\beta$  en  $\epsilon_0$ , de volgende 10 vergelijkingen hebben afgeleid

6 evenwichtsvergelijkingen : (3.47) en (3.49),

1 vergelijking voor  $\epsilon_0$  : (3.34)<sup>3</sup>

3 vergelijkingen voor  $\tau_1$ ,  $\kappa_{i1}$  en  $\kappa_{j1}$ : (3.43).

We komen dus nog 4 vergelijkingen te kort. Dit zijn de vergelijkingen die het verband tussen de deformaties en de krachten karakteriseren: de constitutieve vergelijkingen.

### III. 4. Constitutieve vergelijkingen voor slanke gekromde balken.

Het is tot nu toe niet mogelijk gebleken om op een theoretische goed gefundeerde wijze constitutieve vergelijkingen af te leiden. Er zijn een aantal stelsels in gebruik maar bij de afleiding hiervan wordt uitgegaan van een aantal, vrij willekeurige hypothesen en benaderingen.

Het meest eenvoudige stelsel is

$$\begin{aligned}
N &= ES \epsilon_0 , \\
M_i &= EI_i (\kappa_{i1} - \kappa_i) , \\
M_j &= EI_j (\kappa_{j1} - \kappa_j) , \\
W &= S_w (\tau_1 - \tau) , \quad (3.50)
\end{aligned}$$

waarbij:  $E$  de elasticiteitsmodulus,  $S$  het oppervlak van de doorsnede,  $I_i$  en  $I_j$  traagheidsmomenten en  $S_w$  de torsiestijfheid zijn.

Bij deze vergelijkingen worden echter de volgende effecten niet in rekening gebracht:

- i) Beschouw een doorsnede waarvan het dwarskrachtenmiddelpunt niet samenvalt met het zwaartepunt. In dat geval introduceren we door de dwarskracht naar het zwaartepunt te verschuiven een extra wringend moment. Omdat de balk gekromd is, zal een wringend moment in de ene doorsnede in een andere doorsnede een bijdrage tot het buigend moment geven. In de uitdrukkingen voor  $M_i$ ,  $M_j$  en  $W$  moeten dus extra termen voorkomen die afkomstig zijn van het niet samenvallen van het zwaartepunt met het dwarskrachtenmiddelpunt.
- ii) We hebben bij rechte balken gezien dat bij torsie de doorsnede in het algemeen zal gaan welven. Bij gekromde balken treedt deze welving ook op, maar door de kromming van de balk zal deze welving, althans gedeeltelijk, worden verhinderd. In de formule voor  $W$  moet daarom een extra term komen die deze welvingsverhinderd tot uitdrukking brengt.

We zullen trachten een stelsel constitutieve vergelijkingen te vinden, waarbij deze effecten wel in rekening worden gebracht.

We gaan hiertoe uit van de rek in de  $\vec{k}$ -richting van een willekeurig punt van de doorsnede. De uitdrukking die we hiervoor vinden is gebaseerd op de Bernoulli-hypothese welke zegt dat doorsneden loodrecht op de neutrale lijn blijven staan. Ten gevolge van de buiging krijgen we dan

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\kappa_{i1} - \kappa_i) y - (\kappa_{j1} - \kappa_j) x \quad (3.51)$$

De  $x$ - en  $y$ -coördinaten zijn genomen langs resp. de  $\vec{i}$ - en  $\vec{j}$ -richting.

$\varepsilon_0$  is de rek van de neutrale lijn ( $x = y = 0$ ).

Dit is echter niet de enige rek. Tengevolge van de torsie krijgen we namelijk een welving welke evenredig is met de relatieve draaiingshoek.

Omdat bij een gekromde balk deze hoekverdraaiing afhankelijk is van  $s$ , zal ook de welving  $w$  een functie van  $s$  zijn. Dus  $\frac{dw}{ds} \neq 0$ , wat aanleiding geeft tot een extra rekterm.

We noemen de relatieve draaiing van twee naburige doorsneden  $\theta = \theta(s)$ .

(Dit is de grootheid die in H II met  $\alpha$  wordt aangegeven.)

We weten dat

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau_1 - \tau,$$

waaruit met (3.43)<sup>1</sup> en (3.34)<sup>1,2</sup> volgt

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\beta}{ds} + \kappa_i \frac{du}{ds} + \kappa_j \tau u - \kappa_i \tau v + \kappa_j \frac{dv}{ds}. \quad (3.52)$$

In analogie met de elementaire torsietheorie stellen we

$$w = \phi \frac{d\theta}{ds}, \quad (3.53)$$

waarin  $\phi$  een functie is van de doorsnede. We beperken ons tot balken met constante doorsnede, zodat dan  $\phi$  niet van  $s$  afhangt:

$$\phi = \phi(x,y). \quad (3.54)$$

De extra rek ten gevolge van de welving is

$$\hat{\epsilon} = \frac{dw}{ds} = \phi \frac{d^2\theta}{ds^2},$$

waarmee we voor de totale rek in de doorsnede krijgen

$$\epsilon = \epsilon_0 + (\kappa_{i1} - \kappa_i)y - (\kappa_{j1} - \kappa_j)x + \phi \frac{d^2\theta}{ds^2}. \quad (3.55)$$

Een moeilijk punt doet zich nu voor in het feit dat het niet mogelijk is om voor een gekromde balk met willekeurige doorsnede een uitdrukking voor  $\phi(x,y)$  te vinden.

Meestal wordt voor  $\phi(x,y)$  dan maar de uitdrukking genomen die hoort bij een rechte balk met dezelfde doorsnede.

We definiëren de volgende grootheden

$$R_i := \int_S \phi y dS.$$

$$R_j := \int_S \phi x dS, \quad (3.56)$$

$$C_w := \int_S \phi^2 dS.$$

Dan blijken  $R_i$  en  $R_j$  evenredig met de  $x$ - en  $y$ -coördinaten van het dwarskrachtenmiddelpunt en  $C_w$  een extra stijfheidsfactor als gevolg van de wêringsverhinderling te zijn.

We gaan nu uit van de volgende constitutieve veronderstellingen

$$N = E \int_S \epsilon dS ,$$

$$M_i = E \int_S \epsilon y dS , \quad (3.57)$$

en

$$M_j = - E \int_S \epsilon x dS .$$

Met de gevonden uitdrukking voor  $\epsilon$ : (3.55) en de definities (3.56) krijgen we hieruit

$$N = E S \epsilon_0 ,$$

$$M_i = E I_i (\kappa_{i1} - \kappa_i) + E R_i \frac{d^2 \theta}{ds^2} , \quad (3.58)$$

$$M_j = E I_j (\kappa_{j1} - \kappa_j) - E R_j \frac{d^2 \theta}{ds^2} .$$

Blijft nog te bepalen de constitutieve vergelijking voor  $W$ .

Deze wordt gevonden met behulp van het principe van de virtuele arbeid, uitgaande van de volgende benaderde uitdrukking voor de deformatie-energie

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{s_1} \left\{ E \int_S \epsilon^2 dS + S_w (\tau_1 - \tau)^2 \right\} ds_1 . \quad (3.59)$$

Hiermee wordt de volgende constitutieve relatie voor het wringend moment verkregen

$$W = S_w \frac{d\theta}{ds} - E \left[ C_w \frac{d^3 \theta}{ds^3} - R_j \frac{d^3 u}{ds^3} - R_i \frac{d^3 v}{ds^3} + \right. \\ \left. + (R_i \kappa_i - R_j \kappa_j) \frac{d^2 w}{ds^2} + (R_i \kappa_j + R_j \kappa_i) \frac{d\beta}{ds} \right] . \quad (3.60)$$

Voor de afleiding van (3.60) zij verwezen naar [1] , hoofdstuk B.

### III. 5. Ringen.

Onder een ring verstaan we een balk met een cirkelvormige neutrale lijn. We beperken ons tot ringen met een doorsnede, waarvan twee hoofdassen in het vlak van de neutrale lijn liggen (en wel  $\vec{i}$  en  $\vec{k}$ ) en een loodrecht daarop ( $\vec{j}$ ). Aangezien een cirkel een vlakke kromme is, is

$$\tau = \kappa_i = 0 ,$$

en omdat  $\vec{b}$  en  $\vec{n}$  langs de hoofdassen vallen ( $\vec{n} = \vec{i}$ ,  $\vec{b} = \vec{j}$ ) is

$$\alpha = 0 .$$

Verder is

$$\kappa_j = \frac{1}{a} = \text{constant},$$

waarbij  $a$  de straal van de neutrale lijn is.

Voor een dergelijke ring gaan de verg. (3.34), (3.43), de evenwichtsvergelijkingen (3.47) en (3.49) en de constitutieve vergelijkingen (3.58) en (3.60) over in ( $u$  is de verplaatsing in radiale richting naar het middelpunt toe gericht,  $v$  is de verplaatsing loodrecht op het vlak van de ring en  $w$  is de verplaatsing in tangentiële richting)

$$\epsilon_0 = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{a} , \quad (3.61)$$

$$L_3 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{a} ; \quad M_3 = \frac{dv}{ds} ,$$

en

$$\tau_1 = \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{a} \frac{dv}{ds} ,$$

$$\kappa_{i1} = \frac{\beta}{a} - \frac{d^2v}{ds^2} =: \kappa_x , \quad (3.62)$$

$$\kappa_{j1} = \frac{1}{a} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{a} \frac{dw}{ds} =: \kappa_y ,$$

en



$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i}{ds} + \frac{1}{a} N &= - F_i , \\
\frac{dQ_j}{ds} &= - F_j , \\
\frac{dN}{ds} - \frac{1}{a} Q_i &= - F_k , \\
\frac{dM_i}{ds} + \frac{1}{a} W - Q_j &= - L_i , \\
\frac{dM_j}{ds} + Q_i &= - L_j , \\
\frac{dW}{ds} - \frac{1}{a} M_i &= - L_k ,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

en tenslotte

$$\begin{aligned}
N &= ES \left( \frac{dw}{ds} - \frac{u}{a} \right), \\
M_i &= EI_i \left( \frac{\beta}{a} - \frac{d^2v}{ds^2} \right) + ER_i \frac{d^2}{ds^2} \left( \beta + \frac{v}{a} \right), \\
M_j &= EI_j \left( \frac{1}{a} \frac{dw}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2} \right) - ER_j \frac{d^2}{ds^2} \left( \beta + \frac{v}{a} \right), \\
W &= S_w \frac{d}{ds} \left( \beta + \frac{v}{a} \right) - E \left[ C_w \frac{d^3}{ds^3} \left( \beta + \frac{v}{a} \right) - R_j \frac{d^3u}{ds^3} + \right. \\
&\quad \left. - R_i \frac{d^3v}{ds^3} - \frac{1}{a} R_j \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{a} R_i \frac{d\beta}{ds} \right].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

We zullen ons van hieraf nog verder beperken voor wat de vorm van de doorsnede betreft, door alleen doorsneden waarvan het zwaartepunt en het dwarskrachtenmiddelpunt samenvallen te bekijken. In dat geval zijn

$$R_i = R_j = 0 . \tag{3.65}$$

De verg. (3.63) en (3.64) vormen een systeem van tien vergelijkingen voor de tien onbekenden:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\beta$ ,  $M_i$ ,  $M_j$ ,  $N$ ,  $Q_i$ ,  $Q_j$  en  $W$ . Indien voldaan is aan (3.65) kunnen we dit stelsel splitsen in een

- systeem I : dit bevat vijf vergelijkingen voor  $Q_i$ ,  $N$ ,  $M_j$ ,  $u$  en  $w$ , en beschrijft de vervormingen in het vlak van de ring, en een systeem II : dit bevat de overige vergelijkingen voor  $Q_j$ ,  $M_i$ ,  $W$ ,  $v$  en  $\beta$ , en beschrijft de vervormingen loodrecht op het vlak van de ring.

Door in te voeren

$$d\varphi = \frac{1}{a} ds, \quad f = \frac{1}{a} F, \quad \ell = \frac{1}{a} L, \quad (3.66)$$

kunnen we het eerste stelsel schrijven als

systeem I

$$\begin{aligned} Q_i' + N &= -f_i, & (' = \frac{d}{d\varphi}), \\ N' - Q_i &= -f_k, \\ M_j' + a Q_i &= -\ell_j, \\ N &= \frac{ES}{a} (w' - u), \\ M_j &= \frac{EI_j}{a^2} (w' + u''). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Eliminatie van  $N$ ,  $Q_i$  en  $M_j$  geeft

$$\begin{aligned} w''' + w' - (u'' + u) &= -\frac{a}{ES} (f_k' + f_i), \\ u'''' + w'' - \frac{a^2 S}{I_j} (w' - u) &= \frac{a^2}{EI_j} (af_i - \ell_j'). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Voor het tweede stelsel krijgen we

systeem II

$$\begin{aligned} Q_j' &= -f_j, \\ M_i' + W - a Q_j &= -\ell_i, \\ W' - M_i &= -\ell_k, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$M_i = \frac{EI_i}{a^2} (a\beta - v''),$$

$$W = \frac{S_w}{a^2} (a\beta' + v') - \frac{EC_w}{a^4} (a\beta''' + v''').$$
(3.69)

Eliminatie van  $Q_j$ ,  $M_i$  en  $W$  levert

$$v'''' - a\beta'' + v'' - a\beta = \frac{a^2}{EI_i} (l_k + l_i' + af_j),$$

$$v'''' + a\beta'''' + v'' + a\beta'' - \frac{EC_w}{a^2 S_w} (v'''''' + a\beta'''''' + v'''' + a\beta''''') =$$
(3.70)

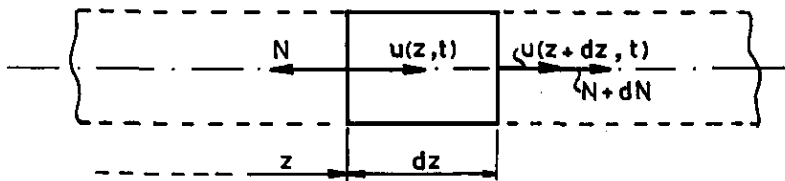
$$= -\frac{a^2}{S_w} (l_k'' + l_i' + af_j).$$

### Literatuur

- [1] Federhofer, K., Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes.  
 [2] Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity.

IV. Trillingen van balkenIV. 1. Trillingen van rechte balken

We bespreken: longitudinale trillingen, torsie trillingen, buigings-trillingen (met Timoshenkobalk) en gekoppelde torsie buigingstrillingen.

i) Longitudinale trillingen

We hebben alleen een verplaatsing in de langsrichting van de balk

$$u = u(z,t). \quad (4.1)$$

Deze verplaatsing geeft aanleiding tot een rek  $\frac{\partial u}{\partial z}$  en deze weer tot een normaalkracht

$$N(z,t) = ES \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4.2)$$

De kracht in  $z$ -richting op een elementje  $dz$ :

$$-N(z,t) + N(z+dz,t) = dN(z,t),$$

moet gelijk zijn aan de massa maal de versnelling in  $z$ -richting van dit elementje

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

Hieruit volgt met (4.2) de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

We lossen deze vergelijking op door middel van de separatie

$$u(z,t) = U(z) e^{i\omega t}, \quad (4.4)$$

waarmee we krijgen

$$U'' + \frac{\rho\omega^2}{E} U = 0. \quad (4.5)$$

De oplossing van (4.5) luidt

$$U(z) = A \sin \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z + B \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} z . \quad (4.6)$$

Nemen we als voorbeeld een balk, waarvan het einde  $z = 0$  ingeklemd is en het einde  $z = \ell$  vrij is, dan zijn de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} z = 0 : U &= 0 , \\ z = \ell : U' &= 0 , \end{aligned} \quad (4.7)$$

waarmee we krijgen

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \cos \left( \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \ell \right) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Er zijn dus alleen trillingen mogelijk indien

$$\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} , \quad (n = 1, 2, \dots) . \quad (4.9)$$

De waarden  $\omega_n$  worden de eigenfrequenties genoemd. De totale oplossing luidt dan

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi z}{2\ell} \right] e^{i\omega_n t} . \quad (4.10)$$

De constanten  $A_n$  moeten bepaald worden uit de beginvoorwaarden.

Opmerking. Bij bovenstaande aanpak zijn de verplaatsingen in dwarsrichting, die een gevolg zijn van de dwarscontractie, verwaarloosd. Dit is consistent voor lange slanke balken bij de lagere eigenfrequenties. Het gaat echter mis bij de hogere harmonische als de golflengte van de trillingen van dezelfde orde van grootte als de dikte van de doorsnede wordt. Dit kan bijvoorbeeld van belang zijn bij stoten. Er zal dan dispersie optreden.

## ii) Torsie trillingen

De bewegingsvergelijking luidt hier, als

$$\theta = \theta(z, t) ,$$

de draaiingshoek van de doorsnede is,

$$S_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho I_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} , \quad (4.11)$$

waarbij:  $I_p$  het polaire oppervlakte-traagheidsmoment van de doorsnede is.

De afleiding van (4.11) is volkomen identiek aan die van (4.3).

