TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

KLASSIEKE THERMODYNAMICA

bij het College van

Prof. Dr. J.B. Alblas

Voorjaarssemester 1980

Verzorgd door

Ir. L.S. Fischer en Dr.ir. A.A.F. van de Ven

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagtstukken

behorende bij het college grondslagen van de

Klassieke Thermodynamica

Onderdeel van Fysica 40
van prof. dr. J.B. Alblas
verzorgd door
ir. L.S. Fischer en dr.ir. A.A.F. v.d. Ven

Dictaatnr. 2.251 Prijs f 4,--

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij Klassieke Thermodynamica

JdG, 29 Juni 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN

behorende bij het college grondslagen van de

KLASSIEKE THERMODYNAMICA

Onderdeel van Fysica 40

van Prof. Dr. J.B. Alblas

verzorgd door

Ir.L.S. Fischer en Dr.Ir. A.A.F. v.d. Ven

Voorjaarssemster 1980

Feb. 80

1. ARBEID, ENERGIE, WARMTE, EERSTE HOOFDWET.

1.1. Een dunwandige metalen cylinder met volume V_c bevat een gas onder hoge druk. Aan de cylinder is een nauwe leiding met een plugkraan aangesloten. Door de plugkraan heel weinig te openen lekt het gas via leiding en plugkraan heel traag in een andere cylinder, eveneens aangesloten aan de nauwe leiding met plugkraan. Deze tweede cylinder is afgesloten met een niet lekkende, wrijvingsloos glijdende zuiger. Door de trage uitstroming verloopt het proces in voortdurend temperatuur evenwicht met de omgeving. Bovendien is de druk in de tweede cylinder steeds gelijk aan de atmosferische druk p_0 welke we constant stellen.

a. Laat zien, dat na uitstroming van de maximaal mogelijke hoeveelheid gas uit de eerste cylinder een hoeveelheid arbeid door de zuiger op de omgeving is verricht, welke bedraagt:

$$A = p_0(V_0 - V_c)$$

V_0 is het volume van het gas bij atmosferische druk en temperatuur.

b. Hoeveel arbeid wordt er verricht indien het gas direct in de atmosfeer uitstroomt ?

1.2. Een vat bevat n grammoleculen gas onder een druk p. Door een kleine opening laat men dit gas langzaam uitstromen in een omgeving met een constante druk p_0. Als het volume van het vat V en het molaire volume van het gas (bij een druk p_0) V_m bedraagt, hoe groot is dan de bij de uitstroming verrichte arbeid ?

1.3. De toestandsvergelijking voor 1 mol ideaal gas luidt:

$$pV_m = R_m T$$

R_m = molaire gasconstante = 8.314 J/mol-K .

a) Leid een betrekking af voor de door het gas verrichte arbeid bij omkeerbare isotherme expansie tot het dubbele volume:

b) Bereken deze arbeid, als de temperatuur 0°C is.

1.4. Bereken de verrichte arbeid per mol gas gedurende een quasi-statische, isotherme expasie van een aanvankelijk volume V_{m1} tot het uiteindelijke volume V_{m2}, indien de toestandsvergelijking luidt:

a. $p(V_m - b) = R_m T$ (R_m, b zijn constanten)

b. $$p\,V_m = R_m T\left(1 - \frac{B}{V_m}\right) \quad (R_m = \text{constant} \; ; \; B = B(T))$$

1.5. Voor een van de Waals-gas luidt de toestandsvergelijking :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

a,b en R zijn constanten, m = 1 kg .

Gevraagd een uitdrukking voor de verrichte arbeid bij omkeerbare isotherme expansie van V_1 tot V_2 .

1.6. Bewijs, dat een omkeerbaar kringproces bij constante druk geldt:

$$\oint \delta Q = 0$$

1.7. Een gas stroomt langzaam door een poreuse prop in een tegen warmteuitwisseling met de omgeving beschutte bus. Aan de ene kant van de prop heerst een druk p_1, aan de andere kant een lagere druk p_2; beide drukken mogen constant gedacht worden. Bewijs dat bij dit proces de enthalpie van het gas voor en achter de prop even groot blijft.

1.8. Een verticale geisoleerde cylinder is gevuld met m kg ideaal gas met constante c_V.

De cylinder is afgesloten door een wrijvingsloos beweegbare zuiger, zodat de druk in de cylinder steeds p_0 blijft.

Het gas neemt oorspronkelijk een volume V_o in. Aan het gas wordt quasistatische warmte toegevoerd totdat het volume V_1 is geworden ($V_1 > V_0$).

Bereken de toegevoerde warmte en de eindtemperatuur van het gas.

1.9. De soortelijke warmte van een gas bij constante druk varieert met de temperatuur volgens de vergelijking

$$c_p = i + jT - \frac{k}{T^2}$$

waarbij i,j en k constanten zijn.

Hoeveel warmte wordt er overgedragen tijdens een isobaar proces waarbij m kg gas in temperatuur stijgen van T_0 tot T_i ?

1.10. Bewijs de betrekking :

$$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right\}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0$$

1.11. Bewijs de volgende betrekking :

$$C_p - C_V = \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

1.12. Bewijs door uit te gaan van U = U(p,V) dat

$$dU = C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left\{C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p\right\} dV .$$

Bewijs met dit resultaat de volgende betrekking:

$$\left[\frac{\partial}{\partial V}\left\{C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\right\}\right]_p = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left\{C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p\right\}\right]_V .$$

1.13. Een kg gas voldoet aan de toestandsvergelijking

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT .$$

De inwendige energie wordt gegeven door

$$U = eT - \frac{a}{V} ;$$

a,b,e en R zijn hier constanten.

Bereken de soortelijke warmtes c_V en c_p .

1.14. Een dikwandig, geisoleerd, metalen vat bevat m_1 kg helium onder hoge druk p_1. Dit vat is door middel van een leiding met een afsluiter verbonden met een grote, nagenoeg lege gashouder . In deze gashouder is de druk constant op de waarde p' (bijna atmosferisch). De afsluiter wordt iets geopend waarna het heliumgas traag en adiabatisch in de gashouder stroomt, totdat de druk aan weerskanten van de afsluiter dezelfde is.

Bewijs dat

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{h' - u_1}{h' - u_2} \ .$$

Nadere gegevens:

m_2 = de hoeveelheid gas die in het vat achterblijft ;

u_1 = de inwendige energie, die aanvankelijk in het gas in het vat zat.(De kleine letter wordt hier gebruikt omdat we de inwendige energie per kg massa beschouwen.)

u_2 = de inwendige energie van het gas in het vat in de eindtoestand.

$h' = u' + p'v'$, met :

u' = de inwendige energie in de gashouder

v' = het volume van het gas in de gashouder eveneens per kg).

1.15. Twee ruimten, waarvan de volumina zich verhouden als 2 : 3, zijn door een nauwe leiding van te verwaarlozen volume verbonden en bevatten lucht van dezelfde temperatuur T_1 = 320 K. Tot welke temperatuur T_2 moet de lucht in het grootste vat worden afgekoeld, om de druk tot de helft te verminderen ? Geen warmtetransport via de nauwe leiding; de lucht als ideaal gas te beschouwen; de lucht in het kleinste vat blijft op temperatuur T_1 .

1.16. Twee vaten welke lucht bevatten zijn met een nauwe leiding van te verwaarlozen volume verbonden. De volumina verhouden zich als 1 : 3 .
In beide vaten is de temperatuur gelijk aan de omgevingstemperatuur T_0 .
Tot welke temperatuur moet men het grootste vat met inhoud verwarmen opdat de oorspronkelijke druk p_0 in beide vaten verdubbeld wordt. Het kleinste vat met inhoud blijft daarbij op de oorspronkelijke temperatuur T_0 gehandhaafd. De warmtegeleiding door de nauwe leiding is te verwaarlozen. Beschouw de lucht als een ideaal gas.

1.17. Een luchtledig vat met geïsoleerde wanden is door middel van een leiding met afsluiter aangesloten aan een gashouder. In de gashouder wordt de druk constant op p_0 gehouden en de temperatuur op T_0 .
De afsluiter wordt weinig geopend waardoor helium traag in het vat stroomt totdat in het vat de druk ook p_0 is geworden. Neem aan dat helium zich als een ideaal gas gedraagt met een constante γ . Bewijs dat de eindtemperatuur in het vat γT_0 is.

1.18. Toon aan dat de uitwendige arbeid, door een ideaal gas verricht tijdens een quasi-statisch adiabatisch proces van (p_1, V_1, T_1) naar (p_2, V_2, T_2), op de volgende manieren is te schrijven:

a) $$A = C_v\,(T_1 - T_2)$$

b) $$A = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

c) $$A = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

1.19.a) Laat zien dat voor de toediening van een oneindig kleinde hoeveelheid warmte aan n molen ideaal gas onder quasi statische omstandigheden de volgende betrekking geldt :

$$\delta Q = \frac{C_v}{nR_m}\,Vdp + \frac{C_p}{nR_m}\,pdV$$

Pas deze betrekking toe op een adiabatisch proces en toon daarna aan:

$$pV^{\gamma} = \text{constant} .$$

b) Een ideaal gas met volume 0.05 m^3 en druk 120 N/m^2 expandeert quasi-statisch tot 15 N/m^2.
Neem daarbij aan dat γ constant op de waarde 1.4 blijft.
Wat is het eindvolume en hoeveel arbeid is er verricht?

1.20. Leid voor een quasi statisch adiabatisch proces van een ideaal gas de volgende betrekking af :

$$TV^{\gamma-1} = \text{constant}$$

Veronderstel hierbij γ = constant.

b) Ongeveer 100 milli seconden na de detonatie van een kern-fusie-bom bestaat de z.g. "vuurbol" uit een bolvormig gas-volume met een straal van 50 ft (ca.17 m). De temperatuur is dan 300.000 K.
Maak een ruwe schatting van de afstand van het centrum waar de temperatuur 3000 K bedraagt.

1.21.a) Leid de volgende betrekking af voor de quasi statische adiabatische verandering van een ideaal gas.

$$\frac{T}{p^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}} = \text{constant}$$

b) Helium ($\gamma = \frac{5}{3}$) op 300 K en bij 1 atm.druk wordt quasi statisch adiabatisch gecomprimeerd tot 5 atm.
Neem aan dat helium zich gedraagt als een ideaal gas. Wat is de eindtemperatuur ?

1.22. Een horizontale thermisch geisoleerde en gesloten cylinder wordt door een niet lekkende zuiger die zonder wrijving kan bewegen in twee compartimenten verdeeld. De zuiger is niet warmte-geleidend.
De ruimten ter weerszijden van de zuiger bevatten elk 54 liters van hetzelfde ideale gas, bij een druk van 1 atm. en een temperatuur van 273 K.
Er wordt langzaam warmte toegediend aan het gas in het linkercompartiment totdat het gas in het rechtercompartiment de druk van 7.59 atm. heeft bereikt.

a) Hoeveel arbeid is verricht op het gas in het rechtercompartiment?

b) Wat is de eindtemperatuur rechts ?

c) Wat is de eindtemperatuur links ?

d) Hoeveel warmte is er toegediend ?

Extra gegevens: $C_v = \frac{3}{2} R$, $C_p = \frac{5}{2} R$.

1.23. Een dikwandige, geisoleerde ruimte bevat n_1 molen helium bij een druk p_1 .
De ruimte is met een afsluitbare nauwe leiding verbonden met een grote, practisch lege gashouder, waarbinnen de druk wordt gehandhaafd op de constante waarde p_0 (nagenoeg atmosferisch). De warmtegeleiding door de leiding mag worden verwaarloosd.
De afsluiter wordt weinig geopend, waardoor het heliumgas uiterst traag adiabatisch in de gashouder stroomt tot de drukken ter weerszijden van de klep gelijk zijn. Neem aan dat helium een ideaal gas is met constante C_p- en C_v waarden.
Toon aan dat

a) De eindtemperatuur T_2 in de ruimte wordt:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

b) Het aantal molen helium (n_2), in de ruimte achtergebleven, wordt gegeven door

$$n_2 = n_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

c) De eindtemperatuur T' van het gas in de gashouder is

$$T' = \frac{T_1}{\gamma} \frac{1 - p_0/p_1}{1 - (p_0/p_1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Hint: zie opgave 1.14).

2. ENTROPIE. TWEEDE HOOFDWET

2.1. Tweede hoofdwet voor reversibele processen.

2.1.1. a) Toon, voor een ideaal gas met constante c_p en c_v, aan dat de entropie gelijk is aan

$$S = C_v \ln p + C_v \ln V + \text{constante}.$$

b) Bewijs dat voor een incompressibele, ideale vloeistof geldt

i) $C_p = C_v = C$

ii) $S = C \ln T + \text{constante}$

Hierbij is C constant verondersteld.

2.1.2. Leid af van welke aard de kromme is, die in het TS-diagram voor een ideaal gas afbeeldt:

a) een isochore; b) een isobare toestandsverandering. Bewijs dat bij gelijke temperaturen 2 isochoren gelijke richtingscoëfficiënten bezitten en dat hetzelfde geldt voor 2 isobaren. Onderzoek welke van de 2 krommen het steilst moet verlopen.

2.1.3. Men verwarmt 1 kg ideaal gas bij constante druk van 0° tot 100°C.

a) Hoeveel J hebben gediend voor uitwendige arbeid en met welk bedrag is de entropie van het gas vermeerderd?
Het gas zet vervolgens isentropisch uit tot zijn temperatuur weer 0° is geworden.

b) Bereken de hierbij verrichte arbeid en de entropieverandering.
Daarop wordt het gas isotherm in zijn oorspronkelijke toestand teruggebracht.

c) Hoeveel arbeid is daarvoor nodig ?
Alle veranderingen geschieden omkeerbaar.
Gegeven: $c_p = 1{,}001$; $c_v = 0{,}72$ kJ/kg.K.

2.1.4. In een cylinder bevindt 1 kg ideaal gas in een toestand, bepaald door p, V en T. Men laat het gas achtereenvolgens de 4 volgende toestandsveranderingen omkeerbaar doorlopen:

a) uitzetting bij p constant tot een volume 2V;
b) afstand bij constant volume tot de temperatuur weer T bedraagt;
c) afkoeling bij constante druk tot het volume V bedraagt;
d) verwarming bij constant volume tot in de begintoestand.

Gevraagd:

i) de arbeid, die door het gas bij deze kringloop is verricht,

ii) bij elk der 4 toestandsveranderingen de verandering van de inwendige energie;

iii) de verandering van de entropie bij elk der toestandsveranderingen.

2.1.5. Een hoeveelheid warmte Q stroomt van een warmtereservoir op constante temperatuur T_1 naar een ander warmtereservoir op een constante, lagere temperatuur T_2 $(T_2 < T_1)$.
Bepaal de totale entropieverandering.

2.1.6. Een cylinder met zuiger bevat een 1 kg ideaal gas.
Het gas wordt isotherm samengedrukt bij T_0 van p_0 tot p_1. De samendrukking geschiedt mechanisch reversibel.
Neem $T_0 = 127^oC$, $p_0 = 1$ atm., $p_1 = 10$ atm. en, voor 1 kg ideaal gas:
$R = 8,31 * 10^3 J/K$.

i) De omgeving van de cylinder is eveneens op de, constante, temperatuur $T_0 = 127^oC$.
Bereken de entropieverandering van het gas, van de omgeving en de totale entropieverandering. Laat zien dat dit proces volledig (dus mechanisch ên thermisch) reversibel is.

ii) De omgeving is op een andere, constante temperatuur $T_1 (T_1 \neq T_0)$. Neem $T_1 = 27^oC$.
Bereken opnieuw de entropieveranderingen en laat zien dat het proces nu <u>niet</u> volledig reversibel is.

