

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# KINEMATICA

naar het college van

**Prof. Dr. G.R. Veldkamp**

samengesteld door

**Dr. E.A. Dijksman**

Jaren 60

2216

Bobel Mag

K I N E M A T I C A

Samengesteld door dr. E.A. Dijkstra  
naar het college van prof. dr. G.R. Veldkamp

met medewerking van:

H. Heilbron-Wiersma

H.A. Bulten

Dict. nr.: 2.216
Prijs : f 1,50

## INHOUD

blz. 1	beweging van een punt
1	snelheid
3	versnelling
4	beweging van een vlak
5	snelheidsverdeling, poolbegrip
9	voorbeelden van constructie van de pool
9	poloden
10	overbrengingsverhouding voor de hoeksnelheid
11	poloden bij stangenvierzijden en bijzondere versies daarvan
13	de beweging van de rechte hoek
15	de relatieve beweging m.b.t. de snelheden
17	stelling van Aronhold-Kennedy
18	poolwisselsnelheid
21	kromming van de polode
22	omhullenden
24	Euler-Savary voor omhullenden
25	"    "    voor baanpunten
26	buigcirkel
29	stelling van Bobillier
31	keercirkel
34	omhullende van een bewegende rechte
36	stelling van Hartmann
37	stelling van Freudenstein
39	versnellingsdistributie
41	versnellingshoek, versnellingspool
42	constructie van de versnellingspool
44	voorbeelden van versnellingsconstructie
46	versnellingspoolconstructie van Joukowski.
47	de relatieve beweging m.b.t. de versnellingen
48	Coriolis versnelling
49	voorbeeld van toepassing van Coriolis versnelling
50	voorbeeld van toepassing van de relatieve beweging
51	formules van Euler
53	plagiograph van Sylvester (pantograaf)
54	stelling van Roberts

## LITERATUUR

- grondleggers: Franz Reuleaux: "Theoretische Kinematik". (1875)  
Burmester: "Lehrbuch der Kinematik". (3 dln.) (1886).
- beginselen der kinematica: H.J.C. Nunnink: "Kinematica van vlakke stelsels".  
(Delft 1962).  
F.Schuh: "Leerboek der theoretische Mechanica". (4 dln.)  
Deel I: Kinematica.
- modern: Rosenauer en Willis: "Kinematics of Mechanisms".  
(Sydney 1953).
- uitvoering: R.Beyer: "Kinematische Getriebesynthese".  
(Springer-Verlag 1953).
- toepassing van de computer: J.Hirschhorn: "Kinematic and Dynamics of Plane Mechanisms". (McGraw-Hill 1962).
- ruimtelijk: R.Beyer: "Technische Raumkinematik". (1963).

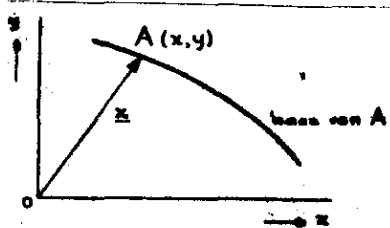
## KINEMATIKA

### Bewegingsleer

#### De leer van de vlakke beweging.

In dit collegediktaat blijft de oorzaak van de beweging buiten beschouwing; over (massa)krachten wordt niet gesproken.

#### De beweging van een punt.



Punt A beweegt zich ten opzichte van het stelsel  $x - o - y$ . De coördinaten van A zijn dan functies van een of andere parameter (t):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

waarbij  $\underline{x} = (x, y)$

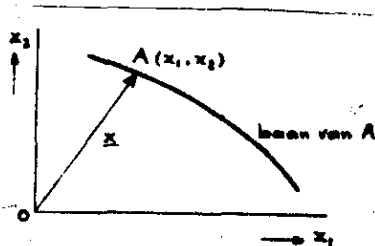
en  $\underline{x} = \underline{x}(t)$

Daar deze notatie minder fraai is, hanteert men liever de schrijfwijze:

$$\underline{x} = (x_1, x_2)$$

samen met

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases}$$



In het algemeen mogen we veronderstellen dat dit "nette" (en dus differentiërbare) functies van de tijd zijn. Differentiatie naar de tijd geeft dan

$$\dot{\underline{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

De componenten van de tijdsafgeleide van een (plaats)vector zijn de tijdsafgeleiden van de coördinaten van deze vector.

In het algemeen heeft men de volgende vector-operaties:

1. Het optellen van 2 vectoren:  $\underline{u} + \underline{v}$ .
2. Het vermenigvuldigen van een vector  $\underline{u}$  met een scalair getal  $\lambda$ , geeft  $\lambda \underline{u}$
3. Het inwendig produkt of scalair produkt, van 2 vectoren, al of niet verschillend:  $(\underline{u}, \underline{v})$ .
4. Het vectorprodukt, ook wel uitwendig produkt genoemd van 2 vectoren:  $\underline{u} \times \underline{v}$ .
5. Het differentiëren van een vector:  $\dot{\underline{u}}$ .

Er zijn de volgende rekenregels:

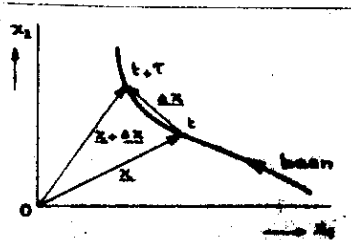
$$\frac{d}{dt}(\underline{u} + \underline{v}) = \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{v}}, \quad \text{omdat}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{u} + \underline{v}) = (\dot{u}_1 + \dot{v}_1, \dot{u}_2 + \dot{v}_2) = (\dot{u}_1, \dot{u}_2) + (\dot{v}_1, \dot{v}_2) = \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{v}}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda \underline{u}) = (\lambda \dot{u}_1 + \lambda \dot{u}_1, \lambda \dot{u}_2 + \lambda \dot{u}_2) = \lambda \dot{\underline{u}} + \lambda \dot{\underline{u}}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{u}, \underline{v}) = (\dot{\underline{u}}, \underline{v}) + (\underline{u}, \dot{\underline{v}})$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{u} \times \underline{v}) = \dot{\underline{u}} \times \underline{v} + \underline{u} \times \dot{\underline{v}}$$



Voor de beweging van een punt geldt, dat

$$\underline{X} = \underline{X}(t) \quad \text{en} \quad \underline{X} + \Delta \underline{X} = \underline{X}(t + \tau).$$

Heeft het punt de weg  $\Delta \underline{X}$  afgelegd, dan is de tijd met  $\tau$  sec voortgeschreden.

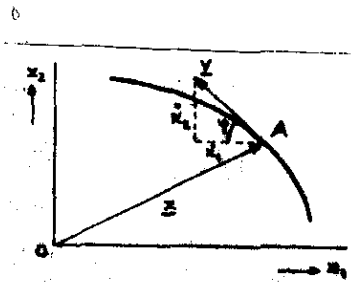
Beweegt het punt zich eenparig voort langs de baan, dan is  $\underline{v} = \frac{\Delta \underline{X}}{\tau}$ .

Is dit niet het geval, dan is per definitie:

$$\underline{v} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{X}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\underline{X} + \Delta \underline{X}) - \underline{X}}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\underline{X}(t + \tau) - \underline{X}(t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{x_1(t + \tau) - x_1(t)}{\tau}, \frac{x_2(t + \tau) - x_2(t)}{\tau} \right\} =$$

$$\{ \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) \} = \dot{\underline{X}}(t), \quad \text{zodat} \quad \underline{v} = \dot{\underline{X}}.$$



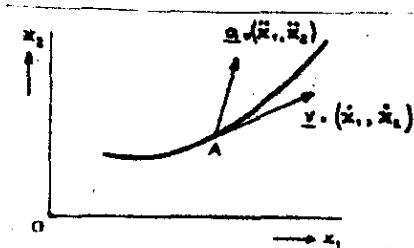
$$\underline{x} = (x_1, x_2)$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan \varphi = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}$$

Dus de snelheidsvector raakt aan de baan. Voor de versnellingsvector is dit echter niet meer het geval.

Per definitie is  $\underline{a} = \dot{\underline{v}}$ , zodat  $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \dot{\underline{\dot{x}}}$  (spreek uit: de "dubbele-fluxie" van  $\underline{x}$ ).



$$\underline{a} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$$

Bij een rechtlijnige beweging van het punt A valt  $\underline{a}$  langs  $\underline{v}$ .

Is dit de enige beweging waarvoor dit het geval is?

Indien  $\underline{a}$  langs  $\underline{v}$  valt, geldt dat

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, \text{ zodat } \dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 = 0.$$

Dit heeft tot gevolg, dat ook de uitdrukking:

$$\frac{d}{dt} \frac{x_2}{x_1} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{(\dot{x}_1)^2} = 0, \text{ zodat } \frac{x_2}{x_1} = \text{constant}.$$

Dus  $x_2 = c \cdot x_1$ , zodat  $x_2 = c \cdot x_1 + d$  (of  $y = cx + d$ ).

De laatste vergelijking is een vergelijking van een rechte lijn, zodat alleen voor de rechtlijnige beweging van een punt de versnellingsvector  $\underline{a}$  langs de snelheidsvector  $\underline{v}$  valt. (Men kan ook zeggen, dat zolang  $\underline{a} = \lambda \underline{v}$  beweegt het punt zich langs een rechte).

Indien  $\underline{a} \perp \underline{v}$ , dan geldt, dat

$$2(\underline{a}, \underline{v}) = 2\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \ddot{x}_2 = 0, \text{ zodat } \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = c^2 \text{ en dus } v^2 = c^2$$

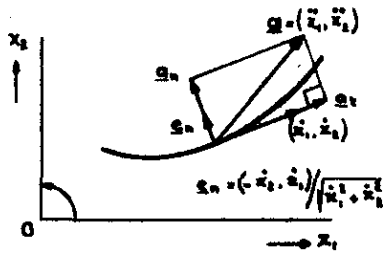
zodat  $\frac{ds}{dt} = c$  en  $s = ct + d$  (of  $s = vt + s_0$ ).

In dat geval is er dus sprake van een eenparige beweging van het betrokken punt.

Bij een eenparige rotatie om een vast punt bijvoorbeeld, is  $\underline{a} \perp \underline{v}$ .  
 (Dit is een eenparige cirkelbeweging).

Algemeen:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \underline{a} &= \underline{a}_n + \underline{a}_t \\ &= \lambda \underbrace{(-\dot{x}_2, \dot{x}_1)}_{\underline{a}_n} + \underbrace{\mu(\dot{x}_1, \dot{x}_2)}_{\underline{a}_t}. \end{aligned}$$



Hoe groot is nu  $\underline{a}_n$ ?

Daartoe wordt de betrekking inwendig vermenigvuldigd met  $(-\dot{x}_2, \dot{x}_1)$ .

Er komt dan:

$$-\dot{x}_1 \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 \ddot{x}_1 = \lambda (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad \text{of}$$

$$\lambda = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}$$

$$\text{Dus } \underline{a}_n = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} (-\dot{x}_2, \dot{x}_1)$$

$$\text{Nu is op grond van een definitie voor de kromtestraal } \frac{1}{R} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}}$$

$$\text{zodat } \underline{a}_n = \frac{1}{R} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} (-\dot{x}_2, \dot{x}_1) = \frac{1}{R} \underbrace{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}_{|\underline{v}|} \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}_{|\underline{v}|} \cdot \underline{e}_n$$

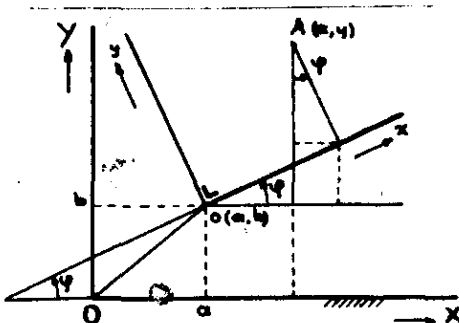
Dus

$$\underline{a}_n = \frac{(\underline{v}, \underline{v})}{R} \underline{e}_n$$

(met  $|\underline{e}_n| = 1$ ).

Dit is de normale versnellingscomponent, welke altijd naar het kromtemiddelpunt gericht is. Het is de centripetale versnellingscomponent.

De beweging van een vlak



Het punt A is een vast punt van het bewegende vlak  $x - o - y$ , dat planparallel beweegt ten opzichte van het "vaste" vlak  $X - O - Y$ .

Tussen de coördinaten  $(x, y)$  van het punt A in het bewegende stelsel en de coördinaten  $(X, Y)$  van datzelfde punt A in het "vaste" stelsel bestaat het verband:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{aligned}$$



Hierbij zijn  $a$ ,  $b$  en  $\varphi$  tijdsafhankelijke parameters.

Dus  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$  en  $\varphi = \varphi(t)$ .

Daar het punt A een vast punt is van het bewegende stelsel, zijn de coördinaten ( $x$  en  $y$ ) van dat punt onafhankelijk van  $t$ .

Differentiatie naar de tijd geeft dus:

$$\dot{X} = -\dot{\varphi}x\sin\varphi - \dot{\varphi}y\cos\varphi + \dot{a} = -\dot{\varphi}(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \dot{a} = -\dot{\varphi}(Y - b) + \dot{a}$$

$$\dot{Y} = \dot{\varphi}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \dot{b} = \dot{\varphi}(X - a) + \dot{b}$$

Dus

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\dot{\varphi}(Y - b) + \dot{a} \\ \dot{Y} &= \dot{\varphi}(X - a) + \dot{b} \end{aligned}$$

Deze betrekkingen geven de snelheidsverdeling over het vlak aan.

$\dot{\varphi}$  (spreek uit fluxie  $\varphi$ ) is een grootheid, welke voor iedere rechte van het bewegende vlak dezelfde waarde heeft en daarom karakteristiek is voor het hele bewegende vlak.

$\dot{\varphi}$  is de hoeksnelheid van het bewegende vlak.

$(\dot{a}, \dot{b}) = \underline{v}_0$  is de snelheidsvector van de oorsprong van het bewegende (assen)stelsel.

Men kan zich afvragen of er punten van het bewegende vlak te vinden zijn die de snelheid nul ten opzichte van het referentievlak  $X - O - Y$  hebben. Voor een punt P waarvoor dit het geval is, geldt dan, dat

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\dot{\varphi}(Y_P - b) + \dot{a} \\ 0 &= \dot{\varphi}(X_P - a) + \dot{b} \end{aligned} \right\} \text{zodat} \quad \left. \begin{aligned} \dot{\varphi}(X_P - a) &= -\dot{b} \text{ en} \\ \dot{\varphi}(Y_P - b) &= \dot{a} \end{aligned} \right\}$$

Dit zijn juist 2 lineaire vergelijkingen in de onbekende coördinaten  $(X_P, Y_P)$  van dat punt P. Indien  $\dot{\varphi} \neq 0$ , dan is er precies één oplossing:

$$\left. \begin{aligned} X_P &= \frac{-\dot{b}}{\dot{\varphi}} + a \\ Y_P &= \frac{\dot{a}}{\dot{\varphi}} + b \end{aligned} \right\}$$

Dus zolang  $\dot{\varphi} \neq 0$  is er op ieder moment één punt P te vinden uit het bewegende vlak, dat de snelheid nul heeft ten opzichte van het referentievlak. (Opm. Dit referentievlak  $X - O - Y$  behoeft niet noodzakelijk stil te staan!).

Het punt P met de genoemde eigenschap wordt de snelheidspool genoemd.

In het bijzondere geval, dat  $\dot{\phi} = 0$  hebben alle punten uit het bewegende vlak dezelfde snelheid  $\underline{v}_0$  ten opzichte van het referentievlak. Dit volgt uit het feit, dat in dat geval  $\dot{X} = \dot{a}$  en  $\dot{Y} = \dot{b}$ .

Is op een ogenblik  $\dot{\phi} = 0$ , dan spreekt men van een instantane (of ook wel momentane) translatie(positie).

Is  $\dot{\phi}$  voor een langere periode identiek gelijk aan nul, dan wordt gesproken van een translatiebeweging gedurende deze periode.

Uit de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} X_P &= \frac{-\dot{b}}{\dot{\phi}} + a \\ Y_P &= \frac{\dot{a}}{\dot{\phi}} + b \end{aligned} \right\}$$

voor de coördinaten van de snelheidspool P, blijkt tevens, dat voor het geval  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ , dat dan  $P \rightarrow P^\infty$ . Met andere woorden, zodra de hoeksnelheid van het bewegende vlak nul is (ook wel: zodra het bewegende vlak zich in een translatiepositie bevindt), is de (snelheids-)pool een punt van de oneindig verre rechte (ook wel een oneigenlijke rechte genoemd).

(Opm. De oneigenlijke rechte bestaat uit oneindig veel oneigenlijke punten).

Omdat voor het geval dat  $\dot{\phi} = 0$

$$\frac{Y_P}{X_P} = \lim_{\dot{\phi} \rightarrow 0} \frac{\frac{\dot{a}}{\dot{\phi}} + a}{-\frac{\dot{b}}{\dot{\phi}} + b} = -\frac{\dot{a}}{\dot{b}},$$

ligt de richtingscoëfficiënt vast en wordt het duidelijk in welke richting het punt  $P^\infty$  dan gezocht moet worden, zodat hiermee is komen vast te staan welk oneigenlijk punt van de oneigenlijke rechte de pool is.

Is, in het algemeen  $\dot{\phi} \neq 0$ , dan is het mogelijk de oorsprong o van het coördinatenstelsel x - o - y van het bewegende vlak in de pool te kiezen.

Dan is dus  $\dot{a} = 0$  en ook  $\dot{b} = 0$ , terwijl bovendien  $a = X_P$  en  $b = Y_P$ .

Dus

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\dot{\phi}(Y - Y_P) \\ \dot{Y} &= \dot{\phi}(X - X_P) \end{aligned}}$$

De snelheid van een punt (X,Y) is dus evenredig met de afstand van dat punt tot de pool P.

Laat men bovendien de oorsprong van het referentievlak

X - o - Y met de pool P samenvallen, dan is ook nog  $X_P = Y_P = 0$ , zodat dan

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\dot{\phi}Y \\ \dot{Y} &= \dot{\phi}X \end{aligned}}$$

Tenslotte kan nog de X-as zódanig gekozen worden, dat een willekeurig punt A een punt is van het positieve deel van de X-as. Dan is dus  $A(c,0)$  en  $c > 0$ . Voor zult een punt geldt dan, dat

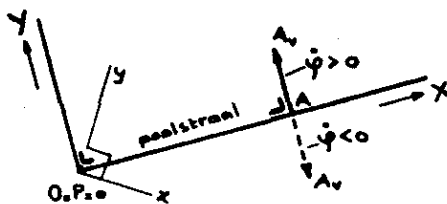
$$\begin{cases} \dot{X}_A = 0 \\ \dot{Y}_A = c\dot{\phi} \end{cases}$$

Hieruit volgt, dat de snelheid  $\underline{v}_A = \overline{AA}_v$  van het willekeurige punt A loodrecht staat op de verbindinglijn PA. Deze verbindinglijn wordt ook wel poolstraal genoemd.

Is  $\dot{\phi} > 0$ , dan is  $v_A = \dot{Y}_A > 0$ , anders  $< 0$ .

(In formule:  $\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \overline{PA}$ ; waarbij  $\omega = \dot{\phi}$  en  $\underline{\omega}$  een vector loodrecht

op het referentievlak op een wijze, zoals overeenkomt met een links geöriënteerd coördinatenstelsel).



Voor twee punten A en B van het bewegende vlak geldt, dat  $v_B/v_A = PB/PA$

en

$\tan \angle B_P PB = \omega = \tan \angle A_P PA$   
 waaruit volgt, dat  $\triangle A_P PA \sim \triangle B_P PB$  (met

gelijkblijvende oriëntatiezin van de driehoeken).

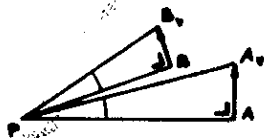
Hierop berust een snelheidsconstructie.

De op de pool P gerichte vectoren  $\overline{AA}_p$ ,  $\overline{BB}_p$  enz. worden de polaire of loodrechte snelheidsvectoren genoemd.

Voor de punten A en B van het bewegende vlak geldt, dat

$$\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \overline{PA}$$

$$\underline{v}_B = \underline{\omega} \times \overline{PB}$$



zodat

$$\underline{v}_B - \underline{v}_A = \underline{\omega} \times (\underline{PB} - \underline{PA}) = \underline{\omega} \times \underline{AB}$$

en geldt voor het inwendige produkt, dat

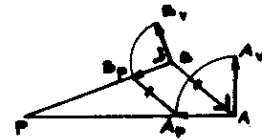
$$(\underline{v}_B - \underline{v}_A, \underline{AB}) = (\underline{\omega} \times \underline{AB}, \underline{AB}) = 0.$$

Met andere woorden

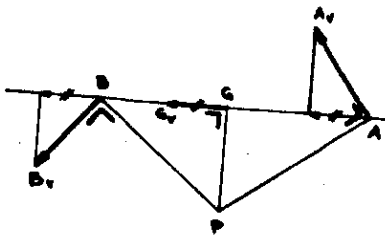
$$(\underline{v}_B, \underline{AB}) = (\underline{v}_A, \underline{AB}),$$

zodat

$$v_B \cdot \cos(\underline{v}_B, \underline{AB}) = v_A \cdot \cos(\underline{v}_A, \underline{AB})$$



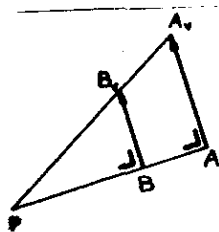
De componenten van de snelheidsvectoren van 2 punten in de richting van de verbindingslijn van deze punten zijn steeds aan elkaar gelijk.