### iii) Buigingstrillingen. Timoshenko-balk.

Als

$$v = v(z,t)$$

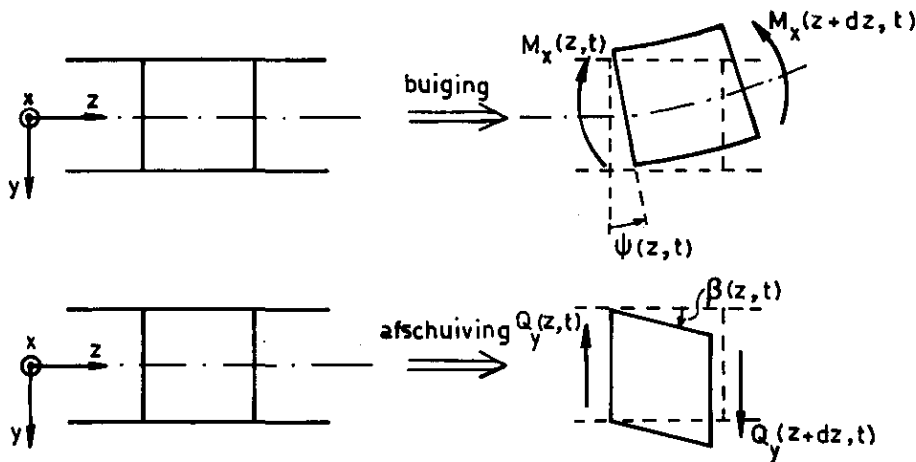
de verplaatsing van de neutrale lijn is, luidt de bewegingsvergelijking hier

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (4.12)$$

Bij de afleiding van deze vergelijking is de kracht in y-richting werkend op een elementje  $dz$  gelijk gesteld aan de massa maal versnelling van dat elementje in die richting. Bij deze afleiding zijn verwaarloosd

- i) de rotatie-traagheid van het element  $dz$ , en
- ii) de afschuiving ten gevolge van de dwarskracht.

Deze effecten worden wel in rekening gebracht bij de zg. Timoshenko-balk.



Ten gevolge van de buiging door  $M_x$  verdraait de doorsnede  $z$  over een hoekje  $\psi(z,t)$ . Er geldt volgens (1.32)

$$M_x = -EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = EI_x \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.13)$$

De afschuiving ten gevolge van  $Q_y$  wordt gekarakteriseerd door de  $\beta(z,t)$  welke we evenredig met  $Q_y$  veronderstellen en wel op de volgende wijze

$$Q_y = k G S \beta(z,t) . \quad (4.14)$$

Hierin is  $k$  een constante factor die afhangt van de vorm van de doorsnede. De totale hellingshoek van de neutrale lijn is dan

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \beta(z,t) - \Psi(z,t) . \quad (4.15)$$

De kracht in  $y$ -richting op  $dz$  gelijk stellen aan de massa maal versnelling van  $dz$  in  $y$ -richting geeft

$$-Q_y(z,t) + Q_y(z+dz,t) = dQ_y(z,t) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz ,$$

of

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} . \quad (4.16)$$

Het moment in  $x$ -richting om het zwaartepunt van de doorsnede  $z$  van het elementje  $dz$

$$-M_x(z,t) + M_x(z+dz,t) - Q_y(z+dz,t) dz = dM_x - Q_y dz ,$$

gelijk stellen aan de tijdsafgeleide van het impulsmoment in  $x$ -richting om het zwaartepunt van de doorsnede  $z$  van hetzelfde elementje, dit is

$$\rho I_x \frac{\partial \Psi}{\partial t} ,$$

geeft

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} - Q_y = \rho I_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} . \quad (4.17)$$

Deze vergelijking brengt de rotatie-traagheid in rekening.

Uit de vijf vergelijkingen (4.13) - (4.17) voor de vijf onbekenden  $v$ ,  $\Psi$ ,  $\beta$ ,  $M_x$  en  $Q_y$  kunnen we door eliminatie van  $\Psi$ ,  $\beta$ ,  $M_x$  en  $Q_y$  de bewegingsvergelijking voor de Timoshenko-balk afleiden

$$EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left( \rho I_x + \frac{\rho EI_x}{kG} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_x}{kG} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 . \quad (4.18)$$

In vergelijking (4.12) zijn alleen de eerste twee termen van (4.18) meegenomen.

Het oplossen van deze vergelijking heeft geleid tot de constatering dat bij lage frequenties de buiging overheerst, terwijl bij hogere frequenties de afschuiving en de rotatie belangrijker worden.

iv) Gekoppelde buigings torsie trillingen

Deze koppeling treedt op bij balken met een doorsnede waarvan het zwaartepunt en het dwarskrachtenmiddelpunt niet samenvallen. Voor deze balken zijn zuivere buigings (of torsie) trillingen niet mogelijk. Stel namelijk dat zo'n balk een zuivere buigings trilling in y-richting uitvoert. Dan zullen, omdat de doorsnede niet draait om de z-as, de traagheidskrachten constant over de doorsnede verdeeld zijn, zodat hun resultante zal aangrijpen in het zwaartepunt. Maar een kracht die niet in het dwarskrachtenmiddelpunt aangrijpt heeft torsie tot gevolg. Het is dus uitgesloten dat er een buigings trilling zonder torsie zal optreden.

We beschouwen een balk welke in zijn doorsnede belast wordt door een dwarskracht  $Q_y$  aangrijpende in het dwarskrachtenmiddelpunt D plus een wringend moment W. Als  $W = 0$  zal de doorsnede niet verdraaien en zal dus ieder punt van de doorsnede dezelfde verplaatsing in de y-richting ondergaan. Deze verplaatsing is gelijk aan de verplaatsing van D :  $v_D$ . Als  $Q_y = 0$ , maar  $W \neq 0$  zal de doorsnede gaan verdraaien om het punt D ( $v_D$  is dan nul). Door combinatie van (1.24)<sup>2</sup> met (1.32) krijgen we een uitdrukking voor  $Q_y$ . Uit bovenstaande zal het duidelijk zijn dat we in deze relatie voor  $v_D$  de verplaatsing van het dwarskrachtenmiddelpunt  $v_D$  moeten nemen. We krijgen dan

$$Q_y(z,t) = - EI_x \frac{\partial^3 v_D}{\partial z^3} . \quad (4.19)$$

De verplaatsing van het zwaartepunt van de doorsnede is:  $(v_D + c \varphi)$ , waarin c de afstand ZD is en  $\varphi = \varphi(z,t)$  de hoekverdraaiing van de doorsnede. Door de dwarskracht gelijk te stellen aan de massa maal de versnelling van het zwaartepunt van een elementje dz krijgen we de bewegingsvergelijking voor de buiging

$$EI_x \frac{\partial^4 v_D}{\partial z^4} = - \rho S \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_D + c \varphi) . \quad (4.20)$$



Voor het bepalen van de torsie-vergelijking nemen we aan dat voor het wringend moment  $W$  de volgende constitutieve vergelijking geldt

$$W = S_w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - EC_w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} . \quad (4.21)$$

Het impulsmoment in  $z$ -richting om  $D$  van  $dz$  is gelijk aan

$$\rho I_p \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \rho S \frac{\partial}{\partial t} (v_D + c \varphi) . \quad (4.22)$$

De impulsmomentstelling geeft dan

$$\frac{\partial W}{\partial z} = S_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - EC_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c \rho S \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_D + c \varphi) . \quad (4.23)$$

In (4.20) en (4.23) hebben we twee vergelijkingen voor  $v_D(z,t)$  en  $\varphi(z,t)$  die we kunnen oplossen met de separatie

$$v_D(z,t) = V(z) e^{ipt} , \quad \varphi(z,t) = \Phi(z) e^{ipt} . \quad (4.24)$$

Dit geeft

$$EI_x V^{iv} = \rho S p^2 (V + c \Phi) , \quad (4.25)$$

$$EC_w \Phi^{iv} - S_w \Phi'' = \rho c S p^2 (V + c \Phi) + \rho I_p p^2 \Phi .$$

Voor het oplossen van deze vergelijkingen zijn acht randvoorwaarden nodig. Nemen we als voorbeeld een opgelegde balk, dat wil zeggen, dat in de einddoorsneden de verplaatsing, de hoekverdraaiing en het buigend moment nul zijn, terwijl deze einddoorsneden vrij kunnen welven, dan luiden de randvoorwaarden

$$\text{voor } x = 0, \text{ of } x = l: V = V'' = \Phi = \Phi'' = 0 . \quad (4.26)$$

Met de substitutie

$$V(z) = A \sin \frac{nz}{l} , \quad \Phi(z) = B \sin \frac{nz}{l} , \quad (4.27)$$

krijgen we de volgende betrekking voor de eigenfrequenties  $p_n$  : ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$p_n^2 = \frac{(\omega_t^2 + \omega_b^2) \pm \sqrt{(\omega_t^2 - \omega_b^2) + 4\lambda c \omega_b^2 \omega_t^2}}{2(1 - \lambda c)} \quad (\geq 0) \quad (4.28)$$

waarbij

$$\omega_b^2 = \frac{\pi^4 n^4 EI}{\rho S l^4} x, \quad \omega_t^2 = \frac{\pi^2 n^2 \ell^2 S_w + n^4 \pi^4 EC_w}{\rho \ell^4 (I_p + c^2 S)}, \quad (4.29)$$

$$\lambda = \frac{cS}{cS^2 + I_p}.$$

Door verder uitwerken van deze resultaten blijkt dat bij lage frequenties grote verplaatsingen met kleine hoekverdraaiingen optreden, terwijl dat bij hoge frequenties juist omgekeerd is.

#### IV. 2. Trillingen van ringen

We bespreken: radiale trillingen, gekoppelde radiale en transversale trillingen, buigings trillingen in en loodrecht op het vlak van de ring, torsie trillingen en gekoppelde torsie buigingstrillingen. Alle resultaten gelden voor slanke ringen.

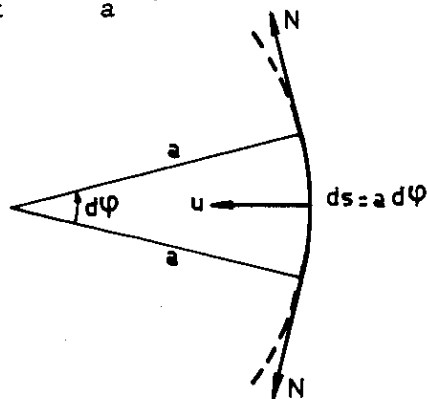
##### i) Radiale trillingen

In dit geval hebben we alleen een radiale verplaatsing:  $u$ , naar het middelpunt van de ring gericht, welke onafhankelijk is van  $\varphi$ . Deze verplaatsing geeft aanleiding tot een tangentiële rek

$$\epsilon_t = \frac{2\pi(a-u) - 2\pi a}{a} = -\frac{u}{a}, \quad (a: \text{straal ring}), \quad (4.30)$$

en deze op zijn beurt tot een normaalkracht

$$N = ES\epsilon_t = -\frac{ESu}{a}. \quad (4.31)$$



We beschouwen een elementje  $ds$  van de ring. De kracht in radiale richting op dit elementje

$$Nd\varphi = -\frac{ESu}{a} d\varphi, \quad (4.32)$$

terwijl massa maal versnelling gelijk is aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dm = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} a d\varphi. \quad (4.33)$$

Gelijkstellen van (4.32) en (4.33) geeft de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E}{\rho a^2} u = 0. \quad (4.34)$$

Hieruit volgt dat de eigenfrequentie voor puur radiale trillingen gelijk is aan

$$\omega = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.35)$$

## ii) Gekoppelde radiale en transversale trillingen

We hebben hier een radiale verplaatsing  $u$  en een tangentiale verplaatsing  $w$ . De beweging wordt dan beschreven door de vergelijkingen (3.67). Nu is voor slanke balken de dwarskracht klein ten opzichte van de normaalkracht, zodat we in (3.67)<sup>1,2</sup> de dwarskracht  $Q_i$  mogen verwaarlozen ten opzichte van de normaalkracht  $N$ . Dit komt er in feite op neer dat we de buiging van de ring verwaarlozen ten opzichte van de rek.

Met (3.67)<sup>1,2,4</sup> krijgen we dan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} N &= -f_i, \\ N' &= -f_k, \\ N &= \frac{ES}{a} (w' - u). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hierin zijn  $f_i$  en  $f_k$  de traagheidskrachten

$$f_i = -\rho a S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f_k = -\rho a S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.37)$$

We substitueren (4.37) in (4.36), elimineren  $N$  en stellen

$$u(\varphi, t) = U(\varphi) e^{i\omega t}, \quad w(\varphi, t) = W(\varphi) e^{i\omega t}, \quad (4.38)$$

wat leidt tot de volgende twee vergelijkingen

$$W' - \left(1 - \frac{a^2 \rho}{E} \omega^2\right) U = 0, \quad (4.39)$$

$$W'' - U' + \frac{\rho a^2 \omega^2}{E} W = 0.$$

We lossen dit op door de substitutie

$$U(\varphi) = A_n \cos n\varphi, \quad W(\varphi) = B_n \sin n\varphi, \quad (4.40)$$

en vinden daarmee voor de eigenfrequenties van de gekoppelde radiale en transversale trillingen

$$\omega_n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho} (1+n^2)}. \quad (4.41)$$

Voor  $n = 0$ , krijgen we weer de puur radiale trillingen.

### iii) Buigingstrillingen in het vlak van de ring

We gaan er hier van uit dat de ring trilt zonder dat er rek optreedt; dat betekent

$$w' - u = 0, \quad \text{en } N = 0. \quad (4.42)$$

We verwaarlozen de traagheidskrachten ten gevolge van de rotatie van de doorsnede:

$$\varrho_j = 0. \quad (4.43)$$

Dit is consistent, omdat we ook de afschuiving verwaarlozen (vergelijk IV. 1. iii)).

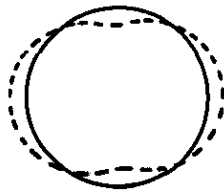
Met (4.42), (4.43) en (4.37) gaat het stelsel (3.67) over in

$$\begin{aligned}
 Q' &= \rho a S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (Q = Q_i), \\
 Q &= -\rho a S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 M' + aQ &= 0, \quad (M = M_j), \\
 M &= \frac{EI}{a} (u'' + u), \quad (I = I_j).
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

We kunnen hiermee twee vergelijkingen voor  $u$  en  $w$  opstellen, waaruit op de gebruikelijke wijze de eigenfrequenties volgen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S a^4}} \sqrt{\frac{n^2(n-1)^2}{(n^2+1)}}, \quad (n = 2, 3, \dots).
 \tag{4.45}$$

De eerste trillingsvorm, welke voor  $n = 2$  optreedt, ziet er uit als



iv) Trillingen loodrecht op het vlak van de ring

We hebben hier te maken met de verplaatsing  $v$  loodrecht op het vlak van de ring en de hoekverdraaiing  $\beta$  van de doorsnede in de  $\vec{k}$ -richting. We moeten nu uitgaan van het stelsel (3.69), waarin

$$f_j = -\rho a S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \ell_i = 0, \quad \ell_k = -\rho a I_p \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}.
 \tag{4.46}$$

Vergelijking (3.69) wordt dan

$$\begin{aligned}
 Q' &= \rho a S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & (Q = Q_j), \\
 M' + W - aQ &= 0, & (M = M_i), \\
 W' - M &= \rho a I_p \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2},
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{EI}{a^2} (a\beta - v''), & (I = I_i), \\
 W &= \frac{S}{a^2} (a\beta' + v'), & (C_w = 0 \text{ genomen}).
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

We zullen dit stelsel niet algemeen oplossen, maar we zullen de volgende twee speciale gevallen bekijken.

v) Zuivere torsie trillingen

In dit geval is  $v = 0$ .

Uit de laatste drie vergelijkingen kunnen we, na eliminatie van  $W$  en  $M$  een vergelijking voor  $\beta = \beta(\varphi, t)$  afleiden, welke we weer door separatie kunnen oplossen. We krijgen voor de eigenfrequenties

$$\omega_n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{EI + n^2 S_w}{\rho I_p}} \quad (n = 1, 2, \dots) .
 \tag{4.48}$$

Deze formule staat fout in [1] (pag.427, verg.(175)).

vi) Gekoppelde torsie buigingstrillingen

We verwaarlozen nu in (4.47) de rotatietraagheid

$$\mathcal{L}_k = -\rho a I_p \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} .$$

Met de separatie

$$v(\varphi, t) = A_n e^{i(\omega t + n\varphi)}, \quad \beta(\varphi, t) = B_n e^{i(\omega t + n\varphi)},
 \tag{4.49}$$

krijgen we voor de eigenfrequenties

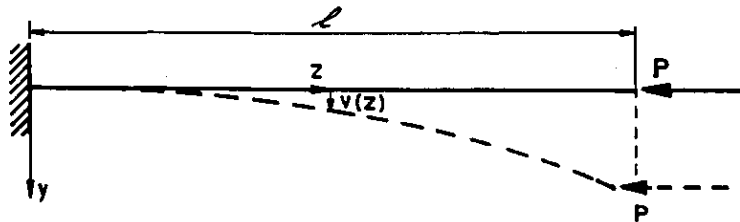
$$\omega_n = \frac{n(n^2 - 1)}{a^2 \sqrt{\rho S \left( \frac{n^2}{EI} + \frac{1}{S_w} \right)}}, \quad (n = 2, 3, \dots) .
 \tag{4.50}$$

Literatuur

- [1] Timoshenko, Vibration problems in engineering.  
 [2] Federhofer, K., Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes.

