

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

KINEMATICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. G.R. Veldkamp

Studiejaar 1965-1966

Opgetekend door

Dr. E.A. Dijksman

Bibel Hoog

TECHNISCHE HOOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde
Groep Basisonderwijs

**Onderafdeling
der Wiskunde**

Kinematica

STUDIEJAAR 1965 - 1966
OPGETEKEND DOOR
D R. E. A. DIJKSMAN

NAAR HET COLLEGE VAN
PROF. DR. G.R. VELDKAMP



**TECHNISCHE HOOGESCHOOL
EINDHOVEN**

Inhoudsbeschrijving

Kinematica 1965-1966

LITERATUUR	-
INLEIDING	a
KINEMATICA VAN VLAKKE STELSLS	1
De relatieve beweging	7
Stelling van Hartman	18
Toepassing van de algemene stelling van Euler-Savary	21
Versnellingsverdeling	23
ANALYTISCHE BEHANDELING VAN DE RELATIEVE BEWEGING	27
EEN VERSNELLINGSCONSTRUCTIE BERUSTEND OP DE RELATIEVE BEWEGING	30
VOORTGEZETTE KROMMINGSTHEORIE	32
DE ONTAARDING VAN DE CIRKELLOOPKROMME	38
DE ONTAARDINGEN VAN DE MIDDELPUNTSKROMME	40
DE POSITIE VAN HET BEWEGENDE VLAK, WAARBIJ $\omega = \dot{\varphi} = 0$	42
DE STANGENVIERZIJDEN IN HET ALGEMEEN	47
DE ONGELIJKHEDEN VAN GRASHOF	51
DE KINEMATICA DER DISCRETE STANDEN	56
HET BEGRIIP ISOGONALE VERWANTSCHAP	58
Isogonale verwantschap van lijnen	58
Isogonale verwantschap van punten	59
TOEPASSING IN DE KINEMATICA	63
VLIEGERVIERHOEK	67
ONTWERPVRIJHEIDSGRADEN	70
VIER DISCRETE STANDEN VAN HET BEWEGENDE VLAK	73

Kinematica
studiejaar '65-'66
prof. dr. G.R. Veldkamp

Prijs f 1,80

K I N E M A T I C A

studiejaar 1965-1966

opgetekend door

dr. E. A. Dijksman

naar het college van

prof. dr. G. R. Veldkamp

T e c h n i s c h e H o g e s c h o o l E i n d h o v e n

V L A K K E K I N E M A T I C A .

BEWEGINGSLEER

analyse en synthese van mechanismen.

Literatuur:

Grondleggers:

Franz Reuleaux: "Theoretische Kinematik".
(1875).

Burmester: "Lehrbuch der Kinematik".
(3 dln.) (1886).

Beginnelsen der kinematica:

H.J.C. Nunnink: "Kinematica van vlakke
stelsels". (Delft 1962).

F. Schuh: "Leerboek der theoretische
Mechanica". (4 dln).

Deel I: Kinematica.

modern:

Rosenauer en Willis: "Kinematics of
Mechanisms". (Sydney 1953).

uitvoerig:

R. Beyer: "Kinematische Getriebesynthese".
(Springer-Verlag 1953).

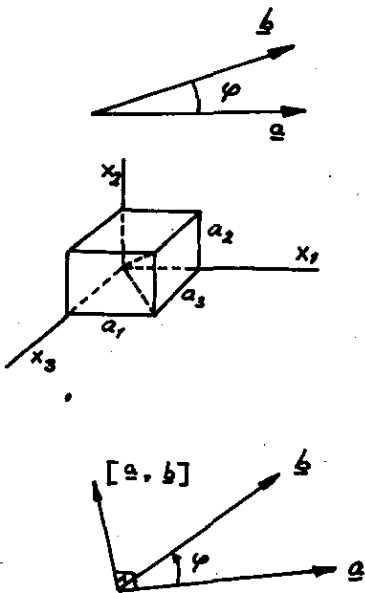
onder toepassing van de computer:

J. Hirschhorn: "Kinematic and Dynamics of
Plane Mechanisms".
(McGraw-Hill 1962).

ruimtelijk:

R. Beyer: "Technische Raumkinematik". 1963.

INLEIDING.



VECTOREN.

$$(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$$

Dit is een eigenschap van het inwendig produkt $(\underline{a}, \underline{b})$, welk volgt uit de definitie

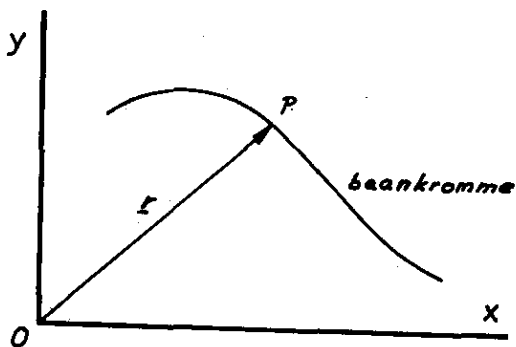
$$(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

vlak wordt dit: $(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Een inwendig produkt is nul, wanneer de beide vectoren loodrecht op elkaar staan.

Een vectorprodukt $[\underline{a}, \underline{b}]$ is een vector loodrecht op het vlak van de twee vectoren \underline{a} en \underline{b} in een richting, die overeenkomt met de voortgangsrichting van een rechtse schroefbeweging bij rotatie van \underline{a} naar \underline{b} . De grootte van het vectorprodukt is gelijk aan het opp. van het par. gram gevormd door de twee vectoren \underline{a} en \underline{b} .

$$\text{Dus } |[\underline{a}, \underline{b}]| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi.$$



De plaatsvector van de door het punt P doorlopen baankromme is afhankelijk van de tijd. Dus $\underline{r} = \underline{f}(t)$.

De tijdsafgeleide van zulk een plaatsvector wordt als volgt gedefinieerd:

$$\dot{\underline{a}} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2).$$

Links staat dus de fluctie van de plaatsvector \underline{a} .

$$\text{We hebben : } \dot{\underline{a}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{a}(t+h) - \underline{a}(t)}{h}$$

Voor een inwendig produkt geldt:

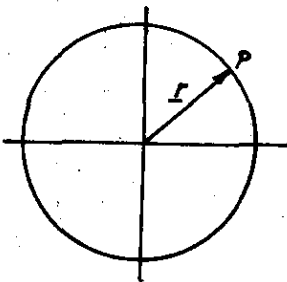
$$\frac{d}{dt} (\underline{a}, \underline{b}) = (\dot{\underline{a}}, \underline{b}) + (\underline{a}, \dot{\underline{b}}),$$

$$\begin{aligned} \text{omdat } \frac{d}{dt} (\underline{a}, \underline{b}) &= \frac{d}{dt} (a_1 b_1 + a_2 b_2) = (\dot{a}_1 b_1 + \dot{a}_2 b_2) + (a_1 \dot{b}_1 + a_2 \dot{b}_2) = \\ &= (\dot{\underline{a}}, \underline{b}) + (\underline{a}, \dot{\underline{b}}). \end{aligned}$$

$$\text{Ook is } \frac{d}{dt} [\underline{a}, \underline{b}] = \frac{d}{dt} (a_1 b_2 e_3) = e_3 \{ \dot{a}_1 b_2 + a_1 \dot{b}_2 \} = \\ = [\underline{\dot{a}}, \underline{b}] + [\underline{a}, \underline{\dot{b}}].$$

Bij deze afleiding is \underline{a} langs de x_1 - as genomen en is $|e_3| = 1$.
 e_3 is de eenheidsvector langs de x_3 - as. $\underline{a} (a_1, 0)$ en $\underline{b} (b_1, b_2)$.

Een plaatsvector hangt af van 2 grootheden, die niet beide een functie van de tijd behoeven te zijn.



Bij een rondgaande beweging van het punt P is alleen de richting een functie van de tijd als de baancurve een cirkel is.

De grootte van de vector blijft constant.
d.w.z. $(\underline{r}, \underline{r}) = l^2 = \text{constant}$
en dus is ook

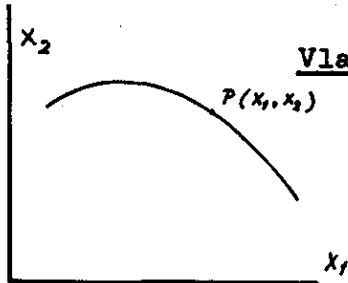
$$(\underline{\dot{r}}, \underline{r}) + (\underline{r}, \underline{\dot{r}}) = 0$$

en daar $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$
(maar $[\underline{a}, \underline{b}] = -[\underline{b}, \underline{a}]$)

wordt dit $2(\underline{\dot{r}}, \underline{r}) = 0$

of $(\underline{\dot{r}}, \underline{r}) = 0$ d.w.z.: $\underline{\dot{r}} \perp \underline{r}$

De snelheidsvector staat loodrecht op de plaatsvector, als de laatste een constante grootte heeft.



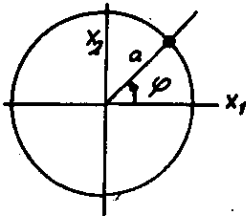
Vlakke krommen.

$\left. \begin{matrix} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{matrix} \right\}$ is de parametervoorstelling van de baankromme P.

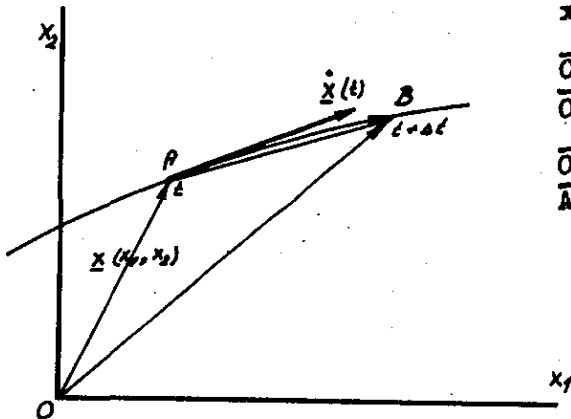
Eerste voorbeeld:

$\left. \begin{matrix} x_1 = t^2 \\ x_2 = t \end{matrix} \right\}$ Het elimineringsresultaat is dan $x_2^2 = x_1$

Tweede voorbeeld:



$\left. \begin{matrix} x_1 = a \cos \varphi \\ x_2 = a \sin \varphi \end{matrix} \right\}$ (de parameter is hier de hoek φ)
Hierbij is b.v. $\varphi = \omega t$



$\left. \begin{matrix} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{matrix} \right\}$ $\underline{x} = \underline{x}(t)$

$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\underline{x}(t + \Delta t)}{\underline{x}(t)}$

$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\underline{x}(t) - \underline{x}(t)}$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t + \Delta t) - \underline{x}(t)}{\Delta t}$$

$\dot{\underline{x}}(t)$ is dus een vector, die in A aan de kromme raakt.

Naast de parameter t wordt nu een nieuwe parameter u ingevoerd.

$\underline{x} = \underline{x}(u)$
 $u = u(t)$ en dus ook $t = t(u)$

Voorts is:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{x}}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \dot{u} \frac{d\underline{x}}{du}$$

$\frac{d\underline{x}}{du}$ is de raaklijnvector.

We kunnen ons nu afvragen wat u voor iets is, opdat deze raaklijnvector de eenheidsvector is (dus de lengte 1 heeft)

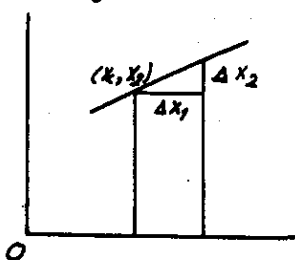
We eisen dus, dat $\left(\frac{d\underline{x}}{du}, \frac{d\underline{x}}{du} \right) = 1$, zodat

$$(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = \left(\dot{u} \frac{d\underline{x}}{du}, \dot{u} \frac{d\underline{x}}{du} \right) = \dot{u}^2 \left(\frac{d\underline{x}}{du}, \frac{d\underline{x}}{du} \right) = \dot{u}^2$$

$$\text{Dus } \dot{u} = \sqrt{(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}})} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

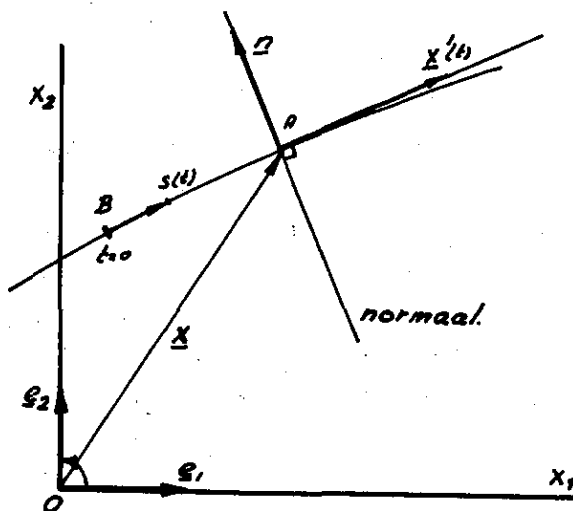
Meetkundig betekent dit, dat

$$u = \int \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt = \int \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \int ds = s, \text{ de booglengte.}$$



$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2$$

Kiezen we dus als parameter de langs de kromme afgelegde weg, welke tijdsafhankelijk is, dan is $\frac{d\underline{x}}{ds}$ de eenheidsvector in de richting van de raaklijn aan de kromme.



$$\underline{x} = \underline{x}(s)$$

def. $\frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{x}'$ (= de eenheidsvector langs de raaklijn).

(Het streepje betekent differentiëren naar de booglengte).

\underline{e}_1 en \underline{e}_2 zijn de eenheidsvectoren langs de assen van het assenstelsel. \underline{n} is de eenheidsvector langs de normaal in A.

Ga nu over op een andere letter, dus stel $\underline{x}' = \underline{t}$ (waarbij t geen tijd voorstelt, maar de eenheidsvector is in A in de bewegingsrichting van A).

Dus $(\underline{t}, \underline{t}) = 1$ waait volgt, dat:

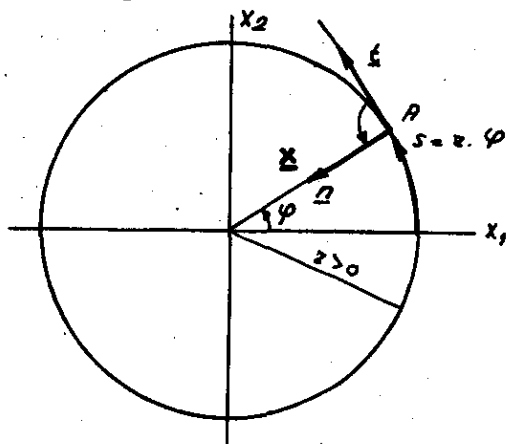
$$(\underline{t}', \underline{t}) = 0, \text{ zodat } \underline{t}' \perp \underline{t}$$

\underline{t}' is geen eenheidsvector meer, maar staat loodrecht op \underline{t} en heeft dus de richting van \underline{n} .

\underline{n} en \underline{t} zijn de eenheidsvectoren in het gedraaide assenstelsel, zoals \underline{e}_1 en \underline{e}_2 de eenheidsvectoren waren in het oorspronkelijke assenstelsel.

We hebben dus, dat $\underline{t}' = \kappa \cdot \underline{n}$, waarbij κ (= kappa) de kromming genoemd wordt in het punt A van de kromme.

De vraag is nu wat de betekenis is van deze definitie.



Voorbeeld:

De parametervoorstelling van de cirkel is:

$$\underline{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \text{ dus } \underline{x}(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right)$$

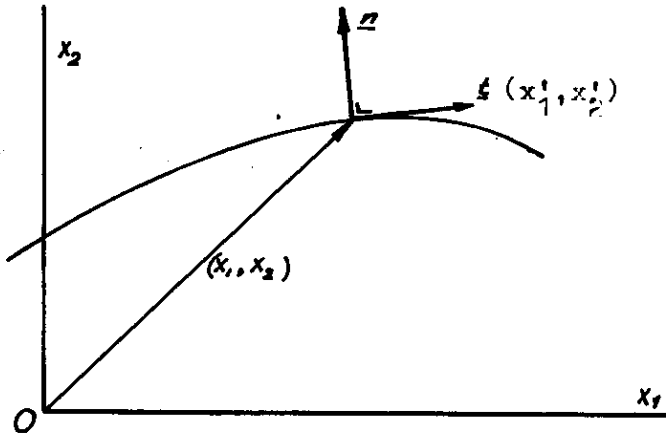
$$\underline{t} = \underline{x}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$$

$$\underline{t}' = \underline{x}''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

$$\text{Voorts is } \underline{n} = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$$

$$\text{Inderdaad is dus } \kappa = \frac{1}{r}$$

De bewegingsrichting over 90° linksom gedraaid geeft de richting aan van \underline{n} .



$\underline{n} \perp \underline{t}$, dus $(\underline{t}, \underline{n}) = 0$
 Dit gedifferentieerd geeft:
 $(\underline{t}', \underline{n}) + (\underline{t}, \underline{n}') = 0$ (1)
 waarbij gegeven is, dat

$$\left. \begin{aligned} \underline{t}' &= \kappa \underline{n} \\ (\underline{n}, \underline{n}) &= 1 \\ (\underline{t}, \underline{t}) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

zodat

$$2(\underline{n}', \underline{n}) = 0$$

dus $\underline{n}' \perp \underline{n}$

\underline{n}' heeft de richting van \underline{t} , dus stel $\underline{n}' = \lambda \underline{t}$
 Substitutie van de uitdrukkingen voor \underline{t}' en \underline{n}' geeft in (1) het resultaat:

$$(\kappa \underline{n}, \underline{n}) + (\underline{t}, \lambda \underline{t}) = 0 \text{ of } \kappa (\underline{n}, \underline{n}) + \lambda (\underline{t}, \underline{t}) = 0$$

zodat $\lambda = -\kappa$.

Hieruit volgt dus, dat

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{t}' &= \kappa \underline{n} \\ \underline{n}' &= -\kappa \underline{t} \end{aligned}}$$

De Frenet-betrekkingen voor het platte vlak.

Berekening van κ .

$\underline{t} = (x_1', x_2')$ en $\underline{n} = (-x_2', x_1')$
 omdat het produkt van de richtingscoëfficiënten = - 1 moet zijn als ze loodrecht op elkaar staan.

Dus $\underline{n}' = (-x_2'', x_1'')$.

Uit $(\underline{t}, \underline{n}') = -\kappa$ volgt nu dus, dat

$$-\kappa = (\underline{t}, \underline{n}') = -x_1' x_2'' + x_1'' x_2'. \text{ Zodat } \kappa = \underline{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}$$

Hierbij is de booglengte s de parameter. Dus:

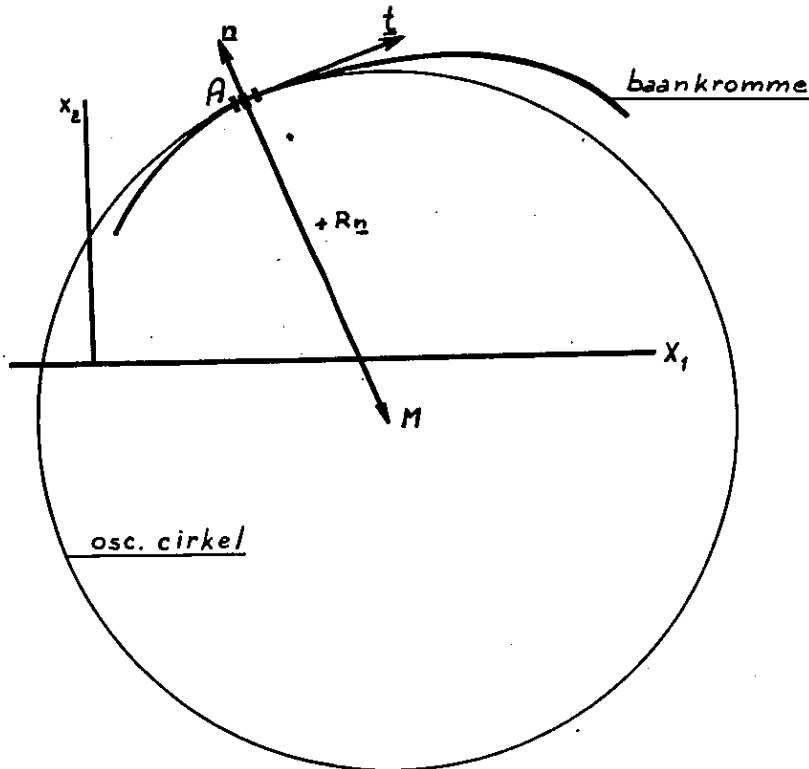
$$\kappa = \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2} = \dot{x}_1 \frac{dt}{ds} \left\{ \dot{x}_2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \ddot{x}_2 \frac{d^2 t}{ds^2} \right\} +$$

$$- \dot{x}_2 \frac{dt}{ds} \left\{ \dot{x}_1 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \ddot{x}_1 \frac{d^2 t}{ds^2} \right\}$$

Zodat $\kappa = (\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3$

of $\boxed{\kappa = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}}}$

Hierin is alleen de tijd t de parameter.

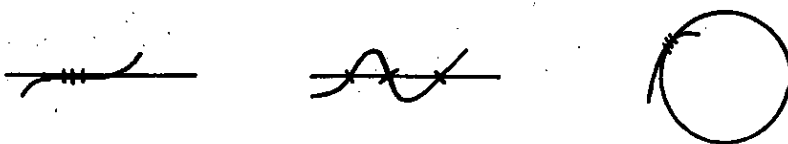


K is de kromming

$\frac{1}{R} = R$ of ρ heet de kromtestraal (positief of negatief)

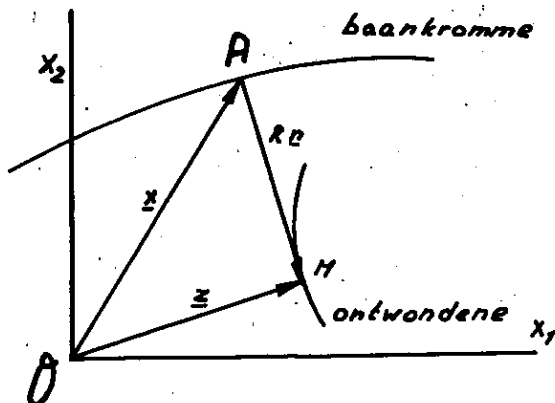
Het kromtemiddelpunt is M , dat ligt in het uiteinde van $+Rn$ met beginpunt in A .

De overeenkomstige cirkel heet kromtecirkel of osculatiecirkel. Deze cirkel raakt aan de kromme en heeft in A drie met de kromme samenvallende punten gemeen. Links en rechts van A ligt de osc. cirkel aan verschillende zijden van de baankromme.



Het is net als bij een buigpunt: de baankromme passeert (doorsnijdt) de osc. cirkel in het raakpunt.

De meestk. plaats van de middelpunten, die behoren bij punten van de baankromme wordt evoluit of ontwondene van de kromme genoemd.



De vectorvergelijking van de evoluit is dus:

$$\underline{z} = \underline{x} + R \underline{n}$$

Geven we $\underline{z} = \underline{z}(s)$, dan vinden we de raaklijn aan de evoluit door differentiatie naar de booglengte s

$$\underline{z}' = \underline{x}' + R' \underline{n} + R \underline{n}'$$

of $\underline{z}' = \underline{t} + R'\underline{n} + R \cdot (-\underline{k} \cdot \underline{t})$ waarbij $R \cdot \underline{k} = 1$, dus

$$\underline{z}' = R' \cdot \underline{n}$$

De evoloot raakt dus in het kromtemiddelpunt aan de normaal.

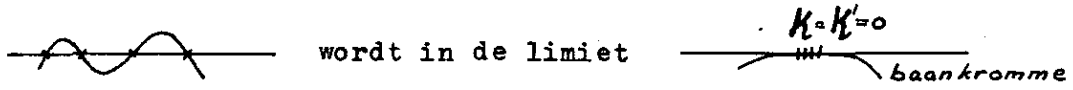
Als A de kromme doorloopt, omhullen de normalen van de kromme de evoloot

De evoloot is dus de omhullende van de normalen van de kromme.

Als $\underline{k} = 0$, dan ligt M oneindig ver weg en is A dus een buigpunt.

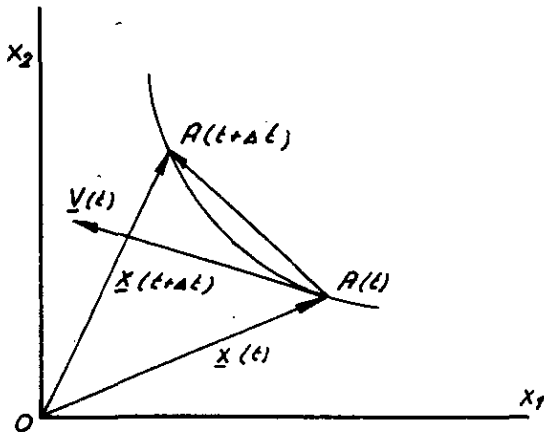


Als behalve $\underline{k} = 0$ ook $\underline{k}' = 0$ heeft de raaklijn vier samenvallende punten met de kromme gemeen. We spreken dan van een toppunt of undulatiepunt.



De raaklijn blijft in dit geval aan één zijde van de kromme.

De beweging van een enkel punt in een plat vlak



$\underline{x} = \underline{x}(t)$ stelt de baan voor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t+\Delta t) - \underline{x}(t)}{\Delta t} =$$

$$\underline{V}(t) = \underline{\dot{x}}(t)$$

deze vector valt langs de raaklijn aan de baan in A(t).

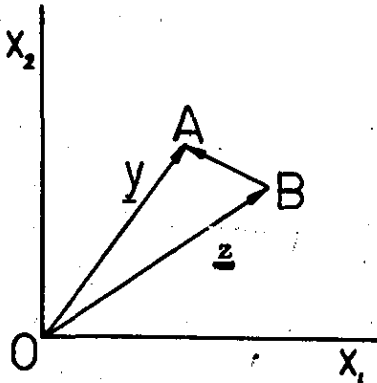
De grootte volgt uit:

$$(\underline{V}, \underline{V}) = (\underline{\dot{x}}, \underline{\dot{x}})$$

$$\underline{\dot{x}} = \frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \underline{x}' = \dot{s} \underline{t}$$

Dus $\underline{V} = \dot{s} \cdot \underline{t}$, waarbij \underline{t} = eenheidsvector, zodat

$$|\underline{V}| = |\dot{s}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

KINEMATICA VAN VLAKKE STELSELS.

Het vlak W_1 is een vast vlak
 W_2 is een bewegend vlak, maar valt samen met W_1 .
 W_2 is opgebouwd uit een stelsel bewegende punten A, B, C enz. waarvan verondersteld wordt, dat hun onderlinge afstand constant blijft. De punten A, B enz., hebben een snelheid t.o.v. het vaste vlak W_1 .

De posities van de punten A en B kunnen worden aangeduid door \underline{y} en \underline{z} , dat zijn dus plaatsvectoren, welke functies zijn van de tijd. Men heeft:

$$\underline{y} = \underline{z} + \overrightarrow{BA} \text{ waaruit volgt, dat } \overrightarrow{BA} = \underline{y} - \underline{z}.$$

Uit de onderstelling volgt dan, dat

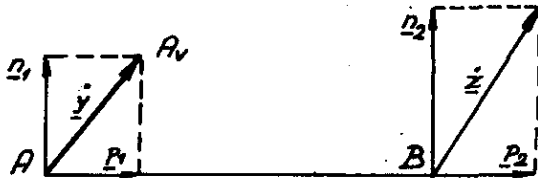
$$\overrightarrow{BA}^2 = \text{inwendig product} = (\underline{y} - \underline{z}, \underline{y} - \underline{z}) = \text{constant.}$$

Differentiatie geeft:

$$2(\dot{\underline{y}} - \dot{\underline{z}}, \underline{y} - \underline{z}) = 0 \text{ of } (\dot{\underline{y}} - \dot{\underline{z}}, \underline{y} - \underline{z}) = 0, \text{ waarbij}$$

$\dot{\underline{y}}$ = de snelheidsvector van het punt A en

$\dot{\underline{z}}$ = de snelheidsvector van het punt B.



$$(\overrightarrow{AA_v} - \overrightarrow{BB_v}, \underline{y} - \underline{z}) = 0$$

Dit is zo, als:

$$I \quad \overrightarrow{AA_v} = \overrightarrow{BB_v}$$

$$II \quad (\overrightarrow{AA_v} - \overrightarrow{BB_v}) \perp \overrightarrow{BA}$$

Nu is:

$$II \quad \overrightarrow{AA_v} = \underline{p}_1 + \underline{n}_1 \quad \text{en} \quad \overrightarrow{BB_v} = \underline{p}_2 + \underline{n}_2.$$

$$\overrightarrow{AA_v} - \overrightarrow{BB_v} = \underline{p}_1 - \underline{p}_2 + \underline{n}_1 - \underline{n}_2, \text{ zodat}$$

$$(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 + \underline{n}_1 - \underline{n}_2, \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \text{ of}$$

$$(\underline{p}_1 - \underline{p}_2, \overrightarrow{BA}) + (\underline{n}_1 - \underline{n}_2, \overrightarrow{BA}) = \vec{0}$$

Omdat \underline{n}_1 en \underline{n}_2 beide loodrecht staan op \overrightarrow{BA} , is $\cos(\underline{n}_1 - \underline{n}_2, \overrightarrow{BA}) = 1$ en dienvolgorde ook $(\underline{n}_1 - \underline{n}_2, \overrightarrow{BA}) = 0$

Er resteert dus de betrekking:

$$(\underline{p}_1 - \underline{p}_2, \overrightarrow{BA}) = 0, \text{ waarbij kan worden aangetekend dat}$$

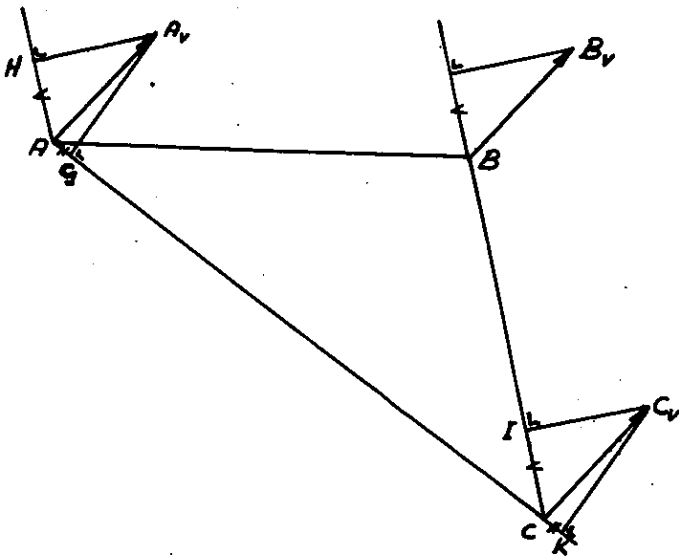
\underline{p}_1 en \underline{p}_2 beide langs \overrightarrow{BA} vallen.

We hebben dus, dat $\underline{p}_1 = \underline{p}_2$ en dus ook $\underline{p}_1 = \underline{p}_2$

Stelling: De projecties van 2 snelheidsvectoren langs één rechte zijn dezelfde.

Ook onmiddellijk in te zien uit het feit, dat W_2 een star stelsel was.

I Wanneer $\overrightarrow{AA_v} = \overrightarrow{BB_v}$, dan zijn de projecties p_1 en p_2 vanzelf gelijk. De stelling geldt dus algemeen.

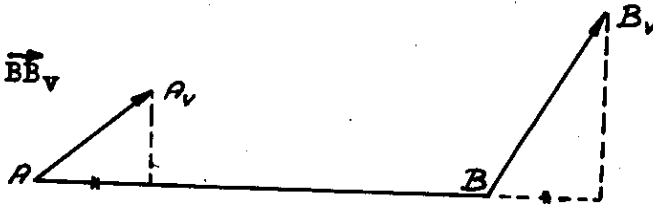


Met deze stelling is de snelheid $\vec{C}C_v$ van een 3^e punt steeds te construeren. Indien $\vec{AA}_v = \vec{BB}_v$, dan zijn de vierhoeken HA_vGA en IC_vKC congruent, zodat ook $\vec{CC}_v \parallel \vec{AA}_v$ en \vec{BB}_v .

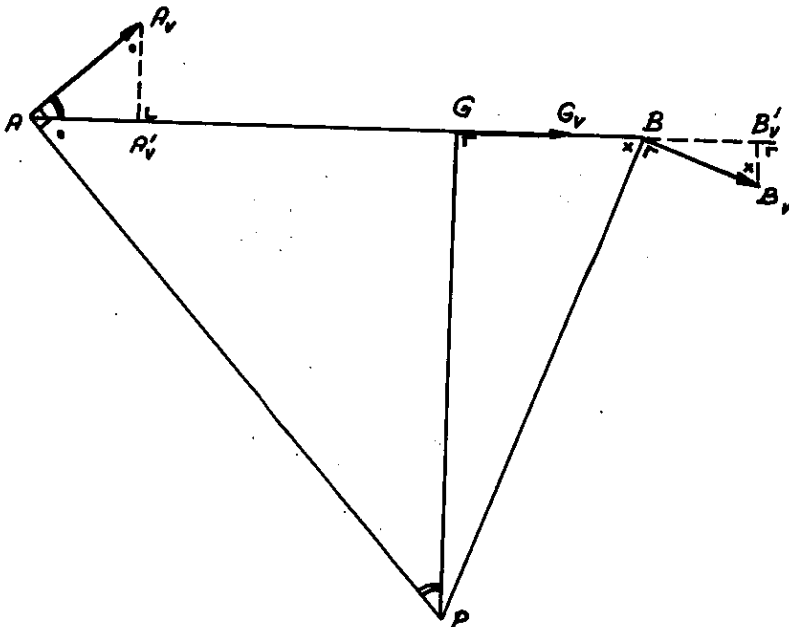
Dus als twee punten dezelfde snelheid hebben, hebben alle punten diezelfde snelheid.

We zeggen dan, dat W_2 zich in een positie bevindt van momentele translatie.

II $\vec{AA}_v \neq \vec{BB}_v$



Een andere configuratie dan deze is ook mogelijk:



Is er een punt te vinden, dat op het beschouwde ogenblik een snelheid 0 heeft?