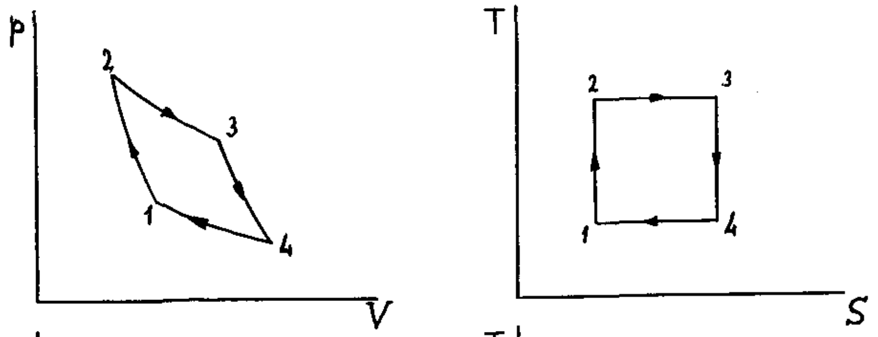
Waarom kan dit proces <u>niet</u> (althans niet zonder extra voorzieningen) worden uitgevoerd als de omgevingstemperatuur T_1 hoger zou zijn dan de gastemperatuur T_0.

2.1.7. Beschouw een ideaal gas met constante c_p en c_v.

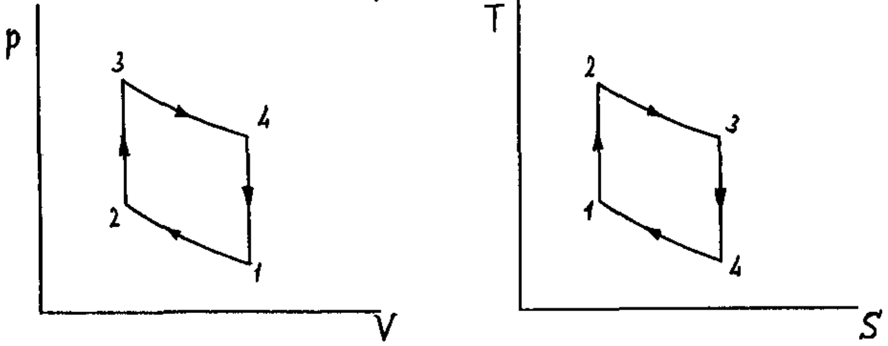
i) De temperatuur van het gas wordt verhoogd van T_1 tot T_2. Bewijs dat de entropieverandering bij een isobaar proces groter is dan bij een isochoor proces.

ii) De druk van het gas wordt verhoogd van p_1 tot p_2. Bewijs dat de entropieverandering bij een isotherm proces en die bij een isochoor proces tegengesteld teken hebben en bepaal de verhouding tussen die twee veranderingen.

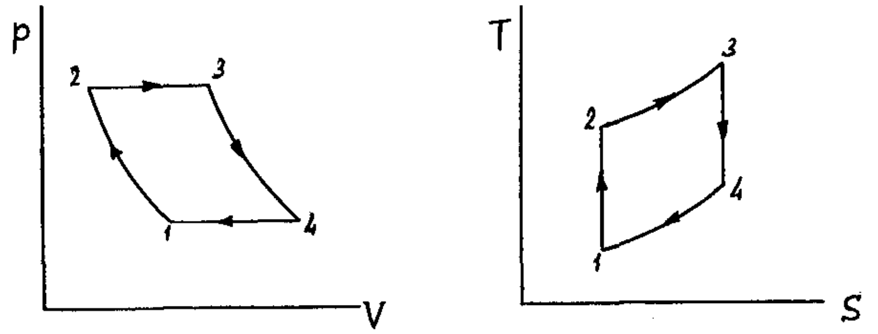
2.1.8. a)



b)



c)



Bovenstaande diagrammen stellen drie kringprocessen voor, waarin steeds de takken 1 → 2 en 3 → 4 adiabaten (isentropen) zijn. Ga na of de TS-diagrammen steeds corresponderen met de pV-diagrammen en teken, indien dit niet het geval is, het goede TS-diagram. Het medium is een ideaal gas.

2.1.9. Een horizontale, geisoleerde cylinder is door een, eveneens geisoleerde, zuiger in twee gelijke delen verdeeld. De zuiger zit oorspronkelijk vast. De linkerhelft is gevuld met 1 kg van een ideaal gas met constante c_v en c_p en met een druk p_0 , een volume V_0 en een temperatuur T_0. De rechterhelft is vacuum. Er vinden nu twee processen plaats:

1^o) De zuiger wordt vrijgelaten en beweegt plotseling zonder wrijving naar rechts. Er stelt zich dan een nieuwe evenwichtstoestand in:

$$\{E_1 = p_1, T_1, V_1\} .$$

2^o) De zuiger wordt zeer langzaam naar links geduwd, totdat hij zijn oorspronkelijke positie weer heeft ingenomen. Het gas bevindt zich dan in de evenwichtstoestand :

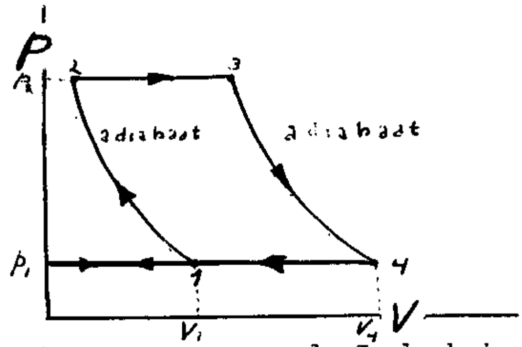
$$\{E_2 = p_2, T_2, V_2 = V_0\} \ .$$

Gevraagd, voor $\gamma = 1,4$ en uitgedrukt in p_0, V_0 en T_0,

i) T_1;
ii) T_2;
iii) p_2;
iv) De bij het proces van E_1 naar E_2 op het gas verrichte arbeid;
v) De entropieveranderingen bij elk proces en de totale entropieverandering (van E_0 naar E_2).

2.2. Kringlopen, Rendement.

2.2.1.



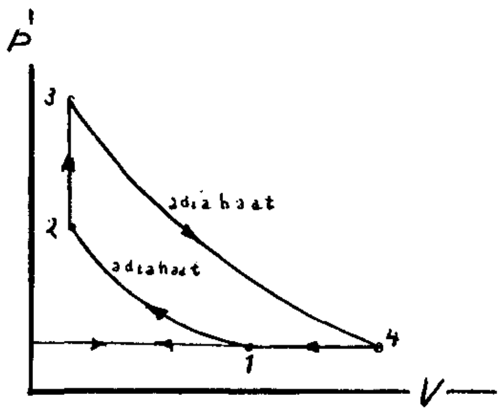
Bovenstaande figuur is de weergave voor de Joule-kringloop voor een ideaal gas in het p-V-vlak. Alle deelprocessen zijn quasi-statisch en de warmtecapaciteiten zijn constant.

i) Bereken voor elk deelproces de verrichte arbeid en de toegevoerde warmte.
Druk de resultaten uit in p_1, p_2, V_1, V_4 en γ .

ii) Bewijs dat het rendement van een machine die deze cyclus doorloopt gelijk is aan

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)\gamma}$$

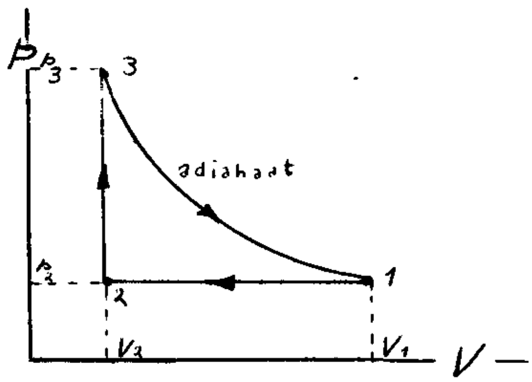
2.2.2.



Bovenstaande figuur is de vereenvoudigde weergave van de Sargent-cyclus voor een ideaal gas. Alle deelprocessen zijn quasi-statisch en de warmtecapaciteiten zijn constant.
Bewijs dat het rendement van de machine die zo'n cyclus doorloopt gelijk is aan

$$\eta = 1 - \gamma\frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

2.2.3.



In de figuur zien we een denkbeeldige,reversibele cyclus voor een machine, die als werkzaam medium een ideaal gas met constante warmtecapaciteiten heeft. Leidt af dat voor het rendement geldt:

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(p_3/p_2) - 1}$$

2.2.4. Een ideaal-gas machine werkt volgens een reversibele cyclus welke in de pV-ruimte een rechthoek is. Noem de laagste druk p_1, de hoogste p_2 en noem het laagste volume V_1, het hoogste V_2.

i) Bereken de arbeid die vrij komt bij het doorlopen van één cyclus.

ii) Vermeld welke deelprocessen gepaard gaan met warmtetoevoer aan het gas en bereken de totaal toegevoerde warmte.(de warmtecapaciteiten zijn constant).

iii) Toon aan dat het rendement is:

$$\eta = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p_2/(p_2 - p_1) + V_1/(V_2 - V_1)}$$

2.2.5. Een vat bevat 600 cm^3 heliumgas op 2K en 1/36 atm. Neem als nul-referentie voor de inwendige energie deze toestand.

a) De temperatuur wordt bij constant blijvend volume op 288K gebracht. Neem aan dat helium zich als een ideaal gas gedraagt met $c_v = \frac{3}{2}$ R en $c_p = \frac{5}{2}$ R.

Hoeveel warmte wordt tijdens dit proces opgenomen en hoe groot is nu de inwendige energie van het helium? Mogen we deze energie beschouwen als opgeslagen warmte of als opgeslagen arbeid?

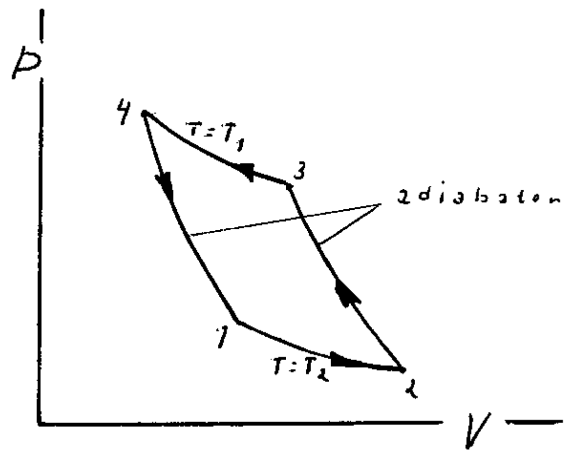
b) Het heliumgas wordt nu adiabatisch geëxpandeerd tot 2K. Hoeveel arbeid wordt hierbij verricht en hoeveel wordt de inwendige energie? Is hierbij warmte in arbeid omgezet zonder compensatie (hetgeen in strijd zou zijn met de tweede hoofdwet)?

c) Het gas wordt vervolgens isotherm gecomprimeerd tot het oorspronkelijk volume. Hoeveel bedragen de hoeveelheid warmte en arbeid bij dit proces ?

Teken de volledige cyclus zowel in een pV-diagram als in een TS-diagram. Bepaal het rendement van de cyclus.

2.2.6. In een ketelinstallatie komen per uur 2 * 10^9 J bij 300^oC beschikbaar. Hoeveel Watt zou een verliesvrije, volgens een Carnot-proces werkende machine hieruit kunnen halen, als de temperatuur van het koelwater (de omgeving) 20^oC bedraagt?

2.2.7.



a) In bovenstaand p-V-diagram is een Carnot-proces getekend, dat negatief wordt doorlopen. De takken 1 → 2 en 3 → 4 zijn isothermen (met T - T_2 en T = T_1, resp., en $T_1 > T_2$) en de takken 2 → 3 en 4 → 1 zijn adiabaten. Op deze wijze dient de Carnot-machine als koelmachine.

i) Bij welke tak(ken) wordt aan het werkmedium warmte toegevoerd en bij welke afgevoerd tijdens het doorlopen ervan ?

ii) Bereken de door het medium verrichte arbeid. Is deze positief of negatief; d.w.z. is deze door het medium op de omgeving verricht of door de omgeving op het medium?

iii) Bewijs dat de prestatie-coëfficiënt of de koeling-energie-verhouding ω dit is de verhouding tussen de warmte onttrokken aan de omgeving bij de lagere temperatuur en de aan de machine geleverde arbeid gelijk is aan

$$\omega = \frac{T_2}{T_1 - T_2} .$$

b) Door een omgeving van 20°C worden per uur $1.2 * 10^8$J afgeven aan een koelruimte met een temperatuur van -15°C. Welk theoretisch (d.w.z. volgens een Carnot-proces werkend) vermogen moet een koelmachine hebben, die voortdurend deze temperatuur van -15°C in de koelruimte moet handhaven, als ze bij 20°C warmte aan het koelwater afgeeft?

2.2.8. In een warmtereservoir (vuurhaard) wordt door verbranding een temperatuur van T = 1400K onderhouden. Een vertrek, waarvan de omgeving een temperatuur T_2 = 273K bezit, moet met behulp hiervan op 300K worden gehouden. De verwarming kan op twee manieren geschieden:

a) Door de directe overgang van de warmte;
b) Door de warmtebron te laten fungeren als reservoir van de hoogste temperatuur voor een machine, waarin een kringloop van Carnot in positieve zin wordt volbracht en waarbij de laagste temperatuur T_1= 300K bedraagt. De arbeid, die deze machine levert, is juist toereikend om een andere machine aan te drijven, waarin een kringloop van Carnot in negatieve zin wordt volbracht tussen de temperaturen T_2 en T_1. Alle warmte die bij deze machines vrijkomt, wordt gebruikt voor de verwarming van het vertrek.

Gevraagd:

i) In welke verhouding is de beschikbare warmte toegenomen door inschakeling van deze machines?
ii) Is deze toename niet in strijd met één van de hoofdwetten van de thermodynamica?

2.3. Irreversibele Processen.

2.3.1. Een lichaam met constante warmtecapaciteit C_p heeft de temperatuur T_1. Het lichaam wordt in contact gebracht met een (groot) warmtereservoir van hogere temperatuur T_2. Onder constant blijvende druk komt het lichaam in temperatuur-evenwicht met het reservoir, dat op de temperatuur T_2 blijft. Toon aan dat de totale entropieverandering (dus van het lichaam en reservoir samen) gelijk is aan

$$\Delta S_{tot} = C_p \left[-\tau - \ell n(1 - \tau) \right]$$

met

$$\tau = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} .$$

Bewijs dat deze verandering voor alle T_1 en T_2 mits $T_2 > T_1$ positief is. Waarom moet dit zo zijn?

2.3.2. Twee lichamen A en B met constante warmtecapaciteiten C_{pA} en C_{pB} en verschillende begintemperaturen T_{A0} en T_{B0}, resp., wisselen onder constant blijvende druk warmte met elkaar uit. Beide lichamen zijn thermisch volledig geïsoleerd van de omgeving.

i) Wat is de eindtemperatuur van beide lichamen.

ii) Leid een uitdrukking af voor de totale entropieverandering ΔS van beide lichamen samen als functie van de eindtemperatuur T_1.

iii) Toon aan dat het proces irreversibel is door te bewijzen dat $\Delta S > 0$ voor $T_{A0} \neq T_{B0}$

Hint: Noem $(T_{A0} - T_1)/T_1 =: \tau$ en druk $(T_{B0} - T_1)/T_1$ uit in τ.