## V. Stabiliteit onder conservatieve belasting

### V. 1. Knik van rechte balken



We beschouwen een ingeklemde balk, lengte  $l$ , buigstijfheid  $EI_x$ , welke in zijn vrije einde belast wordt door een constante kracht  $P$ .

We bekijken de staaf in een uitgebogen toestand. Dan geldt voor het moment in  $x$ -richting (zie 1.32))

$$M_x = -EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -P [v(l) - v(z)] . \quad (5.1)$$

Verg. (5.1) tweemaal differentiëren naar  $z$  geeft

$$EI_x v^{iv} + P v'' = 0 , \quad ( ' = \frac{d}{dz} ) . \quad (5.2)$$

De randvoorwaarden luiden

$$\begin{aligned} z = 0 & : v = v' = 0 , \\ z = l & : v'' = v''' = 0 , \text{ (moment en dwarskracht nul).} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Als we de homogene vergelijking (5.2) oplossen onder de homogene randvoorwaarden (5.3), blijkt dat we alleen dan een oplossing  $v \neq 0$  krijgen als

$$P = P_{\text{knik}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} . \quad (5.4)$$

Aan deze afleiding is de naam van Euler verbonden.

Opmerking. Het verschijnsel knik valt eigenlijk onder de niet-lineaire theorie. Immers in de lineaire theorie geldt de eenduidigheidsstelling, zodat dan slechts één oplossing mogelijk is. Hier hebben we voor  $P > P_{\text{knik}}$  echter meer mogelijke oplossingen, namelijk  $v = 0$  en  $v \neq 0$ . Dit komt tot uitdrukking in verg. (5.2) welke niet-lineair is. In de lineaire theorie moeten namelijk zowel de verplaatsingen als de krachten infinitesimaal zijn, zodat dan de term:  $Pv''$  in (5.2) klein van de tweede orde is. Het is dus in feite inconsistent om knikproblemen te behandelen met een lineaire theorie.

Voor een theoretisch beter gefundeerde behandeling van de Eulerse knikstaaf zij verwezen naar [1], (H.III, pag. S 31). De op deze manier gevonden knikwaarden blijken zeer weinig (praktisch te verwaarlozen) te verschillen met de Eulerse knikwaarde.

## V. 2. Knik van ringen

We verwaarlozen de lengte-verandering van de ring. Dit wordt bij knikproblemen bijna altijd gedaan. De invloed op de knikwaarde hiervan is te verwaarlozen klein.

We nemen dus

$$w' - u = 0, \quad (\prime = \frac{d}{d\varphi}) \quad (5.5)$$

Verder is, volgens (3.67)<sup>5</sup>

$$M_j = \frac{EI_j}{a^2} (w' + u'') \quad (5.6)$$

Met (5.5) en (5.6) krijgen we

$$u'' + u = \frac{Ma^2}{EI}, \quad (M = M_j, I = I_j). \quad (5.7)$$

We zullen ons hier beperken tot het voorbeeld van een ring onder hydrostatische druk.

We beschouwen een ring belast door een constante druk  $p$ , welke loodrecht op de ring staat (in het vlak van de ring). Voor er knik optreedt blijft de ring cirkelvormig en zijn alle grootheden onafhankelijk van  $\varphi$ . De belasting  $p$  staat nog zuiver radiaal, dus

$$f_i = p \cdot a, \quad f_k = 0. \quad (5.8)$$

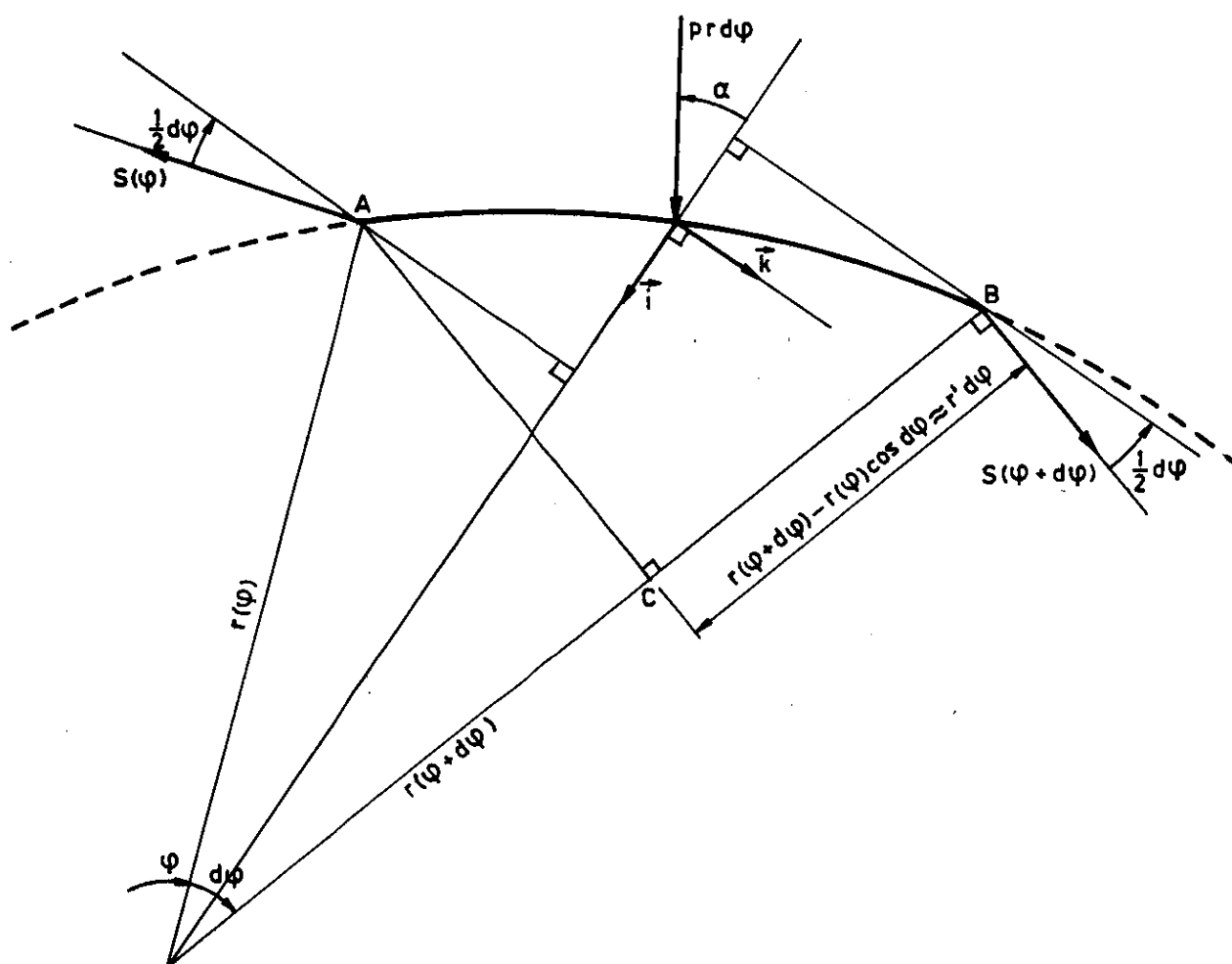
Hiermee krijgen we uit (3.67)<sup>1,2,5</sup>

$$N = -a \cdot p, \quad Q_i = M_j = 0. \quad (5.9)$$

Voor de knik staat de kracht in de ring dus loodrecht op de straal.

We gaan nu een situatie bekijken, waarbij de ring een heel klein beetje is uitgeknipt. We nemen aan dat nu nog steeds de kracht in de ring loodrecht op de straal staat, en we zullen aantonen dat hiermee aan de evenwichtsvergelijkingen is voldaan.





Omdat  $\alpha$  zeer klein is, geldt

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (5.10)$$

Voor het evenwicht in  $\vec{i}$  richting krijgen we (zie figuur)

$$S(\varphi) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) + S(\varphi+d\varphi) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = -pr \cos \alpha d\varphi \approx -pr d\varphi, \quad (5.11)$$

of

$$S(\varphi) = -pr. \quad (5.12)$$

De evenwichtsvergelijking in  $\vec{k}$ -richting luidt

$$-S(\varphi)\cos(\frac{1}{2} d\varphi) + S(\varphi+d\varphi)\cos(\frac{1}{2} d\varphi) = -pr \sin \alpha d\varphi \approx -pr'd\varphi, \quad (5.13)$$

of

$$S'(\varphi) d\varphi = -pr', \quad (5.14)$$

waaraan is voldaan met (5.12).

Voor het momentevenwicht om het punt A geldt

$$-M(\varphi) + M(\varphi+d\varphi) + \overline{BC} \cdot S(\varphi+d\varphi) = 0,$$

of, met  $\overline{BC} = r'(\varphi) d\varphi$ , en (5.12) :

$$M'(\varphi) = prr' d\varphi. \quad (5.15)$$

Dit geeft

$$M = \frac{1}{2}pr^2 + C. \quad (5.16)$$

Voor  $r = a$  (ongeknikte toestand) is:  $M = 0$ , waaruit volgt

$$C = -\frac{1}{2}pa^2. \quad (5.17)$$

Hiermee wordt (5.16)

$$M = -\frac{1}{2}p(a^2 - r^2). \quad (5.18)$$

We substitueren in (5.18):

$$r = a - u,$$

en bedenken dat:  $u \ll a$ , waarna (5.18) overgaat in

$$M = -pau. \quad (5.19)$$

Substitutie van (5.19) in (5.7) leidt tot de volgende differentiaalvergelijking voor de plaatsing  $u$

$$u'' + \left(1 + \frac{pa^3}{EI}\right) u = 0. \quad (5.20)$$

De oplossing van (5.20) luidt

$$u(\varphi) = A \cos k \varphi + B \sin k \varphi, \quad (5.21)$$

met

$$k = \sqrt{1 + \frac{pa^3}{EI}}. \quad (5.22)$$

Uit de voorwaarde

$$u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi) ,$$

volgt dat  $k$  een geheel getal moet zijn, en aangezien, voor  $p > 0$ , steeds  $k > 1$  is, zal de laagst mogelijke waarde van  $k$  zijn:  $k = 2$ . De hierbij horende laagste knikwaarde is

$$\frac{p}{kn} = \frac{3EI}{a^3} . \quad (5.23)$$

Van twee andere voorbeelden zullen we alleen de laagste knikwaarde geven.

Dit zijn

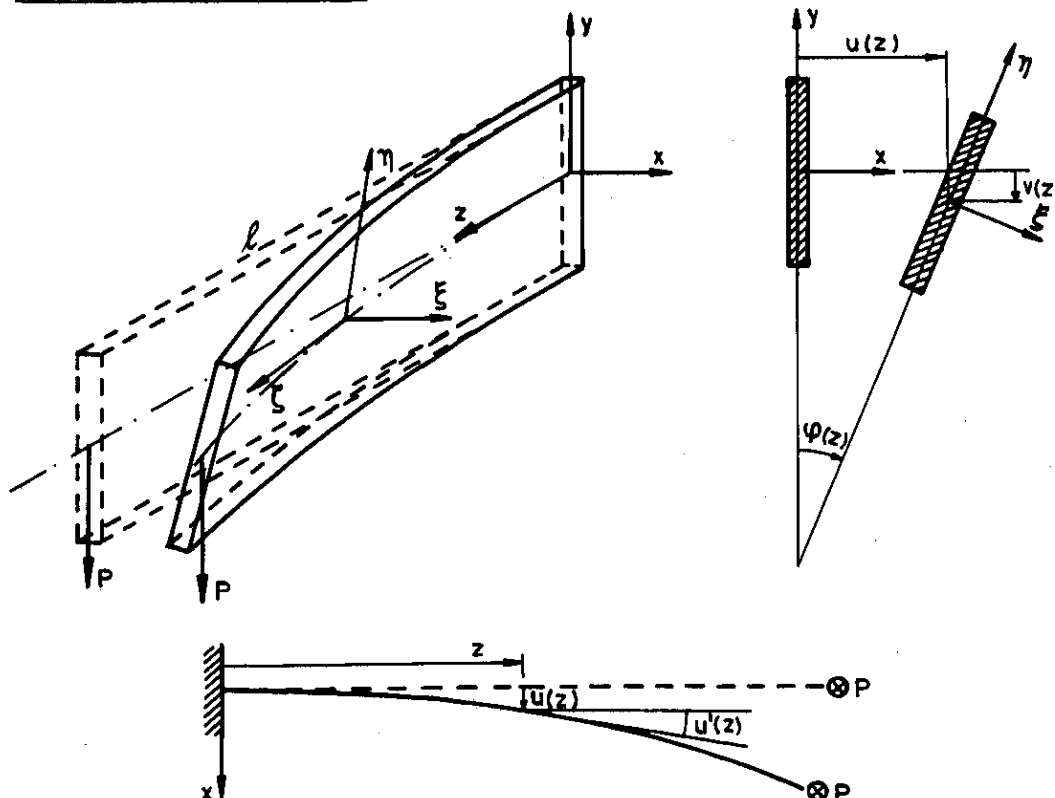
- i) ring onder centrale belasting; hierbij blijft de, constante, kracht steeds naar het middelpunt van de ring gericht:

$$\frac{p}{kn} = \frac{9}{2} \frac{EI}{a^3} . \quad (5.24)$$

- ii) ring onder constante kracht (constant in grote en richting, zogenaamde dead load):

$$\frac{p}{kn} = 2 \frac{EI}{a^3} . \quad (5.25)$$

### V. 3. Kiep van rechte balken



We bekijken de balk in een weinig uitgeknikte toestand ( $u$ ,  $v$  en  $\varphi$  : klein).  
De momenten in een  $z$ -doorsnede zijn dan

$$\begin{aligned} M_x &= P(\ell-z) , \\ M_y &= 0 , \\ M_z &= -P [u(\ell) - u(z)] . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Met behulp van de volgende tabel van richtingscosinussen

	x	y	z
$\xi$	1	$\varphi$	$-u'$
$\eta$	$-\varphi$	1	$-v'$
$\zeta$	$u'$	$v'$	1

krijgen we voor de momenten langs de hoofdassen van de doorsnede:  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$

$$\begin{aligned} M_\xi &= P(\ell-z) + 0 + P[u(\ell) - u(z)]u' = P(\ell-z) + \dots , \\ M_\eta &= -P(\ell-z)\varphi + 0 + P[u(\ell) - u(z)]v' = -P(\ell-z)\varphi + \dots , \\ M_\zeta &= P(\ell-z)u' + 0 - P[u(\ell) - u(z)] . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nu gelden volgens (1.29) en (1.32), als we bedenken dat

$$\frac{d^2 u_\xi}{d\zeta^2} \approx \frac{d^2 u}{dz^2} , \quad \text{en} \quad \frac{d^2 u_\eta}{d\zeta^2} \approx \frac{d^2 v}{dz^2} , \quad (5.28)$$

de volgende relaties tussen de buigende momenten en de verplaatsingen

$$\begin{aligned} EI_y u'' &= M_\eta = -P(\ell-z)\varphi , \\ EI_x v'' &= -M_\xi = -P(\ell-z) . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Verder is, als we de torsiestijfheid  $S_w$  noemen

$$S_w \varphi' = M_\zeta = P(\ell-z)u' - P[u(\ell) - u(z)] . \quad (5.30)$$

Door uit de vergelijkingen (5.29)<sup>1</sup> en (5.30)  $u(z)$  te elimineren krijgen we de volgende differentiaalvergelijking voor  $\varphi(z)$ :

$$\varphi'' + a^4(\ell-z)^2\varphi = 0, \quad a^2 := \frac{P}{\sqrt{EI_y S_w}}. \quad (5.31)$$

De bijbehorende randvoorwaarden luiden

$$\begin{aligned} z = 0 & : \varphi = 0, \\ z = \ell & : \varphi' = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Verg. (5.31) is te reduceren tot een Bessel-vergelijking, welke als oplossing heeft

$$\varphi = \sqrt{w} [A J_{1/4}(\frac{1}{2}a^2w^2) + B J_{-1/4}(\frac{1}{2}a^2w^2)], \quad (5.33)$$

waarbij  $w := \ell - z$ . (5.34)

De randconditie (5.32)<sup>2</sup> geeft

$$A = 0, \quad (5.35)$$

en (5.32)<sup>1</sup>

$$B J_{-1/4}(\frac{1}{2}a^2\ell^2) = 0. \quad (5.36)$$

Er is dus alleen een niet-triviale oplossing ( $\varphi \neq 0$ ) mogelijk als

$$J_{-1/4}(\frac{1}{2}a^2\ell^2) = 0. \quad (5.37)$$

De kleinste waarde voor  $a$  die hieraan voldoet is

$$a\ell \approx 2,$$

waaruit voor de laagste kiepwaarde volgt

$$P_k = \frac{4\sqrt{EI_y S_w}}{\ell^2}. \quad (5.38)$$

Voor kiep van ringen zij verwezen naar [2].