Langs PA is de projectie van \vec{AA}_v en de projectie van de snelheid van elk ander punt op PA langs PA gelijk aan nul.

Het gezochte punt ligt dus op de loodlijn van AA_v in A. Even-zo is het te zoeken op een lijn $\perp BB_v$ in B. Het gezochte punt is dus P, omdat in twee ongelijke richtingen de snelheidscomponenten nul zijn.

Is $\vec{AA}_v \parallel \vec{BB}_v$, dan ligt P in het oneindige.

P heet de snelheidspool of kortweg pool van dit ogenblik.

Een punt C op AB heeft dus ook een snelheidsvector $\perp PC$, omdat de component van die snelheid langs PC nul moet zijn.

Maar dan is er één punt van AB, dat van alle punten van die lijn de kleinste snelheid heeft. Dat punt heeft een snelheid, die juist gelijk is aan de projectie van AA_v langs AB. Het wordt gevonden in het voetpunt G van de loodlijn vanuit P op AB neergelaten. G heet het glijpunt.

$$\triangle AA_v A'_v \sim \triangle PAG \rightarrow$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AA}_v} = \frac{\overline{PG}}{\overline{AA}_v}$$

$$\triangle BB_v B'_v \sim \triangle PBG \rightarrow$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BB}_v} = \frac{\overline{PG}}{\overline{BB}_v}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\overline{PA}}{\overline{AA}_v} = \frac{\overline{PG}}{\overline{AA}_v} \\ \frac{\overline{PB}}{\overline{BB}_v} = \frac{\overline{PG}}{\overline{BB}_v} \end{array} \right\} \text{ dus } \boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{AA}_v} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BB}_v}}$$

$$\text{of } \boxed{\frac{\overline{AA}_v}{\overline{BB}_v} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}}$$

Stelling:

De snelheden zijn evenredig met de afstanden van de betrokken punten tot de pool.

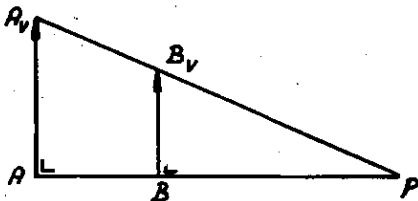
(de punten A en B waren willekeurig gekozen).

$\frac{\overline{AA}_v}{\overline{PA}}$ is een grootte, welke onafhankelijk is van de keuze van het

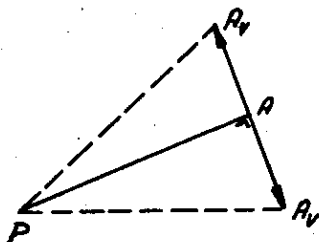
baanpunt. Zij wordt aangeduid door de letter ω , de hoeksnelheid van het ogenblik. Dus $\overline{AA}_v / \overline{PA} = \omega$.

In een volgend ogenblik is er weer een andere hoeksnelheid.

We hebben dus, dat $\triangle PAA_v \sim \triangle PBB_v \sim \triangle PCC_v \sim$ enz.



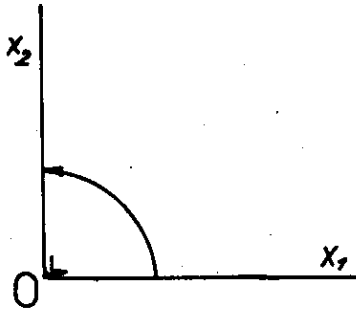
Indien $\vec{AA}_v \parallel \vec{BB}_v$, dan is $\vec{AB} \perp \vec{AA}_v$ en \vec{BB}_v , omdat anders de projecties ongelijk zijn. Voorts is $\triangle PAA_v \sim \triangle PBB_v$, zodat uit P op AB_v volgt, dat P op $A_v B_v$ ligt. $AA_v : AP = BB_v : BP = CC_v : CP = \omega$, de hoeksnelheid van het bewegende vlak.



Het teken van ω is afhankelijk van de richtingszin der snelheden.

Is $\triangle PAA_v$ linksom (=positief) georiënteerd, dan is $\omega > 0$.

Is $\triangle PAA_v$ rechtsom (=negatief) georiënteerd, dan is $\omega < 0$.



De positieve draaizin wordt gevonden door x_1 naar x_2 over de kleinste hoek te draaien. Zoals hier getekend, is dit linksom-

De 3^e as x_3 staat \perp op $\Delta x_1 x_2$.

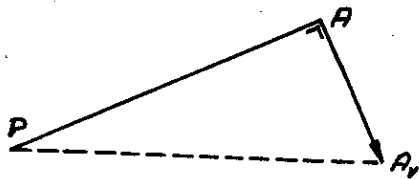
We spreken af, dat ~~voor~~ $x_1 x_2 x_3$ een rechtsdraaiend assenstelsel wordt genomen

(= overeenkomend met een rechtse schroefdraad).

De eenheidsvector in de positieve x_3 - richting wordt e genoemd. De betrekking $\overline{AA_v} = \omega \cdot \overline{AP}$ kan dus worden genoteerd als

$$\overline{AA_v} = \omega [\underline{e}, \overline{PA}]$$

Het teken van ω is in dit vectorproduct mede verdisconteerd.

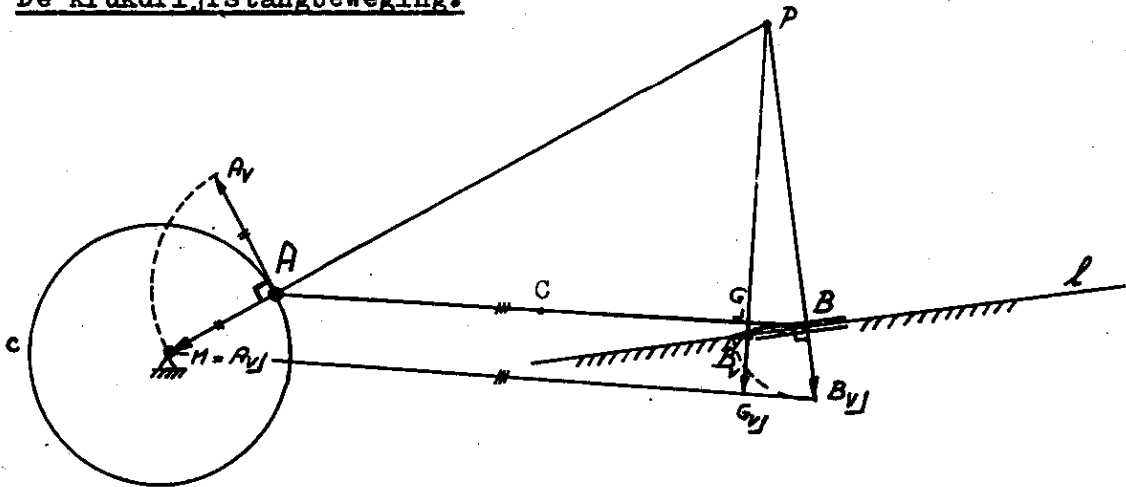


In dit geval is $[\underline{e}, \overline{PA}] = - \left| \frac{\overline{PA}}{\overline{AA_v}} \right| \overline{AA_v}$

in overeenstemming met het geponeerde op grond van de tekenafspraken voor ω .

Eerste voorbeeld:

De krukdrijfstaangbeweging.



Het punt A doorloopt een cirkel c in het vaste vlak met constante hoeksnelheid $\omega_0 = 1$ (en wel linksom).

B doorloopt de leibaan l in het vaste vlak.

Hoe groot is in deze positie $\overline{v_B}$?

Bepaal eerst de Pool P in het snijpunt van de poolstralen PA en PB resp. loodrecht op AA_v en op l .

$$\Delta PAA_v \sim \Delta PBB_v$$

$$\overline{MB_v} \parallel \overline{AB}, \text{ want dan } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AA_v}}{\overline{BB_v}} = \frac{\overline{AA_v}}{\overline{BB_v}}.$$

Hierwa dus B_v terugcirkelen naar B_v met $\overline{BB_v} \perp \overline{PB}$.

$\overline{AA_v}$ is de loodrechte op polaire snelheid van het punt A.

$\overline{BB_v}$ is de loodrechte of polaire snelheid van het punt B.

G heeft de kleinste snelheid van de drijfstaang AB.

De snelheid van C kan nu ook geconstrueerd worden.

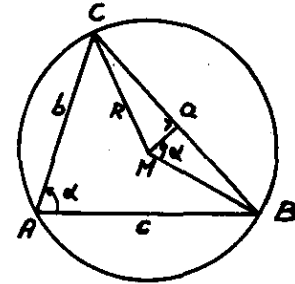
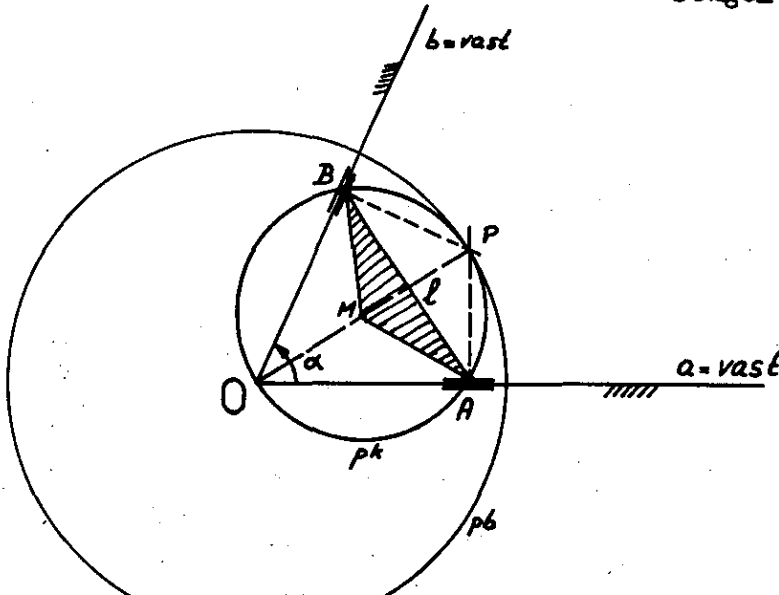
De loodrechte snelheden van punten van AB zijn steeds begrepen tussen AB en $\overline{AB_v}$, zodat $\overline{GG_v}$ inderdaad de kortste afstand tussen die lijnen is, als $\overline{PG} \perp \overline{AB}$.

Bewijs: voorts, dat $\overrightarrow{AA_v}$, $\overrightarrow{BB_v}$, $\overrightarrow{CC_v}$ enz. van AB een Paraboöl omhullen!

Tweede voorbeeld:

De elliptische beweging.

2 punten A en B van het bewegende vlak bewegen langs 2 vaste lijnen a en b.



$$a = 2R \sin \alpha$$

\square PAOB is een koordenvierhoek, zodat $1 = \overline{OP} \cdot \sin \alpha$

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sin \alpha} = \text{constant}$$

d.w.z. de pool P is in het vaste vlak steeds te vinden op een cirkel om O.

pb. is dus de meetkundige plaats van P in het vaste vlak. De punten op pb. worden eens pool.

De cirkel om de koordenvierhoek heeft een vaste staal $\overline{MP} = \frac{\overline{OP}}{2}$

Δ MAB is in het bewegende vlak een vaste driehoek, omdat

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MP} = \frac{1}{2 \sin \alpha} = \text{constant. De omgeschreven cirkel pk van}$$

deze Δ is dus in het bewegende vlak steeds een vaste cirkel.

Op die cirkel ligt steeds de pool P, zodat pk. de meetk. plaats is van P in het bewegende vlak.

De twee cirkels pb. en pk. raken elkaar net in de pool P.

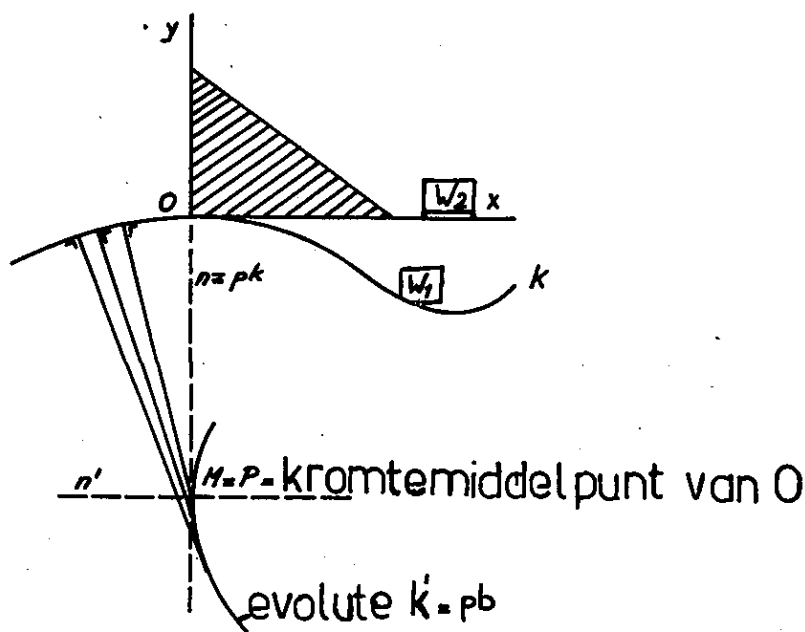
Is dit in het algemeen ook zo? Er zijn in het algemeen 2 meetk. plaatsen van P resp. een in het bewegende vlak en een in het vaste vlak en het is de vraag of ze elkaar dan weer in P raken op het beschouwde ogenblik.

pb. = vaste polode (= poolbaan)

pk. = bewegende polode (= poolkromme)

Bij de stangenvierzoude is de poolbaan van de 8^e graad.

Derde voorbeeld:

Derde voorbeeld:

Een bewegende rechte hoek blijft met: één van zijn rechthoekszijden voortdurend raken aan een kromme k in het vaste vlak W_1 . De rechthoek ligt in het bewegende vlak W_2 . Het punt O van W_2 heeft een snelheid gericht langs de x -as, dus de pool P van W_2 t.o.v. W_1 ligt ergens op de y -as. Dit is steeds zo, zodat de y -as de bewegende polode is.

De normalen van k zijn dus tevens opeenvolgende standen van de bewegende polode. Deze normalen omhullen de z.g. evolute k' . (Zij raken dus alle aan k').

De beweging van de rechte hoek kan dus worden voorgesteld door de beweging van de steeds aan de evolute k' rakende lijn $n = y$. Noem het raakpunt op het beschouwde moment M , dan is n' , de normaal van k' in M , evenals voorheen een meetk. plaats voor P .

P ligt dus in het snijpunt van n en n' .

De evolute k' is tevens de vaste polode (poolhaan) van de gegeven beweging.

Ook hier raakt de bewegende polode n in P aan de vaste polode k' . M is tevens het snijpunt van twee opeenvolgende normalen, zodat M het kromtemiddelpunt is van de door O doorlopen baankromme k in O . We hebben dus in dit geval, dat

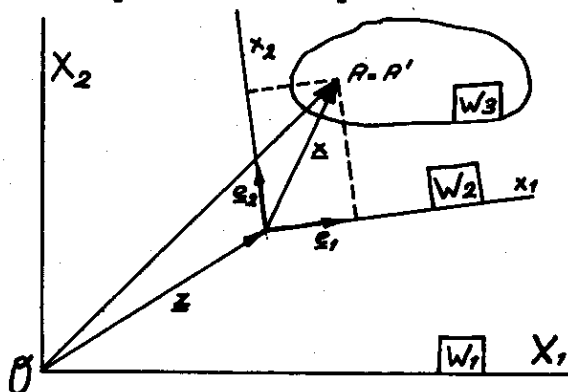
$$\vec{OO}_v = \omega [\underline{e}, \vec{MO}].$$

De relatieve beweging.

Nu drie vlakken W_1 , W_2 en W_3 .
 De beweging van W_1 t.o.v. W_2 noteren we voortaan als W_1/W_2
 We hebben dus in het algemeen zes mogelijke combinaties van
 W_k/W_1 . (spreek uit W_k t.o.v. W_1).
 Een punt A, dat deel uitmaakt van W_k noteren we verkort als
 $A \in W_k$ (spreek uit: A ligt in W_k)
 Voorts is

\underline{v}_{k1}^A de relatieve snelheid van het punt A bij de beweging van
 W_k/W_1

Het punt A valt op het beschouwde moment samen met een punt $A' \in W_1$.



W_1, W_2 en W_3

$$\underline{v}_{31}^A = \text{absolute snelheid van het punt } A \in W_3/W_1$$

$$\underline{v}_{21}^{A'} = \text{sleepsnelheid van } A' \in W_2/W_1$$

$$\underline{v}_{32}^A = \text{relatieve snelheid van } A \in W_3/W_2$$

$$\underline{v}_{31}^A = \underline{v}_{32}^A + \underline{v}_{21}^A$$

relatieve in woorden: De absolute snelheid van een punt is de vectoriële som van de/snelheid en de sleepsnelheid van dat punt.

$$W_3/W_2 : \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$$

bij de beschouwing van de beweging t.o.v. W_2 veranderen \underline{e}_1 en \underline{e}_2 niet, zodat na differentiatie:

$$\underline{v}_{32}^A = \dot{\underline{x}} = \dot{x}_1 \underline{e}_1 + \dot{x}_2 \underline{e}_2$$

$$\underline{OA}' = \underline{z} + \underline{x}$$

bij W_2/W_1 is $A' \in W_2$ een vast punt van W_2 , zodat bij de differentiatie van deze betrekking x_1, x_2 vaste bedragen zijn, maar \underline{e}_1 en \underline{e}_2 veranderlijk, omdat ze bewegen!

dus:

$$\underline{v}_{21}^{A'} = \dot{\underline{OA}'} = \dot{\underline{z}} + \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{z}} + x_1 \dot{\underline{e}}_1 + x_2 \dot{\underline{e}}_2$$

Bij de absolute beweging is alles veranderlijk, dus

$$W_3/W_1 : \underline{v}_{31}^A = \dot{\underline{OA}} = \dot{\underline{z}} + \dot{x}_1 \underline{e}_1 + \dot{x}_2 \underline{e}_2 + x_1 \dot{\underline{e}}_1 + x_2 \dot{\underline{e}}_2$$

$$\underline{v}_{31}^A = \underline{v}_{32}^A + \underline{v}_{21}^A$$

Dit geldt voor ieder punt A, zodat algemeen:

$$\underline{v}_{31}^A = \underline{v}_{32}^A + \underline{v}_{21}^A$$

Voor n vlakken heeft men de betrekking:

$$\underline{V}_{n,1} = \underline{V}_{n,n-1} + \underline{V}_{n-1,n-2} + \underline{V}_{n-2,n-3} + \dots + \underline{V}_{21}$$

Indien $W_3 \equiv W_1$, dan is

$$0 = \underline{V}_{12}^A + \underline{V}_{21}^A, \text{ dus } \underline{V}_{12} = -\underline{V}_{21}$$

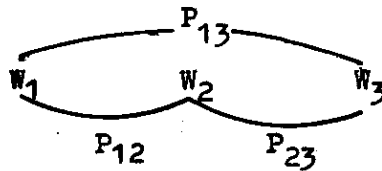
Men noemt de beweging van W_1/W_2 de inverse beweging van W_2/W_1 .

Is $\underline{V}_{12}^P = 0$, dan is ook $\underline{V}_{21}^P = 0$, zodat beide bewegingen dezelfde pool bezitten.

Dus $\underline{P}_{21} = \underline{P}_{12}$.

De vaste en bewegende poolbaan (polode) veranderen dus van rol.

Voor drie bewegende vlakken W_1 , W_2 en W_3 geldt:



$$\omega_{3/W_1} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{31}A} \right] = \omega_{3/W_2} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{32}A} \right] + \omega_{21} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{21}A} \right]$$

Dit geldt voor ieder punt $A \in W_3$.

Neemt men $A = P_{32}$, dan komt er:

$$\omega_{31} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{31}P_{32}} \right] = \omega_{21} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{21}P_{32}} \right] \quad (1)$$

Hieruit volgt, dat P_{21} , P_{13} en P_{32} op één rechte liggen.

Immers uit (1) volgt, dat:

$$\left[\underline{e}, \omega_{31} \overrightarrow{P_{31}P_{32}} \right] = \left[\underline{e}, \omega_{21} \overrightarrow{P_{21}P_{32}} \right] \quad (2)$$

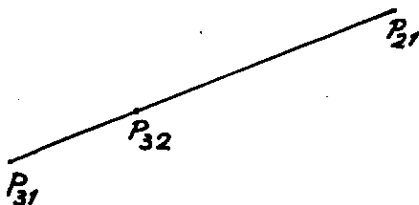
waarbij \underline{e} een vector is \perp op W_1 , W_2 en W_3 , en $|\underline{e}| = 1$, zodat $\sin \star(\underline{e}, \omega_{21} \overrightarrow{P_{21}P_{32}}) = \sin \star(\underline{e}, \omega_{31} \overrightarrow{P_{31}P_{32}}) = 1$.

Dus:

$$\omega_{31} \overrightarrow{P_{31}P_{32}} = \omega_{21} \overrightarrow{P_{21}P_{32}} \quad (4)$$

De twee vectoren zijn lineair afhankelijk, waaruit volgt, dat P_{21} , P_{31} en P_{32} op een rechte liggen.

Dit is de z.g. drie-polen stelling of de stelling van Kennedy.



Neem nu $A = P_{31}$. Dit kan omdat $A \in W_3$. Dan is

$$0 = \omega_{32} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{32} P_{31}} \right] + \omega_{21} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{21} P_{31}} \right] \quad (3)$$

Nu is $\omega_{21} = -\omega_{12}$, zodat uit (1) volgt, dat:

$$0 = \omega_{31} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{31} P_{32}} \right] + \omega_{12} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{21} P_{32}} \right] \quad (1^*)$$

$$0 = \omega_{32} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{32} P_{31}} \right] + \omega_{13} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{32} P_{31}} \right] + \omega_{12} \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{31} P_{32}} \right] + \omega_{12} \left\{ \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{21} P_{32}} \right] + \left[\underline{e}, \overrightarrow{P_{31} P_{21}} \right] \right\}$$

Delen door dezelfde factor $\neq 0$ levert:

$$\omega_{32} + \omega_{13} + \omega_{21} = 0$$

of

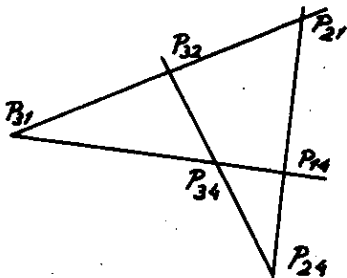
$$\omega_{12} + \omega_{23} + \omega_{31} = 0$$

Voorts is $\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{P_{32} P_{21}}{P_{32} P_{31}} \quad (4^*)$

Nemen we nu vier bewegende vlakken W_1, W_2, W_3 en W_4 .

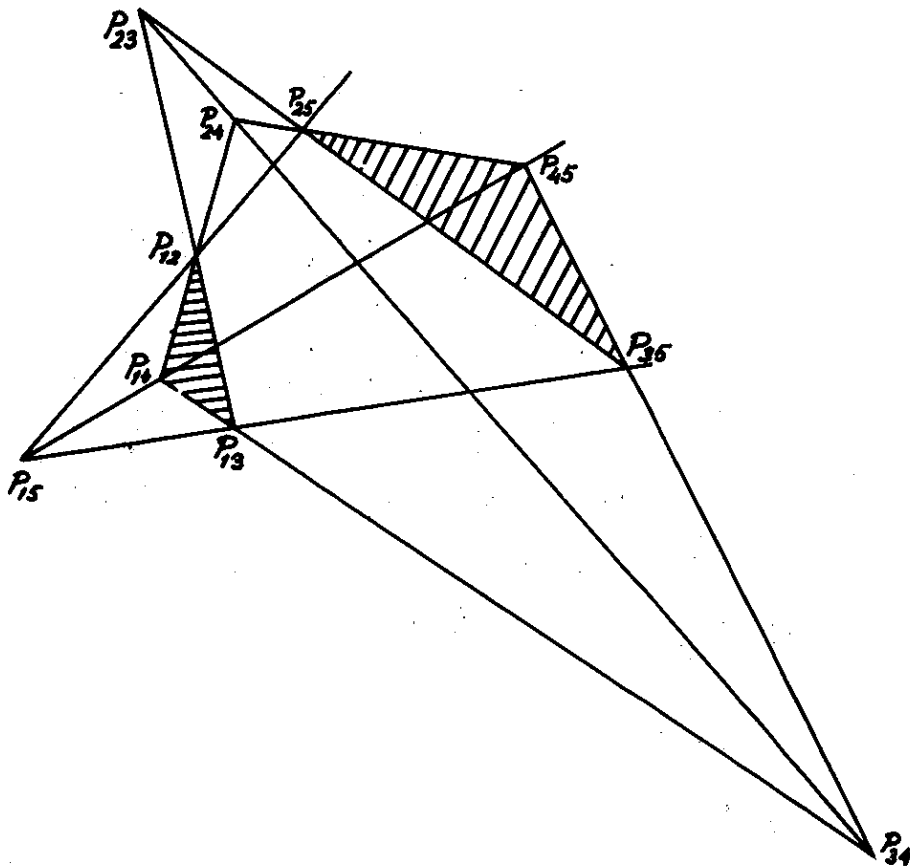
Er zijn dan $4 \cdot 3 = 12$ polen, maar omdat $P_{ij} = P_{ji}$ blijven er 6 over:

$$P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}, P_{13}, P_{24}.$$



Deze zes polen liggen niet willekeurig:
Zij vormen de zes hoekpunten van een z.g.
volledige vierzijde.

Gaat men uit van vijf bewegende vlakken W_1, W_2, W_3, W_4 en W_5 , dan verkrijgt men de configuratie van Desargues.



Er zijn in dit geval $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ polen.

Vier polen P_{12} , P_{13} , P_{14} en P_{15} worden willekeurig gekozen, waarbij P_{15} niet mag liggen op een der 15 rechten $P_{12}P_{13}$, $P_{12}P_{14}$ of $P_{13}P_{14}$.

Bovendien zijn P_{34} op $P_{14}P_{13}$,

P_{45} op $P_{15}P_{14}$,

en P_{24} op $P_{12}P_{14}$ willekeurig aangenomen.

Herhaalde toepassing van de stelling van Kennedy geeft dan de posities van de resterende drie polen.

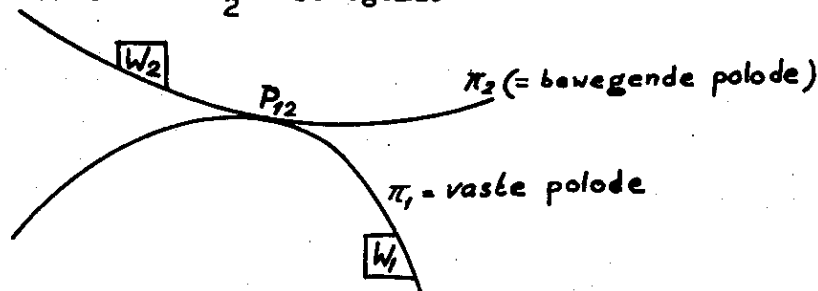
Het blijkt dat tenslotte P_{23} gelegen is op de drie lijnen

$P_{12}P_{13}$, $P_{24}P_{34}$ en $P_{25}P_{35}$.

Hieruit volgt de stelling van Desargues:

Gaan van twee driehoeken de verbindingslijnen der overeenkomstige hoekpunten door één punt, dan liggen de drie snijpunten van de overeenkomstige zijden op één rechte.

Bepalen we ons nu weer tot twee bewegende vlakken W_2 en W_1 .
 $W_1 = \text{vast}$ $W_2 = \text{bewegend.}$



Kunnen π_1 en π_2 elkaar snijden?

P_{12} is steeds een gemeenschappelijk punt van π_1 en π_2 .

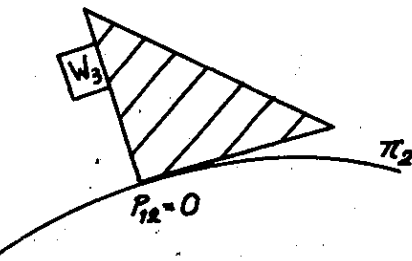
Kies een 3^e vlak W_3 met een assenstelsel waarvan de x -as samenvalt met de raaklijn in P_{12} aan π_2 en de y -as de normaal is van π_2 in P_{12} .

W_3 beweegt t.o.v. W_2 .

De oorsprong $O \in W_3$ van dit assenstelsel beweegt dus langs π_2 en volgt het verspringen van de pool P_{12} .

Steeds is $O = P_{12}$.

W_3/W_1 .



Voor het punt $O = P_{12} = P$ geldt de betrekking

$$\underline{V}_{31}^P = \underline{V}_{32}^P + \underline{V}_{21}^P$$

Voor de beweging van W_2/W_1 is P_{12} juist de pool, dus $\underline{V}_{21}^P = 0$

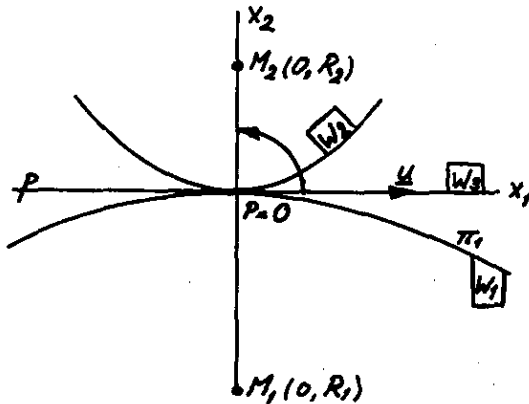
Er resteert dus:

$$\underline{V}_{31}^P = \underline{V}_{32}^P \quad (\text{dit is een vectorvergelijking}).$$

In woorden:

De snelheid waarmee P zich verplaatst langs π_2 is dezelfde als de snelheid waarmee P zich langs π_1 verplaatst.

De raaklijnen van π_1 en π_2 in P moeten dus ook samenvallen.
De verplaatsingssnelheid van de pool langs de vaste polode is dus even groot als die langs de bewegende polode.



De bewegende en de vaste polode raken elkaar dus op ieder moment in de pool.
Men noemt de verplaatsingssnelheid ook wel de poolwisselsnelheid (d.i. dus de snelheid waarmee de pool wordt afgelost.)

Onderstel nu, dat M_1 het kromtemiddelpunt is van π_1 en M_2 het kromtemiddelpunt van π_2 .

We gaan voort uit van een rechtsdraaiend assenstelsel.
De tekens van de kromstralen $R_2 > 0$ en $R_1 < 0$ worden vastgelegd door de tekens van de coördinaten der overeenkomstige middelpunten.

ω_3 en ω_3 , waarbij $\frac{V^P}{r_{31}} = \frac{V^P}{r_{32}} = u =$ poolwisselsnelheid (de bew. polode rolt zonder slippen over de vaste polode).

Er zijn 3 bewegende vlakken, dus zijn er ook 3 polen:

$$\begin{cases} P_{31} = M_1 \\ P_{32} = M_2 \end{cases} \text{ en } P_{12} = P.$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} \quad u = \omega_{13} \left[\frac{e, \vec{PM}_1}{r} \right]$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \quad u = \omega_{23} \left[\frac{e, \vec{PM}_2}{r} \right]$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{31}$$

Kies de x_1 - as zo, dat $u_1 > 0$.

In ons geval is $R_1 < 0$, zodat $u_1 = -\omega_{13} R_1$ omdat $\omega_{13} > 0$
en net zo $u_1 = -\omega_{23} R_2$ omdat $\omega_{23} < 0$

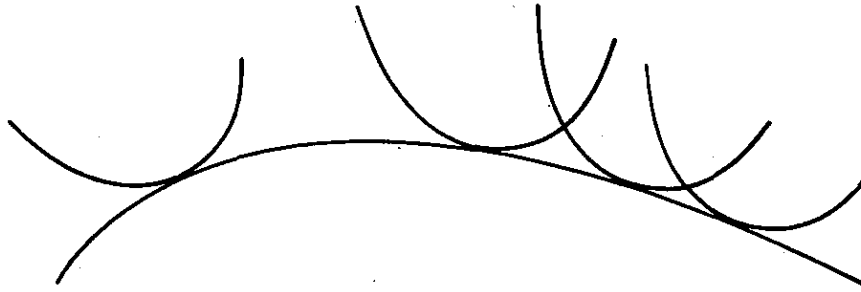
$$\omega_{31} = \frac{u}{R_1} \quad \text{en} \quad \omega_{23} = -\frac{u}{R_2}, \text{ dus:}$$

$$\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{31} = u \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ zodat:}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{\omega_{21}}{u}}$$

Dit is een speciale vorm van de stelling van Euler-Savary.

(de betrekking is vermoedelijk reeds gevonden door l'Hôpital en Bernoulli).



omhullende van een bewegende kromme.