2.3.3 a) Een kg water* van 273K wordt in contact gebracht met een warmtereservoir van 373K. Wat is de entropieverandering van het water, wanneer dit de temperatuur van 373K heeft bereikt ?
Wat is de entropieverandering in het warmtereservoir?
Wat is de totale entropieverandering ?

* Water mag worden beschouwd als een incompressibele, ideale vloeistof met constante warmtecapaciteit c (= $c_p = c_v$) gelijk aan $c = 4.18 * 10^3$ J/kg K.

b) We verwarmen één kg water,in twee stappen, van 273K tot 373K. Eerst brengen we het water in contact met een warmtereservoir van 323K totdat daarmee temperatuurevenwicht is bereikt. Vervolgens brengen we het water in contact met een tweede reservoir op 373K. Wat is nu de totale entropieverandering?

c) Zet uiteen hoe water zou kunnen worden verwarmd van 273K tot 373K met minimale (verwaarloosbare) toename van de totale entropie.

2.3.4. Men mengt isobaar-adiabatisch m g water van T_1 met evenveel water van T_2.

i) Hoe groot is de entropieverandering van het stelsel?

ii) Bewijs dat deze verandering positief is.

2.3.5. a) Een ideaal gas met constante C_p en C_v bereidt zich zonder uitwendige arbeid uit van een volume V tot een volume 2V. Men wacht tot alles weer op kamertemperatuur T_0 gekomen is.

i) Hoeveel bedraagt het entropieverschil tussen begin- en eindtoestand ?

ii) Hoeveel is de entropie van de omgeving veranderd?

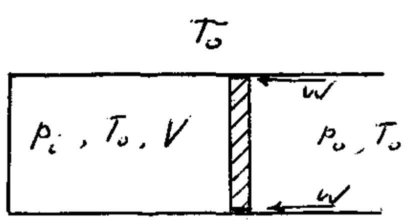
b) Wat wordt anders, als de expansie oneindig langzaam onder een zuiger geschiedt en de temperatuur voordurend die van de omgeving blijft? Is nu nog steeds de door het gas verrichte arbeid gelijk aan nul? Zo neen, hoe groot is deze dan?

2.3.6. Een hoeveelheid ideaal gas met constante C_p en C_V en $\gamma = 1.5$, expandeert adiabatisch van een begindtoestand : T_0, p_0, V_0 naar een eindtoestand, waarin het volume van het gas tweemaal zo groot is geworden. Bepaal de eindtemperatuur van het gas, de verrichte arbeid en de entropieverandering van het gas voor:

i) een reversibele expansie;

ii) een vrije expansie in vacuüm (Joule-expansie).

2.3.7.



Een door een zuiger afgesloten cylinder bevat 1 kg ideaal gas. De cylinder en de zuiger zijn warmtedoorlaatbaar, zodat het gas steeds dezelfde temperatuur T_0 heeft als de omgeving. De omgevingsdruk is p_0. Oorspronkelijk heeft het gas een volume V_0, een druk $p_i = 2p_0$ en een temperatuur T_0. De zuiger wordt nu losgelaten, waardoor hij naar buiten gaat bewegen, totdat een nieuwe evenwichtstoestand is bereikt waarin $p_i = p_0$. Tijdens dit expansieproces ondervindt de zuiger echter een, veranderlijke, wrijving (W), welke zo groot is dat de zuiger steeds bijna in evenwicht is. De zuiger beweegt daardoor slechts heel langzaam (quasi-statisch) naar buiten. Tijdens dit proces blijft het gas steeds in temperatuurevenwicht met de omgeving.

i) Bereken de arbeid verricht door het systeem (d.i. gas en zuiger samen) op de omgeving.

ii) Bereken de hoeveelheid warmte die door het systeem is uitgewisseld met de omgeving.

iii) Bereken de entropieverandering van het gas en van de omgeving.

iv) Bereken de totale entropieverandering. Kunt U hieruit conclusies trekken omtrent het reversibel of irreversibel zijn van dit proces? Indien het proces irreversibel blijkt te zijn, wat is dan hiervan de oorzaak?

v) Om Uw antwoord op iv) nader te verklaren: bereken de arbeid door het gas alléén (dus zonder zuiger) verricht en de hoeveelheid warmte door het gas opgenomen. Indien er verschil is tussen deze laatste hoeveelheid en de hoeveelheid warmte door de omgeving afgestaan (zie ii)), hoe kunt U dit verschil dan verklaren?

2.3.8. Een thermisch geïsoleerd, cylindrisch vat is horizontaal opgesteld en volledig gesloten. Een zuiger verdeelt de ruimte in twee ongelijke deelruimten. Deze zuiger is warmtedoorlatend.
Aanvankelijk is de zuiger geblokkeerd. Onder deze omstandigheden is het linkervolume V_0 en het rechtervolume $3V_0$. In beide ruimten bevindt zich hetzelfde ideale gas, met constante c_p en c_v. De temperaturen links en rechts zijn beide T_0K. De druk links is $2p_0$ en rechts p_0. $c_p = \frac{5}{2}R$, $c_v = \frac{3}{2}R$.
De zuiger wordt nu losgelaten waardoor beweging mogelijk is. De beweging gaat wrijvingsloos.

i) Wat wordt de uiteindelijke temperatuur en druk in beide compartimenten?

ii) Wat worden de beide volumina?

iii) Bereken de entropieveranderingen in beide compartimenten en de totale entropieverandering. Waarom moet de totale entropieverandering positief zijn en waarom mag die van één der compartimenten wel kleiner dan nul worden?

iv) Beschrijf de processen na loslaten van de zuiger.Waardoor komt de zuiger op de duur tot rust?
Zijn de processen quasi-statisch?

2.3.9. Een thermisch geïsoleerde cylinder is aan beide uiteinden hermetisch afgesloten. Een zuiger die zonder wrijving kan bewegen en bovendien warmtedoorlatend is, verdeelt de ruimte in twee gelijke compartimenten van $V_0 = 1$ liter. In de beginsituatie is de zuiger vastgezet. De linkerruimte bevat lucht van $T_0 = 300K$ en $p_0^{(1)} = 2$ atm. De rechterruimte bevat lucht van eveneens 300K en heeft de druk $p_0^{(2)} = 1$ atm.
De zuiger wordt losgelaten en bereikt een evenwichtstoestand (zowel temperatuurevenwicht als drukevenwicht).

i) Bereken de einddruk p_1, de eindtemperatuur T_1 en de totale entropietoename ΔS.

ii) Beschrijf het onomkeerbare proces dat plaats vindt na loslaten van de zuiger.

2.3.10. Een gesloten cylinder is door een wrijvingsloos beweegbare zuiger in twee compartimenten 1)en 2)verdeeld. De zuiger wordt aanvankelijk vastgehouden. Zowel de cylinderwand als de zuiger zijn warmte-isolerend. De twee compartimenten bevatten een vaste hoeveelheid ideaal gas met constante c_p en c_V. Compartiment 1) bevat aanvankelijk $n^{(1)}$ molen met $T_0^{(1)}, V_0^{(1)}$ en $p_0^{(1)}$ en 2) bevat $n^{(2)}$ molen met $T_0^{(2)}$, $V_0^{(2)}$ en $p_0^{(2)}$, waarbij $p_0^{(2)} > p_0^{(1)}$. De zuiger wordt nu losgelaten, waarna zich een nieuwe evenwichtstoestand instelt.

i) Is de entropieverandering t.g.v. dit proces in:

a) het totale systeem;

b) compartiment 1);

c) compartiment 2),

kleiner dan, gelijk aan of groter dan nul?

ii) Bereken de einddruk in het systeem.

2.3.11. Een syteem bestaande uit een cylinder met zuiger, gevuld met een gas, ondergaat een irreversibel proces tussen twee evenwichtstoestanden, waardoor zijn inwendige energie toeneemt met 30 kJ. Gedurende dit proces ontvangt het systeem een hoeveelheid warmte van 100 kJ van een warmtereservoir op 1000K. Het systeem wordt vervolgens via een reversibel proces teruggebracht naar zijn begintoestand. Gedurende dit proces kan het systeem alleen warmte uitwisselen met het warmtereservoir van 1000K.

De entropietoename van het reservoir t.g.v. beide processen is: 10J/K.

i) Bereken de arbeid door het systeem verricht gedurende het eerste (irreversibele) proces.

ii) Bereken de aan het systeem toe- of afgevoerde warmte gedurende het tweede (reversibele) proces.

iii) Bereken de door het systeem verrichte arbeid gedurende het tweede proces.

2.3.12. Een irreversibele, positieve kringloop bestaat uit twee isothermen en twee adiabaten. Bij de hoogste temperatuur worden 8000 J aan het systeem toegevoerd en bij de laagste, welke gelijk is aan 300K, worden 5000 J afgevoerd.

i) Hoe groot is de door deze kringloop geleverde arbeid?

ii) Wat valt over de hoogste temperatuur te zeggen?

2.3.13. Een lichaam met eindige massa heeft aanvankelijk de temperatuur T_1, welke hoger is dan de temperatuur T_2 van een groot reservoir. Stel dat met een omkeerbare kringloop, werkend tussen het lichaam en het reservoir, waarbij de temperatuur van het lichaam van de waarde T_1 zakt tot de waarde T_2, de hoeveelheid warmte Q aan het lichaam wordt onttrokken en dat daarbij de hoeveelheid mechanische arbeid A wordt verricht. De hoeveelheid (Q - A) aan warmte zal dan bij de temperatuur T_2 aan het reservoir worden afgestaan.

Gebruik het entropie-principe: $S_{totaal} \geq 0$, om te bewijzen dat voor de maximale, door de kringloop te leveren arbeid (A_{max}) geldt:

$$A_{max} = Q - T_2 (S_1 - S_2)$$

waarin $(S_2 - S_1)$ de entropieverandering van het lichaam is.

2.3.14. Twee identieke lichamen met constante warmtecapaciteit C_p hebben de temperaturen T_1 en T_2, respectievelijk. Deze lichamen worden gebruikt als reservoir voor een kringloop. De lichamen blijven op constante druk.
Toon aan dat de vrij te maken mechanische arbeid is

$$A = C_p(T_1 + T_2 - 2T_e)$$

T_e is hier de temperatuur die beide lichamen uiteindelijk krijgen.
Laat ook zien dat bij de maximaal vrij te maken arbeid de eindtemperatuur

$$T_e = \sqrt{T_1 T_2}\ ,$$

wordt.

2.3.15. Twee identieke lichamen met constante warmtecapaciteit C_p hebben dezelfde temperatuur T_1. Een koelcyclus werkt tussen deze lichamen, totdat één van deze is gekoeld tot de temperatuur T_2 ($T_2 < T_1$). De lichamen blijven op constante druk.
Bewijs dat de minimaal benodigde arbeid gelijk is aan

$$A_{min} = C_p\left(\frac{T_1^2}{T_2} + T_2 - 2T_1\right)$$

Bereken de, bij dit optimale proces behorende, eindtemperatuur van lichaam 2.

2.3.16. Drie identieke eindige lichamen met constante (beperkte) warmtecapaciteit hebben de temperaturen 300K, 300K en 100K. Er wordt geen warmte of arbeid toegevoerd uit de omgeving van deze drie lichamen.

i) Wat is de hoogste temperatuur waarop men één van de drie lichamen, ongeacht welke, kan brengen met behulp van omkeerbare kringlopen?

ii) Laat zien dat het resultaat van i) kan worden bereikt via het volgende, uit twee stappen bestaande proces.

a) Gebruik lichaam 2 en lichaam 3 als warmtereservoirs. Laat tussen deze reservoirs een omkeerbaar kringproces lopen, dat rechtsom loopt. Dit proces gaat zo lang door tot de temperatuur van lichaam 2 gelijk is aan die van lichaam 3.

b) Benut de bij a) vrijgekomen arbeid voor een linksom lopend kringproces, dat warmte aan de lichamen 2 en 3 onttrekt en afgeeft aan lichaam 1.

2.3.17. Een systeem bevindt zich in een omgeving met constante druk en temperatuur (p_0 resp. T_0). Het systeem heeft een druk p_1 een temperatuur T_1 en een volume V_1. Zowel de druk als de temperatuur zijn niet in evenwicht met de omgeving. ($p_1 \neq p_1$, $T_1 \neq T_0$). Aan het systeem is nu mechanische arbeid te verdienen totdat het met de omgeving in evenwicht is gekomen. Het systeem heeft dan eveneens de druk p_0 en de temperatuur T_0. Het volume is dan V_2 en de veranderingen van de inwendige energie en van de entropie zijn daarbij $U_2 - U_1$ resp. $S_2 - S_1$ geworden.

Bewijs met de eerste- en tweede hoofdwet, dat de maximaal te benutten arbeid A_{max} gelijk is aan:

$$A_{max} = -(U_2 - U_1) + T_0(S_2 - S_1) - p_0(V_2 - V_1) .$$

Bedenk hierbij dat de arbeid, die het systeem direct op de omgeving verricht, niet nuttig is te gebruiken en op grond hiervan als een aftrekpost in A_{max} voorkomt (deze post wordt wel parasitaire arbeid genoemd en kan ook wel negatief zijn).

2.3.18. Een drukvat, met inhoud V_1, bevat lucht bij een druk p_1, terwijl de temperatuur van de lucht gelijk is aan de omgevingstemperatuur T_0. De lucht mag worden beschouwd als een ideaal gas. De druk van de lucht is ongelijk aan de druk p_0 van de omgeving ($p_1 \neq p_0$). Uit dit systeem is mechanische arbeid te winnen door het in druk-evenwicht met de omgeving te laten komen. We nemen hierbij aan dat er tussen het systeem (= drukvat met lucht) en de omgeving geen ander hulpmiddel is aangebracht dan een cylinder met zuiger zodat het naar evenwicht leidende proces alleen óf adiabatisch óf isotherm óf als combinatie van beide kan verlopen.

i) Het systeem levert de maximale arbeidsprestatie, indien het "zo goed mogelijk" reversibel verloopt. Laat zien, m.b.v. een p-V-diagram, dat de arbeid voor het isotherme proces maximaal is.

ii) Bewijs op twee manieren, dat

$$A_{max} = p_1 V_1 \left(\ln \ (p_1/p_0) - 1 + \frac{p_0}{p_1} \right) .$$

2.3.19. Een systeem bevat een hoeveelheid ideaal gas, massa m, met constante soortelijke warmtes c_p en c_V. De druk in het gas is gelijk aan de omgevingsdruk p_0 maar de temperatuur T_1 van het gas is ongelijk aan de omgevingstemperatuur T_0 (neem $T_1 > T_0$).

i) Bereken, door gebruik te maken van het resultaat van vraagstuk 2.3.17 , de arbeid welke maximaal te winnen is, door het systeem in temperatuurevenwicht met de omgeving te laten komen.

ii) Laat zien dat het optimale proces bestaat uit een adiabatische expansie tot de temperatuur van het gas T_0 is geworden en vervolgens een isotherme compressie tot de temperatuur van het gas weer p_0 is geworden.

Teken de processen in het p-V-diagram.

3. MATHEMATISCHE HULPMIDDELEN IN DE KLASSIEKE THERMODYNAMICA.

3.1. Exacte differentialen

3.1.1. Gegeven de exacte (of totale) differentiaal

$$dW = Xdx + Ydy - Zdz, \quad (X = X(x,y,z), \text{etc.}).$$

Geef verbanden tussen de partiële afgeleiden van X,Y en Z naar x,y en z.

3.1.2. De niet exacte differentiaal:

$$\delta z = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

heeft een integrerende noemer D(x,y).
Bewijs dat dan moet gelden:

$$N\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_y - M\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_x = D\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x\right].$$

3.1.3. Bewijs dat

$$D(x,y) = Ax^{(1-B)}y^{(1+B)}$$

een integrerende noemer is voor de niet-exacte differentiaal:

$$\delta z = ydx - xdy,$$

voor een willekeurige, constante A en B.