Dat punt van de bewegende rechte AB, waarvan de snelheidscomponent in de richting van AB juist samenvalt met de snelheidsvector zelf van dat punt, wordt het glijdpunt G genoemd. Het wordt gevonden als voetpunt van de uit P op AB neergelaten loodlijn. Het glijdpunt G is het enige punt van de rechte AB, dat een snelheid heeft in de lengterichting van de rechte. (Later zullen we zien, dat dit punt

G ook het punt is, waar de bewegende rechte aan haar - in het referentievlak gelegen - omhullende raakt.

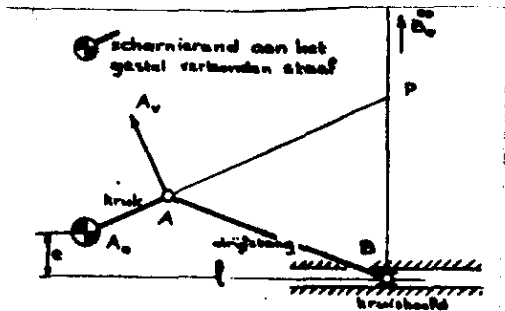
In het speciale geval, dat  $\underline{BB}_v // \underline{AA}_v$ , is de pool P te vinden in het snijpunt van AB met  $\underline{A}_v \underline{B}_v$ .



(Het is duidelijk, dat dan  $AB \perp \underline{AA}_v$  en  $BB_v$ , omdat anders de componenten van  $\underline{v}_B$  en  $\underline{v}_A$  in de richting van AB niet gelijk aan elkaar zijn).

Zijn bovendien  $\underline{v}_A$  en  $\underline{v}_B$  ook nog in grootte aan elkaar gelijk, dan wordt, zoals reeds eerder is opgemerkt, het snijpunt P van AB met  $\underline{A}_v \underline{B}_v$  een oneigenlijk punt.

Enige voorbeelden van het construeren van de pool P.



Krukdrijfstaangbeweging.

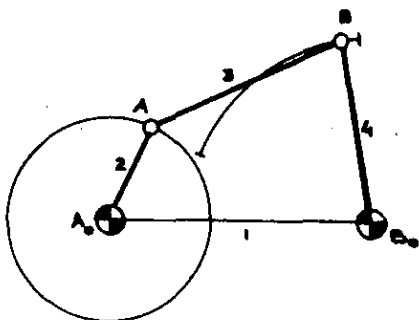
Het punt P kan in iedere stand worden gevonden in het snijpunt van de poolstralen  $A_0 A$  en  $B_0^{\infty} B$ . Steeds is daarbij  $B_0^{\infty} B \perp$  de leibaan l (De baan van B is de rechte l, waarvan het kromtemiddelpunt ( $B_0 = B_0^{\infty}$ ) een oneigenlijk punt is, te vinden in een richting  $\perp l$ ). De genoemde constructie

berust op het feit, dat de poolstralen PA en PB samenvallen met de respectieve baannormalen  $A_0 A$  en  $B_0^{\infty} B$  van de baanpunten A en B van de drijfstaang. In de positie, waarbij de kruk  $A_0 A$  loodrecht staat op de leibaan l, wordt  $P = P^{\infty} = B_0^{\infty}$ .

De uiterste standen van het "kruishoofd" B op l worden bereikt in de twee posities, waarbij  $P = B$ . Dit treedt op, indien de kruk  $A_0 A$  in één lijn ligt met de drijfstaang AB. In de beide keren, dat dit het geval is, bevindt B zich in een omkeerpunt op l en staat B daar momentaan stil. (Opm. Dit blijkt ook in zijn algemeenheid op te gaan: keerpunten van banen zijn punten, die stil hebben gestaan en zodoende eens pool zijn geweest; het zijn dan ook alléén punten van de z.g. "bewegende polode", die een of meerdere keerpunten in hun baan doorlopen.)

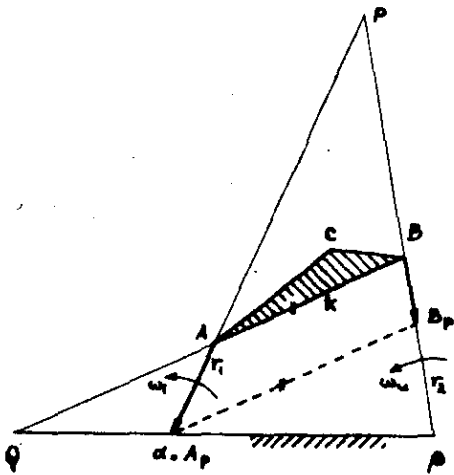
Teken nu zelf als oefening de meetkundige plaats van de punten P, zoals deze zich aftekent in het referentievlak, in dit geval het vlak van het gestel ( $A_0 B_0^{\infty} l$ ). Deze meetkundige plaats wordt ook wel de vaste polode genoemd.

Stangenvierzijde



Het punt  $B_0$  is nu - in tegenstelling met het voorgaande geval - geen oneigenlijk punt meer. Beide punten A en B doorlopen cirkels of delen daarvan.

Het bewegende vlak is vast verbonden met de koppelstaang AB en wordt in dit geval koppelvlak genoemd. Het punt C uit dit vlak beschrijft een koppelkromme.



(Het snijpunt P valt weer samen met het snijpunt van de baannormalen  $\alpha A$  en  $\beta B$ . Bij beweging van de kruk  $\alpha A$  rond  $\alpha$ , slingert of roteert het punt B rond  $\beta$  en doorloopt het telkens optredende snijpunt P een kromme van de 8<sup>e</sup> graad, zoals we later zullen zien. (Tekent nu zelf weer als oefening de meetkundige plaats van punten P, zoals deze zich aftekent in het referentievlak van het gestel  $\alpha\beta$ ).

Overbrengingsverhouding voor de hoeksnelheid.

Is de hoeksnelheid  $\omega_i$  van de ingaande kruk  $\alpha A$  constant, dan is zulks niet het geval voor de uitgaande hoeksnelheid  $\omega_u$  van de uitgaande schakel  $\beta B$ . Men noemt  $I = \omega_u / \omega_i$  de overbrengingsverhouding voor de hoeksnelheden.

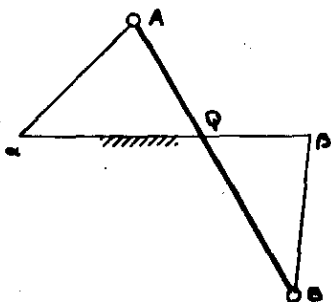
Daar het alleen om de verhouding  $\omega_u / \omega_i$  gaat, is het mogelijk zonder de algemeenheid van de beschouwing aan te tasten, de hoeksnelheid  $\omega_i = 1$  te nemen (= op de getalwaarde 1 te "normeren").

Uit de figuur blijkt dan onmiddellijk, dat

$$I = \frac{\omega_u}{\omega_i} = \omega_u = \frac{BB_P}{\beta\beta} = \frac{Q\alpha}{Q\beta}$$

Dus  $\frac{\omega_u}{\omega_i} = \frac{Q\alpha}{Q\beta}$  (Algemeen geldig, ook als  $\omega_i \neq 1$ ).

Ligt Q tussen de punten  $\alpha$  en  $\beta$ , dan is deze verhouding negatief, omdat  $\beta B$  en  $\alpha A$  op dat moment met tegengestelde draaizin bewegen. (Q heet het collineatiepunt van de vierzijde).

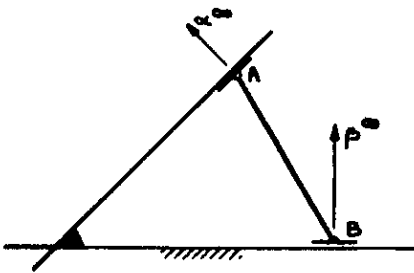


Ligt Q buiten het interval  $\overline{\alpha\beta}$ , dan is I positief en roteren de beide krukken in dezelfde draaizin. In het geval  $\beta = \beta^{\infty}$  ontstaat in het algemeen het z.g. excentrische krukdrijfstangmechanisme (excentriciteit e, zie de figuur).

Geef een zinvolle definitie van I in dit geval en leid daarvoor een meetkundige relatie af,

waarin sprake is van het collineatiepunt Q.

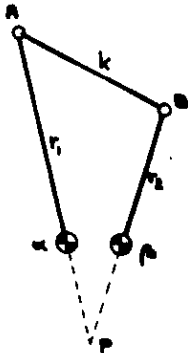
Elliptische beweging.



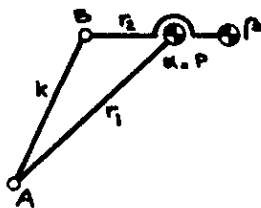
Ook deze beweging kan als een bijzonder geval van de koppelstangbeweging van een stangenvierzide worden beschouwd. Hier is  $\alpha = \alpha^{\infty}$  en  $\beta = \beta^{\infty}$ .  
Graad van de poloden.

De graad van een algebraïsche kromme is het maximale aantal snijpunten met de rechte lijn. Zo heeft een kegelsnede op z'n hoogst 2 snijpunten met een rechte en is dus van de 2<sup>e</sup> graad. De strophoïde daarentegen is van de 3<sup>e</sup> graad en heeft dan ook ten hoogste drie (snij)punten gemeen met een rechte.

De kromme heeft met iedere rechte drie snijpunten gemeen: in vele gevallen is dit slechts één reëel snijpunt en twee complexe snijpunten. (Andere mogelijkheden zijn er niet). Voor het bepalen van de graad van een kromme dienen dus bij een willekeurige rechte ook de complexe snijpunten te worden meegeteld.



Voor het bepalen van de graad van de vaste polode \*) bij de koppelstangbeweging van een stangenvierzide, kiezen we de gestelrechte als de hulprechte waarmee we het aantal reële snijpunten met de kromme gaan bepalen, dat maximaal kan optreden.

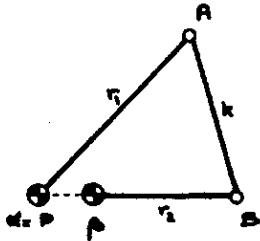


De vraag kan dus gesteld worden, hoe vaak het voorkomt, dat de pool P op de gestelrechte  $\alpha\beta$  terecht komt bij beweging van de kruk  $\alpha A$ .  
 $P(\alpha A, \beta B)$ .

\*) Dit is de meetkundige plaats van de punten P zoals deze zich aftekent in het vaste vlak.

Dit gebeurt wanneer  $\alpha A$  langs  $\alpha\beta$  valt en ook wanneer  $\beta B$  langs  $\alpha\beta$  valt. (Het geval, dat zowel  $\alpha A$  als  $\beta B$  langs  $\alpha\beta$  vallen, kan beschouwd worden als een triviaal uitzonderingsgeval).

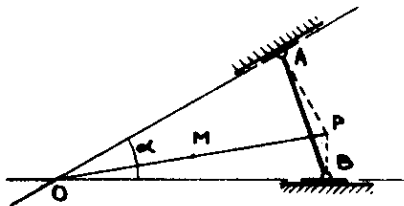
Valt  $\beta B$  langs  $\alpha\beta$ , dan is  $\alpha = P$ .



Hoewel deze stand van  $\beta B$  niet bij iedere stangenvierzijde bereikt kan worden, dient deze stand ook in dat geval als een niet reële positie (en dus complexe oplossing) te worden meegerekend, zoals voorheen is uiteengezet. Ook de ten opzichte van  $\alpha\beta$  gespiegelde stand van de hierboven getekende positie dient als een al dan niet reële mogelijkheid te worden meegeteld. \*)

In totaal dus reeds 2 al dan niet reële mogelijkheden voor P om met  $\alpha$  te kunnen samenvallen. Behalve de reeds genoemde mogelijkheid, waarbij  $\beta B$  het gestel  $\alpha\beta$  al dan niet ten dele overlapt, bestaat ook nog de al dan niet reële mogelijkheid, waarbij  $\beta B$  in het verlengde komt van  $\alpha\beta$ . Tellen we ook hier de spiegelstand mee, dan blijkt alles bij elkaar genomen dat P ten hoogste 4 keer met  $\alpha$  samenvalt. Op dezelfde wijze kan P ten hoogste 4x in  $\beta$  terechtkomen, zodat de vaste polode een 8e graads kromme is (n.l.  $4 + 4$ ).

Bij de elliptische beweging is het vaststellen van de graad van de bijbehorende vaste polode een stuk gemakkelijker:



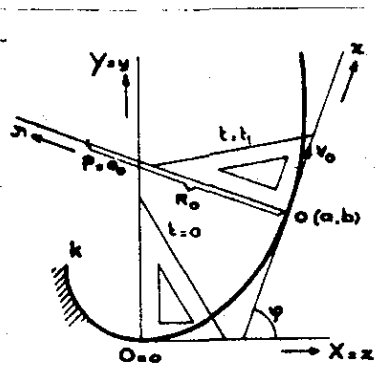
De omgeschreven cirkel van  $\square OBPA$  heeft OP tot middellijn, waarvoor geldt, dat  $\overline{OP} \sin \alpha = \overline{AB}$ , zodat  $\overline{OP} = \overline{AB} / \sin \alpha = \text{constant}$  (d.w.z. onafhankelijk van de tijd  $t$ ). De meetkundige plaats van de punten P, zoals deze zich aftekent in het vaste vlak, is dus een cirkel rond  $\odot$  met straal  $\overline{AB} / \sin \alpha$ . Dit is de vaste polode. Het midden M van de straal  $\overline{OP}$  van de vaste polode ziet in iedere stand de

\*) Noot: Van het getekende dubbelkrukmechanisme kunnen de gespiegelde posities niet worden bereikt zonder loskoppelen. Zij worden desondanks toch als een reële mogelijkheid meegeteld.



staaf AB onder de vaste hoek  $2\alpha$ , terwijl bovendien  $MA = MB$  blijft. Het midden M vormt dus met AB in iedere stand een starre driehoek. Het is op deze wijze te beschouwen als een vast punt in het bewegende vlak. De afstand MP van de pool P tot dit vaste punt M uit het bewegende vlak is ook constant n.l.  $\frac{AB}{2\sin\alpha}$ . Zodat de meetkundige plaats van de punten P, zoals deze zich aftekent in het bewegende vlak eveneens een cirkel is en wel een cirkel rond M met straal  $\frac{1}{2}AB/\sin\alpha$ . De bewegende polode is dus in dit geval de cirkel  $(M, \frac{1}{2}AB/\sin\alpha)$ .

De beweging van de rechte hoek



De beweging van de rechte hoek (in de figuur als tekendriehoek getekend in twee posities n.l. één op tijdstip  $t = 0$  en één op tijdstip  $t = t_1$ , wordt vastgelegd door 2 kenmerken:

- 1<sup>e</sup>. Het hoekpunt o van de tekendriehoek  $x - o - y$  beweegt langs een gegeven kromme k, gelegen in het referentievlak  $X - O - Y$ .
2. De x-as van het bewegende coördinatenstelsel  $x - o - y$  is steeds raaklijn aan k.

De vraag kan nu worden gesteld, waar ligt nu de pool van het bewegende vlak ten opzichte van het referentievlak?

Op het tijdstip  $t = 0$  (meestal overeenkomend met het tijdstip of liever nog de positie van het bewegende vlak, die we willen onderzoeken) is het mogelijk het "vaste" assenstelsel  $X - O - Y$  zo' te kiezen, dat dit samenvalt met het bewegende assenstelsel  $x - o - y$ . Het is duidelijk, dat dit op het tijdstip  $t = t_1$  dan niet meer het geval is. (Dat neemt overigens niet weg, dan indien de positie, overeenkomend met die van het tijdstip  $t = t_1$ , van bijzondere interesse is, het altijd mogelijk is, een nieuw "vast" assenstelsel te definieëren zo', dat op tijdstip  $t = t_1$  de assenstelsels samenvallen. Hieruit volgt natuurlijk, dat dit dan niet hetzelfde vaste assenstelsel is als voor  $t = 0$ ).

In ieder geval bestaat voor het punt  $(X, Y)$  uit het referentievlak en het daarmee momentaan samenvallende punt  $(x, y)$  uit het bewegende vlak de relatie

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{aligned} \right\} \text{ of } \boxed{\underline{Z} = \underline{z} e^{i\varphi} + \underline{Oo}}$$

waarbij  $\underline{Z} = X + iY$  en  $\underline{z} = x + iy$ .

De coördinaten a en b van de bewegende oorsprong o zijn functies van de tijd t. Hetzelfde is het geval met de variabele  $\varphi$ .

Dus:

$$\left. \begin{aligned} a &= a(t) \\ b &= b(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\}$$

Eliminatie van de parameter t geeft de vergelijking voor de kromme k, waarlangs o zich beweegt.

Nu komt  $\tan\varphi$  overeen met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn x (op tijdstip  $t = t_1$ ). Anderzijds wordt de raaklijnvector vastgelegd door  $(\dot{a}, \dot{b})$ , zodat met  $\tan\varphi = \dot{b}/\dot{a}$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}} \quad \text{en} \quad \sin\varphi = \frac{\dot{b}}{\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}}$$

Differentiatie van de uitdrukking voor  $\cos\varphi$  naar de tijd levert dus:

$$-\dot{\varphi}\sin\varphi = \frac{\ddot{a}\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{b}^2} - \dot{a}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^{-1/2}(\ddot{a}\dot{a} + \dot{b}\ddot{b})}{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)}$$

zodat

$$-\dot{\varphi}\sin\varphi = \frac{\ddot{a}(\dot{a}^2 + \dot{b}^2) - \dot{a}(\ddot{a}\dot{a} + \dot{b}\ddot{b})}{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^{3/2}} = \frac{\ddot{a}\dot{b}^2 - \dot{a}\dot{b}\ddot{b}}{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^{3/2}}$$

Substitutie van de uitdrukking voor  $\sin\varphi$  geeft dan:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{a}\dot{b} - \ddot{a}\dot{b}}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2} = \underbrace{\frac{\dot{a}\dot{b} - \ddot{a}\dot{b}}{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^{3/2}}}_{R_0^{-1}} \cdot \underbrace{(\dot{a}^2 + \dot{b}^2)^{1/2}}_{v_0}$$

Nu is op grond van een reeds eerder in dit dictaat gebezigde definitie voor de kromtestraal  $R_0$  van k ter plaatse o

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{R_0} \cdot v_0$$

Dus  $\boxed{v_0 = \omega R_0}$

waarbij  $\dot{\varphi} = \omega$  de hoeksnelheid is van de rechte hoek.

De pool P van de rechte hoek ligt op de baannormaal door o van k:  
P ligt op de y-as van het bewegende stelsel. Op grond van de zo juist afgeleide betrekking ligt P precies in het bij o horende kromtemiddelpunt van k. Immers pas dan is de snelheid  $v_o$  van o juist  $\omega \cdot R_o$ .

Dus  $\vec{OP} = \frac{R_o}{\omega}$  omdat  $\underline{v}_o = \underline{\omega} \times \underline{oP}$

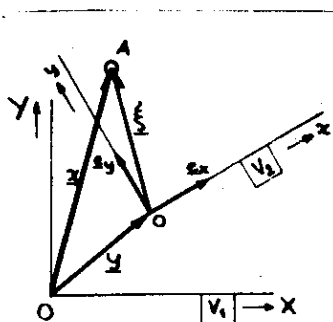
Dit wordt de stelling van de rechte hoek genoemd.

Daar P steeds op de y-as van het bewegende stelsel te vinden is, blijkt ook, dat deze y-as de bewegende polode is. (Het is de meetkundige plaats van de punten P in het bewegende vlak).

De verzameling van alle kromtemiddelpunten successievelijk toegevoegd aan de opeenvolgende punten o van k, wordt de evolute van k genoemd. Het is een kromme, gelegen in het referentievlak. (Het vaste vlak van k dus). Op grond van de stelling van de rechte hoek is de evolute dus de vaste polode, omdat de evoluit de meetkundige plaats is van de punten P zoals deze zich in het referentievlak aftekent.