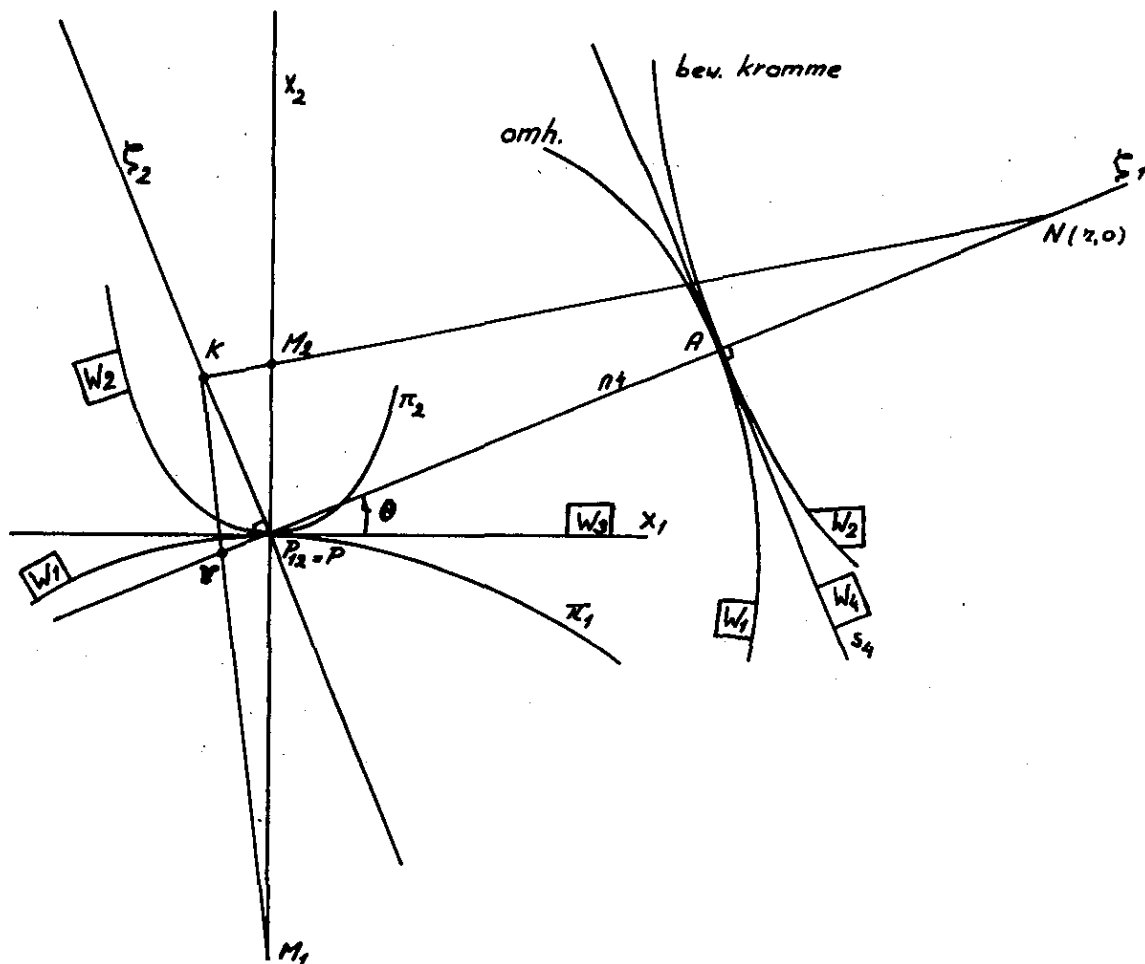
Tussen de kromstralen van de bewegende en de vaste polde bestaat het gegeven verband. De vaste polode is tevens de omhullende van de bewegende polode.

Hoe wordt de relatie, wanneer er wél een relatieve snelheid in het contactpunt is? Ook dan is er sprake van een omhullende van een bewegende kromme.

De bewegende kromme raakt aan haar omhullende, welke in het vaste vlak is gelegen. Het raakpunt A loopt zowel langs de bewegende als langs de vaste kromme: $A \in W_1$ (is daarvan een vast punt).

$s_1 \in W_1$ en raakt steeds aan de bewegende kromme.

\overline{PA} staat loodrecht op de gemeenschappelijke raaklijn s_1 , omdat $A' \in W_2$ een snelheid heeft loodrecht op \overline{PA} . (daarbij is $\dot{A} = A'$)



Er zijn vier bewegende vlakken W_1, W_2, W_3 en W_4 .

$$\left. \begin{array}{l} P_{12} = P \\ P_{23} = M_2 \\ P_{13} = M_1 \end{array} \right\}$$

Deze punten liggen inderdaad op één rechte.

$$\left. \begin{array}{l} P_{14} = \gamma \\ P_{24} = N \end{array} \right\}$$

en deze punten liggen ook met P_{12} op één rechte.

$$P_{34} = K$$

$P \in W_3$ met \overline{PA} voortdurend loodrecht op s_{41} , d.w.z. dat P alleen een relatieve snelheid kan hebben langs \overline{PA} .

Het been \overline{As}_4 gaat steeds door P , zodat P een sleufpunt is voor dat been:

n_4 blijft steeds door P_{12} gaan; wanneer nu W_3 wordt stilgezet, staat ook $P_{12} \in W_3$ stil en is dat dus een sleufpunt bij de beweging van W_4/W_3 .

M_2, K en N liggen op één rechte,

evenals M_1, γ en K volgens de stelling van Kennedy.

Kies nu de ζ_1 - as zo, dat N op het positieve deel daarvan komt te liggen en oriënteer de ζ_2 - as net zo t.o.v. ζ_1 als x_2 t.o.v. x_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} N(r, 0), \text{ dus } r > 0 \\ \gamma(\rho, 0) \\ K(0, k) \end{array} \right.$$

θ is positief georiënteerd, zodat

$$M_1 (R_1 \sin \theta, R_1 \cos \theta)$$

$$M_2 (R_2 \sin \theta, R_2 \cos \theta)$$

De vergelijking van KN is dan : $\frac{\zeta_1}{r} + \frac{\zeta_2}{k} = 1$

(De stukken die deze lijn van de assen afsnijdt zijn resp. r en k)

Net zo is de vergelijking voor $K\gamma$:

$$\frac{\zeta_1}{\rho} + \frac{\zeta_2}{k} = 1$$

$$M_2 \text{ ligt op } KN, \text{ dus: } \frac{R_2 \sin \theta}{r} + \frac{R_2 \cos \theta}{k} = 1 \quad)$$

$$M_1 \text{ ligt op } K\gamma, \text{ dus: } \frac{R_1 \sin \theta}{\rho} + \frac{R_1 \cos \theta}{k} = 1 \quad)$$

$$\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{k} = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{\sin \theta}{\rho} + \frac{\cos \theta}{k} = \frac{1}{R_1}$$

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{u}{u}$$

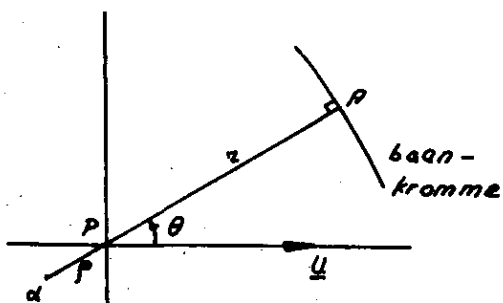
$$\text{Dus } \boxed{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{u \sin \theta}{u}}$$

Dit is de vgl. van Euler-Savary in haar meest algemene vorm. Zij geeft het verband weer tussen de krommingen van de bewegende kromme en haar omhullende.

De betrekking geldt niet, als $\theta = 0$, want dan ligt K in M_2 . KM_1 snijdt dan PN in P, zodat in dit geval r samenvalt met P.

Bijzonder geval

Laat nu de bewegende kromme samenschrompelen tot één punt. De baan van A valt dan samen met de omhullende van de bewegende kromme. De betrekking krijgt alleen een andere betekenis.



$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{u \sin \theta} \quad \text{met} \quad r = PN > 0 \quad \text{en} \quad \rho = P\alpha < 0.$$

Hiermee kunnen dus de kromtemiddelpunten van banen worden berekend. α = kromtemiddelpunt van de baankromme van A in A.

Laat nu A een buigpunt in de baankromme passeren. Omdat de kromming daar nul is, gaat $\alpha \rightarrow \infty$ en dus ook $\rho \rightarrow \infty$. Er resteert de betrekking:

$$\frac{1}{r} = - \frac{\omega}{u \sin \theta}, \quad \text{of} \quad r = - \omega^{-1} \cdot u \sin \theta$$

In een bepaalde positie van het bew. vlak is $\omega^{-1} \cdot u$ bekend. Het stelt dus de vgl. voor van de meetk. plaats van alle buigpunten in pool-coördinaten (r, θ) op een bepaald ogenblik.

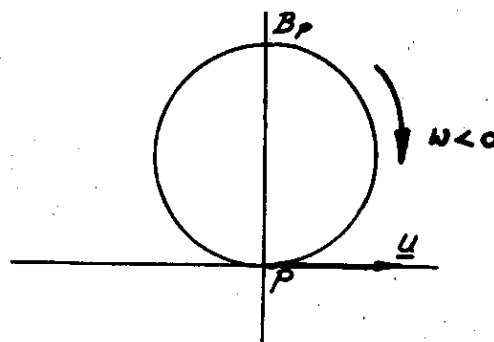
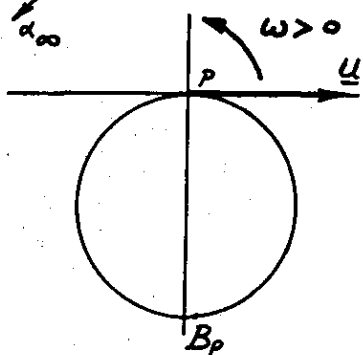
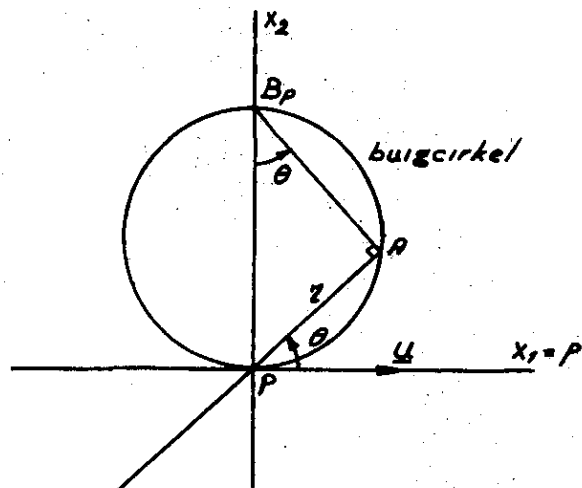
$$r^2 = -\omega^{-1} \cdot u r \sin \theta$$

$$\text{of } x_1^2 + x_2^2 = -\omega^{-1} \cdot u x_2$$

$$\text{of } x_1^2 + x_2^2 + \omega^{-1} \cdot u x_2 = 0$$

en dit is de vgl. van een cirkel die raakt aan de x_1 -as, in dit geval dus aan de poolraaklijn.

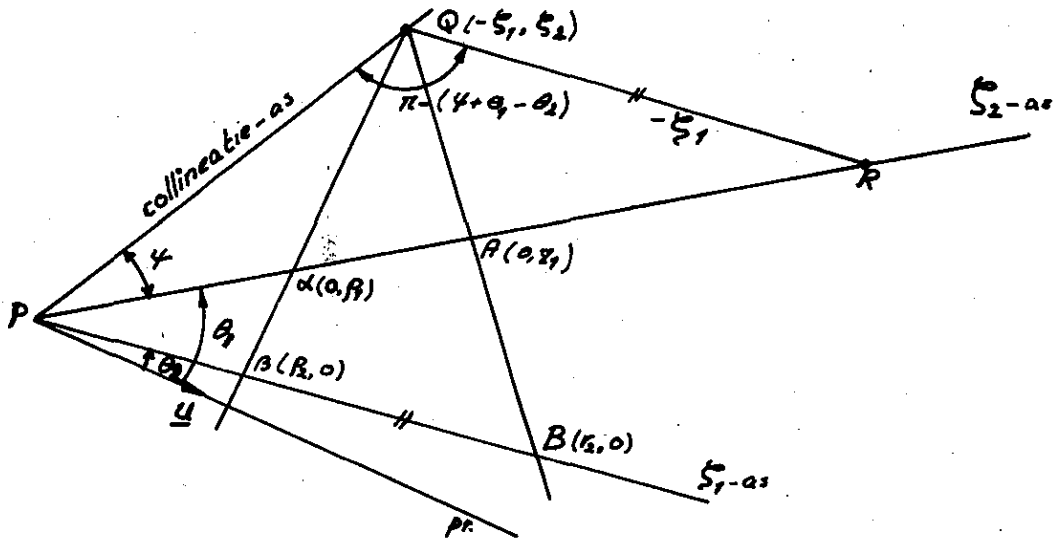
De buigcirkel is dus de meetk. plaats van punten van het bew. vlak, die zich in de beschouwde positie in een buigpunt van hun baan bevinden. Het diametraal tegenover P gelegen ^{punt} op de buigcirkel wordt buigpool genoemd:
 $B_p (0, -\omega^{-1} \cdot u)$



Stelling van Hartmann. Het uiteinde van de snelheidsvector van een baanpunt, het daarbij behorende kromtemiddelpunt en het uiteinde van de component van de poolwisselshelheid in een richting evenwijdig aan die van de gegeven snelheidsvector, liggen op één rechte.

Met behulp van deze stelling kan eveneens het kromtemiddelpunt α worden bepaald.

Een derde methode beruht op de Stelling van Bobillier. De bissectricen van de hoek gevormd door twee poolstralen zijn dezelfde als die van de hoek gevormd door de hierbij behorende collineatie-as en de poolraaklijn.



Bewijs: Het snijpunt $Q(-\zeta_1, \zeta_2)$ van $\alpha\beta$ en AB wordt collineatiepunt genoemd; de verbindingslijn van P met Q de collineatie-as.

De lijnen PA en PB heten poolstralen.

Er moet dus worden bewezen, dat $\psi = \theta_2$.

In het scheefhoekige assenstelsel $\zeta_1 P \zeta_2$ heeft $\alpha\beta$ de vergelijking

$$\frac{\zeta_1}{p_2} + \frac{\zeta_2}{p_1} = 1 \quad (\alpha\beta)$$

De vergelijking van AB is even-zo:

$$\frac{\zeta_1}{r_2} + \frac{\zeta_2}{r_1} = 1 \quad (AB)$$

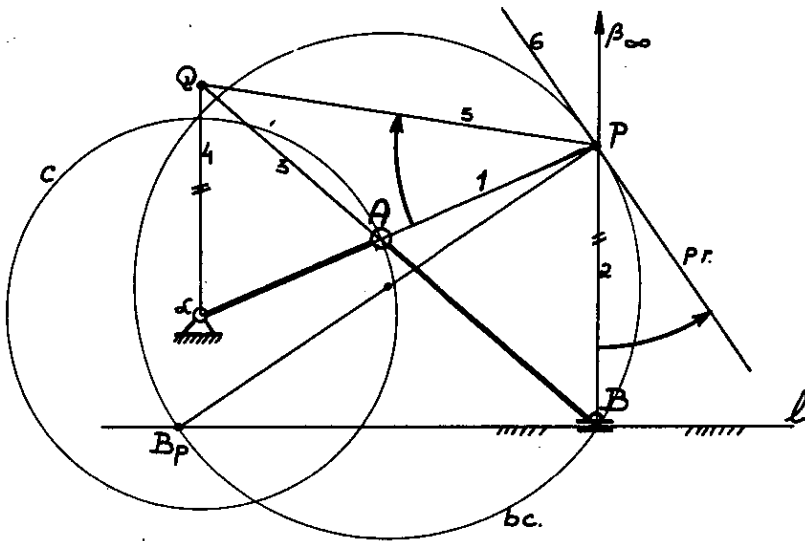
PQ heeft de vergelijking:

$$\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{r_2}\right) \zeta_1 + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r_1}\right) \zeta_2 = 0 \quad (PQ)$$

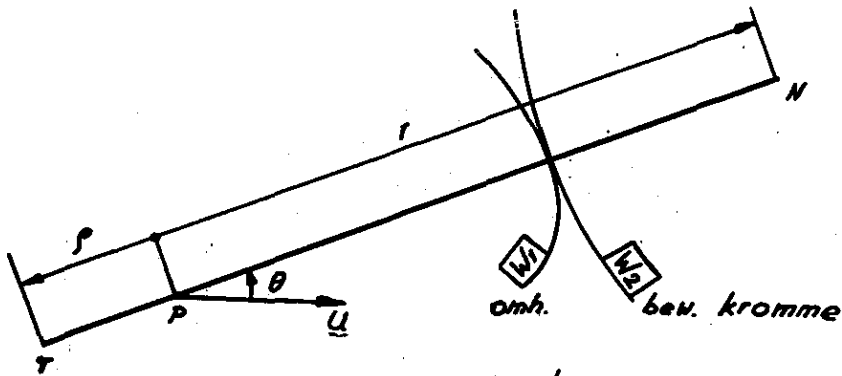
B_p ligt op de buigcirkel, passeert dus een buigpunt in zijn baan en heeft dus een oneindig ver gelegen kromtemiddelpunt β . Daar pool, baanpunt en kromtemiddelpunt op eenzelfde poolstraal liggen, is β_∞ dus het oneigenlijke punt van PB_p . De constructie komt over-een met een vroeger gegeven constructie, waarbij het punt Q de letter L kreeg toebedeeld. $\overline{PB_p}$ is de diameter van de buigcirkel.

Voorbeeld.

Gevraagd wordt van een gegeven ex-centrisch kruk-drijf-stang-mechanisme ($\alpha AB\beta_\infty$) in een bepaalde stand de poolraaklijn te bepalen. De constructie spreekt verder voor zichzelf. Daar het punt B wordt rechtgeleid ligt B op de buigcirkel. De lijn 1 gaat door B_p .



Toepassingen van de algemene stelling van Euler-Savary.

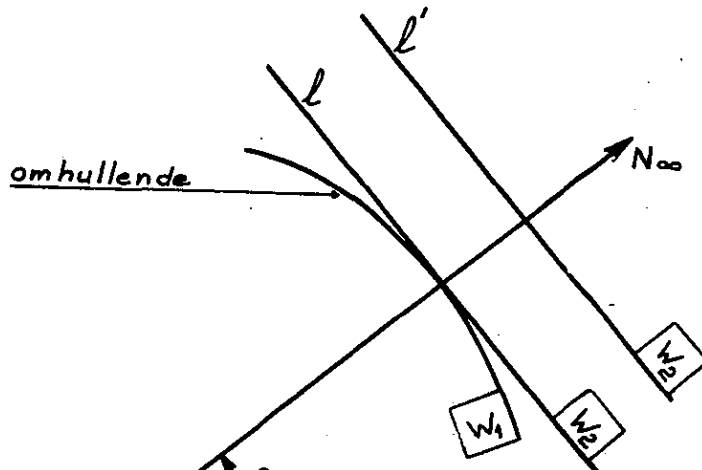


$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{u \sin \theta}$$

of

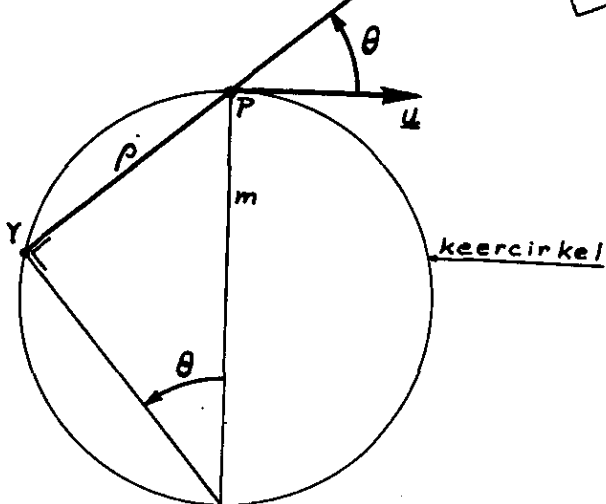
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{1}{m \sin \theta}$$

Hierin is m de ordinaat van de buigpool B_p .



Indien $N \rightarrow \infty$, dan ook $r \rightarrow \infty$, zodat $p = -m \sin \theta$

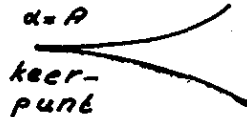
d.i. de vgl. van een cirkel in poolcoördinaten. Zij wordt keercirkel genoemd.



1. De keercirkel is dus de meetk. plaats van de kromtemiddelpunten van de omhullenden van bew. rechte lijnen.
2. Ten aanzien van de poolraaklijn is de keercirkel het spiegelbeeld van de buigcirkel.

Is $l' \parallel l$, dan is $\gamma' = \gamma$. d.w.z.:
De omhullende van l' is een aequidistante van de omhullende van l .

Punten, waarvoor het krommingsmiddelpunt samenvalt met het bijbehorende baanpunt ($\alpha = A$) zijn punten , waarvoor de kromtestraal nul is en dus de kromming oneindig groot.



Punten, waarvoor dit geldt zijn keerpunten : de osculatiecirkel is dan samengeschrompeld tot één punt.

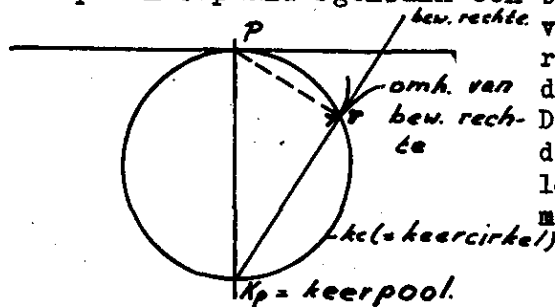
Op het beschouwde oogenblik is er slechts één dergelijk punt n.l. de pool P.

Is $\alpha = A$, dan is ook $\rho = r$, dan is dus volgens Euler-Savary $m^{-1} = 0$, hetgeen als bijzonder geval wordt uitgesloten.

Alleen de punten van de poolraaklijn ($\Theta = 0$) voldeden niet aan Euler-Savary. Volgens de stelling van Hartmann ligt van ieder baanpunt op de poolraaklijn het kromtemiddelpunt in de pool P. Alleen in de pool P zelf vallen baanpunt en kromtemiddelpunt dus samen:

Het ligt ook voor de hand, omdat men stil moet staan om te kunnen omkeren en de pool het enige punt is, dat op een bepaald oogenblik geen snelheid heeft.

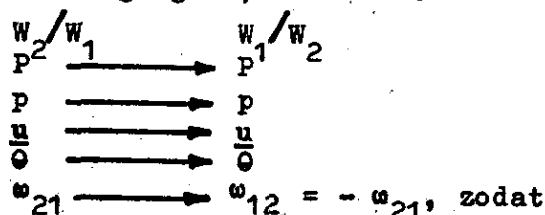
Indien op een bepaald oogenblik een bewegende rechte in een keerpunt van de omhullende aan de omhullende raakt, dan ligt dat keerpunt op de keercirkel.



De bewegende rechte zelf gaat door de zg. keerpool Kp, omdat zij loodrecht staat op Pp (Zie ook de meer algemene figuur)

3. De keercirkel is dus tevens de meetk. plaats van de keerpunten van de omhullenden van bew. rechte lijnen.
4. Ook is de keercirkel de meetk. plaats van de kromtemiddelpunten van ~~de~~ ver weg gelegen baanpunten.
Dus als A_{\bullet} , dan ligt α op de keercirkel.
5. Tenslotte is de keercirkel nog de buigcirkel van de inverse beweging.

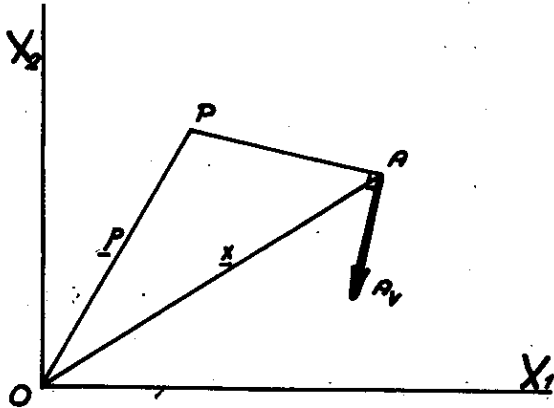
Beschouw ik nl. de beweging van W_1/W_2 i.p.v. W_2/W_1 , keer ik dus de beweging om, dan wordt:



Voor W_1/W_2 : $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{-\omega}{u \sin \theta}$,

het rechterlid keert dus van teken om. De ordinaat m van de buigpool dus ook. De keerpool is dus de buigpool van de inverse beweging.

Versnellingsverdeling.



W_2/W_1
 $P^2 = 1$ de pool bij de beweging van W_2/W_1
 $A \in W_2$ $P \in W_2$
 Hoe groot is nu de versnelling \underline{a}_A van het punt A?
 $\underline{p} + \underline{PA} = \underline{x}$

$$\underline{PA} = \underline{x} - \underline{p}$$

$$\underline{AA}_v = \omega [\underline{e}, \underline{PA}]$$

$$\dot{\underline{p}} = \dot{\underline{p}} \neq \dot{\underline{p}} = 0$$

of $\underline{u} \neq \underline{v}_p$

$$\underline{AA}_v = \omega [\underline{e}, \underline{x} - \underline{p}]$$

$\underline{AA}_j = \underline{AA}_j =$ versnellingsvector $= \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{x} - \underline{p}] + \omega [\underline{e}, \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{p}}]$
 want $\underline{e} =$ een vaste eenheidsvector, loodrecht het vlak van beweging
 $\underline{AA}_j = \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}] + \omega [\underline{e}, \underline{AA}_v - \underline{u}]$

$\dot{\omega} =$ de hoekversnelling van het bewegende vlak.

$$\underline{AA}_j = \omega [\underline{e}, \underline{AA}_v] - \omega [\underline{e}, \underline{u}] + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$$

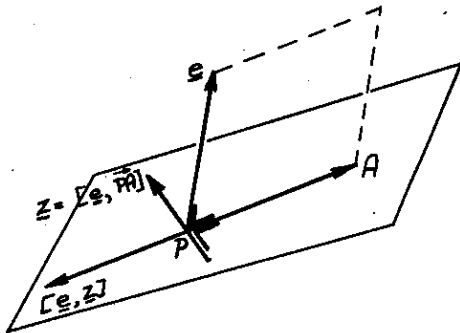
$$\underline{AA}_j = \omega [\underline{e}, \omega [\underline{e}, \underline{PA}]] - \omega [\underline{e}, \underline{u}] + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$$

$$= \omega^2 [\underline{e}, [\underline{e}, \underline{PA}]] - \dots$$

De grootte van $[\underline{e}, \underline{PA}]$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallelogram dat door \underline{e} en \underline{PA} wordt opgespannen. Dus $||[\underline{e}, \underline{PA}]\| = 1 \cdot PA$ en voorts:

$$||[\underline{e}, [\underline{e}, \underline{PA}]]\| = |-\underline{PA}|, \text{ zodat}$$

$$\underline{AA}_j = -\omega^2 \underline{PA} - \omega [\underline{e}, \underline{u}] + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$$



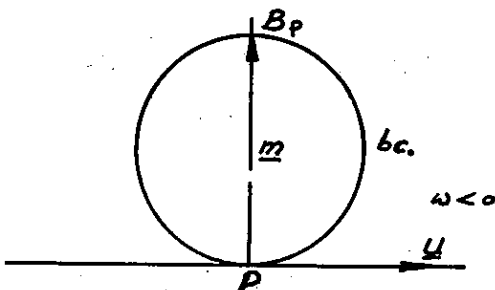
substitueer:

$$\underline{u} = +\omega [\underline{e}, \underline{PB}_p], \text{ dan is:}$$

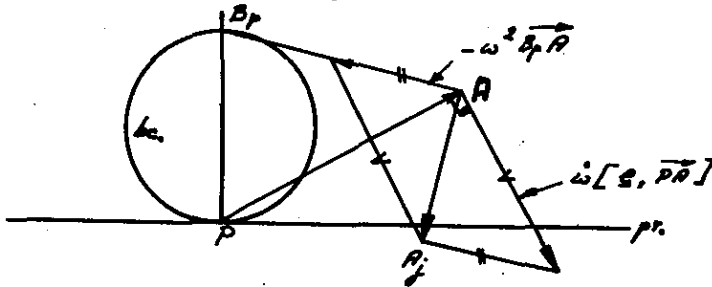
$$\underline{AA}_j = -\omega^2 \underline{PA} + \omega^2 \underline{PB}_p + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$$

$$\underline{AA}_j = \omega^2 (\underline{PB}_p - \underline{PA}) + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$$

Dus: $\underline{AA}_j = -\omega^2 \underline{B}_p \underline{A} + \dot{\omega} [\underline{e}, \underline{PA}]$ (1)



Wat is nu de meetkundige betekenis van deze betrekking?

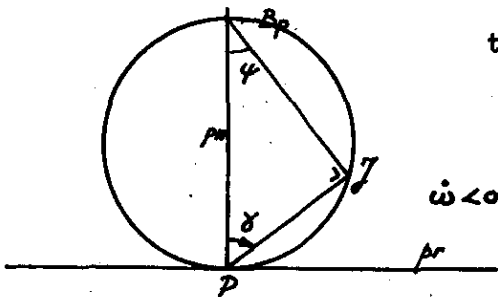


Bestaat er een punt J, waarvoor de versnelling nul is?
Voor J geldt:

$$0 = -\omega^2 \vec{B_p J} + \dot{\omega} [\underline{e}, \vec{P J}] \quad (2)$$

zodat: $\omega^2 \vec{B_p J} = \dot{\omega} [\underline{e}, \vec{P J}]$

Dit kan alléén als $\vec{B_p J}$ langs $[\underline{e}, \vec{P J}]$ valt of als $\vec{B_p J} \perp \vec{P J}$.
De meetk. plaats van punten J, waarvoor dit geldt is de buigcirkel.
Dus J ligt op de buigcirkel. Uit (2) volgt ook, dat



$$\tan \gamma = \frac{B_p J}{[\underline{e}, \vec{P J}]} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

De betrekking $\tan \gamma = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$ is met inachtneming van het teken.

In de figuur is γ rechtsom getekend, omdat $\dot{\omega} < 0$.
 γ wordt linksom vanaf de poolnormaal uitgezet, indien $\dot{\omega} > 0$.
J is de zg. versnellingspool; γ de versnellingshoek.
De pool P heeft weliswaar geen snelheid, maar kan daar wel degelijk een versnelling hebben.

$$\vec{P P_j} = -\omega^2 \vec{B_p P} + \dot{\omega} [\underline{e}, \vec{P P}], \text{ zodat}$$

$$\vec{P P_j} = -\omega^2 \vec{B_p P}$$

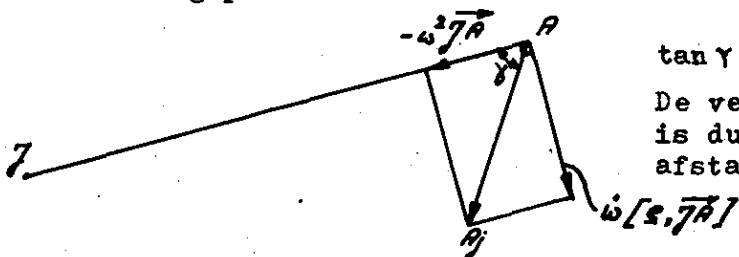
De versnelling van de pool P is dus steeds gericht naar de buigpool B_p . Dus $\vec{P P_j} = \underline{\underline{m\omega^2}}$.

Combinatie van de betrekkingen (1) en (2) geeft:

$$\vec{A A_j} = -\omega^2 (\vec{B_p A} - \vec{B_p J}) + \dot{\omega} [\underline{e}, \vec{P A} - \vec{P J}], \text{ zodat}$$

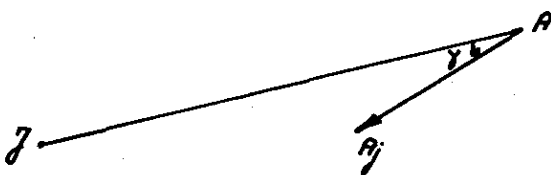
$$\vec{A A_j} = -\omega^2 \vec{J A} + \dot{\omega} [\underline{e}, \vec{J A}]$$

De versnelling van het baanpunt is hierin alleen betrokken op de versnellingspool J.



$$\tan \gamma = -\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

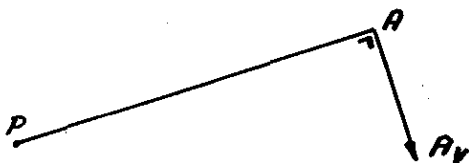
De versnelling van het punt A is dus evenredig met haar afstand tot J.



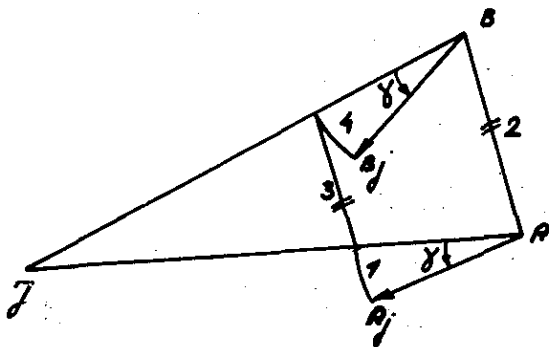
Als $\dot{\omega} < 0$, dan γ linksom uitzetten vanaf AJ.

Als $\dot{\omega} > 0$, dan rechtsom. γ is altijd scherp, omdat de bijdrage $-\omega^2 \vec{JA}$ steeds naar J is gericht.

γ is dus een vaste hoek voor ieder punt van het bew. vlak. (γ is wel afhankelijk van de tijd, maar onafhankelijk van de plaats in het vlak).



Bij de snelheidsverdeling bestond een analoge eigenschap, alleen was daar de hoek steeds 90° ,



Indien J en \vec{AA}_j zijn gegeven, kan de versnelling^j van een willekeurig punt B worden geconstrueerd. Denk daarbij aan het invariant zijn van de drasizin van γ t.o.v. J!

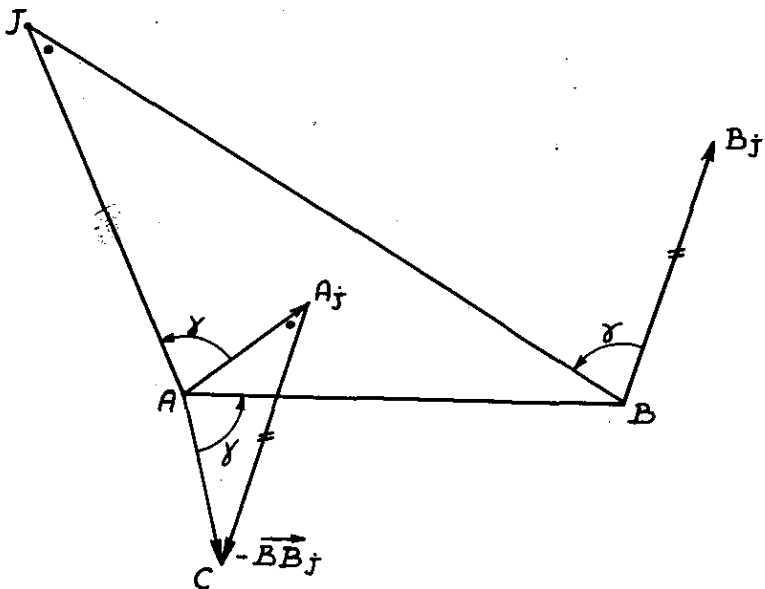
Zijn \vec{AA}_j en \vec{BB}_j gegeven, dan kan J, het punt waarvoor de versnelling nul is, bepaald worden.