3.1.4. In de eerste hoofdwet voor een reversibel proces

$$\delta Q = dU + pdV,$$

is δQ geen exacte differentiaal.
Bewijs dit voor een p-V-T-systeem, door uit te gaan van $U = U(T,V)$ en gebruik te maken van het experimentele gegeven dat $(\partial p/\partial T)_V$ in het algemeen niet gelijk is aan nul.

3.1.5. Bewijs dat T een integrerende noemer is van δQ; dus dat de uitdrukking dS gedefinieerd door

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV,$$

een exacte differentiaal is, door uit te gaan van $U = U(T,V)$ en gebruik te maken van het experimenteel gevonden resultaat:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = p\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \ .$$

3.1.6. Met $H = U + pV$, kan de eerste hoofdwet voor reversibele processen worden geschreven als

$$\delta Q = dH - Vdp \ .$$

Leidt, uitgaande van $H = H(p,T)$ en gebruik makend van het feit dat T een integrerende noemer van δQ is een uitdrukking voor

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T$$

af.

3.2. Karakteristieke Functies. Maxwell-relaties

3.2.1. De fundamentele relatie

$$dU = TdS - pdV \ ,$$

voor een gesloten p-V-T-systeem, legt verband tussen de toestandsfunctie U en de variabelen S en V $(U = U(S,V))$.

a) Toon aan het bestaan van toestandsfuncties

$$F(T,V),\ G(T,p) \text{ en } H(S,p) \ ,$$

en druk deze functies uit in:

$$U, p, V, T \text{ en } S.$$

b) Leidt voor de functies gedefinieerd door

$$F = U - TS \ ; \ G = U + pV - TS \ ; \ H = U + pV,$$

de differentiaalrelaties af en bewijs hiermee dat

$$F = F(T,V) \ ; \ G = G(T,p) \ , \ H = H(S,p)$$

c) Bewijs de Maxwell-relaties :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \qquad ; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \qquad ; \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

3.2.2. Uit de totale differentiaal

$$dS = \frac{p}{T}\, dV + \frac{1}{T}\, dU \ ,$$

voor p-V-T-systemen zijn de z.g. Massieu-functies:

$$\Omega\left(\frac{p}{T}, U\right) \ , \quad \Psi\left(V, \frac{1}{T}\right) \text{ en } \Phi\left(\frac{p}{T}, \frac{1}{T}\right)$$

af te leiden. Voer in de nieuwe variabelen π en τ door

$$\pi = \frac{p}{T} \text{ en } \tau = \frac{1}{T} \ .$$

i) Geef de uitdrukkingen voor de toestandsfuncties Ω, Ψ en Φ in :

S, π, τ, V en U.

ii) Herleidt deze uitdrukkingen tot :

$$\Omega = \frac{1}{T}(U - G) \quad ; \quad \Psi = -\frac{F}{T} \quad ; \quad \Phi = -\frac{G}{T} .$$

iii) Leidt uit de uitdrukkingen voor de (totale) differentialen $d\Omega$, $d\Psi$ en $d\Phi$ de bijbehorende Maxwell-relaties af.

3.2.3 i) Leidt uit de totale differentiaal

$$dV = \frac{T}{p} dS - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} dU ,$$

geldend voor p-V-T-systemen, de correcte vorm van de toestandsfuncties

$$\tau_1 = \tau_1(\sigma, U) , \quad (\sigma = \frac{T}{p})$$

$$\tau_2 = \tau_2(S,\rho) , \quad (\rho = \frac{1}{p})$$

$$\tau_3 = \tau_3(\sigma,\rho) ,$$

af.

ii) Bepaal de bijbehorende Maxwell-vergelijkingen.

3.2.4. Een electrochemische cel heeft als fundamentele relatie

$$dU = TdS - pdV + \varepsilon dq .$$

Hierin is ε de cel - EMK en q de cellading.

Bewijs dat

i) $$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,q} , \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,q} , \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{S,V} .$$

ii) $$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,q} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,q} , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S}\right)_{V,q} ,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_{S,q} .$$

3.3. Toepassingen van (-1)-regel en Maxwell-relaties

3.3.1. i) Leidt uit de differentiaal-uitdrukking voor $dV(T,p)$ af de betrekking

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S$$

ii) Toon aan dat

$$\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_S \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$$

iii) Gebruik i) en ii) en de (-1)-regel om de volgende relatie te bewijzen:

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$$

3.3.2. a) Bewijs, m.b.v. de (-1)-regel en de Maxwell-relaties, dat

$$\frac{C_p}{C_V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

b) Beschouw een fictief gas, met als toestandsvergelijking

$$(p+a)\ (V-b) = RT\ ,$$

waarin a, b en R constanten zijn.
Bewijs dat

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{(V-b)}{(p+a)}\ \frac{1}{V\kappa_S}\ .$$

3.3.3. Bewijs dat voor een p - V - T - systeem geldt

$$dp = \frac{\alpha}{\kappa_T}\,dT - \frac{1}{V\kappa_T}\,dV \ .$$

3.3.4. a) Bewijs dat voor een ideaal gas geldt

$$\alpha = \frac{1}{T}\ , \text{ en } \quad \kappa_T = \frac{1}{p} \ .$$

b) Bewijs dat voor een gas met toestandsvergelijking

$$p(V-b) = RT \quad , \qquad (R \text{ en } b\text{: constant})$$

geldt

$$\alpha = \frac{R}{RT+bp} \quad , \qquad \kappa_T = \frac{RT}{p(RT+bp)}$$

3.3.5. Herleid

$$\delta Q = TdS = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \ ,$$

tot

$$\delta Q = TdS = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T}\,dV \ .$$

<u>Hint</u>: bewijs eerst dat

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

3.3.6. Herleid

$$\delta Q = TdS = C_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp,$$

tot

$$\delta Q = TdS = C_p dT - \alpha V T dp \ .$$

<u>Hint</u>: bewijs eerst dat

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

3.3.7. i) Bewijs dat

$$dS = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \frac{C_p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p .$$

ii) Herleid dit tot

$$TdS = \frac{C_V \kappa_T}{\alpha} dp + \frac{C_p}{\alpha V} dV$$

iii) Werk deze relatie uit voor een ideaal gas.

3.3.8. i) Bewijs dat

$$dU = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right] dV .$$

ii) Bewijs dat

$$dH = C_p dT + \left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] dp .$$

iii) Leidt uit i) en relatie af voor

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U .$$

iv) Idem uit ii) voor

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H .$$

v) Leidt afzonderlijk betrekkingen af voor

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

en laat hiermee en met het resultaat van iii) zien dat de (-1)-regel hier opgaat.

vi) Doe hetzelfde voor

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

samen met het resultaat van iv).

3.3.9. Beschouw V = V(T,p) en leidt dan een uitdrukking af voor dV/V en bewijs, gebruikmakend van het feit dat dV een totale differentiaal is, hiermee dat

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_p .$$

Is dV/V óók een totale differentiaal?

3.3.10. i) Leidt af de zg. Gibbs-Helmholtz-vergelijking:

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -T^2\left[\frac{\partial (G/T)}{\partial T}\right]_p .$$

ii) Bewijs dat

$$C_p = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_p .$$

3.3.11. i) Leidt af de relatie

$$U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -T^2\left[\frac{\partial (F/T)}{\partial T}\right]_V .$$

ii) Bewijs dat

$$C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V .$$

3.3.12. Toon voor een p-V-T-systeem aan dat, indien

$$V = V\left(\frac{p}{T}\right).$$

dan

$$U = U\ (T)\ .$$

<u>Hint</u>: Ga uit van (zie 3.3.8. v))

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -\ p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

3.3.13. Bewijs dat

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_S = C_V\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_V ,$$

en

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_S = C_p\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln V}\right)_p .$$

3.3.14. Beschouw een (van der Waals-)gas met toestandsvergelijking:

$$(p + \frac{a}{V^2})\ (V - b)\ = RT, \qquad \text{(a,b en R: constant)}$$

en met constante C_V.
Bewijs dat voor een reversibel adiabatisch proces

$$T(V-b)^{R/C_V} = \text{constant}\ .$$

4. THERMODYNAMICA VAN HOMOGEEN VERVORMDE, LINEAIR ELASTISCHE LICHAMEN.

4.1. Een metalen blok met uitzettingscoëfficiënt α en isotherme compressiemodulus K_T zit opgesloten in een star vat. Het metaal heeft een temperatuur T_0 en staat onder een druk p_0.

i) Geef een uitdrukking voor de toename van de druk, indien de temperatuur verhoogd wordt tot T_1.

ii) Hoe groot wordt de druk indien de temperatuur verhoogd wordt van $T_0 = 20^oC$ tot $T_1 = 32^oC$. Neem hierbij:

$$p_0 = 1 \text{ atm}, \ \alpha = 5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \ K_T = 0{,}8 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \ .$$

iii) Indien het vat een maximale druk van 1200 atm. kan weerstaan, tot welke temperatuur kan het metaal dan ten hoogste worden verwarmd?

4.2. Een metalen blok onder uniforme compressie van hetzelfde materiaal als 4.1.ii) heeft een druk $p_0 = 1$ atm, een temperatuur $T_0 = 20^oC$ en een volume V_0 van 5 liter. Bepaal de druk, indien de temperatuur en het volume met respectievelijk 12 K en 0,5 cm^3 toenemen.

4.3. Een metalen draad met een doorsnede van $8{,}5 \times 10^{-3}$ cm^2 en een lengte van 1,2 m. is onder een voorspanning van 2×10^6 dyne gespannen tussen twee vaste punten. De temperatuur van de draad is 20^oC. Indien de temperatuur van de draad wordt verlaagd tot 8^oC, wat is dan de uiteindelijke trekkracht in de draad ($\alpha_L = 1{,}5 \times 10^{-5}$ K^{-1}; $E_T = 2 \times 10^{12}$ dyne/cm^2).

4.4. De eigenfrequentie van de in 4.3 beschreven draad is gegeven door

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad \text{(Hz)}$$

Als $\rho = 9{,}0$ gr/cm^3, wat is dan de frequentie bij 20^oC en wat bij 8^oC.

4.5. Indien bij vraagstuk 4.3 naast de daar genoemde verandering ook nog de vaste punten 0,012 cm naar elkaar toegaan, wat is dan de uiteindelijke kracht in de draad.

4.6. Een toestandsvergelijking voor een rubberachtig materiaal is

$$F = aT\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^{\,2}}{L^2}\right) ,$$

waarin a een constante is en L_0 (= L als F = 0) alleen van T afhangt.

Bewijs dat

i) $$E_T = \frac{aT}{A}\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^{\,2}}{L^2}\right) ;$$

ii) $$E_T(F = 0) = \frac{3aT}{A} ;$$

iii) $$\alpha_L = \alpha_0 - \frac{F}{AE_T T} = \alpha_0 - \frac{(L^3 - L_0^{\,3})}{T(L^3 + 2L_0^{\,3})} ,$$

$$(\alpha_0 = \alpha(L = 0) = \frac{1}{L_0}\left(\frac{dL_0}{dT}\right)) .$$

4.7. Bereken de arbeid A (in Joule) voor de volgende gevallen

i) De druk op een metalen blok van 100 gr. wordt quasi-statisch en isotherm opgevoerd van 0 tot 1000 atm.

$(\rho = 10$ gr/cm^3 ; $K_T = 1{,}48 \times 10^{11}$ N/m^2) .

ii) De kracht in een metalen draad wordt quasi-statisch en isotherm opgevoerd van 10 tot 100 N.

(L = 1m, A = 1,0 x 10^{-7} m^2, $E_T = 2{,}5 \times 10^{11}$ N/m^2) .

4.8. De druk op een blok koper wordt isotherm en reversibel verhoogd van 0 tot 5000 atm. bij een temperatuur van 100 K.

i) Bepaal Q, A, ΔU en ΔS.

ii) Indien het proces adiabatisch plaatsvindt, neemt de temperatuur dan af of toe en, zo ja, hoeveel?

(m = 500 gr, $\rho = 9{,}0$ gr/cm^3; $c_p = 0{,}255$ J/gr K; $\alpha = 3{,}15 \times 10^{-5}$ K^{-1};
$K_T = 1{,}37 \times 10^{11}$ N/m^2).

4.9. Van twee gelijke blokken koper, beide met C_p = 150 J/K heeft het ene blok een temperatuur van $0^{\circ}C$ en het andere $100^{\circ}C$. De blokken worden thermisch met elkaar in contact gebracht. De blokken bevinden zich in een omgeving met constante druk en kunnen alleen warmte met elkaar uitwisselen en niet met de omgeving.
Bereken de gemeenschappelijke eindtemperatuur en de toename van de totale entropie. Is dit proces reversibel of irreversibel?

4.10. De kracht in een stalen draad met cirkelvormige doorsnede (lengte 1 m, diameter 1 mm) wordt reversibel en isotherm (bij T = 300 K) verhoogd van 0 tot 10^3N. Van de draad is verder gegeven:

$$\rho = 7{,}86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \ ; \ \alpha_L = 1{,}2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ ,$$

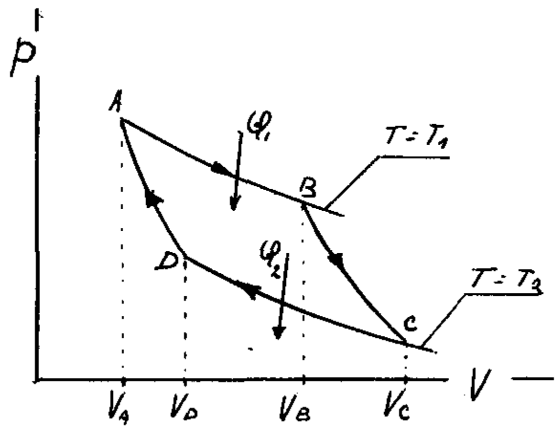
$$E_T = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \ ; \quad c_F = 482 \text{ J/kgK}$$

i) Bepaal voor dit proces:

Q, A, ΔU en ΔS

ii) Hoe groot zou de temperatuursverandering zijn, indien het proces adiabatisch (isentropisch) verliep.

4.11.



Beschrijf bovenstaand Carnot-proces voor een homogeen elastisch medium onder uniforme druk.

Bewijs dat $(V_B - V_A) = (V_C - V_D)$.
Bereken Q_1, Q_2 en A_{uit} (uitgedrukt in α, K_T, T_1, T_2, V_A en V_B).
Bepaal het rendement η .

4.12. Beschouw de volgende, uit drie stappen bestaande, kringloop voor een uniform gerekte, lineair elastische staaf met lengte L, doorsnede A, lineaire uitzettingscoëfficiënt α_L, isotherme elasticiteitsmodulus E_T en soortelijke warmte bij constante kracht C_F :

1^o Van $A \rightarrow B$: een isotherme uitrekking bij $T = T_1$ van L naar $L + \Delta L$, t.g.v. een krachttoename van F_1 tot F_2 .

2^o Van $B \rightarrow C$: een afkoeling van de staaf tot $T = T_2$ $(T_2 < T_1)$ bij constante kracht $(F = F_2)$ tot de oorspronkelijke lengte L weer is bereikt.

3^o Van $C \rightarrow A$: een verwarming van de staaf tot zijn oorspronkelijke temperatuur T_1, bij constant blijvende lengte en afnemende kracht van F_2 tot F_1 .