De beweging van de rechte hoek kan dus ook worden gekarakteriseerd door een zuivere afrolling van een bewegende rechte y over de evoluit van k. Ieder punt van deze rechte y beschrijft een kromme, welke een aequidistante is van k. Ieder van deze aequidistanten heeft dezelfde evolute. Bij de evolute daarentegen horen oneindig veel aequidistanten, die ieder voor zich basiskrommen kunnen zijn voor eenzelfde voorgeschreven beweging van een rechte hoek. Er zijn dus oo veel manieren om dezelfde beweging voort te brengen. Het is in principe mogelijk voor een groot deel van de kinematica de stelling van de rechte hoek tot grondslag te nemen.

#### Relatieve beweging.



Er zijn 3 ten opzichte van elkaar bewegende vlakken  $V_1$ ,  $V_2$  en  $V_3$ . In  $V_1$  ligt het assenstelsel  $X - O - Y$ , in  $V_2$  het stelsel  $x - o - y$ .

Een punt A is een punt van  $V_3$ . Dit punt beweegt dus t.a.v.  $V_2$  dat op zijn beurt weer t.o.v.  $V_1$  beweegt. Ter plaatse A liggen eigenlijk 3 punten: het eerste punt A is een vast punt van  $V_3$ , het tweede een vast punt van  $V_2$  en het derde een vast punt van  $V_1$ .

We kunnen schrijven, dat

$$\underline{x} = \underline{z} + \underline{y} \quad \} \text{ (spreek uit ksi)}$$

of

$$\underline{x} = \rho_1 \underline{e}_x + \rho_2 \underline{e}_y + \underline{y}$$

Hierbij zijn  $\underline{y}$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\underline{e}_x$  en  $\underline{e}_y$  functies van de tijd  $t$ .

Immers  $\underline{e}_x$  en  $\underline{e}_y$  hebben wèl een constante lengte, maar veranderen van richting als functie van  $t$ .

$$|\underline{e}_x| = |\underline{e}_y| = 1$$

Differentiatie van de uitdrukking voor  $\underline{x}$  geeft dus:

$$\underline{\dot{x}} = \dot{\rho}_1 \underline{e}_x + \dot{\rho}_2 \underline{e}_y + \rho_1 \dot{\underline{e}}_x + \rho_2 \dot{\underline{e}}_y + \dot{\underline{y}}$$

$\underline{\dot{x}}$  = de snelheid van het punt A van  $V_3$  t.o.v.  $V_1$  (schrijf  $V_3/V_1$ ).

$\dot{\rho}_1 \underline{e}_x + \dot{\rho}_2 \underline{e}_y$  = is de verandering van  $\underline{z}$  als  $V_2$  stilstaat d.i. dus de snelheid van A ten gevolge van de beweging  $V_3/V_2$ .

$\rho_1 \dot{\underline{e}}_x + \rho_2 \dot{\underline{e}}_y + \dot{\underline{y}}$  = de snelheid van A als punt van  $V_2/V_1$ .

(In dit laatste geval is het net alsof A vast zit aan  $V_2$ ).

We schrijven:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{v}_{31}^A \quad (\text{waarbij A een vast punt is van } V_3)$$

$$\dot{\rho}_1 \underline{e}_x + \dot{\rho}_2 \underline{e}_y = \underline{v}_{32}^A \quad (\text{waarbij A " " " " " } V_3)$$

$$\rho_1 \dot{\underline{e}}_x + \rho_2 \dot{\underline{e}}_y + \dot{\underline{y}} = \underline{v}_{21}^B \quad (\text{waarbij B " " " " " } V_2 \text{ ter plaatse A})$$

Daar A een willekeurig punt was geldt dus voor ieder punt, dat

$$\underline{v}_{31} = \underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} \quad (1)$$

ook wel, de technicus meer aansprekend,

$$\underline{v}_{\text{abs}} = \underline{v}_{\text{rel}} + \underline{v}_{\text{sleep}}.$$

De absolute snelheid van een punt is de vectoriële som van de sleep- en de relatieve snelheid van dat punt. (Bijv. de in een vliegtuig voortbewegende stewardess).

Voor  $n$  ten opzichte van elkaar bewegende vlakken geldt:

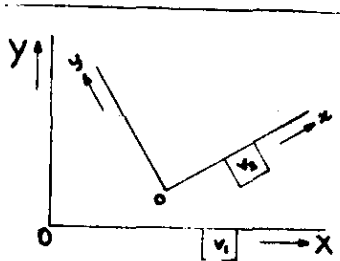
$$\underline{v}_{n1} = \underline{v}_{n,n-1} + \underline{v}_{n-1,n-2} + \dots + \underline{v}_{21}.$$

In principe behoeven de vlakken niet verschillend te zijn:

Dus bijv.  $V_1, V_2, V_3 \equiv V_1$ . Dan is dus  $V_3/V_1 = \text{rust}$ .

Voor alle punten geldt dan, dat  $\underline{v}_{31} = \underline{0}$ .

Daarnaast is  $v_3/v_2 = v_1/v_2 =$  de inverse (of de omgekeerde) beweging van  $v_2/v_1$ .



Er geldt dus in dat geval, dat

$$\underline{0} = \underline{v}_{12} + \underline{v}_{21}, \text{ zodat}$$

$$\underline{v}_{21} = -\underline{v}_{12},$$

hetgeen voor ieder punt geldt.

Er is ook steeds bij oorspronkelijke en bij de inverse beweging precies hetzelfde punt, dat de snelheid 0 heeft. Dus beweging en inverse - beweging hebben op elk ogenblik dezelfde pool.

Dus  $\underline{P}_{21} = \underline{P}_{12}$

$$\underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} - \underline{v}_{31} = \underline{0}$$

$$\underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} + \underline{v}_{13} = \underline{0} \quad (2)$$

Ieder van de bewegende vlakken komt gelijkwaardig in deze vectorsom voor. Het is duidelijk, dat ook deze relatie tot n bewegende vlakken kan worden uitgebreid.

$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_3/v_1$	$v_2/v_1$	$v_3/v_2$
$P_{31}$	$P_{21}$	$P_{32}$

Hoe liggen deze 3 polen?



Uit (2) toegepast op het punt  $P_{31}$  volgt, dat

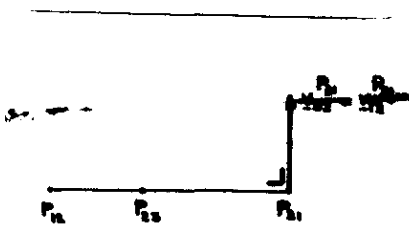
$$\underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} + \underline{v}_{13} = \underline{0}, \text{ waarbij } \underline{v}_{13} = \underline{0},$$

$$\text{zodat } \underline{v}_{32} = -\underline{v}_{21} = \underline{v}_{12}.$$

Indien de figuur goed getekend zou zijn, vielen  $\underline{v}_{32}$  en  $\underline{v}_{12}$  dus samen. Uit het feit, dat deze snelheden loodrecht staan op hun

respectieve en bijbehorende poolstralen volgt onmiddellijk, dat beide poolstralen langs elkaar vallen, zodat de 3 polen  $P_{12}, P_{23}$  en  $P_{31}$  op één rechte liggen.

Dit is de stelling van Aronhold en Kennedy.



Voorts is duidelijk, dat

$$\omega_{32} \times \overrightarrow{P_{32}P_{13}} = \overrightarrow{P_{31}} = \overrightarrow{P_{31}} = \omega_{12} \times \overrightarrow{P_{12}P_{13}}$$

Daar de hoeksnelheidsvectoren loodrecht op de bewegende vlakken staan is:

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = \frac{\overrightarrow{P_{13}P_{12}}}{\overrightarrow{P_{13}P_{32}}}$$

Ligt  $P_{13}$  tussen  $P_{12}$  en  $P_{32}$ , dan hebben  $\omega_{32}$  en  $\omega_{12}$  een teggengestelde draaizijn.  
Ligt  $P_{13}$  buiten het interval  $\overline{P_{12}P_{32}}$ , dan roteren  $V_3/V_2$  en  $V_1/V_2$  in dezelfde zin.

Ook hier geldt, dat  $\omega_{12} = -\omega_{21}$

en dat  $\omega_{32} + \omega_{21} + \omega_{13} = 0$  (leidt dit zelf af!)

Bij 4 bewegende vlakken

$V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  en  $V_4$

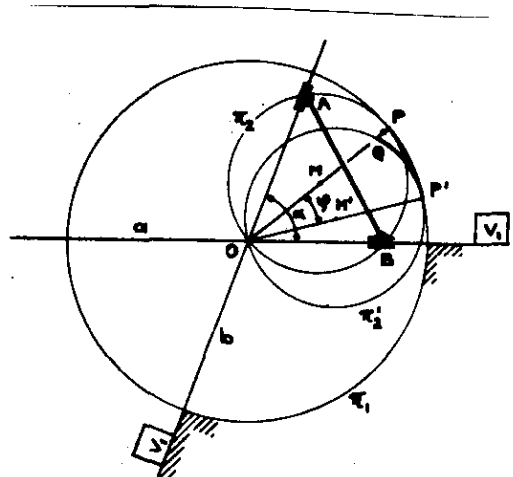
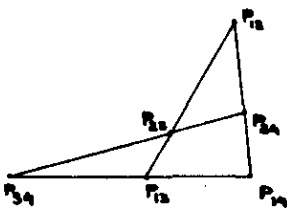
hebben we de relatieve polen:

$$P_{12} = P_{21}, \quad P_{31} = P_{13}, \quad P_{41} = P_{14}$$

$$P_{32} = P_{23}, \quad P_{42} = P_{24}, \quad P_{43} = P_{34}$$

Dit zijn er 6.

Op grond van de stelling van Kennedy liggen er telkens 3 op een rechte. Aldus de 6 hoekpunten van een volledige vierzijde vormend.



De poolwisselsnelheid

Voorbeeld elliptische beweging

Reeds eerder is aangetoond, dat bij de elliptische beweging de vaste polode een cirkel is met straal  $OP = AB/\sin\alpha$  en de bewegende polode een cirkel met straal  $MP = \frac{1}{2}AB/\sin\alpha$ .

Het is duidelijk, dat op ieder moment van de beweging deze poloden een gemeenschappelijke raaklijn bezitten. Deze wordt (ook in het algemeen) poolraaklijn genoemd.

Hoe bewegen nu de cirkels ten opzichte van elkaar?

De betrekkelijk willekeurig gelegen punten A en B van de bewegende polode  $\pi_2$  bewegen zich langs rechte lijnen door het vaste punt O. Het is duidelijk dat dit voor ieder punt van de cirkel  $\pi_2$  geldt. In de positie  $\pi_2'$  van de bewegende polode raken  $\pi_2'$  en  $\pi_1$  elkaar in P'. Welk punt van  $\pi_2'$  komt nu straks (d.i. in de positie  $\pi_2$ ) in P terecht? Daar ook ieder punt van  $\pi_2'$  zich langs een rechte lijn door O beweegt, is het punt Q van  $\pi_2'$  het punt, dat straks in P terecht komt. (Q is het snijpunt van OP met  $\pi_2' \neq O$ ).

Voorts is ook  $\widehat{P'P} = \widehat{P'Q}$ , omdat

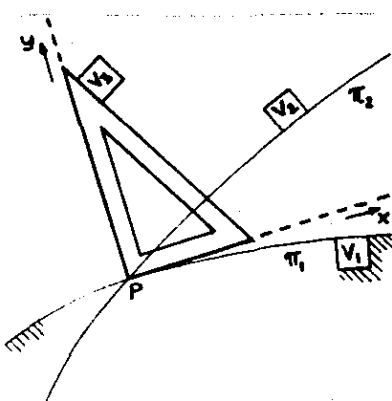
$$\widehat{P'P} = \overline{OP} \cdot \varphi \text{ en } \widehat{P'Q} = \overline{M'P} \cdot 2\varphi = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot 2\varphi = \overline{OP} \cdot \varphi.$$

Uit het een en ander volgt, dat  $\pi_2'$  rolt over  $\pi_1$  en wel zonder glijden. In dit speciale geval is dus aangetoond, dat de bewegende en de vaste polode zonder glijden over elkaar rollen.

Hoe is dit nu in het algemeen?

De snelheid waarmee het snijpunt P van de bewegende- en de vaste polode zich verplaatst langs de vaste polode wordt de poolwisselsnelheid  $\underline{u}_1$  genoemd.

De snelheid waarmee datzelfde snijpunt P zich langs de bewegende polode in het bewegende vlak verplaatst is  $\underline{u}_2$ .



In eerste instantie weten we niet beter of  $\pi_1$  en  $\pi_2$  snijden elkaar voortdurend in de momentane pool P bij beweging van  $V_2/V_1$  (of van  $V_1/V_2$ ).

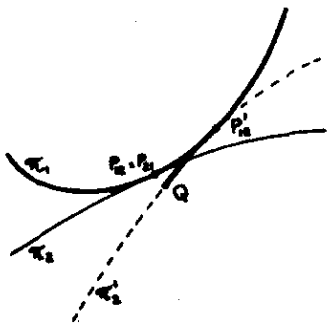
We definiëren nu de beweging van een rechte hoek x - P - y zodat het hoekpunt P steeds de pool is en de x-as steeds de raaklijn is aan  $\pi_1$ . (Dit komt dus overeen met de gebruikelijke definitie van de beweging van een rechte hoek bij gegeven kromme  $\pi_1$ ). Dan is  $V_2/V_1$   $V_3/V_1$   $V_3/V_2$

$$\frac{v_{12}^P}{v_{12}} + \frac{v_{23}^P}{v_{23}} + \frac{v_{31}^P}{v_{31}} = 0,$$

zodat

$$\underline{0} + (-\underline{u}_2) + \underline{u}_1 = \underline{0}$$

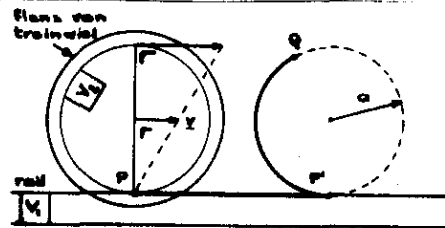
waaruit volgt, dat  $\underline{u}_2 = \underline{u}_1$ .  
 Dit betekent echter, dat de  $\pi_2$  en  $\pi_1$  in P een gemeenschappelijke raaklijn hebben. En dit is dan ook op ieder moment het geval. Terwijl bovendien de verplaatsingssnelheid van P langs  $\pi_1$  steeds dezelfde is als die van P langs  $\pi_2$ . Hieruit volgt dat  $\pi_1$  en  $\pi_2$  zonder glijding over elkaar rollen. Er treedt dus geen slip op in het contactpunt.



Dit is dus net zo als bij de elliptische beweging. Het wordt nu duidelijk, dat een willekeurige beweging van twee vlakken ten opzichte van elkaar altijd kan worden opgevat als een rolling van 2 krommen over elkaar.

Voorbeeld (treinwiel).

$\underline{v}$  = de snelheid van de wagon.  
 Ieder punt uit het bewegende vlak van het wiel beschrijft een gewone cycloïde met periode  $2\pi a$ .



Voorbeeld wieldop.

Wanneer de wieldop van een zich met constante snelheid voortbewegend autowiel, loslaat, blijft dit achter op de snelheid van het voertuig. Wanneer een autoband in haar geheel losraakt loopt de band voor de wagen uit.

De kinetische energie van de wieldop (of de autoband) vóór en na het losraken blijft gelijk, dus

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_s^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}Mv_s'^2$$

Hierbij is I het massastraagheidsmoment van de wieldop (of de autoband), M de massa,  $\omega$  de hoeksnelheid vóór het losraken en  $\omega'$  die tijdens het zelfstandig voortrollen,  $v_s$  is de snelheid van de auto,  $v_s'$  de snelheid van het midden van de wieldop (of de autoband) tijdens het zelfstandig voortrollen.

Voor het losraken is  $b$  de halve diameter van de band. Daarnaast is  $b'$  de halve diameter van de wieldop resp. die van de loogerakte band. Dus

$$v_s = \omega b \quad \text{en} \quad v_s' = \omega' b'$$

zodat

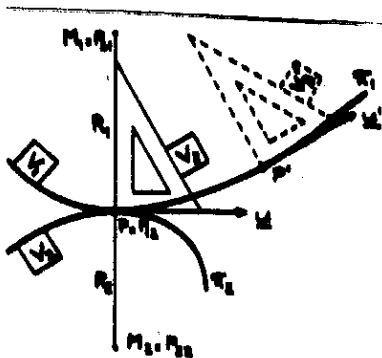
$$\left(\frac{v_s'}{b'}\right)^2 = \left(\frac{\omega b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 \cdot \frac{I + Mb^2}{I + Mb'^2} = \frac{I/b^2 + M}{I/b'^2 + M} < 1, \text{ als } b > b'$$

$$\text{en } > 1, \text{ als } b < b'.$$

Hieruit volgt, dat de wieldop achterblijft. De loogerakte band daarentegen krijgt minder gewicht te torsen, krijgt daardoor een grotere diameter en gaat daardoor voor de wagen uitlopen. (De hoeksnelheid van de wieldop wordt groter, die van de loogerakte band kleiner!)



Kromming van de polode.



Voor 2 over elkaar rollende poloden is reeds afgeleid, dat de snelheid waarmee het contactpunt P zich langs  $\pi_1$  beweegt voortdurend dezelfde is, als die waarmee dit punt zich langs  $\pi_2$  beweegt.

Evenals voorheen kan nu de beweging van een vlak  $V_3$  worden gedefiniëerd. In dit vlak is het contactpunt P een vast punt en de contact-raaklijn van  $\pi_1$  en  $\pi_2$  een vaste rechte.

Ten opzichte van  $\pi_1$  en  $\pi_2$  beweegt  $V_3$  zich als de besproken rechte hoek.

Toepassing van de stelling van de rechte hoek bij de beweging van  $V_3/V_1$  levert dan, dat de relatieve pool  $P_{31}$  komt samen te vallen met het krommingsmiddelpunt  $M_1$  van  $\pi_1$  in het punt P. Dus  $M_1 = P_{31}$ . Net zo is bij de beweging van  $V_3/V_2$  de relatieve pool  $P_{32} = M_2$ .  $M_2$  is het krommingsmiddelpunt van  $\pi_2$  in het punt P. Voor de poolwisselsnelheid  $u$  volgt dan dat:

$$\omega_{31} \cdot R_1 = u = \omega_{32} R_2.$$

Voorts is

$$\omega_{21} = \omega_{31} - \omega_{32} = \frac{u}{R_1} - \frac{u}{R_2}$$

zodat

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{\omega_{21}}{u}$$

Dus:

$$\boxed{\kappa_v - \kappa_b = \frac{\omega}{u}}$$

$\kappa_v$  = de kromming in P van de vaste polode.

$\kappa_b$  = de kromming in P van de bewegende polode.

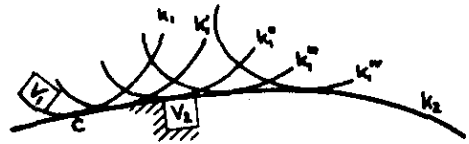
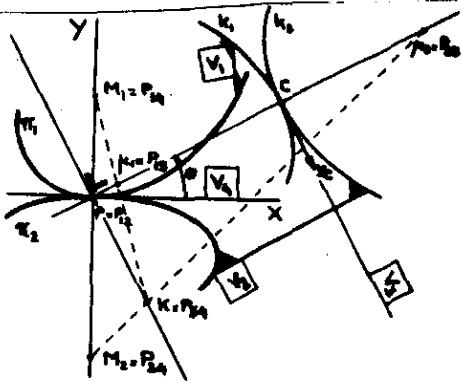
(Uit de afleiding blijkt nog, dat de vaste en de bewegende polode ten opzichte van elkaar een gelijkwaardige rol spelen:

men kan immers ook schrijven:

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{\omega_{12}}{u}, \text{ waarbij deze relatie betrekking heeft}$$

op de inverse beweging.)

Omhullenden.



Een kromme  $k_1$  in het t.o.v.  $V_2$  bewegende vlak  $V_1$  wordt bij niet "pathologische" bewegingen omhuld door een z.g. omhullende  $k_2$ . Beide krommen raken elkaar voortdurend.

(Op het beschouwde moment bijv. is dit raakpunt het punt C). De opvolgende posities van  $k_1$  n.l.  $k_1, k_1', k_1'',$  enz. hangen af van de parameter  $t$ . Het is duidelijk, dat bij de inverse beweging n.l. die van  $V_2/V_1$  de kromme  $k_1$  omhullende wordt van de dan bewegende kromme  $k_2$ . Beide krommen omhullen dus elkaar steeds.