Constructie J bij gegeven \vec{AA}_j en \vec{BB}_j .

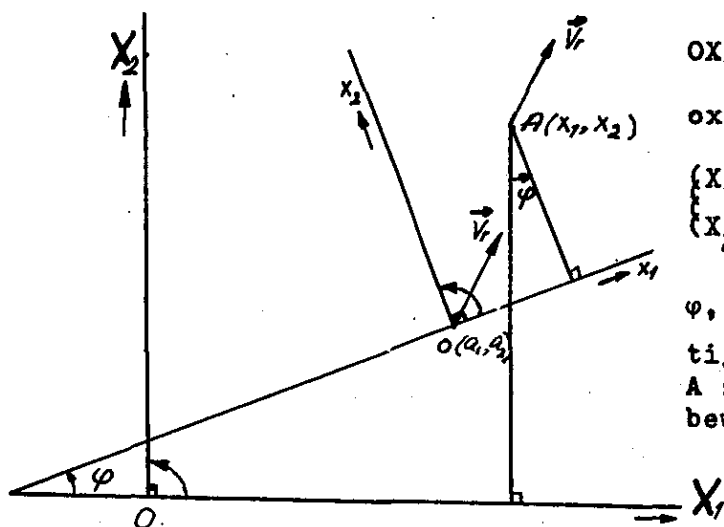
$$\vec{AC} = \vec{AA}_j - \vec{BB}_j$$

De bewering is, dat $\angle CAB = \gamma$. Met behulp van γ kan dan J worden bepaald.

$$\text{Bewijs: } \frac{\overline{JA}}{\overline{AA}_j} = \frac{\overline{JB}}{\overline{BB}_j} = \frac{\overline{JB}}{\overline{CA}_j}$$



ANALYTISCHE BEHANDELING VAN DE RELATIEVE BEWEGING.



$OX_1X_2 =$ vaste vlak

$ox_1x_2 =$ bew. vlak

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + a_1 \\ X_2 = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + a_2 \end{cases}$$

φ , a_1 en a_2 zijn functies van de tijd. We bezien nu het geval, dat A zich nog weer in het bew. vlak beweegt.

De beweging van A t.o.v. $x_1ox_2 =$ relatieve beweging.

De beweging van A t.o.v. $X_1OX_2 =$ absolute beweging.

De beweging van x_1ox_2 t.o.v. $X_1OX_2 =$ sleebeweging.

We hebben dus $\vec{v}_{rel.}$, \vec{v}_{sleep} en $\vec{v}_{abs.}$ van het punt A

en $\vec{a}_{rel.}$, \vec{a}_{sleep} en $\vec{a}_{abs.}$ van het punt A

(a = acceleration).

$$(\vec{v}_{A_{abs.}})_X = \dot{X}_1 = \underbrace{-\dot{\varphi}(x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) + \dot{a}_1}_{\text{sleepsnelheidscomp.}} + \underbrace{\dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi}_{\text{rel. snelheidscomp.}}$$

$$(\vec{v}_{A_{abs.}})_Y = \dot{X}_2 = \underbrace{\dot{\varphi}(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi) + \dot{a}_2}_{\text{sleepsnelheidscomp.}} + \underbrace{\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi}_{\text{rel. snelheidscomp.}}$$

↙ d.i. desnelheidscomp. van een punt van het bew. vlak ter plaatse A.

Voor eenzelfde punt van verschillende bew. vlakken geldt dus, dat

$$\vec{v}_{abs.} = \vec{v}_{sleep} + \vec{v}_{rel.}$$

$\dot{\varphi} = \omega =$ de hoeksnelheid van de sleebeweging.

De sleebeweging is nog weer op te splitsen in een translatiebeweging (3e term) en een rotatiebeweging (eerste twee termen). \dot{a}_1 en \dot{a}_2 zijn dus componenten van de sleebeweging t.g.v. de translatie sleebeweging.

Nu nogmaals differentiëren:

$$\ddot{x}_1 = \underbrace{-\ddot{\varphi}(x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi) + \ddot{a}_1}_{\text{comp. v.d. sleepversnelling}} - \underbrace{2\dot{\varphi}(\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi)}_{\text{coriolisversn.comp.}}$$

$$+ \underbrace{\ddot{x}_1 \cos\varphi - \ddot{x}_2 \sin\varphi}_{\text{rel.versn.comp.}}$$

$$\ddot{x}_2 = \underbrace{\ddot{\varphi}(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) + \ddot{a}_2}_{\text{comp. v.d. sleepversnelling}} + \underbrace{2\dot{\varphi}(\dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi)}_{\text{comp. v.d. coriolisversnelling}}$$

$$+ \underbrace{\ddot{x}_1 \sin\varphi + \ddot{x}_2 \cos\varphi}_{\text{rel.versn.comp.}}$$

$$\vec{a}_{\text{abs.}} = \vec{a}_{\text{sleep}} + \vec{a}_{\text{rel.}} + \vec{a}_{\text{cor.}}$$

$$\vec{a}_c = (-2\dot{\varphi}(\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi), 2\dot{\varphi}(\dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi))$$

Versnellingen mogen dus niet zonder meer vectoriëel worden samengesteld. Er komt nog een mengterm bij, welke coriolisversnelling wordt genoemd.

$$\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi = v_{\text{rel.}y}$$

$$\dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi = v_{\text{rel.}x}$$

Verplaatsen we \vec{v}_r naar $O(a_1, a_2)$ dan heeft het uiteinde van \vec{v}_r de coördinaten: $\vec{v}_r = (a_1 + \dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi, a_2 + \dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi)$.

T.g.v. de sleeptrotatie alleen heeft dit punt de snelheid:

$$(-\dot{\varphi}(\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi), \dot{\varphi}(\dot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_2 \sin\varphi)), \text{ dus}$$

$$\vec{a}_c = 2 \times \text{de snelheid, die het uiteinde van de relatieve snelheidsvector krijgt t.g.v. de sleeptrotatie.}$$

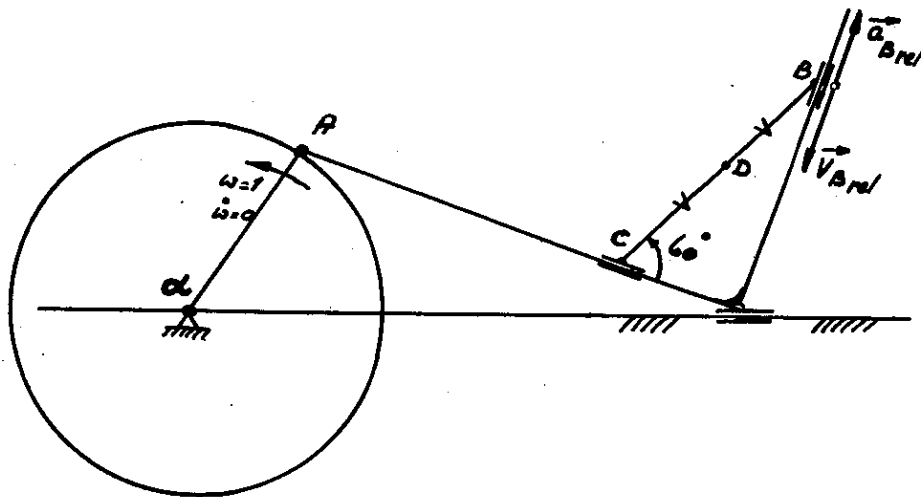
Als $\vec{v}_{\text{rel.}} = 0$ is ook $\vec{a}_c = 0$, omdat het uiteinde met O samenvalt en O alleen transleert.

Als de sleeptrotatie nul is (d.w.z. $\dot{\varphi} = 0$) is eveneens $\vec{a}_c = 0$.
(of $\omega_{\text{sleep}} = 0$)

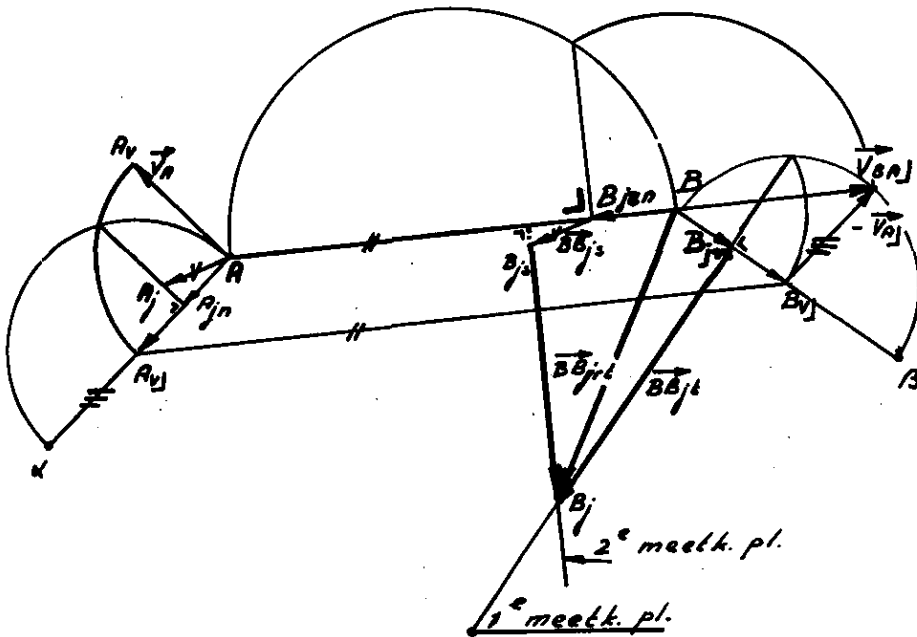
Voorbeeld.

Opgave.

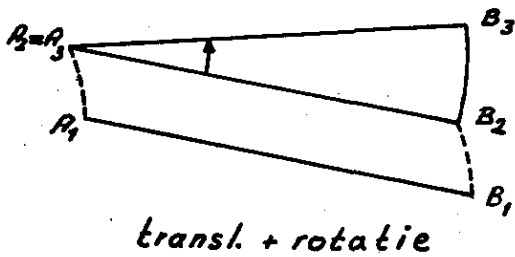
Hoe groot is \vec{a}_D abs. als \vec{v}_B rel. en \vec{a}_B rel. gegeven zijn?



EEN VERSNELLINGSCONSTRUCTIE BERUSTEND OP DE RELatieve BEWEGING.



De punten A en B behoren tot hetzelfde bewegende vlak.
 α en β zijn kromtemiddelpunten van resp. A en B.
 De constructie van $\overline{BB_j}$ uit $\overline{AA_j}$ via de constructie van de buigcirkel en de versnellingspool J is vaak omslachtig.
 De beweging van B is nl. op te vatten als een translatiebew. met A mee + een rotatiebew. om A.



De translatiebew. = de sleepbew.
 de rotatiebew. = de relatieve bew.
 Het is ook mogelijk om dit andersom te doen, maar dan is de $a_c \neq 0$ en dat is nu wel = 0.

We hebben dus:

$$\overline{BB_j} = \overline{BB_j}_{\text{sleep}} + \overline{BB_j}_{\text{rel.}}$$

Uit $\frac{\overline{AA^2}}{\overline{AA}} = \overline{AA_{jn}}$ volgt $\pm \overline{AA_v}$ en dus ook $\overline{AA_{vj}} = \overline{v_{Aj}}$, de polaire snelheid van A.

$\overline{AA_{vj}} \parallel \overline{BB_{vj}}$ zonder hulp van de pool dus.

$$\overline{BB_{jn}} = \frac{\overline{BB_{vj}^2}}{\overline{B\beta}}$$

Tot nu toe nog geen gebruik gemaakt van de relatieve beweging.

Maar nu:

De relatieve versnelling heeft een normale component vallende langs

AB, omdat $\underline{A} = \underline{\beta}_{rel.}$; de grootte is $\frac{v_r^2}{AB}$ en gericht op A.

$$\vec{v}_r = \vec{BB}_v - \vec{AA}_v \text{ en dus ook } \vec{v}_r \perp = \vec{BB}_v \perp - \vec{AA}_v \perp$$

$\vec{v}_r \perp \vec{AB}$, dus $\vec{v}_r \perp$ valt langs \vec{AB} .

$$|\vec{BB}_{jrn} \perp| = \frac{v_{BA}^2}{BA}$$

$$\vec{BB}_j \text{ langs } AB = \vec{BB}_{jrn} + \vec{BB}_{js} \text{ langs } AB$$

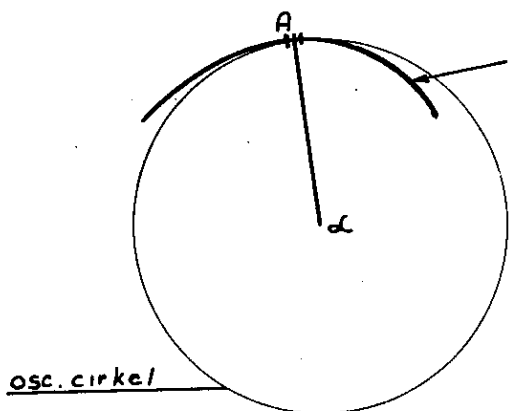
De relatieve tangentiële versnelling staat loodrecht op \vec{AB} .

We krijgen dus 2 meetk. plaatsen voor B_j met snijpunt B_j .

Tenslotte is $\vec{B}_{js} B_j = \dot{\omega}_{AB} \cdot \vec{AB}$.

Het geheel is een fundamentele constructie, die ook op meer samengestelde mechanismen kan worden toegepast.

VOORTGEZETTE KROMMINGSTHEORIE.



de baankromme van A met een zekere kromming κ in elk punt van de baan.

$$\kappa(t) \quad t = \text{tijd.}$$

$$\kappa^{-1} = R = \overline{A\alpha}.$$

De osculatiecirkel heeft 3 samenvallende punten met de baankromme gemeen.

osc.cirkel \equiv kromtecirkel.

Van een cirkel kan in het algemeen niet geëist worden, dat hij door meer dan 3 samenvallende punten van de baankromme gaat.

Als de osc. cirkel er toch nog meer gemeen heeft, dan is A een bijzonder punt van het bew. vlak. Cirkel $(\alpha, \sqrt{\kappa}^{-1})$.

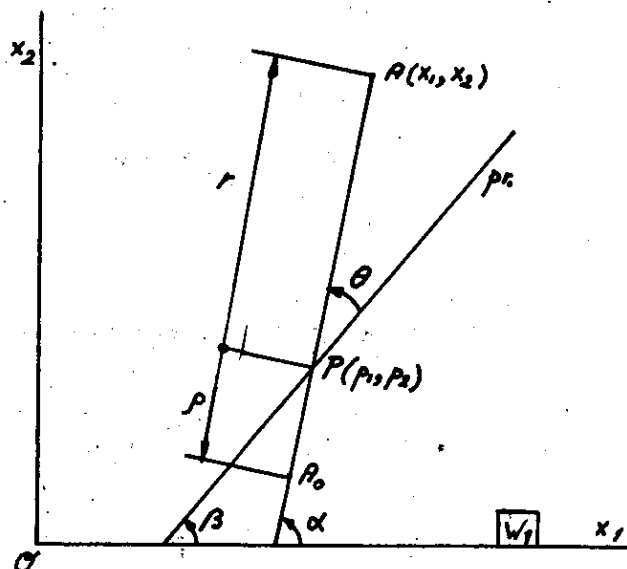
Een punt, dat bij uitzondering vier samenvallende punten met de kromtecirkel gemeen heeft, wordt de top van de baankromme genoemd.

Denk b.v. aan de toppunten van de ellips, waar op grond van symmetrie-overwegingen een even aantal samenvallende punten bestaan van de kromtecirkel met de ellips. Er zijn er dus minstens $3 + 1 = 4$; maar dat is tevens het maximum aantal, omdat twee tweede graadskrommen elkaar in $2 \times 2 = 4$ snijpunten snijden.

Bij een gewoon punt gaat de osc. cirkel door de baankromme heen, omdat de osc. cirkel de baankromme een oneven aantal malen passeert.

Toppunten zijn punten, waar de kromming een uiterste waarde bereikt, waar dus de kromming stationnair is. De afgeleide van de kromming naar de tijd is in zo'n punt nul.

De cirkelloopkromme (clk) is in het bew. vlak de meetk. plaats van de punten, die zich op het beschouwde ogenblik in een top van hun baan bevinden.



clk is dus de meetk. plaats van de punten in het bew. vlak, waarvoor κ (of R) stationnair is.

Volgens de stelling van Euler-Savary is

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{m \sin \theta} \quad \text{met } R = r - \rho$$

$$(\rho - r)m \sin \theta = \rho r$$

$$\rho(m \sin \theta - r) = r m \sin \theta.$$

$$\rho = \frac{mr \sin \theta}{m \sin \theta - r}$$

$$R = r - \rho = \frac{r^2}{r - m \sin \theta}$$

$$0 = \frac{dR}{dt} = \dot{R} = \frac{2r\dot{r}(r-m\sin\theta) - r^2(\dot{r}\dot{m}\sin\theta - m\dot{\theta}\cos\theta)}{(r-m\sin\theta)^2}$$

of

$$\underline{r\dot{r} - 2r\dot{r}m\sin\theta + r\dot{m}\sin\theta + rm\dot{\theta}\cos\theta = 0} \quad (\text{clk}).$$

Uit de figuur volgt:

$$r^2 = (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \text{ hetgeen gedifferentieerd de betrekking}$$

$$r\dot{r} = (x_1 - p_1)(\dot{x}_1 - \dot{p}_1) + (x_2 - p_2)(\dot{x}_2 - \dot{p}_2) \text{ oplevert.}$$

Omdat $\vec{v}_A \perp \vec{F}_A$ is het inwendige product van deze vectoren nul:

$$\dot{x}_1(x_1 - p_1) + \dot{x}_2(x_2 - p_2) = 0, \text{ hetgeen met de voorgaande betrekking leidt tot}$$

$$r\dot{r} = -\{\dot{p}_1(x_1 - p_1) + \dot{p}_2(x_2 - p_2)\}, \text{ waarin } \underline{u} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2) \text{ en}$$

$$\vec{PA} = \{(x_1 - p_1), (x_2 - p_2)\}, \text{ zodat}$$

$$r\dot{r} = -(\underline{u}, \vec{PA})$$

het inwendig product van \underline{u} en \vec{PA} dus.

$$r\dot{r} = -(\underline{u}, \vec{PA}) = -ur \cos \theta, \text{ zodat } \boxed{\dot{r} = -u \cos \theta} \quad (1)$$

Voorts is

$$\theta = \alpha - \beta, \text{ dus ook } \dot{\theta} = \dot{\alpha} - \dot{\beta}$$

en uit de figuur:

$$\tan \beta = \frac{\dot{p}_2}{\dot{p}_1} \quad \text{of} \quad \beta = \arctan \frac{\dot{p}_2}{\dot{p}_1} + C_1$$

$$\text{zodat } \dot{\beta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{p}_2}{\dot{p}_1}\right)^2} \cdot \frac{\ddot{p}_2\dot{p}_1 - \dot{p}_2\ddot{p}_1}{\dot{p}_1^2} = \frac{\ddot{p}_2\dot{p}_1 - \dot{p}_2\ddot{p}_1}{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}$$

Nu was

$$\frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}} = \kappa, \text{ de kromming van de baan in A.}$$

Is κ_1 de kromming van de vaste polode, dan is dus analoog:

$$\dot{\beta} = \sqrt{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2} \kappa_1 = u \kappa_1 \quad (2)$$

$$\tan \alpha = \frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1}, \text{ zodat } \alpha = \arctan \frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} + C_2.$$

Nu is

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega(x_2 - p_2) \\ \dot{x}_2 &= +\omega(x_1 - p_1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1} = -\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}$$

Dus $\alpha = -\text{arc-tan} \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} + C_2$ of

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}, \text{ zodat}$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \cdot \kappa = \frac{\omega r}{R} \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\alpha} - \dot{\beta} = \frac{\omega r}{R} - u \kappa_1 = \frac{\omega(r - m \sin \theta)}{r} - u \kappa_1 \quad (4)$$

Substitutie van (1) en (4) in de uitdrukking voor (clk) geeft:

$$-r \cos \theta + 2m \sin \theta \cos \theta + r m \sin \theta + m \cos \theta (\omega r - m \omega \sin \theta - r u \kappa_1) = 0.$$

Nu is: $u = -m\omega$

Bovendien is

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \kappa_2 - \kappa_1.$$

R_2 = kromtestraal van de bew. polode.

R_1 = kromtestraal van de vaste polode.

Dus:

$$\underline{r m \omega \cos \theta} - \underline{2 \omega m^2 \sin \theta \cos \theta} + r m \sin \theta + \underline{m \cos \theta (\omega r - m \omega \sin \theta + r m \omega \kappa_1)} = 0$$

delen door m^2 geeft:

$$2 \frac{r \omega \cos \theta}{m} - 3 \omega \sin \theta \cos \theta + r \frac{\dot{m}}{m^2} \sin \theta + r \omega \kappa_1 \cos \theta = 0$$

$$2r \omega (\kappa_2 - \kappa_1) \cos \theta + r \omega \kappa_1 \cos \theta + r \frac{\dot{m}}{m^2} \sin \theta = 3 \omega \sin \theta \cos \theta$$

$$\omega r (2\kappa_2 - \kappa_1) \cos \theta + r \frac{\dot{m}}{m^2} \sin \theta = 3 \omega \sin \theta \cos \theta$$

delen door $3 \omega r \sin \theta \cos \theta$ geeft:

$$\frac{A}{\sin \theta} - \frac{B}{\cos \theta} = \frac{1}{r} \quad (\text{clk}).$$

waarin

$$A = \frac{1}{3} (2\kappa_2 - \kappa_1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$B = -\frac{1}{3\omega} \frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{1}{3\omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \right) = \frac{1}{3} \frac{dt}{d\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \right) = \boxed{\frac{1}{3} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{m} \right) = B}$$

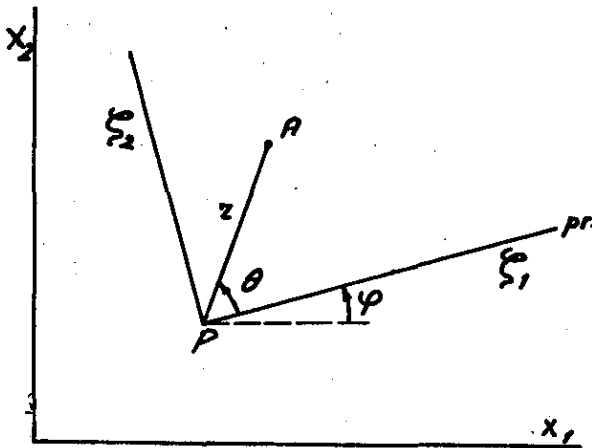
Is s de booglengte langs de vaste polode, dan is ook:

$$-\frac{1}{B} = -\frac{3u}{m} \cdot \frac{m^2}{\dot{m}} = -\frac{3m}{\frac{dm}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}} = \boxed{-\frac{3m}{(dm/ds)} = -\frac{1}{B}}$$

$$\boxed{\frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}{\sin \theta} + \frac{-\frac{1}{3} \frac{dm}{ds}}{m \cos \theta} = \frac{1}{r}}$$

(clk).

In deze vgl., welke is uitgedrukt in de poolcoördinaten r en θ komt de tijd niet meer expliciet voor.



De transformatie

$$\begin{cases} \zeta_1 = r \cos \theta \\ \zeta_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

geeft de vgl. voor clk in rechthoekige coördinaten:

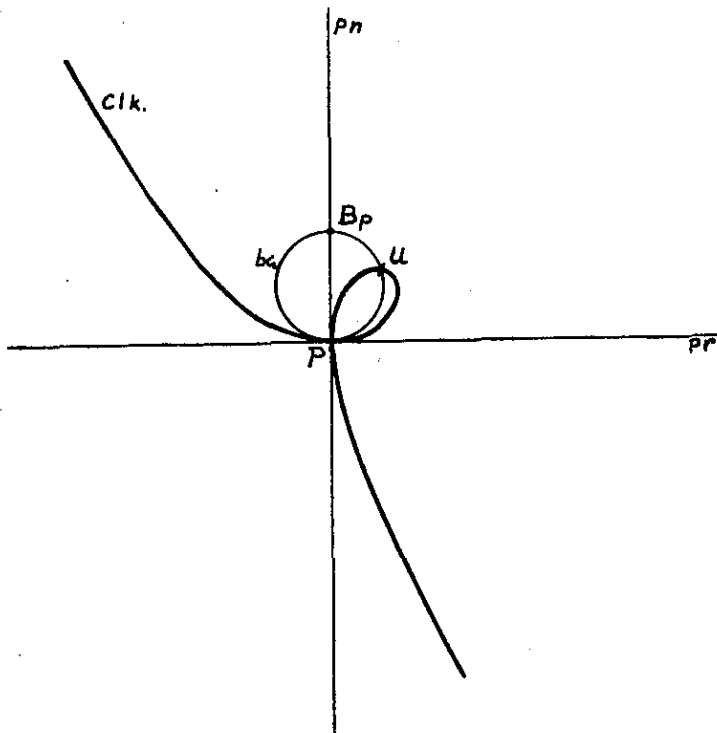
$$\frac{A}{r \sin \theta} - \frac{B}{r \cos \theta} = \frac{1}{r^2} \text{ of}$$

$$\frac{A}{\zeta_2} - \frac{B}{\zeta_1} = \frac{1}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \text{ zodat:}$$

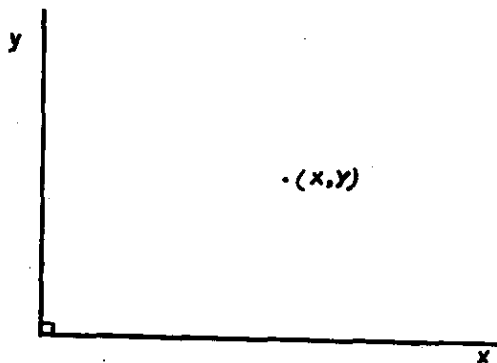
$$\boxed{(A\zeta_1 - B\zeta_2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \zeta_1\zeta_2 = 0}$$

(clk).

En dit is een kromme van de 3e graad. clk. gaat door P. Stelt men het laagste graadsgedeelte = 0, dan blijkt de kromme zowel aan pr als aan pn te raken. P is dus een dubbelpunt van clk.



Herhaling ANALYTISCHE MEETKUNDE.

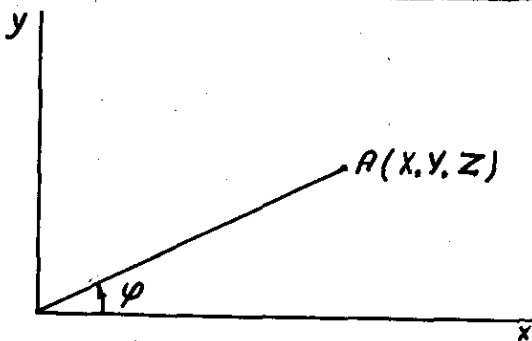


Een punt is bepaald door 2 coördinaten (x, y) in het platte vlak. Voer in $x = \frac{x}{Z}$ en $y = \frac{y}{Z}$. Dan is (X, Y, Z) een andere aanduiding voor dat punt bv. $(7, 2, 3)$ dan is $x = \frac{7}{3}$ en $y = \frac{2}{3}$.

Dus $(14, 4, 6) = (7, 2, 3)$ duidt hetzelfde punt aan.

Alleen de verhouding is dus belangrijk.

(X, Y, Z) heten de homogene coördinaten van het punt.



$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y} = \tan^{-1} \varphi$$

Dit bepaalt dus de richting waaronder dat punt gevonden wordt.

Voor punten, die ∞ ver weg liggen is $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$. In cartesische coördinaten is dit niet aan te geven, maar in homogene coördinaten is voor zo'n punt de $Z = 0$.

Dus $A_{\infty} (X, Y, 0)$.

$\frac{Y}{X}$ geeft dan de richting aan waaronder A_{∞} gevonden kan worden.

In homogene coördinaten zijn dus de oneigenlijke punten ook hanteerbaar.

De meetk. plaats van de oneigenlijke punten is een rechte nl. $Z = 0$, d.i. een homogene vergelijking van de eerste graad.

In het algemeen krijgt $ax + by + c = 0$ in homogene coördinaten de gedaante $aX + bY + CZ = 0$.

De vergelijking van een cirkel $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ wordt in homogene coördinaten $X^2 + Y^2 + 2aXZ + 2bYZ + cZ^2 = 0$.

Homogeen betekent, dat iedere term steeds dezelfde graad heeft.

Snijden we een cirkel met de oneigenlijke rechte $Z = 0$, dan voldoen de snijpunten aan

$$\left. \begin{array}{l} X^2 + Y^2 = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right\} \text{ of } \left. \begin{array}{l} X + iY = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right\} I_1 \text{ en } \left. \begin{array}{l} X - iY = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right\} I_2$$

$I_1(1, i, 0)$ en $I_2(1, -i, 0)$

Iedere cirkel gaat door I_1 en I_2 , de zg. cirkelpunten of isotrope punten van het vlak.

2 cirkels snijden elkaar in I_1, I_2 en in 2 andere punten, die reëel of complex kunnen zijn.

Stelt men $\zeta_1 = \frac{x}{Z}$ en $\zeta_2 = \frac{y}{Z}$, dan krijgt men een betrekking voor de cirkelloopkromme in homogene coördinaten:

$$(AX - BY)(X^2 + Y^2) - XYZ = 0.$$

Snijding met $Z = 0$ geeft $(AX - BY)(X^2 + Y^2) = 0$.

De cirkelloopkromme gaat dus door I_1 en I_2 en door een asymptotisch punt (B, A, C) .

clk is dus een circulaire kromme.

Een willekeurige rechte door P heeft in homogene coördinaten de vergelijking:

$$\lambda X + \mu Y = 0 \text{ en in parametervorm } \left. \begin{array}{l} X = ut \\ Y = -\lambda t \end{array} \right\}$$

Snijding met clk geeft:

$$(\lambda \mu t + B \lambda t)(\lambda^2 + \mu^2)t^2 - \lambda \mu t^2 Z = 0.$$

Er zijn 2 wortels $t = 0$.

Dat wil dus zeggen iedere lijn door P snijdt clk in het dubbelpunt P of in het knooppunt P.

Er is nog een 3e wortel $t = 0$ als $0 = t = \mu$, maar ook als $0 = t = \lambda$.

De rechten $X = 0$ resp. $Y = 0$ (dat zijn dus pn. en pr.) hebben dus ieder 3 samenvallende punten met clk gemeen:

pn. en pr. zijn dus de dubbelpuntsraaklijnen.

De vergelijking van de buigcirkel is $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - m\zeta_2 = 0$ en in homogene coördinaten:

$$X^2 + Y^2 - mYZ = 0.$$

Dit is de meetk. plaats van punten, waar de baan drie samenvallende punten met de raaklijn in het beschouwde baanpunt gemeen heeft. Hoeveel snijpunten heeft de buigcirkel met de cirkelloopkromme?

De eerste is van de 2e graad, de laatste van de 3e graad. Er zijn dus $2 \times 3 = 6$ gemeenschappelijke punten.

Twee hiervan vindt men terug in I_1 en I_2 .

De buigcirkel en de cirkelloopkromme raken beiden in P aan de poolraaklijn. De buigcirkel heeft dus met één tak van clk. alvast 2 samenvallende punten gemeen en snijdt de andere tak van clk in een enkel punt P.

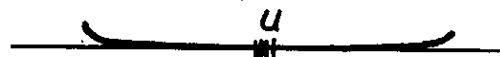
De pool P telt dus voor een drievoudig snijpunt.

Buiten P, I_1 en I_2 kan dus nog slechts een zesde punt U gevonden worden, dat altijd reëel is.

Immers als het 6e snijpunt complex was, dan zou er ook een toegevoegd complex snijpunt zijn te vinden en dat is er niet.

(I_1 en I_2 waren twee aan elkaar toegevoegde complexe punten, terwijl P steeds reëel is).

U is een punt, waar de baan 4 samenvallende punten met de raaklijn in dat punt gemeen heeft. Het wordt Undulatiepunt genoemd of ook wel punt van Ball.



In het algemeen is er dus maar één zo'n punt. De pool P is een keerpunt, waarvan de kromtestraal elke waarde tussen 0 en ∞ kan aannemen, omdat het bij P behorende krommingsmiddelpunt overal op pr kan liggen. P is dus in het algemeen geen punt van Ball.

DE ONTAARDINGEN VAN DE CIRKELLOOPKROMME.

Een kromme van de 3e graad kan ontaarden in een kegelsnede met een rechte lijn of in drie rechte lijnen.

Daar een kegelsnede, die door de beide isotrope punten gaat een cirkel is, kan de cirkelloopkromme, die een circulaire kromme is, slechts ontaarden in:

- a. een cirkel + een rechte,
- b. een kegelsnede + de oneigenlijke rechte (door I_1 en I_2),
- c. drie rechten.

De vergelijking van clk. is in rechthoekige coördinaten

$$(A\zeta_1 - B\zeta_2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \zeta_1\zeta_2 = 0 \quad (\text{clk.}).$$

Ontaarding treedt op als:

1e. $A = 0$ en $B \neq 0$.

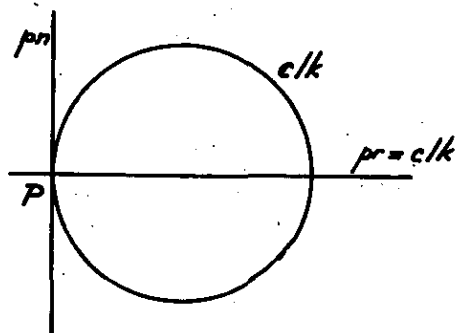
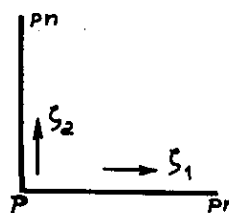
$$A = 0 \text{ als } \underline{2K_2 = K_1}.$$

De vgl. van clk. krijgt dan de gedaante:

$$\zeta_2 \cdot \{B(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \zeta_1\} = 0.$$

Dus $\zeta_2 = 0$, de vergelijking voor de poolraaklijn

of $B(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \zeta_1 = 0$, de vergelijking van een cirkel door P en middelpunt op pr.