Alle processen verlopen reversibel.

i) Teken deze kringloop in een F-L-diagram (let op de richting van de kringloop en bewijs dat een isotherm voor een lineair elastisch materiaal een rechte lijn is).
Druk $(T_1 - T_2)$ en ΔL uit in $(F_2 - F_1)$.

ii) Bereken voor elk deeltraject de verrichte arbeid en de toe- of afgevoerde warmte (uitgedrukt in $(F_2 - F_2)$, T_1 en bovengenoemde materiaalcoëfficiënten).

iii) Bepaal het rendement η van deze kringloop.

4.13. Voor een blok koper van 500 gr. op een temperatuur van 100 K gelden de volgende gegevens:

$$c_p = 0{,}255 \text{ J/gr K} \; ; \quad \alpha = 3{,}15 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} ;$$

$$K_T = 1{,}368 \times 10^{11} \text{N/m}^2 \; ; \; \rho = 9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 .$$

i) Bereken C_p, C_V en K_S .

ii) Laat de druk op het blok toenemen van 0 tot 500 atm. Bereken de volumeverandering indien deze toename isotherm en indien deze isentropisch geschiedt.

4.14. Voor een stalen draad met lengte 1 m, doorsnede 10^{-7} m^2 en bij een temperatuur voor 100 K gelden de volgende gegevens:

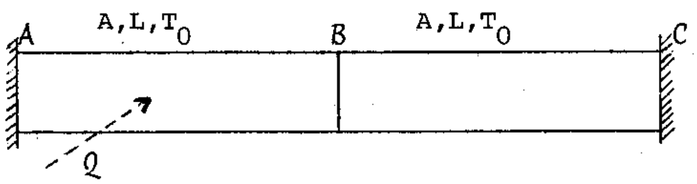
$$c_F = 450 \text{ J/kg K} \quad ; \quad \alpha_L = 1{,}2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ ;$$

$$E_T = 2 \times 10^{11} \text{N/m}^2 \ ; \ \rho = 7{,}86 \times 10^3 \text{kg/m}^3 \ .$$

i) Bereken C_F, C_L en E_S .

ii) De kracht op de draad neemt toe van 0 tot 20 N. Bereken de lengteverandering bij isotherme en bij isentropische toename.

4.15.



Twee identieke, lineair elastische staven AB en BC zijn in B aan elkaar gelast en in A en C ingeklemd. Van de staven is verder gegeven:

$$L = 1 \text{ m} \ ; \ A = 1 \text{ cm}^2 \ ; \ \alpha_L = 1{,}2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ ;$$

$$E_T = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \ ; \ C_L = 360 \text{ J/K} \ .$$

De staven zijn volledig thermisch geïsoleerd, zowel van de omgeving als van elkaar (dus ook in B). In de nultoestand (E_0) zijn de krachten in de staven nul en hebben beide staven de temperatuur $T_0 = 300$ K. Aan de staaf wordt nu quasi-statisch warmte toegevoerd totdat de temperatuur van deze staaf $T_1^{(1)} = 500$ K is geworden. In deze nieuwe evenwichtstoestand (E_1) heeft AB de lengte $L_1^{(1)}$ en BC de lengte $L_1^{(2)}$ en $T_1^{(2)}$, terwijl de krachten in de staven zijn $F_1^{(1)}$ en $F_1^{(2)}$, respectievelijk.
Vervolgens wordt de isolatie bij B weggenomen. Na verloop van tijd stelt zich dan de evenwichtstoestand E_2 in.

i) Bepaal $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $T_1^{(2)}$, $F_1^{(1)}$ en $F_1^{(2)}$. Bereken ook de entropieverandering van AB, BC en het totale systeem t.g.v. het proces van E_0 naar E_1.

ii) Bewijs dat het punt B in E_2 weer in zijn oorspronkelijke positie (in E_0) is teruggekeerd. Is het proces van E_1 naar E_2 (ir)reversibel? En dat van E_0 naar E_1 ?

ANTWOORDEN

Hoofdstuk 1

1.1. a) -

b) als bij a.

1.2. $p_0(nV_m - V)$.

1.3. a) $R_m T_0 \ \ell n2$.

b) 1573 J .

1.4. a) $R_m T \ \ell n((V_{m_2} - b)/(V_{m_1} - b))$.

b) $R_m T \ [\ell n(V_{m_2}/V_{m_1}) + B(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_{m_1}})]$.

1.5. $RT \ \ell n \ ((V_2 - b)/(V_1 - b)) + a(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_1})$.

1.6. -

1.7. -

1.8. $p_0(1 + {}^{C_V}/R)(V_1 - V_0)$; $(p_0 V_1)/m \ R$.

1.9. $m(T_1 - T_0) \ \{i + j/_2(T_1 + T_0) - k/T_1 T_0\}$.

1.10. -

1.11. -

1.12. -

1.13. $C_v = e$, $C_p = e + R(p + {}^a/V^2)/(p - \frac{a}{V_2} + 2ab/V^3$.

1.14. -

1.15. 120 K.

1.16. $3 \ T_0$.

1.17. -

1.18. -

1.19. 6.72 J .

1.20. 1077 ft..

1.21. a) -

b) 571 K .

1.22. a) 10263 J .

b) 614 K .

c) 3530 K .

d) $108 * 10^3$ J .

1.23. -

Hoofdstuk 2.1.

2.1.1. -

2.1.2. a) $S = C_v \ln T/T_0$.

b) $S = C_p \ln T/T_0$.

2.1.3. a) $0.281 * 10^5 J$, $0.312 * 10^3 J/K$.

b) $0.72 * 10^5 J$, 0 .

c) $-0.852 * 10^5 J$.

2.1.4. i) $\frac{1}{2}\, pV$.

ii) C_vT, $-C_vT$, $-\frac{1}{2}C_vT$, $\frac{1}{2}C_vT$.

iii) $C_p \ln 2$, $- C_v \ln 2$, $- C_p \ln 2$, $C_v \ln 2$.

2.1.5. $^{Q}/_{T_2}\ (1-{}^{T_2}/_{T_1})\ (> 0)$.

2.1.6. i) $-19{,}13 * 10^3 J/K$, $19.13 * 10^3 J/K$, 0 .

ii) $-19{,}13 * 10^3 J/K$, $2551 * 10^3 J/K$, $6.38 * 10^3$.

iii) -

2.1.7. -

2.1.8. -

2.1.9. i) T_0 .

ii) $2^{(\gamma-1)} T_0 \approx 1.32\ T_0$.

iii) $2^{(\gamma-1)} p_0 \approx 1.32\ p_0$.

iv) $0.133\ p_0V_0$.

v) $0.693 \dfrac{p_0V_0}{T_0}$, 0 , $0.693 \dfrac{p_0V_0}{T_0}$.

Hoofdstuk 2.2.

2.2.1. i) $- p_1V_1/(\gamma-1) \,.\, [({}^{p_2}/_{p_1})^{(\gamma-1)/_\gamma} - 1]$, 0 ,

$p_2(V_4-V_1)({}^{p_1}/_{p_2})^{1/\gamma}$, $\gamma/(\gamma-1)\ p_2(V_4-V_1)({}^{p_1}/_{p_2})^{1/_\gamma}$,

$(p_1V_4)/(\gamma-1) \,.\, [({}^{p_2}/_{p_1})^{(\gamma-1)/_\gamma} - 1]$, 0 ,

$-p_1\ (V_4-V_1)$, $-\gamma/(\gamma-1).p_1(V_4-p_1)$.

ii) -

2.2.2. -

2.2.3. -

2.2.4. i) $(p_2-p_1)(V_2-V_1)$

ii) $V_1/(\gamma-1)\ .\ (p_2-p_1)$, $\gamma/(\gamma-1)\ .\ p_2(V_2-V_1)$,
$1/(\gamma-1)\ .\ [V_1(p_2 - p_1) + \gamma p_2(V_2-V_1)]$.

2.2.5. a) 362J, 362J .

b) 362J, 0 J .

c) $p_1V_1\ \ln({}^{V}2/V_3)$, $p_1V_1\ \ln({}^{V}2/V_3)$, 97%.

2.2.6. 271 kW .

2.2.7. a) i) -

ii) Q_1+Q_3, $Q_1 - |Q_3| < 0$.

iii) -

b) $4.52 * 10^3$W .

2.2.8. i) 8.94 .

ii) -

Hoofdstuk 2.3.

2.3.1. -

2.3.2. i) $(C_{pA}\ T_{A0} + C_{pB}\ T_{B0})/(C_{pA} + C_{pB})$.

ii) $-C_{pA}\ \ln\ [1+(T_{A0} - T_1)/T_1] - C_{pB}\ \ln\ [1 + (T_{B0}-T_1)/T_1]$,

iii) $C_{pA}\ L_1(\tau) + C_{pB}\ L_2(\tau) > 0$

met $L = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3 \ldots$

2.3.3. a) 1305 J/K, - 1121 J/K, 184 J/K .

b) 98 J/K .

c) -

2.3.4. i) $2\ m\ c\ \ln\ (T_1+T_2)/2\ \sqrt{T_1T_2}$.

ii) $(T_1+T_2)/2 > \sqrt{T_1T_2}$.

2.3.5. a) i) $m\ R\ \ln 2$.

ii) 0 .

b) $m\ R\ \ln 2$, $-m\ R\ \ln 2$.

2.3.6. i) $0.767\ T_0,\ 0.293\ C_vT_0$.

ii) $T_0,\ 0,\ m\ .\ \ell n\ 2$.

2.3.7. i) $p_0V_0 = m\ R\ T_0/2$.

ii) p_0V_0 .

iii) $m\ R\ \ell n\ 2,\ -\frac{1}{2}\ m\ R$.

iv) $m\ R(\ n\ 2 - \frac{1}{2})$.

v) $m\ R\ T_0\ \ell n\ 2,\ m\ R\ T_0\ \ell n\ 2$.

2.3.8. i) $T_0,\ \frac{5}{4}\ p_0$.

ii) $\frac{8}{5}\ V_0,\ \frac{12}{5}\ V_0$.

iii) $2\ p_0V_0/T_0\ \ \ell n(\frac{8}{5}),\ 3\ p_0V_0/T_0\ \ \ell n(\frac{4}{5})$,

$p_0V_0/T_0\ [12\ \ell n\ 2 - 5\ \ell n\ 5]$.

2.3.9. i) $\frac{3}{2}$ atm., 300 K, 0.0574 J/K .

ii) -

2.3.10. i) -

ii) $(p_0^{(1)}V_0^{(1)} + p_0^{(2)}V_0^{(2)})\ /\ (V_0^{(1)} + V_0^{(2)})$.

2.3.11. i) 70 kJ .

ii) - 110 kJ .

iii) - 80 kJ .

2.3.12. i) 3000 J .

ii) $T_1 > 480$ K .

2.3.13. -

2.3.14. -

2.3.15. $T_3 = \dfrac{T_1^{\,2}}{T_2}$.

2.3.16. i) 400 K .

ii) -

2.3.17. -

2.3.18. -

2.3.19. i) $A\ max = m\ C_p\ T_0\ [T_1/T_2 - 1 - \ell n(T_1/T_0)]$

ii) -

Hoofdstuk 3.1.

3.1.1. $\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{ij,z}$; $\left(\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{x,ij} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{z,ij}\right.$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{ij,x} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{z,x} .$$

3.1.2. -

3.1.3. -

3.1.4. -

3.1.5. -

3.1.6. $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$.

Hoofdstuk 3.2.

3.2.1. -

3.2.2. i) -

ii) -

iii) $\left(\frac{\partial V}{\partial U}\right)_\pi = - \left(\frac{\partial T}{\partial \pi}\right)_U , \left(\frac{\partial \pi}{\partial T}\right)_V = - \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\tau ,$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_U = \left(\frac{\partial U}{\partial \pi}\right) \text{, met } \pi = p/T \text{ , } \tau = \frac{1}{T} .$$

3.2.3. i) -

ii) $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\right)_U , \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\rho ,$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_\sigma = - \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)_\rho \text{ met } \sigma = T/p, \ \rho = 1/p .$$

3.2.4. -

Hoofdstuk 3.3.

3.3.1 -

3.3.2. -

3.3.3. -

3.3.4. -

3.3.5. -

3.3.6. -

3.3.7. i) -

ii) -

iii) $dS = C_V \frac{dp}{p} + C_p \frac{dV}{V}$.

3.3.8. i) -

ii) -

iii) $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{1}{\rho_V}\left[p - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\right]$.

iv) $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{1}{C_p}\left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]$.

v) $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V$, $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$.

vi) $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = C_p$, $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

3.3.9. $\frac{dV}{V} = \alpha dT - \kappa_T dp$.

3.3.10. -

3.3.11. -

3.3.12. -

3.3.13. -

3.3.14. -

Hoofdstuk 4.

4.1. i) $dp = K_T dT$. ii) 473 atm. iii) $50^\circ C$.

4.2. 395 atm.

4.3. 50,6 N .

4.4. 21,3 Hz. 33,9 Hz.

4.5. 33,6 N .

4.6. -

4.7. i) - 0,347 J . ii) - 0,198 J .

4.8. i) Q = - 88,8 J; A = - 52,2 J; ΔU = - 36,6 J; ΔS = - 0,888 J/K.

ii) ΔT = + 0,711 K .

4.9. T = $50^\circ C$; ΔS = 3,46 J .

4.10. i) Q = 3,6 J; A = 3,18 J; ΔU = 6,78 J; ΔS = 0,012 J/K .

ii) ΔT = - 1,21 K .

4.11. $Q_1 = \alpha T_1 K_1 (V_B - V_A)$; $Q_2 = -\alpha T_2 K_T (V_B - V_A)$;

$A_{uit} = \alpha K_T (T_1 - T_2)(V_B - V_A)$; $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

4.12. i) $T_1 - T_2 = \frac{1}{\alpha_L A E_T} (F_1 - F_2)$; $\Delta L = \frac{L}{AE_T} (F_2 - F_1)$.

ii) $A \to B$: $Q_1 = \alpha_L L T_1 (F_2 - F_1)$; $A_1 = -\frac{L}{2AE_T} (F_2{}^2 - F_1{}^1)$.

$B \to C$: $Q_2 = \frac{C_F}{\alpha_L A E_T} (F_2 - F_1)$; $A_2 = \frac{L}{AE_T} F_2 (F_2 - F_1)$

$C \to A$: $Q_3 = \frac{C_F}{\alpha_L A E_T} (F_2 - F_1) + \frac{L}{2AE_T} (F_2 - F_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha_L L T_1 (F_2 - F_1)$;

$A_3 = 0$.

iii) $\eta = \dfrac{L\alpha_L (F_2 - F_1)}{2C_F + L\alpha_L (F_2 - F_1)}$

4.13. i) $C_p = 127{,}5$ J/K; $C_V = 126{,}7$ J/K; $K_S = 1{,}377 \times 10^{11}$ N/m^2 .

ii) $(\Delta V)_T = -2{,}057 \times 10^{-8}$ m^3; $(\Delta V)_S = -2{,}043 \times 10^{-8}$ m^3 .

4.14. i) $C_F = 0{,}3537$ J/K; $C_L = 0{,}3534$ J/K; $E_S = 2{,}0016$ N/m^2

ii) $(\Delta L)_T = 1{,}00$ mm; $(\Delta L)_S = 0{,}9992$ mm .

4.15. i) $L_1^{(1)} = 1{,}0012$ m; $L_1^{(2)} = 0{,}9988$ m;

$T_1^{(2)} = 300{,}24$ K; $F_1^{(1)} = F_1^{(2)} = -2{,}4 \times 10^4$ N;

$\Delta S_1^{(1)} = \Delta S_1^{(t)} = 184{,}2$ J:K; $\Delta S_1^{(2)} = 0$.

