

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

VOORTGEZETTE KINEMATICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. G.R. Veldkamp

Najaarssemester 1975

Jap/76

Aantekeningen bij het college

"Voortgezette Kinematica"

door

Prof.dr. G.R. Veldkamp

Najaarssemester 1975

<u>Inhoudsopgave</u>	blz.
<u>Hoofdstuk 1. Instantane ruimtelijke kinematica</u>	1
<u>Hoofdstuk 2. De versnellingsverdeling</u>	32
<u>Hoofdstuk 3. Krommingstheorie</u>	45
3.1. De kromming van de poloden	45
3.2. Opmerkingen	47
3.3. De kromming van de banen	48
3.4. Wiskundige intermezzo's	54
3.5. Voortzetting van 3.3.	59
3.6. De middelpuntskromme	61
3.7. De stelling van Bobillier	64
3.8. Toepassingen van 3.7 en andere toepassingen	67
3.9. De stelling van Hartmann	70
3.10. De stelling van Freudenstein	74
<u>Hoofdstuk 4. Synthese</u>	77
4.1. Stangenmechanismen waarvoor 1 , $1'$ en $1''$ momenteel gegeven zijn	77
4.2. Rechtgeleiding bij symmetrische koppelkrommen	83
4.3. Opmerkingen bij 4.3	91
4.4. Synthese met behulp van discrete standen	95
4.5. Enige opmerkingen van meetkundige aard	99
4.6. Toepassing op een krukstangbeweging	105
4.7. Stangenmechanismen die bepaald worden door vier of meer standen	110
4.8. Formules van Grübler	122
<u>Hoofdstuk 5. Appendix</u>	123
5.1. Aanvulling op § 4.2.	123
<u>Literatuur</u>	126

Hoofdstuk 1. Instantane ruimtelijke kinematica

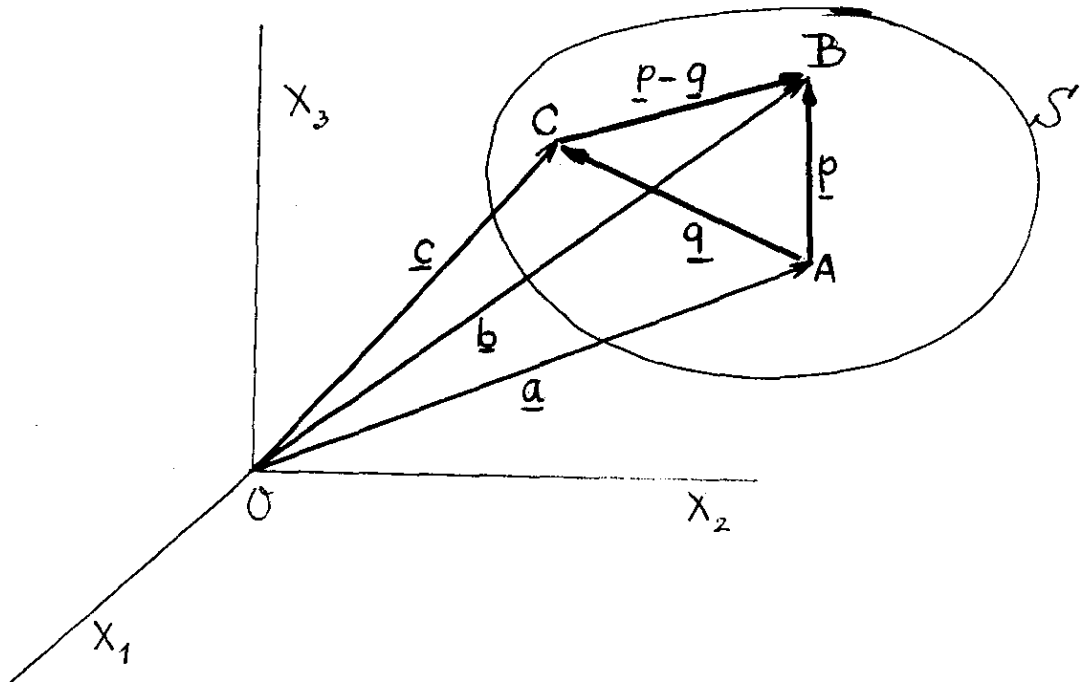
We bespreken de snelheidsverdeling van een star stelsel op twee manieren: eerst met behulp van vectoren, daarna door van matrices gebruik te maken.

- 1.1. Zij $OX_1X_2X_3$ een orthonormaal coördinatenstelsel in de (drie-dimensionale) ruimte \mathbb{R}^3 waarin zich een star lichaam S beweegt. Als A, B, C drie niet op één rechte gelegen punten van S zijn met plaatsvectoren $\underline{a} := \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} := \overrightarrow{OB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$, snelheden $\underline{v}_A = \dot{\underline{a}}$, $\underline{v}_B = \dot{\underline{b}}$, $\underline{v}_C = \dot{\underline{c}}$ dan geldt voor de vectoren

$$\underline{p} := \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} \quad \text{en} \quad \underline{q} := \overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$$

dat

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \dot{\underline{p}} \quad \text{en} \quad \underline{v}_C = \underline{v}_A + \dot{\underline{q}}.$$



Op grond van de starheid van S kunnen we van $\dot{\underline{p}}$ en $\dot{\underline{q}}$ het volgende zeggen: $(\underline{p}, \underline{p})$, $(\underline{q}, \underline{q})$ en $(\underline{p} - \underline{q}, \underline{p} - \underline{q})$ zijn constanten (als functies van de tijd t) - zodat

$$(1a, b) \quad (\underline{p}, \dot{\underline{p}}) = (\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0$$

en ook $(\underline{p} - \underline{q}, \dot{\underline{p}} - \dot{\underline{q}}) = 0$, waaruit door uitwerken,

$$(\underline{p}, \dot{\underline{p}}) - (\underline{p}, \dot{\underline{q}}) - (\underline{q}, \dot{\underline{p}}) + (\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0,$$

en toepassen van (1a,b) volgt

$$(1c) \quad (\underline{p}, \underline{\dot{q}}) + (\underline{\dot{p}}, \underline{q}) = 0 .$$

(1a) betekent dat $\underline{p} \perp \underline{\dot{p}}$; er is dus tenminste één vector \underline{k}_1 zó dat

$$(2) \quad \underline{\dot{p}} = \underline{k}_1 \times \underline{p}$$

en evenzo is er tenminste één \underline{k}_2 zó dat

$$(3) \quad \underline{\dot{q}} = \underline{k}_2 \times \underline{q} .$$

We zullen laten zien dat er ook tenminste een \underline{k} bestaat zó dat

$$(4) \quad \underline{\dot{p}} = \underline{k} \times \underline{p} \quad \text{en} \quad \underline{\dot{q}} = \underline{k} \times \underline{q} .$$

Als \underline{k} aan (4) voldoet, dan is $\underline{k} \perp \underline{\dot{p}}$ en $\underline{k} \perp \underline{\dot{q}}$, zodat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ is waarvoor

$$\underline{k} = \alpha \underline{\dot{p}} \times \underline{\dot{q}}$$

en als we dit substitueren in (4) en (1a,b) toepassen,

$$\underline{\dot{p}} = \alpha (\underline{\dot{p}} \times \underline{\dot{q}}) \times \underline{p} = \alpha (\underline{p}, \underline{\dot{p}}) \underline{\dot{q}} - \alpha (\underline{p}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{p}} = -\alpha (\underline{p}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{p}},$$

$$\underline{\dot{q}} = \alpha (\underline{\dot{p}}, \underline{q}) \underline{\dot{q}} ,$$

dan zien we dat, mits $(\underline{\dot{p}}, \underline{q}) \neq 0$, $\alpha = (\underline{\dot{p}}, \underline{q})^{-1}$.

Hieruit volgt dat de enige kandidaat voor (4) is $\underline{k} = (\underline{\dot{p}}, \underline{q})^{-1} \underline{\dot{p}} \times \underline{\dot{q}}$ en die voldoet ook.

Als $(\underline{\dot{p}}, \underline{q}) = 0$ dan volgt uit

$$\left. \begin{array}{l} (\underline{\dot{p}}, \underline{p}) = 0 \\ (\underline{\dot{p}}, \underline{q}) = 0 \end{array} \right\}$$

opgevat als stelsel vergelijkingen met $\underline{\dot{p}}$ als onbekende, dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ is waarvoor

$$\underline{\dot{p}} = \lambda \underline{p} \times \underline{q}$$

en evenzo is er een $\mu \in \mathbb{R}$ waarvoor

$$\underline{\dot{q}} = \mu \underline{p} \times \underline{q} .$$

Men verifieert nu gemakkelijk dat

$$\underline{k} := \mu \underline{p} - \lambda \underline{q}$$

voldoet aan (4).

We concluderen dat er onder alle omstandigheden (tenminste) een \underline{k} bestaat die aan (4) voldoet.

We laten nu zien dat voor deze \underline{k} en een willekeurig punt $X \in S$, met $\underline{x} := \overrightarrow{OX}$ en $\underline{r} := \overrightarrow{AX}$, geldt

$$(5) \quad \underline{\dot{r}} = \underline{k} \times \underline{r} .$$

Dit is equivalent met $\underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r} = \underline{0}$ en het is triviaal om met behulp van (1a) te constateren

$$(6a) \quad (\underline{r}, \underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r}) = (\underline{r}, \underline{\dot{r}}) - \det(\underline{r}, \underline{k}, \underline{r}) = 0 .$$

Bovendien is, met behulp van (1c),

$$(6b) \quad (\underline{p}, \underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r}) = (\underline{p}, \underline{\dot{r}}) - \det(\underline{p}, \underline{k}, \underline{r}) = (\underline{p}, \underline{\dot{r}}) + (\underline{k} \times \underline{p}, \underline{r}) = \\ = (\underline{p}, \underline{\dot{r}}) + (\underline{\dot{p}}, \underline{r}) = 0$$

en evenzo

$$(6c) \quad (\underline{q}, \underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r}) = 0 .$$

Uit (6a,b,c) blijkt dat $\underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r}$ loodrecht staat op de drie vectoren \underline{p} , \underline{q} en \underline{r} ; indien deze onafhankelijk zijn volgen daaruit $\underline{\dot{r}} - \underline{k} \times \underline{r} = \underline{0}$ en (5). Dit betekent dat (5) bewezen is voor ieder punt X buiten vlak ABC ; als X in vlak ABC ligt is het niet moeilijk om twee punten X_1 en X_2 te vinden waarvoor (5) geldt, zó dat X niet in vlak AX_1X_2 ligt; bijgevolg geldt (5) voor iedere X .

Samengevat: Bij ieder punt $A \in S$ is er (tenminste) een vector \underline{k} zodat voor iedere $X \in S$ geldt

$$\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{k} \times \overrightarrow{AX} .$$

Er is trouwens precies één zo'n vector; stel dat ook \underline{k}_1 een vector is met die eigenschap,

$$\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{k}_1 \times \overrightarrow{AX} ,$$

dan zou (voor alle punten X)

$$\underline{0} = (\underline{k} - \underline{k}_1) \times \overrightarrow{AX}$$

gelden, en hieruit volgt $\underline{k} = \underline{k}_1$.

Die vector \underline{k} hangt bovendien ook al niet af van de keuze van A ; als bij een ander punt, B , geldt (voor alle X)

$$\underline{v}_X = \underline{v}_B + \underline{l} \times \overrightarrow{BX}$$

dan volgt uit $\vec{BX} = \vec{BA} + \vec{AX}$ dat

$$\underline{v}_X = \underline{v}_B + \underline{\ell} \times \vec{BA} + \underline{\ell} \times \vec{AX} = \underline{v}_A + \underline{\ell} \times \vec{AX}$$

zodat weer

$$\underline{o} = (\underline{k} - \underline{\ell}) \times \vec{AX}$$

en $\underline{k} = \underline{\ell}$.

Tenslotte: \underline{k} is ook niet afhankelijk van de keuze van het assenstelsel; als bij een ander assenstelsel geldt

$$\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{k}' \times \vec{AX}$$

dan volgt, evenzo door aftrekken $\underline{o} = (\underline{k} - \underline{k}') \times \vec{AX}$ voor alle X , $\underline{k} = \underline{k}'$.

Conclusie: Als een star lichaam S in de ruimte beweegt is er op ieder tijdstip een vector \underline{k} met de eigenschap dat voor iedere $A \in S$ en voor iedere $X \in S$ geldt

$$\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{k} \times \vec{AX}.$$

In overeenstemming met het gangbare gebruik schrijven we voortaan $\underline{\omega}$ i.p.v. \underline{k} ; $\underline{\omega}$ heet de momentele (of momentane of instantane) hoeksnelheid.

1.2. $\underline{\omega}$ hangt van t af; als $\underline{\omega}$ op ieder ogenblik (van een tijdsinterval) \underline{o} is dan is de beweging een translatie; als $\underline{\omega}(t_0) = \underline{o}$ dan is de beweging op tijdstip t_0 instantaan een translatie.

We veronderstellen nu voorlopig dat $\underline{\omega}(t) \neq \underline{o}$.

1.3. Als X en Y dezelfde snelheid hebben dan is

$$\underline{\omega} \times \vec{AX} = \underline{\omega} \times \vec{AY},$$

$$\underline{o} = \underline{\omega} \times (\vec{AX} - \vec{AY}) = \underline{\omega} \times \vec{YX},$$

zodat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ is met $\vec{YX} = \lambda \underline{\omega}$.

Punten met dezelfde (momentane) snelheid liggen blijkbaar op een rechte lijn die als richtingsvector $\underline{\omega}$ heeft. Is er onder deze rechten ook een waarop de snelheid lineair afhankelijk is van $\underline{\omega}$? Voor het punt X met plaatsvector \underline{x} op zo'n rechte $\underline{x} = \underline{p} + \lambda \underline{\omega}$ moet dan uit $\vec{AX} = \underline{x} - \underline{a} = \underline{p} - \underline{a} + \lambda \underline{\omega}$ en $\underline{\omega} \times \vec{AX} = \underline{\omega} \times \underline{p} - \underline{\omega} \times \underline{a}$ volgen

$$\begin{aligned} \underline{v}_X &= \underline{\omega} \times \underline{v}_X = \underline{\omega} \times (\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}) = \underline{\omega} \times (\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{p} - \underline{\omega} \times \underline{a}) = \\ &= \underline{\omega} \times \underline{v}_A + (\underline{\omega}, \underline{p}) \underline{\omega} - (\underline{\omega}, \underline{\omega}) \underline{p} - (\underline{\omega}, \underline{a}) \underline{\omega} + (\underline{\omega}, \underline{\omega}) \underline{a}, \end{aligned}$$

en als we de aanvullende eis stellen dat $(\underline{\omega}, \underline{p}) = 0$ dan is

$$\underline{p} = (\underline{\omega}, \underline{\omega})^{-1} \{ \underline{\omega} \times \underline{v}_A - (\underline{\omega}, \underline{a}) \underline{\omega} + (\underline{\omega}, \underline{\omega}) \underline{a} \}.$$

Er is bijgevolg precies één lijn (die we σ noemen) met die eigenschap; de snelheid (die we \underline{v}_T noemen) is er

$$\begin{aligned} \underline{v}_T &= \underline{v}_A + \underline{\omega} \times (\underline{p} - \underline{a}) = \underline{v}_A - \underline{\omega} \times \underline{a} + \underline{\omega} \times \underline{p} = \\ &= \underline{v}_A - \underline{\omega} \times \underline{a} + (\underline{\omega}, \underline{\omega})^{-1} \{ (\underline{\omega}, \underline{v}_A) \underline{\omega} - (\underline{\omega}, \underline{\omega}) \underline{v}_A + (\underline{\omega}, \underline{\omega}) \underline{\omega} \times \underline{a} \} = \\ &= (\underline{\omega}, \underline{\omega})^{-1} (\underline{\omega}, \underline{v}_A) \underline{\omega}, \end{aligned}$$

hetgeen precies de projectie is van \underline{v}_A op die rechte, en dat voor ieder punt A.

Als we A op σ kiezen dan volgt voor een willekeurig punt X

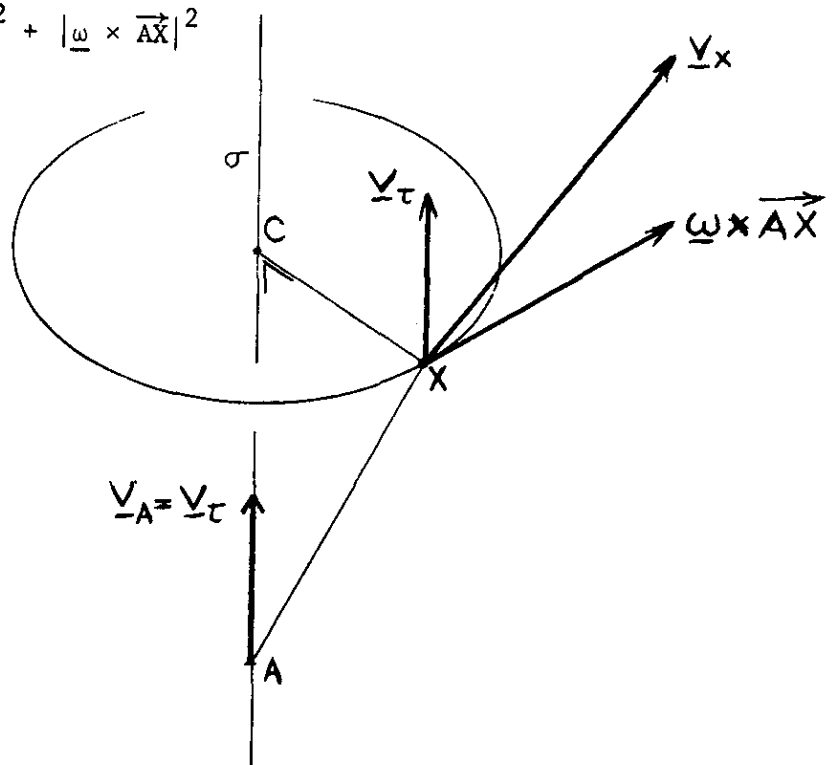
$$\underline{v}_X = \underline{v}_T + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX},$$

een som van twee onderling loodrechte vectoren, zodat

$$|\underline{v}_X|^2 = |\underline{v}_T|^2 + |\underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}|^2$$

en in het bijzonder

$$|\underline{v}_X| \geq |\underline{v}_T|$$



en $|\underline{v}_X| = |\underline{v}_T|$ dan en slechts dan als $X \in \sigma$; σ is dus ook *de verzameling van punten van S waar de snelheid minimaal is*; σ is hierdoor meetkundig gekarakteriseerd en hangt niet af van de keuze van het coördinatenstelsel.

Conclusie: Bij een ruimtelijke beweging is er op ieder ogenblik waarop $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ een rechte σ waarop de snelheid minimaal is.

Deze rechte heet de momentane (of instantane) schroefas.

Opmerking: Bij een vlakke beweging is er altijd een punt waar de snelheid $\underline{0}$ is, bij de ruimtelijke beweging blijkbaar niet.

1.4. Als voor zekere $A \in S$ en voor iedere $X \in S$ geldt

$$(7) \quad \underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}$$

geldt voor ieder tweetal punten $X, Y \in S$ dat

$$\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{y}} = \underline{v}_X - \underline{v}_Y = \underline{\omega} \times (\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AY}) = \underline{\omega} \times \overrightarrow{YX} = \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{y})$$

zodat zeker

$$(8) \quad (\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{y}}, \underline{x} - \underline{y}) = 0 .$$

Door integratie ontstaat hieruit

$$(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y}) = C$$

waarin C als functie van t constant is. Dit betekent dat het stelsel S beweegt als een star stelsel.

Deze uitspraak is een omkering van de bewering aan het eind van § 1.1.

1.5. Alvorens tot de behandeling van hetzelfde onderwerp met behulp van matrices over te gaan volgen hier enige eigenschappen (voor niet-vermelde bewijzen, zie Wiskunde 20 of 30).

Een matrix A met elementen a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) heet *orthonormaal* (in wiskunde 20: orthogonaal) als $AA^T = E$ (A^T is de gespiegelde of getransponeerde matrix van A , E is de n, n -matrix met in de hoofddiagonaal elementen 1, erbuiten 0).

De kolommen (rijen) van een orthonormale matrix A hebben de lengte 1 en zijn onderling orthogonaal; $\det(A) = \pm 1$.

Als A orthonormaal en \underline{x} een (kolom-) vector is, dan is $|\underline{Ax}| = |\underline{x}|$, als \underline{x} en \underline{y} vectoren zijn dan is $(\underline{Ax}, \underline{Ay}) = (\underline{x}, \underline{y})$. De inverse van een orthonormale matrix A is A^T . Een matrix A met elementen a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) heet *scheefsymmetrisch* als $A + A^T = 0$ (d.i. de nulmatrix, met alle elementen 0).

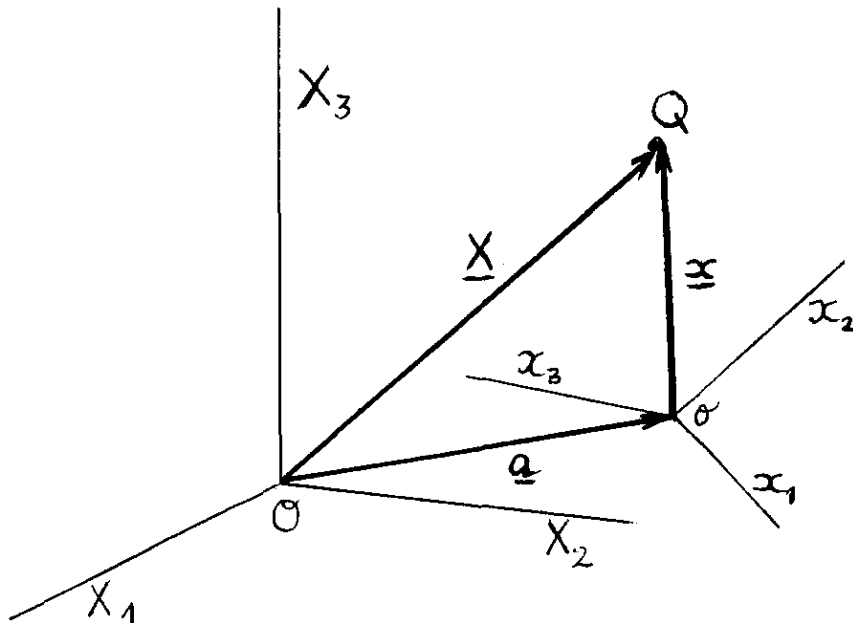
De rang van een scheefsymmetrische matrix is even (voor $n \leq 3$ is dat direct te zien, voor het algemene geval raadplege men de literatuur). Voor een scheefsymmetrische 3,3-matrix A is dus $r(A) = 0$ of 2, $\det(A) = 0$.

Voor een willekeurige vierkante matrix A zijn de volgende beweringen equivalent: $\det(A) \neq 0$; de kolommen (rijen) zijn lineair onafhankelijk; $r(A) = n$; de nulruimte heeft dimensie 0; de beeldruimte heeft dimensie n ; 0 is geen eigenwaarde; A heeft een inverse. Zo'n matrix heet *regulier*.

In het bijzonder is een orthonormale matrix *regulier*; als n oneven is, is een scheefsymmetrische n, n -matrix niet *regulier*.

Als A *regulier* is dan is $r(AB) = r(BA) = r(B)$ (voor zover de producten AB en BA bestaan); het bewijs kan men met behulp van het begrip nulruimte (zie Wiskunde 20) makkelijk zelf vinden.

- 1.6. We bespreken nu de *snelheidsverdeling met behulp van matrices*. Zij $Ox_1x_2x_3$ een coördinatenstelsel ten opzichte waarvan een star lichaam S beweegt; we kiezen in S een meebewegend coördinatenstelsel $ox_1x_2x_3$ (ten opzichte waarvan S dus *niet* beweegt). Om de keuze van dit stelsel niet bij voorbaat door de specifieke meetkundige eigenschappen van S te laten beperken denken we ons S uitgebreid tot een met S en $ox_1x_2x_3$ meebewegende ruimte V_2 ter onderscheiding waarvan we de vast gedachte ruimte met V_1 aanduiden; de beweging van V_2 t.o.v. V_1 duiden we aan met $V_2 \uparrow V_1$.



Een willekeurig punt $Q \in V_2$ (of $\in S$, zo men wil) kan men nu in V_2 vastleggen door een plaatsvector \underline{x} die in V_2 wordt bepaald door drie kentallen x_1, x_2, x_3 ; terwijl V_2 beweegt veranderen x_1, x_2, x_3 niet. Q beschrijft evenwel een baan in V_1 en de positie van Q in V_1 kunnen we vastleggen door een plaatsvector \underline{X} met kentallen X_1, X_2, X_3 die van t afhangen.

In het bijzonder doorloopt o een baan $\underline{a}(t)$. Het verband tussen \underline{X} en \underline{x} luidt meekundig

$$(9) \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{Oo} + \overrightarrow{oQ}.$$

De met \overrightarrow{OQ} en \overrightarrow{Oo} corresponderende kolomvectoren $(X_1, X_2, X_3)^T$ en $(a_1, a_2, a_3)^T$ hebben kentallen t.o.v. $OX_1X_2X_3$ en om (9) in een algebraïsche betrekking te vertalen moet \overrightarrow{oQ} ook in zulke kentallen worden uitgedrukt; nu is het toevoegen van kentallen aan een vector een lineaire afbeelding; bijgevolg is er een matrix A zodat de kolomvector $A\underline{x}$ (met $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$) de kentallen van \overrightarrow{oQ} t.o.v. $OX_1X_2X_3$ als kentallen heeft. Dus

$$(10) \quad \underline{X} = \underline{a} + A\underline{x}.$$

Uit $|A\underline{x}| = |\overrightarrow{oQ}| = |\underline{x}|$ (voor alle \underline{x}) volgt dat A orthonormaal is; als $OX_1X_2X_3$ en $ox_1x_2x_3$ beide rechts zijn (hetgeen we voortdurend onderstellen) dan is $\det(A) = 1$.

In (10) hangen \underline{X} , \underline{a} en A van t af, zodat

$$(11) \quad \dot{\underline{X}} = \dot{\underline{a}} + \dot{A}\underline{x}.$$

Hier staat weliswaar de snelheidsverdeling van $V_2 \mid V_1$, maar niet erg duidelijk: $\dot{\underline{x}}$ en $\dot{\underline{a}}$ hebben hun meetkundige betekenis in V_1 , \underline{x} evenwel in V_2 ; derhalve elimineren we \underline{x} uit (11) door (10) als volgt te schrijven

$$\underline{x} = A^{-1}(\underline{X} - \underline{a}) = A^T(\underline{X} - \underline{a})$$

en dit in (11) te substitueren:

$$(12) \quad \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{a}} + \dot{A}A^T(\underline{X} - \underline{a}) .$$

Uit $AA^T = E$ volgt $0 = \dot{A}A^T + A\dot{A}^T = \dot{A}A^T + (\dot{A}A^T)^T$ waaruit blijkt dat $\dot{A}A^T$ scheefsymmetrisch is. Ze heeft dus de gedaante

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

en als we nu de vector $\underline{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in V_1$ introduceren dan blijkt dat voor iedere $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3) \in V_1$ geldt

$$\underline{\omega} \times \underline{Z} = \begin{pmatrix} \omega_2 Z_3 - \omega_3 Z_2 \\ \omega_3 Z_1 - \omega_1 Z_3 \\ \omega_1 Z_2 - \omega_2 Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \dot{A}A^T \underline{Z} .$$

Zo zien we dat (12) overgaat in

$$(13) \quad \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{a}} + \underline{\omega} \times (\underline{X} - \underline{a}) = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \overrightarrow{oQ} ,$$

corresponderend met de in 1.1 gevonden formule.