De cirkelloopkromme is dan dus ontaard in de poolraaklijn en een cirkel door P met middelpunt op pr.

2e. $A \neq 0$, $B = 0$.

$B = 0$ als $\frac{d}{d\varphi} (m^{-1}) = 0$ d.w.z. als de middellijn van de buigcirkel stationnair is (of m.a.w. een extreme waarde bereikt).

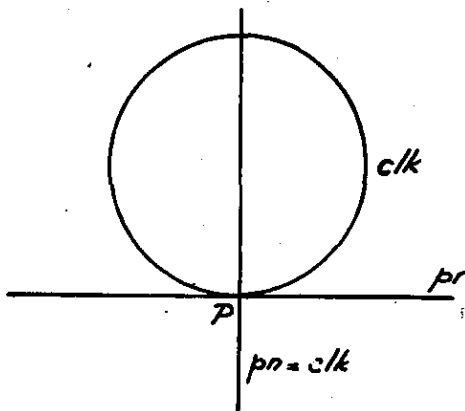
De vgl. van clk. krijgt dan de gedaante:

$$\zeta_1 \{A(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \zeta_2\} = 0.$$

Dus $\zeta_1 = 0$, de vgl. voor de poolnormaal of $A(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \zeta_2 = 0$, de

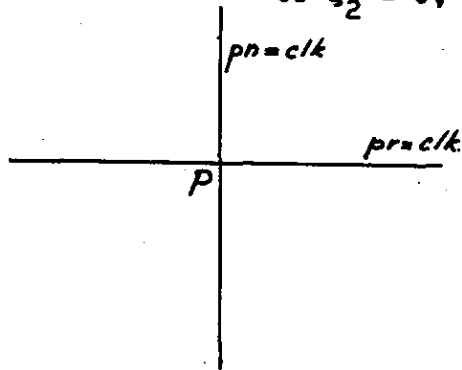
vergelijking van een cirkel door P en middelpunt op pn.

De cirkelloopkromme is nu dus ontaard in de poolnormaal en in een cirkel door P met middelpunt op pn.



3e. $A = 0$ en $B = 0$.

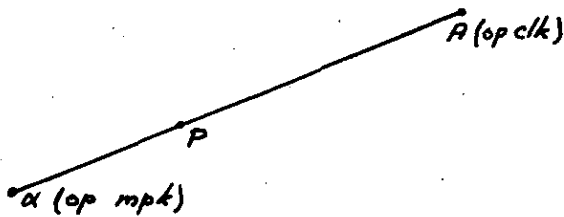
$\zeta_2 \zeta_1 = 0$ d.w.z. óf $\zeta_1 = 0$, de vgl. voor de poolnormaal
óf $\zeta_2 = 0$, de vgl. voor de poolraaklijn.



De cirkelloopkromme is dan dus ont-
aard in pr en pn en in de oneigen-
lijke rechte door I_1 en I_2 .

(Dit laatste vindt men door clk te
schrijven in homogene coördinaten).

Wat is nu de meetkundige plaats van de bij de baanpunten op de cirkel-
loopkromme behorende kromtemiddelpunten?



Deze meetkundige plaats wordt middel-
puntskromme genoemd. Het verband tus-
clk en mpk is het verband tussen
baanpunt en kromtemiddelpunt zoals
dat gegeven wordt door de betrek-
king van Euler-Savary.

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{m \sin \theta}$$

Substitueert men dit in de betrekking voor clk in poolcoördinaten, dan
komt er:

$$\frac{A}{\sin \theta} - \frac{B}{\cos \theta} - \frac{1}{m \sin \theta} = \frac{1}{\rho} \quad \text{of}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A - m^{-1}}{\sin \theta} - \frac{B}{\cos \theta} \quad \text{of}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A^*}{\sin \theta} - \frac{B}{\cos \theta} \quad (\text{mpk}).$$

De vgl. voor de middelpuntskromme heeft dus dezelfde gedaante als die
voor de cirkelloopkromme.

Hier is

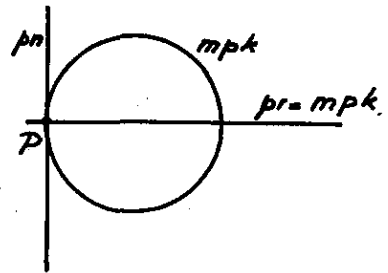
$$A^* = A - \frac{1}{m} = \left(\frac{2}{3}K_2 - \frac{1}{3}K_1\right) - (K_2 - K_1) = \frac{1}{3}(2K_1 - K_2) = A^*$$

In rechthoekige coördinaten krijgt men:

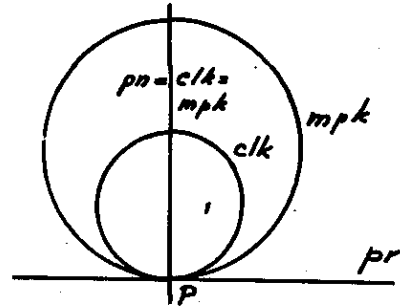
$$(A^* \zeta_1 - B \zeta_2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \zeta_1 \zeta_2 = 0 \quad (\text{mpk}).$$

DE ONTAARDINGEN VAN DE MIDDELPUNTSKROMME.

1e. $A^* = 0, B \neq 0$. Dit is het geval, als $\frac{2H_1}{K_2} = mpk$. ontaardt dan in de poolraaklijn en in een cirkel door P met middelpunt op pr. clk. behoudt haar algemene gedaante.

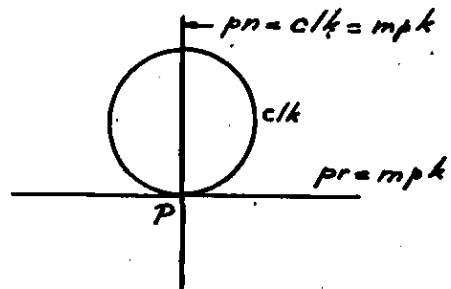


2e. $A^* \neq 0, B = 0$. Dit is het geval als de diameter van de buigcirkel een extreme waarde bereikt. mpk. ontaardt nu in de poolnormaal en in een cirkel door P met middelpunt op pn. clk. ontaardt in dezelfde poolnormaal, maar in een andere cirkel door P, waarvan het middelpunt op pn. ligt.



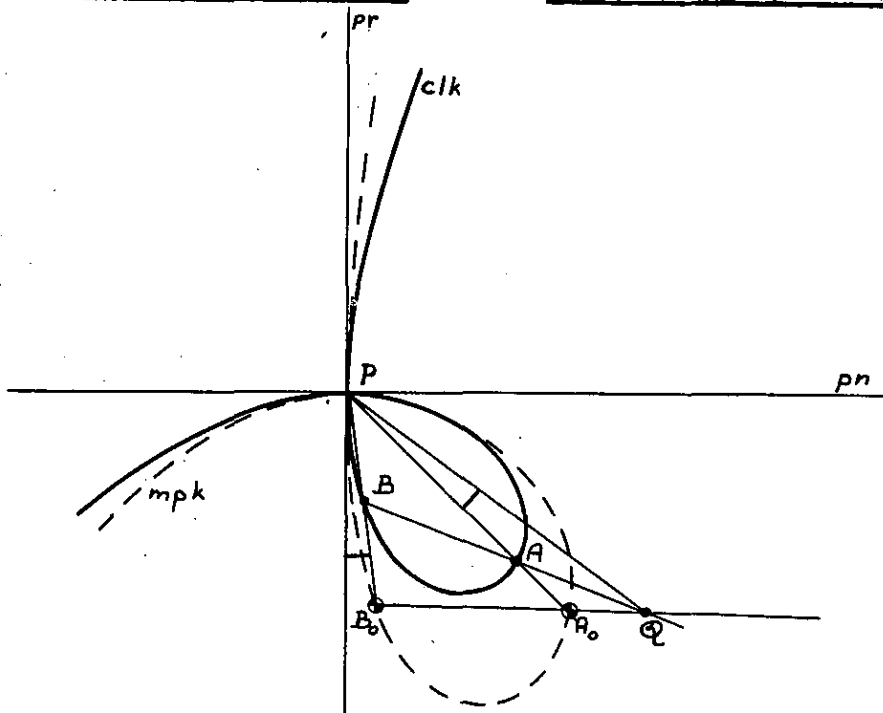
3e. $A^* = B = 0. \zeta_1 + \zeta_2 = 0$.

De middelpuntskromme ontaardt in pr, pn en de oneigenlijke rechte. De cirkelloopkromme ontaardt in pn en in een cirkel door P met middelpunt op pn. clk en mpk zijn dus tegelijk ontaard als $B = 0$.

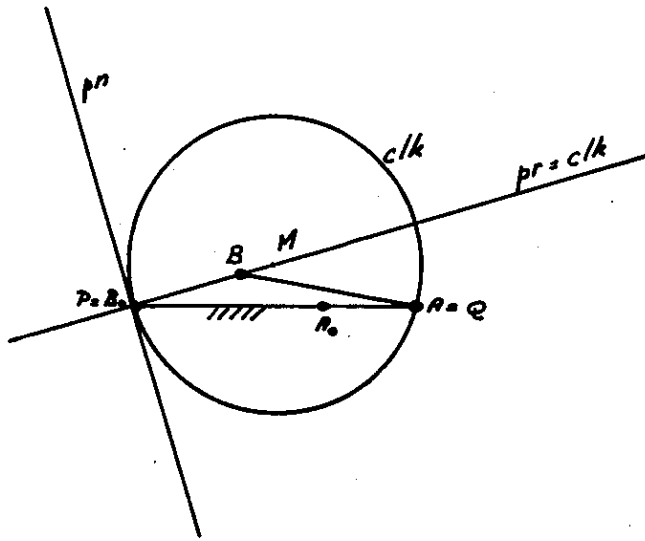


Voorbeeld.

De stangenvierzijde in een willekeurige positie.



Het bewegende vlak zit vast aan de koppelstang AB. Dit bewegende vlak wordt het koppelvlak genoemd. De punten A en B zijn top-punten (cirkellooppunten) en liggen dus op clk. A_0 en B_0 zijn de bijbehorende kromtemiddelpunten en liggen dus op mpk. In een speciale positie van deze stangenvierzijde kan clk ontaarden.



Dit is bv. het geval, wanneer de kruk A_0A in het verlengde komt van het gestel A_0B_0 .

Het collineatiepunt Q valt in deze positie samen met het draaipunt A . De pool P komt in B_0 . Op grond van de stelling van Bobillier valt dan pr samen met B_0B .

Het punt B ligt op pr , maar is tevens een cirkellooppunt. De poolraaklijn heeft dus 4 snijpunten met clk , welke van de 3^e graad is.

(nl. 3 samenvallende in P en een in B).

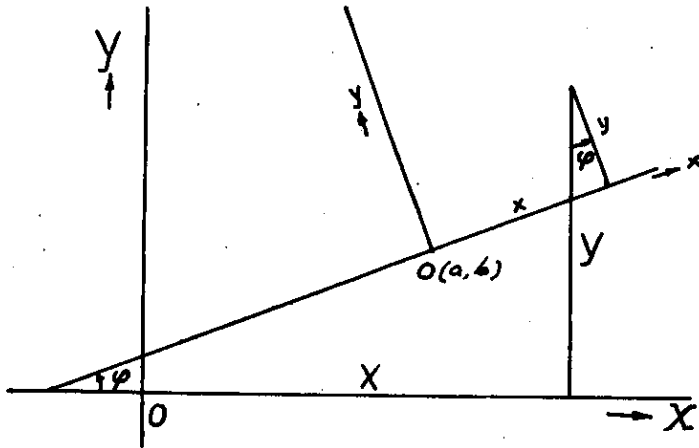
Dit kan alleen, als pr een tak is van clk . Zoals we hebben gezien is de andere tak dan een cirkel door A en P met middelpunt M op pr . De middelpuntskromme behoudt haar algemene gedaante.

Onderzoek zelf de volgende speciale posities:

- a. $AB \parallel A_0B_0$.
- b. $PQ \perp A_0A$.
- c. $PQ \perp AB$.
- d. A_0, A en B op één rechte (collineair).
- e. $PQ \perp A_0B_0$.

DE POSITIE VAN HET BEWEGENDE VLAK, WAARBIJ $\omega = \dot{\phi} = 0$.

In de vorige hoofdstukken is steeds ondersteld, dat $\dot{\phi} \neq 0$, een onderstelling die we in dit hoofdstuk achterwege zullen laten.



Uit de coördinatentransformatie

$$\begin{cases} X = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{cases}$$

wordt door differentiatie naar t:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dot{\phi} (Y - b) + \dot{a} \\ \dot{Y} = +\dot{\phi} (X - a) + \dot{b} \end{cases}$$

de pool P (X_P, Y_P) gevonden, waarvoor:

$$\begin{cases} 0 = -\dot{\phi} (Y_P - b) + \dot{a} \\ 0 = +\dot{\phi} (X_P - a) + \dot{b} \end{cases}$$

Hieruit volgde dus, dat
$$\begin{cases} X_P = a - \frac{b \dot{b}}{\dot{\phi}} \\ Y_P = b + \frac{a \dot{a}}{\dot{\phi}} \end{cases}$$

als $\dot{\phi} \neq 0$.

Hebben we in het algemeen

$$f(t), \dot{f}(t), \ddot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)$$

dan maken we voor een dergelijke tijdsafhankelijke functie de volgende afspraken:

$$f(0) = f_0, \dot{f}(0) = f_1, \ddot{f}(0) = f_2, \dots, f^{(n)}(0) = f_n.$$

Op het tijdstip $t = 0$ gaan we nu onderzoeken de situatie, waarvoor $\dot{\phi}(0) = \varphi_1 = 0$.

Dan geldt:

$$\begin{cases} X_1 = a_1 \\ Y_1 = b_1 \end{cases}$$

Voorts kiezen we samenvallende assenstelsels op het tijdstip $t = 0$. Dus $\varphi_0 = a_0 = b_0 = 0$.

Alle punten hebben op het tijdstip $t = 0$ dezelfde snelheidsvector (a_1, b_1). Kies daarom de positieve Y-(y)-as in de richting van deze snelheidsvector, dan is nog

$$a_1 = 0$$

$$b_1 \neq 0, \text{ maar pos.}, \text{ dus } b_1 > 0.$$

De coördinaten van de pool P zijn voor $\dot{\phi} \neq 0$: $P(a - b\dot{\phi}^{-1}, b + a\dot{\phi}^{-1})$ (dit is dus het geval als $t \neq 0$).

In homogene coördinaten wordt dit $P(a\dot{\phi} - b, b\dot{\phi} + a, \dot{\phi})$.

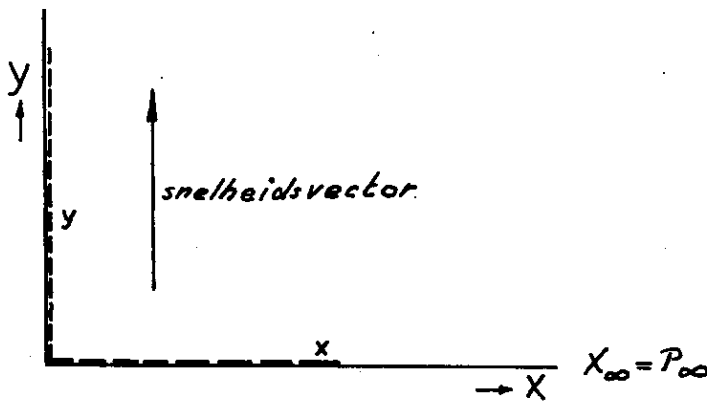
Voor $t = 0$, waarop dus $\dot{\phi} = 0$ wordt dit:

$$P(-b_1, a_1, 0)$$

en omdat $a_1 = 0$ is dit dus hetzelfde als

$$P(b_1, 0, 0).$$

De pool ligt in het oneigenlijke punt van de X-as.



De poolraaklijn, die zowel aan de vaste als aan de bewegende polode raakt is dus nu een asymptoot van deze beide krommen. Aangezien P_∞ op pr ligt, is $pr //$ aan de X -as. De vergelijking van de asymptoot pr heeft dus de gedaante: $Y = p$. En in homogene coördinaten, $Y = pZ$.

P ligt op het tijdstip $t = 0$ op deze rechte, omdat gesubstitueerd aan $b\dot{\varphi} + \dot{a} = p\dot{\varphi}$. (1)

is voldaan als $t = 0$.

De asymptoot pr moet een infinitesimaal klein tijdje later nog het punt P_∞ bevatten, zodat op $t = 0$ ook voldaan moet zijn aan

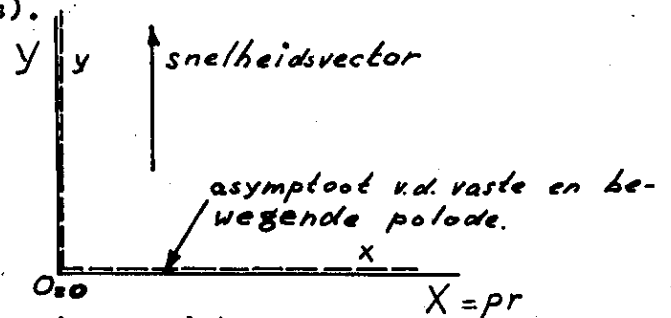
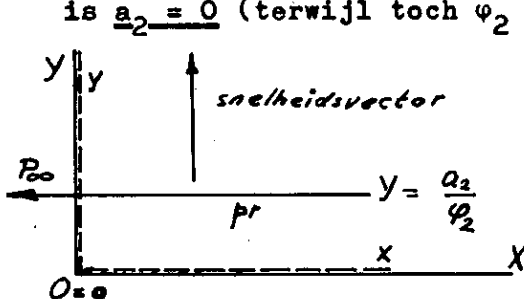
$$b\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \ddot{a} = p\ddot{\varphi} \quad (2)$$

(de verandering van de Y -coördinaat moet gelijk zijn aan p maal de verandering van de Z -coördinaat, wil de poolwisselsnelheid langs pr vallen).

Op het tijdstip $t = 0$ is aan (2) voldaan, als $a_2 = p\varphi_2$ (mits $\varphi_2 \neq 0$) (als $\varphi_2 = 0$ is ook $a_2 = 0$).

Is $\varphi_2 \neq 0$, dan is $p = \frac{a_2}{\varphi_2}$.

Kiezen we nu de X -as langs de asymptoot pr van de vaste polode, dan is $a_2 = 0$ (terwijl toch $\varphi_2 \neq 0$ is).



We hebben dus de assenstelsels zo gekozen, dat

$$\varphi_0 = a_0 = b_0 = a_1 = a_2 = 0 \text{ en } b_1 > 0 \text{ en } \varphi_2 \neq 0 \text{ ondersteld.}$$

We zijn nu alleen nog vrij in de keuze van de oorsprong op pr .

$$\text{We hebben: } \begin{cases} X = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\dot{\varphi}(Y - b) + \dot{a} \\ \dot{Y} = +\dot{\varphi}(X - a) + \dot{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\ddot{\varphi}(Y - b) - \dot{\varphi}^2(X - a) + \ddot{a} \\ \ddot{Y} = \ddot{\varphi}(X - a) - \dot{\varphi}^2(Y - b) + \ddot{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dddot{X} = -\dddot{\varphi}(Y - b) - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(X - a) + \dot{\varphi}^3(Y - b) + \dddot{a} \\ \dddot{Y} = \dddot{\varphi}(X - a) - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(Y - b) - \dot{\varphi}^3(X - a) + \dddot{b} \end{cases}$$

Voor $t = 0$ wordt dit:

$$(1) \begin{cases} X_0 = x, Y_0 = y \\ X_1 = 0, Y_1 = b_1 > 0 \\ X_2 = -\varphi_2 y, Y_2 = \varphi_2 x + b_2 \\ X_3 = -\varphi_3 y + a_3, Y_3 = \varphi_3 x + b_3 \end{cases}$$

Hoe ziet de buigcirkel eruit op het tijdstip $t = 0$?

$$\kappa = \frac{\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y}}{(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)^{3/2}}$$

Voor de punten van de buigcirkel is dus $\kappa = 0$ d.w.z., dat $\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y} = 0$ of $X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$ of $-\varphi_2 b_1 y = 0$ zodat $y = 0$, de vgl. van de x-as.

De buigcirkel is dus ontaard in de poolraaklijn en in de oneigenlijke rechte.

Voor de cirkelloopkromme geldt, dat

$$0 = \kappa = \frac{(\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y})(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)^{3/2} - 3(\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y})(\dot{X}\dot{Y} - \dot{X}\dot{Y})(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)^{1/2}}{(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)^3}$$

En dit is zo, als:

$$(\ddot{X}\dot{Y} - \dot{X}\ddot{Y})(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - 3(\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y})(\dot{X}\dot{Y} - \dot{X}\dot{Y}) = 0$$

op $t = 0$ wordt dit:

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)(X_1^2 + Y_1^2) - 3(X_1 X_2 + Y_1 Y_2)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0$$

Substitutie van de betrekkingen (1) geeft:

$$b_1^3(\varphi_3 y - a_3) - 3b_1^2(\varphi_2 x + b_2)\varphi_2 y = 0.$$

Deling door $b_1^2 \neq 0$ geeft:

$$3\varphi_2^2 xy + (3b_2\varphi_2 - b_1\varphi_3)y + a_3 b_1 = 0.$$

Dit is de vgl. van de cirkelloopkromme voor het geval $P \rightarrow \omega$.

Het is een vergelijking van de 2e graad, omdat dit een bijzondere positie van het bew. vlak is, waarbij $\omega = 0$.

Waren we van het begin af aan op homogene coördinaten overgegaan, dan bleek, dat $z = 0$ ook een tak was van clk.

clk is dus ontaard in de oneigenlijke rechte en een hyperbool:

$$y(3\varphi_2^2 x + 3b_2\varphi_2 - b_1\varphi_3) + a_3 b_1 = 0.$$

Het is nog toegestaan de oorsprong langs de x-as te verplaatsen. Doe dit zo, dat

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \frac{3b_2\varphi_2 - b_1\varphi_3}{3\varphi_2^2} \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

De y-as wordt dus evenwijdig aan zichzelf verschoven.

Er resteert:

$$3\varphi_2^2 xy + a_3 b_1 = 0 \quad (2)$$

En dit is de vgl. van een orthogonale hyperbool op het nieuwe assenstelsel.

\bar{O} is het middelpunt van de hyperbool.

Als de Y-as van het begin af aan langs de verticale asymptoot van de hyperbool gekozen was, dan was dus $3b_2\varphi_2 - b_1\varphi_3 = 0$ terwijl de vgl. van elk de gedaante

$$3\varphi_2^2 xy + a_3 b_1 = 0$$

gekregen zou hebben.

Dit kan ook geschreven worden als

$$3b_2\varphi_2^2 xy + a_3 b_1 b_2 = 0 \quad \text{of als}$$

$$b_1\varphi_3\varphi_2 xy + a_3 b_1 b_2 = 0 \quad \text{of als}$$

$$\varphi_2\varphi_3 xy + a_3 b_2 = 0 \quad (\text{clk}).$$

Waar ligt nu het punt van Ball?

Dit is het snijpunt van de buigcirkel en de cirkelloepkromme.

In dit geval is dat dus het snijpunt van de asymptoot van de hyperbool met de hyperbool zelf. (Dus geen eindig punt van Ball) als $a_3 \neq 0$.

Uit (2) blijkt, dat wanneer $a_3 \neq 0$ de hyperbool niet ontaard is (ondersteld was nl. reeds, dat $b_1 \neq 0$).

Is $a_3 = 0$, dan ontaardt de hyperbool in de twee asymptoten, dan zijn er oneindig veel punten van Ball: nl. alle punten van de poolraaklijn pr.

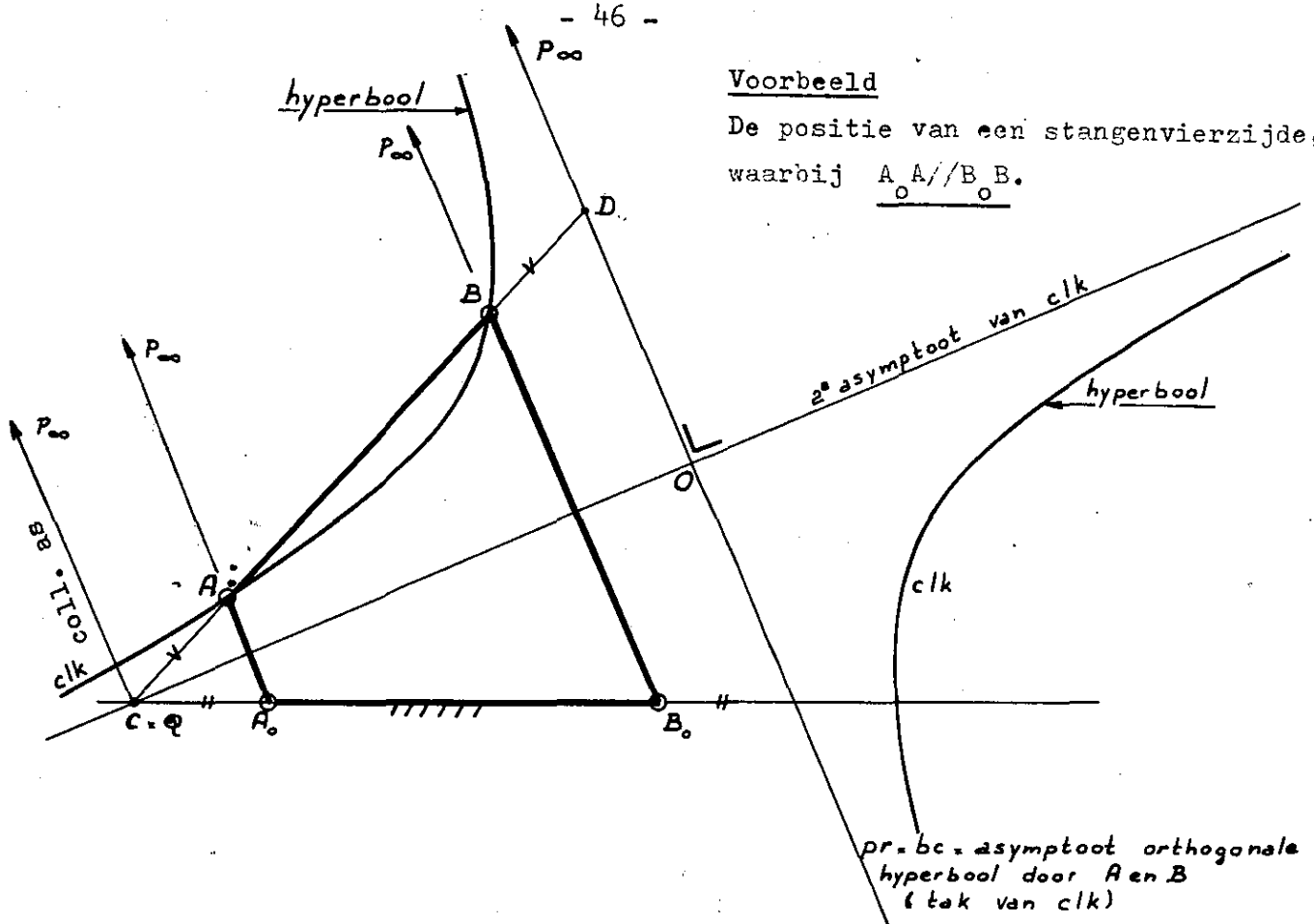
Er zijn dus óf helemaal geen óf oneindig veel punten van Ball.

Is $\omega = 0$ (d.w.z. $\varphi_1 = 0$), dan staat in het geval behalve $a_1 = 0$ ook nog $b_1 = 0$ het hele vlak stil. Er is geen punt te vinden met een snelheidsvector $\neq 0$ d.w.z. elk punt is pool.

De conditie $\omega = 0$ is dus pas synoniem met een oneigenlijk poolpunt (P_∞) als tevens $b_1 \neq 0$ is.

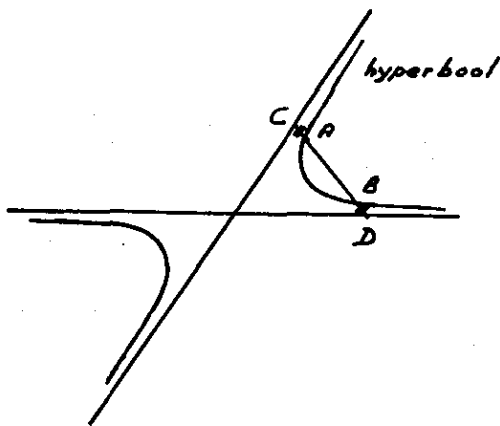
Voorbeeld

De positie van een stangenvierzijde, waarbij $\underline{A A' / B B'}$.



In deze positie is P_{∞} , dus clk is ontaard in een hyperbool door A en B en in de oneigenlijke rechte. De collineatie-as is hier QP_{∞} .

pr werd gevonden door spiegeling van deze lijn t.o.v. de bisectrice van $\angle APB$. Aangezien deze bisectrice de zijde AB verdeelt in stukken, die zich verhouden als de opstaande zijden van $\triangle PAB$, wordt dus in dit geval de coll. as gespiegeld t.o.v. de lijn door P_{∞} en het midden van AB. pr is dus $P_{\infty}D$, als $\overline{QA} = \overline{BD}$.



Nu is een bekende meetk. eigenschap van de hyperbool, dat het midden van de verbindingslijn van twee punten van de hyperbool samenvalt met het midden tussen de snijpunten van deze lijn met de beide asymptoten van de hyperbool. Dit betekent dus, dat Q op de tweede asymptoot moet liggen. De tweede asymptoot van clk is dus de lijn door Q loodrecht op pr .

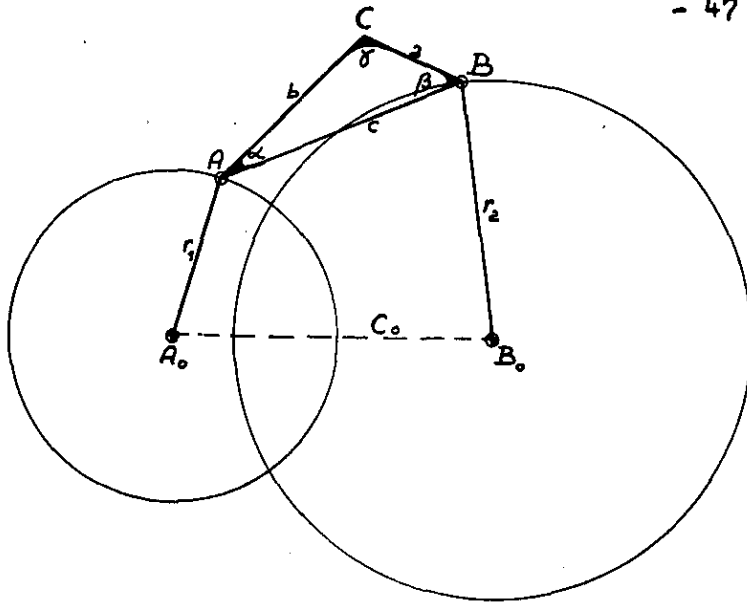
Andere punten van de hyperbool kunnen worden gevonden met een stralenbundel door B of door A,

die de hyperbool in punten snijdt, welke alle gevonden kunnen worden met de gememoreerde meetk. eigenschap van de hyperbool.

Er is geen punt van Ball.

Alleen als in de positie, waarbij $\underline{A A' / B B'}$ ook nog $AB \perp BB'$ dan zijn er ooveel punten van Ball op pr , omdat dan clk ontaardt in de twee asymptoten en in de oneigenlijke rechte. Voor een willekeurige stangenvierzijde behoeft aan deze eis niet voldaan te zijn.

Is P een eindig punt, dan is er in het algemeen slechts één punt van Ball.



DE STANGENVIERZIJDE IN HET ALGEMEEN.

De beweging van het koppelvlak is er een, waarbij twee punten van het bew. vlak twee niet concentrische cirkels doorlopen. Het bewegende koppelvlak is gekenschetst door de koppeldriehoek ABC.

C doorloopt de z.g. koppelkromme.
 $A_0 B_0 = c_0 =$ gestellengte.

r_1 en r_2 zijn de beide krukken
 $AB = c =$ de koppelstang.

Het is gebleken, dat de koppelkromme van de 6e graad is en trircirculair.

Dit laatste wil zeggen, dat de isotrope punten 3-voudige punten zijn van de koppelkromme.

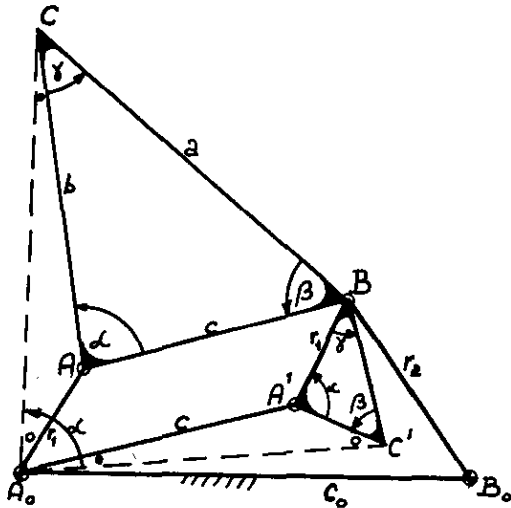
Construeer, uitgaande van de gegeven stangenvierzijde het parallellogram $A_0 A B A'$.

De vierzijde $A_0 A B B_0$ draagt de koppeldriehoek ABC.

De vierzijde $A_0 A' B B_0$ heeft de koppeldriehoek $A' B C'$ en wel zó, dat $\Delta A' C' B \sim \Delta ABC$.

Hieruit volgt, dat

$$\frac{\overline{A_0 A}}{\overline{AC}} = \frac{r_1}{b} = \frac{\overline{A_1 B}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A' C'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A' C'}}{\overline{A_0 A'}}$$



De pantograaf van Sylvester.

Voorts is $\angle A_0 A C = \angle C' A' A_0$, zodat $\Delta A_0 A C \sim \Delta C' A' A_0$.

Dus

$$\angle C A_0 C' = \angle A A_0 A' + \angle C A_0 A + \angle A' A_0 C' = \angle A A_0 A' + \angle A' A_0 C' + \angle A_0 C' A' = \angle A A_0 A' + (180^\circ - \angle A_0 A' C') = \angle C' A' B = \alpha.$$

Dus $\angle C A_0 C' = \alpha =$ vaste hoek (onafhankelijk van de tijd).