Men kan opmerken, dat het geven van  $k_1$  en  $k_2$  op zichzelf nog niet voldoende is om de beweging van  $V_2/V_1$  (of van  $V_1/V_2$ ) vast te leggen. (Dit in tegenstelling tot de beweging van  $\pi_2$  t.o.v.  $\pi_1$ !). Immers er dient ook iets bekend te zijn over de verhouding tussen de mate van glijding en de mate van rolling van  $k_1$  over  $k_2$ . (Bij de zich over elkaar afrollende poloden was er geen glijding en was dus in feite deze verhouding ook gegeven!) Men kan bijvoorbeeld de slipsnelheid  $v_{21}^C$  in verhouding tot de hoeksnelheid  $\omega_{21}$  geven. (Dus  $v_{21}^C/\omega_{21}$ ). (Deze verhouding is nul bij beweging van  $\pi_2/\pi_1$ .)

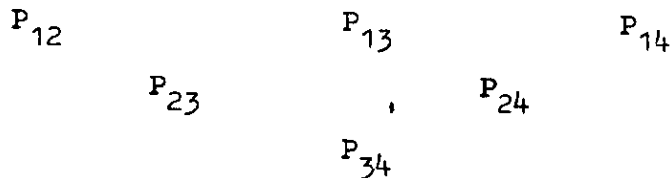
Het is duidelijk, dat bij de beweging van  $k_1/k_2$  in het algemeen de contactpuntswisselsnelheid langs  $k_1$  ongelijk is aan die langs  $k_2$ .

Immers  $v_{31}^C = v_{32}^C + v_{21}^C$ . Dus  $v_{31}^C \neq v_{32}^C$ .

Hierbij is  $V_3$  weer een vlak, dat een beweging uitvoert als die van een rechte hoek.

Is op ieder moment het verhoudingsgetal  $v_{21}^C/\omega_{21}$  gegeven, dan is de beweging van  $k_2/k_1$  volledig bepaald. Het betekent ook, dat op ieder moment de ligging van de pool  $P = P_{21} = P_{12}$  zowel in  $V_1$  als in  $V_2$  bepaald is. Dus  $\pi_1$  en  $\pi_2$  zijn bekend. In de figuur zijn zowel de krommen  $\pi_1$  en  $k_1$  als  $\pi_2$  en  $k_2$  aan elkaar gelast getekend om aan te geven, dat zij tot dezelfde bewegende vlakken horen.

Behalve de ten opzichte van elkaar bewegende vlakken  $V_1$ ,  $V_2$  en  $V_3$  wordt het vlak  $V_4$  geïntroduceerd.  $V_3$  beweegt zo, dat de gemeenschappelijke raaklijn van  $k_2$  en  $k_1$  een vaste lijn was van  $V_3$ , terwijl het raakpunt  $C$  van  $k_2$  en  $k_1$  ook steeds een vast punt was van  $V_3$ . Het vlak  $V_4$  bezit de poolraaklijn als vaste rechte in  $V_4$  en heeft  $P_{21}$  als vast punt in  $V_4$ . Beide vlakken  $V_3$  en  $V_4$  zijn bewegende rechte hoeken. Er zijn de volgende relatieve polen



Zoals bekend vormen deze een volledige vierzijde.

Voorts bestaan de krommingsmiddelpunten  $\mu_1$  van  $k_1$  in  $C$ ,  $\mu_2$  van  $k_2$  in  $C$ ,  $M_1$  van  $\pi_1$  in  $P$  en  $M_2$  van  $\pi_2$  in  $P$ .

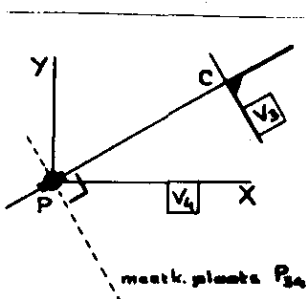
Op grond van herhaalde toepassing van de stelling van de rechte hoek is:

$$\mu_1 = P_{13}, \mu_2 = P_{23}, M_1 = P_{14} \text{ en } M_2 = P_{24}.$$

Waar ligt nu  $P_{34}$ ?

Op grond van de drie-polen stelling van Aronhold, liggen  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  en  $P_{31}$  op een rechte: consequentie: de gemeenschappelijke normaal van  $k_2$  en  $k_1$  gaat steeds door de pool  $P$  van  $V_2/V_1$ .

Daar op grond van de drie-polen stelling de 6 polen een volledige vierzijde vormen, is  $P_{34}$  het snijpunt van de poolrechten  $P_{14}P_{13}$  en  $P_{24}P_{23}$ . Bovendien kan de genoemde gemeenschappelijke normaal van  $k_2$  en  $k_1$  beschouwd worden als een vaste rechte van  $V_3$ , steeds gaande door het vaste punt  $P$  van  $V_4$ ! Voor de beweging van  $V_3/V_4$  is  $P$  dus een sleufpunt. De rechte door  $P$  loodrecht op de gemeenschappelijke normaal



$PC$  is dus een meetkundige plaats voor  $P_{34}$ , omdat het punt  $P$  van  $V_3/V_4$  een snelheid heeft in de richting van  $PC$  of  $CP$ .

$$\text{Dus } P_{34}P_{21} \perp P_{21}C!$$

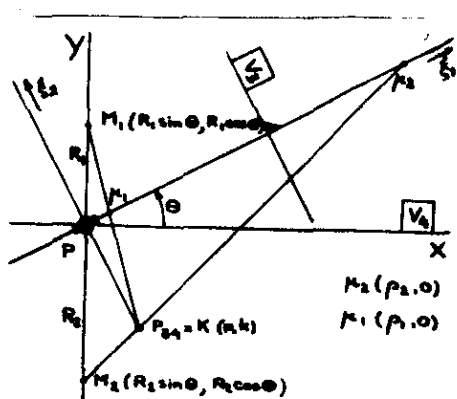
Dit geeft dus een mogelijkheid om bijv. het krommingsmiddelpunt  $\mu_1$  van de omhullende  $k_1$  van de bewegende kromme  $k_2$  in het contactpunt  $C$  te bepalen als gegeven zijn  $\mu_2$ ,  $C$ ,  $P_{12}$ ,  $M_1$  en  $M_2$ .

Daartoe wordt eerst de ligging van  $P_{34}$  op  $M_2\mu_2$

bepaald met het gegeven dat  $P_{34}P_{21} \perp P_{21}C$ . Vervolgens wordt  $\mu_1$  dan aangetroffen in het snijpunt van  $M_1P_{34}$  met  $P_{21}C$ . (Later zal worden aangetoond, dat  $\mu_1$  het kromtemiddelpunt is van het met  $k_2$  meebewegende punt  $\mu_2$ !).

Euler-Savary voor omhullenden.

Hoe kan het gevonden verband tussen de ligging van  $\mu_1$  en die van  $\mu_2$  nu in formulevorm genoteerd worden?



Het punt  $P_{34} = K$  neemt t.o.v. het bew. en het vaste vlak een analoge positie in:

$K$  is het snijpunt van  $\mu_1 M_1$  (d.i. de verbindingslijn van punten gelegen in het "vaste" vlak  $V_1$ ) en van  $\mu_2 M_2$  (d.i. de verbindingslijn van de overeenkomstige punten gelegen in het "bewegende" vlak  $V_2$ .)\*

In  $V_3$  wordt ten behoeve van het gezochte formele verband tussen de ligging der punten  $\mu_1$  en  $\mu_2$  een assenstelsel  $\{P_1, P_2\}$

aangenomen. In dit assenstelsel voldoet de rechte  $\mu_1 M_1$  aan de vergelijking

$$\frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_2}{k} = 1 \quad (\mu_1 M_1)$$

en  
analoog  $\frac{x_1}{\rho_2} + \frac{x_2}{k} = 1 \quad (\mu_2 M_2)$

Aan de 1<sup>e</sup> vergelijking voldoet  $M_1$ , zodat

$$\frac{R_1 \sin \theta}{\rho_1} + \frac{R_1 \cos \theta}{k} = 1$$

$M_2$  voldoet aan de tweede betrekking, dus

$$\frac{R_2 \sin \theta}{\rho_2} + \frac{R_2 \cos \theta}{k} = 1$$

Deelt men de laatste twee betrekkingen door de respectieve kromtestralen  $R_1$  en  $R_2$  en trekt men af, dan ontstaat de betrekking

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) \sin \theta = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{\omega_{21}}{r} = \frac{\omega}{r}$$

Dus

$$\boxed{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{\omega_{21}}{r \sin \theta}}$$

Dit is de gegeneraliseerde formule van Euler-Savary (Hoewel vermoedelijk afkomstig van Bernoulli!).

De formule geeft de relatie aan tussen de ligging der krommingsmiddelpunten  $\mu_1$  en  $\mu_2$  van een "bewegende" kromme  $k_1$  en haar "omhullende"  $k_2$  op de gemeenschappelijke normaal (d.i. de poolstraal) van beide krommen

\* Noot: de woorden vast en bewegend zijn verwisselbaar in deze zin.

op het beschouwde moment van de beweging.

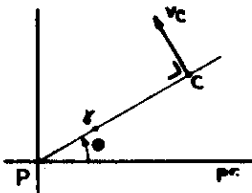
Euler-Savary voor baanpunten.

Een bijzonder geval van toepassing van de algemene formule van Euler-Savary treedt op indien bijv. de "bewegende" kromme  $k_1$  ineenschrompelt tot een punt (C).

Omdat in dit geval de beweging van de kromme  $k_1 \in V_1$  ontaard is in die van het punt C, is C een vast punt uit  $V_1$ , waarin ook  $\mu_1$  ligt. De kromme  $k_2 \in V_2$  is nog steeds de omhullende van het punt C. Dus  $k_2$  is de baan van het punt C bij beweging van  $\pi_1/\pi_2$ .

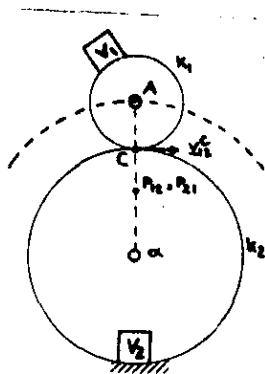
Het is duidelijk, dat in dit bijzonder geval  $\mu_1 \equiv C$  en dat voorts  $\mu_2 \equiv \gamma$ , het aan C toegevoegde kromtemiddelpunt van de, door het punt C doorlopen, baan.

In dit speciale geval leidt dus de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary tot een verband tussen baanpunt (C) en kromtemiddelpunt ( $\gamma$ ).



In het algemene geval (het geval dus waarbij  $k_1$  de omhullende is van  $k_2$  en omgekeerd) beschrijft ook het krommingsmiddelpunt  $\mu_1$  van  $k_1$ , als punt van het vlak  $V_1$ , een baan in  $V_2$ . Deze baan is te beschouwen als de omhullende van het punt  $\mu_1$ . De stelling van Euler-Savary voor dit bijzondere geval wijst dan een bijbehorend kromtemiddelpunt aan, dat, indien we dit resultaat vergelijken met de uitkomst volgens de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary, juist samen komt te vallen met het punt  $\mu_2$ , dat is het krommingsmiddelpunt van  $k_2$ .

Hieruit volgt dus, dat het krommingsmiddelpunt  $\mu_1$  van een "bewegende" kromme ( $k_1$ ) en het krommingsmiddelpunt  $\mu_2$  van haar "omhullende" ( $k_2$ ) bij elkaar behoren als baanpunt en kromtemiddelpunt. (Dit is de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary in woorden geformuleerd).



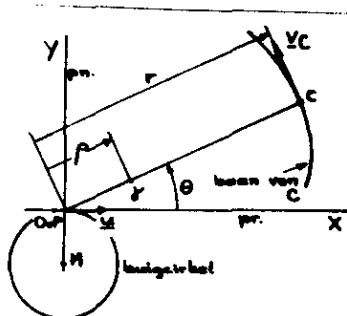
Voorbeeld van toepassing van de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary.

Een cirkel  $k_1$  rolt en glijdt over een andere cirkel  $k_2$ . Er is sprake van slip (slipsmelheid  $\underline{v}_C$  in het contactpunt C). Op grond van de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary heeft het punt A van  $V_1$  het punt  $\alpha$  van  $V_2$  tot kromtemiddelpunt. (A is hierbij het middelpunt van  $k_1$  en  $\alpha$  dat van  $k_2$ ).

Aan de hand van het bovengenoemde voorbeeld kan men opmerken, dat indien 2 over elkaar deels glijdende en deels rollende krommen momentaan worden vervangen door hun kromtecirkels, de uitspraak van kracht blijft, d.w.z., dat  $\alpha$  het kromtemiddelpunt is van de door A doorlopen baan.

### Buigcirkel.

Bepalen we ons nu weer tot het bijzondere geval van de stelling van Euler-Savary. (Dit geval is overigens de meest gebruikelijke vorm waarin de stelling van Euler-Savary wordt gehanteerd. Zo' veel voorkomend is deze vorm, dat velen voorbij gaan aan de gedachte, dat de stelling van Euler-Savary ook een gegeneraliseerde vorm bezit met bijv. toepassingen op het gebied van wals-mechanismen (met toepassing van omhullende theorie) of nut heeft voor het opsporen van een scheidingskromme (gezien als omhullende v.e.bew.kromme) als aanduiding voor de door het te ontwerpen mechanisme in te nemen plaatsruimte.)



De stelling van Euler-Savary heeft ook in dit bijzondere geval betrekking op slechts twee bewegende vlakken  $V_1$  en  $V_2$ . Indien C  $\in V_1$ , dan  $\gamma \in V_2$  bij de beweging van  $V_1/V_2$ .

Voor het punt C  $\in V_1$  geldt dus de relatie van Euler-Savary (omdat de baan van C beschouwd kan worden als de omhullende van de bewegende punt-kromme C). Zodat

$$\boxed{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{u \sin \theta}} \quad , \text{ waarbij } r = PC \text{ en } \rho = P\gamma.$$

(Algemene relatie tussen de ligging van het baanpunt C en die van het kromtemiddelpunt  $\gamma$ )

Het in deze betrekking voorkomende quotiënt  $u/\omega$  heeft de dimensie van een lengte en men kan zich afvragen wat nu precies deze lengte voorstelt. Daartoe vragen we naar de meetkundige plaats van punten in het "bewegende" vlak  $V_1$ , welke zich in de beschouwde positie in een buigpunt van hun baan bevinden. Dus we vragen naar punten uit het bewegende vlak, die op

dit moment een buigpunt in hun baan passeren. Voor zulke punten C is de kromtestraal  $\gamma_C$  oneindig groot. Daar we alleen zoeken naar punten in het eindige gebied (Dus  $C \neq C^\infty$ ), betekent dit, dat alleen  $\gamma = \gamma^\infty$ . Hieruit volgt, dat voor zulke (buig)punten C geldt, dat  $P\gamma = \rho \rightarrow \infty$ , zodat  $1/\rho = 0$ .

Substitutie van deze uitkomst in de bijzondere vorm van Euler-Savary geeft:

$$r = -\frac{u}{\omega} \sin\theta$$

Het buigpunt C heeft de poolcoördinaten r en  $\theta$  en tussen deze coördinaten bestaat de bovenstaande relatie.

Overgang op gewone cartesische coördinaten (met assenstelsel X - O - Y) geeft met  $\omega r^2 + u \sin\theta = 0$  de relatie  $\omega(X^2 + Y^2) + uY = 0$  of

$$X^2 + Y^2 + \frac{u}{\omega}Y = 0 \quad (\text{bc.})$$

En dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt  $M(0, -\frac{u}{2\omega})$  op de Y-as, de z.g. poolnormaal. Deze cirkel welke (kortweg) buigcirkel wordt genoemd, raakt dus de poolraaklijn in de pool P. Het is duidelijk, dat het quotiënt  $|\frac{u}{\omega}| =$  de diameter van de buigcirkel.

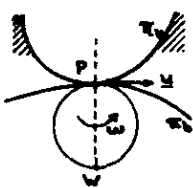
Het diametraal tegenover de pool P gelegen punt wordt de buigpool W genoemd en heeft de coördinaten  $W(0, \frac{u}{\omega})$ .

De ligging van de buigpool W op de poolnormaal hangt af van het teken en de grootte van het quotiënt  $u/\omega$ .

Is  $\omega$  negatief (en u positief) dan ligt W op de positieve Y-as.

Is  $\omega$  positief (d.i. dus linksom draaiend) en u positief, dan komt W op de negatieve halfrechte van de Y-as.

In de voorgaande figuur is het quotiënt  $\frac{u}{\omega}$  dus duidelijk positief ondersteld.

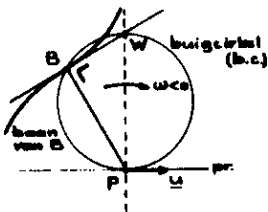


In nevenstaande figuur zijn  $\omega$  en u positief, zodat de buigcirkel in het onderhalfvlak komt.

De buigcirkel blijft steeds in P aan de poolraaklijn en dus aan de vaste polode raken; maar verandert van moment tot moment van grootte.

De buigcirkeldiameter is alleen afhankelijk van de geometrische configuratie en niet van de snelheid waarmee de beweging plaatsvindt.

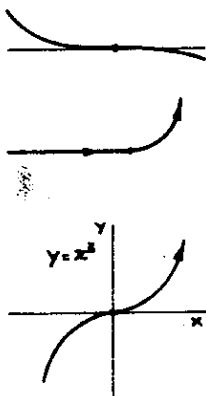
Het is een uitsluitend van de geometrie afhankelijke grootte.  
(Verhogen we de grootte van de poolwisselsnelheid bijv., dan heeft dit ook konsekwenties voor de hoeksnelheid  $\omega$  van het bewegende vlak). Het een en ander wordt duidelijk als we terugdenken aan de eigenschappen der punten van de buigcirkel: het zijn buigpunten en bij vergroting of verkleining van de snelheid kan de ligging van deze punten niet veranderen.



Het punt B, dat een buigpunt is, heeft alleen een versnelling gericht langs de snelheidsvector van dat punt: De normale versnellingscomponent ter grootte van  $v_B^2/R_B$  wordt 0, omdat de kromtestraal  $R_B$  van B oneindig is. Er is dus alleen een tangentiëel aan de baan van B gerichte versnellingscomponent. (We kunnen ook zeggen, dat voor de baan van B de normale versnellingscomponent de waarde nul doorloopt in het buigpunt). De buigcirkel is dus ook de meetkundige

plaats van alle punten, waarvan de snelheid en versnelling dezelfde werkelijk bezitten op het beschouwde moment.

Opm.: Zolang de kromming van de baan van B geen discontinuïteiten doorloopt zijn er ook geen sprongen in de versnellingen. In een buigpunt verandert de kromtestraal wél van richting (en doorloopt de waarde  $\infty$ ) maar doorloopt daar (in het algemeen) geen discontinuïteit.

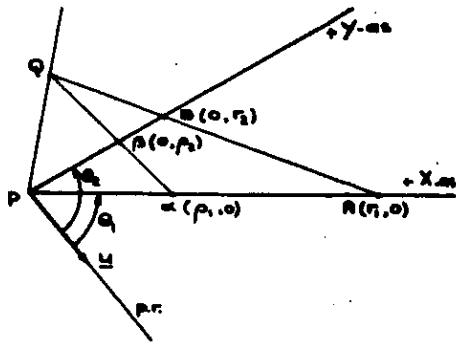


Een voorbeeld waarbij wél een discontinuïteit in de kromming van de baan optreedt, heeft men bij de aansluiting van bijvoorbeeld een cirkel aan een rechte lijn. In het aansluitpunt treedt een versnellings-sprong op. (Dit heeft te maken met de sprong in de waarde voor  $v^2/R$ .)

Een voorbeeld waarbij dit niet gebeurt is de baankromme voorgesteld door de vgl.  $Y = X^3$ .



Stelling van Bobillier.



Voor 2 punten A en B van het bewegende vlak wordt nu een meetkundige constructie afgeleid uit de formule van Euler-Savary. Daartoe wordt op analytisch-meetkundige wijze een scheefhoekig coördinatenstelsel X - P - Y ingevoerd. Daarbij zijn de coördinaten van de punten A( $r_1, 0$ ), B( $0, r_2$ ) en die van de resp. daaraan toegevoegde kromtemiddelpunten  $\alpha(\rho_1, 0)$  en  $\beta(0, \rho_2)$ . In dit scheefhoekige assenstelsel is de vergelijking van de rechte AB:

$$\frac{x}{r_1} + \frac{y}{r_2} = 1 \quad (AB)$$

en die van de rechte op  $\alpha\beta$

$$\frac{x}{\rho_1} + \frac{y}{\rho_2} = 1 \quad (\alpha\beta)$$

De vergelijking van PQ wordt

$$x\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\rho_1}\right) + y\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 0 \quad (PQ)$$

omdat zowel het punt P(0,0) als het snijpunt Q van  $(\alpha\beta)$  met (AB) voldoet. Met gebruikmaking van de betrekking voor Euler-Savary kan de vergelijking van de rechte PQ gebracht worden in de vorm

$$\frac{-\omega x}{u \sin \theta_1} - \frac{\omega y}{u \sin \theta_2} = 0 \quad (PQ)$$

of

$$\boxed{x \sin \theta_2 + y \sin \theta_1 = 0} \quad (PQ)$$

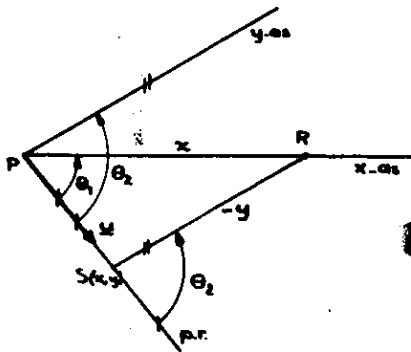
Wat is nu de vergelijking van de poolraaklijn pr, waarlangs u valt?