Omdat

$$\dot{A}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

scheefsymmetrisch is, is de rang 0 of 2; indien $r(\dot{A}A^T) = 0$ is $\underline{\omega} = \underline{0}$ en is er (momenteel) een translatie; evenals vroeger laten we dit geval buiten beschouwing, zodat we $r(\dot{A}A^T) = 2$ kunnen stellen. Dan is ook $r(\dot{A}) = 2$. \dot{A} vatten we (evenals A) op als lineaire afbeelding van V_2 naar V_1 . De nulruimte van \dot{A}

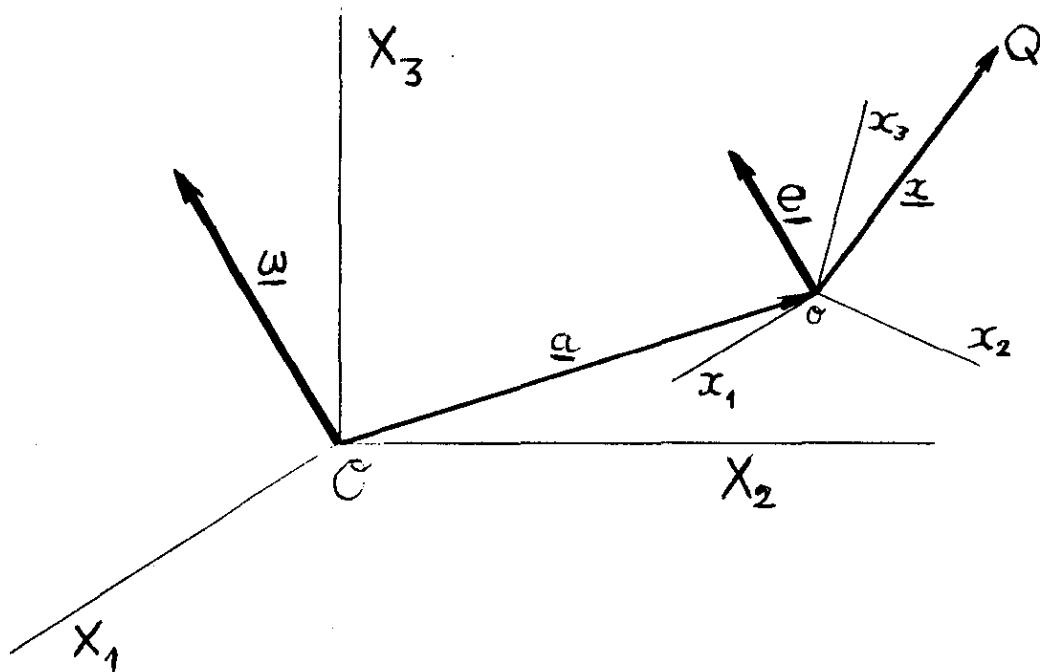
is dan een deelruimte van V_2 met dimensie 1, een rechte lijn dus; als $\underline{e} \in V_2$ met $|\underline{e}| = 1$ en $\dot{A}\underline{e} = \underline{0}$ dan wordt de nulruimte van \dot{A} door \underline{e} opgespannen (en $-\underline{e}$ heeft ook die eigenschappen). $A\underline{e}$ is dan een kolomvector in V_1 met

$$\underline{\omega} \times A\underline{e} = \dot{A}A^T A\underline{e} = \dot{A}\underline{e} = \underline{0},$$

en omdat $|A\underline{e}| = 1$ volgt hieruit (met $\omega = |\underline{\omega}|$)

$$(14) \quad \underline{\omega} = \omega A\underline{e}$$

(eventueel na \underline{e} door $-\underline{e}$ te vervangen).



Omgekeerd: in V_2 vinden we de rotatievector uitgedrukt t.o.v. $ox_1x_2x_3$ in de kolomvector $\underline{\omega}$.

1.7. Toepassing: De Cardanuskoppeling

(figuur uit: F. Schuh, Theoretische Mechanica).

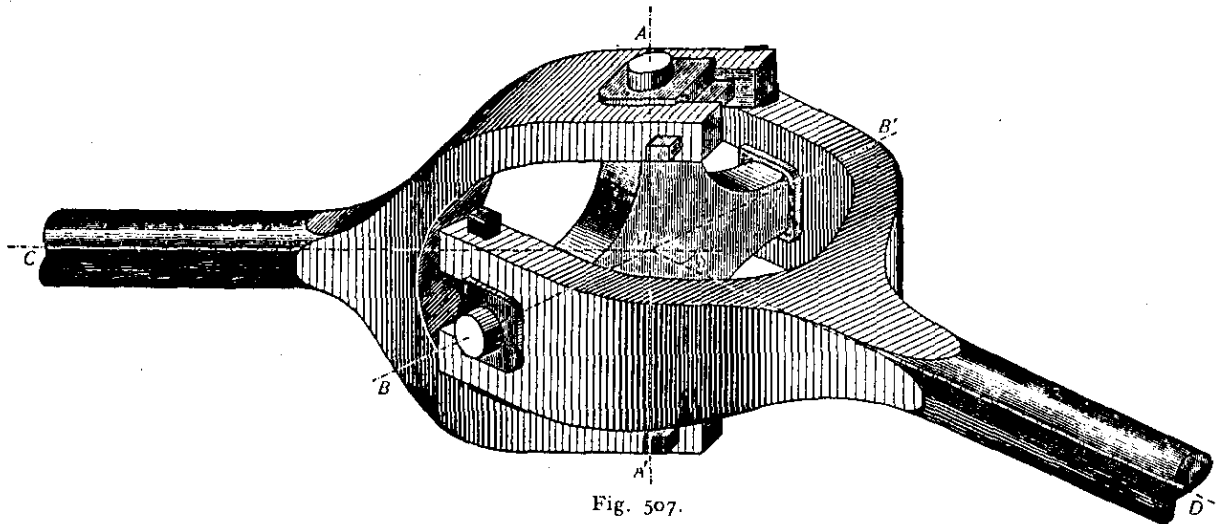


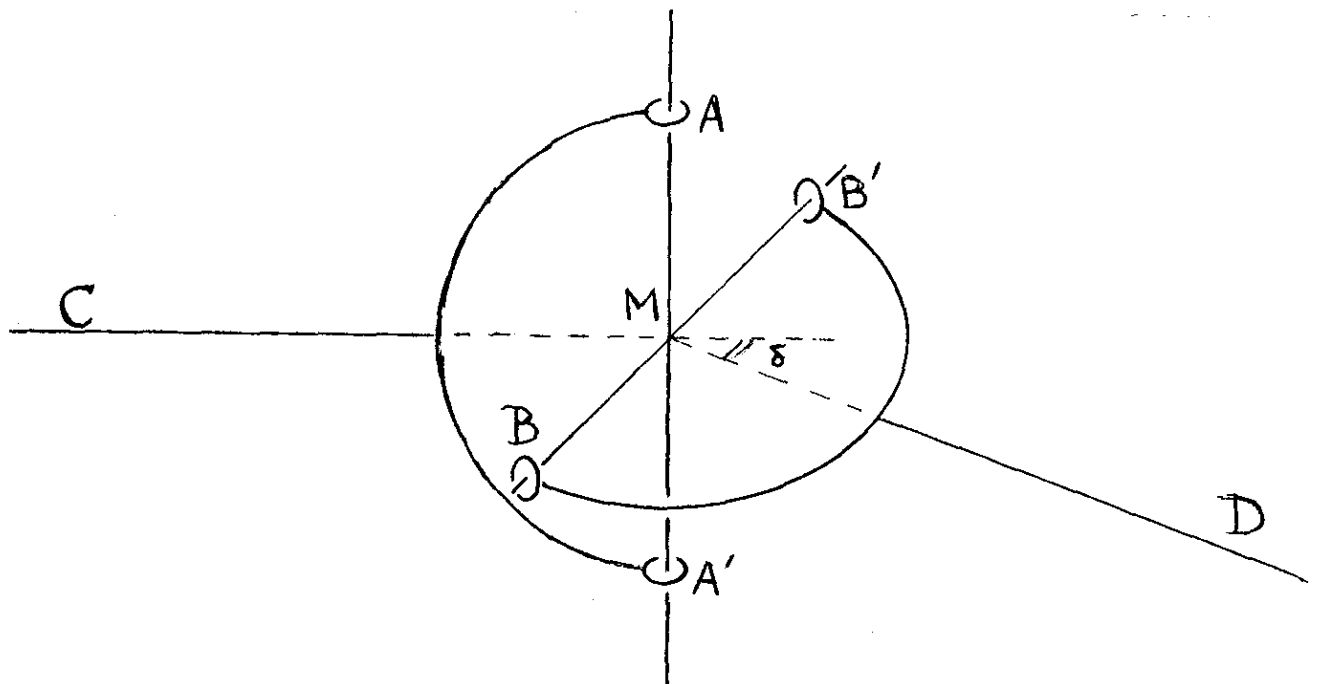
Fig. 507.

SLEUTEL OF KOPPELING VAN CARDANUS.

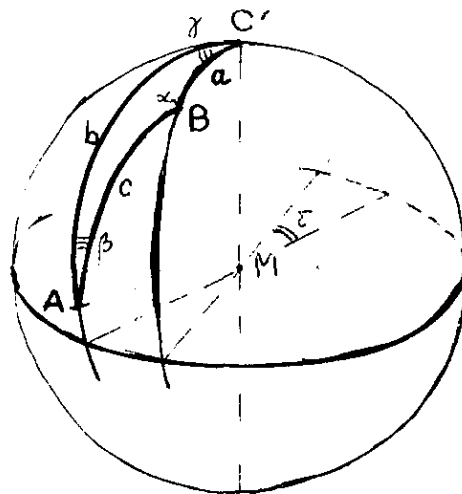
Deze afbeelding van den sleutel is volledig geconstrueerd in schieve parallelprojectie, waarbij is uitgegaan van de horizontale en de verticale projectie. Het vlak door de hartlijnen van de beide aan elkaar gekoppelde assen is horizontaal aangenomen.

De afbeelding is, afgezien van onderdeelen, die uit een kinematisch oogpunt niet ter zake doen, getekend naar deze soort koppelingen, zooals die in de techniek wel gebruikt worden.

Deze koppeling dient om een rotatie om een as C over te brengen op een as D die daarmee een (kleine) hoek δ maakt; C en D liggen in één vlak.



A, A', B en B' doorlopen grote cirkels op een bol met middelpunt M; de straal nemen we voor het gemak 1; deze cirkels liggen in vlakken die een hoek δ insluiten. Het lichaam waartoe A, A', B, B' en M behoren (kruisstuk) is star; $\angle AMB = \frac{\pi}{2}$. We noemen het zenith van deze bol C' en letten op boldriehoek ABC'. De zijden ervan zijn bogen van grote cirkels, die we uitdrukken in de bijbehorende middelpuntshoeken a, b, c; de hoeken ervan zijn



hoeken tussen vlakken (waarin die grote cirkels liggen), α , β en γ ; $c = \frac{\pi}{2}$ en $\gamma = \delta$. We passen de cosinusregel uit de boldriehoeksmeting toe:

$$(15) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

waaruit wegens $\cos c = 0$ en $\cos \gamma = \cos \delta$ volgt

$$(16) \quad \cot a \cot b = -\cos \delta.$$

Door differentiëren volgt hieruit

$$\frac{\dot{a} \cot b}{\sin^2 a} + \frac{\dot{b} \cot a}{\sin^2 b} = 0.$$

\dot{a} en \dot{b} zijn precies de hoeksnelheden van de assen CM resp. MD, ω_1 en ω_2 ; bijgevolg is

$$(17) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{\cot b \sin^2 b}{\cot a \sin^2 a}.$$

Met (16) volgt

$$\sin^2 b = (\cot^2 b + 1)^{-1} = \cot^2 a (\cos^2 \delta + \cot^2 a)^{-1}$$

zodat we uit (16) en (17) b kunnen elimineren

$$(18) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \delta}{1 - \sin^2 a \sin^2 \delta}.$$

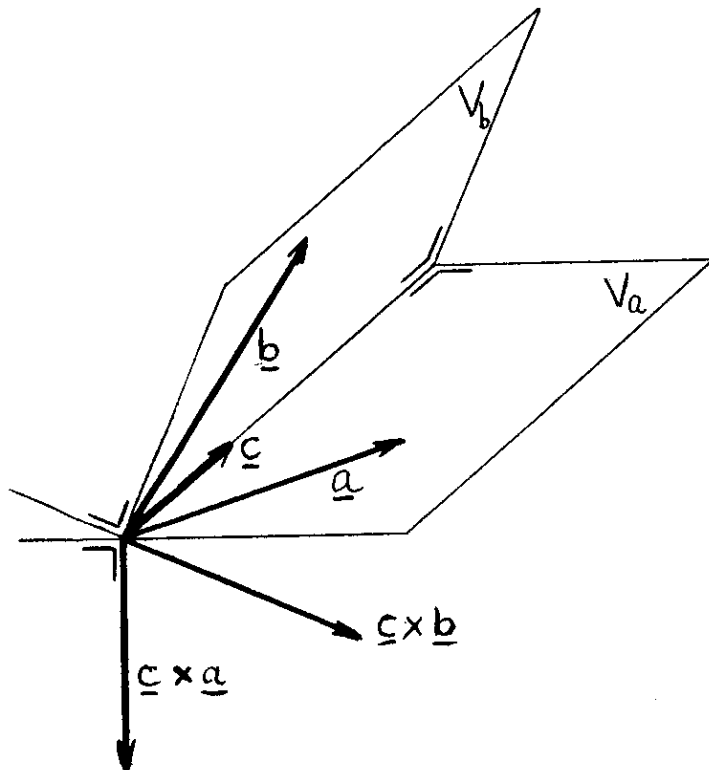
Omdat a van t afhangt is deze uitdrukking niet constant tenzij $\delta = 0$ (en dan is $\omega_2 = \omega_1$).

Voor $a := 0$ is $\omega_2 \omega_1^{-1}$ minimaal, namelijk $\cos \delta$, voor $a := \frac{\pi}{2}$ maximaal, $(\cos \delta)^{-1}$; hieruit blijkt dat $\delta \neq \frac{\pi}{2}$ moet zijn.

Ook als ω_1 constant is, zodat $a = \omega_1 t$, is ω_2 niet constant.

1.8. Bewijs van de gebruikte cosinusregel (15)

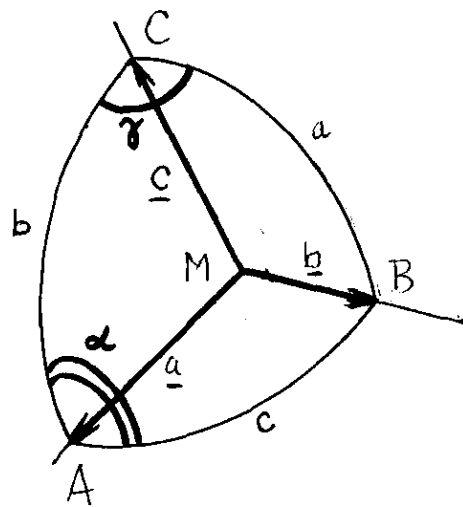
Indien twee halfvlakken V_a en V_b een hoek γ maken, \underline{c} een vector op $V_a \cap V_b$ is, \underline{a} in V_a ligt en \underline{b} in V_b dan is de hoek tussen $\underline{c} \times \underline{a}$ en $\underline{c} \times \underline{b}$ eveneens γ (merk op dat $\underline{c} \times \underline{a} \perp V_a$ en $\underline{c} \times \underline{b} \perp V_b$).



Beschouw nu de boldriehoek ABC met zijden a, b en c en hoeken α , β en γ .

Neem de straal van de bol voor het gemak 1. $\underline{a} := \vec{MA}$ enzovoort;

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1.$$



Eenzijds is

$$\begin{aligned}
 (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{c} \times \underline{b}) &= |\underline{c} \times \underline{a}| |\underline{c} \times \underline{b}| \cos \gamma = |\underline{a}| |\underline{c}| \sin b |\underline{b}| |\underline{c}| \sin a \cos \gamma = \\
 &= \sin a \sin b \cos \gamma .
 \end{aligned}$$

Anderzijds is

$$\begin{aligned}
 (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{c} \times \underline{b}) &= (\underline{c}, \underline{a} \times (\underline{c} \times \underline{b})) = (\underline{c}, \underline{c})(\underline{a}, \underline{b}) - (\underline{c}, \underline{b})(\underline{c}, \underline{a}) = \\
 &= |\underline{c}|^2 |\underline{a}| |\underline{b}| \cos c - |\underline{c}| |\underline{b}| \cos a |\underline{c}| |\underline{a}| \cos b = \\
 &= \cos c - \cos a \cos b .
 \end{aligned}$$

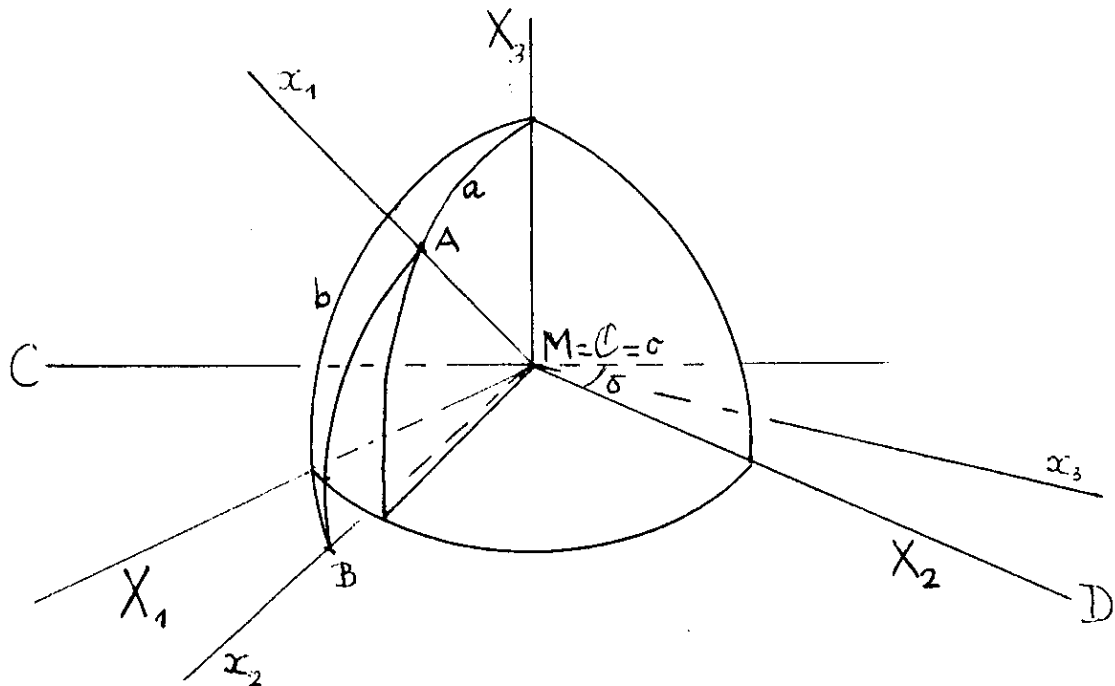
1.9. De beweging van het kruisstuk ("spider") van de Cardanuskoppeling

Aangezien het punt M van het kruisstuk niet van plaats verandert is $\underline{v}_M = \underline{0}$ en bijgevolg is de momentele schroefas σ een lijn door M waarvoor $\underline{v}_\tau = \underline{0}$; dit betekent dat er op ieder ogenblik slechts van momentele rotatie sprake is en men in dit geval beter van *momentele rotatie-as* kan spreken. We bestuderen in deze paragraaf de beweging van σ in het kruisstuk (V_2) en de beweging van σ in V_1 .

Het vaste coördinatenstelsel van V_1 kiezen we als volgt: $O := M$, OX_2 valt langs de as D, OX_3 is verticaal, OX_1 is aangepast zó dat $OX_1X_2X_3$ een rechts orthonormaal stelsel is.

Voor het met V_2 meebewegend coördinatenstelsel nemen we $o := M$, ox_1 langs MA, ox_2 langs MB, ox_3 zó dat $ox_1x_2x_3$ een rechts orthonormaal stelsel is ($\angle AMB = c = \frac{\pi}{2}$).

We nemen, als tevoren, $AM = BM = 1$; A en B beschrijven dan grote cirkels op de bol met O als middelpunt en met straal 1, en wel



B in het vlak $X_2 = 0$,

A in het vlak $X_1 \sin \delta - X_2 \cos \delta = 0$.

Zij nu C de matrix die aan punten van V_2 kentallen in V_1 toevoegt; in de kolommen van C vinden we dan de kentallen van \vec{oA} , \vec{oB} en $\vec{oA} \times \vec{oB}$.

Het is meetkundig direct duidelijk dat

$$\vec{oB} = (\sin b, 0, \cos b)^T$$

en dat

$$\vec{oA} = (\cos \delta \sin a, \sin \delta \sin a, \cos a)^T$$

zodat

$$C = \begin{pmatrix} \cos \delta \sin a & \sin b & \sin \delta \sin a \cos b \\ \sin \delta \sin a & 0 & \cos a \sin b - \cos \delta \sin a \cos b \\ \cos a & \cos b & -\sin \delta \sin a \sin b \end{pmatrix}.$$

Om $\underline{\omega}$ en \underline{e} (van § 1.6) te bepalen moeten we oplossen het stelsel vergelijkingen:

$$\dot{\underline{C}}\underline{x} = \underline{0}.$$

Om rekentechnische redenen beschouwen we $C' := \frac{dC}{da}$ waarvoor

$$\dot{C} = \frac{dC}{dt} = \frac{dC}{da} \cdot \frac{da}{dt} = \dot{a}C'$$

zodat het stelsel vergelijkingen (behoudens het oninteressante geval $\dot{a} = 0$) ook wordt voorgesteld door

$$(19) \quad C' \underline{x} = \underline{0}.$$

Omdat $r(C') = r(\dot{C}) = 2$ is voor het oplossen van (19) voldoende om twee onafhankelijke rijen van C' te kennen; als die \underline{p}^T en \underline{q}^T zijn is $\underline{p} \times \underline{q}$ een oplossing van (19).

(16) is gelijkwaardig met

$$\cos a \cos b = -\cos \delta \sin a \sin b$$

en onder voordurend inachtnemen van deze betrekking volgt nu door differentiëren naar a van de eerste rij van C (waarbij $b' := \frac{db}{da}$):

$$\begin{aligned} \underline{p}^T &= (\cos \delta \cos a, 0, \sin \delta \cos a \cos b) + b'(0, \cos b, -\sin \delta \sin a \sin b) = \\ &= \cos \delta (\cos a, 0, -\sin \delta \sin a \sin b) + b' \cos b (0, 1, \tan \delta \cos a) \end{aligned}$$

en evenzo uit de tweede rij van C

$$\begin{aligned} \underline{q}^T &= (\sin \delta \cos a, 0, -\sin a \sin b - \cos \delta \cos a \cos b) + \\ &+ b'(0, 0, \cos a \cos b + \cos \delta \sin a \sin b) = \\ &= (\sin \delta \cos a, 0, (\cos \delta)^{-1} (1 - \cos^2 \delta) \cos a \cos b) = \\ &= \tan \delta \cos a (\cos \delta, 0, \sin \delta \cos b). \end{aligned}$$

Dan is

$$\begin{aligned} (\underline{p} \times \underline{q})^T &= \sin \delta \cos a (0, -\sin \delta \cos a \cos b - \cos \delta \sin \delta \sin a \sin b, 0) + \\ &+ b' \tan \delta \cos a \cos b (\sin \delta \cos b, \sin \delta \cos a, -\cos \delta) = \\ &= b' \tan \delta \cos a \cos b (\sin \delta \cos b, \sin \delta \cos a, -\cos \delta). \end{aligned}$$

De nulruimte van C' (en van \dot{C}) wordt opgespannen door

$$\underline{d} := (\sin \delta \cos b, \sin \delta \cos a, -\cos \delta)^T.$$

De momentële rotatieas σ is in V_2 de lijn door σ en met richting \underline{d} ; aangezien a en b van t afhangen, verandert de positie van σ in V_2 , maar zo dat ze voortdurend door o gaat. Dit betekent dat ze een kegel doorloopt waarvan we de vergelijking vinden door de van t afhankelijke variabelen a en b en de lopende parameter μ uit de parametervoorstelling van σ ,

$$(20a) \quad x_1 = \mu \sin \delta \cos b$$

$$(20b) \quad x_2 = \mu \sin \delta \cos a$$

$$(20c) \quad x_3 = -\mu \cos \delta,$$

en de aan (15) ontleende betrekking

$$(21) \quad \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \delta = 0$$

te elimineren.

Dan komt er na enig herleiden

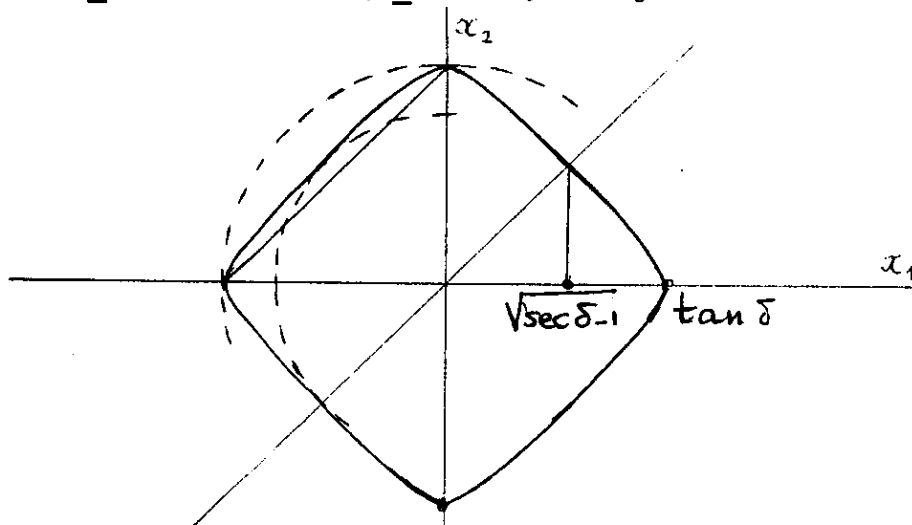
$$(22) \quad x_3^2 \tan^2 \delta - x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 = 0,$$

de vergelijking van de zogenaamde *bewegende polode* Σ_2 .

Om enig inzicht te krijgen in de ligging van Σ_2 in V_2 snijden we Σ_2 met het vlak $x_3 = 1$; voor de snijkromme geldt

$$(23) \quad x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 = \tan^2 \delta.$$

De snijpunten van deze kromme met de assen (gemakshalve in het x_1 - x_2 vlak bekeken) zijn $(\pm \tan \delta, 0)$ en $(0, \pm \tan \delta)$, terwijl men direct ziet dat



$x_1^2 + x_2^2 \leq \tan^2 \delta$ is; voorts is de kromme symmetrisch t.o.v. de lijnen $x_2 = \pm x_1$, die ze snijdt in de punten met $|x_1| = \sqrt{\sec \delta - 1}$.