#### V. 4. Thermische knik van rechte balken

We zullen alleen het volgende voorbeeld behandelen: een balk, welke in zijn einddoorsneden is opgelegd, wordt verwarmd, waarbij de temperatuur over de doorsnede en over de lengte van de balk mag veranderen.



We nemen een rechthoekige doorsnede (hoogte  $h$ ) en we veronderstellen dat de temperatuur  $T$  niet afhangt van de  $y$ -coördinaat, dus

$$T = T(x, z) . \quad (5.39)$$

Aangezien de temperatuur niet uniform over de doorsnede is, ontstaat er een buigend moment in de  $y$ -richting, dat gelijk blijkt te zijn aan

$$-EI_y \frac{d^2}{dz^2} \kappa_T = -EI_y \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{12(1+\nu)}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha [T(x, z) - T_0] x dx \right\}, \quad (5.40)$$

waarbij  $\alpha$  = lineaire uitzettingscoëfficiënt,  
 $T_0$  = temperatuur van de onverwarmde balk.

We krijgen dan de volgende vergelijking voor de uitgebogen balk

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{P}{EI_y} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 \kappa_T}{dz^2} = 0 , \quad (5.41)$$

waarin  $P$  de normaalkracht is, die in de eindpunten  $A$  en  $B$  op de balk werkt.

De randvoorwaarden voor  $u(z)$  luiden

$$z = 0, \text{ en } z = l : u(z) = 0 , M_y = 0 . \quad (5.42)$$

Deze laatste conditie betekent hier dat voor

$$z = 0, \text{ en } z = l : \frac{d^2 u}{dz^2} + \kappa_T = 0 . \quad (5.43)$$

Hiermee kan (5.41) worden geïntegreerd tot

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 u + \kappa_T = Az + B = 0, \quad k := \sqrt{\frac{P}{EI}} . \quad (5.44)$$

We willen nu nog de normaalkracht  $P$  uitdrukken in de rek van de balk.

Er geldt (bedenk dat  $P$  een drukkracht is)

$$\frac{P}{ES} = -e_{zz} + \epsilon_T . \quad (5.45)$$

Hierin is

$$\epsilon_T = \frac{1+\nu}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha [T(x, z) - T_0] dx : \text{ de thermische rek,} \quad (5.46)$$

en  $e_{zz}$  de niet-lineaire rek in  $z$ -richting (niet-lineair omdat elk knikprobleem niet-lineair is), welke gelijk is aan

$$e_{zz} = \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \right]. \quad (5.47)$$

Nu is  $v = 0$ , terwijl we verder  $\left( \frac{dw}{dz} \right)^2$  verwaarlozen ten opzichte van  $\left( \frac{du}{dz} \right)^2$ .  
Hiermee gaat (5.47) over in

$$e_{zz} = \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2. \quad (5.48)$$

Substitutie van (5.48) in (5.45) geeft

$$\frac{P}{ES} = - \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \epsilon_T. \quad (5.49)$$

Integratie van (5.49), met gebruikmaking van de voorwaarde dat  $w = 0$  voor  $z = 0$  en  $z = \ell$ , leidt tot

$$\int_0^{\ell} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz = - \frac{2P\ell}{ES} + 2 \int_0^{\ell} \epsilon_T dz. \quad (5.50)$$

We nemen de temperatuurverdeling als bekend aan en we veronderstellen deze zodanig, dat we kunnen schrijven

$$\epsilon_T = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin \left( \frac{n\pi z}{\ell} \right), \quad (m_n : \text{bekend}). \quad (5.51)$$

We schrijven ook de verplaatsing  $u$  als een sinus-reeks

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \left( \frac{n\pi z}{\ell} \right). \quad (5.52)$$

De onbekenden van ons probleem zijn dan  $\mu_n$  en  $P$ .  
Substitutie van (5.51) en (5.52) in (5.44) geeft

$$\mu_n = \frac{m_n}{\left( \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - k^2 \right)}. \quad (5.53)$$

Met (5.53) krijgen we uit (5.50) de volgende vergelijking voor  $k$  (en dus voor  $P$ )

$$\frac{\pi^2}{4\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n^2}{\left( \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - k^2 \right)^2} = - \frac{I}{S} k^2 + \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \epsilon_T dz. \quad (5.54)$$

Uit deze vergelijking is, met numerieke methoden, een approximatieve waarde voor  $k$  te bepalen.

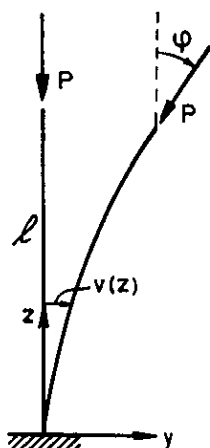
#### Literatuur

- [1] Timoshenko, Theory of elastic stability .
- [2] Biezeno-Grammel, Technische Dynamik I .
- [3] Boley & Weiner, Theory of thermal stresses (H.13) .
- [4] Kovalenko, Thermo-elasticity.



## VI. Stabiliteit onder niet-conservatieve belasting

### VI. 1. Follower force



Onder een "follower force" verstaan we een kracht welke steeds tangentieel blijft aan de uitbuigingslijn. Een dergelijke kracht is niet-conservatief.

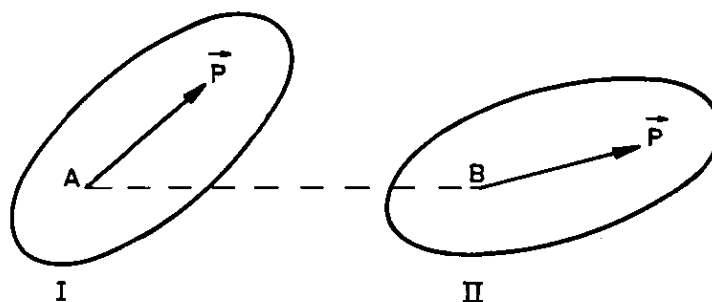
We noemen een kracht conservatief als de arbeid die door die kracht verricht wordt bij de overgang van een toestand in een andere, alleen afhangt van de begin- en eindtoestand.

Is dat niet het geval dan is de kracht niet-conservatief.

De volgende algemene stelling geldt

Stelling. Een kracht die ten opzichte van een lichaam een vaste richting heeft is niet-conservatief.

Bewijs.



We zullen laten zien dat de arbeid die  $\vec{P}$  verricht afhangt van de manier, waarop van I naar II wordt gegaan. We beschouwen de volgende twee verschillende wegen:

- i) Draai eerst het lichaam zodanig dat  $\vec{P}$  langs AB valt, transleer dan tot A in B valt en draai dan weer tot toestand II. De verrichte arbeid is:  $P \times \overline{AB}$ .
- ii) Draai nu eerst het lichaam zodanig dat  $\vec{P}$  loodrecht op AB staat en vervolgens weer als bij i). De verrichte arbeid is nu: 0.

Conclusie: de verrichte arbeid is afhankelijk van de weg van I naar II; dus de kracht P is niet-conservatief.

De in het begin van deze paragraaf gedefinieerde "follower force" behoort tot de klasse waarvoor bovenstaande stelling geldt en is dus niet-conservatief.

Voorbeelden van "follower forces" zijn: een tuinslang waar water uit spuit of een straalmotor.

We zullen dit probleem eerst statisch behandelen en we zullen zien dat deze behandelingswijze leidt tot een foutieve conclusie.

We geven de staaf een zeer kleine uitwijking.

Voor het buigend moment langs de x-as geldt dan (zie (1.32)):

$$EI_x v'' = -M_x = P[v(\ell) - v(z)] - P \varphi(\ell - z). \quad (6.1)$$

De randvoorwaarden zijn

$$\begin{aligned} z = 0 : v = 0, v' = 0, \\ z = \ell : v = v(\ell), v' = \varphi. \end{aligned} \quad (6.2)$$

De algemene oplossing van (6.1) luidt:

$$v(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz) - \varphi(\ell - z) + v(\ell), \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI_x}}. \quad (6.3)$$

We krijgen alleen dan een niet-triviale oplossing ( $v \neq 0$ ) als de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\ell & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ \cos(k\ell) & \sin(k\ell) & 0 & 0 \\ -k \sin(k\ell) & k \cos(k\ell) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.4)$$

of

$$-\sin^2(k\ell) - \cos^2(k\ell) = -1 = 0, \quad (6.5)$$

waaraan onmogelijk te voldoen is. Dus de enig mogelijke oplossing is  $v(z) = 0$ , dat wil zeggen, er treedt nooit knik op. Deze conclusie werd rond 1925 algemeen aanvaard, maar we zullen door middel van een dynamische aanpak de onjuistheid van deze conclusie aantonen.

We gaan de staaf bekijken in de evenwichtsstand  $v(z) = 0$  en geven de staaf een kleine uitwijking zodat hij om deze evenwichtsstand gaat trillen.

Indien de amplitude van de trillingen klein blijft, noemen we de stand  $v(z) = 0$  stabiel; neemt deze amplitude echter steeds toe dan noemen we hem

instabiel. Als de staaf beweegt moeten we een verdeelde belasting van traagheidskrachten, gelijk aan

$$-\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

invoeren, waarmee de buigingsvergelijking overgaat in

$$EI_x v^{iv} + P v'' + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (6.6)$$

We definiëren

$$a := \frac{\rho S}{EI_x}, \quad k := \sqrt{\frac{P}{EI_x}}, \quad (6.7)$$

en separeren  $v(z,t)$  :

$$v(z,t) = V(z) e^{i\omega t}, \quad (6.8)$$

waarmee (6.8) overgaat in

$$V^{iv} + k^2 V'' - a\omega^2 V = 0. \quad (6.9)$$

De oplossing hiervan is

$$V(z) = A \cosh(\lambda_1 z) + B \sinh(\lambda_1 z) + C \cosh(\lambda_2 z) + D \sinh(\lambda_2 z), \quad (6.10)$$

waarbij

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{a\omega^2 + \frac{1}{4}k^4} - \frac{1}{2}k^2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{a\omega^2 + \frac{1}{4}k^4} + \frac{1}{2}k^2}. \quad (6.11)$$

De randvoorwaarden luiden

$$\begin{aligned} z = 0 : V = V' &= 0, \\ z = \ell : V'' = V''' &= 0, \text{ (buigend moment en dwarskracht nul)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

We krijgen weer alleen dan een niet-triviale oplossing, indien de coëfficiënten-determinant nul is. Dit is het geval als voldaan is aan

$$\begin{aligned} 2a\omega^2 + k^4 + 2a\omega^2 \cosh(\lambda_1 \ell) \cosh(\lambda_2 \ell) + \\ + k^2 \sqrt{a\omega^2} \sinh(\lambda_1 \ell) \sinh(\lambda_2 \ell) = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Uit deze vergelijking is  $\omega = \omega(k)$  te bepalen. Voor kleine  $k$  blijkt  $\omega$  reëel te zijn. Uit (6.8) blijkt dan dat  $v(z,t)$  begrensd blijft. Boven een zekere

waarde van  $k$  wordt  $\omega$  echter complex, zodat dan  $v(z,t)$  in de tijd steeds groter zal worden. De nulstand is dan instabiel. De kritische waarde voor  $P$  waarbij dit optreedt is

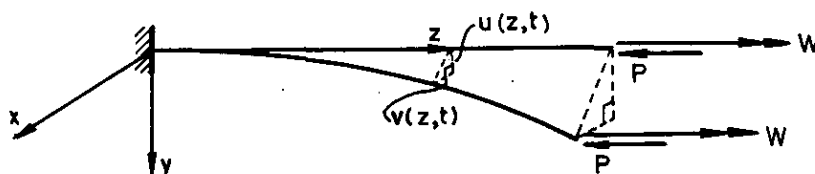
$$\frac{P}{k_n} = 20,05 \frac{EI}{\rho^2} . \quad (6.14)$$

Hiermee is dus aangetoond dat een staaf belast door een "follower force" wel degelijk kan knikken. De statische aanpak is in dit geval niet toegestaan (voor de reden hiervan zij verwezen naar [1]).

## VI. 2. Torsie-instabiliteit

We hadden in de vorige paragraaf gezien dat een kracht welke een vaste richting heeft ten opzichte van een lichaam niet-conservatief is. We zullen nu bewijzen dat een moment dat een vaste richting heeft in de ruimte ook niet-conservatief is. Neem een moment  $\vec{W}$  met een vaste richting, zeg de Z-richting. Dan is de arbeid door  $\vec{W}$  verricht gelijk aan  $|\vec{W}|$  maal de draaiïng om de Z-as. Nu is iedere eindige draaiïng om de Z-as te beschouwen als de superpositie van een draaiïng om de X-as en vervolgens een draaiïng om de Y-as (X-Y-Z-stelsel is vast in de ruimte). Bij deze laatste beweging is de door  $\vec{W}$  verrichte arbeid nul. Dus  $\vec{W}$  is niet-conservatief.

We zullen als voorbeeld het probleem behandelen van een ingeklemde rechte staaf welke in zijn vrije einde belast wordt door een normaalkracht  $P$  en een wringend moment  $W$  welke beide vast in de ruimte zijn.  $P$  is dan conservatief en  $W$  niet-conservatief.



We laten de staaf kleine trillingen uitvoeren om de nulstand. Door het wringend moment  $W$  zal de staaf zowel een verplaatsing in  $x$ - als in  $y$ -richting krijgen. De vergelijkingen voor deze verplaatsingen luiden

$$EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + W \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6.15)$$

$$EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - W \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Hierin zijn de eerste, derde en vierde termen bekende termen. De tweede term is afkomstig van het feit dat, omdat  $W$  een vaste richting in de ruimte heeft maar de doorsnede van de balk draait,  $W$  in de doorsnede een bijdrage tot het buigend moment zal geven evenredig met de afgeleide naar  $z$  van de uitbuigingslijn.

We kunnen (6.15) weer oplossen door separatie.

We hebben hebben acht randvoorwaarden nodig. Deze zijn

$$\begin{aligned} \text{voor } z = 0 : u = v = u' = v' = 0, \\ \text{voor } z = \ell : M_x = M_y = Q_x = Q_y = 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

wat geeft

$$\begin{aligned} EI_y u'' + W v' &= 0, \\ EI_x v'' - W u' &= 0, \\ EI_y u''' + W v'' + P u' &= 0, \\ EI_x v''' - W u'' + P v' &= 0, \quad \text{voor } z = \ell. \end{aligned} \quad (6.17)$$

We zullen dit probleem niet verder oplossen, maar we willen nog wel een belangrijke conclusie geven: als  $P > 0$  is de nulstand voor elke waarde van  $W \neq 0$  instabiel. De nulstand is in bepaalde gevallen echter weer wel stabiel te krijgen door een klein beetje wrijving in rekening te brengen.

### VI. 3. Koppeling van vloeistofstroming en deformatie

We bekijken eerst de stabiliteit van een buis met stromend water.

We geven alleen de buigingsvergelijking (voor een afleiding zij verwezen naar [3])

$$EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + m S \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 v + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (6.18)$$

met:  $m$  : soortelijke massa van het water,  
 $U$  : snelheid van het water.

De tweede term in (6.18) is een gevolg van de beweging van het water in de buis.

We kunnen dit probleem op de gebruikelijke manier oplossen door separatie en door aan de randvoorwaarden te voldoen. We vinden dan een kritische snelheid  $U$  waarvoor de evenwichtsstand  $v(z,t) = 0$  instabiel wordt.

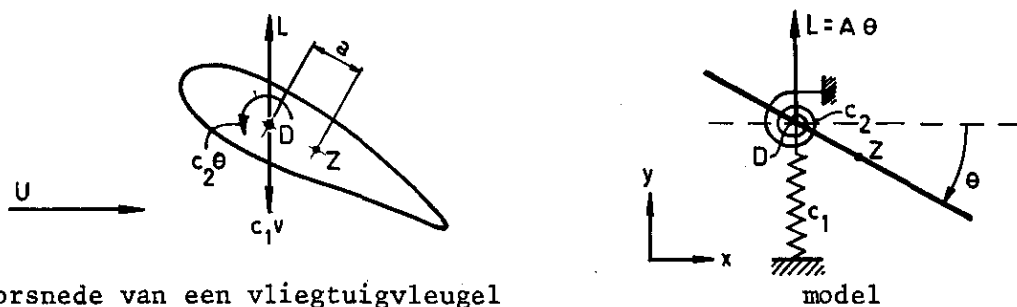
Een tweede zeer belangrijk voorbeeld van instabiliteit ten gevolge van de koppeling van vloeistofstromingen met deformaties vormt flutter. Hieronder verstaan we het volgende verschijnsel: een elastisch lichaam waarlangs een vloeistof stroomt gaat trillingen uitvoeren als gevolg van de koppeling tussen de stroming en de deformatie. Flutter treedt bijvoorbeeld op bij vliegtuigvleugels of bij grote bruggen (Tacoma-bridge).

We zullen hier een zeer vereenvoudigd model van flutter behandelen, dat echter alle typische kenmerken van flutter in zich draagt.