Voorts is $\frac{\overline{A_0 C'}}{\overline{A_0 C}} = \frac{c}{b} =$ vaste verhouding,

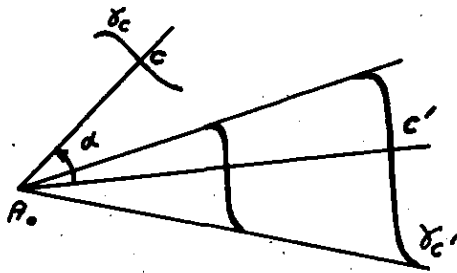
d.w.z. $\overline{A_0 C'} =$ vastgetal $\times \overline{A_0 C}$.

We schrijven

$$\overrightarrow{A_0 C'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A_0 C} \cdot e^{-i\alpha}$$

Elk punt van de koppelkromme γ_c wordt geroteerd om A_0 over een hoek $-\alpha$ en meetc. vermenigvuldigd met de factor $\frac{c}{b}$ (het meetc. vermenigvuldigingscentrum is A_0). De koppelkrommen γ_c en $\gamma_{c'}$ zijn dus onderling gelijkvormig en t.o.v. elkaar verdraaid.

Het mechanisme, dat beide koppelkrommen gelijktijdig voortbrengt, wordt de pantograaf van Sylvester genoemd (Bij dit mechanisme behoort het punt B niet noodzakelijk een cirkel te beschrijven).



De oorspronkelijke kromme $k = \gamma_c$ kan men weer terugkrijgen door uitgaande van de stangenvierzijde $A_0A'BB_0$ met koppeldriehoek $A'BC'$ het parl.gram A_0ABA' te formeren en de koppeldriehoek ABC gelijkvormig te maken met $\Delta A'C'B$. γ_c ontstaat dan uit $\gamma_{c'}$ door rotatie om A_0 over $+\alpha$ en meerk. vermenigvuldiging met de factor $\frac{b}{c}$.

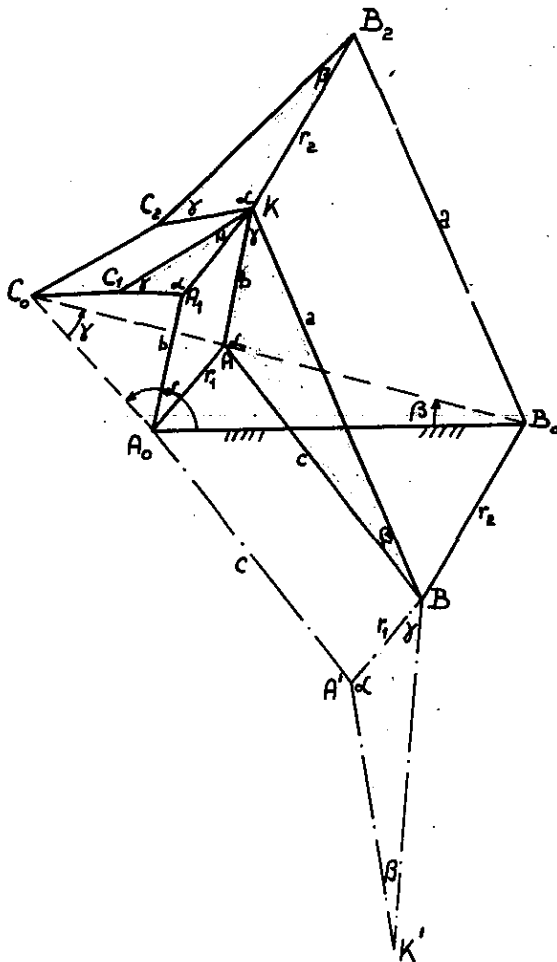
Dezelfde koppelkromme γ_c kan worden verkregen door de stangenvierzijde $A_0A'BB_0$ (met koppeldriehoek $A'BC'$) in

haar geheel over $+\alpha$ om A_0 te verdraaien en haar vervolgens meerk. te vermenigvuldigen met de factor $\frac{b}{c}$.

Het punt C' komt dan weer in C terecht, maar de koppelkromme γ_c wordt nu door een andere stangenvierzijde voortgebracht. Bij de laatste stangenvierzijde is het punt A_0 op zijn plaats gebleven, zodat A_0 voor deze vierzijde een van de twee vaste draaipunten is. Het punt B_0 komt terecht in C_0 en wel zo, dat

$$C_0A_0B_0 = \alpha \text{ en } \frac{\overline{A_0C_0}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{b}{c}.$$

De gesteldriehoek $A_0B_0C_0$ is dus gelijkvormig met de koppeldriehoek ABC .



De figuur van Roberts.
in combinatie met de
pantograaf van Sylvester.

Neemt men in plaats van het punt A_0 het punt B_0 als rotatie- en vernigvuldigingscentrum, dan verkrijgt men op analoge wijze de stangen-
vierzijde $B_0 B_2 C_2 C_0$ met koppeldriehoek $B_2 C_2 K$, waarvan het koppelpunt
 K ook dezelfde koppelkromme γ_c doorloopt.

In de figuur van Roberts nemen de vaste draaipunten A_0 , B_0 en C_0 een
onderling gelijkwaardige positie in. Voorts onderscheidt men in deze
figuur de parallelogrammen $(A_0 A_1 K A)$, $(B_0 B_2 K B_2)$ en $(C_0 C_2 K C_1)$, terwijl
 $\Delta A B K \sim \Delta A_1 K C_1 \sim \Delta K B_2 C_2 \sim \Delta A_0 B_0 C_0$.

In de figuur van Roberts vinden we dus een 3-voudige voortbrenging
van de koppelkromme.

Een eenvoudige methode voor het bepalen van de afmetingen van de
drie vierzijden vindt men door loskoppeling van het mechanisme, dat
in de figuur van Roberts is weergegeven, van de gesteldriehoek
 $A_0 B_0 C_0$ en formering van de configuratie van Roberts, zoals aangegeven
in de tweede figuur (ga na of dit kan!).
In deze gestrekte figuur kunnen met uitzondering van de 3 gestel-
lengten alle afmetingen worden afgelezen.

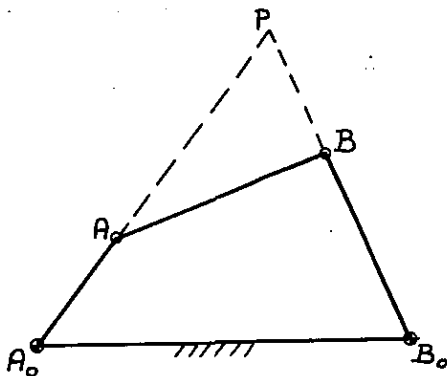
Deze zijn resp.:

$$I \quad \overline{A_0 B_0} = c_0, \quad \overline{AB} = c, \quad \overline{A_0 A} = r_1, \quad \overline{B_0 B} = r_2$$

$$II \quad \overline{A_0 C_0} = \frac{b}{c} c_0, \quad \overline{A_1 C_1} = \frac{b}{c} r_1, \quad \overline{A_0 A_1} = \frac{b}{c} \cdot c, \quad \overline{C_0 C_1} = \frac{b}{c} \cdot r_2$$

$$III \quad \overline{B_0 C_0} = \frac{a}{c} c_0, \quad \overline{B_2 C_2} = \frac{a}{c} r_2, \quad \overline{B_0 B_2} = \frac{a}{c} \cdot c, \quad \overline{C_0 C_2} = \frac{a}{c} \cdot r_1$$

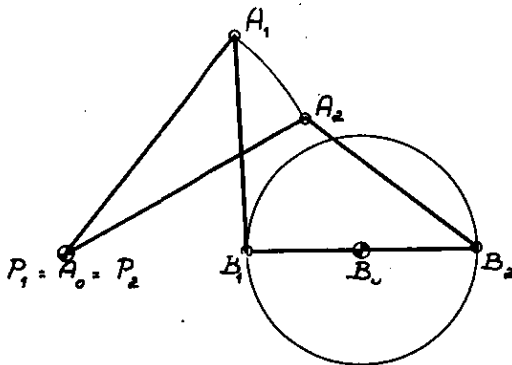
DE ONGELIJKHEDEN VAN GRASHOF.



De vaste polode wordt bij de stangenvierzijde gevonden door punt voor punt de pool te localiseren in het snijpunt van de beide opstaande zijden A_0A en B_0B .

De meetk. plaats van deze snijpunten is de vaste polode als A_0B_0 vast is, en is de bewegende polode indien men AB vasthoudt. We gaan uit van de onderstelling, dat de stangenvierzijde niet

strekbaar is, d.w.z. dat niet alle draaipunten tegelijk in één lijn kunnen komen.



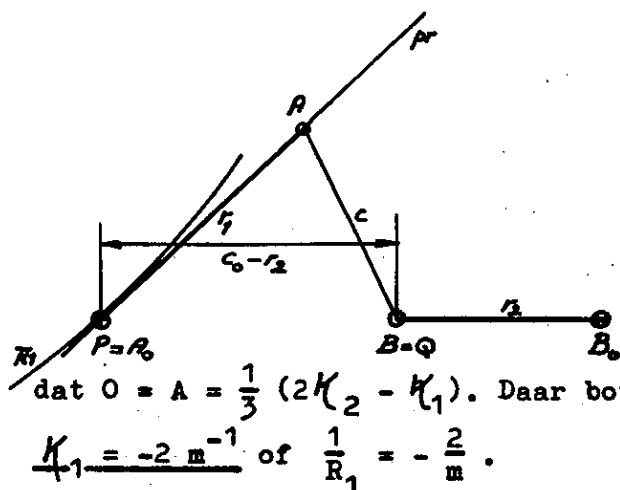
Zodra het draaipunt B op A_0B_0 komt, valt de pool P in A_0 . Er zijn 2 standen, waarbij dit mogelijk is. Ook kan de vierzijde in alle standen t.o.v. de gestellijn worden gespiegeld, zonder daarbij een andere dan een tot de vaste polode gerekende tak te effectueren.

A_0 is dus in het algemeen een vier-voudig punt van de vaste polode. (Dit behoeft niet in alle vier gevallen een reëel doorsnijdingspunt te zijn: komt B nooit collineair met A_0B_0 , dan is A_0 een vier-voudig complex punt van de vaste polode; komt B slechts éénmaal collineair te liggen met A_0B_0 , dan is A_0 behalve een twee-voudig reëel punt tevens een twee-voudig complex punt van de vaste polode).

Net zo is ook B_0 een viervoudig punt van de polode. Daar er geen andere posities van de stangenvierzijde denkbaar zijn, waarbij de pool P collineair is met A_0B_0 , heeft de lijn A_0B_0 dus juist 8 doorsnijdingspunten met de vaste polode gemeen. De vaste polode is dus van de 8e graad.

(Is het mechanisme wel strekbaar, dan heeft men in de gestrekte positie 2 polen, die in het algemeen niet met de twee gestelpunten behoeven samen te vallen).

De twee posities van de stangenvierzijde, die t.o.v. het gestel elkaar spiegelbeeld zijn, kunnen door beweging van het mechanisme alleen niet altijd uit elkaar worden verkregen. Men zegt dan, dat zulke posities wel beide tegelijk analytisch, maar niet kinematisch bestaanbaar zijn. Er zijn stangenvierzijden, waarbij twee willekeurige t.o.v. het gestel spiegelbeeldig gelegen posities alleen analytisch bestaanbaar en stangenvierzijden, waarbij zulke posities zowel analytisch als kinematisch bestaanbaar zijn.

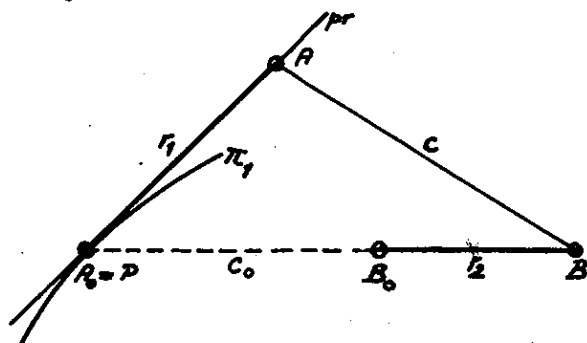


Onderstel nu, dat B tussen A_0 en B_0 op de gestellijn kan komen. Dit is mogelijk als ΔA_0BA construeerbaar is, dus als $|r_1 - c| < |c_0 - r_2| < r_1 + c$.

Op grond van de stelling van Bobillier valt in deze positie de poolraaklijn pr samen met A_0A . De cirkelloopkromme is in deze positie ontaard en wel zo,

m is de y -coördinaat van de buigpool B_p en R_1 is de y -coördinaat van het krommingsmiddelpunt van de vaste polode in P . Zowel dit krommingsmiddelpunt als B_p liggen op de poolnormaal. Daar B_p en B in dit geval aan dezelfde zijde van pr liggen, kan men op grond van (1) zeggen, dat het krommingsmiddelpunt van de vaste polode in P en het draaipunt B aan weerszijden van pr liggen. In de omgeving van P verloopt de vaste polode dus aan de bovenzijde van pr . (Dit is ook direct te zien door een naburige stand te bekijken). We noemen deze tak van π_1 een tak van de tweede soort.

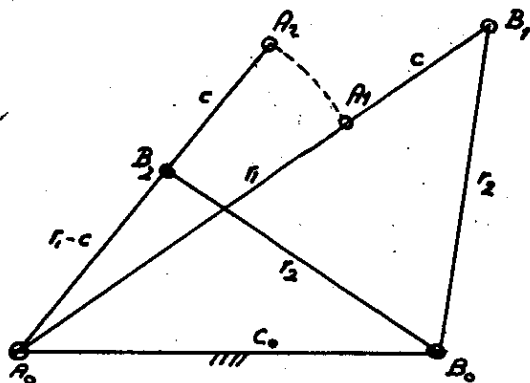
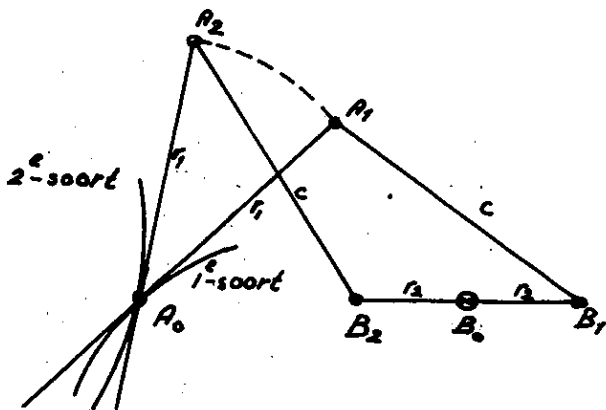
Er is dus een reële tak van de tweede soort als $|r_1 - c| < |c_0 - r_2| < r_1 + c$. (De laatste ongelijkheid is overbodig, omdat daaraan door elke vierzijde wordt voldaan).



Kan B op het verlengde van A_0B_0 komen, dan is ΔA_0AB construeerbaar, hetgeen het geval is, als:
 $|r_1 - c| < c_0 + r_2 < r_1 + c$.

Aan de eerste ongelijkheid wordt altijd voldaan, daar bij een vierzijde een stanglengte altijd kleiner is dan de som der 3 andere.

Ook in dit geval is $K_1 = -2m^{-1}$, maar nu liggen B en de buigpool B_p aan weerszijden van pr , zodat π_1 nu in de omgeving van P aan de onderzijde van pr verloopt. We noemen dit een tak van de eerste soort. Er is dus een tak van de eerste soort als $c_0 + r_2 < r_1 + c$.



Daar de vaste polode symmetrisch is t.o.v. $A_0 B_0$ kunnen we zeggen, dat de

- (1) voorwaarde $c_0 + r_2 < r_1 + c$ nodig en voldoende is, opdat er 2 reële takken π_1 van de eerste soort door A_0 gaan.
- (2) De voorwaarde $|r_1 - c| < |c_0 - r_2|$ is nodig en voldoende, opdat er twee reële takken π_1 van de tweede soort door A_0 gaan.

We spreken van een dode stand, indien de koppelstang in het verlengde van of langs één der beide krukken valt. (In de tekening is dit AA_0).

In stand 1 is er sprake van een dode stand van de eerste soort. Er is dus een dode stand van de eerste soort als voldaan is aan de nodig en voldoende voorwaarde $c_0 + r_2 > c + r_1$ (3).

In stand 2 heeft men een dode stand van de tweede soort als voldaan is aan de nodig en voldoende voorwaarde:

$$|c_0 - r_2| < |r_1 - c| < c_0 + r_2.$$

Door elke vierzijde wordt steeds voldaan aan de laatste der beide ongelijkheden, zodat een dode stand van de 2e soort aanwezig is als

$$|c_0 - r_2| < |r_1 - c| \quad (4)$$

De voorwaarden (1) en (3) zijn elkaars tegengestelde, evenals de voorwaarden (2) en (4).

Als er 4 reële takken van π_1 door A_0 gaan, zijn er dus geen uiterste standen voor de kruk BB_0 . (De punten A_0 , A en B kunnen niet collineair komen te liggen). De kruk BB_0 kan dus volle omdraaiingen maken, omdat er geen dode standen zijn.

Heeft π_1 alleen twee reële takken van de eerste soort, dan zijn er wel dode standen van de tweede soort, maar niet van de eerste soort. De kruk BB_0 kan dan wel in het verlengde komen van het gestel, maar hij kan niet ronddraaien.

Zijn dus alleen de takken van de eerste soort van π_1 in A_0 reëel, dan slingert EB om het verlengde van $A_0 B_0$ tussen twee dode standen van de tweede soort.

Zijn alleen de takken van de tweede soort van π_1 in A_0 reëel, dan slingert EB om de basis $A_0 B_0$ zelf en wel tussen twee dode standen van de eerste soort.

Als beide takken van π_1 van de eerste en van de tweede soort complex zijn, dan zijn er zowel dode standen van de eerste als van de tweede soort. In dit geval passeert B nooit de lijn $A_0 B_0$. De stang $B_0 B$ slingert dan heen en weer tussen een dode stand van de eerste soort en een dode stand van de tweede soort.

Volvoeren beide krukken een slingerbeweging, dan spreken we van een dubbelslingermechanisme.

Als $B_0 B$ ronddraait en $A_0 A$ slingert, dan spreken we van een krukslingermechanisme.

Als beide krukken rondgaan, spreken we van een dubbelkrukmechanisme.

We spreken van een volledige beweging, als ook de t.o.v. het gestel gespiegelde standen kinematisch bereikt kunnen worden. In het andere geval is de beweging onvolledig.

We gaan nu uit van de in het geheel geen beperking inhoudende onderstelling, dat $r_1 \leq r_2$.

Stel voorts de kleinste zijde k en de grootste g.

I. Onderstel, dat $k+g <$ som van de beide andere zijden.

a) Stel $c_0 = k$, de kleinste zijde, dan is op grond van (I) altijd

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 + c < r_1 + r_2 \quad (5) \\ c_0 + r_1 < c + r_2 \quad (6) \\ c_0 + r_2 < c + r_1 \quad (7) \end{array} \right.$$

Uit (5) en (6) volgt, dat $r_2 - c_0 > |c - r_1|$ (8)

en uit (5) en (7), dat $r_1 - c_0 > |c - r_2|$ (9).

Uit (8) volgt, dat van π_1 twee reële takken van de tweede soort door A_0 gaan.

Uit (9) volgt, dat van π_1 twee reële takken van de tweede soort door B_0 gaan.

Uit (7) volgt, dat van π_1 twee reële takken van de 1e soort door A_0 gaan.

Uit (6) volgt, dat van π_1 twee reële takken van de 1e soort door B_0 gaan.

Zowel door A_0 als door B_0 gaan dus 4 reële takken; er zijn dan in het geheel geen dode standen: het is dus een dubbelkrukmechanisme

De beweging is onvolledig.

β) Stel $c = k$, de kleinste zijde.

Er is dan steeds voldaan aan de ongelijkheden:

$$\begin{cases} c + c_0 < r_1 + r_2 \\ c + r_1 < r_2 + c_0 \\ c + r_2 < c_0 + r_1 \end{cases}$$

(Ten opzichte van het voorgaande geval is hier c met c_0 verwisseld). Uit de ongelijkheden volgt, dat

$$r_2 - c > |c_0 - r_1| \quad \text{en} \quad r_1 - c > |c - r_2| .$$

Beide krukken hebben dus dode standen van de 1e en van de 2e soort. Zowel door A_0 als door B_0 gaan 4 complexe takken van π_1 . Het is dus een dubbelslingermechanisme.

De beweging is onvolledig.

γ) Stel $r_1 = k$, de kleinste zijde.

In dit geval is er sprake van een krukslingermechanisme.
De beweging is onvolledig.

II. Is $k + g >$ som van de beide andere zijden, dan is er altijd sprake van een dubbelslingermechanisme.
De beweging is steeds volledig.

Het gehele complex van regels, wordt de regel van Grashof genoemd.

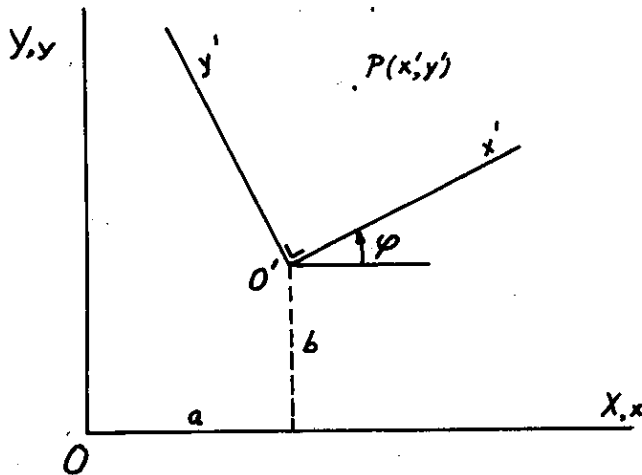
DE KINEMATICA DER DISCRETE STANDEN.

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot de behandeling van de instantane of momentane kinematica. Zij wordt voornamelijk gebruikt voor de bestudering van reeds bestaande mechanismen. De behandeling van de poolbaan (vaste polode) en de poolkromme (bew. polode), de configuratie van Roberts en de regel van Grashof zegt iets meer over de totale beweging en behoort tot de continue kinematica.

We zullen nu de samenhang gaan bespreken tussen discrete standen, die een eindig tijdsinterval uit elkaar liggen.

De bestudering hiervan behoort tot de z.g. discrete kinematica.

Het is nuttig voor het ontwerpen van mechanismen, zoals b.v. de kanteldeur van een garage, waarbij zekere standen zijn voorgeschreven. Allereerst beperken we ons tot twee standen van het bewegende vlak.



stand I wordt voorgesteld door het assenstelsel x, y .

stand II door x', y' . We hebben:

$$\begin{cases} X = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a \\ Y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b \end{cases}$$

Hierin zijn a, b en φ nu niet meer functies van de tijd. Voor een punt, dat in beide standen op dezelfde plaats ligt geldt, dat

$$\begin{cases} x' = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a \\ y' = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b \end{cases}$$

of

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos \varphi)x' + y' \sin \varphi &= a \\ x' \sin \varphi - y'(1 - \cos \varphi) &= -b \end{aligned} \right\} \text{ Er is precies één zo'n punt } P_{12} \text{ als de hoofddeterminant } \neq 0 \text{ is.}$$

d.w.z., als

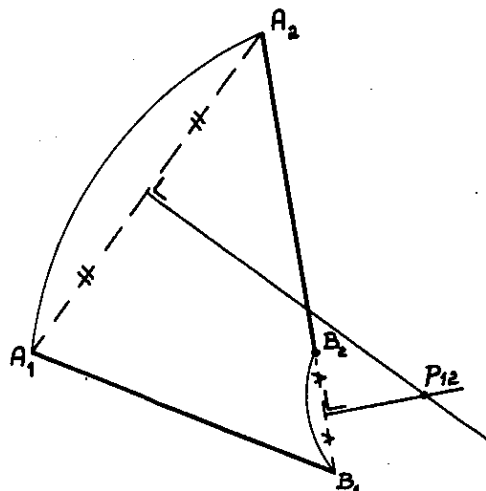
$$(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi \neq 0.$$

Het linkerlid is alléén nul, als $\cos \varphi = 1$ en $\sin \varphi = 0$, dus als $\varphi = 0$.

En dit is alléén het geval, als het vlak niet gedraaid is.

(als $\varphi = 0$ is P_{12} een oneigenlijk punt.)

We kunnen dus van de ene stand naar de andere stand komen door rotatie om dat punt, het z.g. rotatiepunt P_{12} (ook wel rotatiecentrum genoemd).



De positie van het bew. vlak is in stand I voorgesteld door het lijnstuk $A_1 B_1$, hetgeen in stand II in $A_2 B_2$ terecht is gekomen.

Omdat het vlak gedraaid is, is er in elk geval zo'n punt.

P_{12} is te vinden in het snijpunt van de twee middelloodlijnen van $\overline{A_1 A_2}$ en $\overline{B_1 B_2}$.

Aangezien $\overline{P_{12}B_1} = \overline{P_{12}B_2}$ en $\overline{P_{12}A_1} = \overline{P_{12}A_2}$ is $\Delta A_1B_1P_{12} \cong \Delta A_2B_2P_{12}$,

zodat

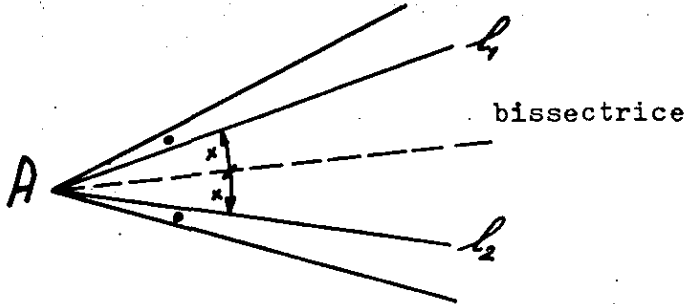
$$\star B_1P_{12}B_2 = \star A_1P_{12}A_2 = \varphi_{12}, \text{ de verdraaiingshoek.}$$

Voorts is $\varphi_{12} + \varphi_{21} = 0$.

De overgang $\frac{\varphi_{12}}{\Delta t} \rightarrow \omega$ als $\Delta t \rightarrow 0$ wordt nu niet meer uitgevoerd. Deze stap kan beschouwd worden als de verbindingsschakel tussen de discrete- en de momentane kinematica.

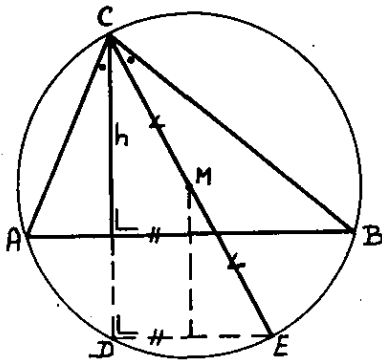
HET BEGRIP ISOGONALE VERWANTSCHAP.

Isogonale verwantschap van lijnen.



Men noemt twee lijnen, die door het hoekpunt van een hoek gaan en elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de bissectrices van die hoek, isogonaal verwant.

Voorbeeld.

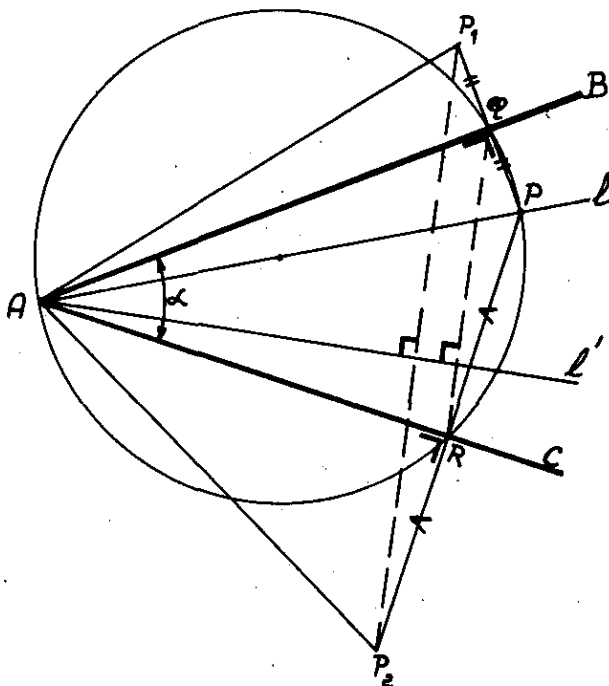


De hoogtelijn door een hoekpunt van een driehoek en de middellijn van de omgeschreven cirkel door datzelfde hoekpunt, zijn isogonaal verwant.

Bewijs.

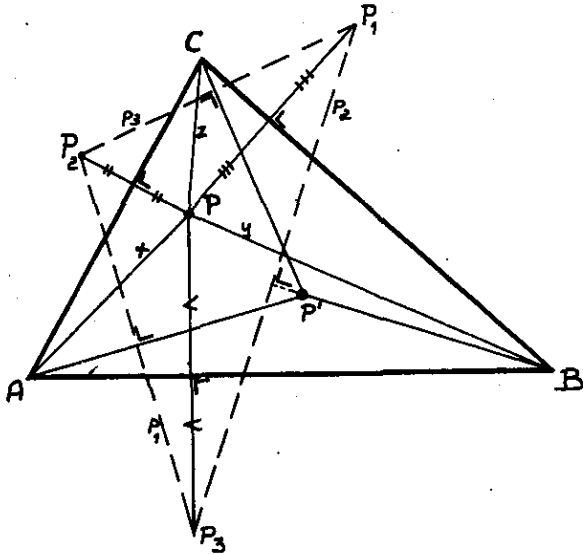
$\sphericalangle CDE = \pi/2$, zodat $DE \parallel AB$. Voorts gaat de middelloodlijn van DE door M, zodat $\overline{AD} = \overline{EB}$ en $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECB$.

Het voorgaande is tevens een middel om een isogonaal verwante lijn te construeren:



Van de lijn l door het hoekpunt A van $\triangle ABC$ construeert men de isogonaal toegevoegde lijn l' als volgt: Kies P op l en bepaal de voetpunten Q en R van de door P gaande loodlijnen op AB en AC. AQR is dan een koorde-vierhoek met AP als middellijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle AQR$. De isogonaal verwante lijn l' is dus de hoogtelijn in $\triangle AQR$ door het hoekpunt A. Bepaal nu de beide spiegelbeeldpunten P_1 en P_2 van P resp. t.o.v. AB en AC. Dan is $P_1P_2 \parallel QR$ en $\overline{P_1P_2} = 2\overline{QR} = 2\overline{AP} \cdot \sin \alpha$. Voorts is $\overline{AP_1} = \overline{AP} = \overline{AP_2}$. $\triangle P_1AP_2$ is gelijkbenig, zodat l' de middelloodlijn is van P_1P_2 . l' is de as van P_1P_2 .

Isogonale verwantschap van punten.



Neem een willekeurig punt P binnen of buiten $\triangle ABC$. Trek AP, BP en CP, de drie hoektransversalen door P. De isogonaal verwante lijn van AP t.o.v. $\triangle ABC$ is de as van P_2P_3 . Zo zijn ook de isogonaal verwante lijnen van BP en CP de assen resp. van P_1P_3 en P_1P_2 .

De assen van de zijden van $\triangle P_1P_2P_3$ gaan door één punt nl. het middelpunt van de omschreven cirkel van deze driehoek. We hebben dus de stelling, dat wanneer drie hoektransversalen van een driehoek door één punt gaan, gaan de isogonaal ver-

wante lijnen t.o.v. de hoeken van deze driehoek wéér door één punt P'. P' noemt men het isogonaal verwante punt van P t.o.v. de gronddriehoek ABC.

Deze verwantschap is wederkerig.

Liggen P_1, P_2 en P_3 op één rechte, dan zijn de 3 isogonaal verwante lijnen door P' onderling evenwijdig, zodat $P' \rightarrow \infty$.

P_1, P_2 en P_3 zijn alleen collineair als:

$$(p_1 + p_2 - p_3)(p_1 - p_2 + p_3)(p_1 - p_2 - p_3) = 0.$$

Nu is $\begin{cases} p_1 = 2x \sin \alpha \\ p_2 = 2y \sin \beta \\ p_3 = 2z \sin \gamma, \end{cases}$

zodat

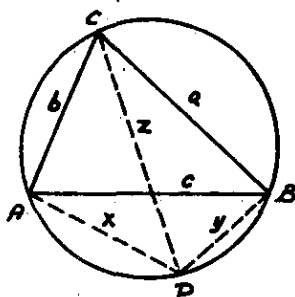
$$(x \sin \alpha + y \sin \beta - z \sin \gamma)(x \sin \alpha - y \sin \beta + z \sin \gamma)(x \sin \alpha - y \sin \beta - z \sin \gamma) = 0.$$

Voorts is:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c,$$

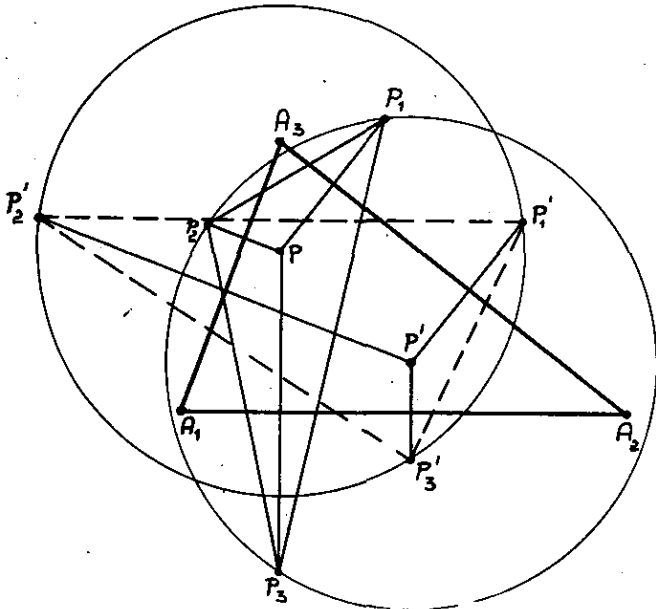
zodat

$$(ax + by - cz)(ax - by + cz)(ax - by - cz) = 0.$$



Nu is volgens de stelling van Ptolemeüs APBC een koordevierhoek als voor het punt P de betrekking $ax + by = cz$ geldt. P ligt dus op de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

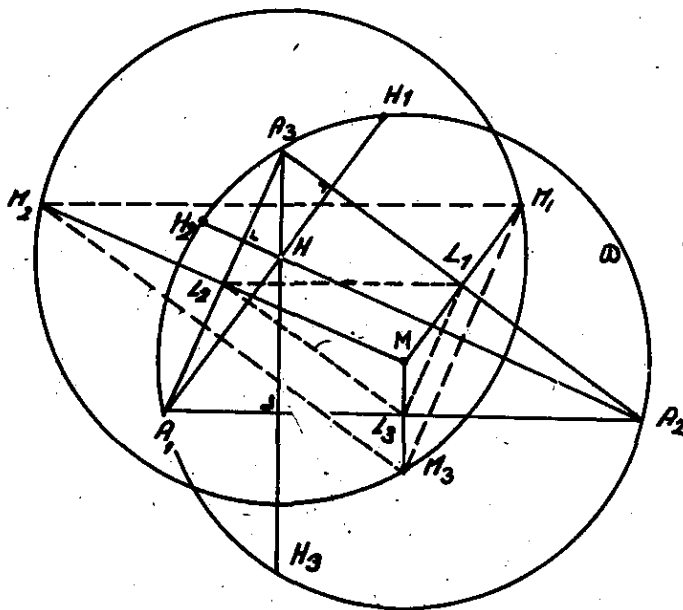
Het isogonaal verwante punt van een punt op de omgeschreven cirkel van de gronddriehoek is dus een oneigenlijk punt. (De spiegelbeeldpunten van P t.o.v. de zijden van de gronddriehoek liggen dan op één rechte).



Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de drie spiegelpunten van P valt samen met het isogonaal verwante punt P' van P. Omgekeerd is P weer het isogonaal verwante punt van P', zodat P het middelpunt is van een cirkel door P'1, P'2 en P'3: de spiegelbeeldpunten van P'.

$\overline{P'P_3}$ en $\overline{P_3P}$ zijn elkaars spiegelbeeld, zodat $\overline{P'P_3} = \overline{P_3P}$.

De stralen van de twee omgeschreven cirkels zijn dus ook aan elkaar gelijk.



Daar de 3 hoogtelijnen in een driehoek isogonaal verwant zijn met de verbindingslijnen van het middelpunt met de 3 hoekpunten van de driehoek, is het hoogtepunt H isogonaal verwant met het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van de basisdriehoek.

$$\Delta H_1H_2H_3 \cong \Delta A_1A_2A_3, \text{ omdat}$$

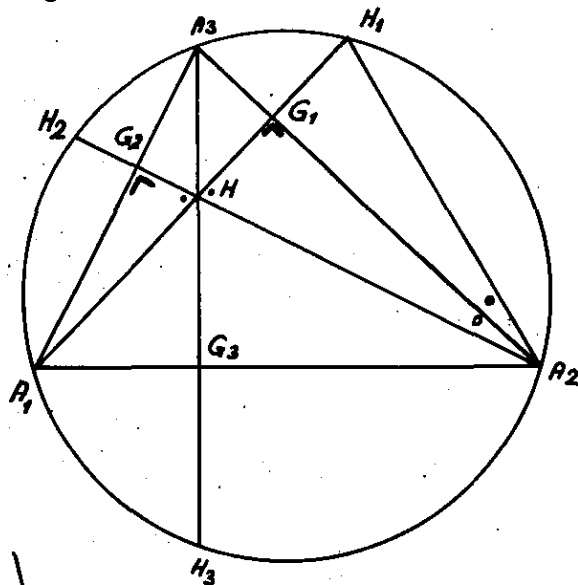
$$\Delta H_1H_2H_3 \sim \Delta L_1L_2L_3 \sim \Delta A_1A_2A_3 \text{ en } \overline{L_1L_k} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_k}, \text{ terwijl}$$

$$\text{ook } \overline{L_1L_k} = \frac{1}{2} \overline{H_1H_k}.$$

Hieruit volgt dus, dat de cirkel door $M_1M_2M_3$ dezelfde straal heeft als de omgeschreven cirkel van $\Delta A_1A_2A_3$. Het middelpunt van de eerstgenoemde cirkel is het hoogtepunt H. Hiervan zijn de spiegelbeeldpunten H_1, H_2 en H_3 .

De cirkel ω gaat dus door H_1, H_2 en H_3 , m.a.w. de spiegelbeeldpunten van het hoogtepunt van een driehoek liggen op de omgeschreven cirkel van deze driehoek.

(De stelling geldt ook indien het hoogtepunt buiten de driehoek is gelegen).

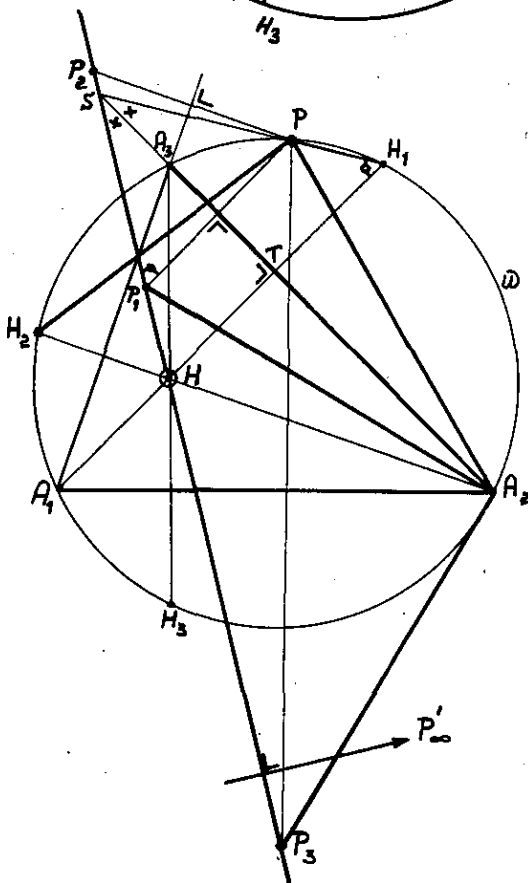


Voor het geval H binnen de cirkel ligt, is een rechtstreeks bewijs:

$\Delta A_1HG_2 \sim \Delta A_2HG_1$, zodat

$$\angle H_1A_2A_3 = \angle HA_1G_2 = \angle HA_2G_1.$$

Mede ten gevolge hiervan is $\Delta H_1A_2G_1 = \Delta HA_2G_1$, zodat het punt H_1 , het snijpunt van een hoogtelijn met de omgeschreven cirkel van $\Delta A_1A_2A_3$, tevens het spiegelbeeldpunt is van het hoogtepunt van deze driehoek.



Ligt P op de omgeschreven cirkel, dan liggen P_1, P_2 en P_3 op één rechte, terwijl P' een oneigenlijk punt is, in een richting loodrecht P_1P_2 te vinden.

Trek nu de hoogtelijn door A_1 en snijd deze met de $P_1P_2P_3$ -rechte in het punt H en met de cirkel ω in H_1 .

We zullen aantonen, dat het snijpunt H juist het hoogtepunt is van de driehoek $A_1A_2A_3$.

Daar het punt P_1 het spiegelbeeldpunt is van P is het voldoende te bewijzen, dat het snijpunt H het spiegelbeeldpunt is van H_1 , omdat dan

$\overline{H_1T} = \overline{HT}$ en H dus op de juiste afstand van T ligt.

$$\begin{aligned}\text{Nu is } \angle HP_1P &= \angle P_3P_1A_2 + \angle A_2P_1P = (90^\circ - \frac{1}{2} \angle P_3A_2P_1) + (90^\circ - \frac{1}{2} \angle P_1A_2P) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle P_3A_2P = 180^\circ - \angle A_1A_2P = 180^\circ - \angle A_1H_1P = \\ &= \angle P_1PH_1 \text{ (De laatste overgang volgt o.a. uit het feit, dat} \\ &\quad A_1H_1 \text{ hoogtelijn is).}\end{aligned}$$

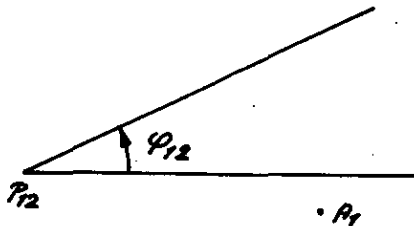
De spiegelbeeldpunten van een punt P op de omgeschreven cirkel van een driehoek liggen op één rechte door het hoogtepunt H van die driehoek.

Loopt P langs de omtrek van de omgeschreven cirkel, dan blijft de rechte $P_1P_2P_3$ steeds door H gaan.

TOEPASSING IN DE KINEMATICA.

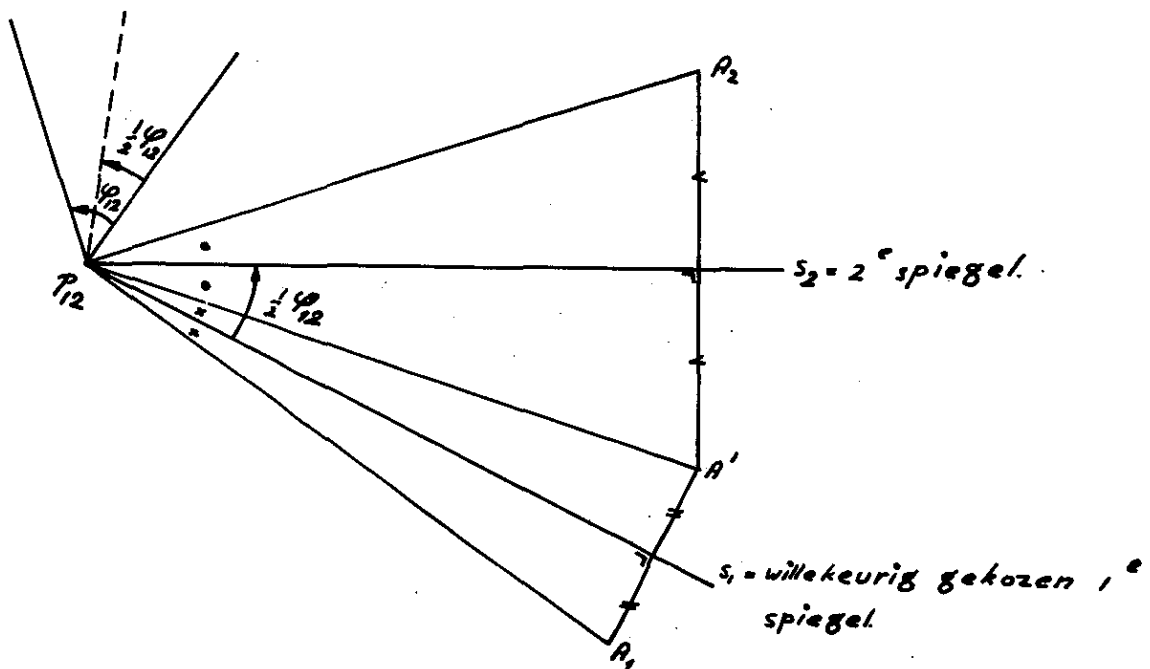
Twee discrete standen van het bewegende vlak konden uit elkaar worden verkregen door rotatie om een rotatiecentrum P_{12} over een rotatiehoek φ_{12} resp. φ_{21} .

Het bijzondere geval van een translatie is te beschouwen als een rotatie om een oneindig ver punt over een hoek nul.



Het blijkt, dat een rotatie om een punt steeds vervangen kan worden door twee opeenvolgende spiegelingen.

Beide spiegels gaan door het rotatiecentrum P_{12} , terwijl één van hen willekeurig door P_{12} gekozen mag worden.



De 2e spiegel wordt gevonden door rotatie van s_1 om P_{12} over $\frac{1}{2} \varphi_{12}$ in de goede draairichting.

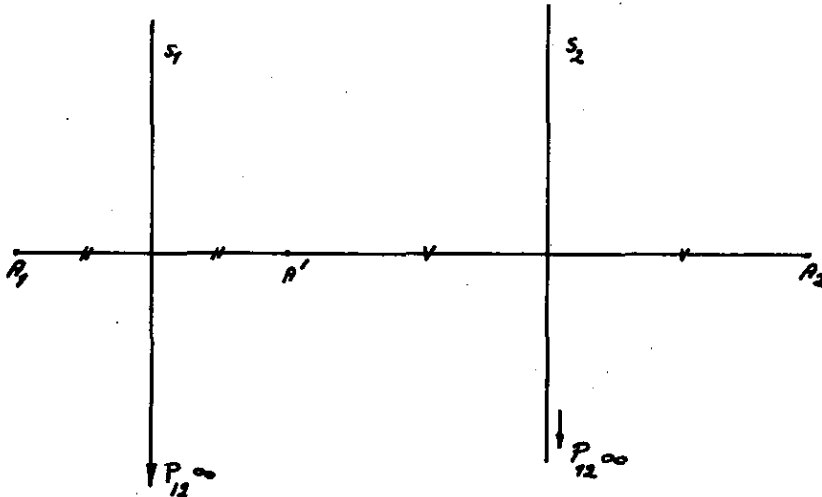
Is hieraan voldaan, dan is

$$\star A_1 P_{12} A_2 = 2 \cdot \star s_1 P_{12} s_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \varphi_{12} = \varphi_{12}, \text{ terwijl } \overline{P_{12} A_1} = \overline{P_{12} A'} = \overline{P_{12} A_2}.$$

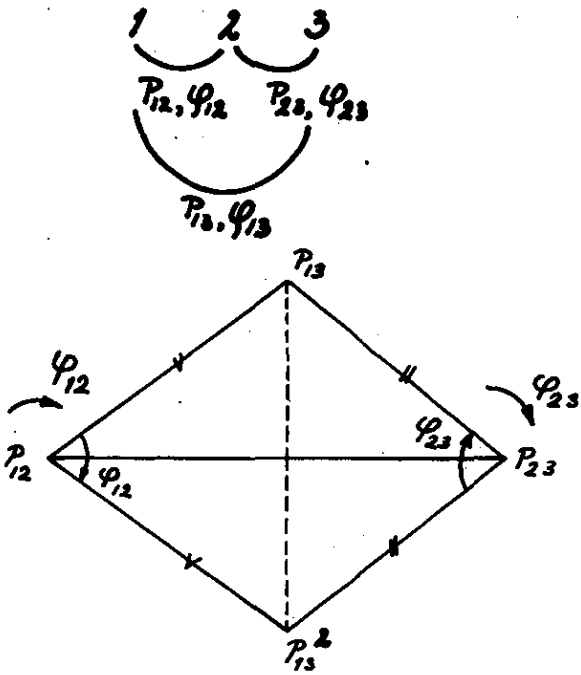
Mede op grond van de transformatiematrices voor een rotatie en een spiegeling kan gezegd worden, dat een rotatie = product van 2 spiegelingen.

(Zowel een spiegeling als een rotatie is een lineaire afbeelding; het product van 2 spiegelingen is dus weer een lineaire afbeelding).

Een translatie is overigens ook als een product van twee spiegelingen te beschouwen. De spiegels gaan beide door het oneigenlijke rotatiecentrum, terwijl ook hier s_1 willekeurig is te kiezen.



In het geval er 3 standen van het bewegende vlak zijn is er sprake van $P_{12}, \varphi_{12}, P_{23}, \varphi_{23}$ en P_{13}, φ_{13} .



Hoe is nu het verband tussen de hoeken φ_{ij} en de polen P_{ij} ?

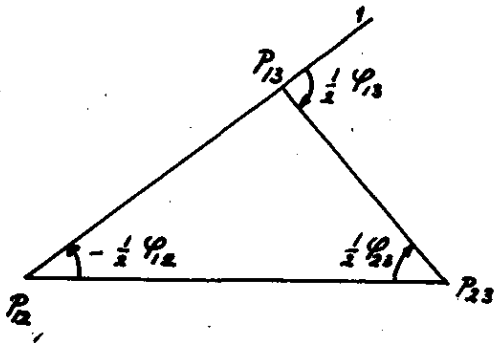
Ga uit van de zg. pooldriehoek $P_{12}P_{23}P_{13}$.

P_{13} is een punt van stand 1, dat op zijn plaats blijft als het punt in stand 3 is gekomen. In stand 2 is ditzelfde punt terechtgekomen in P_{13}^2 door rotatie om P_{12} over φ_{12} . Het komt tenslotte in stand 3 weer in P_{13} terug door rotatie om P_{23} over φ_{23} .

Uit de figuur blijkt, dat dit alleen kan als

$$\star P_{13}P_{12}P_{23} = \frac{1}{2} \varphi_{12} \text{ en}$$

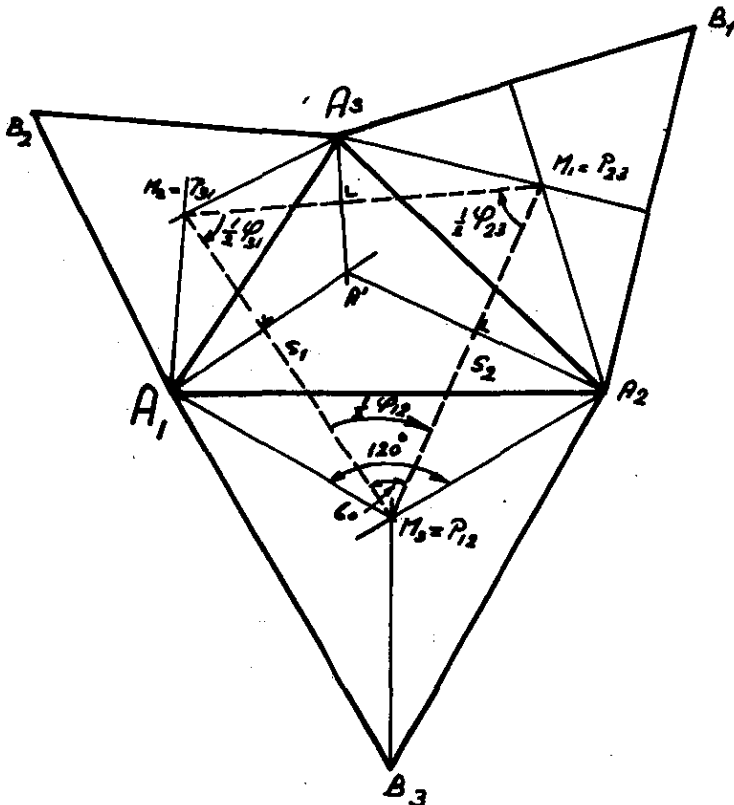
$$\star P_{12}P_{23}P_{13} = \frac{1}{2} \varphi_{23}.$$



Het punt P_{13} was dus reeds
volkomen bepaald:
 P_{13} volgt uit de posities van
 P_{12} , P_{23} en de hoeken φ_{12} en φ_{23} .
Ook de hoek φ_{13} is volkomen be-
paald:

$$\star 1 P_{13}P_{23} = \frac{1}{2} \varphi_{13}.$$

Voorbeeld van toepassing der discrete kinematica in de vlakke meetkunde.



Stelling: Zijn de zijden van een willekeurige driehoek tevens basis van buiten de driehoek liggende, gelijkzijdige driehoeken dan zijn de middelpunten van de aanliggende driehoeken hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Bewijs: De punten A_1 , A_2 en A_3 zijn op te vatten als de posities van een punt A van een bewegend vlak in de standen 1, 2 en 3.

De rotatiecentra zijn resp. M_3 , M_1 en M_2 .

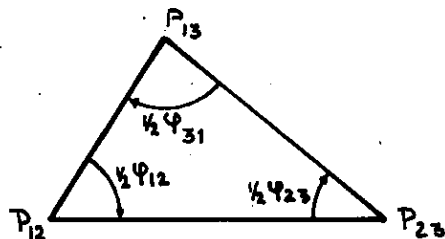
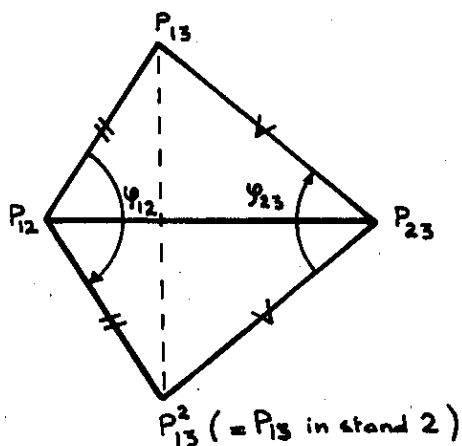
Dus $M_3 = P_{12}$, $M_1 = P_{23}$ en $M_2 = P_{13}$. Voorts is

$$\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = 120^\circ.$$

$\Delta M_1 M_2 M_3$ is dus een polendriehoek, waarvan de hoeken overeenkomen met de halve verdraaiingshoeken, zodat

$$\varphi_{12/2} = \varphi_{23/2} = \varphi_{31/2} = 60^\circ.$$

De polendriehoek is dus gelijkzijdig.



VLEIGERVIERHOEK.

$$\frac{1}{2} \varphi_{12} + \frac{1}{2} \varphi_{23} + \frac{1}{2} \varphi_{31} = \pi$$

$$\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} = 2\pi$$

Rotatie om P_{12} over φ_{12} , gevolgd door rotatie om P_{23} over φ_{23} en rotatie om P_{31} over φ_{31} voert het bewegende vlak weer in zijn oorspronkelijke stand terug. We kunnen ook schrijven:

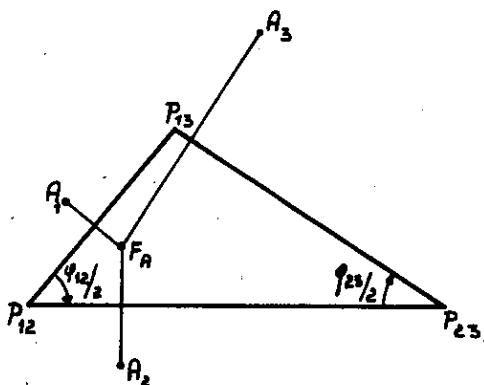
$$\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

(=op een veelvoud van 2π na)

$$\varphi_{12} + \varphi_{23} = -\varphi_{31} \quad \text{of} \quad \varphi_{12} + \varphi_{23} \equiv \varphi_{13}$$

Dit volgde dus o.a. uit het feit, dat $\varphi_{ik} + \varphi_{ki} = 0$

De draaiingshoeken zijn door de polendriehoek volledig vastgelegd. Zijn 2 polen en 2 draaiingshoeken gegeven, dan volgt daaruit de 3e pool en de 3e draaiingshoek.



Gegeven is polendriehoek voor de standen 1, 2 en 3 en het feit, dat het punt A zich in stand 1 in het punt A_1 bevindt.

Het punt A_2 wordt dan gevonden door rotatie om P_{12} over de

$$\sphericalangle A_1 P_{12} A_2 = \varphi_{12} = 2 \sphericalangle P_{13} P_{12} P_{23}$$

Deze rotatie kan worden vervangen door 2 opeenvolgende spiegelingen, waarvan de eerste spiegel willekeurig door het

rotatiecentrum kan worden gekozen, terwijl de tweede spiegel door het rotatiecentrum moet gaan en de halve verdraaiingshoek in de rotatie-richting met de eerste spiegel moet maken. Is de eerste spiegel de lijn $P_{12}P_{13}$, dan is dus de tweede spiegel $P_{12}P_{23}$, omdat juist

$$\sphericalangle P_{13} P_{12} P_{23} = \frac{1}{2} \varphi_{12}$$

Op dezelfde wijze volgt het punt A_3 direct door rotatie om P_{23} over de hoek $\angle A_2 P_{23} A_3 = \varphi_{23}$, maar ook door achtereenvolgens te spiegelen t.o.v. $P_{12} P_{23}$ en $P_{23} P_{13}$.

De eerste spiegeling voert het punt A steeds over in een z.g. fundamenteelpunt F_A . We kunnen ook zeggen, dat de drie spiegelbeeldpunten van een fundamenteelpunt t.o.v. de zijden van de polendriehoek de posities zijn van een bewegend punt in drie standen van het daarbij behorende bewegende vlak. De opeenvolgende posities van een bewegend punt noemt men ook wel de homologe punten van het vlak.

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \dots$ zijn dus de homologe punten van het vlak.

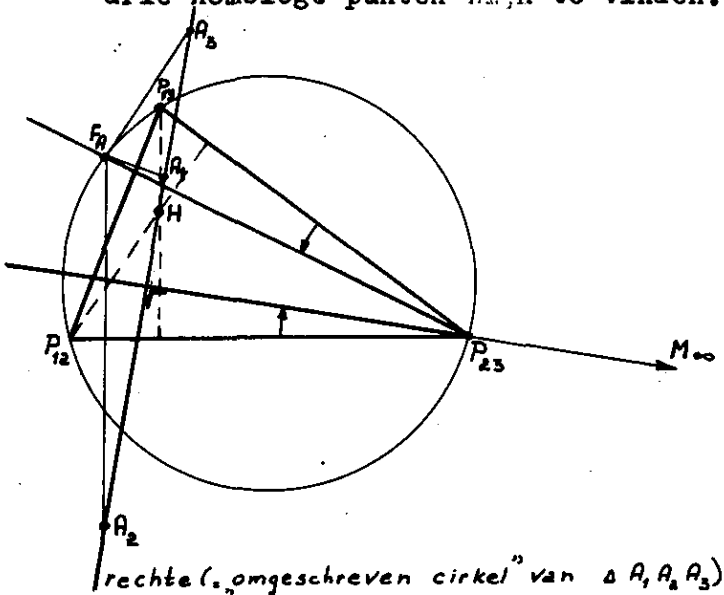
Drie homologe punten zijn dus de spiegelbeeldpunten van een fundamenteelpunt t.o.v. de zijden van de polendriehoek.

In het algemeen liggen de 3 homologe punten A_1, A_2 en A_3 op een cirkel.

Het middelpunt van de omschreven cirkel van $\Delta A_1 A_2 A_3$ valt samen met het isogonaal verwante punt van het fundamenteelpunt F_A met de polendriehoek als basisdriehoek.

A_1, A_2 en A_3 liggen op één rechte, als F_A op de omschreven cirkel van $\Delta P_{12} P_{23} P_{13}$ gelegen is. Deze rechte gaat tevens door het hoogtepunt H van de polendriehoek.

Drie homologe punten, die op één rechte liggen, zijn dus tevens collineair met het hoogtepunt H. Er zijn ∞ veel rechten door H, waarop telkens drie homologe punten zijn te vinden.



De omschreven cirkel van $\Delta A_1 A_2 A_3$ ontgaat in één van haar raaklijnen. M_∞ is dus te vinden in een richting loodrecht de lijn door A_1, A_2, A_3, H .

M_∞ is het van F_A isogonaal verwante punt. F_A ligt ook op de omschreven cirkel van $\Delta P_{12} P_{23} P_{13}$.

F_A is dus het snijpunt van de met $P_{23} M_\infty$ isogonaal verwante lijn door P_{23} met de omschreven cirkel van $\Delta P_{12} P_{23} P_{13}$.

Ter controle dienen dan de spiegelbeeldpunten van F_A t.o.v. de zijden van de polendriehoek op de rechte door H te liggen, waarvan we zijn uitgegaan. Er zijn in het algemeen ∞ veel van zulke lijnen door H te trekken, overeenkomend met ∞ F_A -punten op de omschreven cirkel van de polendriehoek.

Vallen de punten A_1, A_2 en A_3 samen, dan is dit punt een buigpunt geworden.

In de beschouwde samenvallende positie van het bewegende vlak liggen zulke punten op de buigcirkel.

Ook hier is dit aantal dus ∞ .

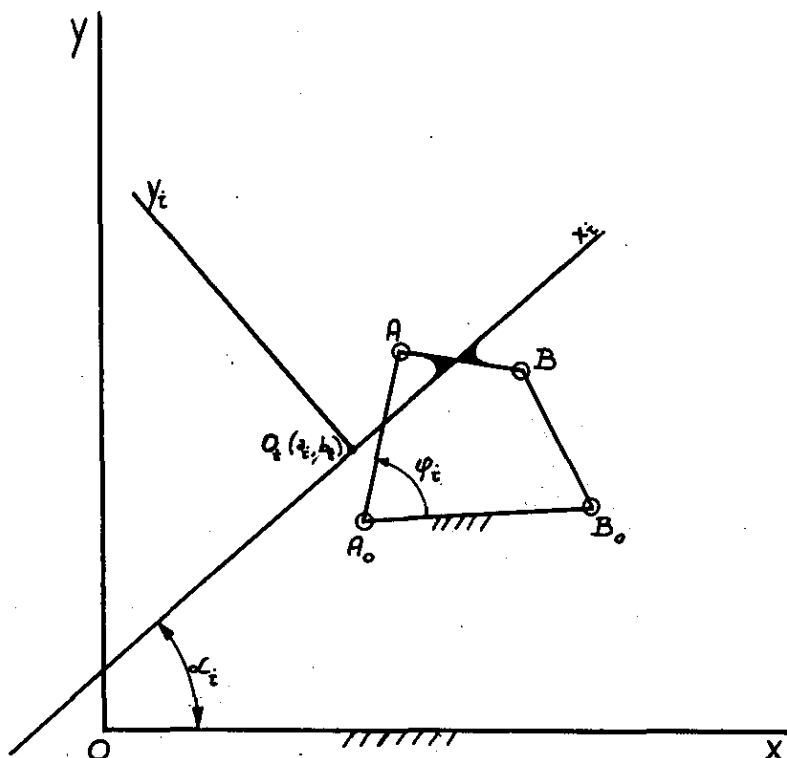
De raaklijn aan de baankromme gaat in ieder buigpunt door de buigpool. Het hoogtepunt H gaat in de momentane kinematica dus over in de buigpool B_p .

Is het punt A_1 gegeven als het punt, dat in de discrete kinematica op één lijn ligt met A_2 en A_3 , dan gaat de omgeschreven cirkel van

$\Delta P_{12}P_{13}P_{23}^1$ door dat punt en zijn A_2 en A_3 te vinden op de lijn A_1H .

(Het eerste volgt uit het feit, dat F_A , het spiegelbeeldpunt van A_1 t.o.v. $P_{12}P_{13}$ op de omgeschreven cirkel ligt van $\Delta P_{12}P_{13}P_{23}^1$).

ONTWERPVRIJHEIDSGRADEN.



De vraag kan worden gesteld: hoeveel standen van de koppelstang AB van een stangenvierzijde (A₀ABB₀) kunnen worden voorgeschreven, indien geen nevencondities gesteld worden. Stel dat aantal is maximaal k. Dan wordt dus gevraagd een vierzijde te construeren, die precies het met de koppelstang verbonden koppelvlak in k voorgeschreven standen brengt. Het vaste vlak wordt voorgesteld door het assenstelsel XOY en het bewegende stelsel door x₁o₁y₁, waarbij i = 1, ..., k. De positie van het met de koppelstang onverbrekkelijk verbonden koppelvlak wordt vastgelegd door de volgende vrijheidsgraden: Voor het punt A₀ de beide dit punt bepalende coördinaten in het vaste vlak (2). Voor B₀ idem (2). Voorts de drie stanglengten $\overline{A_0A}$, \overline{AB} en $\overline{B_0B}$ (3). De positionering van het koppelvlak x₁o₁y₁

t.o.v. de koppelstang AB. (3). Dit zijn in totaal 10 vrijheidsgraden p_j, welke in iedere positie van het koppelvlak dezelfde zijn. De bewegingsvrijheidsgraad φ_i is van stand tot stand een andere. Anderzijds wordt in iedere stand het koppelvlak bepaald door de 3 getallen a_i, b_i en α_i waarbij i = 1, ..., k.

We hebben dus het verband

$$\begin{cases} a_i = f(p_1, \dots, p_{10}, \varphi_i) \\ b_i = g(p_1, \dots, p_{10}, \varphi_i) \\ \alpha_i = h(p_1, \dots, p_{10}, \varphi_i) \end{cases}$$

In iedere stand hebben we dus deze 3 vergelijkingen in de onbekenden p₁, ..., p₁₀ en φ_i.

Voor k standen hebben we dus 3k vergelijkingen in (10 + k) onbekenden. Deze kunnen hoogstens worden opgelost als het aantal vergelijkingen kleiner of gelijk is aan het aantal onbekenden (Met meer vergelijkingen wordt het stelsel in het algemeen strijdig).

We hebben dus dat

$$3k \leq k + 10 \quad \text{of} \quad k \leq 5.$$

Er zijn dus maximaal 5 willekeurige standen voor te schrijven die de stangenvierzijde volledig bepalen.

Van een koppelkromme kunnen maximaal 9 punten worden voorgeschreven. Er zijn dus, mede op grond van de stelling van Roberts, $3N$ stangenvierzijden te vinden, waarvan het koppelpunt deze 9 voorgeschreven punten passeert. (N is een geheel getal ≥ 0).

Bewijs: Stel dit aantal punten is K . Dan zijn er dus k posities van het koppelpunt in het vaste vlak, welke in totaal door $2k$ coördinaten vastgelegd zijn.

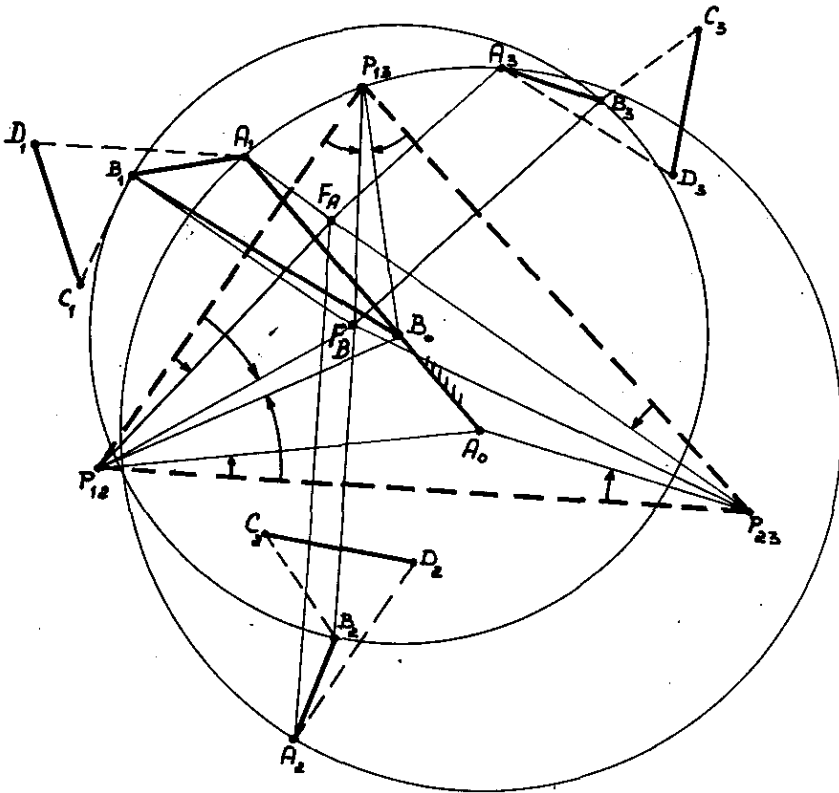
Anderzijds wordt ieder koppelpunt bepaald door 9 niet van de positie afhankelijke vrijheidsgraden (nl. 2 voor A_0 , 2 voor B_0 , en 5 voor de stanglengten $\overline{A_0A}$, \overline{AB} , $\overline{B_0B}$, \overline{AK} en \overline{BK} resp.) en de positiehoek φ_1 .