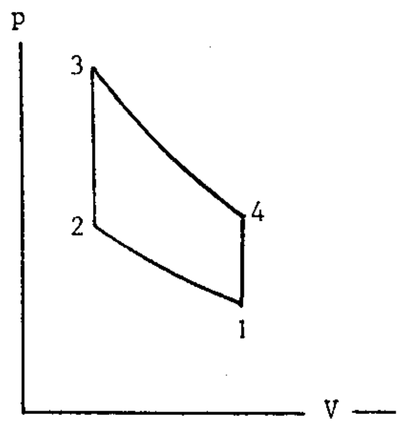
Deeltoets Constitutieve Vergelijkingen, Thermodynamica en Technische Thermodynamica (Fysica 40).

Datum : 24 mei 1978

Tijd : 9 - 12.00 uur.

Vraagstuk I

a) Het proces in de benzine (verbrandings)motor wordt benaderd door de omkeerbare kringloop in nevenstaande figuur (de zgn. kringloop van Otto).



Hierbij wordt aangenomen dat dezelfde gaswet $pV = mRT$ van toepassing is voor elk der deelprocessen.

1) Rangschik de vier deelprocessen naar soort (isotherm, isobaar .... etc.)
2) Geef per deelproces aan welke arbeid geleverd of opgenomen wordt.
3) Doe dit eveneens met de warmteposten.
4) Definieer vervolgens het rendement en herleid dit tot een uitdrukking in de temperaturen T_1 t/m T_4. Vereenvoudig deze uitdrukking en herleid daarna, gebruik makend van de Poisson vergelijkingen, dit resultaat tot een betrekking met de Volumina V_1 en V_2 en ook nog eens tot een betrekking met de drukken p_1, p_2.

b) Transformeer de in de pV-ruimte getekende kringloop (zie tekst opgave a) naar de TS-ruimte.
Pas de S-schaal zo aan dat de lengten (V_1-V_2) en (S_4-S_1) gelijk zijn.
Zorg er bovendien voor dat de ingesloten oppervlakken in beide figuren practisch even groot uitvallen door de Maxwell relatie $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$ te hanteren.
Vermeldt bij de lijnstukken die er op aan komen thermodynamisch-mathematische uitdrukkingen voor hun lengten.

Deeltoets Constitutieve Vergelijkingen, Thermodynamica en Technische Thermodynamica (Fysica 40).

Vraagstuk II

Een warmtemachine, gevuld met een ideaal gas, voert een kringloop uit tussen de temperaturen T_1 en T_2 ($T_1 > T_2$). Aan de machine wordt een hoeveelheid warmte Q_1 toegevoerd en een hoeveelheid Q_2 onttrokken.

1) Uit welke deelprocessen bestaat deze kringloop in het geval van een Carnot-proces?
2) Definieer het begrip nuttig effect van het kringproces.
3) Bepaal het nuttig effect van het Carnot-proces en bewijs dat dit nuttig effect door geen enkel ander kringproces, werkend tussen dezelfde temperaturen T_1 en T_2 ($T_1 > T_2$), kan worden overtroffen.

Deeltoets Constitutieve Vergelijkingen, Thermodynamica en Technische Thermodynamica (Fysica 40).

Vraagstuk III

1) Hoe luidt in een niet-homogene toestand en voor een irreversibel proces de locale entropie-ongelijkheid (locale Clausius-Duhem-ongelijkheid)?
   Indien in deze uitdrukking nog de warmtebron r en/of de inwendige energie-dichtheid u voorkomen, elimineer deze dan m.b.v. de eerste hoofdwet, respectievelijk door invoering van de vrije energie-dichtheid f.
2) Beschouw een zuiver elastisch lichaam, niet noodzakelijk lineair en isotroop. Welke grootheden kiest U dan als onafhankelijke variabelen?
3) Bewijs dat

$$\dot{C}_{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta} v_{(i,j)} ,$$

   met

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial X_\beta}$$

4) Leid een constitutieve vergelijking af voor de spanningen t_{ij}. Druk deze constitutieve vergelijking uit in de Lagrange-deformatietensor $E_{\alpha\beta}$, met

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$$

5) Bewijs dat een niet-homogene, isotherme elastische deformatie omkeerbaar (reversibel) is.
6) Neem in de nu volgende vragen aan dat het lichaam isotroop is. Laat de vrije energiedichtheid f gegeven zijn door de volgende functie van de invarianten I_1, I_2 en I_3 van $E_{\alpha\beta}$:

$$f = f(I_1, I_2, I_3) = a_1 I_1^2 + a_2 I_2 + a_3 I_3 + a_4 I_2^2$$

   waarin a_1 t/m a_4 constanten zijn en

$$I_1 = E_{\alpha\alpha} \qquad I_2 = E_{\alpha\beta} E_{\beta\alpha} \qquad I_3 = E_{\alpha\beta} E_{\beta\gamma} E_{\gamma\alpha}$$

   Schrijf nu de constitutieve vergelijking voor t_{ij} uit in a_1 t/m a_4 en de deformatiegrootheden.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Deeltoets Thermodynamica en Constitutieve Vergelijkingen, Technische Thermodynamica (Fysica 40) op 23 september 1978 van 9.00 - 12.00 uur.
Elk vraagstuk dient op een afzonderlijk stel blaadjes te worden gemaakt.

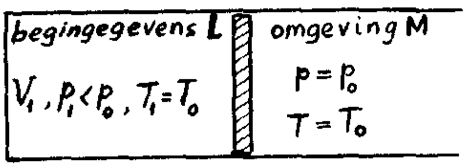
-.-

1. A. Leidt de uitdrukking voor de maximaal winbare arbeid af voor de (begin) situatie dat een gesloten systeem L niet in druk-evenwicht noch in temperatuur-evenwicht verkeert met de omgeving M. We nemen aan dat de omgeving M dermate groot is, dat haar druk p_0 en temperatuur T_0 onbeïnvloedbaar zijn.

   Geef in de tekst duidelijk aan of U uitgaat van aan L toegevoerde, dan wel door L afgegeven arbeid.

   Licht ook toe wat de symbolen U, T, S, p en V met hun indices voorstellen.

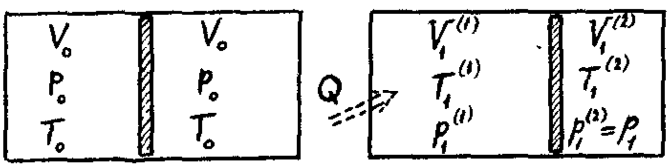
B.



Gevraagd wordt de maximale arbeid te bepalen voor de volgende situatie:
Bovenstaande cylinder is met een beweegbare zuiger afgesloten. Het gas in de afgesloten ruimte mag als een ideaal gas beschouwd worden. Aanvankelijk heerst in het systeem een druk die lager is dan de omgevingsdruk ($p_1 < p_0$). Het beginvolume is V_1 en de begintemperatuur is gelijk aan de omgevingstemperatuur ($T_1 = T_0$).

Herleidt de uitdrukking voor de maximale arbeid tot een betrekking waarin uitsluitend de symbolen p_1, V_1, p_0 en A_{max} voorkomen.

2.



nultoestand eindtoestand

Een horizontale, thermisch geïsoleerde cylinder is door een niet-doorlaatbare (zowel voor temperatuur als voor materie) zuiger,

Zie blz. 2.

welke zonder wrijving kan bewegen, in twee gelijke delen verdeeld. Elke helft bevat een eenheidsmassa van hetzelfde ideale gas met volume V_0, temperatuur T_0 en druk p_0.
Het gas heeft een constante (dwz. onafhankelijk van de temperatuur) soortelijke warmte c_V en een gasconstante R, beide per eenheid van massa.
Aan het gas in de linkerhelft wordt zoveel warmte toegevoerd, dat de druk in de rechterhelft oploopt tot een gegeven waarde p_1.

Druk Uw antwoorden op de volgende vragen uit in: V_0, p_0, T_0, p_1, c_V en R.

i) Bepaal de temperatuur, de druk en het volume in de beide helften in de eindtoestand.
ii) Hoeveel arbeid is er verricht op het gas in de rechterhelft?
iii) Hoe groot is de aan de linkerhelft toegevoerde warmte?
iv) Bepaal de entropieverandering van het gas in de linkerhelft, in de rechterhelft en van het totale systeem.

3. i) Geef uitgaande van de volgende formuleringen voor de locale eerste hoofdwet:

$$\rho\dot{u} = t_{ij}\, v_{i,j} + \rho r - h_{i,i} ,$$

en de locale tweede hoofdwet:

$$\dot{s} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{h_i}{T}\right)_{,i} - \frac{r}{T} \geq 0 ,$$

en de definitie

$$f = u - Ts,$$

een formulering voor de locale entropie-ongelijkheid (locale tweede hoofdwet) waarin r en u niet meer voorkomen.

Geef de definities van alle in bovenstaande vergelijkingen voorkomende grootheden.

ii) Beschouw een isotroop, lineair thermoelastisch medium. Neem voor dit geval f een functie van de temperatuur T, de lineaire deformatietensor e_{ij} en de temperatuurgradiënt $T_{,i}$:

$$f = f(T,\, e_{ij},\, T_{,i}).$$

Zie blz. 3.

Bewijs dat f niet expliciet van $T_{,i}$ kan afhangen:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{,i}} = 0,$$

en leidt de volgende constitutieve vergelijkingen af:

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} \qquad , \; t_{ij} = \rho \frac{\partial f}{\partial e_{ij}} .$$

iii) Wat blijft er na gebruikmaking van de resultaten van ii) nog van de entropie-ongelijkheid over.
Geef een eenvoudige, lineaire relatie voor h_i waarmee aan deze ongelijkheid kan worden voldaan; aan welke conditie moet de coëfficiënt in deze relatie dan nog voldoen.

iv) Stel:

$$f = f(T, e_{ij}) = -\tfrac{1}{2} c_V \frac{(T-T_0)^2}{T_0} - \frac{\alpha K}{\rho}(T - T_0)e_{kk} +$$

$$+ \frac{1}{2\rho}[\lambda(e_{kk})^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij}] , \qquad (K = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu).$$

Schrijf hiermee de constitutieve vergelijkingen voor s en t_{ij} uit. Geef fysische interpretaties voor de coëfficiënten: c_V, α, K, λ en μ.

v) Neem voor de opgaven v) en vi) de toestanden homogeen en de processen reversibel.
Beschouw een adiabatische samendrukking:

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = -\varepsilon \qquad , \; (0 < \varepsilon \ll 1).$$

Bepaal de temperatuursverandering.

vi) Beschouw dezelfde samendrukking maar nu isotherm. Bepaal de entropieverandering en de verandering van de warmte-hoeveelheid Q.

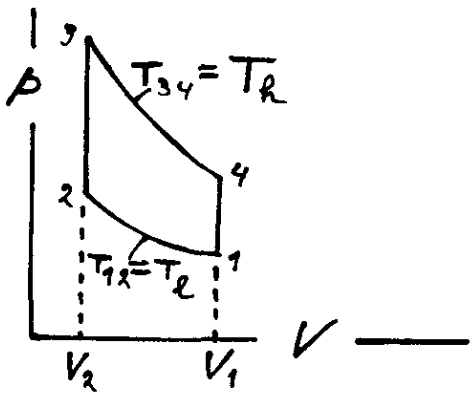
Deeltoets Constitutieve Vergelijkingen, Thermodynamica en Technische Thermodynamica (Fysica 40).

Datum : 22 december 1978.
Tijd : 9.00-12.00 uur.

Vraagstuk 1

Het kringproces van de Stirling motor is in het ideale geval opgebouwd uit twee omkeerbare isothermen en twee omkeerbare inchoren.

a) Beschrijf aan de hand van de presentatie in het p,V-diagram het kringproces (zie figuur)



b) Stel vergelijkingen op voor de arbeids- en warmteposten a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41}, q_{12}, q_{23}, q_{34} en q_{41}. Gebruik hierbij de symbolen T_h, T_l, V_1 en V_2. Vermeld bovendien of warmte het systeem binnenkomt of uitgaat en of arbeid door het systeem op de omgeving wordt uitgeoefend of andersom. Vermeld ook aan welke overgang van warmte resp. arbeid een positieve waarde wordt toegekend.
Voor het gas in het systeem geldt de ideale gaswet $pV = mRT$.

c) Definieer het rendement η en stel uit de resultaten van b) de uitdrukking van het rendement η samen.

d) Neem aan dat de Stirling motor die voorzieningen heeft waardoor afgevoerde warmte tijdens deelproces 4-1 in een hulpsysteem is op te slaan en volledig wordt benut t.b.v. de benodigde warmte tijdens deelproces

2-3. Hoe verandert dan de uitdrukking voor η?

e) Is het rendement η in geval d) gelijk aan het Carnot-rendement, η_{Carnot}, en zo niet is η dan groter of kleiner dan η_{Carnot}?

f) Teken het omkeerbare Stirling proces in het T,S-diagram en gebruik daarbij dezelfde symbolen als in de bijgaande figuur zijn gehanteerd. Arceer in dit diagram die oppervlakjes die de hoeveelheid uitgewisselde warmte voorstellen.

g) Noem en beschrijf kort twee typerende voorzieningen aan de Stirling motor.

Vraagstuk 2

Een kubusvormig blokje van een lineair thermoelastisch materiaal wordt belast door een uniforme hydrostatische druk p. Het blokje verkeert in een homogene toestand en is in evenwicht. De temperatuur van het blokje is T en het volume V. Beschouw de druk p, de entropie S en de inwendige energie U als functies van T en V:

$$p = p(T,V), \quad S = S(T,V), \quad U = U(T,V) \ .$$

Verder worden de volgende definities gegeven:

$$c_V = T(\frac{\partial S}{\partial T})_V, \quad K_T = -V(\frac{\partial p}{\partial V})_T, \quad \alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p \ .$$

a) Bewijs de (Maxwell-)relatie:

$$(\frac{\partial S}{\partial V})_T = (\frac{\partial p}{\partial T})_V = \alpha K_T \ , \qquad ^{*)}$$

b) Leid m.b.v. de in de probleemstelling gegeven definities en de relatie bij a) betrekkingen af voor de quasi-stationaire veranderingen dp en dS. Druk Uw antwoord uit in c_V, K_T, α, T en V.

c) Laat de druk p quasi-stationair toenemen tot $p + dp$. Bepaal de hierbij optredende relatieve volume-verandering (dV/V), indien het proces
   (I) isotherm,
   (II) adiabatisch,
   verloopt.
   Bepaal het verschil in de volumeveranderingen bij (I) en (II) en geef aan welke van deze twee het grootst is.

d) Bepaal voor geval (I) de toe- of afgevoerde warmte en de verandering van de entropie. Bewijs dat $dS \geq 0$.

e) Bepaal voor geval (II) de temperatuursverandering. Is deze groter of kleiner dan nul?

f) Bepaal voor (I) èn (II) de verandering van de inwendige energie. Laat zien dat deze toeneemt en onderzoek voor welke van de twee gevallen deze toename het grootst is.

---

*) Hint: Gebruik voor de uitwerking van $(\frac{\partial p}{\partial T})_V$ de (-1)-regel.