Beschouw een staaf welke in een punt  $D$  via een rechte veer (veerstijfheid  $c_1$ ) en een spiraalveer (veerstijfheid  $c_2$ ) met de vaste wereld is verbonden en die in  $D$  belast wordt door een kracht

$$L = A \theta .$$

(6.19)



Doorsnede van een vliegtuigvleugel

model

Dit is een vereenvoudigd model voor de doorsnede van een vliegtuigvleugel, waarbij  $c_1 v$  de weerstandskracht is tegen verplaatsingen van het dwarskrachtenmiddelpunt  $D$  en  $c_2 \theta$  het weerstandsmoment is tegen hoekverdraaiingen van de doorsnede, terwijl  $L$  de lift is ten gevolge van de luchtstroming (snelheid lucht ten opzichte van vleugel:  $U$ ) die behalve van de hoek  $\theta$  ook een functie van  $U$  is. In ons model is dus  $A = A(U)$ . Voor meer uitgebreide studies over flutter zie [4] en [5].

We kunnen dit vereenvoudigde model behandelen met Lagrange.

De kinetische energie van de staaf is

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{v} - a \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2, \quad (6.20)$$

met:  $m$  = massa van de staaf,

$a$  = afstand van D naar Z,

$I_0 = mi^2$  = massatraagheidsmoment om z-as door zwaartepunt Z.

De potentiële energie is

$$U = \frac{1}{2} c_1 v^2 + \frac{1}{2} c_2 \theta^2, \quad (6.21)$$

terwijl we voor de gegeneraliseerde krachten krijgen

$$Q_v = A \theta, \quad Q_\theta = 0. \quad (6.22)$$

We krijgen met Lagrange hieruit de volgende twee bewegingsvergelijkingen voor de staaf

$$\begin{aligned} m \ddot{v} - m a \ddot{\theta} + c_1 v - A \theta &= 0, \\ - m a \ddot{v} + m (i^2 + a^2) \ddot{\theta} + c_2 \theta &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

We lossen dit stelsel op door de substitutie

$$v = C e^{\lambda t}, \quad \theta = D e^{\lambda t}. \quad (6.24)$$

We krijgen alleen dan een niet-nuloplossing als de determinant van de coëfficiënten C en D nul is, dus als

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0, \quad (6.25)$$

met

$$p_0 := \frac{i^2}{i^2+a^2}; \quad p_2 = \left(\frac{c_1}{m}\right)^2 + \left[\frac{c_2}{m(i^2+a^2)}\right]^2 - \frac{a A}{m(i^2+a^2)}; \quad (6.26)$$

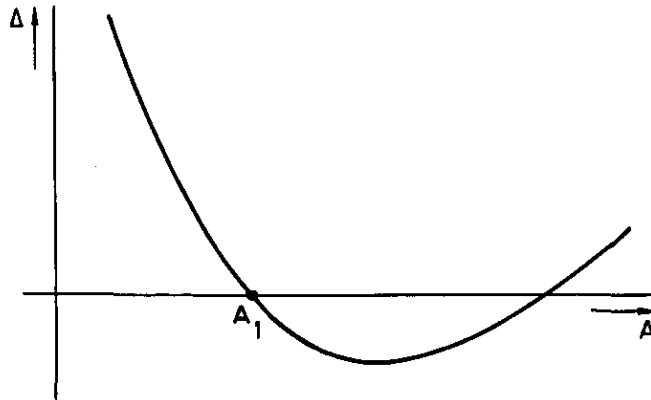
$$p_4 = \left[\frac{c_1 c_2}{m^2(i^2+a^2)}\right]^2.$$

De oplossing (6.24) is stabiel als  $\lambda$  zuiver imaginair is. Hiertoe is het noodzakelijk dat de discriminant van (6.25)

$$\Delta := p_2^2 - 4 p_0 p_4, \quad (6.27)$$

positief is.

We kunnen  $\Delta$  in grafiek uitzetten als functie van  $A$  :



We zien dan dat voor  $A < A_1$  de discriminant  $\Delta$  positief is en dientengevolge  $\lambda$  imaginair is. Voor  $A > A_1$  wordt  $\Delta$  negatief, zodat dan de wortels  $\lambda$  toegevoegd complex worden. De toestand wordt dan instabiel. We hebben hiermee gevonden dat  $A_1$  een kritische waarde van  $A$ , en aangezien  $A = A(U)$  ook een kritische waarde van  $U$ , voorstelt waarboven instabiliteiten optreden.

#### Literatuur

- [1] Collegedictaat Stabiliteitstheorie, Alblas
- [2] Bolotin, Non-conservative problems in stability theory
- [3] Brook Benjamin, Proc.Roy.Soc., Series A, Math.& Phys.Sc.,  
nr. 1307, 26 (1961)
- [4] Fung, Aeroelasticity
- [5] Bisplinghoff, Aeroelasticity.



## VII. Twee-dimensionale balkentheorie

### VII. 1. Inleiding. Gegeneraliseerde vlakspanningstoestand

We zullen in dit hoofdstuk een paar problemen voor balken met rechthoekige doorsnede behandelen, door deze balken te beschouwen als platen. Hiertoe moeten we eerst iets zeggen over de theorie van dunne platen, welke in hun vlak belast worden. We nemen aan dat de x-coördinaat loodrecht op het vlak van de plaat staat en dat de y- en z-coördinaten in het vlak van de plaat liggen. De dikte van de plaat in x-richting nemen we:  $2h$ . We spreken van dunne platen als  $h$  veel kleiner is dan de afmetingen in y- en z-richting. We nemen steeds het oppervlak van de plaat ( $x = \pm h$ ) spanningsvrij. Dan moet

$$t_{xx}(x = \pm h, y, z) = t_{xy}(x = \pm h, y, z) = t_{xz}(x = \pm h, y, z) = 0. \quad (7.1)$$

De evenwichtsvergelijking in x-richting luidt (zie (1.6))

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (7.2)$$

Passen we dit toe op de punten  $x = \pm h$  dan zien we met (7.1) direct dat

$$\left( \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} \right)_{x=\pm h} = 0. \quad (7.3)$$

Dus aan de rand van de plaat is zowel  $t_{xx}$  als zijn afgeleide  $\left( \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} \right)$  gelijk aan nul. Voor dunne platen is het dan een goede benadering om  $t_{xx}$  overal nul te nemen.

We integreren de evenwichtsvergelijkingen (1.6) over de dikte van de plaat, wat met (7.1) leidt tot

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{t}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{t}_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{t}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{t}_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{t}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{t}_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

waarin  $\bar{t}_{ij}$  de gemiddelde spanningen zijn:

$$\bar{t}_{ij}(y,z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_{ij}(x,y,z) dx . \quad (7.5)$$

We hebben alleen verplaatsingen in het vlak van de plaat:  $v(x,y,z)$  en  $w(x,y,z)$ . We definiëren de gemiddelde verplaatsingen

$$\bar{v}(y,z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v(x,y,z) dx, \quad \bar{w}(y,z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h w(x,y,z) dx. \quad (7.6)$$

Hieruit volgen de gemiddelde deformaties

$$\begin{aligned} \bar{e}_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} , & \bar{e}_{zz} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ \bar{e}_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Volgens de wet van Hooke gelden de volgende relaties tussen de gemiddelde spanningen en deformaties

$$\begin{aligned} \bar{t}_{yy} &= \frac{1}{E} (\bar{t}_{yy} - \nu \bar{t}_{zz}) , & \bar{e}_{yz} &= \frac{1}{2G} \bar{t}_{yz} , \\ \bar{e}_{zz} &= \frac{1}{E} (\bar{t}_{zz} - \nu \bar{t}_{yy}) . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Met de vergelijkingen (7.4)<sup>2,3</sup>, (7.7) en (7.8) hebben we een stelsel van acht vergelijkingen voor de acht onbekenden  $\bar{t}_{yy}$ ,  $\bar{t}_{yz}$ ,  $\bar{t}_{zz}$ ,  $\bar{e}_{yy}$ ,  $\bar{e}_{yz}$ ,  $\bar{e}_{zz}$ ,  $\bar{v}$  en  $\bar{w}$ . Hebben we een probleem dat door deze vergelijkingen beschreven kan worden, dan spreken we van een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. Het probleem van een plaat in zijn vlak belast behoort tot deze klasse.

We voeren in de zg. Airy-functie:  $\phi(y,z)$  door

$$\bar{t}_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} , \quad \bar{t}_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} , \quad \bar{t}_{yz} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} . \quad (7.9)$$

Hiermee is identiek voldaan aan de evenwichtsvergelijkingen (7.4)<sup>2,3</sup>.

Uit (7.7) volgt de compatibiliteitsvergelijking

$$\frac{\partial^2 \bar{e}_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \bar{e}_{yz}}{\partial y \partial z} . \quad (7.10)$$

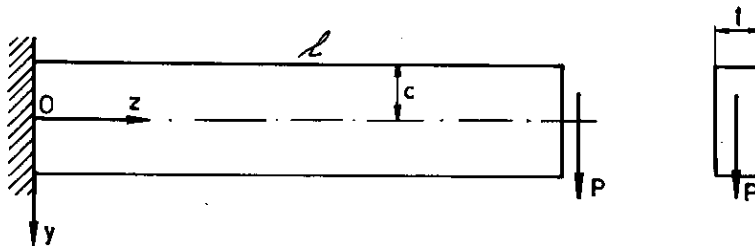
Met (7.8), (7.9) en (1.10) volgt hieruit de volgende bipotentiaalvergelijking voor  $\phi(y,z)$

$$\Delta\Delta\phi = \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4\phi}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} = 0. \quad (7.11)$$

We zullen bovenstaande theorie gaan toepassen op een paar balkproblemen en de resultaten vergelijken met de elementaire balkentheorie.

In de volgende paragrafen zullen we de strepen boven de verplaatsingen, spanningen en deformaties weglaten, maar deze grootheden stellen nog wel steeds de gemiddelde waarden over de dikte voor. Verder zullen we de dikte normaliseren op één:  $2h = 1$ .

#### VII. 2. Ingekleemde balk in einddoorsnede belast door dwarskracht



We beschouwen een balk met een smalle rechthoekige doorsnede welke in zijn einddoorsnede ( $z = l$ ) belast wordt door een dwarskracht  $P$ . We nemen aan dat de schuifspanningen in de doorsnede  $z = l$  "goed verdeeld" zijn (we komen hier later op terug).

Een oplossing van (7.11) is

$$\phi(x,y) = \frac{1}{6} A (x-l) y^3 + B xy, \quad (7.12)$$

met  $A$  en  $B$  nog nader te bepalen constanten. We zullen laten zien dat we met deze vorm, onder bepaalde aannamen, aan de randvoorwaarden kunnen voldoen. Uit (7.12) volgt met (7.9) voor de spanningen

$$t_{yy} = 0, \quad t_{yz} = -B - \frac{1}{2} A y^2, \quad t_{zz} = A(x-l) y. \quad (7.13)$$

De randvoorwaarden op  $y = \pm c$  luiden

$$t_{yy} = t_{yz} = 0,$$

waaraan is voldaan door

$$B = -\frac{1}{2} A c^2. \quad (7.14)$$

Verder moet  $t_{yz}$  als resultante de dwarskracht  $P$  leveren

$$P = \int_{-c}^c t_{yz} dy = -2Bc - \frac{1}{3} A c^3. \quad (7.15)$$

Uit (7.14) en (7.15) volgt

$$A = \frac{3P}{2c^3}, \quad B = -\frac{3P}{4c}. \quad (7.16)$$

Met

$$I = I_x = \frac{2}{3} c^3, \quad (7.17)$$

krijgen we dan voor de spanningen

$$t_{zz} = \frac{P(x-l)y}{I}, \quad t_{yz} = \frac{P}{2I} (c^2 - y^2), \quad t_{yy} = 0. \quad (7.18)$$

Dit komt volledig overeen met de elementaire oplossing zoals we die in hoofdstuk I gevonden hadden (vergelijk (1.34) en (1.39) met  $b = 1$ ,  $h = 2c$ ). We moeten echter bedenken dat dit alleen dan de exacte oplossing voorstelt indien de spanningen in de einddoorsneden  $z = 0$  en  $z = l$  verdeeld zijn volgens (7.18) (we spreken dan van "goed verdeeld"). Indien de krachten en momenten in de einddoorsneden niet op deze wijze zijn verdeeld zal de oplossing volgens (7.18) niet correct zijn aan de einden van de balk, maar volgens het principe van de Saint-Venant zal hij weer wel correct zijn in doorsneden welke op enige afstand van de beide einddoorsneden liggen.

Met (7.8) en (7.18) krijgen we voor de deformaties

$$e_{zz} = -\frac{P}{EI} (\ell - z) y, \quad e_{yy} = \frac{\nu P (\ell - z) y}{EI}, \quad (7.19)$$

$$e_{yz} = \frac{P}{4GI} (c^2 - y^2).$$

Aangezien deze deformaties compatibel zijn kunnen we hieruit de verplaatsingen bepalen. We krijgen

$$w(y, z) = \frac{P(\ell - z)^2 y}{2EI} + \frac{\nu P y^3}{6EI} - \frac{P y^3}{6GI} + C y + D, \quad (7.20)$$

$$v(y, z) = \frac{P(\ell - z) y^2}{2EI} + \frac{P(\ell - z)^3}{6EI} + \frac{3Pz}{4cG} - C z + F,$$

waarin C, D en F integratieconstanten zijn, welke starre-lichaamsverplaatsingen representeren.

Deze constanten kunnen op verschillende manieren bepaald worden. We nemen op de eerste plaats aan dat de oorsprong ( $y = z = 0$ ) op zijn plaats blijft. Dan moet

$$v(0,0) = D = 0, \quad (7.21)$$

$$w(0,0) = \frac{Pl^3}{6EI} + F = 0 \Rightarrow F = -\frac{Pl^3}{6EI}.$$

Voor de bepaling van C moeten we de rotatie van de balk in het y-z-vlak om het vast punt 0 uitsluiten. We kunnen dit onder andere op de volgende twee manieren realiseren

i) We nemen aan dat de as van de balk in 0 horizontaal blijft.

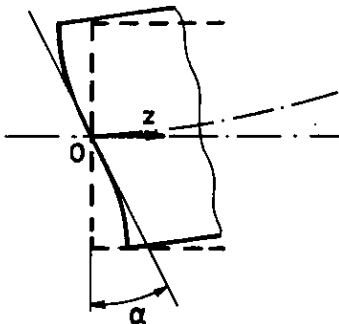
Dan moet

$$\frac{\partial v}{\partial z}(y = 0, z = 0) = 0. \quad (7.22)$$

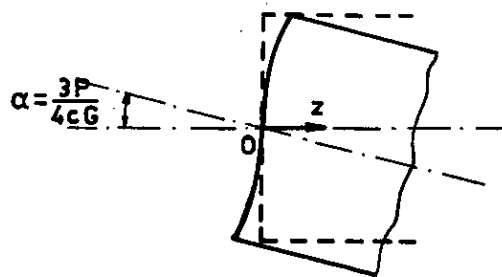
ii) We nemen aan dat een verticaal stukje van de doorsnede in 0 gefixeerd is. Dan geldt

$$\frac{\partial w}{\partial y}(y = 0, z = 0) = 0. \quad (7.23)$$

Beide situaties zijn hieronder in figuur gebracht.



$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = 0$$



$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0$$

In het eerste geval is

$$C = -\frac{Pl^2}{2EI} + \frac{3P}{4cG}. \quad (7.24)$$

Hiermee krijgen we voor de verplaatsing van de neutrale lijn

$$v_0(z) = v(0, z) = \frac{P(\ell-z)^3}{6EI} + \frac{P\ell^2 z}{2EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} . \quad (7.25)$$

Voor de zakking van het eindpunt van de balk krijgen we

$$v_0(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{P\ell^3}{2Ec^3} , \quad (7.26)$$

wat overeenkomt met de zakking in de elementaire theorie volgens (1.44), indien we de zakking ten gevolge van de afschuiving verwaarlozen.

Voor het tweede geval krijgen we

$$C = - \frac{P\ell^2}{2EI} . \quad (7.27)$$

Dan is

$$v_0(z) = \frac{P(\ell-z)^3}{6EI} + \frac{P\ell^2 z}{2EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} + \frac{3Pz}{4cG} , \quad (7.28)$$

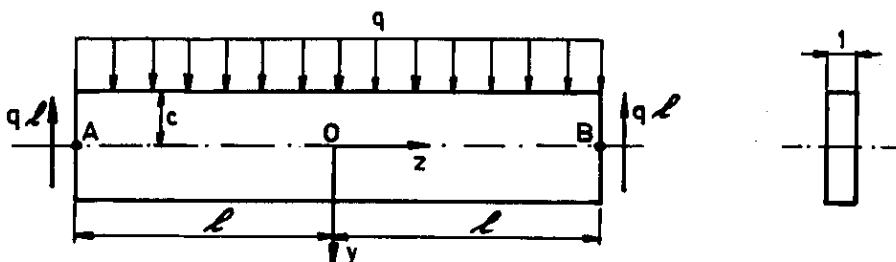
en de zakking van het eindpunt

$$v_0(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{3Pz}{4cG} . \quad (7.29)$$

Deze laatste term is juist de correctie ten gevolge van de afschuiving in de elementaire theorie volgens (1.43) (met  $b \rightarrow 1$ ,  $h \rightarrow 2c$ ,  $P \rightarrow 2P$ ).