Met de gewone middelen van de analyse kan men bewijzen dat

$$2(\sec \delta - 1) \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \tan^2 \delta$$

en dat de kromme convex is (ze heeft dus geen buigpunten).

In V_1 heeft σ als richtingsvector $\underline{\omega}$ die daar de kentallen heeft van een of ander veelvoud van \underline{Cd} :

$$\begin{aligned} \underline{Cd} &= \begin{pmatrix} \cos \delta \sin a & \sin b & \sin \delta \sin a \cos b \\ \sin \delta \sin a & 0 & \cos a \sin b - \cos \delta \sin a \cos b \\ \cos a & \cos b & -\sin \delta \sin a \sin b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \delta \cos b \\ \sin \delta \cos a \\ -\cos \delta \end{pmatrix} = \\ &= (\sin a)^{-1} \begin{pmatrix} \sin \delta \sin a \cos a \sin b \\ \cos b \\ \sin \delta \sin a \cos a \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

σ doorloopt ook in V_1 een kegel, Σ_1 , waarvan de vergelijking wordt gevonden door eliminatie van a , b en μ uit

$$(24a) \quad X_1 = \mu \sin \delta \sin a \cos a \sin b$$

$$(24b) \quad X_2 = \mu \cos b$$

$$(24c) \quad X_3 = \mu \sin \delta \sin a \cos a \cos b$$

en

$$(21) \quad \cos a \cos b + \cos \delta \sin a \sin b = 0.$$

Door de derde van deze vergelijkingen a.e.v. door de eerste en de tweede te delen ontstaat

$$X_3 = X_1 \cot b \quad \text{en} \quad X_3 = X_2 \sin \delta \sin a \cos a$$

waaruit (met de vierde vergelijking en wat goniometrie)

$$(25a) \quad X_3 = -X_1 \cos \delta \tan a = -\frac{X_1 \cos \delta \sin 2a}{1 + \cos 2a}$$

en

$$(25b) \quad 2X_3 = X_2 \sin \delta \sin 2a.$$

Uit deze vergelijkingen moet dan a nog geëlimineerd worden:

$$(1 + \cos 2a)X_3 = -X_1 \cos \delta \sin 2a = -\frac{2X_1 X_3 \cos \delta}{X_2 \sin \delta},$$

$$\cos 2a = -\frac{2X_1 \cos \delta}{X_2 \sin \delta} - 1,$$

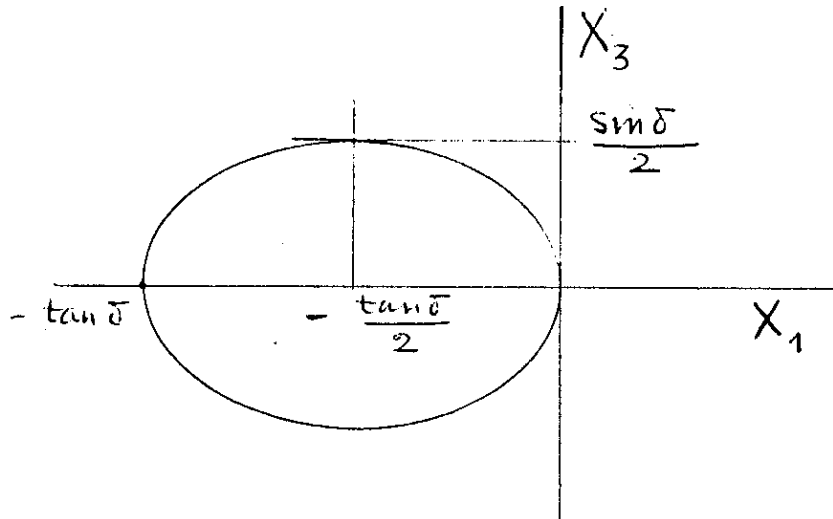
$$1 - \left(\frac{2X_3}{X_2 \sin \delta}\right)^2 = \left(1 + \frac{2X_1 \cos \delta}{X_2 \sin \delta}\right)^2,$$

$$X_2^2 \sin^2 \delta - 4X_3^2 = X_2^2 \sin^2 \delta + 4X_1 X_2 \cos \delta \sin \delta + 4X_1^2 \cos^2 \delta,$$

$$(26) \quad X_3^2 + X_1^2 \cos^2 \delta + X_1 X_2 \cos \delta \sin \delta = 0.$$

Σ_1 is een kwadratische kegel die het vlak $X_2 = 1$ sijdt in de ellips met vergelijking

$$(27) \quad \left(\frac{X_3}{\frac{\sin \delta}{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_1 + \frac{\tan \delta}{2}}{\frac{\tan \delta}{2}}\right)^2 = 1$$



Σ_1 heet de *vaste polode*.

*1.10. Enige opmerkingen bij het voorgaande

i) De bewegende polode Σ_2 in V_2 .

De kromme die Σ_2 in het vlak $x_3 = 1$ insnijdt kan men ook verkrijgen door (20) met (21) als een parametervoorstelling van Σ_2 te beschouwen, met parameters a en μ ; door (21) wordt b impliciet als functie van a gegeven, waarvoor

$$(28) \quad b' = \frac{\dot{b}}{\dot{a}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \delta}{1 - \sin^2 a \sin^2 \delta}$$

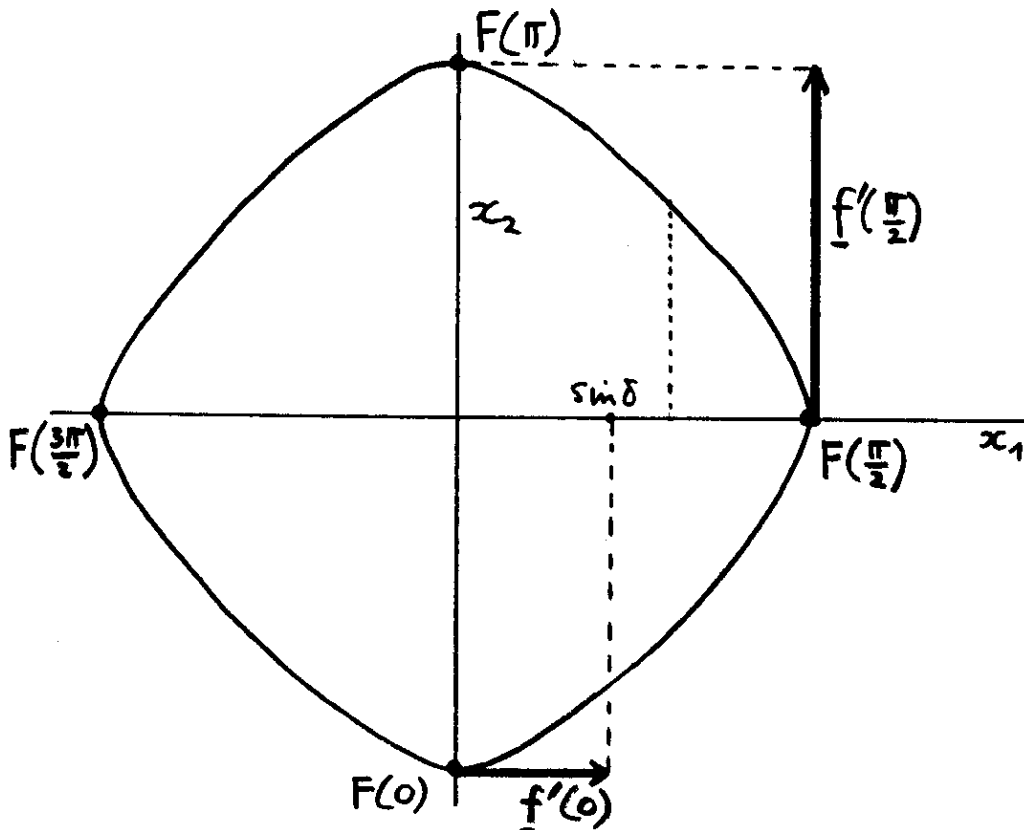
en, zoals eerder opgemerkt,

$$(29) \quad \cos \delta = b'(0) \leq b' \leq b'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\cos \delta} .$$

Σ_2 snijden met $x_3 = 1$ betekent dat $\mu = \frac{-1}{\cos \delta}$, en hieruit volgt dat voor (de projectie van) de snijkromme (in het $x_1 x_2$ -vlak) geldt

$$x_1 = -\tan \delta \cos b$$

$$x_2 = -\tan \delta \cos a .$$



Noemen we dit punt $F(a)$ met plaatsvector $\underline{f}(a)$ dan geldt voor de snelheid waarmee deze kromme wordt doorlopen

$$\underline{f}'(a) = \tan \delta (b' \sin b, \sin a)^T$$

en

$$|\underline{f}'(a)| = \tan \delta \sqrt{b'^2 \sin^2 b + \sin^2 a} .$$

Aangezien $\sin a = 0 = \sin b$ op grond van (15) is uitgesloten en $b' > 0$ is ook $|\underline{f}'(a)| > 0$; $|\underline{f}'(a)|$ heeft dan een positieve ondergrens zodat de baan van F inderdaad door (23) wordt gegeven, en dezelfde periode heeft als de as C .

ii) De vaste polode Σ_1 in V_1 .

Als we in (24) $X_2 = 1$ stellen komt er

$$X_1 = \sin \delta \sin a \cos a \tan b$$

$$X_3 = \sin \delta \sin a \cos a$$

terwijl uit (16) volgt $\tan b = -\cot a (\cos \delta)^{-1}$ zodat

$$X_1 = -\tan \delta \cos^2 a = -\frac{1}{2} \tan \delta (\cos 2a + 1)$$

$$X_3 = \sin \delta \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin \delta \sin 2a$$

en

$$\frac{2X_1}{\tan \delta} + 1 = -\cos 2a$$

$$\frac{2X_3}{\sin \delta} = \sin 2a ,$$

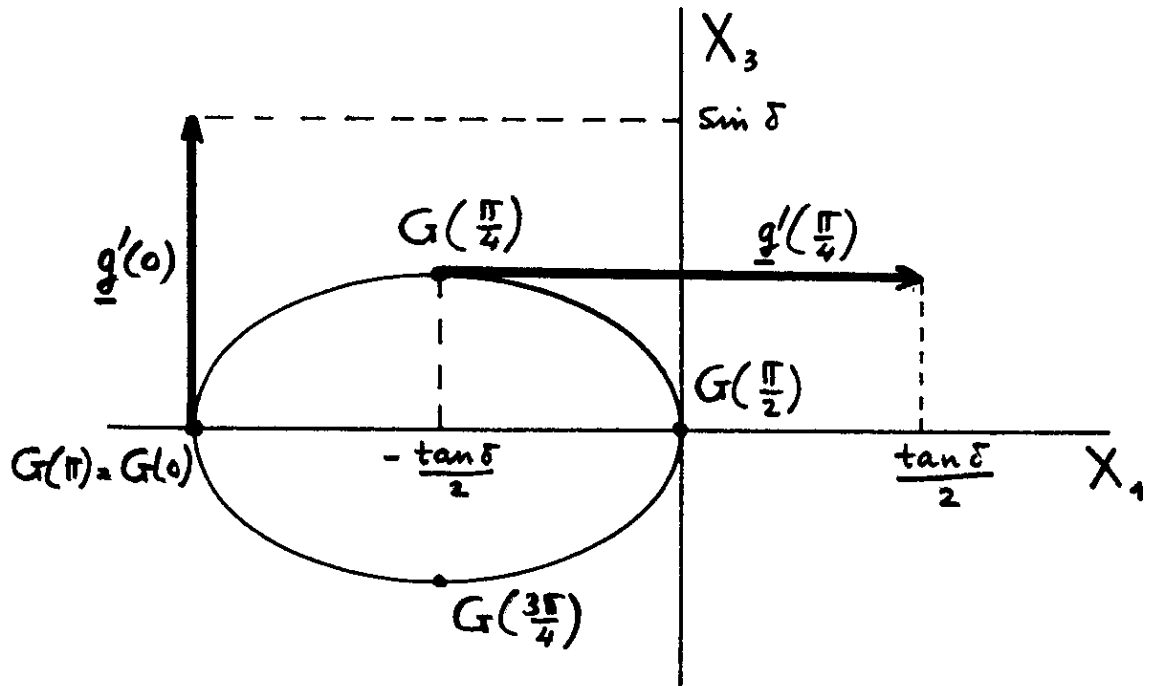
direct als parametervoorstelling van een ellips herkenbaar. Zij hier G het punt met plaatsvector \underline{g} , dan is

$$G(a) = (-\frac{1}{2} \tan \delta (\cos 2a + 1), \frac{1}{2} \sin \delta \sin 2a) ,$$

$$\underline{g}(a) = (\tan \delta \sin 2a, \sin \delta \cos 2a)^T ,$$

$$|\underline{g}'(a)| = \tan \delta \sqrt{\sin^2 2a + \cos^2 \delta \cos^2 2a} > 0 .$$

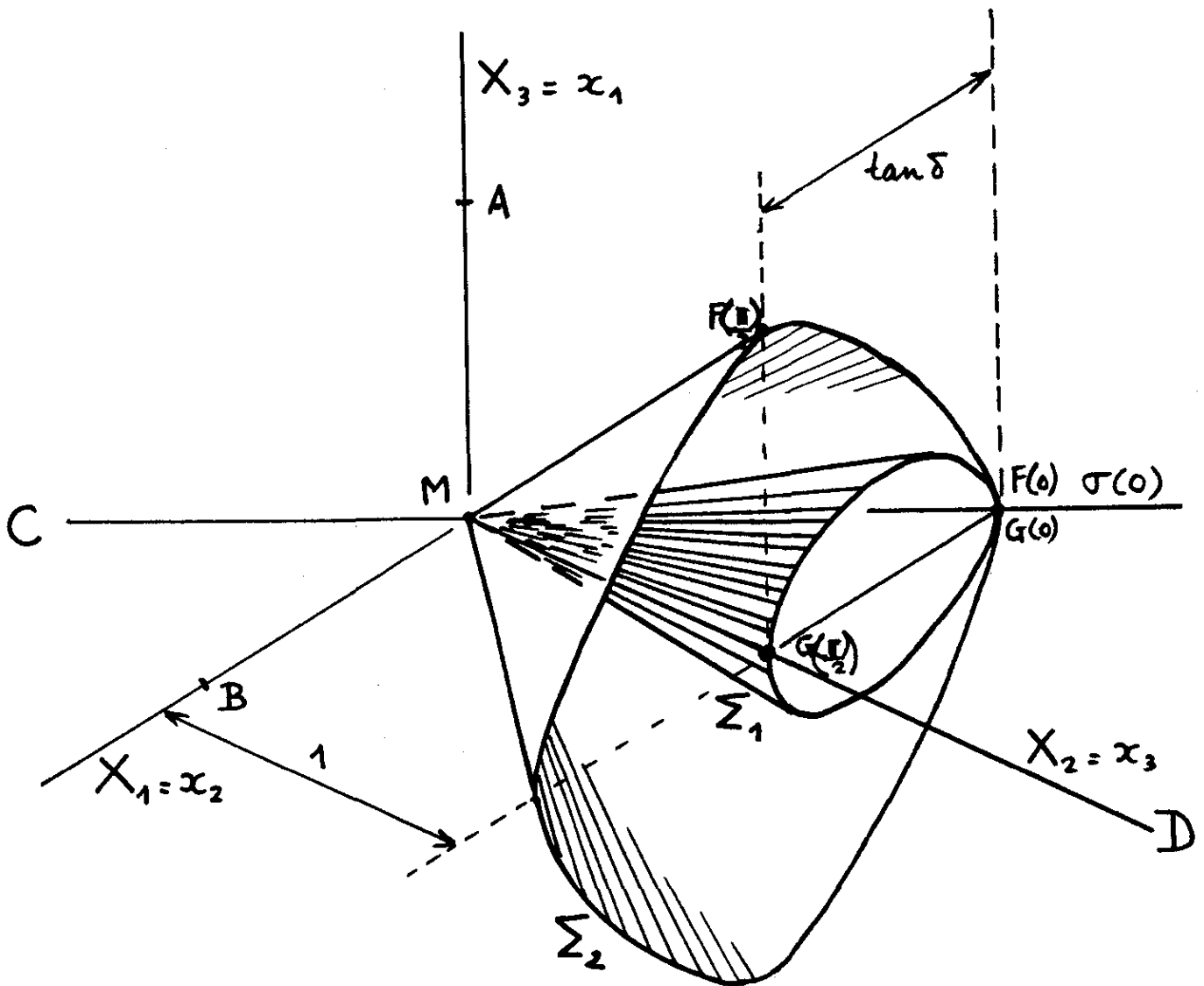
Ook hier is de baan van G de kromme die door (27) wordt voorgesteld; G doorloopt deze kromme met een periode die half zo groot is als die van F in V_2 .



iii) De beide poloden op het ogenblik dat $a = 0$.

Als $a = 0$ is A in het zenith van de bol met middelpunt M en straal 1 ; de x_1 -as in V_2 valt samen met de X_3 -as in V_1 , de x_2 -as met de X_1 -as, de x_3 -as met de X_2 -as. Het vlak met $x_3 = 1$ in V_2 valt samen met het vlak $X_2 = 1$ in V_1 ; in de tekening ziet men dat de assen C en D juist de uiterste beschrijvende zijn van de vaste polode Σ_1 , gezien van boven.

$\sigma(0)$ gaat door $F(0) = G(0)$ en is de gemeenschappelijke beschrijvende van Σ_1 en Σ_2 , die langs $\sigma(0)$ aan elkaar raken. Merk op dat als $a = \frac{\pi}{2}$ niet $F(\frac{\pi}{2})$ in V_2 samenvalt met $G(\frac{\pi}{2})$ in V_1 , maar wel de bijbehorende beschrijvende.



Dat Σ_1 langs $\sigma(0)$ aan Σ_2 inwendig raakt volgt uit de krommingen van de doorsnijdingskrommen met $X_2 = 1$; voor de ellips is $\kappa_1(0) = \frac{2}{\cos \delta \sin \delta}$ terwijl voor de andere kromme $\kappa_2(0) = 0$; dit betekent dat de ellips die kromme inwendig raakt, en bijgevolg raakt Σ_1 inwendig aan Σ_2 .

1.11. De beweging van de poloden

De beweging van het kruisstuk bestaat nu daaruit dat de vast met AMB verbonden kegel Σ_2 over Σ_1 rolt. Dat hier van rollen sprake is blijkt daaruit dat de snelheid van het raakpunt langs zijn baan in Σ_1 dezelfde is als die van het raakpunt langs zijn baan in Σ_2 . Men kan dit verifiëren in $F(0)$ en $G(0)$, waar $\underline{f}'(0) = \underline{g}'(0) = \sin \delta$ (maar let op: de met F corresponderende baan in Σ_1 is niet G).

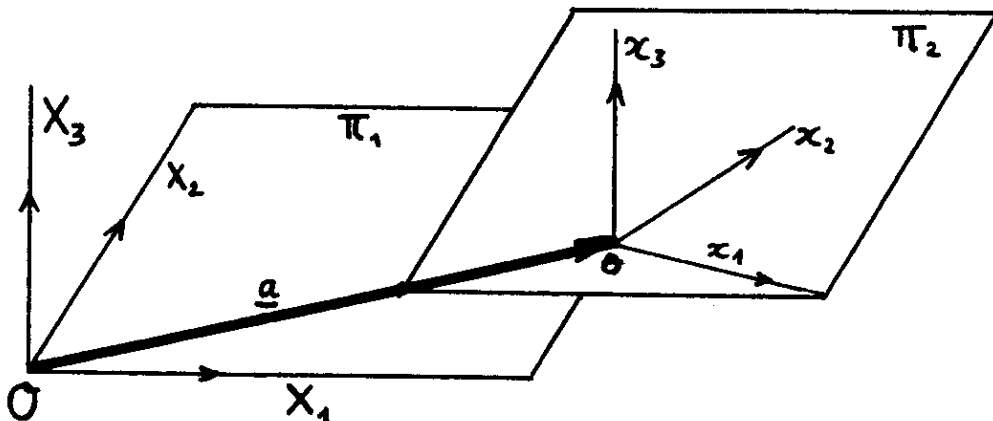
De raakvlakken langs σ aan Σ_1 en Σ_2 vallen samen.

In het algemene geval evenwel is $\underline{v}_\tau \neq \underline{0}$ en zijn de poloden geen kegels maar regelvlakken; wel raakt dan op ieder tijdstip Σ_2 aan Σ_1 , in ieder punt van σ (zij het dat, niet zoals tevoren, het raakvlak aan Σ_1 en Σ_2 langs σ van punt tot punt verandert) maar Σ_2 rolt niet alleen maar schuift bovendien in de richting \underline{v}_τ langs Σ_1 , een samengestelde beweging die we *schrooien* noemen.

1.12. Vlakke beweging

De beweging $V_2 | V_1$ heet *vlak* indien een vlak π_2 , vast in V_2 , voortdurend samenvalt met een vlak π_1 , vast in V_1 .

We passen de keuze der coördinatenstelsels aan deze situatie aan door O in π_1 en o in π_2 te nemen, zodat o een baan in π_1 beschrijft; voorts nemen we $OX_3 \perp \pi_1$ en $ox_3 \perp \pi_2$, de overige coördinaatassen zó dat de coördinatenstelsels orthonormaal zijn; OX_3 en ox_3 laten we ten opzichte van π_1 (en π_2) naar dezelfde kant wijzen.



Door deze keuze kunnen we van \underline{a} en A uit

$$(10) \quad \underline{X} = \underline{a} + A\underline{x}$$

het volgende zeggen: \underline{a} is de plaatsvector van o , dus $a_3 = 0$ en \underline{a} is van de gedaante $(a_1, a_2, 0)^T$.

De eerste twee kolommen van A beschrijven de vectoren $(1, 0, 0)^T$ en $(0, 1, 0)^T$ van V_2 in de X_1, X_2, X_3 -coördinaten van V_1 ; aangezien ze in het X_1OX_2 -vlak bewegen is hun 3^e kengetal 0:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Omdat de derde rij van A een eenheidsvector is, moet ze $\pm (0,0,1)$ zijn; omdat de derde kolom een eenheidsvector is moet ze dan eveneens $\pm (0,0,1)$ zijn; uit de afspraak over de richtingen van de X_3 -as en de x_3 -as volgt dan dat ze $(0,0,1)$ is; dus

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Uit de orthonormaliteit van A volgt nu dat

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met een orthonormale

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

waarvoor bovendien $\det(D) = 1$; uit Wiskunde 20 weten we dan dat er één φ is met $0 \leq \varphi < 2\pi$ en

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} ;$$

D stelt, opgevat als een afbeelding van \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 , een draaiing over φ voor. Zodoende is

$$(30) \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

We bepalen bij deze beweging de momentele schroefas σ , de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ en de translatiesnelheid \underline{v}_τ .

$\underline{\omega}$ is de vector waarvan de kentallen voorkomen in

$$\dot{A}A^T = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zodat

$$(31) \quad \underline{\omega} = (0, 0, \dot{\phi})^T,$$

$\underline{\omega}$ staat loodrecht op π_1 en π_2

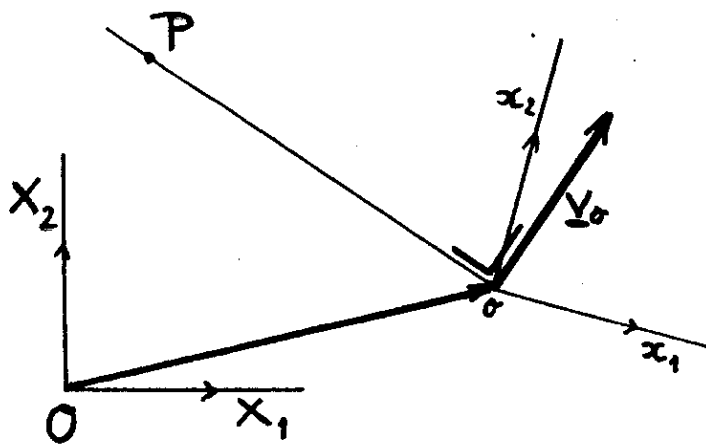
en

$$(32) \quad \omega = |\dot{\phi}|.$$

Aangezien \underline{v}_τ de component is van elke \underline{v}_x in de richting $\underline{\omega}$ is $\underline{v}_\tau = \underline{0}$: er is geen translatie (tenzij $\underline{\omega} = \underline{0}$).

De momentele schroef- (rotatie-) as vinden we uit

$$\underline{v}_x = \underline{v}_o + \underline{\omega} \times \overrightarrow{OX}$$



zodat voor $X \in \sigma$ (met $\underline{v}_x = \underline{v}_\tau = \underline{0}$)

$$\underline{v}_o = -\underline{\omega} \times \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX} \times \underline{\omega}.$$

Als P het snijpunt is van σ met π_1 dan is $\overrightarrow{OP} \perp \underline{\omega}$ zodat

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \underline{\omega} \times \underline{v}_o$$

met een λ die voldoet aan

$$\underline{v}_o = \overrightarrow{OP} \times \underline{\omega} = \lambda (\underline{\omega} \times \underline{v}_o) \times \underline{\omega} = \lambda \omega^2 \underline{v}_o$$

en

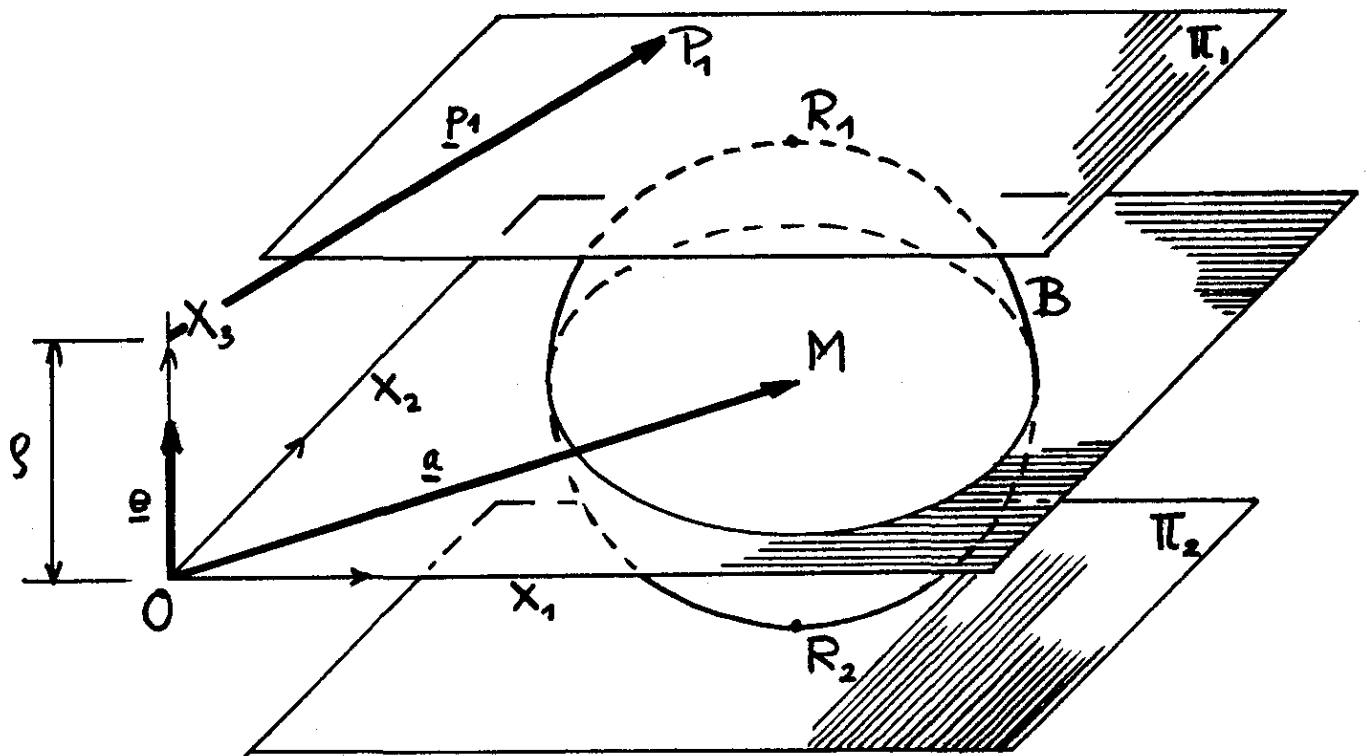
$$(33) \quad \overrightarrow{OP} = \omega^{-2} \underline{\omega} \times \underline{v}_o.$$

σ is de lijn door P en loodrecht op π_1 (en π_2).