Vraagstuk 3

a) Geef uitgaande van de volgende formuleringen voor de locale eerste hoofdwet:

$$\rho\dot{u} = t_{ij}v_{i,j} + \rho r - h_{i,i} ,$$

en de locale tweede hoofdwet:

$$\dot{s} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{h_i}{T}\right)_{,i} - \frac{r}{T} \geq 0 ,$$

en de definitie:

$$f = u - Ts ,$$

en formulering voor de locale entropie-ongelijkheid (locale tweede hoofdwet) waarin r en u niet meer voorkomen.
Geef de definities van alle in bovenstaande vergelijkingen voorkomende grootheden.

b) Hoe luidt de locale balanswet voor de massa?

c) Beschouw een, niet noodzakelijk ideaal, gas. Neem hiervoor f een functie van ρ, T en $T_{,i}$:

$$f = f(\rho,T,T_{,i}) .$$

Leidt hiermee en met de resultaten van a) en b) constitutieve vergelijkingen af voor s en t_{ij} en bewijs dat f niet expliciet van $T_{,i}$ kan afhangen.
Laat zien dat uit de constitutieve vergelijking voor t_{ij} volgt dat in een gas alleen een hydrostatische druk p kan heersen. Geef de constitutieve vergelijking voor p.

d) Wat blijft er na gebruikmaking van de resultaten van c) nog van de entropie-ongelijkheid over. Geef een eenvoudige, lineaire relatie voor h_i, waarmee aan deze residu-ongelijkheid kan worden voldaan.
Beschouw een geïsoleerde buis gevuld met een warmtegeleidend gas. In de begintoestand heeft het gas een in de richting van de buis verlopende temperatuur, lopende van T_1 aan de ene zijde tot T_2 ($T_2 < T_1$) aan de andere zijde. Verklaar in woorden en m.b.v. de hierboven afgeleide relatie voor h_i, waarom het proces waarbij het gas zich op een uniforme temperatuur instelt irreversibel is.

Examen/tentamen Grondslagen Thermodynamica, Elastostatica en Constitutieve Vergelijkingen (Fysica 40) op 8 juni 1979. (onvolledig)

---

3. i) Leidt de volgende relatie voor de infinitesimale entropie-verandering van een ideaal gas vanuit evenwicht af

$$dS = mc_p \frac{dT}{T} - mR \frac{dp}{p} .$$

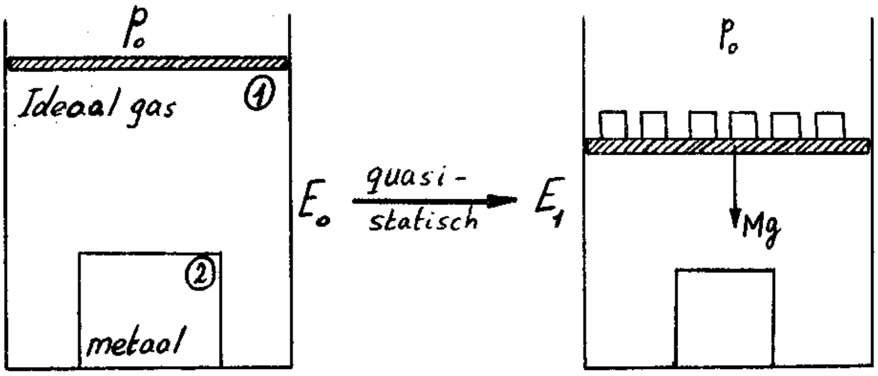
Bepaal hieruit de verandering van de entropie bij de overgang van een evenwichtstoestand, gekarakteriseerd door (T_1, p_1) naar een andere (T_2, p_2). (c_p mag constant worden genomen). [2]

ii) Beschouw een lineair thermoelastisch lichaam, met constante α, K_T en C_p, in evenwicht onder een uniforme hydrostatische druk p, met temperatuur T en volume V.

a) Bewijs de volgende relaties voor de veranderingen dV en dS, indien $p \to p + dp$ en $T \to T + dT$:

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \frac{1}{K_T} dp, \qquad dS = \frac{C_p}{T} dT - \alpha V dp .$$

b) Bepaal hieruit de veranderingen in V en S bij de overgang van een evenwichtstoestand (T_1, p_1) naar een andere (T_2, p_2). (Bedenk dat voor een lineair materiaal 2^e orde veranderingen in V moeten worden verwaarloosd.) [4]



Een volledig geïsoleerde cylinder is afgesloten door een gewichtsloze, eveneens geïsoleerde, zuiger welke vrij kan bewegen. Het oppervlak van de zuiger is O. In de cylinder bevindt zich:

1) een hoeveelheid ideaal gas, met constante soortelijke warmtes per massa-eenheid $c_V^{(1)}$ en $c_p^{(1)}$ en met massa $m^{(1)}$;
2) een blok metaal (= lineair thermoelastisch materiaal) met massa $m^{(2)}$, totale soortelijke warmte bij constante druk $C_p^{(2)}$, (volume) uitzettingscoëfficiënt α en compressiemodulus bij constante temperatuur K_T (alle constant).

Zie blz. 4.

Examen/tentamen Grondslagen Thermodynamica, Elastostatica en Constitutieve Vergelijkingen (Fysica 40) op 8 juni 1979.

Het blok en het gas zijn zowel mechanisch als thermisch met elkaar in contact. Geef grootheden betrekking hebbend op het gas aan met een boven-index $^{(1)}$ en die voor het metaal met $^{(2)}$.

In de oorspronkelijke evenwichtstoestand E_0 is het gas in mechanisch evenwicht met de omgeving, waar een druk p_0 heerst. Het gas heeft dan een volume $V_0^{(1)}$ en het metaal $V_0^{(2)}$, terwijl beide de temperatuur T_0 hebben.

We gaan nu in kleine (infinitesimale) stappen het gewicht van de zuiger verhogen tot een totaal gewicht Mg. Dit proces geschiedt quasi-statisch. Het systeem komt hierdoor in een nieuwe evenwichtstoestand E_1. We geven het volume, de druk en de temperatuur in E_1 voor het gas aan met:

$$V_1^{(1)},\ p_1^{(1)},\ T_1^{(1)}\ ,$$

en voor het metaal met:

$$V_1^{(2)},\ p_1^{(2)},\ T_1^{(2)}\ .$$

iii) Welke conclusies kunt U trekken uit het mechanisch evenwicht tussen gas en metaal en dat tussen het systeem en de omgeving. [2]

iv) Idem uit het thermisch evenwicht tussen gas en metaal. [1]

v) Geef de toestandsvergelijkingen voor het gas en voor het metaal in E_1; d.w.z. druk de volumes van het gas en van het metaal in E_1 uit in de druk en de temperatuur van het gas resp. het metaal. [2]

vi) Bepaal de entropie van het gas en die van het metaal in E_1 als functie van de temperatuur en de druk (neem S in E_0 gelijk aan nul). Geef een uitdrukking voor de totale entropie van het systeem in E_1. Wat moet gelden voor deze totale entropie? [3]

vii) Bepaal, met behulp van de voorafgaande vragen, de druk en de temperatuur in E_1. [2]

Zie blz. 5.

Examen/tentamen Grondslagen Thermodynamica, Elastostatica en Constitutieve Vergelijkingen (Fysica 40) op 8 juni 1979.

---

4. Beschouw de locale entropie-ongelijkheid in de volgende vorm

$$\rho T\sigma = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + t_{ij}v_{i,j} - \frac{h_i T_{,i}}{T} \geq 0 \ .$$

i) Geef aan wat de in bovenstaande ongelijkheid voorkomende grootheden voorstellen. [1]

ii) Wanneer is een thermodynamisch proces reversibel? [1]

Beschouw een medium waarvoor

$$f = f(\rho, T) \ .$$

iii) Wat stelt in dit geval het principe van de equipresentie. [1]

iv) Hoe luidt de locale massabalans. [1]

vi) Bewijs dat voor een dergelijk medium elk proces reversibel is. [3]

vii) Hoe zou U een dergelijk medium noemen en waarom? (Kort argumenteren) [2]

Zie blz. 6.

Examen/tentamen Grondslagen Thermodynamica, Elastostatica en Constitutieve Vergelijkingen (Fysica 40) op 8 juni 1979.

BASISVERGELIJKINGEN (Elastostatica)

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad t_{ij,j} = 0 ,$$

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}[t_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)}\delta_{ij}t_{kk}] + \alpha T\delta_{ij} ;$$

cirkelvormige plaat met rotatie-symmetrische uitbuiging $w(r)$:
plaatvergelijking:

$$\Delta\Delta w(r) = 0, \qquad (\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}) .$$

buigend moment:

$$M_{rr} = -D(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}) .$$

dwarskracht:

$$Q_r = -D\frac{d}{dr}(\Delta w) .$$

BASISVERGELIJKINGEN (Thermodynamica)

Eerste en tweede hoofdwet (homogeen, reversibel, p-V-T-systeem)

$$\delta Q = dU + \delta A, \qquad \delta A = pdV ,$$
$$\delta Q = TdS .$$

Ideaal gas: (constante c_V en c_p)

$$p\,V = mRT, \qquad U = mc_V(T - T_0), \qquad c_p - c_V = R ,$$
$$S = mc_V\log(T/T_0) + mR\log(V/V_0) .$$

Lineair thermoelastisch materiaal, onder uniforme compressie.
(Volume) uitzettingscoëfficiënt

$$\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p .$$

Compressiemodulus bij constante temperatuur:

$$K_T = -V(\frac{\partial p}{\partial V})_T .$$

(Totale) soortelijke warmte bij constante druk:

$$C_p = T(\frac{\partial S}{\partial T})_p .$$

Examen/tentamen Fysica 40: Aspecten van de Continuummechanica op 6 october 1979, 9.00 - 12.00 uur. (onvolledig)

3. Bewijs dat voor een ideaal gas met constante soortelijke warmtes c_p en c_V, dat een reversibel, adiabatisch proces van (V_1,p_1,T_1) naar (V_2,p_2,T_2) ondergaat, geldt :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \quad , \quad (\gamma = c_p/c_V)$$ [3]

4. Een hoeveelheid ideaal gas, massa m, constante soortelijke warmte c_V, ondergaat een kringloop bestaande uit de volgende drie deelprocessen :

$1 \rightarrow 2$: Vanuit zijn begintoestand (p_0,V_0,T_0) wordt aan het gas bij constant blijvende druk een hoeveelheid warmte toegevoerd, totdat het gas een gegeven temperatuur $T_1 = \tau T_0$, $(\tau > 1)$ heeft bereikt.

$2 \rightarrow 3$: Het gas expandeert adiabatisch totdat het weer zijn begintemperatuur T_0 heeft bereikt.

$3 \rightarrow 1$: Het gas wordt isotherm in zijn begintoestand (p_0,V_0,T_0) teruggebracht door aan het gas een hoeveelheid warmte te onttrekken.

De gehele kringloop verloopt reversibel. Druk Uw antwoorden op de volgende vragen uit in p_0,V_0,T_0, M, c_V, R en τ .

i) Schets in een p-V-diagram het verloop van deze kringloop. Geef hierin expliciet de waarden van p en V in de hoekpunten 1, 2 en 3 aan. [3]

ii) Bereken voor de stap $1 \rightarrow 2$ de toegevoerde warmte, de verrichte arbeid en de verandering van de entropie. [2]

iii) Beantwoord dezelfde vragen voor het proces $2 \rightarrow 3$. [2]

iv) Idem voor $3 \rightarrow 1$. [2]

v) Is de over de totale kringloop verrichte arbeid gelijk aan de verandering van de warmtehoeveelheid van het gas? Waarom? Is door deze kringloop de entropie van het gas toegenomen? [3]

vi) Bepaal het rendement van deze kringloop. [3]

Zie blz.5

Examen/tentamen Fysica 40: Aspecten van de Continuummechanica op 6 october 1979, 9.00 - 12.00 uur.

5. Een heet blok metaal (= lineair thermoëlastisch materiaal), soortelijke warmte bij constante druk $c_p^{(1)}$, temperatuur $T_0^{(1)}$, wordt gebracht in een cylinder gevuld met een koud gas, soortelijke warmte bij constante druk $c_p^{(2)}$, temperatuur $T_0^{(2)}$, $(T_0^{(1)} > T_0^{(2)})$. $c_p^{(1)}$ en $c_p^{(2)}$ mogen constant worden genomen.

De cylinder is afgesloten door een vrij beweegbare zuiger, waardoor de druk in de cylinder constant blijft en er treedt geen warmteuitwisseling met de omgeving op.

i) Bewijs dat de conditie voor thermisch evenwicht:

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)} \quad , \quad (T_1^{(\cdot)} : \text{eindtemperaturen}) \; ,$$

kan worden verkregen uit de eis dat de entropieverandering van het totale systeem maximaal moet zijn, onder de nevenconditie dat de door het metaal verloren warmte gelijk is aan de warmtetoename van het gas. [5]

ii) Is het proces van $(T_0^{(1)}, T_0^{(2)})$ naar $(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$ reversibel of irreversibel? Argumenteer Uw antwoord. [2]

BASISVERGELIJKINGEN (Thermodynamica)

Eerste en tweede hoofdwet (homogeen, reversibel, p-V-T-systeem)

$$\delta Q = dU + \delta A \quad , \quad \delta A = pdV \; ,$$

$$\delta Q = TdS \quad , \quad \left(C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\right)$$

Ideaal gas (constante c_v en c_p)

$$pV = mRT \quad , \quad U = mc_v(T - T_0) \; , \; c_p - c_v = R \; .$$

Eerste en tweede hoofdwet voor een lineair thermoëlastisch materiaal onder uniforme compressie.

$$\delta Q = TdS = C_p dT - \alpha VTdp$$

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ANTWOORDEN

Examenopgaven 24 mei 1978

I. a.

1) -

2) $A_{12} = -mC_v(T_2 - T_1) < 0,\ A_{23} = 0,\ A_{3.4} = mC_v(T_3 - T_4) > 0$

$A_{41} = 0.$

3) $Q_{12} = 0,\ Q_{23} = mC_v(T_3 - T_2) > 0,\ Q_{34} = 0,\ Q_{41} = -mC_v(T_4 - T_1) < 0$

4) $\eta = (A_{12} + A_{34})/Q_{23} = 1 - {}^{T_2}/T_2 = 1 - ({}^{V_2}/V_1)^{R/C_V} =$

$= 1 + ({}^{p_1}/p_2)^{R/(R+C_V)}$.

b. -

II. -

III. 1) $-\rho f - \rho ST + t_{ij}\ v_{i,j} - \dfrac{h_i\ T,i}{T} \geq 0$

2) $C_{\alpha\beta} := x_{i,\alpha}\ x_{i,\beta} \Rightarrow f = f(C_{\alpha\beta})$

3) -

4) $t_{ij} = \rho \dfrac{\partial t}{\partial E_{\alpha\beta}}\ x_{i,\alpha}\ x_{j,\beta}$

5) -

6) $t_{ij} = \rho x_{i,\alpha}\ x_{j,\beta}[2a_1 I_1 \partial_{\alpha\beta} + 2a_2 E_{\alpha\beta} + 4a_4 I_2 E_{\alpha\beta} + 3a_3 E_{\alpha\gamma} E_{\gamma\beta}]$

Examenopgaven 23 september 1978

1. A) $A_{max} = U_1 - U_2 - T_0(S_1 - S_2) + p_0(V_1 - V_2)$

B) $A_{max} = p_1 V_1(\ln {}^{p_1/}p_0 + {}^{p_0/}p_0 - 1)$

2. i) $T_1^{(1)} = p_1 V_0/R\left[2 - ({}^{p_1/}p_0)^{-C_v/C_R+C_v)}\right],\ T_1^{(2)} = T_0({}^{p_1/}p_0)^{R/(R+C_v)}$,

$p_1^{(1)} = p_1^{(2)} = p_1,\ V_1^{(1)} = V_0\left[2 - ({}^{p_1}/p_0)^{-C_v/(R-C_v)}\right],$

$V_1^{(2)} = V_0({}^{p_1/}p_0)^{-C_v/(R+C_v)}$.