Voor k standen zijn dit dus $(9 + k)$ onbekenden.

$2k$ coördinaten worden dus vastgelegd door $(9 + k)$ grootheden, zodat $2k \leq 9 + k$ of $k \leq 9$ q.e.d.

Zijn er minder dan 9 posities van het koppelpunt gegeven, dan zijn er ook meer stangenvierzijden te vinden, die een oplossing zijn van het vraagstuk.

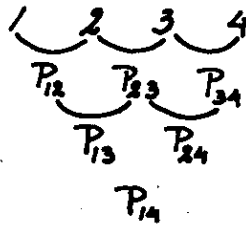
Voorbeeld. We gaan nu uit van het geval, dat van de maximaal 5 voor te schrijven standen van het koppelvlak er slechts 3 worden voorgeschreven. De vraag wordt nu gesteld bij de 3 gegeven standen van het koppelvlak een daarbij passende stangenvierzijde te construeren. Voor 3 standen bedraagt het aantal vergelijkingen $3k = 9$ en het aantal onbekenden $k+10=13$. Er blijven dus nog 4 willekeurig voor te schrijven vrijheidsgraden over. In het hier besproken geval worden de beide gestelpunten A_0 en B_0 aange-



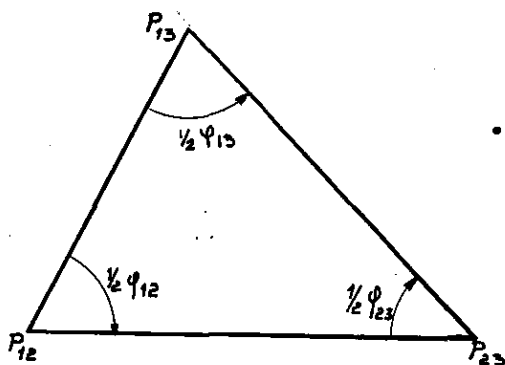
nomen. (Keuze van de gestelpunten A_0 en B_0 neemt juist 4 bepalende coördinaten weg). De drie gegeven vlakstanden zijn in nevenstaande figuur voorgesteld door de 3 gegeven standen van het lijnstuk CD . Hierbij is dus $C_1D_1 = C_2D_2 = C_3D_3$. Oplossing: De pool P_{12} vindt men in het snijpunt van de middelloodlijnen van de lijnstukken C_1C_2 en D_1D_2 . Op soortgelijke wijze gaat men te werk bij de bepaling van de polen P_{23} en P_{13} . Daarmee is de polendriehoek $P_{12}P_{23}P_{13}$ gevonden. A_0 is het middelpunt van een cirkel door A_1, A_2 en A_3 .

Het is om deze reden tevens het isogonaal toegevoegde punt van het fundamentaalpunt F_A . En ook omgekeerd is F_A het isogonaal toegevoegde punt van A_0 . Construeer dus bij A_0 het t.o.v. $\triangle P_{12}P_{23}P_{13}$ isogonaal toegevoegde punt F_A . De spiegelbeeldpunten van F_A t.o.v. de 3 zijden van de polendriehoek zijn dan de homologe punten A_1, A_2 en A_3 resp.. Op soortgelijke wijze vindt men met B_0 de homologe punten B_1, B_2, B_3 . De gevraagde stangenvierzijde is in stand 1: $(A_0A_1B_1B_0)$. Er is slechts één oplossing. Ter contrôle kan men nagaan of A_0 ook werkelijk het middelpunt is van een cirkel door A_1, A_2 en A_3 en B_0 het middelpunt van een cirkel door B_1, B_2 en B_3 . Voorts dient de lengte van de koppelstang $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3}$, terwijl $\square A_1B_1C_1D_1 \cong \square A_2B_2C_2D_2 \cong \square A_3B_3C_3D_3$. Er kan een onbruikbare stangenvierzijde uitkomen indien b.v. één der stanglengten te lang uitvalt. Het is bovendien niet zeker of de tussenstanden ook werkelijk kinematisch bereikt worden. Ook behoeft de volgorde van de drie standen niet die volgens de opeenvolgende nummering te zijn.

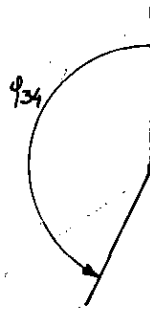
VIER DISCRETE STANDEN VAN HET BEWEGENDE VLAK.



Daar $P_{ik} = P_{ki}$ zijn niet meer dan 6 polen voor 4 vlakstanden aan te wijzen. Omdat $\varphi_{ik} = -\varphi_{ki}$ zijn er in wezen ook niet meer dan 6 verdraaiingshoeken. Niet alle polen kunnen willekeurig worden aangenomen: gaat men uit van de polendriehoek $P_{12}P_{23}P_{13}$ dan is met het gegeven zijn van P_{34} en de verdraaiingshoek φ_{34} alles vastgelegd.



$\cdot P_{34}$

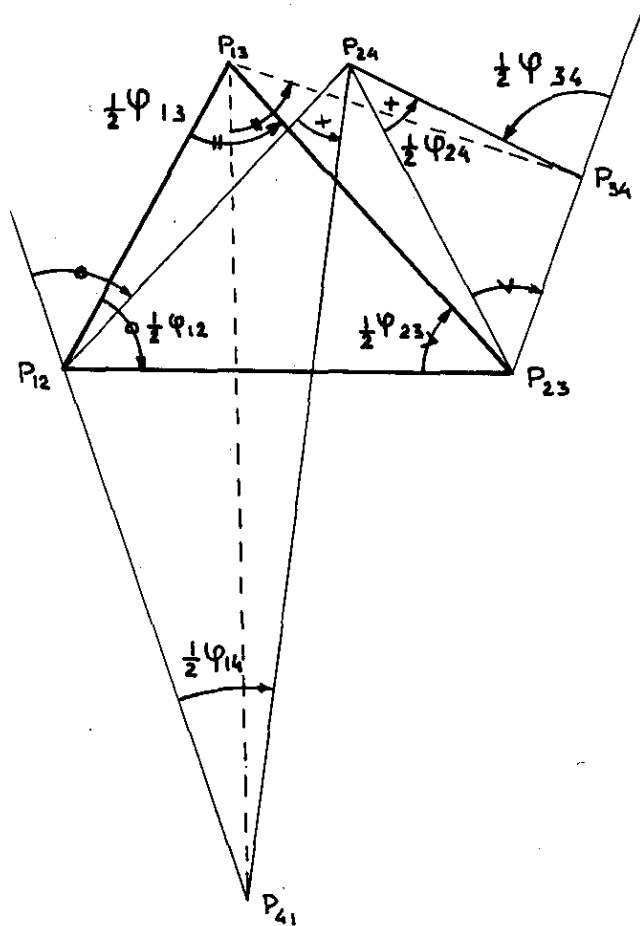


Daarbij geldt voor de pooldriehoek $P_{12}P_{23}P_{31}$ de relatie $\frac{1}{2}\varphi_{12} + \frac{1}{2}\varphi_{23} - \frac{1}{2}\varphi_{13} = \pi$, zodat $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} = 0 \pmod{2\pi}$.

Waar liggen nu de polen P_{24} en P_{41} en hoe groot zijn de verdraaiingshoeken φ_{24} en φ_{14} ?

Voor 4 standen heeft men 4 polendriehoeken te weten

- $\Delta P_{12}P_{23}P_{13}$
- $\Delta P_{12}P_{24}P_{14}$
- $\Delta P_{13}P_{34}P_{14}$
- $\Delta P_{23}P_{34}P_{24}$



De gegevens zijn voldoende voor het construeren van $\Delta P_{23}P_{34}P_{42}$ gevolgd door een constructie van $\Delta P_{12}P_{24}P_{41}$;

Met behulp van P_{23} , P_{34} , $\frac{1}{2}\varphi_{23}$ en $\frac{1}{2}\varphi_{34}$ kan P_{24} worden bepaald, waarmee tevens $\frac{1}{2}\varphi_{24}$ is gevonden.

Terwijl met behulp van P_{12} , P_{24} , $\frac{1}{2}\varphi_{12}$ en $\frac{1}{2}\varphi_{24}$ de positie van pool P_{41} is vastgelegd. Daaruit volgt dan tevens $\frac{1}{2}\varphi_{14}$ met de polendriehoek $P_{12}P_{24}P_{41}$.

Er zijn 3 polenvierhoeken aan te wijzen met opeenvolgende nummering in de indices:
 $\square P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$, $\square P_{23}P_{31}P_{14}P_{42}$
 en $\square P_{34}P_{42}P_{21}P_{13}$.

Voor de eerste polenvierhoek geldt, dat

$$\star P_{12}P_{24}P_{41} = \star P_{32}P_{24}P_{43} \text{ en}$$

$$\text{dat } \star P_{12}P_{24}P_{23} = \star P_{41}P_{24}P_{34}.$$

De pool P_{42} "ziet" twee overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ dus

onder dezelfde hoek.

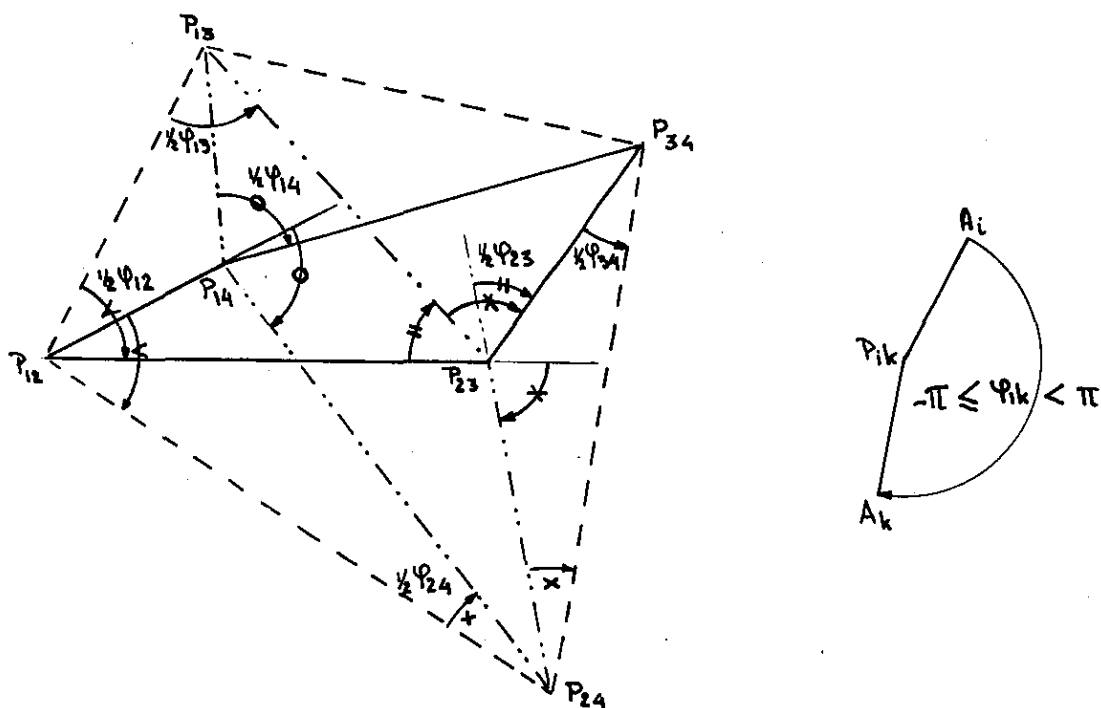
$$\text{Evenzo is } \star P_{41}P_{13}P_{32} = \frac{1}{2}\varphi_{13} =$$

$$= \star P_{41}P_{13}P_{34}, \text{ zodat ook}$$

$\star P_{12}P_{13}P_{41} = \star P_{23}P_{13}P_{34}$; ook P_{13} "ziet" twee overstaande zijden van dezelfde polenvierhoek onder gelijke hoeken.

Op grond van de gelijkheid van de "zichthoeken" $\frac{1}{2}\varphi_{12}$ bij P_{12} in de pooldriehoeken $P_{41}P_{12}P_{24}$ en $P_{31}P_{12}P_{23}$ "ziet" ook P_{12} twee overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{23}P_{31}P_{14}P_{42}$ onder dezelfde hoek.

In het algemeen: De twee polen, die geen hoekpunt zijn van een polenvierhoek, zien elk afzonderlijk de overstaande zijden van deze polenvierhoek onder onderling gelijke hoeken.



Een andere mogelijke polenconfiguratie is in bovenstaande figuur getekend. Steeds is één van beide hoeken tussen de lijnen $P_{ik}P_{il}$ en $P_{ik}P_{lk}$ gelijk aan $\frac{1}{2} \varphi_{ik}$. In het voorgaande is stilzwijgend aangenomen, dat voor

$\angle A_i P_{ik} A_k (= \varphi_{ik})$ steeds de kleinste hoek van beide wordt genomen, zodat ook in de twee polendriehoeken $P_{il}P_{ik}P_{kl}$ de kleinste van de binnen- en de buitenhoek bij het hoekpunt P_{ik} gelijk is aan $\frac{1}{2} \varphi_{ik}$. Daarbij is de hoek ($\frac{1}{2} \varphi_{ik}$) van de lijn $P_{ik}P_{il}$ naar de lijn $P_{ik}P_{lk}$ linksom draaiend positief en rechtsom draaiend negatief te nemen. Een gevolg van de gemaakte afspraak is, dat $-\pi/2 \leq \frac{1}{2} \varphi_{ik} < \pi/2$.

(zie de consequentie van deze afspraak in bovenstaande figuur).

Opm.: Een andere mogelijke afspraak zou kunnen zijn, dat van de twee aanwijsbare hoeken $A_i P_{ik} A_k$ steeds alleen die hoek wordt genomen, waarbij van de zijde $A_i P_{ik}$ naar $A_k P_{ik}$ gaand, alleen een rotatie linksom of alleen een rotatie rechtsom draaiend wordt toegelaten als $k > i$. (Omdat op grond van een dergelijke afspraak de "zichthoeken" behalve dat zij aan elkaar gelijk kunnen zijn, ook 180° met elkaar kunnen verschillen wordt deze afspraak hier verder niet aangehouden).

Zoals uit de laatste figuur blijkt, zien ook P_{14} en P_{23} de overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ onder gelijke hoeken.

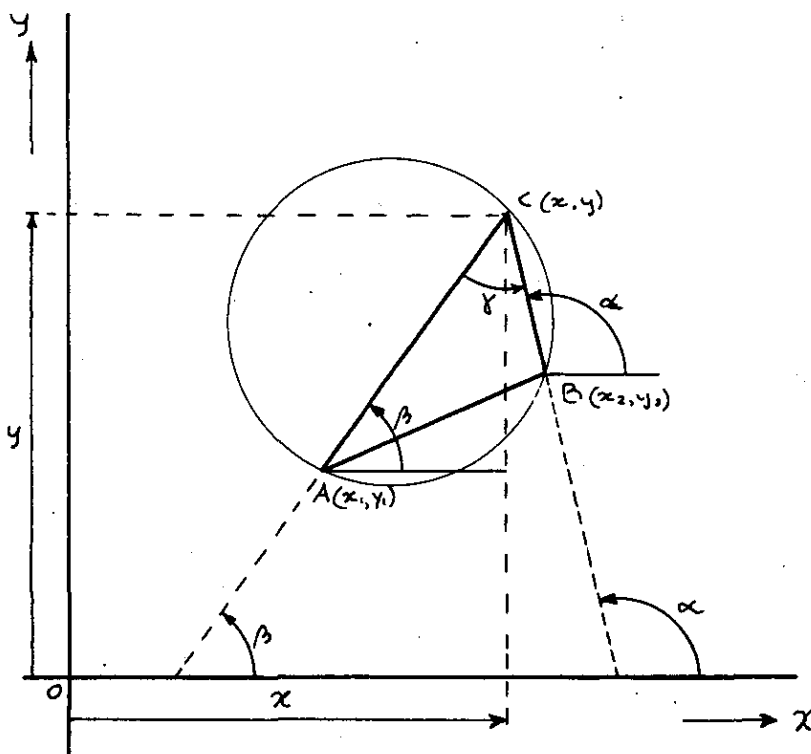
De polen die geen hoekpunt zijn van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ kunnen dus niet willekeurig worden gekozen: ze liggen op de z.g. polenkromme, welke de meetk. plaats is van de punten, die twee overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ onder gelijke hoeken zien.

Aanwezig is ook een antipolenkromme, welke de meetk. plaats is van de punten, die twee overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ onder hoeken zien, welke in absolute waarde aan elkaar zijn, maar een tegengestelde oriëntatiezin hebben. Het is duidelijk, dat P_{14} en P_{23} wel op de polenkromme, maar niet op de antipolenkromme zijn gelegen.

Men krijgt een andere anti-polenkromme, wanneer van een ander stel overstaande zijden van de genoemde polenvierhoek wordt uitgegaan. De polenkromme blijft dezelfde. Ligt de polenconfiguratie eenmaal vast, dan is het voor de polenkromme zelfs onverschillig van welke polenvierhoek men uitgaat: men komt steeds terecht op dezelfde polenkromme (het bewijs volgt later).

Uit het voorgaande volgt, dat de meetkundige plaatsen voor de beide niet in de hoekpunten van de polenvierhoek liggende polen, dezelfde zijn.

De meetkundige plaats van de punten, die een gegeven lijnstuk onder een bepaalde hoek zien, is een cirkel. De meetkundige plaats van de punten, die een ander gegeven lijnstuk onder dezelfde vaste hoek zien, is weer een cirkel. Beide cirkels snijden elkaar in twee punten van de polenkromme. Andere punten van de polenkromme kunnen worden gevonden door telkenmale de vaste hoek een andere waarde te geven. Voor de meetk. plaats van de punten



C, waarvoor $\sphericalangle ACB$ een bepaalde waarde heeft, geldt, dat $\tan \sphericalangle ACB = m =$ gegeven.

$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$m = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Nu is met inachtneming van de tekens:

$$\tan \alpha = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

en

$$\tan \beta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Dit geeft gesubstitueer een verband tussen de coördinaten van C.

$$m = \frac{\frac{y - y_2}{x - x_2} - \frac{y - y_1}{x - x_1}}{1 + \frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \frac{y - y_2}{x - x_2}}$$

Teller en noemer vermenigvuldigd met $(x-x_1)(x-x_2)$ geeft

$$m = \frac{(x-x_1)(y-y_2) - (x-x_2)(y-y_1)}{(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2)}$$

of

$$m \{x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2\} + x_1(y-y_2) - x_2(y-y_1) + x(y_2-y_1) = 0$$

of

$$mC_{AB} + L_{AB} = 0.$$

Hierin stelt

$$C_{AB} = x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

de vergelijking voor van een cirkel door de punten A en B en middelpunt

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ in het midden van lijnstuk } \overline{AB}.$$

C_{AB} is dus een cirkel met het lijnstuk \overline{AB} als middellijn.

Voorts stelt

$$L_{AB} = x_1(y-y_2) - x_2(y-y_1) + x(y_2-y_1) = 0$$

de vergelijking voor van een rechte door de punten A en B.

L_{AB} is dus de rechte AB.

$mC_{AB} + L_{AB} = 0$. is dus de meetk. plaats van de punten, van waaruit het lijnstuk \overline{AB} onder de hoek arc tan m wordt gezien.

Voor het lijnstuk \overline{CD} is de hoek arc tan m dezelfde. De tweede meetk. plaats heeft dus de vergelijking

$$mC_{CD} + L_{CD} = 0.$$

De grootte m is de veranderlijke bij het zoeken naar de meetk. plaats van de snijpunten, van waaruit de lijnstukken \overline{AB} en \overline{CD} onder dezelfde hoek gezien worden. Eliminatie van m geeft dus

$$mC_{CD}C_{AB} + L_{AB}C_{CD} = 0$$

$$mC_{CD}C_{AB} + L_{CD}C_{AB} = 0$$

$$\underline{L_{AB}C_{CD} - L_{CD}C_{AB} = 0}, \text{ de vergelijking van de } \underline{\text{polen- of van de antipolen- kromme}}. \text{ Zij is van de 3e graad.}$$

De meetk. plaats van de punten, van waaruit de lijnstukken \overline{AB} en \overline{CD} onder hoeken gezien worden, die elkaars supplement zijn, vindt men door eliminatie van m uit:

$$mC_{AB} + L_{AB} = 0 \quad \text{en}$$

$$-mC_{CD} + L_{CD} = 0$$

zodat

$$\underline{L_{AB}C_{CD} + L_{CD}C_{AB} = 0}, \text{ de vergelijking van de } \underline{\text{antipolen- of van de polen- kromme}} \text{ is. (Eveneens van de 3e graad).}$$

Daar zowel L_{AB} als C_{AB} door de punten A en B gaan is dit ook met de polenkromme het geval. De polenkromme gaat dus door de hoekpunten (A, B, C en D) van de polenvierhoek. Zowel C_{AB} als C_{CD} gaan door de isotrope punten I_1 en I_2 . Dus ook de polenkromme. De polenkromme is dus een circulaire kromme.

Voor 4 standen van het bewegende vlak is het onverschillig van welke polenvierhoek men uitgaat: De drie polenvierhoeken leiden steeds tot dezelfde polenkromme.

Bewijs: Twee polenvierhoeken hebben steeds twee overstaande hoekpunten gemeen. Voor de polenvierhoeken $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ en $P_{24}P_{41}P_{13}P_{32}$ zijn de hoekpunten P_{13} en P_{42} gemeenschappelijk. De door deze polenvierhoeken voortgebrachte polenkrommen zijn resp. p en p' . Beide krommen zijn van de 3e graad. Daar een kromme van de 3e graad in het algemeen de gedaante heeft van

$$x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x + a_8y + a_9 = 0.$$

zijn 9 punten voldoende om de coëfficiënten van deze vergelijking vast te leggen. Een 3e graadskromme is dus, door 9 punten gaande, bepaald. p en p' hebben reeds de 6 polen en de beide isotrope punten gemeen. Het is dan voldoende om aan te tonen, dat p en p' in één van de twee gemeenschappelijke hoekpunten ook dezelfde raaklijn t heeft. De richting van de raaklijn t in het hoekpunt P_{42} volgt uit het ge-

lijk zijn van de zichthoeken vanuit een van P_{42} "naburig" punt op p .

Zodat $\sphericalangle P_{13}P_{24}P_{34} = \sphericalangle P_{12}P_{24}t$ (P_{14} en P_{23} zien nl. ook 2 overstaande zijden van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ onder gelijke hoeken).

$$\text{Voorts is } \sphericalangle P_{12}P_{24}P_{41} = \frac{\varphi_{24}}{2} =$$

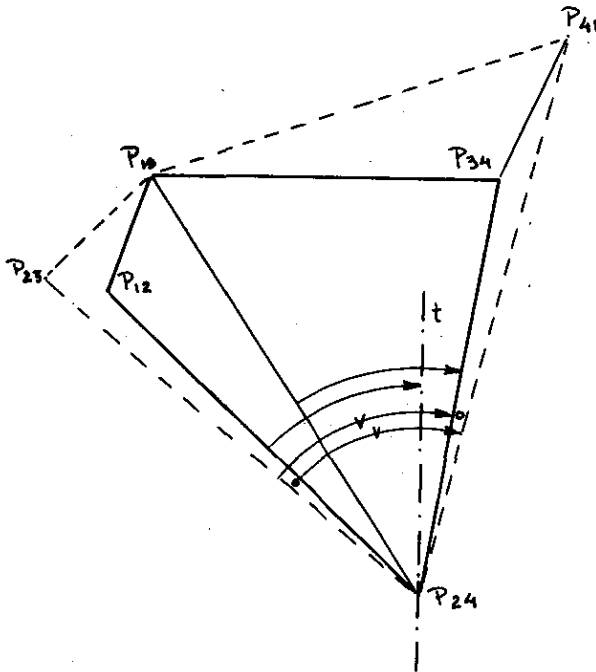
$$= \sphericalangle P_{32}P_{24}P_{43}, \text{ zodat ook}$$

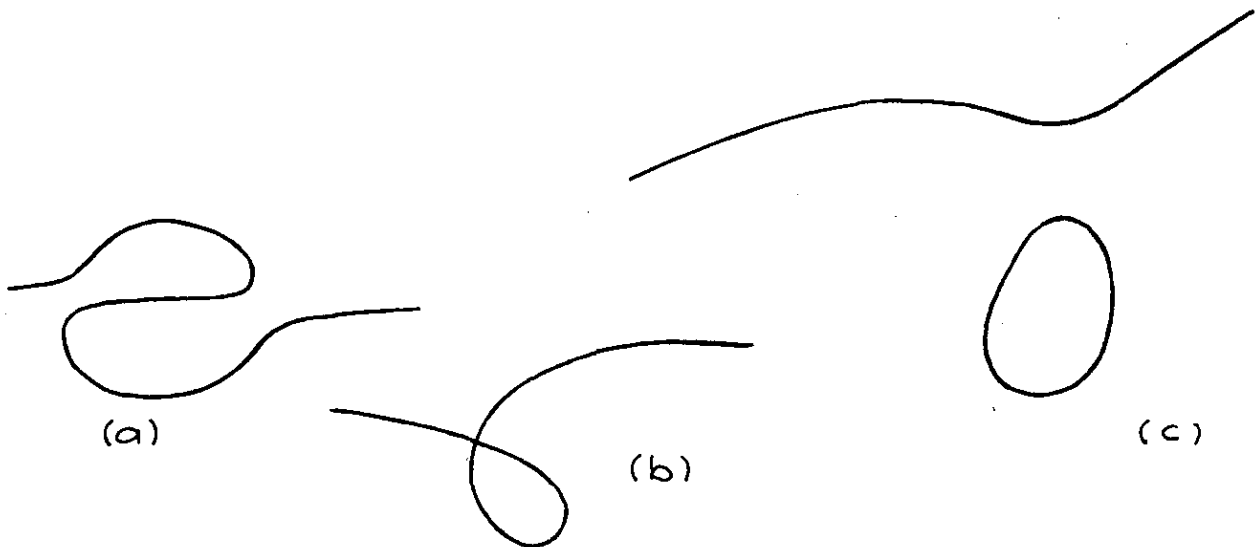
$$\sphericalangle P_{23}P_{24}P_{12} = \sphericalangle P_{34}P_{42}P_{41} \text{ en}$$

$$\text{dus is dan volgens de figuur ook } \sphericalangle P_{23}P_{24}t = \sphericalangle P_{13}P_{24}P_{41}.$$

Daar in een van P_{24} naburig punt op p' de zijden $\overline{P_{23}P_{24}}$ en $\overline{P_{13}P_{41}}$ van $\square P_{32}P_{24}P_{41}P_{13}$ onder gelijke hoeken gezien worden, is $\sphericalangle P_{23}P_{42}t' = \sphericalangle P_{13}P_{24}P_{41}$

waaruit met het voorgaande volgt, dat $t = t'$, hetgeen bewezen moest worden.

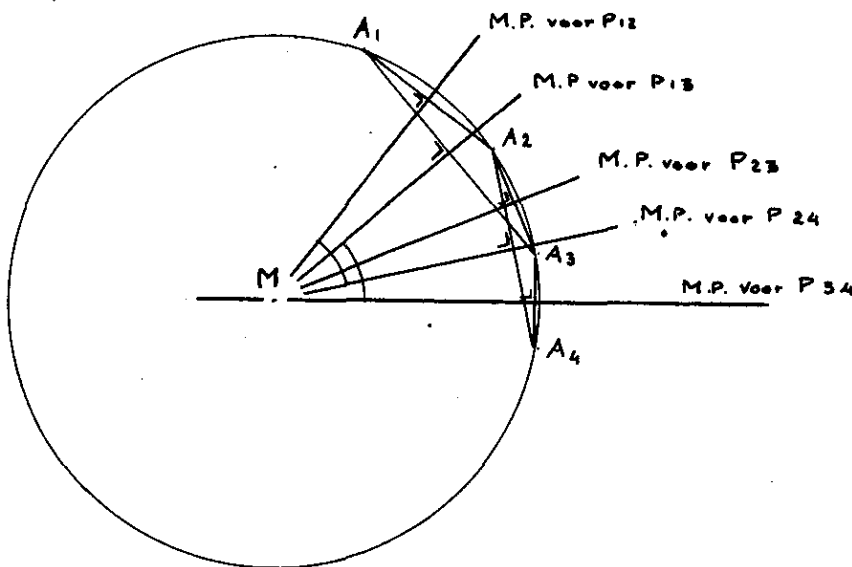




De polenkromme kan de gedaante (a), de gedaante (b) met een reël dubbel-punt of de gedaante (c) met twee reële takken aannemen.

Zoeken we nu naar de meetk. plaats van de middelpunten van cirkels, waarop 4 homologe punten zijn gelegen.

Gaat men uit van 4 zulke punten op een cirkel, dan ligt P_{12} op de middelloodlijn van $\overline{A_1A_2}$; P_{23} op de middelloodlijn van $\overline{A_2A_3}$ enz. Deze middelloodlijnen gaan alle 6 door M.



$$\sphericalangle P_{12}MP_{24} = \frac{1}{2}(\sphericalangle A_1MA_2 + \sphericalangle A_2MA_4)$$

of

$$= \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle A_1MA_2 + \sphericalangle A_2MA_4),$$

terwijl ook

$$\sphericalangle P_{13}MP_{34} = \frac{1}{2}(\sphericalangle A_1MA_3 + \sphericalangle A_3MA_4)$$

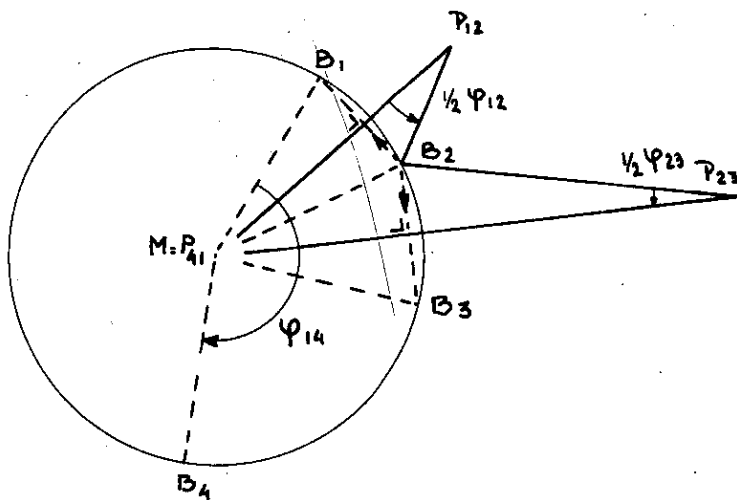
$$\text{of} = \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle A_1MA_4),$$

zodat $\sphericalangle P_{12}MP_{24} = \sphericalangle P_{13}MP_{34}$ of $\sphericalangle P_{12}MP_{24} = \pi - \sphericalangle P_{13}MP_{34}$.

Vanuit M ziet men dus de lijnstukken $\overline{P_{12}P_{24}}$ en $\overline{P_{13}P_{34}}$ van de polenvierhoek $P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$ onder gelijke of onder supplementaire hoeken.

De gezochte meetk. plaats valt dus samen met de polenkromme of met de anti-polenkromme. De meetk. plaats van de middelpunten van cirkels, waarop 4 homologe punten zijn gelegen wordt ook wel de middelpuntskromme genoemd.

Ligt M op één van beide antipolenkrommen, behorende bij $\square P_{12}P_{24}P_{43}P_{31}$, dan is één van beide de middelpuntskromme; maar dan zijn er 2 polen te vinden, die niet op de middelpuntskromme liggen, nl. P_{14} en P_{23} . Zulke punten zijn echter wel middelpunten van cirkels op ieder waarvan 4 homologe punten zijn gelegen.



Dit blijkt uit het volgende:
 uitgaande van de gegeven polen-
 configuratie, wordt een punt B_2
 gekozen, zodanig, dat

$$\angle P_{41}P_{12}B_2 = \frac{1}{2} \varphi_{12} \text{ en}$$

$$\angle B_2P_{23}P_{41} = \frac{1}{2} \varphi_{23}.$$

Zoals uit nevenstaande figuur
 blijkt liggen de 4 homologe punten
 B_1, B_2, B_3 en B_4 dan op een cirkel
 om P_{41} . De pool P_{41} dient dus ook
 op de middelpuntskromme te liggen.
 De middelpuntskromme kan dan niet
 een antipolenkromme zijn, zodat de
polenkromme \equiv middelpuntskromme.
 De middelpuntskromme is dus ook
 een 3e graads kromme, welke circu-

lair is. Deze kromme uit de discrete kinematica kan ontaarden in een rechte
 lijn en een kegelsnede. Zolang deze rechte lijn niet de oneigenlijke rechte
 is, is de kegelsnede een cirkel, omdat de kromme door de isotope punten
 moet blijven gaan. In het andere geval is de kegelsnede een hyperbool. In
 de momentane kinematica kon de middelpuntskromme nl. ook ontaarden in de
 oneigenlijke rechte en een hyperbool. De middelpuntskromme uit de momentane
 kinematica ontstaat uit de gelijknamige kromme van de discrete kinematica
 door limietovergang, waarbij de vier discrete standen van het bewegende vlak
 tot één limietstand naderen.

=====