P heet de *pool* van de vlakke beweging; zijn baan in π_1 heet de *vaste polode* van de vlakke beweging (vroeger ook wel *poolbaan*) en is de doorsnee van π_1 met de vaste polode Σ_1 van $V_2 | V_1$ (die een cylinder is); de baan van P in π_2 heet evenzo de *bewegende polode* van de vlakke beweging (*poolkromme*) en is de doorsnee van Σ_2 (eveneens een cylinder) met π_2 .

1.13. Een stelsel dat beweegt als een star stelsel (vergelijk 1.4)

Tussen twee evenwijdige vlakken π_1 en π_2 bevindt zich een bol B met middelpunt M en straal ρ , rakend aan π_1 en π_2 in respectievelijk R_1 en R_2 en rollend over π_1 en π_2 ; gevraagd wordt de beweging van deze bol te bepalen als π_1 en π_2 vlakke bewegingen uitvoeren (in hun vlak).



Er zijn drie bewegingen, die we aangeven met

$$B | V, \pi_1 | V, \pi_2 | V.$$

We kiezen het X_1OX_2 -vlak van het vaste coördinatenstelsel in V door M en evenwijdig aan π_1 en π_2 .

Zij $\underline{e} := (0,0,1)^T$, \underline{a} de plaatsvector van M , $\underline{p}_1 + \rho\underline{e}$ die van de pool P_1 van $\pi_1 \mid V$ en $\underline{p}_2 - \rho\underline{e}$ die van de pool P_2 van $\pi_2 \mid V$.

De hoeksnelheden van de drie bewegingen zijn (mede op grond van 1.12, zie (31) en (32)) respectievelijk

$$\underline{\omega}, \omega_1\underline{e}, \omega_2\underline{e}.$$

Voor R_1 geldt, als punt van B beschouwd,

$$(34) \quad \underline{v}_{R_1} = \underline{v}_M + \underline{\omega} \times \overrightarrow{MR_1} = \underline{v}_M + \rho\underline{\omega} \times \underline{e}$$

en als punt van π_1 beschouwd (wegens $\underline{v}_{P_1} = \underline{0}$)

$$(35) \quad \underline{v}_{R_1}^{(1)} = \omega_1\underline{e} \times \overrightarrow{P_1R_1} = \omega_1\underline{e} \times (\underline{a} - \underline{p}_1),$$

terwijl het rollen van π_1 over B juist is gedefinieerd door

$$\underline{v}_{R_1} = \underline{v}_{R_1}^{(1)},$$

zodat uit (34) en (35) volgt

$$(36) \quad \underline{v}_M + \rho\underline{\omega} \times \underline{e} = \omega_1\underline{e} \times (\underline{a} - \underline{p}_1).$$

Past men dezelfde redenering toe op R_2 , waarvoor $\overrightarrow{OR_2} = \underline{a} - \rho\underline{e}$, dan komt er

$$(37) \quad \underline{v}_M - \rho\underline{\omega} \times \underline{e} = \omega_2\underline{e} \times (\underline{a} - \underline{p}_2)$$

en door optellen van (36) en (37)

$$\begin{aligned} 2\underline{v}_M &= \omega_1\underline{e} \times (\underline{a} - \underline{p}_1) + \omega_2\underline{e} \times (\underline{a} - \underline{p}_2) = \\ &= (\omega_1 + \omega_2)\underline{e} \times \underline{a} - \underline{e} \times (\omega_1\underline{p}_1 + \omega_2\underline{p}_2) = \\ &= (\omega_1 + \omega_2)\underline{e} \times \left(\underline{a} - \frac{\omega_1\underline{p}_1 + \omega_2\underline{p}_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) \end{aligned}$$

dat wil zeggen

$$(38) \quad \underline{v}_M = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \underline{e} \times \left(\underline{a} - \frac{\omega_1 \underline{p}_1 + \omega_2 \underline{p}_2}{\omega_1 + \omega_2} \right).$$

Neem P in het $X_1 O X_2$ -vlak zó dat

$$\underline{p} := \overrightarrow{OP} := \frac{\omega_1 \underline{p}_1 + \omega_2 \underline{p}_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

en zij

$$\omega := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Dan is

$$(39) \quad \underline{v}_M = \omega \underline{e} \times \overrightarrow{PM}.$$

Blijkbaar is er een punt P, zodat voor het middelpunt M van een rollend tussen de bewegende vlakken π_1 en π_2 bewegende bol, (39), dat is (7), geldt. De middelpunten van zulke bollen bewegen dan alsof ze een star stelsel vormen.

- 1.14. i) Bepaal op overeenkomstige wijze als in 1.13 de beweging van een bol die rollend tussen twee bewegende concentrische bollen is opgesloten.
ii) Evenzo met een bol tussen concentrische cilindrs.

1.15. Vraagstuk. Zij

$$A := (2, 3, 1), B := (-1, 0, 2), C := (5, 4, 2)$$

$$\underline{v}_A := (1, 1, 4)^T, \underline{v}_B := (5, -3, 4)^T, \underline{v}_C := (1, 3, 2)^T.$$

Bepaal bij de starre beweging waarop deze gegevens betrekking hebben σ , $\underline{\omega}$ en \underline{v}_t .

i) Opdat er zo'n starre beweging is, is nodig dat aan de voorwaarde $(\underline{X} - \underline{Y}, \dot{\underline{X}} - \dot{\underline{Y}}) = 0$ is voldaan; met $\underline{a} := \overrightarrow{OA}$ enzovoort geldt

$$(40) \quad \begin{aligned} (\underline{a} - \underline{b}, \underline{v}_A - \underline{v}_B) &= ((3, 3, -1)^T, (-4, 4, 0)^T) = 0, \\ (\underline{b} - \underline{c}, \underline{v}_B - \underline{v}_C) &= ((-6, -4, 0)^T, (4, -6, 2)^T) = 0, \\ (\underline{c} - \underline{a}, \underline{v}_C - \underline{v}_A) &= ((3, 1, 1)^T, (0, 2, -2)^T) = 0. \end{aligned}$$

ii) $\underline{\omega}$ is een oplossing van de (afhankelijke) vergelijkingen

$$(41) \quad \begin{aligned} \underline{v}_A - \underline{v}_B &= \underline{\omega} \times (\underline{a} - \underline{b}), \\ \underline{v}_B - \underline{v}_C &= \underline{\omega} \times (\underline{b} - \underline{c}), \\ \underline{v}_C - \underline{v}_A &= \underline{\omega} \times (\underline{c} - \underline{a}). \end{aligned}$$

$\underline{\omega}$ staat dus loodrecht op $\underline{v}_A - \underline{v}_B$ en op $\underline{v}_B - \underline{v}_C$ en zodoende is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ waarvoor

$$\underline{\omega} = \lambda(\underline{v}_A - \underline{v}_B) \times (\underline{v}_B - \underline{v}_C) = \lambda(8, 8, 8)^T$$

λ kunnen we nu bepalen door deze uitdrukking te substitueren in (41):

$$\begin{aligned} \underline{v}_A - \underline{v}_B &= \lambda((\underline{v}_A - \underline{v}_B) \times (\underline{v}_B - \underline{v}_C)) \times (\underline{a} - \underline{b}) = \\ &= \lambda(\underline{v}_A - \underline{v}_B, \underline{a} - \underline{b})(\underline{v}_B - \underline{v}_C) - \lambda(\underline{v}_B - \underline{v}_C, \underline{a} - \underline{b})(\underline{v}_A - \underline{v}_B). \end{aligned}$$

Uit (40) en de gegevens volgt dan:

$$\begin{aligned} \underline{v}_A - \underline{v}_B &= -\lambda(\underline{v}_B - \underline{v}_C, \underline{a} - \underline{b})(\underline{v}_A - \underline{v}_B), \\ \lambda &= -(\underline{v}_B - \underline{v}_C, \underline{a} - \underline{b})^{-1} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{en } \underline{\omega} = (1, 1, 1)^T.$$

Voor een punt $X \in \sigma$ geldt, $\underline{v}_X \times \underline{\omega} = \underline{0}$ en $\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}$ dus

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{v}_A \times \underline{\omega} + (\underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}) \times \underline{\omega} = \underline{v}_A \times \underline{\omega} + (\underline{\omega}, \underline{\omega})\overrightarrow{AX} - (\underline{\omega}, \overrightarrow{AX})\underline{\omega} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} X_1 - 2 \\ X_2 - 3 \\ X_3 - 1 \end{pmatrix} - (X_1 + X_2 + X_3 - 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2X_1 - X_2 - X_3 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zodat

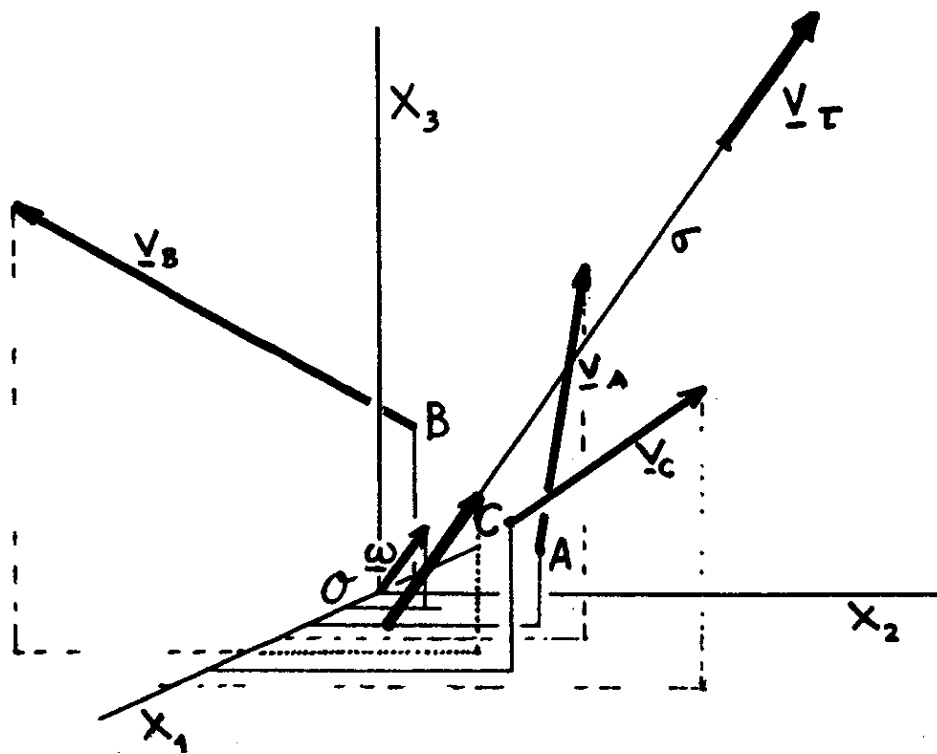
$$\underline{x} = (2, 1, 0)^T + \eta(1, 1, 1)^T,$$

een parametervoorstelling voor σ .

Op σ is

$$\begin{aligned} \underline{v}_T &= \underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX} = \quad (\text{met } X := (2, 1, 0)^T) \\ &= (1, 1, 4)^T + (1, 1, -2)^T = (2, 2, 2)^T. \end{aligned}$$

De gereduceerde spoed van de beweging is $h = 2\text{m/rad}$.



Hoofdstuk 2. De versnellingsverdeling

2.1. De versnelling

Indien, zoals tevoren, voor $V_2 \mid V_1$ geldt

$$(10) \quad \underline{\ddot{x}} = \underline{a} + A\underline{x}$$

met van t afhankelijke \underline{a} en A dan is

$$(42) \quad \underline{\ddot{x}} = \underline{\ddot{a}} + \underline{\ddot{A}}\underline{x} .$$

De eerste vraag die we stellen is: zijn er punten in V_1 waar $\underline{\ddot{x}} = \underline{0}$? Dit is dan en slechts dan het geval als de vergelijking

$$(43) \quad \underline{\ddot{A}}\underline{x} = -\underline{\ddot{a}}$$

oplosbaar is.

(43) stelt, in componenten uitgeschreven, een (in het algemeen) niet-homogeen stelsel van 3 lineaire vergelijkingen met 3 onbekenden, x_1, x_2, x_3 , voor. Zo'n stelsel is in ieder geval oplosbaar indien $r(\underline{\ddot{A}}) = 3$ (of, zo men wil, $\det(\underline{\ddot{A}}) \neq 0$) en dan is de oplossing

$$(44) \quad \underline{x} = -\underline{\ddot{A}}^{-1}\underline{\ddot{a}} .$$

We onderzoeken nu eerst het geval dat $r(\underline{\ddot{A}}) < 3$; dan heeft het corresponderende homogene stelsel

$$\underline{\ddot{A}}\underline{x} = \underline{0}$$

zeker een oplossing met $\underline{\varepsilon} \neq \underline{0}$, ja zelfs met $|\underline{\varepsilon}| = 1$:

$$(45) \quad \underline{\ddot{A}}\underline{\varepsilon} = \underline{0} \text{ en } |\underline{\varepsilon}| = 1 .$$

Nu volgt uit $\underline{A}^T \underline{A} = E$ (vergelijk 1.5) dat

$$(46) \quad \begin{aligned} \underline{\dot{A}}^T \underline{A} + \underline{A}^T \underline{\dot{A}} &= 0 \\ \underline{\ddot{A}}^T \underline{A} + 2\underline{\dot{A}}^T \underline{\dot{A}} + \underline{A}^T \underline{\ddot{A}} &= 0 . \end{aligned}$$

We vatten het linkerlid op als een matrix, $\underline{\varepsilon}$ als een 3,1-matrix (kolom), $\underline{\varepsilon}^T$ als een 1,3-matrix (rij) en beschouwen

$$\underline{\varepsilon}^T (\underline{\ddot{A}}^T \underline{A} + 2\underline{\dot{A}}^T \underline{\dot{A}} + \underline{A}^T \underline{\ddot{A}}) \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^T \underline{0} \underline{\varepsilon} = 0$$

(het product van een 1,3-matrix, een 3,3-matrix en een 3,1-matrix is een 1,1-matrix, d.i. een getal).

Uitwerken:

$$\underline{\varepsilon}^T \underline{\ddot{A}} \underline{A\varepsilon} + 2 \underline{\varepsilon}^T \underline{\dot{A}} \underline{\dot{A}\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^T \underline{A} \underline{\ddot{A}\varepsilon} = 0$$

$$(\underline{\ddot{A}\varepsilon})^T \underline{A\varepsilon} + 2 (\underline{\dot{A}\varepsilon})^T \underline{\dot{A}\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^T \underline{A}^T (\underline{\ddot{A}\varepsilon}) = 0$$

en in verband met (45)

$$\underline{0}^T \underline{A\varepsilon} + 2 |\underline{\dot{A}\varepsilon}|^2 + \underline{\varepsilon}^T \underline{A}^T \underline{0} = 0$$

waaruit

$$\underline{\dot{A}\varepsilon} = \underline{0}$$

(let op: $\underline{a}^T \underline{b} = (\underline{a}, \underline{b})$, het inwendig product).

Nu heeft, zoals we eerder zagen (1.6, pag. 9) $\underline{\dot{A}}$ de rang 0 of 2; $r(\underline{\dot{A}}) = 0$ dan en slechts dan als $\underline{\omega} = \underline{0}$, een geval dat we voorlopig buiten beschouwing lieten; zij dus $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ en $r(\underline{\dot{A}}) = 2$, dan is (met de \underline{e} van pag. 10)

$$\underline{\varepsilon} = + \underline{e} .$$

Conclusie: Als $r(\underline{\dot{A}}) = 2$ en $r(\underline{\ddot{A}}) < 3$ dan is $r(\underline{\ddot{A}}) = 2$. Maar als dit het geval is, volgt uit

$$\underline{\dot{A}\underline{e}} = \underline{0}$$

dat

$$\underline{\ddot{A}\underline{e}} + \underline{\dot{A}\dot{\underline{e}}} = \underline{0}$$

terwijl

$$\underline{\ddot{A}\underline{e}} = + \underline{\ddot{A}\underline{e}} = \underline{0}$$

zodat

$$\underline{\dot{A}\dot{\underline{e}}} = \underline{0}$$

en bijgevolg is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ met

$$\underline{\dot{\underline{e}}} = \lambda \underline{e} .$$

Omdat $|\underline{e}| = 1$ is tevens

$$\underline{\dot{\underline{e}}} \perp \underline{e}$$

zodat

$$\underline{\dot{\underline{e}}} = \underline{0} .$$

Conclusie: Als $r(\underline{\dot{A}}) = 2$ dan is $r(\underline{\ddot{A}}) < 3$ dan en slechts dan als $\underline{\dot{\underline{e}}} = \underline{0}$, hetgeen betekent dat de richting van σ stationair is.

Het *algemene* geval is dat met $r(\dot{\ddot{A}}) = 2$ en $r(\ddot{A}) = 3$, en dan is er *één versnellingspool*,

$$(47) \quad \underline{j} := -\ddot{A}^{-1} \ddot{a} .$$

Of het stelsel

$$(48) \quad \ddot{A} \underline{x} = -\ddot{a}$$

bij $r(\ddot{A}) = 2$ oplossingen heeft hangt af van de rang van de gerande matrix $(\ddot{A} \mid -\ddot{a})$, of, wat op hetzelfde neerkomt, die van $(\ddot{A} \mid \ddot{a})$.

Voor deze rang geldt dan natuurlijk

$$2 \leq r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) \leq 3$$

en als $r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) = 2$ dan is er *een lijn* van versnellingspolen; voor $r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) = 3$ is er *geen* versnellingspool.

Blijft dus te onderzoeken wanneer $r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) = 2$. Aangezien $r(\dot{\ddot{A}}) = 2$ is $\dot{\ddot{A}} \underline{e} = \ddot{A} \underline{e} = \underline{0}$ en dan volgt uit (46) dat

$$\underline{0} = (\ddot{A}^T \dot{\ddot{A}} + 2\dot{\ddot{A}}^T \dot{\ddot{A}} + \dot{\ddot{A}}^T \ddot{A}) \underline{e} = \ddot{A}^T (\underline{A} \underline{e}) + 2\dot{\ddot{A}}^T (\dot{\underline{A}} \underline{e}) + \dot{\ddot{A}}^T (\ddot{\underline{A}} \underline{e}) = \ddot{A}^T (\underline{A} \underline{e})$$

en, in verband met (14),

$$(49) \quad \ddot{A}^T \underline{\omega} = \underline{0} .$$

Als we de *rijen* van \ddot{A} aangeven met $\underline{b}_1^T, \underline{b}_2^T, \underline{b}_3^T$ dan heeft \ddot{A}^T de gedaante $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ en kan (49) gelezen worden als

$$(50) \quad \omega_1 \underline{b}_1 + \omega_2 \underline{b}_2 + \omega_3 \underline{b}_3 = \underline{0} ,$$

terwijl uit $r(\dot{\ddot{A}}) = 2$ volgt dat er geen andere relatie van deze aard tussen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ bestaat (afgezien van het vermenigvuldigen van (50) met een *scalar*).

Opdat $r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) = 2$, is dan nodig en voldoende dat ook

$$\omega_1 \ddot{a}_1 + \omega_2 \ddot{a}_2 + \omega_3 \ddot{a}_3 = 0$$

dat wil zeggen:

$$(51) \quad (\underline{\omega}, \ddot{a}) = 0 .$$

Conclusie: Als er niet precies één versnellingspool is dan is er dan en slechts dan een lijn van zulke polen indien er een punt A is waar de momentele versnelling $\underline{\ddot{a}}$ loodrecht op de momentele schroefas σ staat.

Van het stelsel (48) is het corresponderende homogene stelsel

$$\underline{\ddot{A}}_X = \underline{0}$$

waarvan de oplossingsruimte (in V_2) wordt opgespannen door \underline{e} , zoals we eerder zagen. Indien dus \underline{i}_0 een versnellingspool is wordt de lijn van versnellingspolen (in V_2)

$$\underline{j} = \underline{i}_0 + \lambda \underline{e},$$

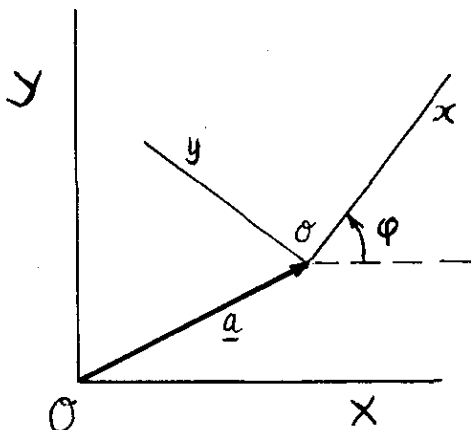
evenwijdig aan σ .

2.2. Vraagstukken

- i) Ga, in het geval dat $r(\ddot{A}) = r(\ddot{A} \mid \ddot{a}) = 2$, na of er precies één punt is met $(\underline{\omega}, \underline{\ddot{a}}) = 0$.
- ii) Ga, in het geval dat $r(\ddot{A}) = 3$, na of voor de versnellingsverdeling een regel geldt die overeenkomt met die voor de snelheidsverdeling (zoals bijvoorbeeld $\underline{v}_X = \underline{v}_T + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX}$ op pag. 5).

2.3. Toepassing op vlakke beweging

Als $V_2|V_1$ een vlakke beweging is kunnen we ons beperken tot de voortdurend samenvallende vlakken. De coördinatenstelsels geven we (in overeenstemming met het bestaande gebruik) aan als het OXY- en het oxy-stelsel, a.e.v. voor V_1 en V_2 ; de plaatsvector \underline{a} van o in V_1 wordt aangegeven met $(a,b)^T$.



Dan geldt

$$(52a) \quad X = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a$$

$$(52b) \quad Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b$$

waarin φ de hoek is tussen de x -as en de X -as.

Hierin zijn a, b, φ en dus ook X en Y functies van t .

Uit (52) volgt

$$(53a) \quad \dot{X} = -x\dot{\varphi} \sin \varphi - y\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{a} = -\dot{\varphi}(Y - b) + \dot{a}$$

$$(53b) \quad \dot{Y} = x\dot{\varphi} \cos \varphi - y\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{b} = \dot{\varphi}(X - a) + \dot{b} .$$

Als $\dot{\varphi} = 0$ (corresponderend met $\underline{\omega} = \underline{0}$ in het ruimtelijk geval) dan is er momenteel slechts van translatie sprake. We stellen in het nu volgende weer $\dot{\varphi} \neq 0$.

Punten met snelheid $\underline{0}$ vinden we uit het stelsel vergelijkingen

$$(54) \quad \begin{aligned} -\dot{\varphi}(Y - b) + \dot{a} &= 0 \\ +\dot{\varphi}(X - a) + \dot{b} &= 0 \end{aligned}$$

met precies één oplossing, $X_p = a - \frac{\dot{b}}{\dot{\varphi}}$, $Y_p = b + \frac{\dot{a}}{\dot{\varphi}}$, de coördinaten van de pool P van $V_2 | V_1$.

P voldoet dus aan

$$(55) \quad \begin{aligned} -\dot{\varphi}(Y_p - b) + \dot{a} &= 0 \\ \dot{\varphi}(X_p - a) + \dot{b} &= 0 , \end{aligned}$$

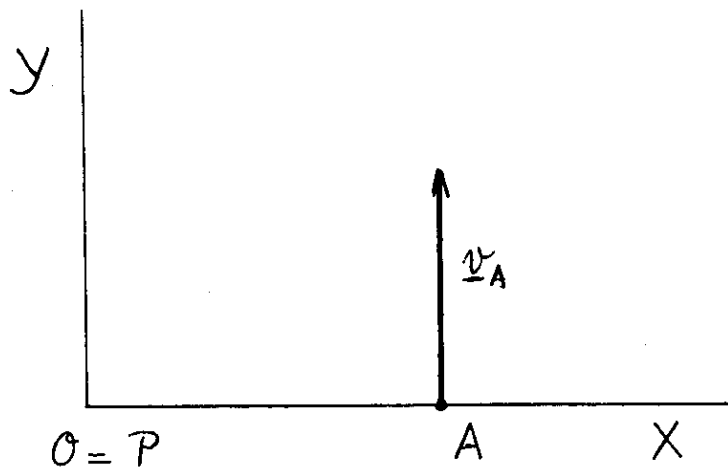
door (55) van (53) af te trekken krijgen we

$$(56) \quad \begin{aligned} -\dot{\varphi}(Y - Y_p) &= \dot{X} \\ \dot{\varphi}(X - X_p) &= \dot{Y} . \end{aligned}$$

Aangezien we voor de coördinatenstelsels nog geen enkele keus hebben gedaan, kunnen we die op dit moment nog aan onze behoeften aanpassen. Als we bijvoorbeeld de beweging van V_2 willen onderzoeken in het punt van V_2 dat zich momenteel in $A \in V_1$ bevindt dan kunnen we O in P en de X -as langs PA nemen, zodat $X_p = Y_p = 0$ en $Y_A = 0$.

(56) gaat dan over in

$$\begin{aligned} \dot{X}_A &= 0 \\ \dot{Y}_A &= \dot{\varphi} X_A , \end{aligned}$$



hetgeen een oude vondst bevestigt, namelijk dat een vlakke beweging op ieder moment een momentele rotatie is (als $\dot{\phi} \neq 0$).