De correctieterm is in de balkentheorie ( $c/\ell \ll 1$ ) te verwaarlozen. Het onderscheid tussen de randvoorwaarden (7.22) en (7.23) is in de balkentheorie dus irrelevant.

### VII. 3. Opgelegde balk met verdeelde belasting



We nemen de balk opgelegd in de eindpunten A en B en veronderstellen dat de reactiekrachten "goed" over de doorsnede verdeeld zijn. Dit betekent in feite dat we alleen dat deel van de balk bekijken dat gelegen is tussen

twee doorsneden die op enige afstand van de eindpunten liggen.

De randvoorwaarden voor de spanningen zijn

$$\text{op } y = c : t_{yy} = t_{yz} = 0, \quad (7.30)$$

$$\text{op } y = -c : t_{yz} = 0, \quad t_{yy} = -q,$$

en op  $z = +\ell$  :

$$\int_{-c}^c t_{yz} dy = \bar{q} \ell, \quad \int_{-c}^c t_{zz} dy = \int_{-c}^c t_{zz} y dy = 0. \quad (7.31)$$

Een spanningsverdeling die hieraan voldoet is

$$t_{zz} = -\frac{q}{2I} (z^2 y - \frac{2}{3} y^3) + A y,$$

$$t_{yy} = -\frac{q}{2I} (\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3), \quad (7.32)$$

$$t_{yz} = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) z.$$

A is een constante welke volgt uit (7.31)<sup>3</sup> (aan de andere voorwaarden is voldaan):

$$A = \frac{3q}{4c} \left( \frac{\ell^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (7.33)$$

Hiermee krijgen we voor de normaalspanning in z-richting

$$t_{zz} = \frac{q}{2I} (\ell^2 - z^2) y + \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right). \quad (7.34)$$

De eerste term in (7.34) is de spanning volgens de elementaire sterkteleer.

De tweede term is een correctieterm, welke ten opzichte van de eerste van de orde  $(c/\ell)^2$  is, en dus in de balkentheorie te verwaarlozen is.

Als we aannemen dat de oorsprong 0 geen verplaatsing heeft in z-richting en een verplaatsing:  $\delta$  in y-richting, dan krijgen we voor de verplaatsingen

$$w(y, z) = \frac{q}{EI} \left[ (\ell^2 z - \frac{1}{3} z^3) y + \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) z + v \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) z \right], \quad (7.35)$$

$$v(y,z) = -\frac{q}{2EI} \left[ \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{2}c^2y^2 + \frac{2}{3}c^3y + v\left\{\frac{1}{2}(\ell^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{5}c^2y^2\right\} + \frac{1}{2}\ell^2z^2 - \frac{1}{12}z^4 - \frac{1}{5}c^2z^2 + \left(1 + \frac{1}{2}v\right)c^2z^2 \right] + \delta .$$

De zakking  $\delta$  kunnen we bepalen door aan te nemen dat de punten A en B niet in  $y$ -richting verplaatsen, dus door te stellen

$$v(y=0, z=\pm\ell) = 0, \quad (7.36)$$

wat geeft

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{5}{24} \frac{q\ell^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{\ell^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{2}v \right) \right] = \\ &= \frac{5}{24} \frac{q\ell^4}{EI} \left[ 1 + 0\left(\left(\frac{c}{\ell}\right)^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

De tweede term in (7.37) is een correctieterm als gevolg van de verplaatsing door afschuiving, welke in de balkentheorie wordt verwaarloosd.

Uit de uitdrukking voor  $w(y,z)$ : (7.35)<sup>1</sup> zien we dat voor dit probleem de neutrale lijn niet exact gelijk is aan de lijn  $y=0$ . Immers voor  $y=0$  is

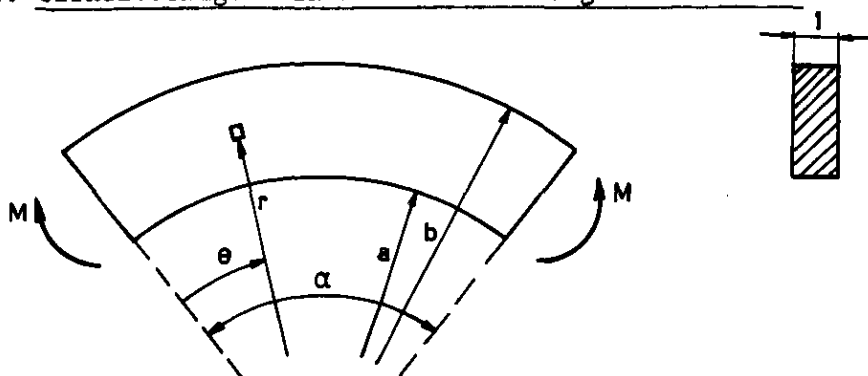
$$w(0,z) = \frac{vqz}{2E} \neq 0. \quad (7.38)$$

Door (7.35)<sup>2</sup> voor  $y=0$  tweemaal naar  $z$  te differentiëren krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} &= \frac{q}{EI} \left[ \frac{(\ell^2 - z^2)}{2} + c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{2}v \right) \right] = \\ &= \frac{M(z)}{EI} + \frac{qc^2}{EI} \left( \frac{4}{5} + \frac{1}{2}v \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Dus verg. (1.32) geldt hier niet exact, maar de afwijking is weer  $0\left(\left(\frac{c}{\ell}\right)^2\right)$ , waarbij we moeten bedenken dat alle bovenstaande resultaten niet gelden in de buurt van  $z = \pm\ell$ .

#### VII. 4. Cirkelvormige balk belast door buigende momenten





In poolcoördinaten luidt vergelijking (7.11)

$$\Delta\Delta\phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (7.40)$$

terwijl de relaties (7.9) overgaan in

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad (7.41)$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad t_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}.$$

Bij zuivere buiging is het moment in iedere doorsnede hetzelfde, dus onafhankelijk van  $\theta$ . Dan moet ook

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0,$$

waarmee (7.41) wordt

$$t_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}, \quad t_{\theta\theta} = \frac{d^2 \phi}{dr^2}, \quad t_{r\theta} = 0. \quad (7.42)$$

We hebben de volgende randvoorwaarden

$$\text{i) } t_{r\theta} = 0, \text{ langs de hele rand,} \quad (7.43)$$

$$\text{ii) } t_{rr} = 0, \text{ voor } r = a \text{ en } r = b, \quad (7.44)$$

iii) de normaalspanningen  $t_{\theta\theta}$  zijn "goed" verdeeld op de randen:  
 $\theta = 0$  en  $\theta = \alpha$  en hebben als resultante

$$\int_a^b t_{\theta\theta} dr = 0, \quad \int_a^b t_{\theta\theta} r dr = -M. \quad (7.45)$$

De algemene oplossing voor  $\phi = \phi(r)$  van (7.40) luidt

$$\phi(r) = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + D. \quad (7.46)$$

We substitueren deze uitdrukking in (7.42) en de aldus verkregen spanningen in (7.43) - (7.45). Aan (7.43) is triviaal voldaan, terwijl (7.44) geeft

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \log a) + 2C = 0, \quad (7.47)$$

$$\frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \log b) + 2C = 0.$$

Aan (7.45)<sup>1</sup> is met (7.44) identiek voldaan, immers

$$\int_a^b t_{\theta\theta} dr = \int_a^b \frac{d^2\phi}{dr^2} dr = \frac{d\phi}{dr} \Big|_a^b = b t_{rr}(r=b) - a t_{rr}(r=a) = 0, \quad (7.48)$$

en (7.45)<sup>2</sup> geeft

$$\int_a^b t_{\theta\theta} r dr = \int_a^b r \frac{d^2\phi}{dr^2} dr = \phi(r=a) - \phi(r=b) = -M,$$

of

$$A \log b + B b^2 \log b + C b^2 - A \log a - B a^2 \log a - C a^2 = M. \quad (7.49)$$

Met (7.47) en (7.49) hebben we drie vergelijkingen waaruit we A, B en C kunnen oplossen (de constante D is niet interessant). Deze constanten zijn alle evenredig met M.

Als we definiëren

$$N := (b^2 - a^2)^2 - 4 a^2 b^2 (\log \frac{b}{a})^2, \quad (7.50)$$

dan krijgen we voor de spanningen

$$t_{rr} = -\frac{4M}{N} \left[ \frac{a^2 b^2}{r^2} \log \left( \frac{b}{a} \right) + b^2 \log \left( \frac{r}{b} \right) - a^2 \log \left( \frac{r}{a} \right) \right],$$

$$t_{\theta\theta} = -\frac{4M}{N} \left[ -\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \left( \frac{b}{a} \right) + b^2 \log \left( \frac{r}{b} \right) - a^2 \log \left( \frac{r}{a} \right) + b^2 - a^2 \right], \quad (7.51)$$

$$t_{r\theta} = 0.$$

Met de wet van Hooke kunnen we hieruit de deformaties bepalen

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (t_{rr} - \nu t_{\theta\theta}), \quad 2e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0, \quad (7.52)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (t_{\theta\theta} - \nu t_{rr}),$$

waarbij de verplaatsingen u en v nog wel functies van  $\theta$  kunnen zijn.

Opmerking: de neutrale lijn wordt gedefinieerd als de lijn waarop  $e_{\theta\theta} = 0$ . We zullen dadelijk zien dat de neutrale lijn voor dit probleem niet gelijk is aan de centrale lijn:  $r = r_0 := \frac{1}{2}(a+b)$

Uit (7.52) krijgen we voor de verplaatsingen

$$u = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu) B r \log r - B(1+\nu) r + 2C(1-\nu) r \right] + H \sin \theta + L \cos \theta, \quad (7.53)$$

$$v = \frac{4B}{E} r \theta + F r + H \cos \theta - L \sin \theta.$$

Hierin zijn  $F$ ,  $H$  en  $L$  constanten welke we bepalen uit de voorwaarden

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \text{ voor } \theta = 0, r = r_0. \quad (7.54)$$

We krijgen dan

$$F = H = 0, \quad (7.55)$$

$$L = -\frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu) B r_0 \log r_0 - B(1+\nu) r_0 + 2C(1-\nu) r_0 \right],$$

waarmee

$$v = \frac{4B}{E} r \theta - L \sin \theta. \quad (7.56)$$

Uit (7.56) volgt als belangrijke conclusie dat bij zuivere buiging van gekromde balken vlakke doorsneden vlak blijven.

We zullen tot slot nog kijken naar het verband tussen de kromming van de neutrale lijn en de buigende momenten. We zullen aantonen dat de kromming en het moment evenredig met elkaar zijn, zoals in de balkentheorie algemeen wordt aangenomen.

Noemen we de straal van de neutrale lijn  $\rho$ , dan volgt  $\rho$  uit

$$e_{\theta\theta}(r=\rho) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right)_{r=\rho} = 0. \quad (7.57)$$

Uit (7.53) en (7.55) volgt dan

$$-\frac{\Lambda(\rho)}{\rho} + \frac{4B}{E} = 0, \quad (7.58)$$

waarin

$$\Lambda(\rho) := -\frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{\rho} + 2(1-\nu) B \rho \log \rho - B(1+\nu) \rho + 2C(1-\nu) \rho \right]. \quad (7.59)$$

De  $\rho$  volgens (7.58) is ongelijk aan  $r_0$ .

Voor de bepaling van de kromming van de neutrale lijn gebruiken we (3.62)<sup>3</sup>. Bedenk dat hierin  $u$  de radiale verplaatsing gericht naar het middelpunt van de ring is en  $w$  de tangentiële verplaatsing. Door in (3.62)<sup>3</sup>  $a$ ,  $u$ ,  $w$  en  $s$  te vervangen door resp.  $\rho$ ,  $-u$ ,  $v$  en  $\rho\theta$  krijgen we voor de extra kromming van de neutrale lijn

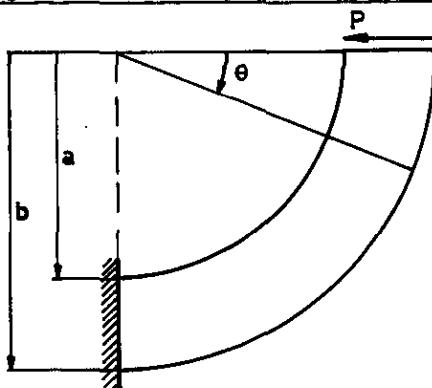
$$\kappa = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{dv}{d\theta}. \quad (7.60)$$

Substitutie van (7.53) met (7.55) geeft

$$\kappa = \frac{4B}{\rho E}, \quad (7.61)$$

en aangezien  $B$  evenredig is met  $M$  is hiermee bewezen dat de krommingsverandering  $\kappa$  evenredig is met het buigende moment  $M$ .

#### VII. 5. Cirkelvormige balk belast door dwarskracht



We bekijken alleen als een voorbeeld bovenstaand probleem. Hierin is het buigend moment in een doorsnede  $\theta$  evenredig met:  $\sin \theta$ . We stellen daarom

$$\phi(r, \theta) = f(r) \sin \theta. \quad (7.62)$$

In oplossing in deze vorm van (7.40), welke voldoet aan de randvoorwaarden

$$t_{rr} = t_{r\theta} = 0, \text{ voor } r = a \text{ en } b$$

en de voorwaarde dat de spanningen "goed" verdeeld zijn over de doorsneden  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi/2$  is

$$f(r) = A r^3 + \frac{B}{r} + C r + D r \log r. \quad (7.63)$$

We zullen deze oplossing niet verder uitwerken (zie [1], § 31).

We geven alleen een paar resultaten.

Voor  $\theta = 0$  :

$$t_{\theta\theta} = 0 \quad (7.64)$$

$$t_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[ r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right],$$

met

$$N := (a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \log \left( \frac{b}{a} \right), \quad (7.65)$$

Voor  $\theta = \pi/2$ :

$$t_{r\theta} = 0, \quad (7.66)$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{P}{N} \left[ 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right].$$

We bepalen de verplaatsingen onder de voorwaarde

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \text{ voor } \theta = \pi/2, r = r_0. \quad (7.67)$$

We krijgen dan voor de verplaatsing in r-richting van het punt  $\theta = 0, r = r_0$ ,

$$u(r_0, \theta) = -\frac{\pi(a^2+b^2)P}{E[(a^2-b^2)+(a^2+b^2)\log(\frac{b}{a})]}. \quad (7.68)$$

Als  $(b-a) =: h \ll a$ , kunnen we (7.68) benaderen door

$$u(r_0, 0) = -\frac{3\pi a^3 P}{Eh^3}, \quad (7.69)$$

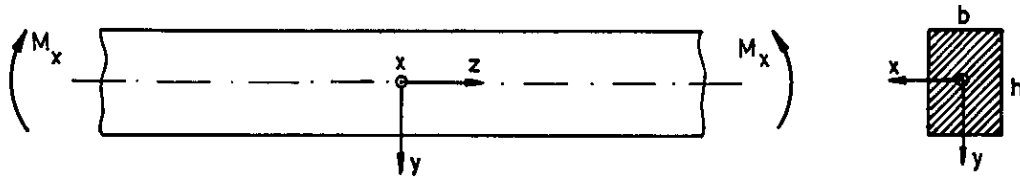
een uitdrukking die overeenkomt met de klassieke balkentheorie.

#### Literatuur.

[1] Timoshenko & Goodier: Theory of elasticity (H 3 en 4).

VIII. Plasticiteitstheorie van balkenVIII. 1. Rechte balk

We beschouwen eerst een rechte balk met rechthoekige doorsnede onder zuivere buiging.

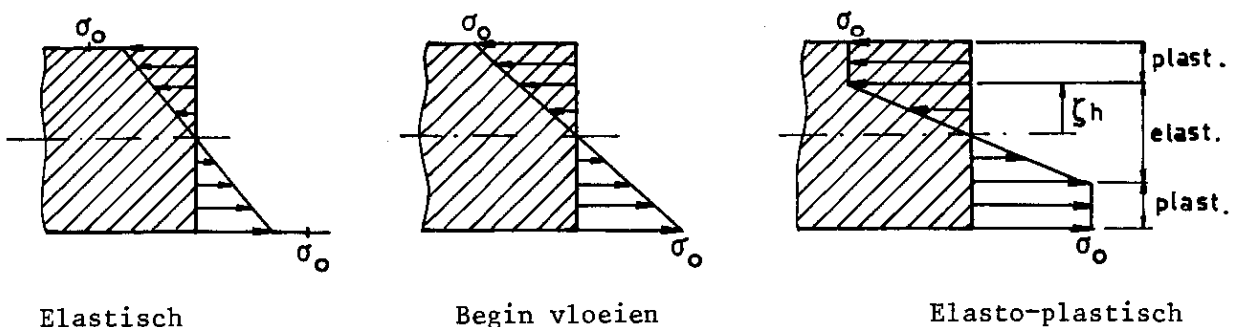


In het elastische gebied geldt (zie (1.31) en (1.32))

$$t_{zz} = \frac{E y}{R}, \quad (R : \text{kromtestraal}), \quad (8.1)$$

$$M := M_x = \frac{EI}{R} = \frac{Ebh^3}{12R}.$$

Als we  $M$  groter gaan maken, treedt er op zeker moment vloeï op. Dit zal gebeuren als de maximale spanning, welke zit in de punten  $y = \pm h/2$ , gelijk wordt aan de vloeigrens:  $\sigma_0$ . We nemen aan dat er geen versterking optreedt, wat betekent dat de spanning in het plastische gebied niet groter dan  $\sigma_0$  wordt. We kunnen dan de volgende spanningsverdelingen in de balk krijgen



Bij het begin van vloeien, dus als:  $|t_{zz}(y = \pm h)| = \sigma_0$ , hebben we de spanningsverdeling

$$t_{zz} = \frac{2\sigma_0 y}{h}. \quad (8.2)$$

Het buigend moment is in deze toestand gelijk aan het zg. grensmoment  $M^*$ , met

$$M^* = \int_{-h/2}^{h/2} t_{zz} y dy = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_o, \quad (8.3)$$

en de bijbehorende kromming is

$$\kappa^* = \frac{1}{R^*} = \frac{2\sigma_o}{Eh}. \quad (8.4)$$

We gaan nu kijken naar het elasto-plastische gedrag.