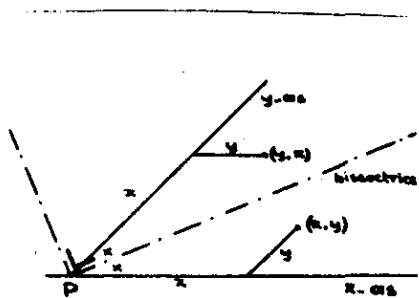
Daartoe wordt in  $\triangle PRS$  de sinusregel toegepast ( $SR // y\text{-as}$ ,  $S(x,y)$ )

$$\frac{x}{\sin \theta_2} = \frac{-y}{\sin \theta_1}$$

Voor ieder punt S van pr geldt dus de betrekking

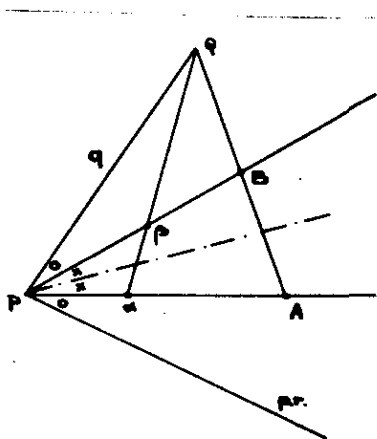
$$\boxed{x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2 = 0} \quad (PS)$$





De rechten PS en PQ ontstaan dus uit elkaar door verwisseling van x met y! De punten  $(x,y)$  en  $(y,x)$ , door verwisseling der coördinaten uit elkaar ontstaan, zijn, zoals uit nevenstaande figuur duidelijk blijkt, elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de binnen- of buitenbissectrice van de  $\angle xPy$ .

De poolraaklijn en de "collinatieas" PQ liggen dus gespiegeld ten opzichte van de bissectrice van de hoek der coördinaatassen.



Conclusie:

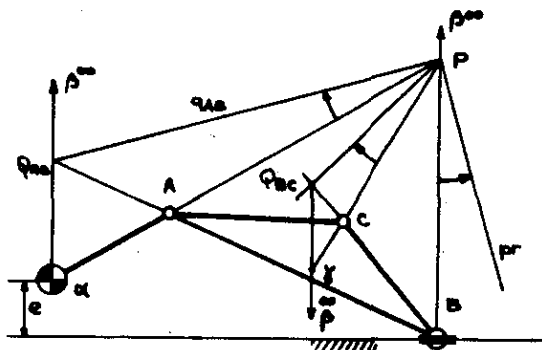
Het "collinatiepunt" Q ligt op de spiegelbeeldlijn van pr t.o.v. de bissectrice in de hoek APB (of  $\alpha P\beta$ ).

Constructie-voorbeeld.

Zijn P,  $\alpha$ , A, pr en B gegeven dan is daaruit  $\beta$  te construeren.

Men noemt zulk een constructie de constructie van Bobillier\*

Voorbeeld



Gevraagd wordt van het punt C uit het bewegende vlak van de drijfstaag AB van een excentrisch krukdrijfstaagmechanisme ( $\alpha AB$ ) het kromtemiddelpunt  $\gamma$  te bepalen.

Op grond van de constructie van Bobillier wordt de poolraaklijn pr (of p) bepaald met de gegevens  $\alpha$ , A, B,  $\beta^\infty \rightarrow Q_{AB}$ ,  $P \rightarrow q_{AB}$ , p.

Vervolgens wordt de constructie van Bobillier ten tweede male toegepast op de punten B en C:

$P, pr, B, \beta^\infty, C \rightarrow q_{BC}, Q_{BC}$  en  $\gamma$ .

\* Noot: E. Bobillier: "Cours de geometrie". 1870.

Opm.1: Men heeft hier 3x hetzelfde hoekje in de figuur. De constructie kan dus in dit geval worden bekort door de poolraaklijn in de figuur weg te laten.

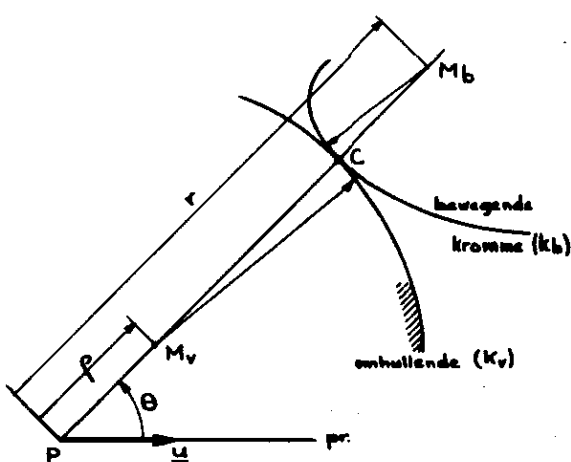
Deze bekorting was niet opgetreden indien men had gewerkt met de collineatiepunten  $Q_{AB}$  en  $Q_{AC}$  in plaats van met  $Q_{AB}$  en  $Q_{BC}$ .

Opm.2: Het is een zuiver meetkundige aangelegenheid geworden: (hoek-)snelheden komen er niet meer aan te pas. Dit is in overeenstemming met de vraagstelling welke ook van meetkundige aard was. Het ging alleen om de meetkundige toestand op een bepaald ogenblik.

Keercirkel.

Keren we nu weer terug tot de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{u \sin \theta}$$

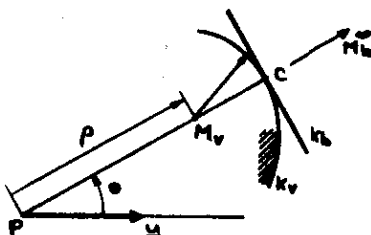


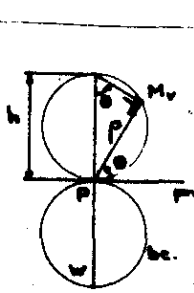
In het vaste vlak bevindt zich een omhullende ( $k_v$ ) van een t.o.v. dat vlak bewegende kromme ( $k_b$ ). We laten nu de bewegende kromme ontaarden in een rechte lijn. Dit wordt dan een bijzonder geval van de gegeneraliseerde stelling van Euler-Savary. Voor het krommingsmiddelpunt  $M_b$  van de bewegende kromme geldt dan, dat  $M_b = M_b^{\infty}$ , zodat  $\frac{1}{PM_b} = 0$ .

Dus  $\frac{1}{PM_v} = \frac{\omega}{u \sin \theta}$  of  $\rho = \frac{u}{\omega} \sin \theta$

Dit geeft dus het verband in poolcoördinaten  $(\rho, \theta)$  voor alle punten  $M_v$ ,

die krommingsmiddelpunten zijn van omhullenden van bewegende rechten. Iedere rechte in het bewegende vlak heeft een omhullende waarvan het krommingsmiddelpunt op het beschouwde ogenblik op de meetkundige plaats  $\rho = \rho(\theta)$  ligt.





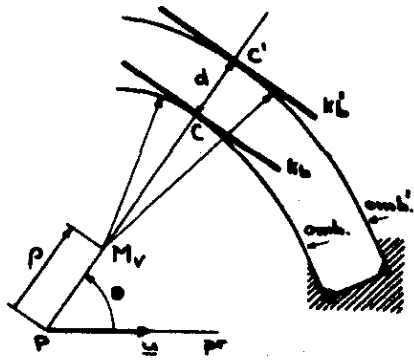
Deze meetkundige plaats  $\rho = h \sin \theta$  } is een  
 $h = u/\omega$  }

cirkel, welke pr in P raakt en waarvan de diameter de waarde  $u/\omega$  heeft. \*)

Deze cirkel wordt de keercirkel genoemd. Zij is het spiegelbeeld van de buigcirkel ten aanzien van de poolraaklijn. (De diameter van de buigcirkel was  $-u/\omega$ ). In cartesische coördinaten volgt de vergelijking van de keercirkel uit:

$$\rho^2 = \frac{u}{\omega} \cdot \rho \sin \theta \quad \text{als} \quad x^2 + y^2 - \frac{u}{\omega} y = 0.$$

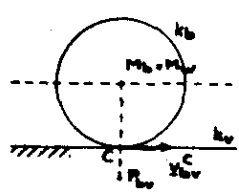
De keercirkel is dus de meetkundige plaats van de kromtemiddelpunten van omhullenden van rechte lijnen.



Twee evenwijdige rechten  $k_b$  en  $k_b'$  hebben ieder een omhullende in het vaste vlak, die op ieder moment hetzelfde krommingsmiddelpunt  $M_v$  bezitten, omdat de waarde  $\rho$  dezelfde is. De omhullenden zijn dus elkaars aequidistanten. Het zijn parallelkrommen. (Niet congruent maar wel aequidistant).

Opm.: Laat men in plaats van de bewegende kromme, de omhullende ontaarden in een rechte lijn, dan wordt de meetkundige plaats van de punten  $M_b$  de buigcirkel.

De buigcirkel is dus de meetkundige plaats van krommingsmiddelpunten van alle bewegende krommen, waarvan de omhullenden rechte lijnen zijn (of nog algemener, waarvan de omhullenden een buigpunt bezitten in het contactpunt van het beschouwde moment).



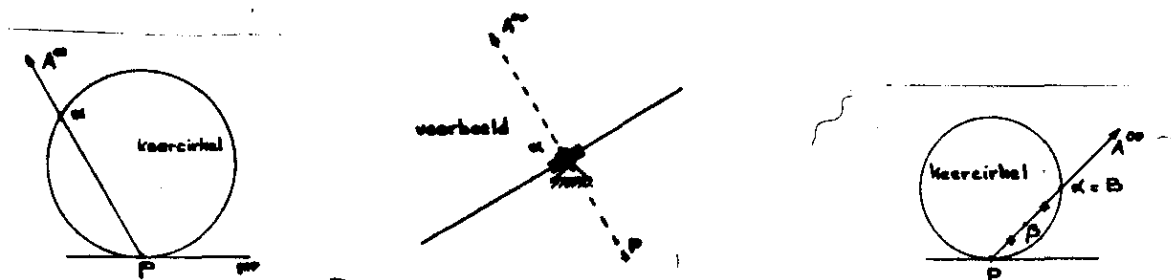
Een voorbeeld is het rollen, al of niet met glijding, van een cirkel over een rechte lijn:

Het middelpunt van de cirkel is een punt van de buigcirkel van het bewegende vlak.

\*) Noot: Voor ieder oppervlakteelementje van het bewegende vlak is de waarde  $u/\omega$  dezelfde:  $u/\omega$  is zoiets als een toestandsgröotheid.

Bij omkering van de beweging d.w.z. bij verwisseling van  $k_v$  en  $k_b$  gaat de buigcirkel over in de keercirkel en omgekeerd.

Bij deze inversie wordt echter een buigpunt géén keerpunt. Immers een buigpunt heeft een oneindig ver weg gelegen kromtemiddelpunt. Bij inversie wordt het baanpunt kromtemiddelpunt en het kromtemiddelpunt baanpunt. Zodat de keercirkel de meetkundige plaats wordt van de krommingsmiddelpunten van oneindig ver weg gelegen baanpunten.



Een buigpunt gaat bij de inverse beweging over in een punt van de keercirkel. Wat is nu de kromming van de baan van zo'n punt B op de keercirkel?

Een berekening volgens Euler-Savary, leidt tot:

$$\frac{1}{P\beta} - \frac{1}{PB} = \frac{\omega}{u \sin \theta} = \frac{1}{P\alpha} - \frac{1}{PA^\infty} = \frac{1}{P\alpha} = \frac{1}{PB}$$

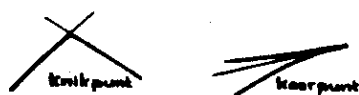
zodat:  $\frac{2}{PB} = \frac{1}{P\beta}$  of  $\boxed{P\beta = \frac{1}{2}PB}$  (1)

De baanpunten, gelegen op de keercirkel, bezitten een kromtemiddelpunt dat midden tussen de pool en dat baanpunt in ligt.

Bij inversie van de beweging gaan de buigpunten over in punten met een zekere kromtestraal ( $\beta B$ ), welke in het algemeen  $\neq 0$  is.

Keerpunten zijn punten waar de straal van de kromtecirkel nul is (zonder sprong in de afgeleide; anders wordt het een knikpunt).

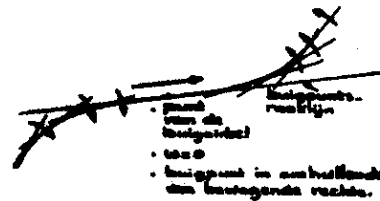
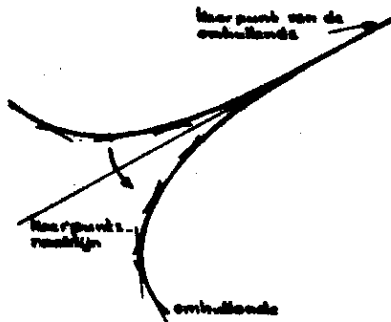
Het is nu duidelijk, dat in het algemeen buigpunten bij de inversie van de beweging geen keerpunten worden. Wel is de keercirkel de buigcirkel van de inverse beweging! Wat is dan wel de meetkundige plaats van de keerpunten? Dat is alléén de pool P.



Immers wanneer B met P samenvalt, valt ook  $\beta$  met P samen (zie (1)). De pool is op het beschouwde moment het enige punt v.h. bewegende vlak, dat een keerpunt in zijn baan doorloopt. Waar komt dan de naam keercirkel vandaan?

Antwoord: De keercirkel is de meetkundige plaats van keerpunten van omhullenden van bewegende rechten. Immers, wij weten reeds, dat de keercirkel de meetkundige plaats is van de krommingsmiddelpunten van omhullenden van bewegende rechten. Wanneer zulk een omhullende nu een keerpunt heeft dan vallen krommingsmiddelpunt en keerpunt samen.

De draaizin van de bewegende rechte blijft even voor en na de positie waarin de rechte keerpuntsraaklijn is, dezelfde.

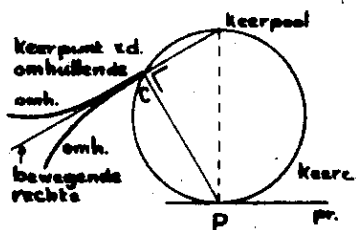


In het geval een bewegende rechte (als bijzonder geval van een bewegende kromme) voortdurend aan een omhullende met buigpuntsraaklijn blijft raken, dan verandert de draaizin voor en na de positie overeenkomende met die van de buigpuntsraaklijn. (Een buigpunt in de omhullende van een bewegende kromme ligt op de buigcirkel).

In een buigpunt is de kromming nul en de kromtestraal  $\infty$  groot.

In een keerpunt is de kromming juist  $\infty$  groot en de kromtestraal nul.

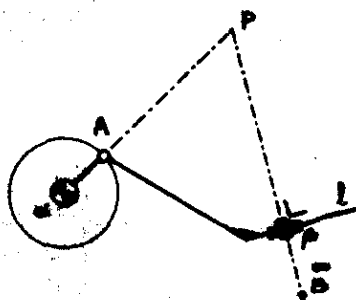
Het diametraal tegenover de pool gelegen punt van de keercirkel wordt keerpool genoemd. Het is het punt waar op dit moment alle keerpuntsraaklijnen van omhullenden doorheen gaan.



Immers in het keerpunt C van de omhullende van de bewegende rechte, heeft het punt C van die bewegende rechte een snelheid gericht loodrecht op de poolstraal PC en dus gericht van (of naar) de keerpool af (of toe).

Iedere rechte door de keerpool heeft dus een omhullende met een keerpunt, dat op de keercirkel ligt. Dit keerpunt wordt gevonden in het voetpunt van de loodlijn van uit de pool op deze bewegende rechte neergelaten. De rechte zelf is dan keerpuntsraaklijn van de omhullende.

1<sup>e</sup> Voorbeeld.

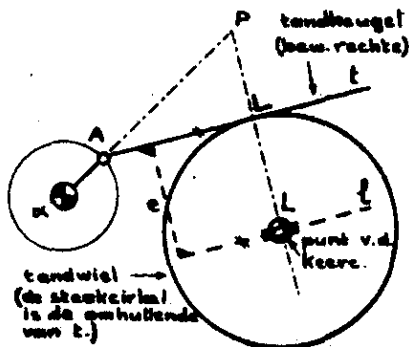


Excentrisch kruksleufmechanisme.

Het voetpunt  $\beta$  is keerpunt van de omhullende van de bewegende rechte l.

De omhullende is in dit geval de nulcirkel ter plaatse  $\beta$ .

2<sup>e</sup> Voorbeeld.



Het mechanisme bestaat uit kruk ( $\alpha A$ ), tandheugel (t) en tandwiel.

Het middelpunt L van het tandwiel is het krommingsmiddelpunt van de omhullende van een bewegende rechte t en is dus een punt van de keercirkel.

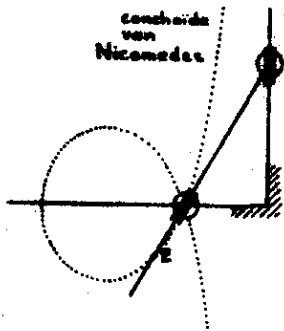
Voor wat de beweging van de tandheugel (en ook die van de kruk)

betreft kan dit mechanisme permanent vervangen worden door een mechanisme van het type van het 1<sup>e</sup> voorbeeld;

door een excentrisch kruksleufmechanisme dus. Immers, de rechte l, op vaste afstand e van t, liggend in het bewegende vlak, blijft in iedere stand door het middelpunt L van het tandwiel gaan. Deze rechte l gaat op ieder moment door de keerpool. Het voetpunt L van de loodlijn uit P op de bewegende rechte l neergelaten is dus steeds hetzelfde punt L en een keerpunt als zodanig. De omhullende van l is dus de nulcirkel ter plaatse L. Zo beschouwd is het kinematisch schema van het mechanisme identiek aan dat van het 1<sup>e</sup> voorbeeld.

(Bedenk zelf een vervangingsmechanisme met een kleiner tandwiel).

Opgaven: Bedenk zelf permanent vervangende mechanismen voor de elliptische beweging en voor mechanismen van het type, zoals



getekend in nevenstaande figuur. M.a.w. probeer dus de door het punt E voortgebrachte kromme (d.i. de concloïde van Nicomedes) op meervoudige wijze voort te brengen.

Opgave: Noteer alle gevonden definities voor de keercirkel en ga na of U ze uit elkaar kunt afleiden!

Opgave: Construeer de omhullende van de koppelstang van een stangenvierzijde en bedenk een constructie voor de kromming van deze omhullende in een willekeurige positie. Controleer het resultaat!

Stelling van Hartmann.

Keren we nu weer terug tot het gebruik van de stelling van Euler-Savary voor baanpunt en bijbehorend kromtemiddelpunt. Een constructief meetkundig verband is gevonden door Bobillier<sup>\*</sup>). Een meer op de snelheden betrekking

hebbend verband wordt als volgt gevonden:

$$\overline{\alpha A} = \text{kromtestraal} = r - \rho$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{u \sin \theta}$$

$$\frac{r - \rho}{r\rho} = \frac{\omega}{u \sin \theta} \quad \text{of} \quad \frac{\overline{\alpha A}}{\rho} = \frac{\omega r}{u \sin \theta}$$

$$\frac{\alpha A}{Pa} = \frac{\overline{AA_v}}{u \sin \theta} = \frac{AA_v}{PS}$$

Voor de driehoeken  $\alpha AA_v$  en  $\alpha PS$  geldt ook, dat  $\angle P = \angle A = \pi/2$ , zodat  $\Delta \alpha AA_v \sim \Delta \alpha PS$ .

Uit het een en ander volgt, dat

S,  $\alpha$  en  $A_v$  op één rechte liggen.

In woorden:

Het uiteinde van de snelheidsvector van een baanpunt, het bijbehorende kromtemiddelpunt en het uiteinde van de component van de poolwissel-snelheid in een richting gelijk aan die van de snelheidsvector, liggen op één rechte lijn.