Keren we terug tot de algemene situatie van (53) om de versnelling uit te rekenen:

$$\ddot{X} = -\ddot{\phi}(Y - b) - \dot{\phi}(\dot{Y} - \dot{b}) + \ddot{a}$$

$$\ddot{Y} = \ddot{\phi}(X - a) + \dot{\phi}(\dot{X} - \dot{a}) + \ddot{b}$$

waaruit we $\dot{X} - \dot{a}$ en $\dot{Y} - \dot{b}$ met behulp van (53) elimineren:

$$\ddot{X} = -\ddot{\phi}(Y - b) - \dot{\phi}^2(X - a) + \ddot{a}$$

$$\ddot{Y} = \ddot{\phi}(X - a) - \dot{\phi}^2(Y - b) + \ddot{b}$$

Punten met $\ddot{X} = 0$ vinden we nu uit

$$\ddot{\phi}(Y - b) + \dot{\phi}^2(X - a) = \ddot{a}$$

$$\dot{\phi}^2(Y - b) - \ddot{\phi}(X - a) = \ddot{b}$$

en dit stelsel vergelijkingen met onbekenden $Y - b$ en $X - a$ is zeker oplosbaar als

$$\begin{vmatrix} \ddot{\phi} & \dot{\phi}^2 \\ \dot{\phi}^2 & -\ddot{\phi} \end{vmatrix} \neq 0,$$

derhalve voor $\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2 \neq 0$, derhalve voor $\dot{\phi}$ en $\ddot{\phi}$ niet beide 0; de oplossing is dan de versnellingspool J met coördinaten X_J en Y_J die voldoen aan (58):

$$0 = -\ddot{\phi}(Y_J - b) - \dot{\phi}^2(X_J - a) + \ddot{a}$$

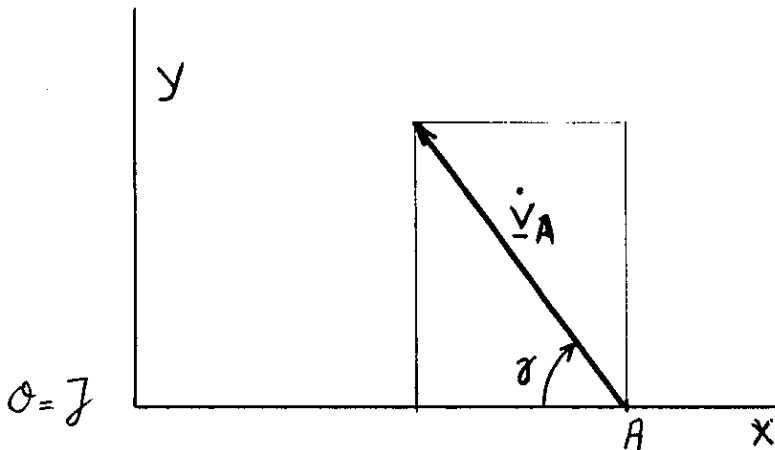
$$0 = \ddot{\phi}(X_J - a) - \dot{\phi}^2(Y_J - b) + \ddot{b}$$

en trekken we dit af van (57) dan komt er

$$(59) \quad \begin{aligned} \ddot{X} &= -\ddot{\phi}(Y - Y_J) - \dot{\phi}^2(X - X_J) , \\ \ddot{Y} &= \ddot{\phi}(X - X_J) - \dot{\phi}^2(Y - Y_J) , \end{aligned}$$

analoog aan (56).

Ook hier kunnen we de coördinatenstelsels nog kiezen, en we nemen nu, indien geïnteresseerd in de beweging op de plaats $A \in V_1$, $O = J$ in V_1 en de X-as langs JA.



Dan is $Y_A = Y_J = X_J = 0$ en

$$\ddot{X}_A = -\dot{\phi}^2 X_A$$

$$\ddot{Y}_A = \ddot{\phi} X_A .$$

Omdat $-\dot{\phi}^2 < 0$ (als $\dot{\phi} \neq 0$) is in het algemeen $\angle JAA_J$ scherp.

Deze hoek heet de *versnellingshoek*, γ

We vinden zo: In ieder punt is γ scherp, $\tan \gamma = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}$ en de grootte van de versnelling is $|\overrightarrow{AA_J}| = |\overrightarrow{JA}| \sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2}$.

2.4. Het kanonieke assenstelsel bij vlakke beweging

In de vlakke beweging $V_2|V_1$ met

$$(52) \quad \begin{aligned} X &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\ Y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b \end{aligned}$$

stellen φ , a en b en diensgevolge ook X en Y functies van t voor, waarvan we de afgeleiden met $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ enzovoort hebben genoteerd. Indien op het tijdstip dat wij beschouwen, t_0 , geldt, zoals we veronderstelden, $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ dan is er, bij de continu veranderend gedachte $\dot{\varphi}$, een omgeving van t_0 (fysisch gesproken: een tijdsinterval) waar $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, zodat φ er monotoon is, stijgend als $\dot{\varphi}(t) > 0$, dalend als $\dot{\varphi}(t) < 0$. We kunnen dan ook a , b , X en Y beschouwen als functies van φ ; als bijvoorbeeld $\varphi = \Phi(t)$ dan heeft, om het analytisch uit te drukken, Φ een inverse T , waarvoor $t = T(\varphi)$; als nu $a = A(t)$ dan is $a = A(T(\varphi))$ en

$$a'(\varphi) := \frac{da}{d\varphi} = \frac{dA}{dt} \frac{dT}{d\varphi} = \frac{\dot{a}}{\dot{\varphi}},$$

en analoog bij b , X en Y .

Door deze manipulatie kan men t uit de in het voorgaande verkregen formules elimineren, waardoor de problemen een zuiver meetkundig karakter krijgen. Zo volgt, hetzij door (52) direct naar φ te differentiëren dan wel door (53) door $\dot{\varphi}$ te delen,

$$(60) \quad \begin{aligned} X' &= -(Y - b) + a' \\ Y' &= (X - a) + b' , \end{aligned}$$

en, op overeenkomstige wijze, voor de pool P ,

$$(61) \quad \begin{aligned} X_p &= a - b' \\ Y_p &= a' + b . \end{aligned}$$

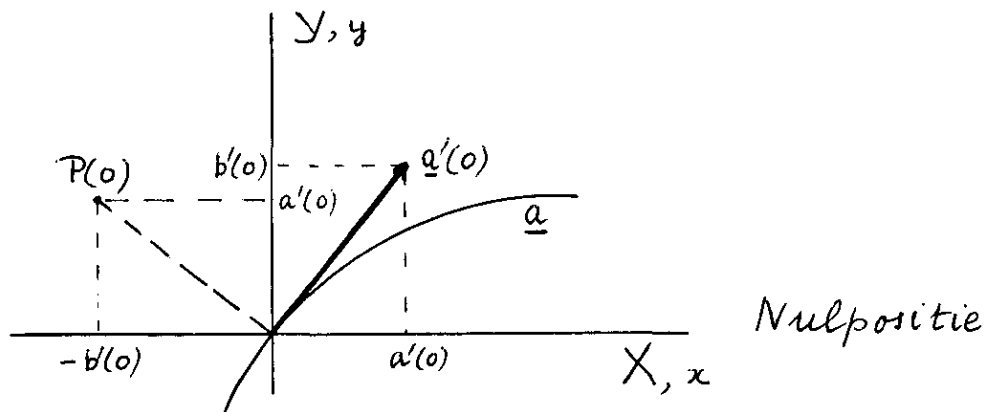
(61) is een parametervoorstelling van de vaste polode Σ_1 in V_1 met als parameter φ , de hoek tussen de X -as in V_1 en de x -as in V_2 . Aangezien we over de keuze van de assenstelsels bij het afleiden van (60) en (61) nog geen enkele uitspraak deden kunnen we die keuze nog geheel aan onze behoefte aanpassen. Als die behoefte is om de betekenis van Σ_1 en Σ_2 voor $V_2|V_1$ te bestuderen overwegen we het volgende:

- i) Als we voor o het punt kiezen van V_2 dat zich momenteel in 0 bevindt (zodat a en b momenteel 0 zijn) en voor de x -as de rechte in V_2 die momenteel met de X -as samenvalt (zodat φ momenteel 0 is), dan geldt dus $a(0) = b(0) = 0$. Deze momentele situatie (die onafhankelijk is van wat zodadelijk volgt) heet de nulpositie van $V_2|V_1$.

In de nulpositie is de pool $P(0)$

$$X_p(0) = -b'(0)$$

$$Y_p(0) = a'(0) .$$



- ii) We kunnen de notatie vereenvoudigen door voor iedere grootte g die van φ afhangt te schrijven $g_k := g^{(k)}(0)$. Dan is bij de zo juist besproken nulpositie

$$a_0 = b_0 = 0, X_{p0} = -b_1, Y_{p0} = a_1 .$$

- iii) Als we bovendien nog de oorsprong 0 in de momentele pool kiezen, dan is bovendien $a_1 = b_1 = 0$.

Ook in deze situatie is (61) nog de parametervoorstelling van Σ_1 , maar we hebben bereikt dat Σ_1 door 0 gaat. De raaklijn aan Σ_1 in het punt P heeft een richtingsvector \underline{X}'_p (raakvector) met

$$X'_p = a' - b''$$

$$Y'_p = a'' + b'$$

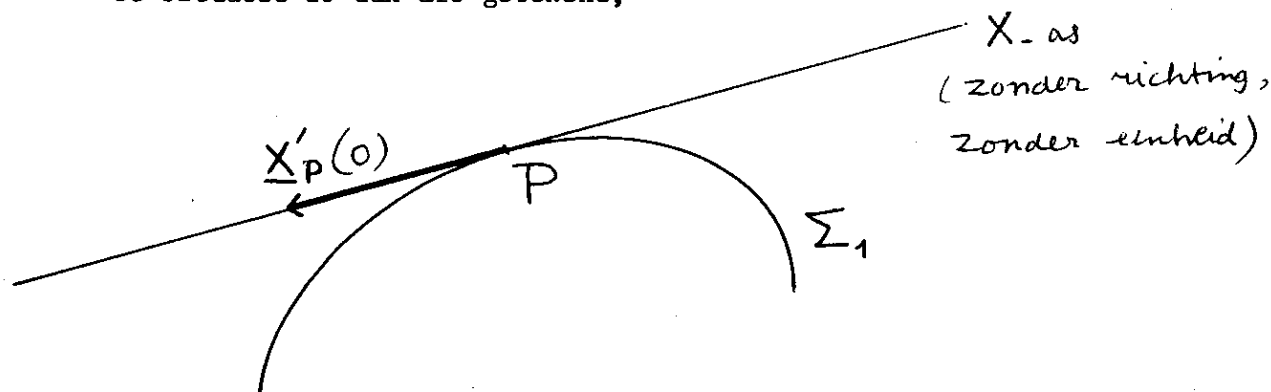
zodat

$$X_{p1} = X'(0) = -b''(0) = -b_2$$

$$Y_{p1} = Y'(0) = a''(0) = a_2$$

en aangezien we de X-as nog kunnen kiezen nemen we die *langs de raaklijn aan Σ_1 in $P(0)$* . Dan is ook $a_2 = 0$.

De situatie is dan als getekend,



en we nemen nu tenslotte richting en eenheid op de X-as zo dat $b_2 = -1$, en passen de richting van de Y-as aan om een rechtse orientering te verkrijgen.

Het aldus verkregen coördinatenstelsel heet het *kanonieke stelsel*.

(Situaties met $b_2 = 0$ in het getekende stadium, waar $a_2 = 0$ al geldt, zodat $a''(0) = 0$, laten we buiten beschouwing.)

2.5. Enige opmerkingen van wiskundige aard

i) De afgeleide van de draaiing

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

is

$$D'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) & \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = D(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

en aangezien $D(\varphi)$ een draaiing is, geldt

$$D'(\varphi) = D(\varphi) \cdot D(\frac{\pi}{2}) .$$

Hieruit leidt men met volledige inductie direct af

$$D^{(k)}(\varphi) = D(\varphi) \cdot D(k \frac{\pi}{2}) = D(\varphi + k \frac{\pi}{2}) .$$

In het bijzonder is voor

$$X = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a$$

$$Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b$$

$$(62) \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = D(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

zodat

$$(63) \quad \underline{X}^{(k)} = D^{(k)}(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{pmatrix} = D(\varphi + k \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{pmatrix}$$

of

$$(64) \quad \begin{aligned} X^{(k)} &= x \cos(\varphi + k \frac{\pi}{2}) - y \sin(\varphi + k \frac{\pi}{2}) + a^{(k)} \\ Y^{(k)} &= x \sin(\varphi + k \frac{\pi}{2}) + y \cos(\varphi + k \frac{\pi}{2}) + b^{(k)} . \end{aligned}$$

Uit (62) en (63) kunnen we desgewenst \underline{x} elimineren:

$$(65) \quad \underline{X}^{(k)} = D(k \frac{\pi}{2}) (\underline{X} - \underline{a}) + \underline{a}^{(k)}$$

hetgeen voor $k := 1$ weer (60) en voor $k := 2$ een pendant voor (57) oplevert.

(63) gaat voor $k := 1$ over in

$$(66) \quad \begin{aligned} X' &= -x \sin \varphi - y \cos \varphi + a' \\ Y' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + b' \end{aligned}$$

en in de nulpositie komt er

$$(67) \quad \begin{aligned} X_1 &= -y \\ Y_1 &= x \end{aligned}$$

terwijl voor $k := 2$

$$(68) \quad \begin{aligned} X'' &= -x \cos \varphi + y \sin \varphi + a'' \\ Y'' &= -x \sin \varphi - y \cos \varphi + b'' \end{aligned}$$

en in de nulpositie

$$(69) \quad \begin{aligned} X_2 &= -x \\ Y_2 &= -y - 1. \end{aligned}$$

Voor $k := 3$ komt er

$$(70) \quad \begin{aligned} X''' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + a''' \\ Y''' &= -x \cos \varphi + y \sin \varphi + b''' \end{aligned}$$

en in de nulpositie

$$(71) \quad \begin{aligned} X_3 &= y + a_3 \\ Y_3 &= -x + b_3. \end{aligned}$$

ii) De kromming van een kromme

Als een kromme gegeven wordt als de grafiek van een functie f , dan is de *kromming* van f in het punt $(\xi, f(\xi))$

$$\kappa_f(\xi) = \frac{f''(\xi)}{(1 + f'(\xi)^2)^{3/2}}$$

(zie aanhangsel wiskunde 10 oude stijl of vrijwel ieder boek over differentiaalrekening).

Als de kromme is gegeven als een parametervoorstelling

$$\underline{x}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))^T,$$

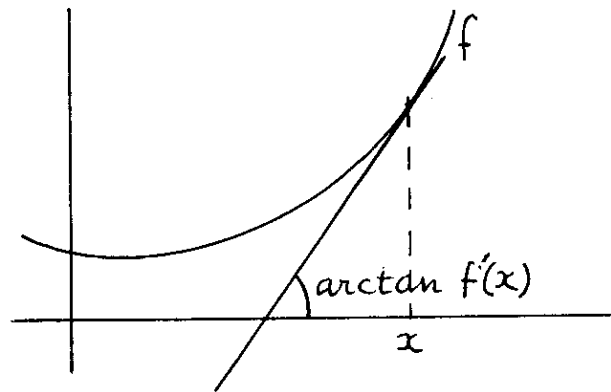
dan is,

$$(72) \quad \kappa_{\underline{x}}(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{(x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

De meetkundige betekenis van de kromming is dat ze de afgeleide is van de hellingshoek $\arctan f'(x)$ van de raaklijn als functie van de boog-lengte s ,

$$\begin{aligned} \frac{d \arctan f'(x)}{ds} &= \frac{d \arctan f'(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \\ &= \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} \frac{1}{(1 + f'(x)^2)^{1/2}} = \kappa_f(x) \end{aligned}$$

terwijl $\rho_f(x) := \frac{1}{\kappa_f(x)}$ als de *kromtestraal* bekend staat (van f in $(x, f(x))$).



iii) Voor de baan die een punt $\underline{x} = (x,y) \in V_2$ ten opzichte van V_1 beschrijft geldt in het kanonieke stelsel

$$\kappa_{\underline{x}}(\varphi) = \frac{X'Y'' - X''Y'}{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}}$$

en in de nulpositie

$$(73) \quad \kappa_{\underline{x}}(0) = \frac{X_1 Y_2'' - X_2 Y_1''}{(X_1'^2 + Y_1'^2)^{3/2}} = \frac{(-y)(-y-1) - (-x)x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 + y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

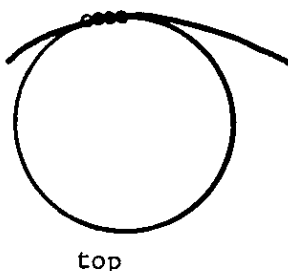
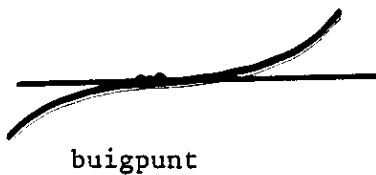
Bijzondere punten:

$\kappa_{\underline{x}}(\theta_0) = 0$ en $\kappa_{\underline{x}}$ wisselt van teken; de kromme passeert dan in $\underline{x}(\theta_0)$ zijn raaklijn: *buigpunt*.

$\kappa_{\underline{x}}(\theta_0) = 0$ en $\kappa_{\underline{x}}$ wisselt in θ_0 niet van teken; dan moet $\kappa_{\underline{x}}$ in θ_0 stationair zijn zodat $\kappa_{\underline{x}}'(\theta_0) = 0$: *afplattingspunt*.

$\kappa_{\underline{x}}'(\theta_0) = 0$; de kromming is stationair: *cirkellooppunt*.

$\kappa_{\underline{x}}''(\theta_0) = 0$ en $\kappa_{\underline{x}}'$ wisselt van teken: *top*.



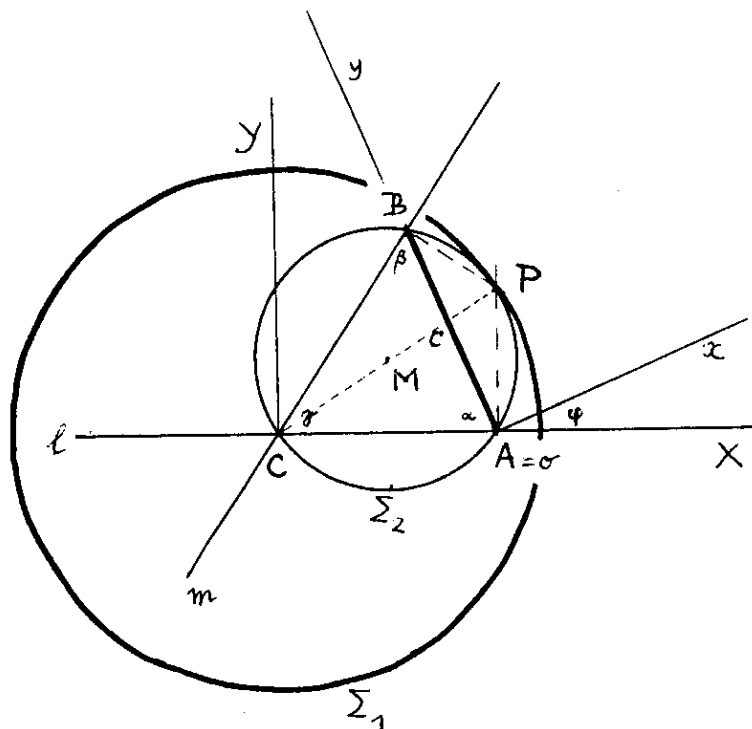
*2.6. Een voorbeeld: elliptische beweging

- i) Neem twee rechten ℓ en m in V_1 , die een hoek γ insluiten ($0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$) en met snijpunt C ; V_2 beweegt zo dat één vast punt van V_2 voortdurend op ℓ ligt (zeg in A) en een ander vast punt van V_2 voortdurend op m (zeg in B). AB heeft dus voortdurend dezelfde lengte, c . We nemen o in A , oy langs AB en $ox \perp oy$ zó dat de oriëntatie van oxy rechts is. Voor het vaste stelsel OXY nemen we $O := C$, OX langs ℓ en OY daaraan aangepast. De hoek tussen ℓ en ox noemen we, als tevoren, φ . Als we de andere hoeken van $\triangle ABC$ noemen α en β , dan volgt uit de sinusregel,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(R is de straal van de omcirkel van $\triangle ABC$), dat

$$b = 2R \sin \beta = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \gamma\right) = 2R \cos(\varphi - \gamma).$$



Aangezien c en γ constant zijn, is ook R constant. Dan geldt voor een punt met plaatsvector \underline{x} in V_2 en plaatsvector \underline{X} in V_1

$$(*1a) \quad \underline{X} = D_{\varphi} \underline{x} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = D_{\varphi} \underline{x} + \begin{pmatrix} 2R \cos(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(*2a) \quad \underline{X}' = D_{\frac{\pi}{2}} D_{\varphi} \underline{x} - \begin{pmatrix} 2R \sin(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix};$$

voor de pool P is $\underline{X}'_p = \underline{0}$ en

$$(*3a) \quad D_{\varphi} \underline{x}_p = D_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2R \sin(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

waaruit met (*1a) weer volgt

$$(*4a) \quad \underline{x}_p = D_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2R \sin(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2R \cos(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2R \sin(\varphi - \gamma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2R \cos(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} = 2R \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \gamma) \\ -\sin(\varphi - \gamma) \end{pmatrix}.$$

Door eliminatie van $\varphi - \gamma$ (en dus ook van φ) blijkt dat P ligt op de cirkel met C als middelpunt en $2R$ als straal:

$$(*5a) \quad X_p^2 + Y_p^2 = 4R^2,$$

de vergelijking van de vaste polode Σ_1 .

Meetkundig was dit direct te zien: de momentele poolvoerstraal PA moet loodrecht op de snelheidsvector in A staan, dus loodrecht op ℓ ; evenzo $PB \perp m$. Het middelpunt M van de omcirkel ligt op de assen van CA en CB. Men verkrijgt dus P door M vanuit C met 2 te vermenigvuldigen. Aangezien $CM = R$ op ieder ogenblik, is $CP = 2R$.

Het is meetkundig ook direct duidelijk dat $\odot(C, 2R)$ en $\odot(M, R)$ elkaar in P raken: CP is een middellijn van de laatste. Het opsporen van de bewegende polode Σ_2 levert dan ook geen grote verrassing op: uit (*3a) volgt

$$\begin{aligned} \underline{x}_p &= D_{-\varphi} D_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2R \sin(\varphi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} = D_{-\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ -2R \sin(\varphi - \gamma) \end{pmatrix} = \\ &= -2R \sin(\varphi - \gamma) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

of

$$x_p = -2R \sin(\varphi - \gamma) \sin \varphi$$

$$y_p = -2R \sin(\varphi - \gamma) \cos \varphi .$$

Eliminatie van φ is hier wat lastiger, maar uit

$$\frac{x_p}{y_p} = \tan \varphi$$

volgt

$$\begin{aligned} x_p &= -2R(\sin^2 \varphi \cos \gamma - \sin \varphi \cos \varphi \sin \gamma) = \\ &= R(\cos \gamma (1 - \cos 2\varphi) - \sin \gamma \sin 2\varphi) = \\ &= -R(\cos \gamma (1 - \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}) - \sin \gamma \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}) \end{aligned}$$

zodat

$$x_p \left(1 + \frac{x_p^2}{y_p^2}\right) = -R(\cos \gamma (2 \frac{x_p^2}{y_p^2}) - \sin \gamma \frac{2x_p}{y_p}) ,$$

$$x_p^2 + y_p^2 = -2R(x_p \cos \gamma - y_p \sin \gamma) ,$$

$$(x_p + R \cos \gamma)^2 + (y_p - R \sin \gamma)^2 = R^2 ,$$

en dit is de vergelijking van $\odot(M,R)$: men verifieert gemakkelijk dat M in oxy-coördinaten het punt $R(-\cos \gamma, \sin \gamma)$ is.

ii) Voor een willekeurige $\underline{x} \in V_2$ elimineren we φ uit

$$\begin{aligned} X &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + 2R \cos(\varphi - \gamma) \\ (*1a) \quad Y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}$$

teneinde de baan in V_1 te bepalen.

Daartoe lossen we $c := \cos \varphi$ en $s := \sin \varphi$ op uit

$$\begin{aligned} (*6a) \quad (x + 2R \cos \gamma)c + (-y + 2R \sin \gamma)s &= X \\ yc + xs &= Y , \end{aligned}$$

een stelsel waarvan de determinant is

$$\begin{aligned} (*7a) \quad \Delta(x,y) &:= x(x + 2R \cos \gamma) + y(y - 2R \sin \gamma) = \\ &= (x + R \cos \gamma)^2 + (y - R \sin \gamma)^2 - R^2 . \end{aligned}$$

Als $\underline{x} \notin \Sigma_2$ dan is $\Delta(x,y) \neq 0$ en

$$c = \Delta(x,y)^{-1} (Xx + Y(y - 2R \sin \gamma)) ,$$

$$s = \Delta(x,y)^{-1} (-Xy + Y(x + 2R \sin \gamma))$$

waaruit, met $c^2 + s^2 = 1$, volgt

$$\begin{aligned} (*8a) \quad \Delta^2 &= (xX + (y - 2R \sin \gamma)Y)^2 + (-yX + (x + 2R \cos \gamma)Y)^2 = \\ &= (x^2 + y^2)X^2 + 2(-2R x \sin \gamma - 2R y \cos \gamma)XY + \\ &\quad + (x^2 + y^2 + 4Rx \cos \gamma - 4Ry \sin \gamma + 4R^2)Y^2 . \end{aligned}$$

Aangezien

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{cc} x^2 + y^2 & -2Rx \sin \gamma - 2Ry \cos \gamma \\ -2Rx \sin \gamma - 2Ry \cos \gamma & x^2 + y^2 + 4Rx \cos \gamma - 4Ry \sin \gamma + 4R^2 \end{array} \right| = \\ &= (x^2 + y^2)^2 + 4R(x^2 + y^2)(x \cos \gamma - y \sin \gamma) + \\ &+ 4R^2(x^2 + y^2 - x^2 \sin^2 \gamma - 2xy \sin \gamma \cos \gamma - y^2 \cos^2 \gamma) = \\ &= (x^2 + y^2 + 2R(x \cos \gamma - y \sin \gamma))^2 = \Delta^2(x,y) \end{aligned}$$

is (*8a), in aanmerking genomen dat $\underline{x} \notin \Sigma_2$, de vergelijking van een elips met middelpunt in C.

Als $\underline{x} \in \Sigma_2$ dan is $\Delta(x,y) = 0$ en dan volgt uit (*1a) en (*6a) dat

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x + 2R \cos \gamma} = \frac{x}{-y + 2R \sin \gamma}$$

zodat het punt een rechte baan heeft.

Voor een meetkundige beschrijving van dit verschijnsel zie [1], p. 63-65.

Hoofdstuk 3. Krommingstheorie

3.1. De kromming van de poloden

We keren terug tot de parametervoorstelling van de vaste polode Σ_1 in V_1

$$(61) \quad \begin{aligned} X_p &= a - b' \\ Y_p &= a' + b \end{aligned}$$

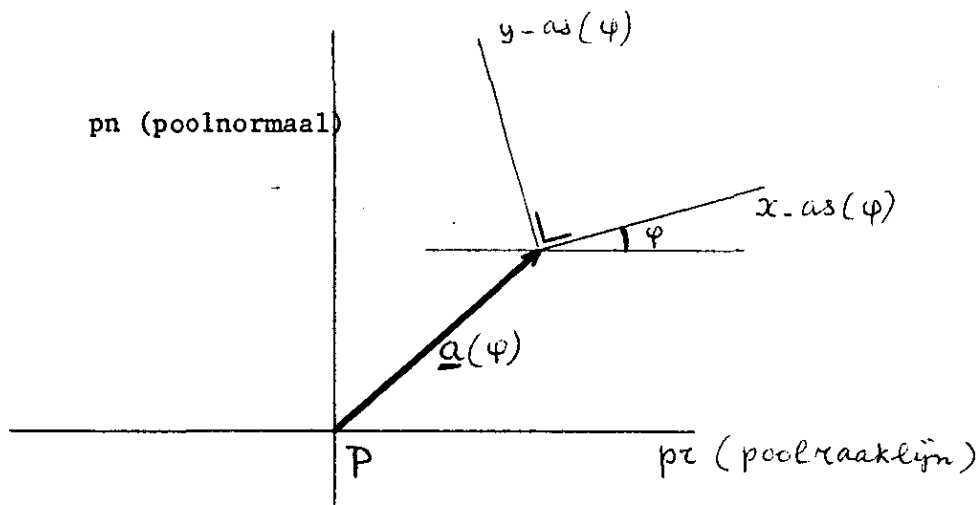
waarvoor in de *nulpositie* geldt

$$a_0 = b_0 = 0$$

en bij het *kanonieke coördinatenstelsel* bovendien

$$a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -1.$$

Dit betekent dat Σ_1 door 0 gaat (met i.h.b. $X_{p0} = \underline{0}$), dat de X-as raakt aan Σ_1 en dat de raakvector in 0 aan Σ_1 is $(1,0)^T$.