In het elastische gebied:  $|y| < \zeta h$ , geldt

$$t_{zz} = \frac{\sigma_o y}{\zeta h}, \quad (8.5)$$

en in het plastische gebied:  $|y| > \zeta h$ ,

$$t_{zz} = \pm \sigma_o. \quad (8.6)$$

Het buigend moment is nu gelijk aan

$$M = 2b \int_0^{\zeta h} \frac{\sigma_o y^2}{\zeta h} dy + 2b \int_{\zeta h}^{h/2} \sigma_o y dy = \sigma_o bh^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \zeta^2 \right). \quad (8.7)$$

Formeel treedt volledig plastisch vloeien op als  $\zeta = 0$  wordt. Praktisch wordt deze toestand nooit bereikt, omdat dan de spanning in  $y = 0$  discontinu zou worden. Als de balk volledig plastisch wordt bezwijkt hij (er is geen versteviging). Het bezwijkmoment  $M^{**}$  vinden we door in (8.7) :  $\zeta = 0$  te stellen. Dit geeft

$$M^{**} = \frac{1}{4} \sigma_o bh^2. \quad (8.8)$$

De verhouding tussen grensmoment en bezwijkmoment is dus voor een rechthoekige doorsnede

$$\nu := \frac{M^*}{M^{**}} = \frac{3}{2}. \quad (8.9)$$

Bij een cirkelvormige doorsnede is:  $\nu = \frac{16}{3\pi}$  en bij een ruitvormige:  $\nu = 2,0$ .

In het elastische gebied blijven steeds (ook als  $M > M^*$ ) de vergelijkingen (1.30) en (1.31) geldig, zodat in dit gebied

$$t_{zz} = \frac{Ey}{R}, \quad \text{voor } |y| < \zeta h. \quad (8.10)$$

Aangezien de spanning continu is, geldt op de grens van het elastische met het plastische gebied ( $y = \pm \zeta h$ )

$$t_{zz} = \frac{E\zeta h}{R} = \sigma_0, \quad (8.11)$$

of

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma_0}{E\zeta h}. \quad (8.12)$$

Uit (8.7) en (8.8) volgt met (8.4) en (8.12)

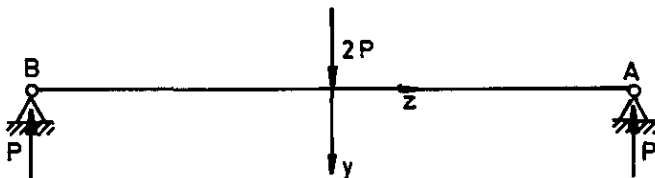
$$\frac{M}{M^{**}} = 1 - \frac{4}{3} \zeta^2 = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{R}{R^*} \right)^2, \quad (M^* < M < M^{**}), \quad (8.13)$$

Hieruit volgt voor de kromming van de balk als  $M^* < M < M^{**}$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{R^*} \frac{1}{\sqrt{3(1 - \frac{M}{M^{**}})}}. \quad (8.14)$$

De kromming is dus niet meer evenredig met het buigend moment.

We zullen bovenstaande resultaten toepassen op het volgende voorbeeld:



Voor  $z \geq 0$  is het moment

$$M = P(l-z). \quad (8.15)$$

Het maximale moment treedt op in  $z = 0$  en is gelijk aan

$$M_{\max} = Pl. \quad (8.16)$$

Als

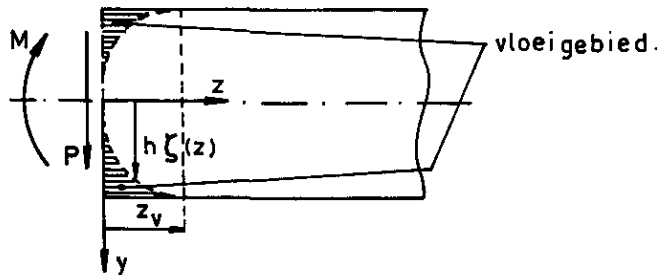
$$M_{\max} = M^* = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0, \quad (8.17)$$

treedt er in  $z = 0$  vloeien op. De grenskracht  $P^*$  waarbij voor het eerst vloeien optreedt is dus

$$P^* = \frac{bh^2 \sigma_0}{6l}. \quad (8.18)$$



Stel dat er vloeien optreedt, dus dat  $P > P^*$ .



In het elasto-plastische gebied ( $z < z_v$ ) geldt volgens (8.7) voor het moment

$$M = \sigma_o bh^2 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \zeta^2(z) \right]. \quad (8.19)$$

De moment gelijk stellen aan het moment volgens (8.15) leidt tot de volgende vergelijkingen voor  $\zeta(z)$ :

$$3 - 4 \zeta^2(z) = \frac{2P}{P^*} \cdot \frac{(l-z)}{l}, \quad (P > P^*) \quad (8.20)$$

De grens van het vloeigebied is dus parabolvormig.

Voor  $z = 0$  krijgen we

$$4 \zeta^2(0) = 3 - \frac{2P}{P^*}. \quad (8.21)$$

Bezwijken treedt op als  $\zeta(0) = 0$  wordt. Hieruit volgt voor de bezwijkkracht

$$P^{**} = \frac{3}{2} P^* = \frac{bh^2 \sigma_o}{4l}. \quad (8.22)$$

Opmerking. Bij bovenstaande oplossing zijn de schuifspanningen niet in rekening gebracht. Deze verwaarlozing is geoorloofd bij lange slanke balken.

Voor de verplaatsingen gelden de volgende relaties:

i) in het elasto-plastische gebied ( $z < z_v$ ) volgens (8.14)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= - \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{R^*} \frac{1}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M^{**}} \right)}} \\ &= \frac{2\sigma_o}{Eh\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P}{M^{**}} (l-z)}}, \quad (M^* < Pl < M^{**}) \end{aligned} \quad (8.23)$$

ii) in het elastische gebied ( $z > z_v$ ) volgens (8.1)

$$\frac{1}{R} = - \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M}{EI_x} . \quad (8.24)$$

We voeren de volgende dimensieloze grootheden in

$$\bar{z} := \frac{z}{l} , \quad \bar{v} := \frac{2Eh}{\sigma_0 l^2} v , \quad m := \frac{M}{M^{**}} , \quad f := \frac{Pl}{M^{**}} . \quad (8.25)$$

In deze grootheden uitgedrukt luiden de vergelijkingen (8.15), (8.23), (8.24) en (8.20)

$$m = f(1-\bar{z}) , \quad (8.26)$$

$$v'' = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-f+f\bar{z}}} , \quad (\bar{z} < \bar{z}_v) , \quad ( ' = \frac{d}{d\bar{z}} ) , \quad (8.27)$$

$$v'' = 6m , \quad (\bar{z} > \bar{z}_v) ,$$

en

$$3 - 4 \zeta^2(\bar{z}) = 3f(1-\bar{z}) . \quad (8.28)$$

We vinden de grens van het elasto-plastische gebied door in (8.28)

$$\zeta(\bar{z}) = \frac{1}{2} , \quad \text{voor } \bar{z} = \bar{z}_v ,$$

te stellen. Dit leidt tot

$$\bar{z}_v = 1 - \frac{2}{3f} . \quad (8.29)$$

Uit (8.27) vinden we, met de voorwaarden:

$$\bar{v} = 0 , \quad \text{voor } \bar{z} = 1 ,$$

$$\bar{v}' = 0 , \quad \text{voor } \bar{z} = 0 , \quad (8.30)$$

en  $\bar{v}$  en  $\bar{v}'$  continu voor  $\bar{z} = \bar{z}_v$  ,

voor de doorzakking van de balk:

voor :  $0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_v$

$$\bar{v}(\bar{z}) = \frac{16}{3f^2\sqrt{3}} (1-f+f\bar{z})^{3/2} + - \frac{80}{27f^2} + \frac{8}{f\sqrt{3}} \sqrt{1-f} (1-\bar{z}) , \quad (8.31)$$

voor:  $\bar{z}_v \leq \bar{z} \leq 1$

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{z}) = & \left[ f - \frac{4}{f} + \frac{8}{f\sqrt{3}} \sqrt{1-f} \right] + \left[ -3f + \frac{4}{f} - \frac{8}{f\sqrt{3}} \sqrt{1-f} \right] \bar{z} + \\ & + 3f\bar{z}^2 - f\bar{z}^3 . \end{aligned} \quad (8.32)$$

Bij bezwijken, dat wil zeggen bij  $f = 1$ , is

$$\bar{v}(\bar{z}) = \frac{16}{3\sqrt{3}} \bar{z}^{3/2} - \frac{80}{27}, \quad 0 \leq \bar{z} \leq \frac{1}{3}, \quad (8.33)$$

$$\bar{v}(\bar{z}) = -3 + \bar{z} + 3\bar{z}^2 - \bar{z}^3, \quad \frac{1}{3} \leq \bar{z} \leq 1 .$$

De maximale doorzakking, voor  $\bar{z} = 0$ , is dan

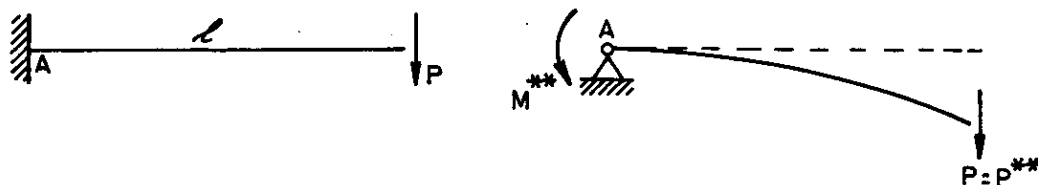
$$\bar{v}(0) = -\frac{80}{27}, \quad \text{of } v(0) = -\frac{40}{27} \frac{\sigma_o \ell^2}{Eh} . \quad (8.34)$$

### VIII. 2. Bezwijkanalyse (limit analysis)

We zullen hier het volgende probleem behandelen: gegeven een bepaalde constructie onder een zekere belasting; gevraagd de grootte van de belasting waaronder de constructie bezwijkt.

We zullen hier volstaan met een paar eenvoudige voorbeelden. Voor toepassingen op meer ingewikkelde constructies zie [1], H 1,2 en 3, en [2], H 8.

Als eerste voorbeeld bekijken we een ingeklemde balk belast door een dwarskracht.

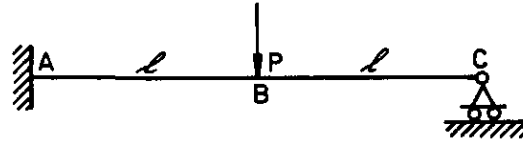


We weten uit de vorige paragraaf dat bezwijken optreedt als

$$P = P^{**} = \frac{M^{**}}{\ell} . \quad (8.35)$$

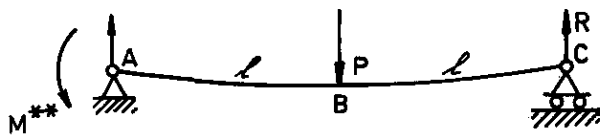
We nemen nu aan dat op dit moment de inklemming een scharnier wordt met een constant moment  $M^{**}$ . We spreken hier over een "plastisch scharnier" in A. Als dan  $P > P^{**}$  wordt zal de balk gaan draaien om het punt A. De balk kan dus nooit een last groter dan  $P^{**}$  dragen.

Als tweede voorbeeld bekijken we de volgende eenvoudig statisch onbepaalde constructie.

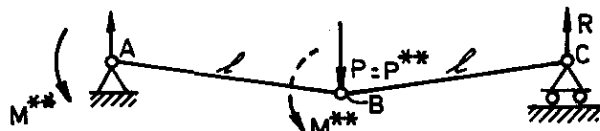


We gaan P groter laten worden. Op zeker moment zal dan het moment in A de waarde  $M^{**}$  bereiken.

We krijgen dan de volgende constructie



De constructie is nu statisch bepaald. We laten P nog meer aangroeien tot dat het moment in B de waarde  $M^{**}$  bereikt. We hebben dan



De constructie heeft nu één graad van vrijheid en kan dus doorzakken. De bezwijkkracht  $P^{**}$  kunnen we bepalen uit de volgende vergelijkingen

$$M_B = Rl = M^{**},$$

en

$$M_A = 2Rl - P^{**}l = -M^{**}.$$

(8.36)

Hieruit volgt

$$P^{**} = \frac{3M^{**}}{l} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_o b h^2}{l}.$$

(8.37)

Bij meer ingewikkelde constructies zijn er meestal verschillende mogelijkheden om plastische scharnieren aan te brengen, welke leiden tot verschillende bezwijkwaarden. De echte bezwijkwaarde is dan natuurlijk de kleinste van deze waarden (zie hiervoor [1] en [2]).

### VIII. 3. Vloeistop (shake down)

Onder vloeistop verstaan we het verschijnsel, dat een balk welke eerst plastisch is belast, daarna ontlast en dan opnieuw wordt belast, gaat vloeien bij een groter buigend moment dan het grensmoment  $M^*$ .

We zullen dit toelichten aan het voorbeeld van de opgelegde balk belast door een puntlast uit VIII. 1.

Volgens verg. (8.19) geldt voor het moment in het elasto-plastische gebied

$$M = \sigma_o b h^2 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \zeta^2 \right], \quad (0 < \zeta \leq \frac{1}{2}). \quad (8.37)$$

We zullen, als een voorbeeld, de balk belasten tot  $\zeta = \frac{1}{4}$ . Het moment is dan

$$M = \frac{11}{48} \sigma_o b h^2. \quad (8.38)$$

We gaan nu de balk ontlasten. We doen dit door de superpositie van een buigend moment gelijk aan

$$- \frac{11}{48} \sigma_o b h^2.$$

We nemen aan dat dit ontlasten niet opnieuw vloeien geeft. De extra normaalspanning ten gevolge van het ontlasten moet dan evenredig zijn met  $y$  (want behoort bij een elastische toestand)

$$\tilde{t}_{zz} = p y, \quad (8.39)$$

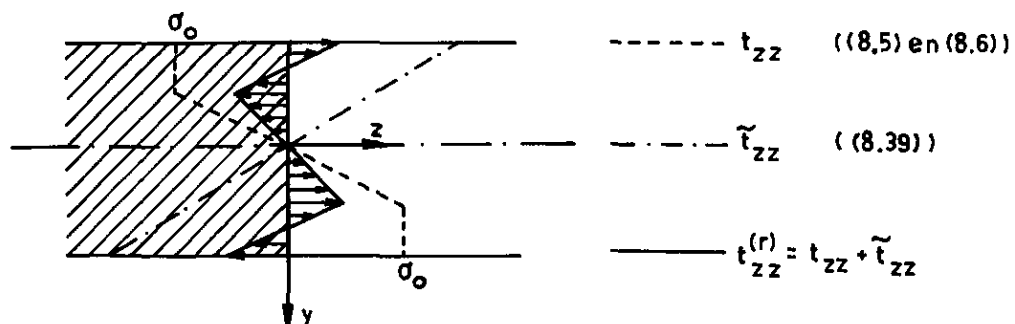
Hierbij moet  $p$  zodanig zijn dat

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{t}_{zz} y dy = b \int_{-h/2}^{h/2} p y^2 dy = - \frac{11}{48} \sigma_o b h^2, \quad (8.40)$$

waaruit volgt

$$p = - \frac{11 \sigma_o}{4h}.$$

De totale normaalspanning  $t_{zz}^{(r)}$  is dan gelijk aan de som van de oorspronkelijke spanning  $t_{zz}$  volgens (8.5) en (8.6) en de extra spanning ten gevolge van het ontlasten:  $\tilde{t}_{zz}$ . We krijgen de volgende spanningsverdeling



We zien hieruit dat er ook in de onbelaste toestand nog een normaalspanning is. We noemen dit de residu-spanning. Aangezien we verondersteld hadden dat er bij het ontlasten geen vloeien optreedt, moet  $|t_{zz}^{(r)}|$  overal kleiner dan  $\sigma_0$  zijn. De residu-spanning is in evenwicht met een nulbelasting.