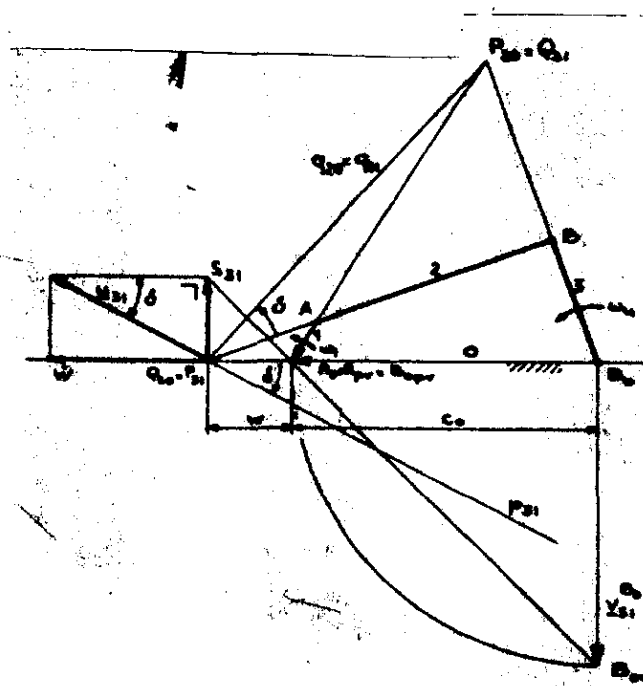
Dit is de stelling van Hartmann.

<sup>\*</sup>) Noot: De genoemde constructie is ook van toepassing op krommingsmiddelpunten van bewegende krommen en bijbehorende omhullenden.



Stelling van Freudenstein.

De hoekversnelling van de uitgaande as bij een stangenvierzijde.



De overbrengingsverhouding  $I$  voor de hoeksnelheden wordt gedefiniëerd als  $I = \omega_u / \omega_i$ .

$i$  = ingangsschakel

$u$  = uitgangsschakel

Reeds is afgeleid, dat

$$I = \frac{\omega_u}{\omega_i} = \frac{w}{w + c_0}$$

Hoe groot is nu  $\dot{I}$ ?

$$\dot{I} = \frac{\dot{w}(w + c_0) - w\dot{w}}{(w + c_0)^2} = \frac{c_0 \dot{w}}{(w + c_0)^2}$$

Omdat  $\frac{c_0}{w + c_0} = 1 - I$  wordt

$$\dot{I} = (1 - I) \frac{\dot{w}}{w + c_0}$$

Hoe groot is nu  $\dot{w} = \frac{d}{dt} \overline{A_0 Q_{20}}$ ?

De relatieve polen  $P_{20}$  en  $P_{31} (= Q_{20})$  spelen een analoge rol in de vierzijde. Bij de beweging van  $V_3/V_1$  wordt  $Q_{20}$  de relatieve pool  $P_{31}$ . Bij de beweging van  $V_3/V_1$  beweegt het gestel  $V_0 (= A_0 B_0)$  met de hoeksnelheid  $-\omega_i$  rond  $A_0$ .

$$\text{Dus } \underline{v}_{31}^B = -(\omega_i \times \overrightarrow{A_0 B_0}).$$

Pas nu Bobillier toe op de punten  $B$  en  $B_0$  bij de beweging van  $V_3/V_1$ . Het collineatiepunt  $Q_{BB_0}$  valt dan samen met  $P_{20}$ . De collineatieas  $q_{31}$  wordt de verbindingslijn van dit coll.punt  $Q_{31}$  met de pool  $P_{31}$  van  $V_3/V_1$ . De poolraaklijn  $p_{31}$  door  $P_{31}$  is dan het spiegelbeeld van  $q_{31}$  t.o.v. de hoek  $BP_{31}B_0$ . Zo verkrijgt men de rechte  $p_{31}$ . Dit is tevens de rechte waarlangs de poolwisselsnelheid  $\underline{u}_{31}$  van  $P_{31}$  komt te vallen. Op grond van de stelling van Hartmann voor het punt  $B_0$  bij  $V_3/V_1$  kan nu het punt  $S_{31}$  worden gevonden:  $S_{31}$ ,  $A_0$  en  $B_{0v}$  liggen op één rechte. Het punt  $S_{31}$  is het uiteinde van de component van de poolwisselsnelheid in een richting evenwijdig aan  $\underline{v}_{31}^B$ . De richting  $p_{31}$  van de poolwisselsnelheid  $\underline{u}_{31}$  zelf is ook reeds bekend. Daarmee vindt men ook de grootte van  $\underline{u}_{31}$ . (Zie de figuur). De component van  $\underline{u}_{31}$  langs  $B_0 A_0$  is  $\dot{w}$  (Omdat  $P_{31}$  steeds snijpunt is van  $AB$  met  $A_0 B_0$ ).

Dus  $\dot{w} = \overline{Q_{20} S_{31}} \cdot \cotan \delta$ .

Voorts blijkt uit de figuur, dat  $\triangle Q_{20} A S_{31} \sim \triangle B_0 A B_{0v}$ , zodat

$$\frac{Q_{20} S_{31}}{\omega_i c_0} = \frac{w}{c_0} \quad Q_{20} S_{31} = w \omega_i$$

Substitutie geeft:

$$\dot{w} = \omega_i \cdot w \cdot \cotan \delta$$

en

$$\dot{i} = (1 - I) \omega_i \frac{w \cotan \delta}{(w + c_0)}$$

Dus:

$$\dot{i} = I(1 - I) \omega_i \cotan \delta$$

zodat

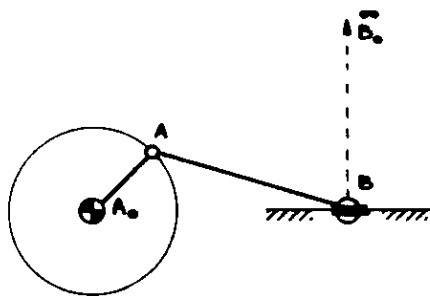
$$\frac{\omega_i \dot{\omega}_u - \omega_u \dot{\omega}_i}{\omega_i^2} = \frac{d}{dt} \frac{\omega_u}{\omega_i} = \dot{i} = I(1 - I) \omega_i \cotan \delta$$

En dus na deling door  $\omega_i$

$$\frac{\dot{\omega}_u}{\omega_i} = I(1 - I) \cotan \delta + I \frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i}$$

Dit is de formule van Freudenstein voor de stangenvierzijde.

In het geval  $\omega_i = \text{constant}$  treedt een extremum voor  $\omega_u$  op indien  $\dot{\omega}_u = 0$ , hetgeen het geval is, indien  $\cotan \delta = 0$ , dus als  $\delta = \pi/2$ . (Men zegt dan dat in zulk een positie  $\omega_u$  stationnair is). Indien de collineatieas PQ van de stangenvierzijde loodrecht staat op de koppelstang AB doorloopt de hoeksnelheid van de uitgangsschakel  $B B_0$  een extremum, mits ook de ingangshoeksnelheid constant is.



Voorbeeld:

Krukdrijfstangmechanisme ( $A_0 A B B_0^{0g}$ )

d.i. een bijzondere stangenvierzijde (omdat  $B_0 = B_0^{0g}$ ).

Daar het in dit geval weinig zin heeft om te spreken van een overbrengingsverhouding voor de hoeksnelheden, omdat  $\omega_u = 0$ , ligt het voor de hand in dit geval de overbrengingsverhouding J voor de snelheden te introduceren. Dus

$$J = v_B / v_A$$

Bij de stangenvierzijde was  $J = v_B/v_A = \frac{\omega_u BB_o}{\omega_i AA_o} = I \frac{BB_o}{AA_o}$ .

$$\text{Dus } \dot{J} = \frac{BB_o}{AA_o} \cdot \dot{I} = \frac{BB_o}{AA_o} \cdot I(1 - I)\omega_i \cotan \delta =$$

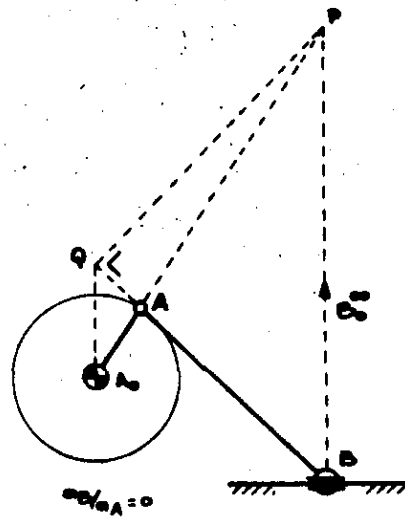
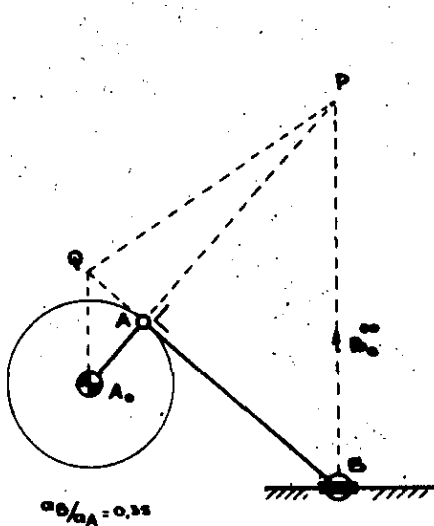
$$\dot{J} = \frac{v_B}{AA_o} (1 - I) \cotan \delta = \frac{v_B}{v_A} (\omega_i - \omega_u) \cotan \delta$$

$$\dot{J} = J \left( \frac{v_A}{AA_o} - \frac{v_B}{BB_o} \right) \cotan \delta$$

Bij overgang op het krukdrijfstangmechanisme is  $\frac{1}{BB_o} = 0$ , zodat

$$\dot{J} = J \frac{v_A}{AA_o} \cotan \delta$$

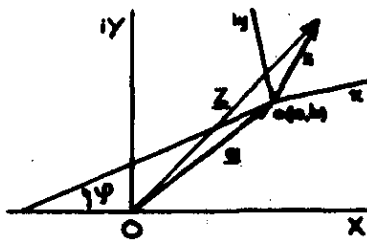
Dus ook in dit geval treedt een extremum op in  $v_B$  (mits ook  $v_A = \text{constant}$ ) indien de collinatie-as  $PQ \perp$  drijfstang  $AB$  (omdat dan  $\delta = \pi/2$ ).



Een goede eerste benadering wordt gevonden in de positie, waarbij de kruk  $A_o A \perp AB!$ . De versnelling  $a_B$  van het "kruishoofd" B wordt echter pas exact 0, indien  $PQ \perp AB$ .

### Versnellingsdistributie

Voor een vast punt in het bewegende vlak  $x - o - y$  bestaan de volgende relaties tussen de coördinaten  $(x,y)$  van dat punt in het bewegende vlak en in die  $(X,Y)$  van het vaste vlak  $X - O - Y$ .



$$\begin{cases} X = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{cases}$$

of in verkorte schrijfwijze  $\equiv$ )

$$Z = z e^{i\varphi} + \underline{a}$$

(1)

$\equiv$ ) Noot: Uit (1) blijkt, dat  $\underline{Z} \neq \underline{z} + \underline{a}$ , omdat  $\underline{z}$ , anders dan  $\underline{Z}$  en  $\underline{a}$ , een vector in het bewegende stelsel is, welke in het referentiestelsel een andere waarde heeft.

waarin

$$Z = X + iY, z = x + iy, \underline{a} = a + ib \text{ en } i^2 = -1.$$

Fluxionering van (1) leidt tot:

$$\dot{Z} = i\phi \cdot z e^{i\phi} + \dot{\underline{a}}$$

(zolang er geen sprake is van relatieve beweging is z constant).

Met gebruikmaking van (1) wordt dit:

$$\dot{Z} = i\phi(Z - \underline{a}) + \dot{\underline{a}}$$

Nogmaals fluxioneren geeft

$$\ddot{Z} = i\ddot{\phi}(Z - \underline{a}) + i\phi(\dot{Z} - \dot{\underline{a}}) + \ddot{\underline{a}} = (i\ddot{\phi} - \phi^2)(Z - \underline{a}) + \ddot{\underline{a}} \quad (2)$$

Hierin is  $\phi = \omega$ , de hoeksnelheid en

$\ddot{\phi} = \epsilon$ , de hoekversnelling van het bewegende vlak x - o - y.

Voor het punt J van het bewegende vlak, dat de versnelling  $\underline{0}$  heeft, geldt, dat

$$\underline{0} = \ddot{Z} = \ddot{X} + i\ddot{Y} \quad (\text{dus } \ddot{X} = \ddot{Y} = 0).$$

Voor zulk een punt J geldt dus, dat

$$0 = (i\ddot{\phi} - \phi^2)(Z_J - \underline{a}) + \ddot{\underline{a}} \quad (3)$$

zodat

$$Z_J = \underline{a} + \frac{\ddot{\underline{a}}}{\phi^2 - i\ddot{\phi}} \quad \text{mits } \phi^2 - i\ddot{\phi} \neq 0$$

Met andere woorden er is in het algemeen steeds één punt J in het bewegende vlak te vinden, dat de versnelling  $\underline{0}$  heeft.

Opm. In het bijzondere geval, dat (of in de bijzondere positie waarbij)  $\phi^2 - i\ddot{\phi} = 0$  (dus  $\phi = \ddot{\phi} = 0$ ) wordt  $Z_J^{-1} = \underline{0}$  en dus  $\underline{J} = \underline{J}^{\infty}$ . In dit geval is zowel de hoeksnelheid als de hoekversnelling gelijk aan nul en spreken we van een instantane translatiepositie van de 2<sup>o</sup> orde. Ieder punt van het bewegende vlak heeft dan dezelfde snelheid  $\dot{\underline{a}}$  en ook dezelfde versnelling  $\ddot{\underline{a}}$ . (Indien ook nog de waarde  $\ddot{\underline{a}} = \underline{0}$ , zijn er  $\infty$  veel versnellingspolen J.)

Indien  $\omega$  en  $\epsilon$  gelijktijdig nul worden is er steeds zo'n punt J te vinden. Dit punt wordt de versnellingspool genoemd. (Op ieder moment is dit steeds weer een ander punt van het bewegende vlak.)

Op grond van de betrekkingen (2) en (3) geldt voor een willekeurig punt van het bewegende vlak, dat

$$\ddot{Z} = (i\ddot{\phi} - \phi^2)(Z - Z_J) \quad (4)$$

Hieruit volgt voor de grootte van de versnelling  $\ddot{Z}$  van dat punt: <sup>(\*)</sup>

(\*) Noot: een streep boven een complex getal stelt de complex geconjugeerde van dat getal voor.

$$\sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2} = \sqrt{\ddot{Z}^2} = \sqrt{\phi^4 + \ddot{\phi}^2} (Z - Z_J)(Z - Z_J) = \sqrt{\phi^4 + \ddot{\phi}^2} |Z - Z_J|$$

De versnelling van een willekeurig punt is dus recht evenredig met de afstand van dat punt tot de betrokken versnellingspool. De evenredigheidsconstante  $(\omega^4 + \epsilon^2)^{1/2}$  heeft voor ieder punt van het bewegende vlak dezelfde waarde.

Uit (4) volgt tevens, dat de hoek welke de versnellingsvector  $\ddot{Z}$  met de versnellingsas  $(Z - Z_J)$  maakt gelijk is aan het

$$\arg(i\ddot{\phi} - \phi^2) > \pi/2$$

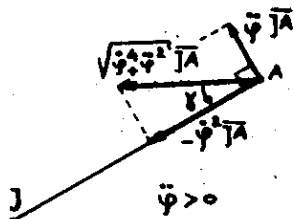
zodat de versnelling steeds een component heeft in de richting van de versnellingspool J.

Per definitie noemt men de versnellingshoek  $\gamma$ , de hoek tussen de versnellingsvector  $\ddot{Z}$  en  $(Z_J - Z)$ , d.i. de versnellingsas gericht van baanpunt tot versnellingspool J. Zodat

$$\gamma = \pi - \arg(i\ddot{\phi} - \phi^2)$$

en dus

$$\tan \gamma = +\ddot{\phi}/\phi^2$$

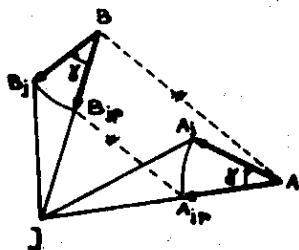


Van J naar A kijkend zien we steeds een scherpe hoek  $\gamma$ . Indien  $\ddot{\phi} > 0$ , dan is de versnellingscomponent ter grootte van  $\ddot{\phi}JA$  links om J draaiend gericht. In het andere geval rechts om J draaiend. Het wordt nu duidelijk, dat formule (4) de versnellingsverdeling over het bewegende vlak op ieder ogenblik bepaalt.

Voor 2 punten A en B zijn de respectieve versnellingen

$$\overrightarrow{AA}_J \text{ en } \overrightarrow{BB}_J$$

$$\text{Daar } \frac{AA_J}{JA} = \frac{BB_J}{JB} = \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}$$



$$\text{en } \sphericalangle JAA_J = \sphericalangle JBB_J = \gamma = \arctan \frac{\ddot{\phi}}{\phi^2}$$

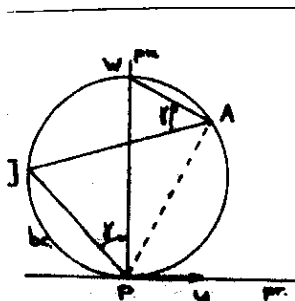
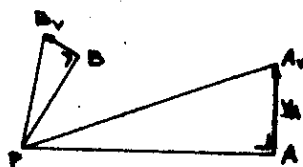
$$\text{is } \boxed{\triangle JAA_J \sim \triangle JBB_J}$$

Hiervan kan gebruik worden gemaakt om bij gegeven ligging van de versnellingspool J en gegeven versnelling  $\overrightarrow{AA}_J$  de versnelling van een ander punt B te bepalen.

Daartoe roteert men  $\overrightarrow{AA}_J$  om A tot  $\overrightarrow{AA}_{jp}$ , wijzend van A naar J.  $\overrightarrow{AA}_{jp}$  heet de polaire versnelling van A.

Trek voorts  $A_{jp} B_{jp} // AB$  met  $B_{jp}$  op de versnellingsas JB.  
 Roteer tenslotte  $\overrightarrow{BB_{jp}}$  om B over  $\gamma$  rechtsonder. Men verkrijgt de gevraagde versnellingsvector  $\overrightarrow{BB_j}$  van het punt B.

Het bijzondere geval, waarbij  $\gamma = 90^\circ$  treedt op in een translatiepositie van het bewegende vlak, omdat dan  $\phi = 0$  en dus  $\tan^{-1} = 0$ . De bovenstaande constructie verloopt in dat geval net zo als bij de constructie van de snelheid van B als gegeven zijn de pool P en de snelheid  $\underline{v}_A$  van A.



De vraag kan nu worden gesteld: Is er iets bekend over de ligging van de versnellingspool J in het bewegende vlak? J is een punt met versnelling 0, dus zowel de normale

versnellingscomponent  $a_n$  als ook de tangentiële gerichte versnellingscomponent  $a_t$  zijn nul in J.

De buigcirkel kan gezien worden als de meetkundige plaats van punten, waar  $a_n = 0$  (omdat voor ieder punt van bc, de kromtestraal oneindig groot is). Dus J ligt zeker op de buigcirkel. Waar ligt J op bc?

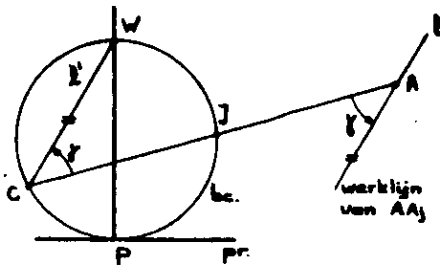
Ieder punt A van bc heeft een versnelling, waarvan de werklijn door de buigpool W gaat. Immers de versnelling van A op bc is uitsluitend tangentiële gericht, zodat  $\overrightarrow{AA_j}$  langs  $\underline{v}_A$  valt. Daar  $\underline{v}_A \perp \overrightarrow{PA}$ , is ook  $\overrightarrow{AA_j} \perp \overrightarrow{PA}$  en is het gestelde bewezen. De versnellingshoek  $\gamma = \sphericalangle JAW$ . Daar  $\square JPAW$  een koordevierhoek is, is ook  $\sphericalangle JPW = \sphericalangle JAW = \gamma$ .

Conclusie: de versnelling  $\overrightarrow{PP_j}$  van het punt P, dat momentaan in rust is, heeft een versnelling, (steeds) gericht op de buigpool W.

Indien de grootte van  $\gamma = \arctan \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}$  bekend is, is ook de ligging van J op de buigcirkel bepaald.

Constructie van J.

Gegeven: De buigcirkel (bc), de pool P en de werklijn l van de versnelling van een punt A, dat niet op de buigcirkel ligt.