Letten we nu op een willekeurig punt van Σ_2 in V_2 met plaatsvector \underline{p} in V_2 . Het is een punt van Σ_2 , dus pool van de beweging voor een of andere waarde van φ . Dat wil zeggen: voor die waarde van φ valt het samen met het punt $P(\varphi)$ van Σ_1 . Dat wil zeggen

$$\underline{X}_p(\varphi) = D_\varphi \underline{p} + \underline{a}$$

en

$$(74) \quad \underline{p} = D_{-\varphi}(\underline{X}_p(\varphi) - \underline{a})$$

en dit betekent dat (74) een parametervoorstelling van Σ_2 in V_2 is; uitgewerkt

$$\underline{x}_p = \underline{p} = D_{-\varphi} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$$

of

$$(75) \quad \begin{aligned} x_p &= -b' \cos \varphi + a' \sin \varphi = a' \sin \varphi - b' \cos \varphi \\ y_p &= b' \sin \varphi + a' \cos \varphi = a' \cos \varphi + b' \sin \varphi . \end{aligned}$$

Voor de raaklijn geldt

$$(76) \quad \begin{aligned} x_p' &= a'' \sin \varphi + a' \cos \varphi - b'' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ y_p' &= a'' \cos \varphi - a' \sin \varphi + b'' \sin \varphi + b' \cos \varphi \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} x_p'(0) &= x_{p1} = -b_2 = 1 \\ y_p'(0) &= y_{p1} = 0 , \end{aligned}$$

dat wil zeggen dat $\underline{x}_p'(0) = \underline{x}_{p1} = (1, 0)^T$ en aangezien OXY en oxy bij $\varphi = 0$ samenvallen raken Σ_1 en Σ_2 elkaar in $0 = o$; aangezien de snelheid van \underline{x}_p langs Σ_1 even groot is als die van \underline{x}_p langs Σ_2 rolt Σ_2 over Σ_1 .

Nogmaals differentiëren van (76) geeft

$$\begin{aligned} x_p'' &= a''' \sin \varphi + 2a'' \cos \varphi - a' \sin \varphi - b''' \cos \varphi + 2b'' \sin \varphi + b' \cos \varphi \\ y_p'' &= a''' \cos \varphi - 2a'' \sin \varphi - a' \cos \varphi + b''' \sin \varphi + 2b'' \cos \varphi - b' \sin \varphi \end{aligned}$$

en in de nulpositie

$$\begin{aligned} x_{p2} &= -b_3 \\ y_{p2} &= a_3 + 2b_2 \end{aligned}$$

zodat voor de kromming van Σ_2 in $\underline{x}_p(0)$ geldt (vergelijk (72))

$$(77) \quad \kappa_2 = \frac{x_{p1} y_{p2} - x_{p2} y_{p1}}{(x_{p1}^2 + y_{p1}^2)^{3/2}} = y_{p2} = a_3 + 2b_2 = a_3 - 2 .$$

Vergelijken we dit met de kromming κ_1 van Σ_1 in $\underline{X}_p(0)$ die natuurlijk uit (61) moet komen:

$$\begin{aligned} X'_p &= a' - b'' , & X''_p &= a'' - b''' \\ Y'_p &= a'' + b' & Y''_p &= a''' + b'' , \end{aligned}$$

in de nulpositie

$$\begin{aligned} X_{p1} &= a_1 - b_2 = -b_2 , & X_{p2} &= a_2 - b_3 = -b_3 \\ Y_{p1} &= a_2 + b_1 = 0 & Y_{p2} &= a_3 + b_2 \end{aligned}$$

met als resultaat

$$(78) \quad \kappa_1 = \frac{X_{p1} Y_{p2} - X_{p2} Y_{p1}}{(X_{p1}^2 + Y_{p1}^2)^{3/2}} = -b_2 (a_3 + b_2) = a_3 - 1 .$$

We kunnen dit samenvatten tot *de tweede stelling van Euler-Savary*:

$$(79) \quad \kappa_1 - \kappa_2 = 1 .$$

3.2. Opmerkingen.

- i) Er is één gekunsteld aspect aan de wijze waarop we de kanonieke coördinaten kozen, namelijk de keuze van de eenheid langs de X- en de Y-as: we namen die zo dat $b_2 = -1$, dat wil zeggen afhankelijk van φ .
Als we dat *niet* doen dan is

$$\kappa_2 = \frac{-b_2 (a_3 + 2b_2)}{|b_2|^3} ,$$

$$\kappa_1 = \frac{-b_2 (a_3 + b_2)}{|b_2|^3} ,$$

en

$$\kappa_1 - \kappa_2 = \frac{1}{|b_2|} .$$

Nu is de snelheidsvector waarmee P langs Σ_1 loopt in de nulpositie

$$\underline{X}_{p1} = \underline{X}'_p(0) = \dot{\underline{X}}_p(0) / \dot{\varphi}(0) = \dot{\underline{X}}_p(0) / \omega_0 .$$

$\dot{\underline{X}}_p$ is de vector die de snelheid aangeeft waarmee de pool P langs Σ_1 loopt, de *poolwisselsnelheid*, \underline{u} .

Dus $\underline{u}(0) = \omega_0 \underline{x}_{p1} = \omega_0 (-b_2, 0)^T$ en

$$|b_2| = \frac{|\underline{u}(0)|}{\omega_0}.$$

Dus

$$\kappa_1 - \kappa_2 = \frac{\omega_0}{|\underline{u}(0)|}.$$

- ii) Het is meetkundig duidelijk dat, wanneer van een beweging $V_2|V_1$ bekend zijn de poloden Σ_1 en Σ_2 en de poolwisselsnelheid \underline{u} , de beweging daarvoor bepaald is. Indien alleen de poloden bekend zijn, zijn κ_1 en κ_2 bekend, bijgevolg, uit (77) of (78), ook a_3 , maar niet b_3 . Dat betekent dat de beweging tot de 2^e orde is bepaald, maar niet tot de 3^e orde. Het afleiden van de beweging uit de osculatiecirkels van Σ_1 en Σ_2 zou derhalve slechts tot de 2^e orde nauwkeurig zijn, maar door de "toeval- lige" omstandigheid dat b_3 bij de afleiding van κ_1 en κ_2 geen rol speelt is zo'n afleiding toch nauwkeurig van de 3^e orde.

3.3. De kromming van de banen

Ieder punt van V_2 beschrijft een baan in V_1 ; voor het punt $(x,y) \in V_2$ is de kromming van de baan al in (73) uitgerekend:

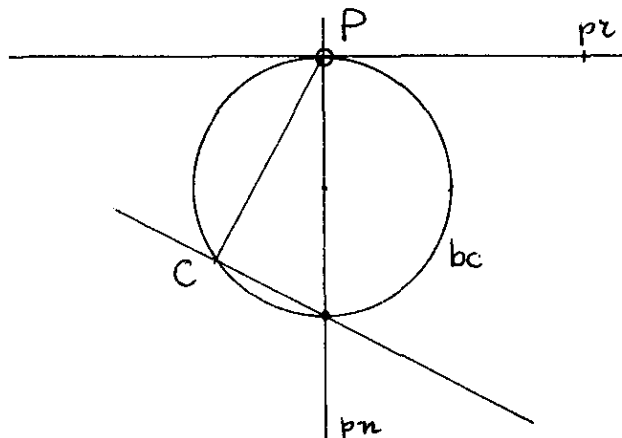
$$(73) \quad \underline{\kappa}_x = \frac{x^2 + y^2 + y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

behalve natuurlijk voor $\underline{x} = \underline{0}$, d.w.z. behalve in de momentele pool.

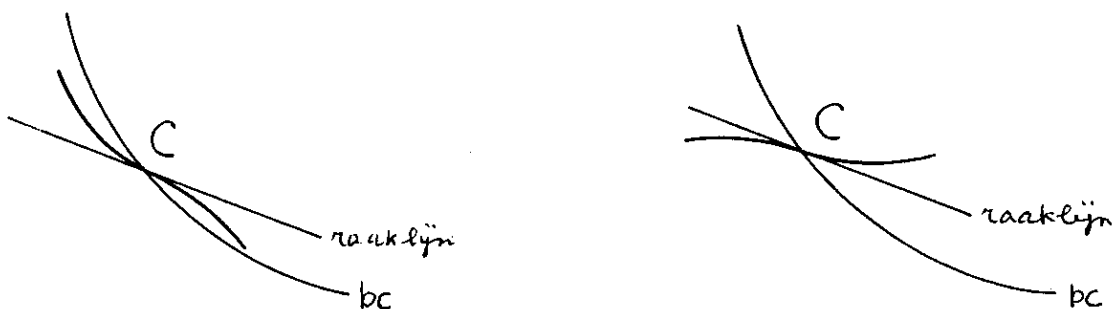
Welke punten van V_2 bevinden zich in een *buijgpunt* van hun baan? We herinneren ons dat dat het geval is indien de kromming 0 is, en dat is het geval als

$$(80) \quad \underline{x} \neq \underline{0} \wedge x^2 + y^2 + y = 0.$$

Die verzameling is dus de cirkel in V_2 met $(0, -\frac{1}{2})$ als middelpunt en straal $\frac{1}{2}$, met uitzondering van de oorsprong o. Deze cirkel heet de *buijgcirkel* (bc).



Het punt $(0, -1)$ heet de *buigpool*, en wel omdat de snelheidsvector van ieder punt op de buigcirkel er door gaat. Beschouwen wij zo'n punt, zeg C, nader; voor het verloop van de baan door C zijn er 2 mogelijkheden:



òf de baan verloopt lokaal tussen raaklijn en buigcirkel, òf niet.

Een tweede interessante verzameling is die van de punten die in een *top* van hun baan zijn; dit betekent dat de kromming stationair is, dat wil zeggen: zijn afgeleide is 0. Door differentiëren van de aan (73) voorafgaande formule vinden we

$$\begin{aligned} \kappa'_{\underline{x}} &= \frac{(X'Y''' - X'''Y') (X'^2 + Y'^2)^{3/2} - 3(X'Y'' - X''Y') (X'^2 + Y'^2)^{1/2} (X'X'' + Y'Y'')}{(X'^2 + Y'^2)^3} \\ &= \frac{(X'Y''' - X'''Y') (X'^2 + Y'^2) - 3(X'Y'' - X''Y') (X'X'' + Y'Y'')}{(X'^2 + Y'^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

en in de nulpositie (met (67), (69) en (71))

$$\kappa'_{\underline{x}}(0) = \kappa'_{\underline{x}1} = - \frac{(a_3x + b_3y)(x^2 + y^2) - 3x(x^2 + y^2 + y)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

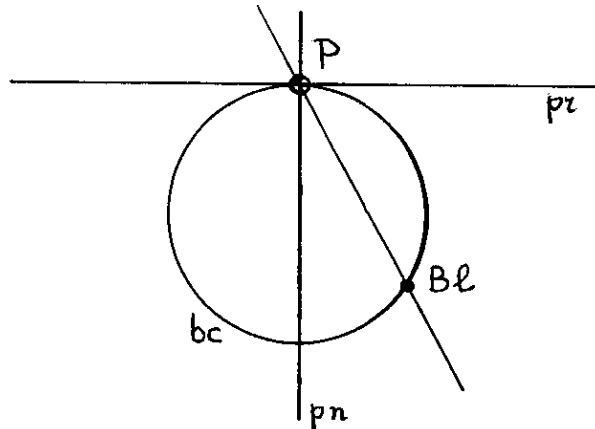
zodat de bedoelde verzameling bestaat uit de punten van V_2 waarvoor

$$(81) \quad \underline{x} \neq \underline{0} \wedge (a_3x + b_3y)(x^2 + y^2) - 3x(x^2 + y^2 + y) = 0.$$

De kromme bij deze laatste vergelijking heet de *cirkelloopkromme*, en wel omdat de erop liggende punten bijna lopen alsof ze op een cirkel liepen, namelijk die met kromming $\kappa_{\underline{x}0}$.

Het snijpunt van de buigcirkel en de clk volgt uit (80) en (81): het is het punt op de buigcirkel waarvoor $a_3x + b_3y = 0$. Als $a_3 \neq 0$ is dat het punt van Ball,

$$\left(\frac{a_3 b_3}{a_3^2 + b_3^2}, \frac{-a_3^2}{a_3^2 + b_3^2} \right) =: B\ell$$



De baan door Bℓ heeft in Bℓ zowel $\kappa = 0$ als $\kappa' = 0$, en dat wil zeggen dat de baan daar lokaal erg rechtachtig is: het is een *afplattingspunt* van de baan. De vergelijking van de clk kunnen we ook schrijven als

$$(82) \quad ((a_3 - 3)x + b_3y)(x^2 + y^2) - 3xy = 0 ;$$

de eerste term van het linkerlid is homogeen van de 3^e, en de tweede is homogeen van de 2^e graad. De eerste levert ons de asymptotische richting

$$(a_3 - 3)x + b_3y = 0$$

(als $|x|$ en $|y|$ groot zijn is de tweede term te verwaarlozen) en de asymptoot is dan een rechte met

$$(83) \quad (a_3 - 3)x + b_3y = \alpha$$

waarbij we α bepalen door (83) met (82) te snijden,

$$\alpha \left(x^2 + \left(\frac{(a_3 - 3)x - \alpha}{b_3} \right)^2 \right) - 3x \frac{(a_3 - 3)x - \alpha}{b_3} = 0$$

zodat een vierkantsvergelijking ontstaat; (83) stelt een asymptoot voor indien de coëfficiënt van x^2 in deze vergelijking 0 is:

$$\alpha \left(1 + \frac{(a_3 - 3)^2}{b_3^2} \right) - \frac{3(a_3 - 3)}{b_3} = 0 ,$$
$$\alpha = \frac{3(a_3 - 3)b_3}{(a_3 - 3)^2 + b_3^2} ,$$

en de asymptoot is

$$(84) \quad (a_3 - 3)x + b_3y = \frac{3(a_3 - 3)b_3}{(a_3 - 3)^2 + b_3^2} .$$

Men kan het verloop van de cl κ ook bestuderen door niet van de vergelijking, (82), uit te gaan maar van een parametervoorstelling. Een manier om een parametervoorstelling te verkrijgen is de volgende: Beschouw een rechte ℓ_u door 0 met vergelijking

$$(85) \quad y = ux .$$

Het is juister om hier van een *bundel* rechten te spreken, omdat bij iedere $u \in \mathbb{R}$ een rechte ℓ_u behoort. Ieder van deze rechten snijdt de cl κ in punten waarvan de coördinaten van u afhangen; met andere woorden: we krijgen zo een parametervoorstelling $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, van de cl κ .

Zo geeft substitutie van (85) in (82)

$$((a_3 - 3)x + b_3ux)(1 + u^2)x^2 - 3ux^2 = 0$$

waaruit volgt

$$x = 0 \vee x = \frac{3u}{(1 + u^2)(a_3 - 3 + b_3u)} .$$

Het met de dubbele wortel $x = 0$ corresponderende punt is 0. Omdat voor *iedere* rechte ℓ_u zo'n dubbele wortel optreedt noemen we 0 een *dubbele punt* van de kromme; de meetkundige achtergrond is dat de cl κ in een omgeving van 0 uit 2 takken bestaat die *ieder* met een ℓ_u een punt gemeen hebben.

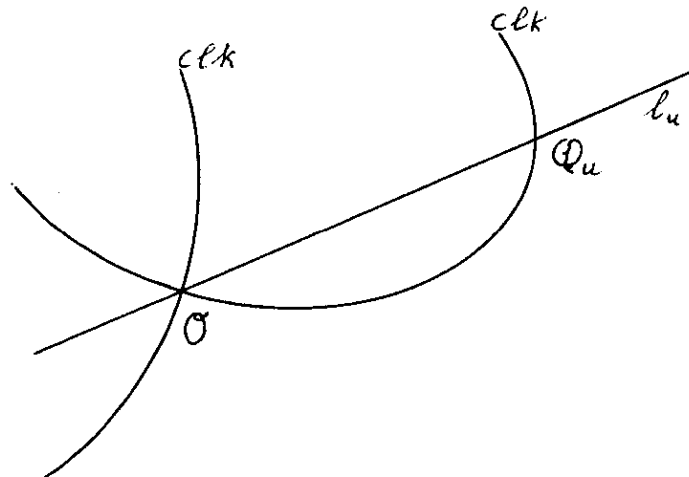
Het met de derde wortel

$$x = \frac{3u}{(1 + u^2)(a_3 - 3 + b_3u)}$$

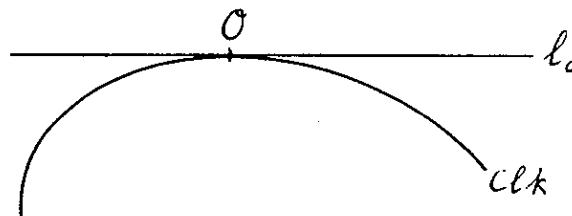
corresponderende punt is

$$(86) \quad Q_u = \left(\frac{3u}{(1 + u^2)(a_3 - 3 + b_3u)}, \frac{3u^2}{(1 + u^2)(a_3 - 3 + b_3u)} \right)$$

en men ziet direct dat voor $u = 0$ nogmaals 0 tevoorschijn komt, zodat we dan 3 samenvallende snijpunten hebben.



We kunnen dit ook meetkundig interpreteren: de koorde OQ_u heeft als richtingsvector $\overrightarrow{OQ_u}$, maar ook $u^{-1}\overrightarrow{OQ_u}$, en als $u \rightarrow 0$ dan gaat deze over in de richtingsvector van de raaklijn; zo is dus l_0 een raaklijn aan één van de takken door 0.



De raaklijn aan de andere tak zou evenzo verkregen moeten kunnen worden. Hier wreekt zich evenwel een gebrek van de voorstelling (85): weliswaar is voor iedere $u \in \mathbb{R}$ de vergelijking $y = ux$ die van een rechte door 0, maar niet omgekeerd; er is een rechte, namelijk de y -as, met vergelijking $x = 0$, waarvan

de vergelijking in (85) *niet* is begrepen. Indien we de c ℓ k snijden met de y-as, dat wil zeggen $x = 0$ substitueren in (82), dan komt er

$$b_3 y^3 = 0$$

met (mits $b_3 \neq 0$) een drievoudige wortel $y = 0$, corresponderend met een drievoudig snijpunt 0; dus is de y-as de tweede dubbelpuntsraaklijn. Men kan dit laatste ook nog anders verkrijgen. Voor $u \neq 0$ is de vergelijking van ℓ_u ook

$$\ell_u: x = u^{-1}y$$

en voor $u \rightarrow \infty$ komt er dan

$$\ell_\infty: x = 0, \text{ de y-as .}$$

En hiermee corresponderend is

$$Q_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} Q_u = (0,0) = 0 .$$

Het snijpunt van de c ℓ k met de bc bepaalden we reeds, p. 50. We kunnen ook hier met de parametervoorstelling (86) werken; de gemeenschappelijke punten van de c ℓ k en de bc corresponderen met waarden van u die wortels zijn van de vergelijking

$$(87) \quad \frac{u^2(a_3 + b_3u)}{(1 + u^2)(a_3 - 3 + b_3u)^2} = 0$$

die ontstaat door (86) in (80) te substitueren. We zien direct dat voor $u := 0$ een dubbele wortel optreedt, corresponderend met het feit dat de c ℓ k en de bc (ieder de lijn ℓ_0 , dus ook) elkaar raken in 0; voorts nemen we $u \rightarrow \infty$ en vinden zo een derde snijpunt van de c ℓ k en de bc in 0, op te vatten als het snijpunt van de bc met de verticale tak van de c ℓ k; tenslotte vinden we nog een punt uit de vergelijking $a_3 + b_3u = 0$, en dat is precies het punt van Ball. Zo vinden we 4 snijpunten, hetgeen, volgens wiskundige normen, 2 te weinig is: een kromme van de 2^e graad en een kromme van de 3^e graad behoren $2 \times 3 = 6$ snijpunten te hebben.

3.4. Wiskundige intermezzo's

- i) Een kromme F van de graad n en een kromme G van de graad m hebben nm snijpunten (*stelling van Bezout*); hierbij moeten evenwel enige restricties gemaakt worden over de wijze waarop die snijpunten worden geteld. Zulke snijpunten worden gevonden door vergelijkingen op te lossen, en als $n \geq 2$ of $m \geq 2$ kunnen zulke vergelijkingen complexe wortels hebben, en ook meervoudige wortels hebben. Snijpunten die bij zulke wortels behoren tellen we mee, met hun algebraïsche multipliciteit.

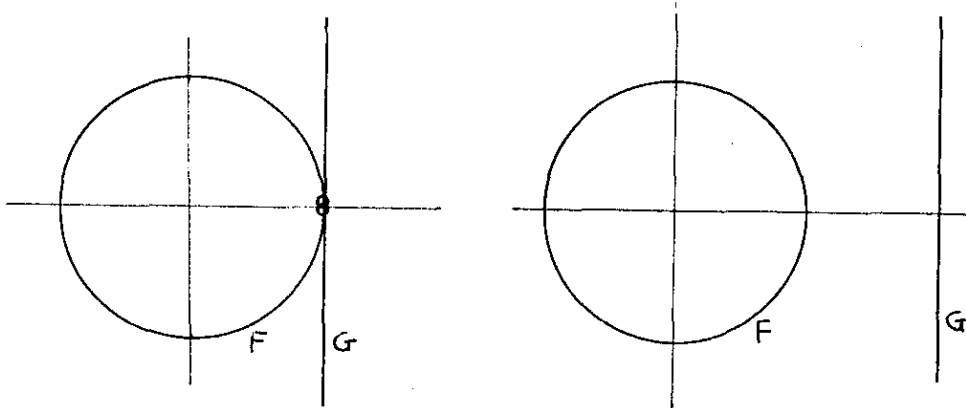
Voorbeeld:

$$\begin{aligned} F: x^2 + y^2 &= 1, \\ G: x &= 1, \end{aligned}$$

hebben snijpunten waarvoor

$$y^2 = 0;$$

er zijn dus 2 snijpunten, samenvallend in het raakpunt $(1,0)$.



Voorbeeld:

$$\begin{aligned} F: x^2 + y^2 &= 1, \\ G: x &= 2, \end{aligned}$$

hebben snijpunten die voldoen aan

$$y^2 = -3$$

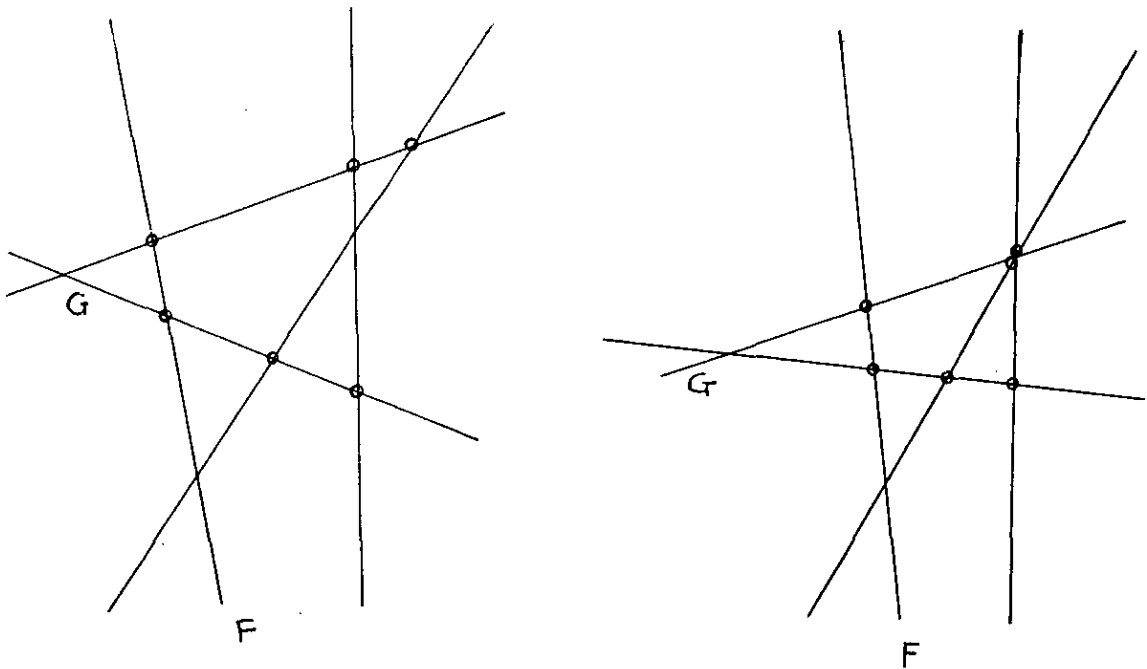
zodat $y = \pm i\sqrt{3}$ en de snijpunten zijn $(2, i\sqrt{3})$ en $(2, -i\sqrt{3})$.

Voorbeeld:

$$F: (a_1x + b_1y + c_1) \dots (a_nx + b_ny + c_n) = 0 ,$$

$$G: (a'_1x + b'_1y + c'_1) \dots (a'_mx + b'_my + c'_m) = 0 ,$$

beide vergelijkingen kunnen worden ontbonden in lineaire factoren, beide krommen bestaan dus uit rechte lijnen, en er zijn precies nm snijpunten als geen rechte van F samenvalt met of evenwijdig is aan een rechte van G (en meervoudige snijpunten ook meervoudig tellend). Krommen zoals deze, waarbij de vergelijking te ontbinden is en die dus eigenlijk een vereniging zijn van een aantal krommen van lagere graad, noemt men *ont-aard*.

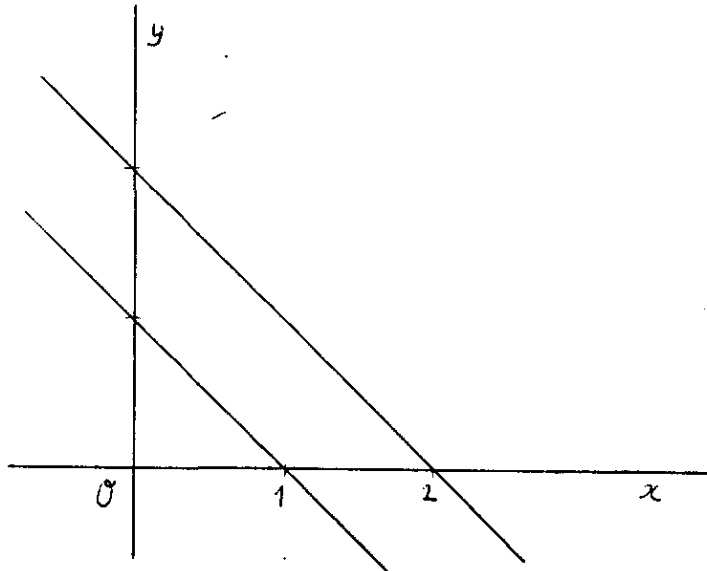


Het geval van evenwijdigheid nu buiten beschouwing gelaten geldt dan: Een kromme F van graad n en een kromme G van graad m , die, indien ont-aard, niet een hele ont-aardingstak gemeen hebben, hebben welgeteld nm snijpunten.