We gaan nu de staaf opnieuw belasten en we gaan kijken wanneer er weer vloeien optreedt.

Zolang de balk elastisch is, geldt

$$t_{zz}^{(1)} = q y, \quad (8.41)$$

waarin  $q > 0$  is, omdat het moment nu weer positief is. De spanning ( $t_{zz}^{(r)}$  plus  $t_{zz}^{(1)}$ ) is dan maximaal voor  $z = \frac{1}{4} h$ . Op deze plaats zal voor het eerst vloeien optreden. Dit geeft de volgende betrekking voor  $q$

$$q \frac{h}{4} + \frac{\sigma_0}{h} \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{5}{4} = \sigma_0, \quad (8.42)$$

waaruit volgt

$$q = \frac{11\sigma_0}{4h}. \quad (8.43)$$

Voor het nieuwe grensmoment krijgen we hiermee

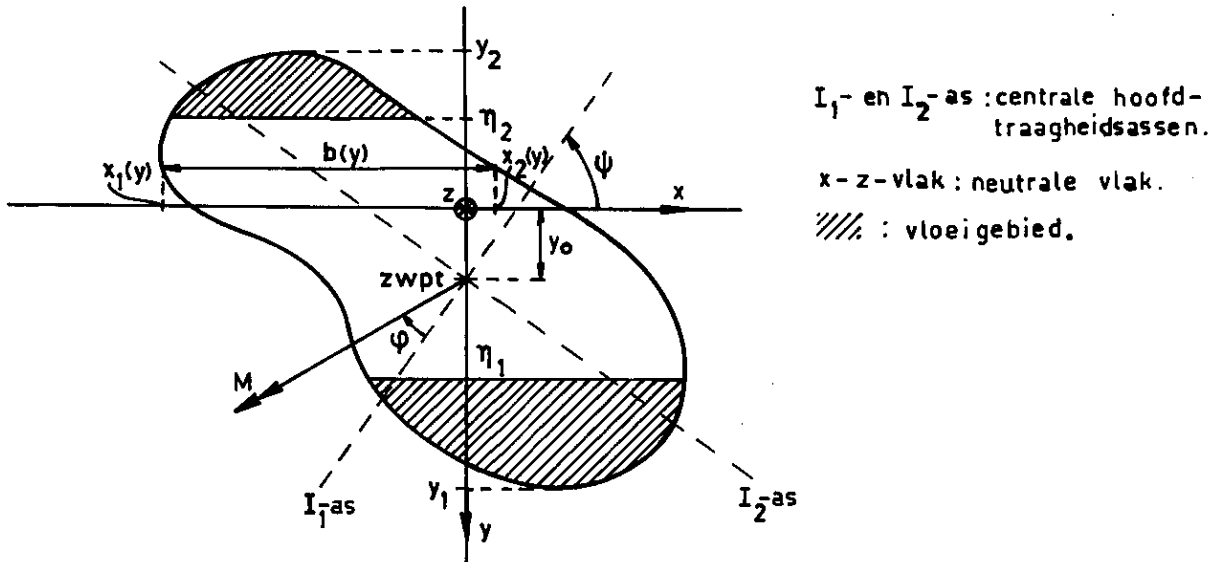
$$M_1^* = b \int_{-h/2}^{h/2} q y^2 dy = \frac{11}{48} b h^2 \sigma_0. \quad (8.44)$$

Dit moment is groter dan het grensmoment volgens verg. (8.3). We concluderen hieruit dat we de vloeigrens van een balk kunnen verhogen door de balk eerst plastisch te belasten en hem daarna te ontlasten.

#### VIII. 4. Plastische vervorming bij scheve buiging

We beschouwen een balk met een willekeurige doorsnede, welke wordt belast door een buigend moment dat niet langs één van de hoofdtraagheidsassen van de doorsnede valt. In dit geval hoeven het vlak van de buiging en het vlak van moment niet samen te vallen. Als er bovendien plastische vloeien optreedt hoeft het vloeigebied aan de bovenkant en aan de onderkant van de balk niet gelijk te zijn, wat tot gevolg heeft dat de neutrale lijn niet meer door het zwaartepunt gaat. Als we aannemen, dat de grens

van het vloeigebied evenwijdig is met het neutrale vlak dan krijgen we de volgende situatie in een doorsnede



In bovenstaande figuur zijn de  $I_1$ - en  $I_2$ -as en  $M$  en  $\phi$  gegeven grootheden, terwijl  $\psi$ ,  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\eta_1$  en  $\eta_2$  onbekenden zijn.

Uit de Bernoulli-hypothese: vlakke doorsneden blijven vlak, volgt (zie (1.31))

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon(y)}{y} = \frac{\epsilon_1}{y_1} = \frac{\epsilon_2}{y_2} = \frac{\epsilon_{p1}}{\eta_1} = \frac{\epsilon_{p2}}{\eta_2}, \quad (8.45)$$

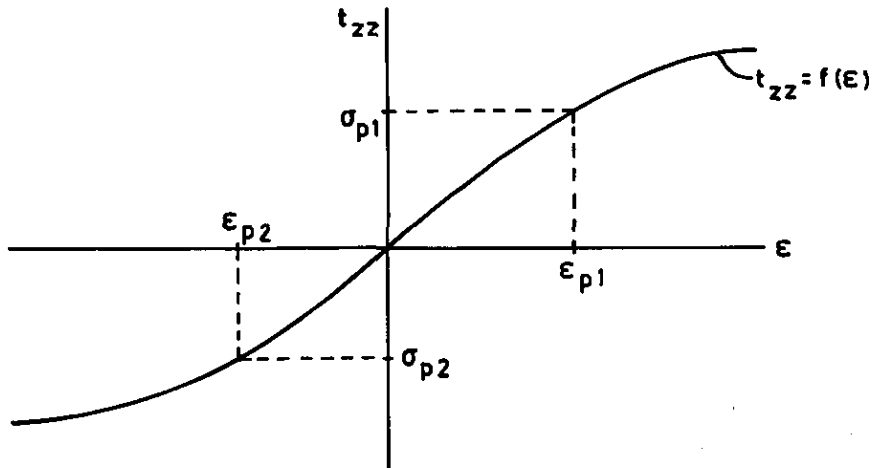
waarin

$$\begin{aligned} \epsilon(y) &:= \epsilon_{zz}(y), \quad \epsilon_1 := \epsilon(y_1), \quad \epsilon_2 := \epsilon(y_2), \\ \epsilon_{p1} &:= \epsilon(\eta_1), \quad \epsilon_{p2} := \epsilon(\eta_2). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Als we toelaten dat er in de doorsnede behalve een moment ook nog een normaalkracht, aangrijpend in het zwaartepunt, kan werken, dan geldt

$$\begin{aligned} N &= \int_S t_{zz} \, dS, \\ M_x + N y_0 &= \int_S y t_{zz} \, dS, \\ M_y &= - \int_S x t_{zz} \, dS. \end{aligned} \quad (8.47)$$

We nemen een materiaal met de volgende karakteristiek



Hieruit volgen  $\epsilon_{p1}$  en  $\epsilon_{p2}$ , waarna we met (8.45)<sup>4,5</sup>  $\eta_1$  en  $\eta_2$  als functie van  $R$  kunnen bepalen.

Bij een gegeven doorsnede kunnen we altijd  $y_1$  en  $y_2$  als functie van  $y_0$  en  $\psi$  bepalen. Uit (8.45)<sup>2,3</sup> volgen dan  $\epsilon_1$  en  $\epsilon_2$  als functie van  $R$ ,  $y_0$  en  $\psi$ . We houden dus drie onbekenden over  $(R, y_0, \psi)$ , welke we kunnen bepalen uit (8.47).

Hiertoe schrijven we

$$y = \epsilon R,$$

waarmee het oppervlakte-element  $dS$  wordt

$$dS = b(y; y_0, \psi) dy = b(\epsilon R; y_0, \psi) R d\epsilon. \quad (8.48)$$

Stellen we verder:  $t_{zz} = f(\epsilon)$ ,  $f(\epsilon)$ : bekend, dan gaat (8.47) over in

$$N = R \int_{y_1}^{y_2} f(\epsilon) b(\epsilon R; y_0, \psi) d\epsilon, \quad (8.49)$$

$$-M \cos(\psi - \varphi) + N y_0 = R^2 \int_{y_1}^{y_2} \epsilon f(\epsilon) b(\epsilon R; y_0, \psi) d\epsilon, \quad (8.50)$$

$$M \sin(\psi - \varphi) = -R \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \int_{x_1(\epsilon R)}^{x_2(\epsilon R)} f(\epsilon R; y_0, \psi) x dx \right\} d\epsilon. \quad (8.51)$$



Uit deze drie vergelijkingen zijn  $R$ ,  $y_0$  en  $\psi$  bij gegeven  $M$  en  $N$  te bepalen, waarmee het probleem in principe is opgelost. Voor toepassingen op balken met bijvoorbeeld een trapeziumvormige doorsnede zij verwezen naar [2], H 6.

### VIII. 5. Plastische golven

We beschouwen als een voorbeeld een balk belast door een dwarskracht  $Q(z,t)$ , waarvoor geldt

$$Q(z,t) = \frac{\partial M(z,t)}{\partial z} . \quad (8.52)$$

De bewegingsvergelijking luidt in dit geval (zie (4.12))

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} . \quad (8.53)$$

We nemen aan dat  $M(z,t)$  een functie is van  $\kappa$ :

$$M = \mu(\kappa) , \quad (8.54)$$

waarbij  $\kappa$  de kromming is

$$\kappa = - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} . \quad (8.55)$$

Hiermee gaat (8.53) over in

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d\mu}{d\kappa} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right) = \frac{-d\mu}{d\kappa} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{d^2\mu}{d\kappa^2} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right)^2 = - \frac{d\mu}{d\kappa} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} . \quad (8.56)$$

waarbij de laatste term weggelaten is, omdat we in een lineaire theorie alle kwadratische termen moeten verwaarlozen. We krijgen de volgende bewegingsvergelijking

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{d\mu}{d\kappa} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} . \quad (8.57)$$

Deze vergelijking is in zijn algemeenheid moeilijk oplosbaar, omdat

- i) de coëfficiënt  $\frac{d\mu}{d\kappa}$  nog een functie van  $\kappa$  kan zijn, zodat de vergelijking dan niet-lineair is, en omdat
- ii) de coëfficiënt  $\frac{d\mu}{d\kappa}$  verschilt bij belasten en ontlasten (bij plastische vloeï).

We zullen daarom niet trachten om (8.57) in zijn algemeenheid op te lossen, maar we zullen alleen een bijzondere oplossing zoeken.

Voor het elastische probleem van een oneindig lange balk belast door een stoot loodrecht op de balk is bekend dat  $v/t$  alleen een functie is van (zie [3]).

$$\eta := \frac{1}{4a^2} \frac{z^2}{t}, \quad a^2 := \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (8.58)$$

We nemen aan dat dit ook geldig blijft in het elasto-plastische geval en zoeken daarom oplossingen van de vorm

$$v(z,t) = t f(\eta). \quad (8.59)$$

Voor de overgang van de variabelen  $(x_1, x_2) := z, t$  op  $(\xi_1, \xi_2) := \eta, t$  geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{z}{2a^2 t} \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 = \frac{\sqrt{\eta}}{a\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (8.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z^2}{4a^2 t^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\eta}{t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Hiermee wordt

$$\kappa = -\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = \frac{-1}{2a^2} [f'(\eta) + 2\eta f''(\eta)], \quad (8.61)$$

en

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\eta^2}{t} f''(\eta). \quad (8.62)$$

Uit (8.61) volgt dat de kromming  $\kappa$ , en dus volgens (8.54) ook het moment  $M$ , alleen een functie is van  $\eta$ . Voor de dwarskracht  $Q$  geldt

$$Q = \frac{\partial M(z,t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{\eta}}{a\sqrt{t}} \frac{dM(\eta)}{d\eta}. \quad (8.63)$$

Omdat we willen werken met functies van alleen  $\eta$  voeren we in

$$\hat{Q} = \hat{Q}(\eta) := \frac{2a^3\sqrt{t}}{EI} Q = \frac{2a^2\sqrt{\eta}}{EI} \frac{dM}{d\eta}. \quad (8.64)$$

Substitutie van (8.62) en (8.64) in (8.53) geeft

$$\rho S \frac{\eta^2}{t} f''(\eta) = \frac{\sqrt{\eta}}{a\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ -\frac{EI}{2a^3\sqrt{t}} \hat{Q} \right] = \frac{EI}{2a^4 t} \sqrt{\eta} \hat{Q},$$

of, met (8.61)

$$\hat{Q}' = 2\eta \sqrt{\eta} f''(\eta) = -\sqrt{\eta} [2a^2 \kappa + f'(\eta)]. \quad (8.65)$$

Differentiatie van (8.65) geeft met

$$\frac{d\kappa}{d\eta} = \frac{d\kappa}{dM} \frac{dM}{d\eta} = \frac{d\kappa}{dM} \frac{EI}{2a^2\sqrt{\eta}} \hat{Q}, \quad (8.66)$$

en (8.61)

$$\hat{Q}'' + EI \frac{d\kappa}{dM} \hat{Q} = 0. \quad (8.67)$$

Iedere oplossing van (8.67) met

$$\hat{Q}'(\eta=0) = 0, \quad (8.68)$$

is een oplossing van (8.65). Iedere andere grootheid kan worden geschreven als een integraal van  $\hat{Q}(\eta)$ . De bovengrens van deze integralen moet gelijk aan  $\infty$  worden genomen, omdat voor  $z = \infty$  het buigend moment, de kromming, de verplaatsing en de afgeleide van de verplaatsing naar  $z$  gelijk aan nul zijn. We krijgen dan

$$M(\eta) = -\frac{EI}{2a^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\hat{Q}(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \quad (8.69)$$

$$\kappa(\eta) = \frac{1}{2a^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\hat{Q}''(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta, \quad (8.70)$$

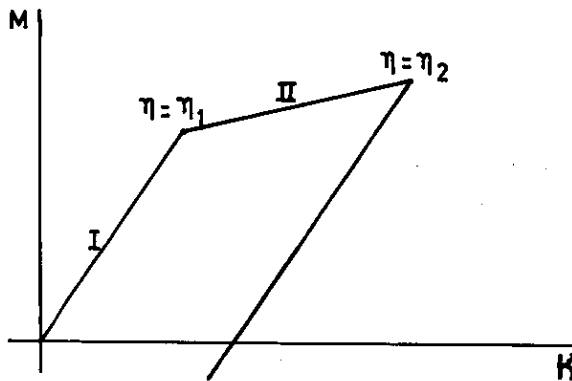
$$v(z,t) = \frac{t}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\hat{Q}'(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta - \frac{\eta t}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{\hat{Q}'(\zeta)}{\zeta\sqrt{\zeta}} d\zeta. \quad (8.71)$$

Uit (8.71) volgt dat de snelheid op  $z = 0$  (of  $\eta = 0$ ) constant is voor alle  $t$  en wel gelijk aan

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} =: v_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\hat{Q}'(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta, \quad (8.72)$$

dat  $\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = 0$ , voor  $z = 0$  en voor alle  $t$ , en dat  $v(z,t) = \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = 0$ , voor  $t = 0$  en voor alle  $z > 0$ . Onder deze voorwaarden zal dus een oplossing van de vorm (8.59) optreden.

Verg. (8.67) is voor willekeurige  $\frac{d\kappa}{dM}$  moeilijk op te lossen. Alleen bij een moment-krommings-kromme bestaande uit twee rechte lijnen kunnen we hem eenvoudig oplossen.



In het elastische gebied (deel I van de kromme) geldt

$$\frac{d\kappa}{dM} = \frac{1}{EI}, \quad (8.73)$$

zodat dan de oplossing van (8.67) met (8.68) luidt

$$\hat{Q} = A \cos \eta. \quad (8.74)$$

Nemen we aan dat in het plastische gebied geldt

$$\frac{d\kappa}{dM} = \frac{1}{EI} \alpha^2, \quad (\alpha = \text{constant}), \quad (8.75)$$

dan geldt in dit gebied de oplossing

$$\hat{Q} = B \cos (\alpha \eta + \epsilon), \quad (8.76)$$

waarbij we  $B$  en  $\epsilon$  bepalen uit de voorwaarde dat  $\hat{Q}$  en  $\hat{Q}'$  continu moeten zijn voor  $\eta = \eta_1$ .

Bovenstaande oplossing is gevonden door Bohnenblust ([3]).

Voor meer literatuur over plastische golven, zie [4] en [5].

Literatuur

- [1] Hodge, Plastic analysis of structures
- [2] Reckling, Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme
- [3] Duwez, Clark & Bohnenblust, Journal of Appl. Mech. 17 (1950), pp.27-34
- [4] Sneddon & Hill, Progress in solid mechanics, vol. II, H IV,  
Plastic Waves, door J.W.Craggs
- [5] Cristescu, Dynamical plasticity.