ii) $$A = C_v T_0 \left[\left({}^{p_1}/_{p_0} \right)^{R/(R+C_v)} - 1 \right] .$$

iii) $$Q = 2\, C_v T_0 \left({}^{p_1}/_{p_0} - 1 \right)$$

iv) $$\Delta S^{(1)} = C_v \, \ell n \frac{p_1}{p_0} + (R+C_v) \, \ell n \left[2 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{-C_v/(R+C_v)} \right] ,$$

$$\Delta S^{(2)} = 0$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S^{(1)}$$

3) i) $$-\rho \dot{f} - \rho s \dot{T} + t_{ij} V_{i,j} - \frac{h_i T,i}{T} \geq 0$$

ii) -

iii) $$-\frac{h_i T,i}{T} \geq c, \; h_i = -kT,i \; , \quad k \geq 0$$

iv) $$S = C_v \frac{T-T_0}{T_0} + \frac{\alpha K}{\rho} e_{kk} ,$$

$$t_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu\, e_{ij} - \alpha K (T-T_0) \delta_{ij}$$

v) $$\Delta T = T - T_0 = \frac{3\alpha K T_0}{\rho C_v} \varepsilon$$

vi) $$S = \frac{3\alpha K}{\rho} \varepsilon \quad , \; Q = T_0 S = -\frac{3\alpha K T_0}{\rho} \varepsilon$$

<u>Examenopgaven 22 december 1978</u>

1. a) -

b) $$a_{12} = RT_\ell \, \ell n \frac{V_2}{V_1} < 0 \; , \; a_{23} = 0 \; , \; a_{34} = RT_h \, \ell n \frac{V_1}{V_2} > 0 \; , \; a_{41} = 0 \; .$$

$$q_{12} = RT_\ell \, \ell n \frac{V_2}{V_1} < 0 \; , \; q_{23} = C_v (T_h - T_\ell) > 0 \; , \; q_{34} = RT_h \, \ell n \frac{V_1}{V_2} > 0 \; ,$$

$$q_{41} = C_v (T_\ell - T_h) < 0$$

c) $$\eta = \frac{R(T_h - T_\ell) \, \ell n \, {}^{V_1}/_{V_2}}{C_v (T_h - T_\ell) + RT_h \, \ell n \, {}^{V_1}/V_2}$$

d) $$\eta = 1 - \frac{T_\ell}{T_h}$$

e) $\eta = \eta_{Carnot}$

f) -

g) -

2. a) -

b) $dp = \alpha K_T dT - K_T \frac{dV}{V}$,

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \alpha K_T dV$$

c) $\left(\frac{dV}{V}\right)_T = -\frac{dp}{K_T}$, $\left(\frac{dV}{V}\right)_S = \frac{1}{[1 + \alpha^2 VTK_T]} \frac{dp}{K_T} = -\frac{dp}{K_S}$

$$\left|\left(\frac{dV}{V}\right)_T\right| > \left|\left(\frac{dV}{V}\right)_S\right|$$

d) $\delta Q = -\alpha VTdp$, $dS = -\alpha Vdp$.

e) $dT = \frac{\alpha TV}{[C_V + \alpha^2 VTK_T]}$

f) $dU = (\frac{p}{K_T} - \alpha T)Vdp$, $dU = \frac{pV}{K_T} \frac{dp}{[1 + \alpha^2 VTK_T/C_v]} > 0$.

3. -

Examenopgaven 8 juni 1979

3. i) $S_2 - S_1 = mCp\ \ell n\ {}^{T_2}/_{T_1} - mR\ \ell n\ {}^{p_2}/_{p_1}$.

ii) a) -

b) $S_2 - S_1 = C_p\ \ell n\ {}^{T_2}/_{T_1} - \alpha V(p_2 - p_1)$,

$$V_2 - V_1 = V_1\alpha(T_2 - T_1) - \frac{p_2 - p_1}{K_T}$$

iii) $p_1^{(1)} = p_1^{(2)} = p_1$

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{O}$$

iv) $T_1^{(1)} = T_1^{(2)} = T_1$

v) $V_1^{(1)} = \frac{m_1 RT_1}{p_1}$, $\frac{V_1^{(1)} - V_0^{(1)}}{V_0^{(1)}} = \alpha(T_1 - T_0) - \frac{p_1 - p_0}{K_T}$

vi) $$s_1^{(1)} = m^{(1)}c_p^{(1)} \quad n\,\frac{T_1}{T_0} - m^{(1} \; R \;\ell n(\frac{p_1}{p_0})$$

$$s_1^{(2)} = c_p^{(2)} \;\ell n\,\frac{T_1}{T_0} - \alpha V_0^{(2)}(p_1 - p_0)$$

$$s_1^{(t)} = 0$$

vii) $$p_1 = p_0 + \frac{M_g}{O}$$

$$T_1 = T_0(1 + \frac{mG}{Op_0})\;\exp\;(\frac{\alpha V_0^{2} Mg}{OC_p})$$

4\. i) -

ii) voor $\delta = 0$

iii) -

iv) $\dot{\rho} + \rho V_{i,i} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = - \rho\delta_{ij}V_{i,j}$.

v) -

vi) -

<u>Examenopgaven 6 oktober 1979</u>

3 -

4\) ii) $Q_1 = m(R+C_v)T_0\;(\tau-1)$, $A_{12} = p_0V_0(\tau-1)$, $\Delta S = m(R+C_v)\;\ell n\;\tau$

iii) $Q_{23} = 0$, $A_{23} = mC_v(\tau-1)$, $S_3 - S_2 = 0$

iv) $Q_2 = - m(R+C_v)T_0\;\ell n\;\tau$, $A_{31} = -R(R+C_v)T_0\;\ell n\;\tau$

$\Delta S = - m(R+C_v)\;\ell n\;\tau$

v) $\Sigma\,Q = \Sigma\,A = m(R+C_v)T_0(\tau-1) - m(R+\dot{C}_v)\;\ell n\;\tau$.

vi) $\eta = 1 - \frac{\ell n\tau}{\tau-1}$

5) i) -

ii) Irreversibel want $\Delta S = - C_p^{(1)}[\frac{1}{T_1^{(1)}} - \frac{1}{T_1^{(2)}}]\Delta T^{(1)} +$

$$+ \ C_p^{(1)}[1 + \frac{C_p^{(1)}}{C_p^{(2)}}] \ (\Delta T^{(1)})^2 + \ldots \quad > \ 0$$

met $\Delta T^{(1)} = T_1^{(1)} - T_o^{(1)}$

Lijst van vreemde woorden, met een korte toelichting.

additief	: voor een systeem bestaande uit de deelsystemen 1,2, ... n is elke extensieve parameter van het gehele systeem de som van de overeenkomstige parameters voor de deelsystemen. Dit is de additieve eigenschap.
adiabatisch	: ondoorlaatbaar voor thermische energie. (geldt voor een wand-systeem grens) niet-adiabatisch : zie diathermaan.
afgesloten	: afgesloten of geïsoleerd systeem - de systeemgrenzen laten geen thermische energie door, geven evenmin mechanische arbeid door en laten geen materiaal deeltjes door.
aggregatie-toestand	: er zijn drie aggregatie-toestanden a) de gas (damp-) vormige - b) de vloeibare - c) de vaste toestand.
calorisch	: calorische grootheid, $\in \{U,F,G,H,Q,A\}$.
componenten	: mengsels bestaan uit meer componenten; één component is: de zuivere stof.
constraint	: belemmering waardoor de natuurlijke tendens tot vereffening ten gevolge van verschillen in intensiteit binnen een (totaal) systeem uitblijft.
diathermaan	: een wand, systeemgrens, is diathermaan indien deze thermische energie doorlaat.
dissipatie	: verschijnselen waarbij vormen van mechanische arbeid in warmte omgezet worden (wrijving en ongerichte snelheid, trillingsdemping).

drukcontact	: een systeem is in drukcontact met de omgeving indien de druk binnen het systeem te beïnvloeden is door de druk buiten het systeem of door een belasting van buiten af op de systeemgrens. (Hiertoe moet de systeemgrens locaal verplaatsbaar zijn)
enkelvoudig	: enkelvoudige systemen bestaan niet uit deelsystemen.
evenwicht	: in een systeem heerst thermodynamisch evenwicht indien de eigenschappen binnen het systeem niet veranderen met de tijd.
Ersatzprozess	: een vervangingsproces als hulpmiddel gebruikt.
extensieve parameter	: hun waarde is evenredig met de hoeveelheid massa in het systeem; additieve parameters zijn extensieve parameters.
geïsoleerd	: afgesloten.
gesloten	: gesloten systeem - de systeemgrens laat geen materie door.
grammol (ook wel grammolecuul)	: zoveel gram van een stof als het moleculair gewicht bedraagt. notatie : 1 mol : 2 molen molair = moleculair.
heterogeen	: de macroscopische eigenschappen binnen het systeem zijn niet in alle punten gelijk maar veranderen sprongsgewijs op de fasengrens.
homogeen	: de macroscopische eigenschappen zijn in alle punten van het systeem gelijk.
hysterese	: het verschijnsel, dat een verandering niet omkeerbaar is ondanks voorzieningen zoals bijv. zorg voor infinitesimaal kleine verschillen in intensiteit, zeer langzaam veranderingen aanbrengend. De verandering in tegenovergestelde richting begint pas na overschrijding van een zekere (negatieve) drempelwaarde van het verschil in intensiteit.

karakteristiek	: karakteristieke functies, de elementen in de verzameling {U, H, F, G}
kringloop	: een reeks opeenvolgende processen eindigend bij de begintoestand
macroscopisch	: kleinschalig, echter groot genoeg om bij middeling van intensieve parameterwaarden dezelfde uitkomst te vinden
omgeving	: buiten het beschouwde systeem vallend
omkeerbaar	: zie quasi-statisch
proces	: verandering in de thermodynamische toestand
quasi kringloop	: een Ersatzprozess voor een reeks opeenvolgende processen waarbij de voor de continuïteit noodzakelijke verversing van medium en afdrijving van afgewerkt medium genegeerd worden
quasi statisch	: proces tussen infinitesimaal dicht bij elkaar liggende evenwichtstoestanden waarbij elke stapje stil gezet kan worden en zelf in tegengestelde richting kan verlopen
reversibel	: zie quasi statisch
specifiek of soortelijk	: specifieke variabele - de extensieve grootheid betrokken op één mol of één kg
systeem	: materieelstelsel binnen gedefinieerde grenzen (wezenlijke en/of fictieve grenzen)
thermische variabele	: element uit {p, V, T, S}

thermisch of thermo-dynamisch proces	: zie proces
thermodynamisch oppervlak	: de voorstelling van de toestandvergelijking in R_3 (bijv. op p, V, T coordinaten)
toestandsfunctie	: element uit verzameling {U, F, G, H}
toestandsgrootheid	: grootheid uit de verzameling {p, V, T, S, U, F, G, H} waarmee men de toestand kan vastleggen, met twee toestandsgrootheden en bekendheid met de toestandvergelijking is de toestand volledig gegeven.
toestandsvergelijking	: de relatie tussen p V T

----

grootheid naam	grootheid symbool	SI-eenheid naam	SI-eenheid symbool	toegestane andere eenheden[1])	herleiding van andere eenheden naar SI-eenheden[2])
lengte	l	meter	m		
massa	m	kilogram	kg	ton (t)	1 ton = 1000 kg
tijd	t	seconde	s	jaar (a) dag (d) uur (h) minuut (min)	1 a ≈ 31,6 Ms 1 d = 24 h = 86,4 ks, 1 h = 3600 s 1 min = 60 s
volume	V	kubieke meter	m^3	liter (l)	1 l = 1 dm^3 1 barrel (petr. US) ≈ ≈ 159 dm^3
oppervlak	A	vierkante meter	m^2		
druk	p	pascal (N/m^2)	Pa	bar (bar)	1 bar = 10^5 Pa 1 atm = 101,325 kPa 1 torr = 1 mmHg ≈ ≈ 133,3 Pa 1 kgf/cm^2 ≈ 98,1 kPa 1 cmH_2O ≈ 100 Pa
temperatuur	T, t	kelvin	K	graad Celsius (°C)	1 °C = 1 K 0 °C ≙ 273,15 K
temperatuurverschil	ΔT	kelvin	K		
dichtheid (volumieke massa)	ϱ	kilogram per kubieke meter	kg/m^3	(zie toelichting, punt 4)	
soortelijk volume (massiek volume)	v	kubieke meter per kilogram	m^3/kg		
compressibiliteitsfactor	z	(dimensieloos)		(zie toelichting, punt 4)	
hoeveelheid warmte	Q	joule	J		1 cal = 4,1868 J
warmtecapaciteit	C	joule per kelvin	J/K		
soortelijke enthalpie	h	joule per kilogram	J/kg		
soortelijke warmte	c	joule per kilogram kelvin	J/(kg·K)		
warmtestroom	Φ, $\dot{Q}$	watt (=1 J/sec)	W		1 kcal/h = 1,163 W
warmtecapaciteitsstroom	Φ_c, $\dot{C}$	watt per kelvin	W/K		
warmtegeleidingscoëfficiënt	λ	watt per meter kelvin	W/(m·K)		1 kcal/(m·h·°C) = = 1,163 W/(m·K)
warmteoverdrachtscoëfficiënt	α	watt per vierkante meter kelvin	W/(m^2·K)		1 kcal/(m^2·h·°C) = = 1,163 W/(m^2·K)
warmtedoorgangscoëfficiënt	K	watt per vierkante meter kelvin	W/(m^2·K)		1 kcal/(m^2·h·°C) = = 1,163 W/(m^2·K)
kinematische viscositeit	ν	meterkwadraat per seconde	m^2/s		1 centistokes (cSt) = = 1 mm^2/s
dynamische viscositeit	η	pascal seconde	Pa·s		1 centipoise (cP) = = 1 mPa·s
hoeveelheid stof	n	mol	mol	(zie toelichting, punt 2)	
molaire dichtheid	ϱ_m	mol per kubieke meter	mol/m^3		
molair volume	V_m	kubieke meter per mol	m^3/mol	(zie toelichting, punt 3)	
molaire enthalpie	H_m	joule per mol	J/mol		
molaire warmtecapaciteit	C_m	joule per mol kelvin	J/(mol·K)		
molaire massa	M	kilogram per mol	kg/mol	(zie toelichting, punt 1)	
relatieve molaire massa	M_r	(dimensieloos)		(zie toelichting, punt 1)	
stofstroom	q_n, $\dot{n}$	mol per seconde	mol/s	vacuümlek: Pa·m^3/s	1 torr·l/s ≈ ≈ 0,1333 Pa·m^3/s 1 Pa·m^3/s ≙ 0,4 mmol/s (bij 27,5 °C)
massastroom	q_m, $\dot{m}$	kilogram per seconde	kg/s		
volumestroom	q_v, $\dot{V}$	kubieke meter per seconde	m^3/s		
massafractie (van component "B" in het mengsel)	w_B	(dimensieloos)		g/kg, mg/kg, % (m/m)	
molaire fractie (stoffractie) (van component "B" in het mengsel)	x_B	(dimensieloos)		mmol/mol, µmol/mol, % (V/V) (% (V/V) alleen voor gassen)	
(massa)-concentratie (van component "B" in het mengsel)	ϱ_B	kilogram per kubieke meter	kg/m^3	g/l, mg/l	$\varrho_B = x_B M/V_m$
molaire concentratie (van component "B" in het mengsel)	c_B	mol per kubieke meter	mol/m^3	mol/l	

[1]) Zie ook NEN 1000 – Regels voor het hanteren van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI).
[2]) Zie ook NEN 3049 – Herleiding van eenheden tot SI-eenheden.