- ii) Het geval van evenwijdigheid kunnen we ook nog in de stelling van Bezout onderbrengen, maar dat vereist een grondige herziening van de wijze waarop we de meetkunde beschrijven; twee evenwijdige rechten, bijvoorbeeld:

$$L: x + y = 1 ,$$

$$M: x + y = 2 ,$$



hebben geen snijpunt in de gewone betekenis, reëel noch imaginair, omdat het stelsel van hun vergelijkingen strijdig is.

Hiertegen doen we het volgende: In plaats van twee coördinaten, x en y , kennen we aan een punt *drie* coördinaten, X, Y, Z , toe en wel zo dat

$$x = \frac{Y}{Z} , y = \frac{Y}{Z}$$

waarbij (X, Y, Z) op een factor na bepaald is: $0 \approx (0, 0, 1) \approx (0, 0, 10)$; bij het punt dat we vroeger beschreven met $(1, 1)$ horen als mogelijke drietallen $(1, 1, 1) \approx (37, 37, 37)$; de vergelijking van L wordt nu

$$\frac{X}{Z} + \frac{Y}{Z} = 1 \quad \text{of} \quad X + Y - Z = 0$$

en die van M

$$X + Y - 2Z = 0 ,$$

samen niet meer een strijdig stelsel vormend, maar met de oplossing

$$(X, Y, Z) = \zeta (-1, 1, 0) .$$

Om voor de hand liggende meetkundige redenen spreken we bij zo'n drietal van een *oneigenlijk punt*, vroeger vaak *oneindig ver punt* genoemd. De getallen X, Y, Z noemen we *homogene coördinaten*. Als in (X, Y, Z) geldt $Z \neq 0$ dan stelt het drietal een "gewoon" punt voor, namelijk met $x := \frac{X}{Z}$, $y := \frac{Y}{Z}$; en als $Z = 0$ dan is het oneigenlijke punt een *richting*, namelijk van de rechten met richtingscoëfficiënt $\frac{Y}{X}$ als $X \neq 0$, van de y -as als $X = 0$; bij $(0, 0, 0)$ hoort geen enkel punt.

De verzameling van alle punten met drietal $(X, Y, 0)$ voldoet aan de vergelijking

$$Z = 0,$$

een lineaire vergelijking; we noemen die verzameling de *oneindig verre rechte* of *oneigenlijke rechte*, l_{∞} .

Nu geldt zonder uitzondering: Ieder tweetal rechten (niet samenvallend) heeft precies één snijpunt.

- iii) We keren nu terug tot de stelling van Bezout. Iedere vergelijking kunnen we *homogeen* maken door de substituties $x := \frac{X}{Z}$ en $y := \frac{Y}{Z}$. Dan geldt de stelling van Bezout algemeen. Een kromme F van de graad n en een (andere) kromme G van de graad m hebben nm snijpunten, tenzij door ontaarding een deel van de ene samenvalt met een deel van de andere.

Voorbeeld:

$$F: x^2 + y^2 = 1, \text{ homogeen } X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$$

$$G: \text{ de oneigenlijke rechte, } Z = 0.$$

Voor de snijpunten geldt $X^2 + Y^2 = 0 \wedge Z = 0$ zodat de snijpunten zijn

$$I := (1, i, 0) \text{ en } J := (1, -i, 0).$$

De punten I en J heten *cirkelpunten* of *isotrope* of *absolute punten*. Iedere cirkel gaat door I en J :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ homogeen } (X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = r^2 Z^2$$

snijden met $Z = 0$ geeft $X^2 + Y^2 = 0$ als zojuist.

Speciale vermelding verdient de *nulcirkel*

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ homogeen } X^2 + Y^2 = 0$$

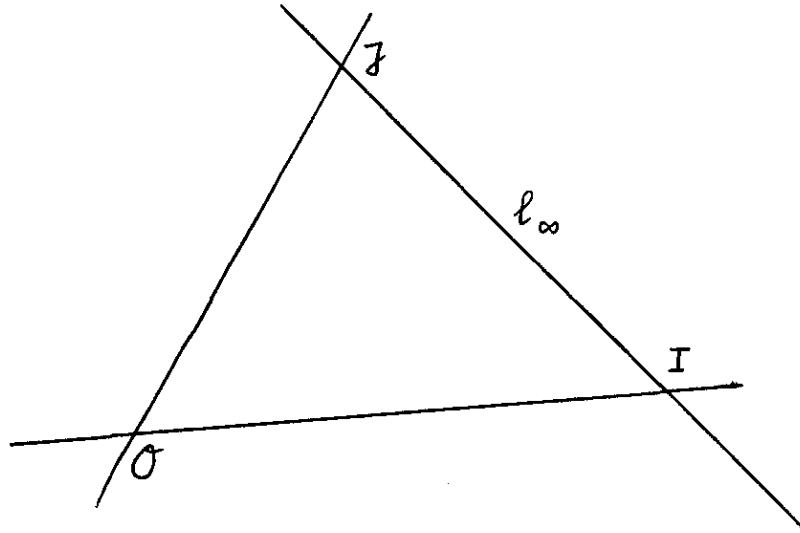
die ontaard is

$$(X + iY)(X - iY) = 0$$

en in 2 imaginaire rechten uiteenvalt

$$X + iY = 0 \vee X - iY = 0 ;$$

deze rechten hebben een reëel punt gemeen, $0 = (0,0) \approx (0,0,1)$, en de eerste gaat door I, de tweede door J. Met wat fantasie hebben we zo de volgende situatie:



Een kromme die door I en J gaat heet *circulair*; l_∞ is *circulair*, iedere cirkel is *circulair*.

- iv) Krommen van de graad n kunnen op veel manieren ontaard zijn, maar voor $n = 2$ of 3 is de situatie nog erg overzichtelijk: Een kromme van de 2^e graad kan ontaarden in 2 takken van de 1^e graad, een kromme van de 3^e graad kan ontaarden in 3 takken van de 1^e graad of in 2 takken, een van de 1^e en een van de 2^e graad.

Een kromme

$$F: \sum_{j+k \leq n} a_{jk} x^j y^k = 0$$

heet *reëel* als de coëfficiënten a_{jk} reëel zijn.

Als een reële kromme door I gaat, gaat ze ook door J:

$$F, \quad \sum_{j+k \leq n} a_{jk} X^j Y^k Z^{n-j-k} = 0$$

gaat door I $\approx (1, i, 0)$

$$\sum_{j+k=n} a_{jk} I_i^{j,k} = 0$$

$$\overline{\sum_{j+k=n} a_{jk} I_i^{j,k}} = 0$$

$$\sum_{j+k=n} \bar{a}_{jk} \bar{I}_i^{j,k} = 0$$

$$\sum_{j+k=n} a_{jk} I_i^j (-i)^k = 0$$

$\therefore J \in F$.

3.5. Voortzetting van 3.3

De bij de cłk behorende homogene vergelijking luidt

$$(88) \quad ((a_3 - 3)X + b_3 Y)(X^2 + Y^2) - 3XYZ = 0$$

en snijden met ℓ_∞ geeft

$$Z = 0 \wedge [(a_3 - 3)X + b_3 Y = 0 \vee X^2 + Y^2 = 0].$$

Hieruit volgt in de eerste plaats de *asymptotische richting* van de cłk,

$$(b_3, -a_3 + 3, 0)$$

en vervolgens dat de cłk door I en J gaat, d.w.z. *circulair* is.

Door deze laatste vondst zijn nu ook de laatste 2 gemeenschappelijke punten van de cłk en de bc achterhaald (vergelijk de laatste regel van § 3.3).

De cłk kan natuurlijk ontaard zijn; aangezien de graad 3 is krijgen we dan óf 3 rechten óf een rechte en een niet-ontaarde kegelsnede.

De enige mogelijke ontaarding van de cłk ontstaan als

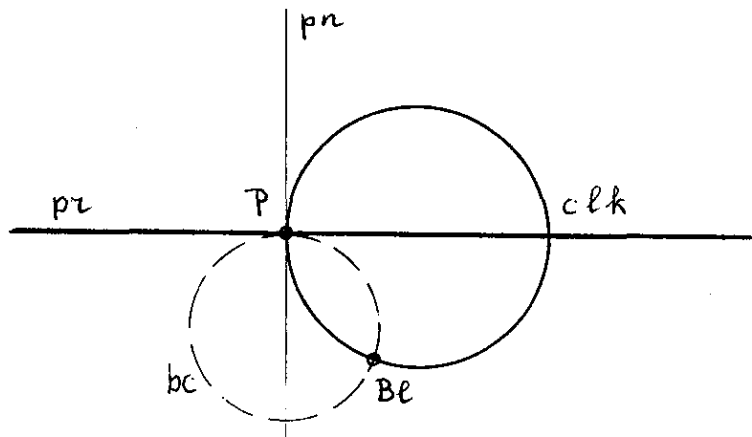
$$((a_3 - 3)X + b_3 Y)(X^2 + Y^2)$$

een der factoren X, Y of Z bevat; dat geeft precies 3 gevallen:

i) $a_3 = 3 \wedge b_3 \neq 0.$

clk: $y\{b_3(x^2 + y^2) - 3x\} = 0,$

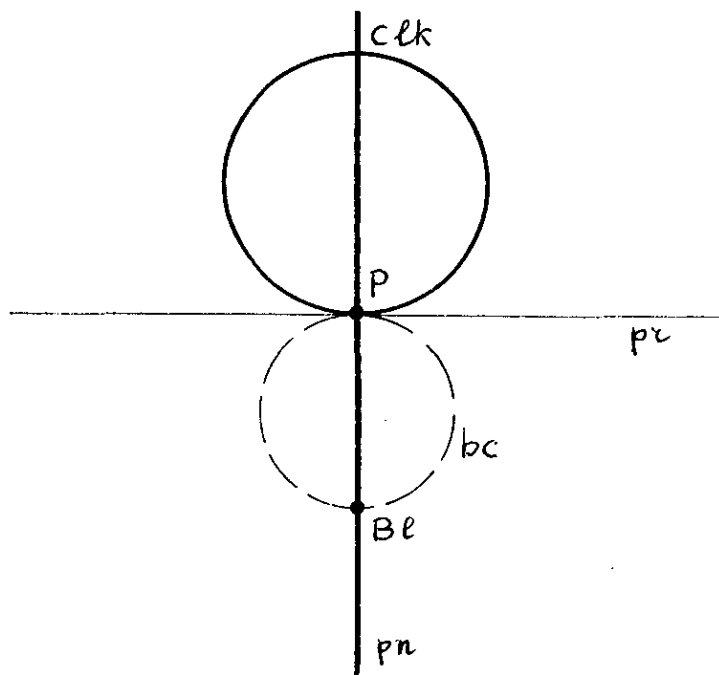
$$y = 0 \vee \left(x - \frac{3}{2b_3}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4b_3^2}.$$



ii) $a_3 \neq 3 \wedge b_3 = 0.$

clk: $x\{(a_3 - 3)(x^2 + y^2) - 3y\} = 0,$

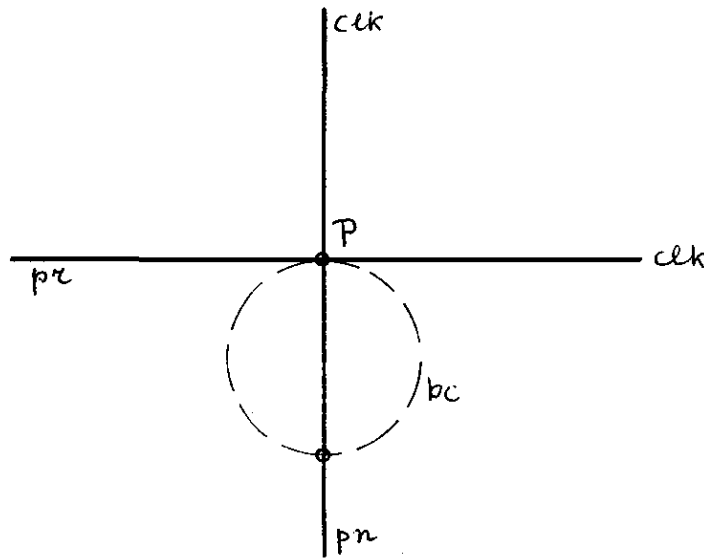
$$x = 0 \vee x^2 + \left(y - \frac{3}{2(a_3 - 3)}\right)^2 = \frac{9}{4(a_3 - 3)^2}.$$



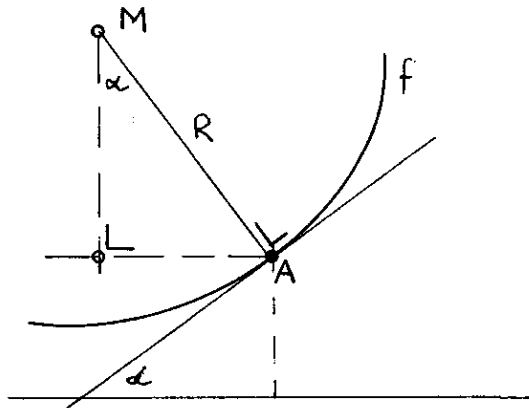
iii) $a_3 = 3 \wedge b_3 = 0$.

clk: $xy = 0$, homogeen $XYZ = 0$,

$x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0$.



3.6. De middelpuntskromme



Als een kromme f in een punt $A = (x,y)$ een hellingshoek α t.o.v. de x -as en een kromtestraal R heeft dan zijn de coördinaten van het *kromtemiddelpunt* M

(88)
$$\begin{aligned} \xi &= x - R \sin \alpha \\ \eta &= y + R \cos \alpha \end{aligned}$$

(vergelijk § 2.5ii; als de kromming κ negatief is, moet men ook R negatief nemen; als $\kappa = 0$ dan is M niet gedefinieerd).

Bij de beweging $V_2|V_1$ doorloopt ieder punt $\underline{x} \in V_2$ een baan in V_1 en ieder van deze banen heeft in ieder punt een kromtemiddelpunt. Het is interessant om na te gaan wat de verzameling is van de kromtemiddelpunten van de banen in de punten die op de clk liggen. We veronderstellen weer dat we kanonieke coördinaten in de nulpositie hebben. Het punt $\underline{x} \in V_2$ bevindt zich dan in het punt $\underline{X} \in V_1$ waarvoor vanwege de nulpositie geldt $X = x, Y = y$, en waarop vanwege het kanonieke stelsel de formules (67), (69) en (73) van toepassing zijn. Zo volgt uit de definitie van hellingshoek met gebruikmaking van (67)

$$\tan \alpha = \frac{Y'(0)}{X'(0)} = \frac{Y_1}{X_1} = -\frac{x}{y}$$

zodat met nauwkeurig in acht nemen van (67)

$$\sin \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \alpha = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en we uit (88) en (73) kunnen afleiden

$$(89a) \quad \xi = x - \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2 + y} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{xy}{x^2 + y^2 + y}$$

en evenzo

$$(89b) \quad \eta = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y};$$

merk op dat

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{y}{x^2 + y^2 + y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zodat \mathcal{O} , $\mathcal{O} + \underline{\xi}$ en $\mathcal{O} + \underline{x}$ op een rechte liggen, in overeenstemming met de aard van de pool (die zich in \mathcal{O} bevindt).

Wanneer we nu bovendien van \underline{x} aannemen dat ze op de clk ligt zodat

$$(82) \quad ((a_3 - 3)x + b_3y)(x^2 + y^2) - 3xy = 0$$

dan vinden we door eliminatie van x en y uit (89) en (82) de vergelijking van de bedoelde verzameling, de zo geheten *middeelpuntskromme* (mpk).

Om de eliminatie uit te voeren schrijven we de 3 betrokken vergelijkingen eerst anders op; (82), (89a) en (89b) wijzigen we achtereenvolgens in:

$$(90a) \quad (a_3x + b_3y)(x^2 + y^2) = 3x(x^2 + y^2 + y) ,$$

$$(90b) \quad xy = \xi(x^2 + y^2 + y) ,$$

$$(90c) \quad y^2 = \eta(x^2 + y^2 + y) .$$

We leiden hieruit een nieuw stelsel vergelijkingen af, met als oogmerk om eerst de hinderlijke factor $(x^2 + y^2 + y)$ te elimineren. Daartoe tellen we (90b) met a_3 vermenigvuldigd op bij (90c) met b_3 vermenigvuldigd:

$$(91a) \quad (a_3x + b_3y)y = (a_3\xi + b_3\eta)(x^2 + y^2 + y) .$$

Vervolgens delen we (90c) door (90b):

$$(91b) \quad \frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} .$$

Tenslotte delen we (90a) door (91a):

$$(91c) \quad \frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{3x}{a_3\xi + b_3\eta} ,$$

waaruit

$$a_3\xi + b_3\eta = \frac{3xy}{x^2 + y^2} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

en met (91b)

$$a_3\xi + b_3\eta = \frac{3\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{1 + \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2} = \frac{3\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

of

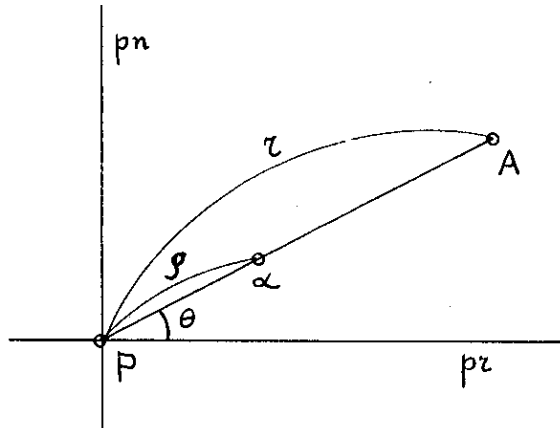
$$(92) \quad (a_3\xi + b_3\eta)(\xi^2 + \eta^2) - 3\xi\eta = 0 .$$

Dit is de vergelijking van de *middelpuntskromme*.

Men ziet direct dat de gedaante van de mpk grote gelijkenis vertoont met die van de clk: ze heeft een dubbelpunt in P met pr en pn als raaklijnen, en een asymptoot; dit kan direct worden afgeleid door in de formules (81) e.v. overall $a_3 - 3$ door a_3 te vervangen.

3.7. De stelling van Bobillier

Als we in de nulpositie poolcoördinaten invoeren, waarbij P als pool (van



het poolcoördinatenstelsel) optreedt, en met de notatie (r, θ) voor de poolcoördinaten van een punt $A \in V_2$, dan geldt voor de voerstraal ρ van het kromtemiddelpunt α bij A, volgens (89) (en de daar gemaakte opmerking)

$$\rho = \frac{y}{x^2 + y^2 + y} \quad r = \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 + r \sin \theta} = \frac{r \sin \theta}{r + \sin \theta}.$$

Als $\theta = k\pi$ (met k geheel) dan is $\sin \theta = 0$ en ook $\rho = 0$, zodat dan het kromtemiddelpunt van A in P valt; dit is het geval als $A \in pr$. Als $A \notin pr$ dan is $\sin \theta \neq 0$ en

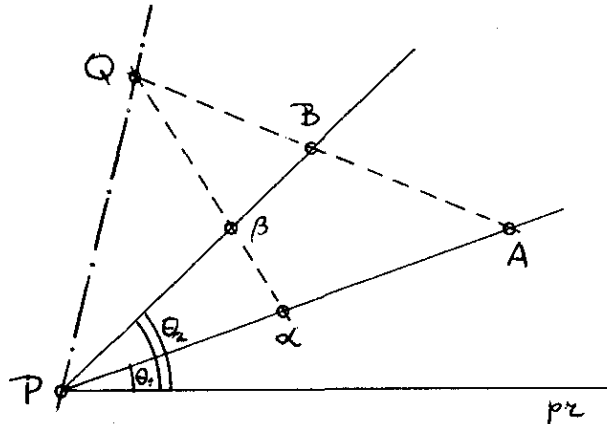
$$\frac{1}{\rho} = \frac{r + \sin \theta}{r \sin \theta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\sin \theta}$$

of

$$(93) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\sin \theta},$$

de algemene formule van Euler-Savary.

Deze formule is het uitgangspunt van de volgende meetkundige observaties.



Stel dat A en B niet op de pr gelegen punten van V_2 zijn, met kromtemiddelpunten α en β , poolhoeken θ_1 en θ_2 , voerstralen $AP = r_1$, $BP = r_2$, $\alpha P = \rho_1$, $\beta P = \rho_2$.

We nemen een tijdelijk coördinatenstelsel in V_2 waarbij de ξ -as langs AP, de η -as langs BP valt (zodat het geen orthonormaal stelsel behoeft te zijn).

Ten opzichte van dit assenstelsel hebben A, B, α , β de kentallen $A = (r_1, 0)$, $B = (0, r_2)$, $\alpha = (\rho_1, 0)$, $\beta = (0, \rho_2)$. De vergelijkingen der rechten ℓ_{AB} door A en B en $\ell_{\alpha\beta}$ door α en β zijn (evenals wanneer het een orthonormaal assenstelsel betref)

$$\ell_{AB}: \frac{\xi}{r_1} + \frac{\eta}{r_2} = 1$$

$$\ell_{\alpha\beta}: \frac{\xi}{\rho_1} + \frac{\eta}{\rho_2} = 1$$

en het snijpunt Q van deze rechten voldoet ook aan de vergelijking die ontstaat door deze vergelijkingen af te trekken

$$\xi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \eta \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\rho_2} \right) = 0$$

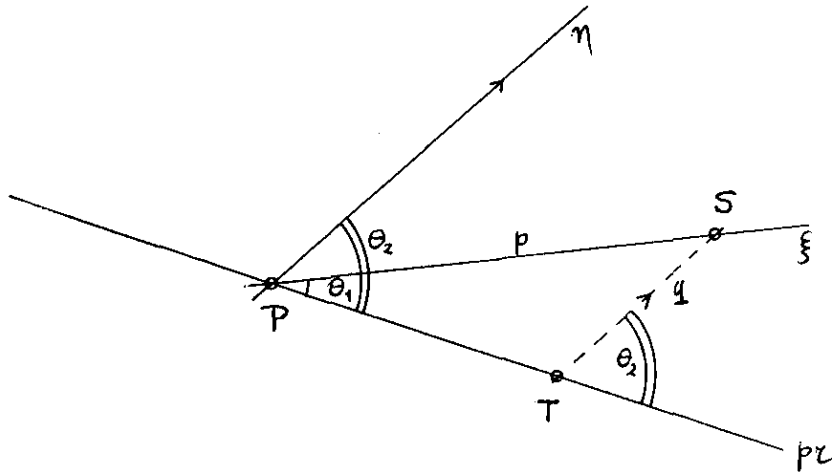
zodat, in verband met de formule (93) van Euler-Savary,

$$\frac{\xi}{\sin \theta_1} + \frac{\eta}{\sin \theta_2} = 0$$

of

$$(94) \quad \xi \sin \theta_2 + \eta \sin \theta_1 = 0 .$$

Deze rechte, door P en Q, heet de *collineatie-as*.



Vervolgens bepalen we bij dit coördinatenstelsel de vergelijking van pr. Neem daartoe een punt $T \in pr$, $T \neq P$. Laat uit T een "ordinaat" neer op de ξ -as, die dus evenwijdig is met de η -as; zij het voetpunt S. Dan zijn de coördinaten van T (afgezien van het teken): $p = PS$ en $q = ST$. Volgens de sinusregel is nu in $\triangle PTS$

$$\frac{q}{\sin \theta_1} = \frac{p}{\sin \theta_2} .$$

Nu is evenwel, zoals uit de tekening blijkt, $\xi_T = p$, $\eta_T = -q$ en men verkrijgt zo

$$\xi_T \sin \theta_1 + \eta_T \sin \theta_2 = 0$$

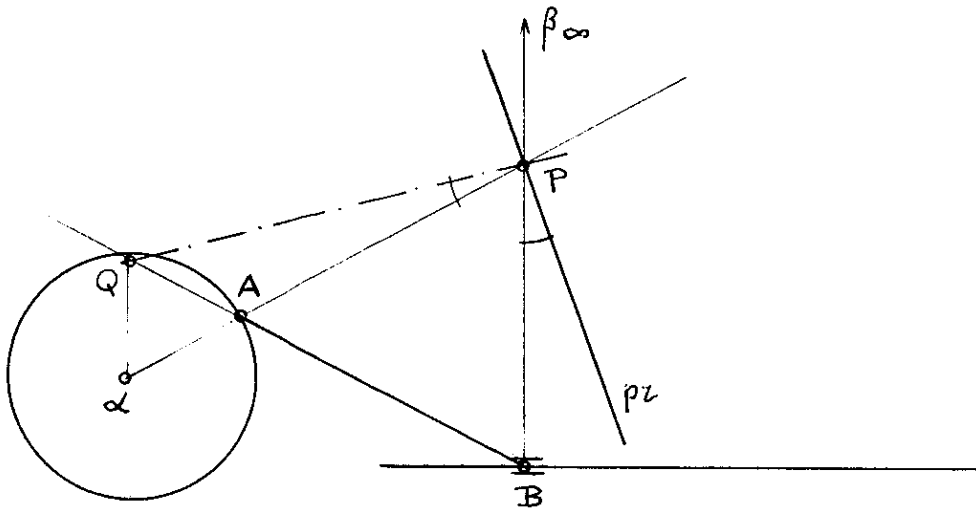
waaruit voor de vergelijking van pr volgt

$$(95) \quad \xi \sin \theta_1 + \eta \sin \theta_2 = 0 .$$

Bij inspectie blijkt dat (95) uit (94) ontstaat door ξ en η te verwisselen; dit betekent dat PQ en pr gespiegeld liggen ten opzichte van de bissectrice van $\angle APB$; men noemt zulke ligging *isogonale verwantschap* t.o.v. $\angle APB$. Zo blijkt:

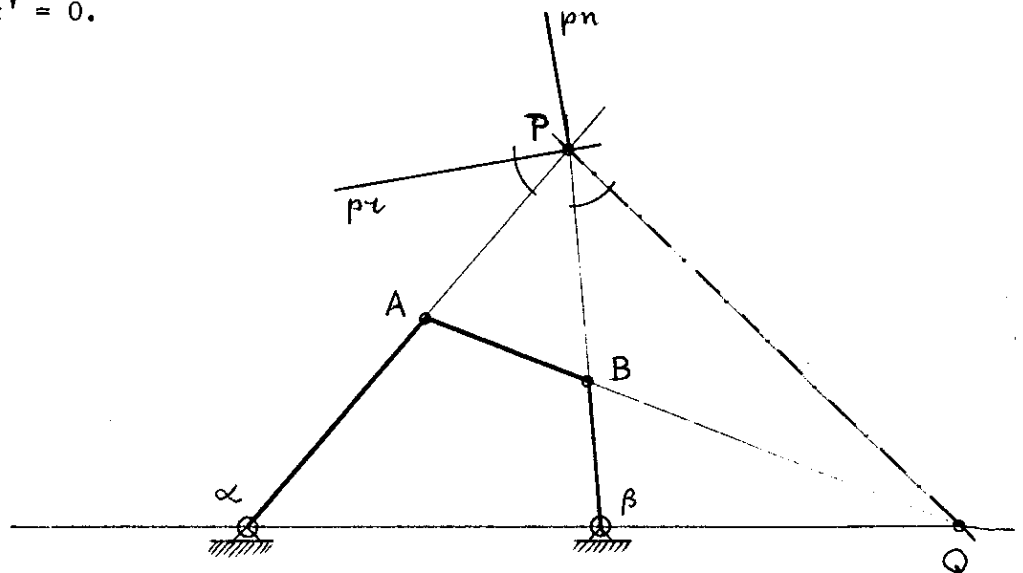
Stelling van Bobillier: Voor ieder tweetal poolstralen zijn de poolraaklijn en de collineatie-as isogonaal verwant ten opzichte van de hoek tussen die poolstralen.

iii) Bij een *excentrisch krukdrijfstaangmechanisme* met drijfstaang AB kan men

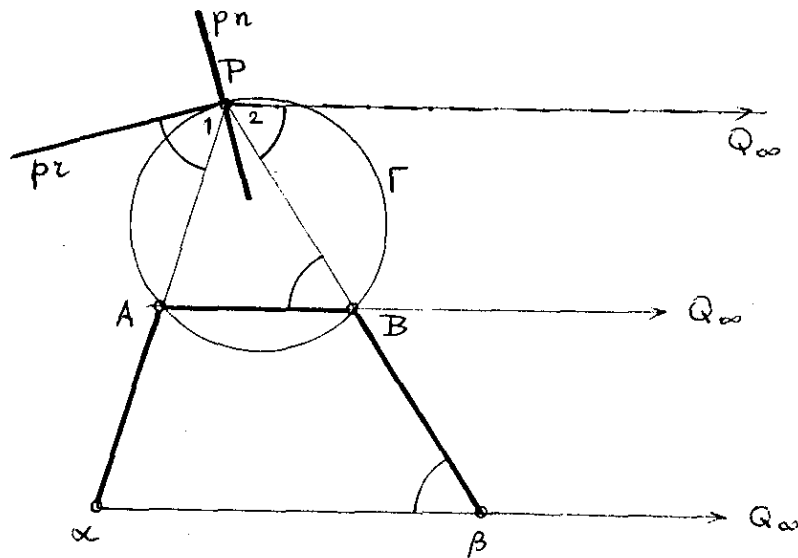


P en pr in iedere situatie construeren met de stelling van Bobillier: A loopt een cirkel, waarvan het middelpunt tevens kromtemiddelpunt α is; B loopt langs een rechte waarvan het loodrecht erop gelegen oneigenlijke punt β_{∞} kromtemiddelpunt is. Aangezien B langs een rechte loopt is B altijd in een buigpunt van zijn baan ($\kappa = 0$) zodat in iedere situatie $B \in bc$. Verder raakt bc aan pr in P waarmee bc bekend is. Voor de baan van B is ook $\kappa' = 0$, zodat $B \in clk$. Dus is in iedere situatie $B = Bl$. Bovendien geldt $A \in clk$.

iv) Bij een *stangenvierzijde* met koppelstaang AB zijn de gestelpunten α en β de kromtemiddelpunten bij A en B, die immers cirkelbanen beschrijven. clk gaat hier door A en B, want voor hun beider banen is de kromming constant, $\kappa' = 0$.