Oplossing:

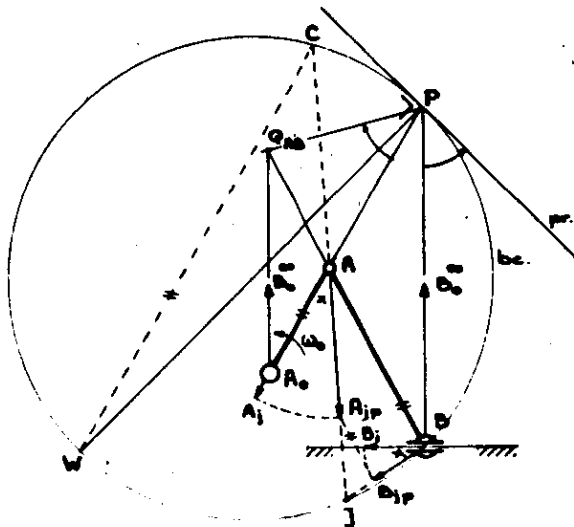
Trek daartoe door de buigpool W een rechte  $l' // l$ .

Deze rechte snijdt de  $bc$  in een punt C. De werklijn van  $a_C$  is  $\rightarrow$  evenwijdig aan die van  $a_A$ .

Daar bovendien voor de punten A en C de versnellingshoek  $\gamma$  dezelfde moet zijn, ligt J op CA. J ligt ook op de

buigcirkel, zodat J samenvalt met het snijpunt van CA met de buigcirkel, dat niet C is.

Voorbeeld:



Krukdrijfstangmechanisme.

Gegeven het krukdrijfstangmechanisme  $A_0AB$ . De kruk  $A_0A$  loopt rond met constante hoeksnelheid  $\omega_0$ .

Construeer de juiste ligging van de versnellingspool J van de drijfstang AB en vervolgens de grootte en richting van de versnelling van het kruishoofd B.

Oplossing:

Men zij gewaarschuwd voor het feit, dat de hoeksnelheid  $\omega$  van de drijfstang niet constant behoeft te zijn!

Men construeert eerst de buigcirkel door B en P (P is het snijpunt van  $AA_0$  en  $BB_0$ ). B is een punt van de buigcirkel, omdat de kromtestraal  $BB_0$  van de door B doorlopen baan oneindig groot is. De buigcirkel raakt in P aan de poolraaklijn pr welke met behulp van de constructie van Bobillier kan worden gevonden:

$AB$  en  $A_0B_0$  snijden elkaar in het collineatiepunt  $Q_{AB}$ . De collineatieas  $PQ_{AB}$  spiegelt men t.o.v. de bissectrice in  $\angle APB$ . Dit geeft de poolraaklijn pr en daar loodrecht op de poolnormaal pn. De leibaan van B snijdt de poolnormaal in de buigpool W. De buigcirkel kan dus worden getekend. Daar A regelmatig rond  $A_0$  loopt, heeft A alléén een normaal gerichte versnelling. De grootte volgt uit:

$v_A^2 / \overline{AA}_0 = \omega_0^2 \overline{AA}_0$  (Bij normering van  $\omega_0$  op 1, valt  $A_j$  met  $A_0$  samen, anders niet).

Van een punt A, dat niet op de buigcirkel ligt, is nu de versnelling bekend en kan de juiste ligging van J op de buigcirkel met behulp van de in het voorgaande aangegeven constructie worden vastgelegd.

Met behulp van J kan nu de versnelling van  $\overline{BB}_j$  uit die van  $\overline{AA}_j$  worden bepaald. (Zie fig. blz. 45). Dit kan nog op verschillende manieren. Een daarvan maakt gebruik van de stelling 1, dat de cirkel door A,  $A_j$  en het snijpunt  $(AB, A_j B_j)$  de cirkel door B,  $B_j$  en het punt  $(AB, A_j B_j)$  in J snijdt. (Zie voor het bewijs de tekst behorende bij de figuur op blz. 45).

In het onderhavige geval is de ligging van de leibaan van B bekend en daarmee de werklijn van de versnelling  $\overline{BB}_j$  van B. De constructie kan dus als volgt verlopen:

- a. Trek de cirkel door A,  $A_j$  en J.
- b. Snijd BA met deze cirkel in het punt  $(AB, A_j B_j)$ .
- c. Verbind het punt  $(AB, A_j B_j)$  met  $A_j$  en
- d. Snijd de verbindingslijn met de leibaan van B in het gevraagde punt  $B_j$ .

Een andere manier is die welke gebruik maakt van de stelling 2, dat de cirkel door A, B en het snijpunt  $(AA_j, BB_j)$  de cirkel door  $A_j$  en  $B_j$  en  $(AA_j, BB_j)$  in J snijdt. (Zie voor het bewijs de tekst behorend bij de figuur op blz. 45).

In ons geval is het volgende verloop denkbaar:

- a. Snijd  $AA_j$  met de leibaan van B in het punt  $(AA_j, BB_j)$ .
- (b. Ter controle kan worden nagegaan of de punten A, B,  $(AA_j, BB_j)$  en J inderdaad op één cirkel komen te liggen.)
- c. De cirkel door  $A_j, J$  en  $(AA_j, BB_j)$  snijdt weer de leibaan in het gezochte punt  $B_j$ .

Het is duidelijk, dat de beide laatstgenoemde stellingen (1 en 2) ook kunnen worden gehanteerd voor de bepaling van de ligging van J bij twee gegeven versnellingen bijv.  $\overline{AA}_j$  en  $\overline{BB}_j$ .



Bewijs van stelling 2 (zie onderstaande figuur).

Daar  $\sphericalangle JAT = \sphericalangle JAA_j = \gamma = \sphericalangle JBB_j = \sphericalangle JBT$ , d.i. de versnellingshoek, zien de baanpunten A en B het lijnstuk JT onder dezelfde hoek, zodat A, B, T en de versnellingspool J samen op één cirkel liggen.

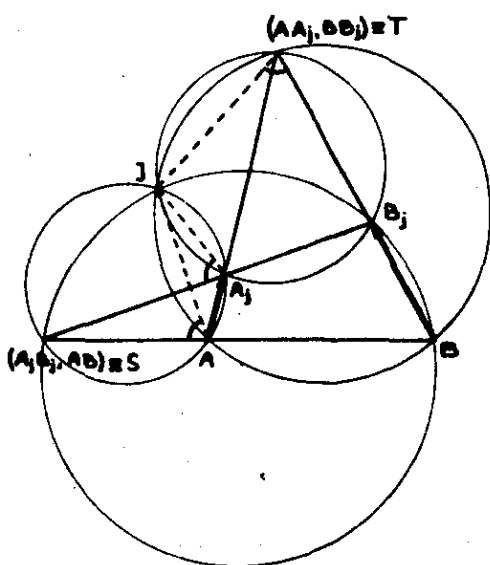
Daar  $\sphericalangle JAA_j = \sphericalangle JBB_j$  en  $AA_j/BB_j = JA/JB$  is  $\triangle JAA_j \sim \triangle JBB_j$ .

Hieruit volgt, dat  $\sphericalangle JA_jT = \sphericalangle JB_jT$ , zodat ook  $\square JA_jB_jT$  een koordevierhoek is. De ongeschreven cirkels van de koordevierhoeken JABT en  $JA_jB_jT$  snijden elkaar dus - buiten T - in de versnellingspool J.

Het bewijs van stelling 1 volgt nu onmiddellijk uit de hulpstelling:

Zij gegeven een vierhoek  $AA_jB_jB$ , waarvan de overstaande zijden elkaar snijden in de respectieve punten  $S = (A_jB_j, AB)$  en  $T = (AA_j, BB_j)$ , dan is op zuiver meetkundige gronden aan te tonen, dat de 4 cirkels  $(A, B, T)$ ,  $(A_j, B_j, T)$ ,  $(A, A_j, S)$  en  $(B, B_j, S)$  elkaar in één punt J snijden.

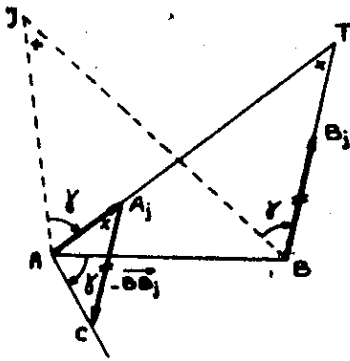
Bewijs: Zij het snijpunt van de cirkels  $(A, B, T)$  en  $(A_j, B_j, T)$  dat niet met T samenvalt (zie hiervoor het bewijs van stelling 2), dan is  $\sphericalangle SA_jJ = \sphericalangle B_jTJ = \sphericalangle BTJ = \sphericalangle SAJ$  zodat  $\square SAA_jJ$  een koordevierhoek is. Geheel analoog is dan ook  $\square SBB_jJ$  een koordevierhoek. De vier genoemde cirkels snijden elkaar dus in éénzelfde punt J.



Opm.1: Is bovendien  $\square AA_jB_jB$  een koordevierhoek, dan komt J op ST te liggen.

Opm.2: Er zijn 6 verschillende paren cirkels, die elkaar in de versnellingspool J snijden. Ieder van deze paren correspondeert met een stelling. Buiten de reeds geformuleerde stellingen 1 en 2 zijn er dus nog 4 andere. (Formuleer deze 4 stellingen voor U zelf.)

De versnellingspoolconstructie van Joukowski



Gegeven:  $\vec{AA}_j$  en  $\vec{BB}_j$ .

- a Teken de verschilvector  $\vec{AC} = \vec{AA}_j - \vec{BB}_j$ .
- b Meet de versnellingshoek  $\sphericalangle BAC = \gamma$ .
- c Zet deze versnellingshoek  $\gamma$  af op de versnellingen  $\vec{AA}_j$  en  $\vec{BB}_j$ .
- d Snijd de zo verkregen vrije benen AJ en BJ met elkaar in de versnellingspool J.

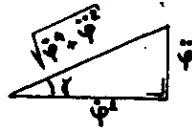
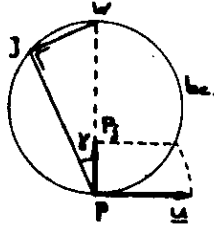
Bewijs: Daar  $\square ABTJ$  een koordevierhoek is, is  $\sphericalangle AJB = \sphericalangle ATB = \sphericalangle AA_jC$ . Voorts is  $JA/JB = AA_j/BB_j = AA_j/A_jC$ . Uit het een en ander volgt, dat  $\triangle AA_jC \sim \triangle AJB$ .  $\triangle AA_jC$  is ontstaan uit  $\triangle AJB$  door rotatie over  $\gamma$  om A, gevolgd door meetkundige vermenigvuldiging met de factor  $AA_j/AJ$  waarbij A meetkundig vermenigvuldigingscentrum is. Hieruit volgt dat ook  $\sphericalangle BAC = \gamma$ , de versnellingshoek. Het vervolg van de constructie spreekt verder voor zichzelf.

De versnelling van het punt P, dat momentaan in rust is, volgt uit:

$$PP_j = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \cdot \overline{JP} = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \overline{PW} \cos \gamma = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \overline{PW} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}}$$

$PP_j = \overline{PW} \cdot \omega^2 = u^2 / \overline{PW}$

De versnelling van de pool P is onafhankelijk van de hoekversnelling  $\dot{\omega}$  van het bewegende vlak. Zij is alleen afhankelijk van de diameter  $\overline{PW}$  van de buigcirkel en van de hoeksnelheid  $\omega$  van het bewegende vlak. Met behulp van  $PP_j$  en een bekende ligging van J is de versnelling van ieder punt uit het bewegende vlak bepaald.



Is voor een ogenblik  $\dot{\omega} = 0$  (d.w.z.  $\omega$  stationair) dan is  $J = W$ , omdat

$$WW_j = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \overline{JW} = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \overline{PW} \sin \gamma =$$

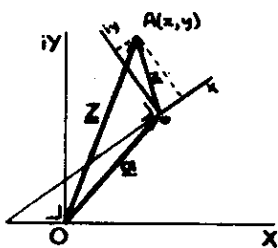
$$= \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \overline{PW} \frac{\dot{\omega}}{\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}}$$

$$\boxed{WW_j = \overline{PW} \cdot \dot{\omega}}$$

(Bij tandwieloverbrengingen, waarbij de hoeksnelheden constant blijven, is dit steeds het geval.)

De versnelling van een punt met betrekking tot de relatieve beweging.

Voor de snelheid van een punt is reeds afgeleid, dat  $\underline{v}_{abs} = \underline{v}_{rel} + \underline{v}_{sleep}$ .



Het punt A is nu geen vast punt meer van het bewegende stelsel  $x - o - y$ . De beweging van A t.o.v.  $x - o - y$  noemen we de relatieve beweging van het punt A.

De beweging van A t.o.v. het referentiestelsel  $X - O - Y$  noemen we de absolute beweging van het punt A. De beweging  $x - o - y$  t.o.v.  $X - O - Y$  heet de sleepbeweging.

Hoe groot is nu de absolute versnelling van het punt A in termen van de relatieve versnelling en de sleepversnelling van het punt A? Het zal blijken dat deze versnellingen (anders dan bij de snelheden) niet zonder meer vectoriëel opstelbaar zijn: er komt nog een mengterm bij. Deze mengterm heet de Coriolisversnelling. Deze stoelt op een verandering van de sleepsnelheid ten gevolge van de plaatsverandering van A in het (sleep)vlak  $x - o - y$ . (1<sup>e</sup> bijdrage) en op een verandering van de relatieve snelheidsvector ten gevolge van de sleepprotatie (2<sup>e</sup> bijdrage). Zoals later blijkt zijn beide bijdragen even groot (vandaar de factor 2).

Afleiding:

$$\boxed{Z = z e^{i\varphi} + \underline{a}}$$

(1) waarin  $Z = X + iY$ ,  $z = x + iy$ ,  $\underline{a} = a + ib$  en  $i^2 = -1$ .

Fluxionering van (1) leidt tot:

$$\dot{Z} = i\dot{\varphi} z e^{i\varphi} + \dot{\underline{a}} + \dot{z} e^{i\varphi}$$

(Nu er sprake is van relatieve beweging is  $z$  niet meer constant).

$$\dot{Z} = \underbrace{i\dot{\phi}(Z - \underline{a}) + \dot{\underline{a}}}_{\underline{v}_{\text{sleep}}} + \underbrace{\dot{z}e^{i\phi}}_{\underline{v}_{\text{rel}}} \quad (2)$$

Nogmaals fluxioneren geeft:

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= i\ddot{\phi}(Z - \underline{a}) + i\dot{\phi}(\dot{Z} - \dot{\underline{a}}) + \ddot{\underline{a}} + i\dot{\phi}\dot{z}e^{i\phi} + \ddot{z}e^{i\phi} \\ &= i\ddot{\phi}(Z - \underline{a}) + i\dot{\phi}\{i\dot{\phi}(Z - \underline{a}) + \dot{z}e^{i\phi}\} + \ddot{\underline{a}} + i\dot{\phi}\dot{z}e^{i\phi} + \ddot{z}e^{i\phi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{Z} = (i\ddot{\phi} - i\dot{\phi}^2)(Z - \underline{a}) + \ddot{\underline{a}} + \ddot{z}e^{i\phi} + 2i\dot{\phi}\dot{z}e^{i\phi}} \quad (3)^*$$

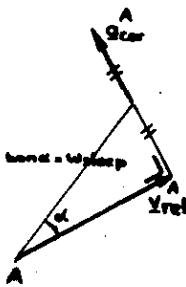
Hierin is:

$(i\ddot{\phi} - i\dot{\phi}^2)(Z - \underline{a}) + \ddot{\underline{a}} = \underline{a}_{\text{sleep}}$ , de sleepversnelling van een vast punt (ter plaatse A) van het  $x - o - y$  vlak bewegende t.o.v. het  $X - O - Y$  vlak.

$\ddot{z}e^{i\phi} = \underline{a}_{\text{relatief}}$ , de relatieve versnelling van het punt A t.o.v. het (sleep)-vlak  $x - o - y$  (gezien vanuit het referentiestelsel).

Hierbij is formule (1) tweemaal naar de tijd gedifferentieerd met  $\underline{a}(a,b)$  en  $\phi$  beschouwd als tijdsafhankelijke constanten. Er is dus net gedaan alsof het vlak  $x - o - y$  niet beweegt t.o.v. het referentievlak  $X - O - Y$  bij deze differentiatie.

$2i\dot{\phi}\dot{z}e^{i\phi} = \underline{a}_{\text{cor}}$ , de coriolisversnelling. Deze versnelling heeft de grootte van  $2 \cdot \omega_{\text{sleep}} \cdot \underline{v}_{\text{rel}} = 2(\omega_{\text{sleep}} \cdot \underline{v}_{\text{rel}})$ , het dubbele vectorproduct van de sleephoek-snelheidsvector (loodrecht het sleepvlak in een zin overeenkomend met die van een rechtse schroefdraad) en van de relatieve snelheidsvector. De coriolisversnelling staat dus loodrecht op  $\underline{v}_{\text{rel}}^A$ . Zij is onder meer afhankelijk van de richting van de  $\underline{v}_{\text{rel}}^A$  en van het teken van  $\omega_{\text{sleep}}$ . (Tekenen zelf verschillende mogelijkheden bij een gegeven werklijn voor  $\underline{v}_{\text{rel}}$ ).

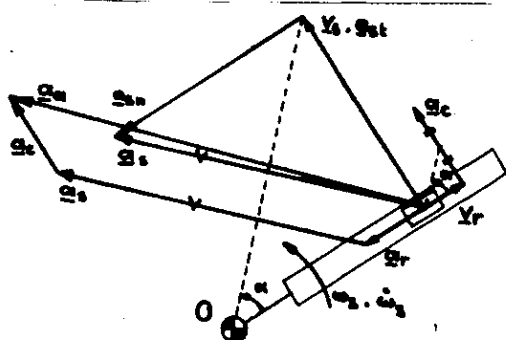


\* Schrijf als oefening deze vergelijking (3) uit in zijn componenten. D.w.z. vindt uitdrukkingen voor  $\ddot{X}$  en  $\ddot{Y}$ .

We hebben dus gevonden, dat voor een willekeurig punt A:

$$\underline{a}_{abs} = \underline{a}_{sleep} + \underline{a}_{rel} + \underline{a}_{cor}$$

Voorbeeld van toepassing van de Coriolis-versnelling.



Een sleuf roteert met ongelijkmatige hoeksnelheid  $\omega_{sleep} = 1 \text{ sec}^{-1}$  en hoekversnelling  $\dot{\omega}_{sleep} = 1 \text{ sec}^{-2}$ .

In de sleuf beweegt een blokje met snelheid  $\underline{v}_r$  en versnelling  $\underline{a}_r$  ten opzichte van de sleuf. (dat zijn dus de relatieve snelheid en versnelling van dat blokje)

Gevraagd wordt de absolute versnelling  $\underline{a}_a$  van het midden K van dat blokje.

$\underline{a}_s^K$  = de sleepversnelling van een punt van de sleuf ter plaatse K.

$$\underline{a}_s^K = \underline{a}_{sn}^K + \underline{a}_{st}^K$$

$$|\underline{a}_{sn}| = v_s^2 / \overline{OK} = \omega_s^2 \overline{OK} = \overline{OK} \text{ cm/sec}^2$$

Dus  $\underline{a}_{sn} = \overrightarrow{KO}$ .

$$\underline{a}_{st} = \dot{\omega}_s \overline{OK} = \overline{OK} \text{ cm/sec}^2$$

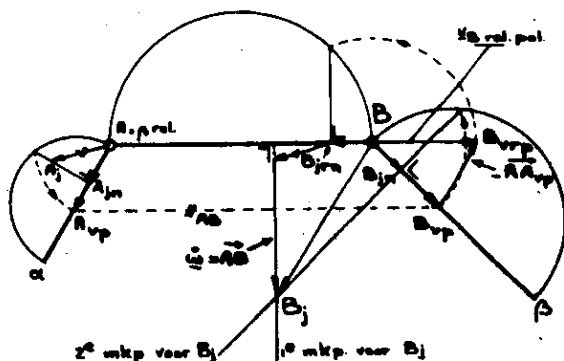
$|\underline{a}_{st}|$  staat  $\perp$  op  $\overline{OK}$ . In dit geval is dus  $\underline{a}_{st} = \underline{v}_s$ .

$$\underline{a}_c = 2(\underline{\omega}_s \times \underline{v}_r) \quad \text{waarbij } 1 = \omega_s = \tan \alpha = v_s / \overline{OK}$$

$$\underline{a}_a^K = \underline{a}_r^K + \underline{a}_s^K + \underline{a}_c^K$$

Tenslotte is de absolute versnelling van K door vectoriële samenstelling der drie versnellingsvectoren in de figuur bepaald.

2<sup>e</sup> Voorbeeld van een versnellingsconstructie met behulp van de relatieve beweging.



In dit voorbeeld wordt de coriolisversnelling nul door juiste keuze van de sleepbeweging.

Van de staaf AB is gegeven de versnelling  $\underline{a}_A = \overline{AA}_j$ . Voorts zijn nog de liggingen van de respectievelijk aan A en B toegevoegde kromtemiddelpunten  $\alpha$  en  $\beta$  bekend. Gevraagd wordt de versnelling  $\underline{a}_B = \overline{BB}_j$  te construeren.

((Deze gegevens zijn voldoende

om de constructie ook te kunnen uitvoeren volgens de traditionele manier:  $(P, \underline{v}_A, \underline{v}_B, bc, J, \underline{a}_B)$ )).

De absolute beweging van de staaf AB wordt beschouwd te zijn samengesteld uit een translatie met het punt A mee en een rotatie om A. De translatie wordt als sleepbeweging beschouwd en de rotatie als de relatieve beweging van AB t.o.v. die sleepbeweging.

Toelichting:

Daar de absolute beweging van de staaf AB vastligt en voor de sleepbeweging een translatie (met A mee) is gekozen (het kan ook anders!\*) is het duidelijk dat voor de relatieve beweging het verschil tussen de absolute- en de sleepbeweging overblijft. Bij de gekozen translatie doorloopt ieder punt van AB een met de baan van het punt A congruente kromme (d.w.z. ieder punt van AB heeft voortdurend dezelfde snelheid, versnelling, ruk enz. als het punt A). Van het vlak AB doorloopt het punt A als enig punt in de translatie dezelfde kromme als in de absolute beweging. De resterende relatieve beweging heeft dus A als een vast punt. Deze relatieve beweging (van AB t.o.v. de sleepbeweging) is dus een rotatie om dat punt A. (Het punt A is niet een absoluut vast punt, maar voor het beschrijven van de rotatie wordt het beschouwd als een vast punt.



\*Noot: Indien voor de sleepbeweging geen translatie wordt gekozen wordt  $\underline{\omega}_{\text{sleep}} \neq 0$  en dus in het algemeen  $\underline{a}_c = 2(\underline{\omega}_s \times \underline{v}_r) \neq 0$ .

Voor de hier gekozen opzet, geldt dus, dat

$$\underline{v}_{abs}^B = \underline{v}_{sleep}^B + \underline{v}_{rel}^B, \text{ zodat } \underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{BA}$$

of

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + (\underline{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \quad (1) \quad \underline{\text{Formule van Euler}}$$

Fluctioenering van deze betrekking geeft:

$$\begin{aligned} \underline{a}_B &= \underline{a}_A + (\underline{\omega} \times \dot{\overrightarrow{AB}}) + (\dot{\underline{\omega}} \times \overrightarrow{AB}) \\ &= \underline{a}_A + (\underline{\omega} \times \dot{\overrightarrow{OB}} - \dot{\overrightarrow{OA}}) + (\dot{\underline{\omega}} \times \overrightarrow{AB}) \\ &= \underline{a}_A + (\underline{\omega} \times \underline{v}_B - \underline{v}_A) + (\dot{\underline{\omega}} \times \overrightarrow{AB}) \quad \text{en met Euler:} \\ &= \underline{a}_A + ((\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \overrightarrow{AB})) + (\dot{\underline{\omega}} \times \overrightarrow{AB})) \end{aligned}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A - \omega^2 \overrightarrow{AB} + (\dot{\underline{\omega}} \times \overrightarrow{AB}) \quad (2) \quad (2^e \text{ formule van Euler})$$

Hetzelfde resultaat kan ook rechtstreeks worden verkregen door toepassing van de formule:

$$\underline{a}_{abs} = \underline{a}_{sleep} + \underline{a}_{rel} + \underline{a}_{cor}$$

Daar bij de door ons gekozen sleepbeweging  $\omega_{sleep} = 0$  wordt  $\underline{a}_{cor} = 0$  en blijft dus over de betrekking

$$\underline{a}_a = \underline{a}_s + \underline{a}_r$$

Toegepast op het punt B wordt dit:

$$\underline{a}_a^B = \underline{a}_s^B + \underline{a}_r^B$$

Daar voor de sleepbeweging het punt B dezelfde versnelling heeft als het punt A, is dus  $\underline{a}_s^B = \underline{a}_s^A$ .

Na overgang op een enigszins andere notatie mogen we dus schrijven

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{BA} \quad (\text{Euler})$$

Hierbij is  $\underline{a}_{BA}$  de versnelling van B in de relatieve beweging van B om A.

Nu is

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_{abs} = \underline{\omega}_{sleep} + \underline{\omega}_{rel} \quad \text{en ook}$$

$$\dot{\underline{\omega}} = \dot{\underline{\omega}}_{abs} = \dot{\underline{\omega}}_{sleep} + \dot{\underline{\omega}}_{rel}$$

In ons geval is  $\omega_{sleep} = \dot{\omega}_{sleep} = 0$ , dus  $\underline{\omega}_{rel} = \underline{\omega}$  en  $\dot{\underline{\omega}}_{rel} = \dot{\underline{\omega}}$ .

In woorden: de relatieve beweging van B om A vindt plaats met de hoeksnelheid en de hoekversnelling van de absolute beweging.

Vandaar dat:

$$\underline{a}_{BA} = \underline{a}_{BA} \text{ normaal} + \underline{a}_{BA} \text{ tangentiëel} = -\omega^2 \overline{AB} + (\underline{\omega} \times \overline{AB})$$

waarbij  $\underline{a}_{BA n} = v_{BA}^2 / \overline{BA}$  een onmiddellijk construeerbare grootheid is, indien wegens

$$\underline{v}_{BA} = \underline{v}_B - \underline{v}_A$$

de snelheden van  $\underline{v}_B$  en  $\underline{v}_A$  bekend zijn:

De constructie van  $\underline{a}_B$  en de bepaling van  $\underline{\omega}$  van de staaf AB heeft nu het volgende verloop:

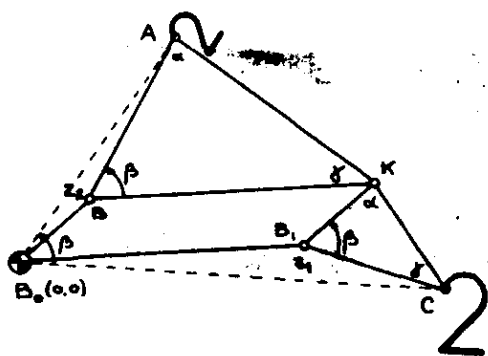
- a. Bepaal van  $\underline{a}_A \equiv \overline{AA}_j$  de normale component  $\overline{AA}_{jn}$  gericht van A naar  $\alpha$ .
- b. Bepaal de loodrechte (= polaire) snelheid  $\overline{AA}_{vp}$  van het punt A uit  $AA_{vp} = \sqrt{\overline{AA}_{jn} \cdot A_\alpha}$ .
- c. Trek  $A_{vp} B_{vp} // AB$  en snijd  $A_{vp} B_{vp}$  in  $B_{vp}$  met  $B\beta$ . ( $\overline{BB}_{vp}$  is de loodrechte snelheid van B).
- d. Bepaal  $\underline{v}_{BAj} = \underline{v}_{Bj} - \underline{v}_{Aj}$  met  $\overline{BB}_{vrp} = \overline{BB}_{vp} - \overline{AA}_{vp}$  ( $\overline{BB}_{vrp}$  heeft de richting van  $\overline{AB}$ ).
- e. Bepaal  $\underline{a}_{Bn} \equiv \overline{BB}_{jn}$  uit  $BB_{jn} = \overline{BB}_{vp}^2 / B\beta$ .
- f. Bepaal  $\underline{a}_{BAn} \equiv \overline{BB}_{jrn}$  met  $BB_{jrn} = \overline{BB}_{vrp}^2 / BA$  (want  $A \equiv \beta_{rel}$ ).
- g. Bepaal  $\overline{BB}_{jrn} + \overline{AA}_j$ .
- h. De loodlijn vanuit het eindpunt, van de onder g gevonden somvector neergelaten op AB, geeft een eerste meetkundige plaats voor  $B_j$ . (Dit komt doordat de laatste bijdrage  $\underline{a}_{BA_t} = \underline{\omega} \times \overline{AB}$  loodrecht AB gericht is).
- i. De tweede meetkundige plaats is de rechte door  $B_{jn} \perp B\beta$ , omdat  $\overline{BB}_j = \overline{BB}_{jn} + \overline{BB}_{jt} \equiv \underline{a}_{Bn} + \underline{a}_{Bt}$
- j. De twee meetkundige plaatsen snijden elkaar in  $B_j$ , en  $\underline{a}_B \equiv \overline{BB}_j$ .
- k.  $\underline{\omega} \times \overline{AB} = \overline{BB}_j - \overline{BB}_{jrn} - \overline{AA}_j$   
en  $\underline{\omega} = \frac{|\overline{BB}_j - \overline{BB}_{jrn} - \overline{AA}_j|}{AB}$



Plagiograph van Sylvester  
(pantograaf)

In 1875 bedacht J.J. Sylvester de zg. "Plagiograph". Deze bestaat uit een stangenparallelogram  $B_0 B_1 KB$ , waarvan het hoekpunt  $B_0$  gestelpunt is. Aan de zijden  $B_1 K$  en  $BK$  zijn respectievelijk de starre driehoeken  $B_1 KC$  en  $BAK$  bevestigd.

Het mechanisme heeft zo nog twee vrijheidsgraden van beweging. Dat wil zeggen dat bijv. voor het punt  $A$  op ieder tijdstip nog twee willekeurige coördinaten kunnen worden voorgeschreven. De beweging van ieder ander punt uit het mechanisme is dan bepaald. Doorloopt het punt  $A$  een willekeurige (of eventueel voorgeschreven) kromme, dan zal het punt  $C$  een daarvan afhankelijke kromme doorlopen.



! Stelling: De door de punten  $A$  en  $C$  beschreven krommen zijn gelijkvormig.

Het bewijs van deze stelling zal worden uitgevoerd door het platte vlak waarin de beweging plaatsvindt als een complex vlak te beschouwen. D.w.z. ieder punt van het mechanisme wordt beschouwd als het beeldpunt van een complex getal. Het gestelpunt  $B_0$  heeft  $(0,0)$  tot beeldpunt en kan dus beschouwd worden als de oorsprong van een complex assenstelsel.

Voorts is  $Z_1$  het beeldpunt van  $B_1$ ,  $Z_2$  van  $B_2 \equiv B$ ,  $Z_A$  van  $A$  en  $Z_C$  van  $C$ .

Dus:

$$Z_A = Z_2 + \lambda Z_1 e^{i\beta} \quad \text{met} \quad AB/BK = \lambda = KB_1/B_1C \quad B_1C = \lambda^{-1} KB_1$$

en

$$Z_C = Z_1 + \lambda^{-1} Z_2 e^{-i\beta}$$

zodat

$$Z_A = \lambda e^{i\beta} (Z_1 + \lambda^{-1} Z_2 e^{-i\beta}) = \lambda e^{i\beta} \cdot Z_C$$

$$\boxed{Z_A = \lambda e^{i\beta} Z_C}$$

Dit betekent meetkundig, dat ieder punt  $A$ , van de door dat punt doorlopen kromme, kan worden verkregen door het bijbehorende punt  $C$  over de hoek  $\beta$  om  $B_0$  te verdraaien en gelijktijdig vanuit  $B_0$  met de factor  $\lambda$  te vermenigvuldigen. Daar  $\lambda$  en  $\beta$  onafhankelijk van de tijd (of van de positie van het mechanisme) zijn, volgt hieruit dat de door  $A$  en  $C$  doorlopen krommen

gelijkvormig zijn. Het is duidelijk, dat een van deze beide krommen kan worden voorgeschreven; de andere is dan daarmee gelijkvormig. In de figuur is dit gedemonstreerd door het punt C een t.o.v. het punt A ver-groot en verdraaid cijfer 2 te laten beschrijven.

De stelling van Roberts.

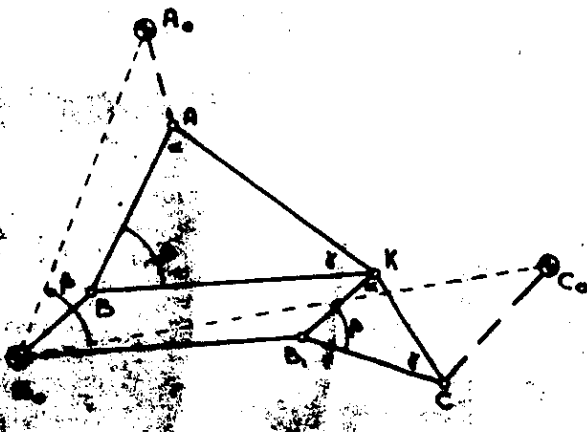
In een bijzonder geval van de "Plagiograph" doorloopt het punt C een cirkel om  $C_0$ . Dan zal dus ook het punt A een cirkel gaan beschrijven en wel een cirkel rond  $A_0$ . Het punt  $A_0$  volgt uit  $C_0$ , zoals A uit C volgde. Dus:

$$z_{A_0} = \lambda e^{i\beta} z_{C_0}$$

zodat  $\sphericalangle A_0 B_0 C_0 = \beta = \sphericalangle ABK = \sphericalangle KB_1 C$

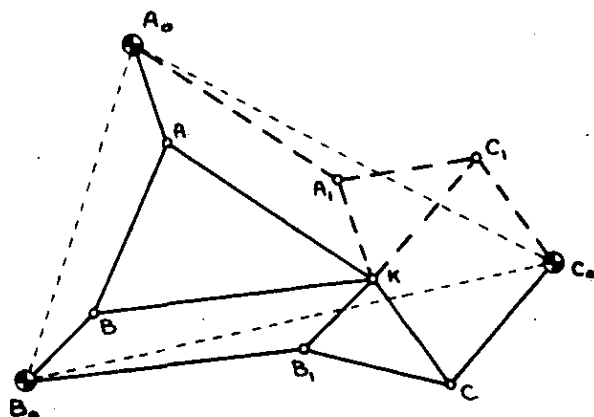
en ook  $A_0 B_0 / B_0 C_0 = \lambda = AB / BK = KB_1 / B_1 C$

Men verbindt nu C met  $C_0$  en A met  $A_0$  door middel van staven. Er ontstaat dan een configuratie die volgens het plagiografisch beginsel van Sylvester kan bewegen (maar het niet zou doen wanneer de afmetingen willekeurig waren). Het is dus een kinematisch overbepaald mechanisme.



Er zijn in de configuratie twee stangenvierzijden te onderkennen, n.l.  $A_0 A B B_0$  en  $B_0 B_1 C C_0$ . Ieder van deze vierzijden draagt een koppel-driehoek, respectievelijk  $ABK$  en  $KB_1 C$ . Het punt K van deze vierzijden is in iedere stand der vierzijden een gemeenschappelijk punt. Men kan ook zeggen, dat beide vierzijden een identieke koppelkromme (beschreven door K) voortbrengen. Er is sprake van een 2-voudige voortbrenging van de koppelkromme. Indien de afmetingen van een van de beide vierzijden

willekeurig zijn, volgen die van de andere vierzijde daaruit. (Teken nu zelf een willekeurige vierzijde met een willekeurige, starre, koppeldriehoek en vindt daaruit de afmetingen van het toegevoegde mechanisme, dat dezelfde koppelkromme voortbrengt.)



Met het punt  $B_0$  van de configuratie is een stangenparallellogram verbonden. Uit symmetrieoverwegingen wordt duidelijk, dat ook in de vaste draaipunten  $A_0$  en  $C_0$  zulke parallellogrammen bestaan (of kunnen worden aangebracht). Deze zijn respectievelijk  $A_0AKA_1$  en  $C_0CKC_1$ . Is nu ook  $\Delta A_1KC_1$  een starre driehoek?

Daar  $A_1K$  en  $KC_1$  staven zijn, is het voldoende te bewijzen dat  $A_1K$  en

$KC_1$  een starre hoek insluiten. De hoek welke deze twee staven met elkaar maken is dezelfde welke  $AA_0$  en  $CC_0$  met elkaar maken. Omdat nu

$$z_A - z_{A_0} = \lambda e^{i\beta} (z_C - z_{C_0})$$

wordt het duidelijk dat de gezochte hoek weer dezelfde vaste hoek  $\beta$  is.

$\Delta A_1KC_1$  is dus star. En  $\square A_0A_1C_1C_0$  is een 3<sup>e</sup> vierzijde welke d.m.v. de koppeldriehoek  $A_1KC_1$  dezelfde koppelkromme voortbrengt!

De verkregen configuratie is rotatiesymmetrisch: meer oplossingen zijn niet meer te verwachten. Afgeleid is dus de zg. stelling van Roberts:

Iedere koppelkromme kan op 3-voudige wijze door een stangenvierzijde worden voortgebracht.

(Probeer zelf de beide andere mechanismen te vinden, wanneer er een is gegeven).

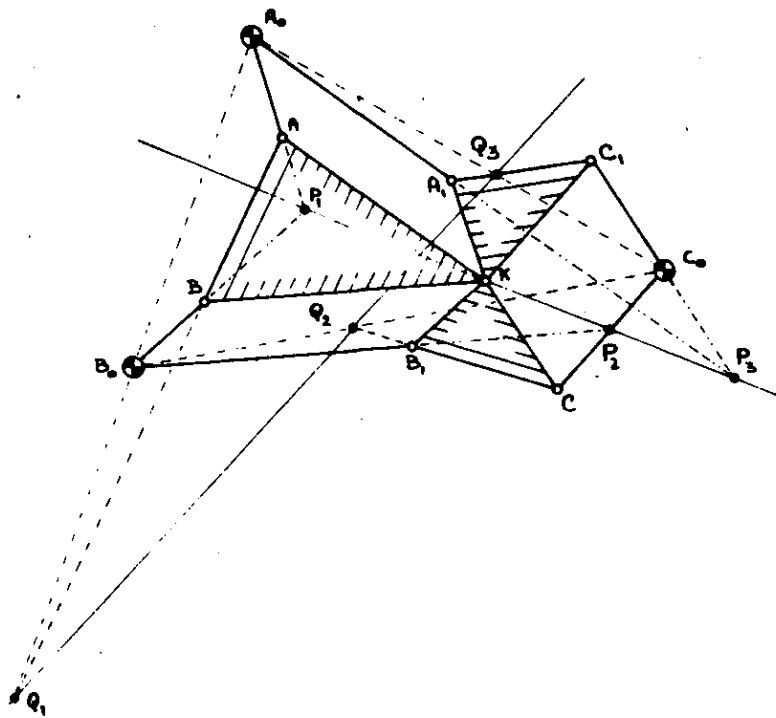
Met betrekking tot de afmetingen van de configuratie  $C_R$  van Roberts geldt, dat  $\Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta ABK \sim \Delta KB_1C \sim \Delta A_1KC_1$

en dat

$$\begin{aligned} B_0B_1 &= \lambda^{-1}AB \\ B_1C &= \lambda^{-1}BB_0 \\ CC_0 &= \lambda^{-1}AA_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0A_1 &= \mu^{-1}AB \\ A_1C_1 &= \mu^{-1}AA_0 \\ C_1C_0 &= \mu^{-1}BB_0 \end{aligned}$$

waarbij  $\lambda^{-1} = BK/AB$  en  $\mu^{-1} = AK/AB$ .



Opmerking 1.

De 3 momentane polen  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  van de respectieve vierzijden liggen samen met het koppelpunt  $K$  steeds op dezelfde rechte. Daar de 3 voortgebrachte koppelkrommen identiek zijn, zijn in iedere positie van  $C_R$  ook de raaklijnen in  $K$  aan de koppelkrommen identiek. De 3 poolstralen ( $\bar{=}$  baannormalen van  $K$ ), welke hier loodrecht op staan, zijn dus ook identiek. Dus  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  en  $K$  liggen steeds op een rechte.

Opmerking 2.

De 3 collineatiepunten  $Q_1$ ,  $Q_2$  en  $Q_3$  van de vierzijden uit de configuratie van Roberts, liggen steeds op een rechte.

Het bewijs van deze stelling berust op de stelling van Menelaus voor de rechte  $Q_1Q_2$  ten opzichte van de gesteldriehoek  $A_0B_0C_0$  van  $C_R$ . Zij maakt o.a. gebruik van het feit, dat de negen bewegende schakels uit  $C_R$ , niet meer dan 3 verschillende hoeksnelheden bezitten.

Deze zijn dan ook in ieder van de drie vierzijden aan te wijzen en vormen t.o.v. elkaar een permutatie. Dit alles berust op het feit, dat in  $C_R$  drie stangenparallellogrammen voorkomen met gelijke hoeksnelheden (resp. hoekverdraaiingen) voor de overstaande stangen. (Zie voor het volledige bewijs van deze stelling blz.20 van het boek: "De stangenvierzijde als aandrijvingsmechanisme" door E.A.Dijksman. Culemborg/Antwerpen/Keulen. De Technische Uitgeverij H.Stam N.V. (1964), VIII + 127 blz.).