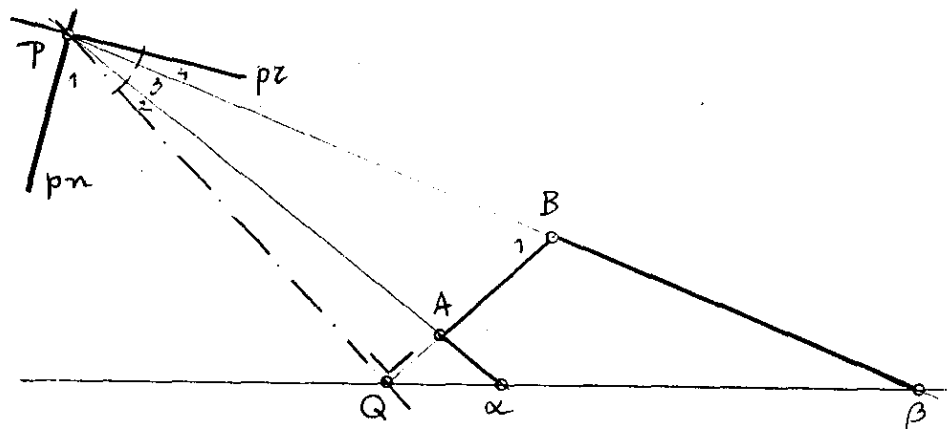


v) Als bij een stangenvierzijde $AB; \alpha\beta$ geldt $AB \parallel \alpha\beta$ dan is clk ontaard.



Toepassing van de stelling van Bobillier toont dat $\angle P_1 = \angle P_2 = \angle B$, zodat pr raakt aan de omcirkel Γ van ΔPAB . Nu heeft Γ met clk de volgende punten gemeen: A, B, I, J, P als raakpunt op pr dubbel, P als snijpunt met de aan pn rakende tak van clk , totaal 7. Dat betekent dat Γ moet samenvallen met een ontaardingstak van clk , waarvan de andere tak dan pn moet zijn (zie § 3.5ii, het geval $b_3 = 0$).

vi) Als bij een stangenvierzijde $AB; \alpha\beta$ geldt dat $PQ \perp AB$ dan is clk ontaard.



Hier is $\angle P_{1,2} = \frac{\pi}{2} - \angle P_{3,4} = \frac{\pi}{2} - \angle P_{2,3} = \angle B_1$, zodat nu pn raakt aan de omcirkel Γ van ΔABP . clk bestaat nu uit Γ en pr .

vii) Met de gevallen v) en vi) zijn de ontaardingenvan clk bij een stangenvierzij niet uitgeput. Vergelijk [1], § 55.

3.9. De stelling van Hartmann

- i) In § 2.4 zijn de nulpositie en het kanonieke assenstelsel beschreven. In de algemene voorstelling voor de beweging $V_2|V_1$,

$$(52) \quad \underline{X} = D_\varphi \underline{x} + \underline{a}$$

met $\underline{a} = (a, b)^T$ kan men a en b (als functies van φ opgevat) schrijven als

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a(0) + \varphi a'(0) + \frac{\varphi^2}{2} a''(0) + \frac{\varphi^3}{3!} a'''(0) + \dots \\ &= a_0 + a_1 \varphi + \frac{1}{2} a_2 \varphi^2 + \frac{1}{6} a_3 \varphi^3 + \dots \end{aligned}$$

en evenzo

$$b(\varphi) = b_0 + b_1 \varphi + \frac{1}{2} b_2 \varphi^2 + \frac{1}{6} b_3 \varphi^3 + \dots$$

Nulpositie betekent dat $a_0 = b_0 = 0$ (hetgeen inhoudt dat $\varphi = 0$), een afspraak over de momentele betrekking tussen het vaste en het meebewegende coördinatenstelsel. Het kanonieke stelsel wordt dan gedefinieerd met behulp van de poloden: P valt momenteel in de oorsprong voor $a_1 = b_1 = 0$ (61), de X -as en de x -as vallen langs de raaklijn aan Σ_1 (en Σ_2) in P als $a_2 = 0$.

We zullen nu nagaan wat de gevolgen zijn voor enkele formules indien we *niet* $b_2 = -1$ stellen; deze mogelijkheid is ook al geopperd in § 3.2.i; daar is ook al berekend dat voor de poolwisselsnelheid geldt

$$\dot{\underline{X}}_{-p} = \frac{d}{dt} \underline{X}_{-p} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \underline{X}_{-p} = \dot{\varphi} \underline{X}'_{-p} = \omega \underline{X}'_{-p}$$

en in de nulpositie (vergelijk (61) e.v.)

$$\underline{u}_0 := \dot{\underline{X}}_{-p}(0) = \omega_0 (a_1 - b_2, a_2 + b_1)^T = \omega_0 (-b_2, 0)^T.$$

De richting van de X -as kiezen we zó dat $-\omega_0 b_2 > 0$ zodat ze wordt aangegeven door de vector \underline{u}_0 ; de grootte van de poolwisselsnelheid is dan

$$(95) \quad u := -\omega_0 b_2 > 0.$$

Voor de baan van het punt dat in V_2 wordt bepaald door de plaatsvector \underline{x} blijven (62)-(68) geldig, maar (69) gaat over in

$$(96) \quad \begin{aligned} X_2 &= -x \\ Y_2 &= -y + b_2 \end{aligned}$$

waardoor (73) overgaat in

$$(97) \quad \kappa_{\underline{x}}(0) = \frac{x^2 + y^2 - b_2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

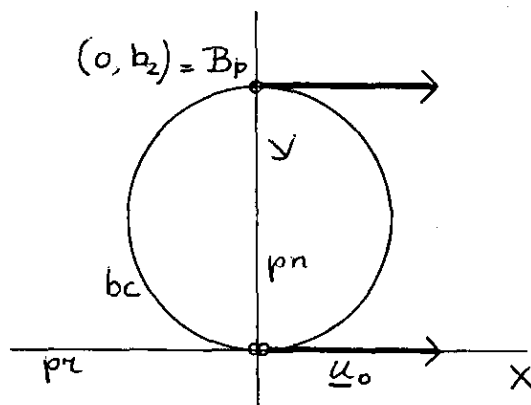
De vergelijking van de buigcirkel wordt dienovereenkomstig

$$(98) \quad x^2 + y^2 - b_2 y = 0$$

en de buigpool (p. 49, 1^e regel)

$$B_p = (0, b_2).$$

Als $\omega_0 > 0$ dan liggen bc en B_p onder de X-as, als $\omega_0 < 0$ dan erboven.



In deze tekening is $\omega_0 < 0$ ondersteld, zodat de draairichting is van de Y-as naar de X-as.

Het punt van V_2 dat zich momenteel in B_p bevindt heeft een snelheid met grootte $|\omega_0| |b_2| = |u|$, en uit de draairichting ziet men dat de snelheid daar precies \underline{u}_0 is.

ii) Formule (97) heeft ook invloed op de algemene formule van *Euler-Savary* (93).

De berekening van het bij $(x,y) \in U_2$ behorende kromtemiddelpunt wordt nu

$$(99a) \quad \xi = x - \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2 - b_2 y} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{-b_2 xy}{x^2 + y^2 - b_2 y}$$

en evenzo

$$(99b) \quad \eta = \frac{-b_2 y^2}{x^2 + y^2 - b_2 y},$$

zodat nu

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{-b_2 y}{x^2 + y^2 - b_2 y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In § 3.7 komt er dan

$$\rho = \frac{-b_2 y}{x^2 + y^2 - b_2 y} r = \frac{-b_2 r \sin \theta}{r - b_2 \sin \theta}$$

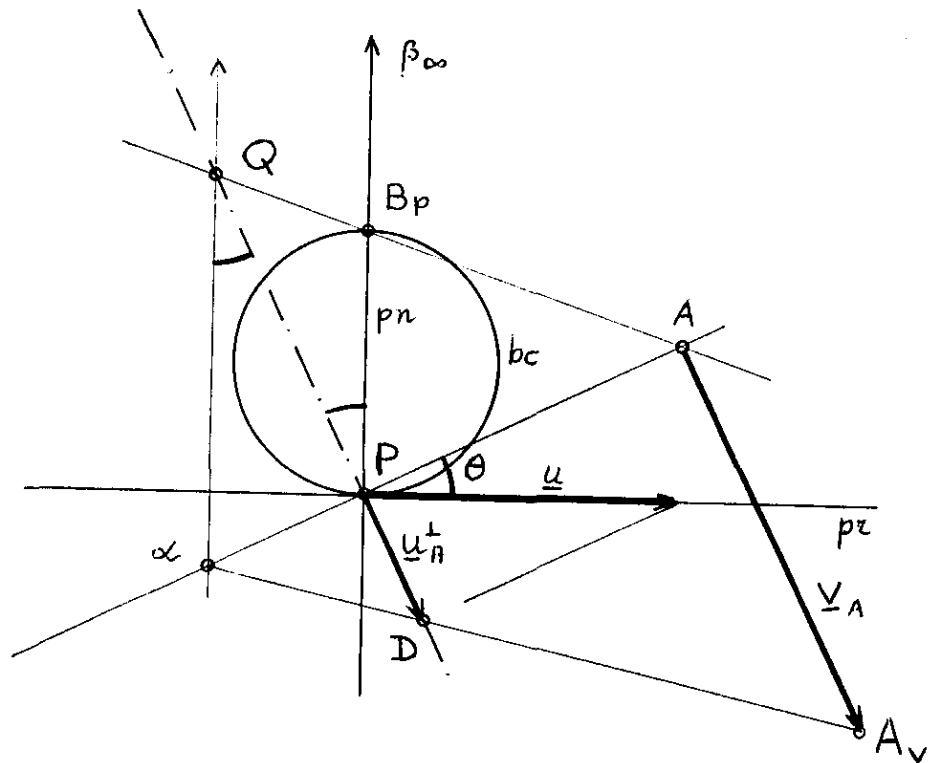
en

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{b_2 \sin \theta} + \frac{1}{r},$$

$$(100) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{b_2 \sin \theta} = \frac{\omega_0}{u \sin \theta}.$$

De stelling van *Bobillier* ondergaat geen wijziging.

iii) Aangezien $B_p \in bc$ is de kromming van de baan 0 en is het bijbehorende kromtemiddelpunt oneigenlijk. Bij een willekeurig punt A kunnen we dus Q en α , maar ook $A_v := A + \frac{v}{A}$ construeren: $|\overrightarrow{AA_v}| = |\omega| |\overrightarrow{PA}|$.



In de tekening zijn b_2 en ω negatief (we schrijven $\omega = \omega_0$ voor het gemak); P ligt tussen α en A zodat we de ρ uit Euler-Savary ook negatief moeten nemen. De lijn door α en A_v snijdt PQ in D, en uit de gelijkvormigheid van $\Delta\alpha PD$ en $\Delta\alpha AA_v$ volgt (met $PA = r$)

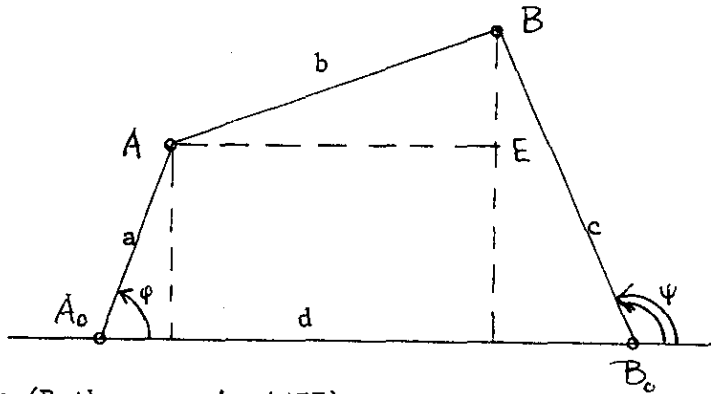
$$PD = \frac{AA_v}{\alpha A} \alpha P = \frac{(-\omega)r}{(-\rho) + r} (-\rho) = \frac{\omega r \rho}{r - \rho} = \frac{\omega}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}} = u \sin \theta$$

zodat, daar ingevolge de stelling van Bobillier $\angle QPA = \frac{\pi}{2}$, D de projectie is van $P + \underline{u}$ op PQ. Als we \underline{u} bij het gegeven punt A ontbinden in twee componenten, \underline{u}_A langs PA en \underline{u}_A^\perp loodrecht op PA (langs PQ) dan geldt:

Stelling van Hartmann: Voor iedere A liggen het bijbehorend kromtemiddelpunt α , $P + \underline{u}_A^\perp$ en $A + \underline{v}_A$ op één rechte.

3.10. De stelling van Freudenstein

Zij weer $AB; A_0B_0$ een stangenvierzijde met gestel A_0B_0 , ingang A_0A en uitgang B_0B . Zijden en hoeken worden benoemd zoals in de tekening.



Door (Pythagoras in $\triangle ABE$)

$$b^2 = (d - a \cos \varphi + c \cos \psi)^2 + (c \sin \psi - a \sin \varphi)^2$$

wordt ψ impliciet als functie van φ gegeven,

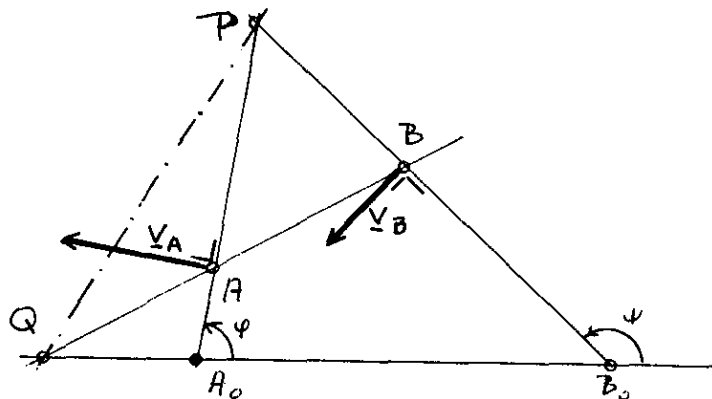
$$\psi = g(\varphi) ,$$

de *overbrengingsfunctie*, waarvan de afgeleiden (naar φ) bij dit soort mechanismen een rol spelen.

Allereerst is

$$i := \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} = \frac{\omega_u}{\omega_i}$$

de *overbrengingsverhouding* van het mechanisme (ω_u en ω_i zijn de uitgangs- respectievelijk ingangshoeksnelheid).



In de getekende situatie denken we $\omega_i, \omega_u > 0$ zodat voor de hoeksnelheid van het koppelvlak V_2 geldt $\omega < 0$. Dan is

Dan is

$$|\underline{v}_A| = \omega_i |A_0A| = -\omega |AP|$$

en

$$|\underline{v}_B| = \omega_u |B_0B| = -\omega |BP|$$

zodat

$$\frac{\omega_u}{\omega_i} = \frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|A_0A|}{|B_0B|} = \frac{|A_0A|}{|AP|} \cdot \frac{|BP|}{|B_0B|} = \frac{|A_0Q|}{|B_0Q|};$$

de laatste bewering is de inhoud van een klassieke meetkundestelling (van *Meneleas*).

(Voor een alternatief bewijs: [1], p. 56, 57.)

Noemen we de lengte van A_0Q nog w dan staat er

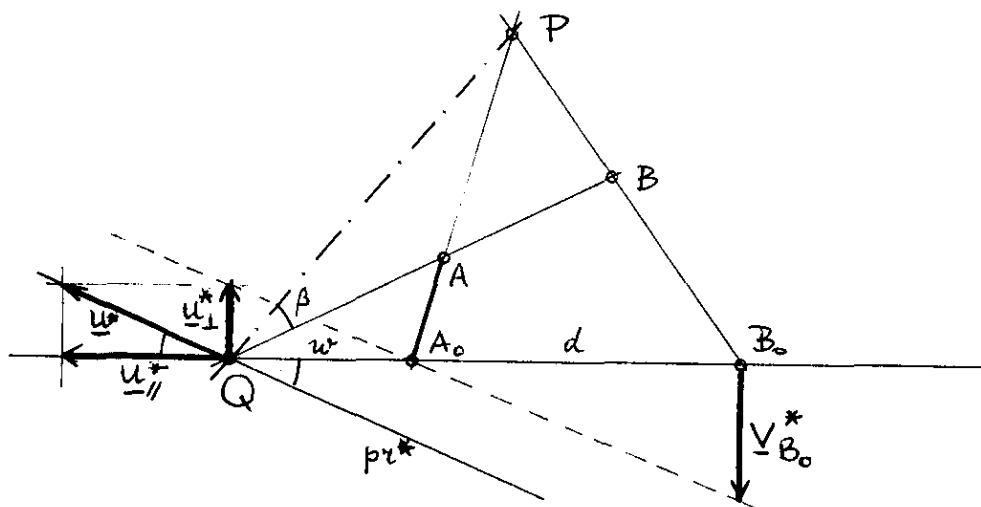
$$(101) \quad \iota = \frac{w}{w+d}; \text{ en } 1 - \iota = \frac{d}{w+d}.$$

Merk op dat Q en w van φ afhankelijk zijn. Dan is (differentiëren naar φ zoals ook eerder al met ' aanduidend, en (101) toepassend)

$$\iota' = \frac{w'd}{(w+d)^2} = \frac{w'(1-\iota)}{w+d}.$$

Hierin is $w' = \frac{dw}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{dw}{dt} = \dot{w} \omega_i^{-1}$ en \dot{w} is de snelheid waarmee Q zich langs de gestellijn verplaatst. Deze snelheid kunnen we met behulp van het volgende denkbeeld berekenen:

Beschouw de verwante beweging* met dezelfde stangenvierhoek maar met A_0A als gestel*.



Dan is Q de momentele pool*, PQ weer collineatieas*; A_0B_0 draait dan om A_0 met hoeksnelheid $-\omega_i$; Q verplaatst zich langs de poolraaklijn pr^* (te construeren volgens Bobillier) met een snelheid \underline{u}^* waarvoor, toegepast op B_0 ,

de stelling van Hartmann geldt:

$$\dot{w} = |u_{//}^*| = |u_{\perp}^*| \cot \beta = \frac{w}{d} |v_{B_0}^*| \cot \beta = \frac{w}{d} d\omega_i \cot \beta = w\omega_i \cot \beta .$$

Dus

$$(102) \quad w' = w \cot \beta$$

en

$$(103) \quad \iota' = \frac{(1 - \iota) \dot{w}}{w + d} \frac{1}{\omega_i} = \frac{1 - \iota}{w + d} w \cot \beta = \iota(1 - \iota) \cot \beta .$$

Men ziet in (103) direct:

Als $\beta = \frac{\pi}{2}$ dan is $\iota' = 0$, ι is stationair (stelling van Freudenstein).

Dit is het geval dat in § 3.8.vi ook is besproken.

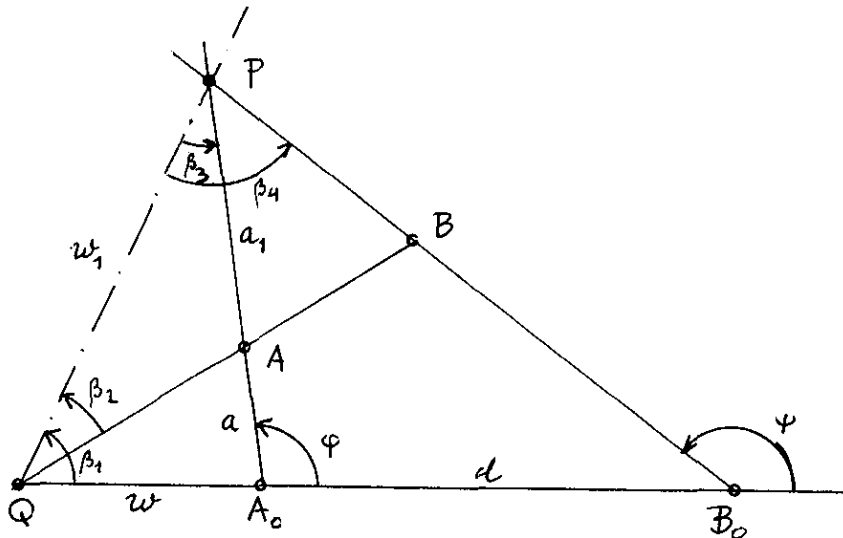
Hoofdstuk 4. Synthese

4.1. Stangenmechanismen waarvoor ι , ι' en ι'' momenteel gegeven zijn

De berekening van ι'' is nog iets lastiger dan die van ι' in de vorige §. Uit (103) volgt

$$\iota'' = \iota'(1 - 2\iota)\cot\beta + \iota(\iota - 1)(\cot^2\beta + 1)\beta'.$$

Om β' te berekenen beschouwen we opnieuw de stangenvierzijde met de daar aangegeven lijnstukken en hoeken; $\beta_2 := \beta$.



We schrijven $\tau_k := \cot\beta_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Dan is

$$(104) \quad \iota'' = \iota'(1 - 2\iota)\tau_2 + \iota(\iota - 1)(\tau_2^2 + 1)\beta_2'.$$

We vonden reeds

$$(102) \quad w' = w\tau_2,$$

een betrekking die de verplaatsing van Q langs de gestellijn schildert. w is daarbij de afstand van Q tot het ingangsmiddelpunt A_0 , β_2 de hoek tussen koppelstang en collineatieas. Beschouwen we weer het *mechanisme** met A_0A als *gestel**, dan is BB_0 de koppelstang*, PQ de collineatieas*, de ingangshoek variabele* (gemeten vanaf het gestel) is nu $-\varphi$; met Q correspondeert nu P, met w correspondeert $PA_0 = a + a_1$, met β_2 correspondeert (gemeten vanaf het gestel) $-\beta_4$. Naar analogie van (102) geldt dan

$$(105) \quad (a + a_1)' = \frac{d}{d\varphi} (a + a_1) = -\frac{d}{d(-\varphi)} (a + a_1) = -(a + a_1) \cot(-\beta_4) = \\ = (a + a_1) \tau_4 .$$

In ΔA_0PQ geldt de sinusregel

$$\frac{a + a_1}{\sin \beta_1} = \frac{w}{\sin \beta_3}$$

of

$$(106) \quad (a + a_1) \sin \beta_3 = w \sin \beta_1$$

waaruit door differentiëren naar φ (en met behulp van (102) en (105))

$$(a + a_1) \tau_4 \sin \beta_3 + (a + a_1) \beta_3' \cos \beta_3 = w \tau_2 \sin \beta_1 + w \beta_1' \cos \beta_1 ,$$

met behulp van (106)

$$w \tau_4 \sin \beta_1 + w \tau_3 \beta_3' \sin \beta_1 = w \tau_2 \sin \beta_1 + w \beta_1' \cos \beta_1$$

en na deling door $w \sin \beta_1$

$$(107) \quad \tau_4 + \tau_3 \beta_3' = \tau_2 + \tau_1 \beta_1'$$

ontstaat. Het verband tussen β_1 , β_2 en β_3 is (met een nieuwe hoek λ)

$$\beta_1 - \beta_2 = \lambda \quad \text{en} \quad \beta_1 + \beta_3 = \varphi$$

waaruit door differentiëren ontstaat

$$(108) \quad \beta_1' - \beta_2' = \lambda' \quad \text{en} \quad \beta_1' + \beta_3' = 0 .$$

Hier is bovendien nog

$$\dot{\lambda} = \lambda' \dot{\varphi} = \lambda' \omega_1 ,$$

terwijl $\dot{\lambda} = \omega$, de momentele hoeksnelheid van de koppelstang V_2 ten opzichte van het gestel V_1 .

Tussen ω en ω_i bestaat eveneens een betrekking, die we aan \underline{v}_A ontleen: enerzijds is $|\underline{v}_A| = a|\omega_1|$, anderzijds ook $|\underline{v}_A| = a_1|\omega|$; aangezien A enerzijds ten opzichte A_0 , anderzijds ten opzichte van P (momenteel) draait zijn de rotatierichtingen tegengesteld zodat

$$a\omega_i = -a_1\omega$$

en

$$\omega = -\frac{a\omega_i}{a_1}.$$

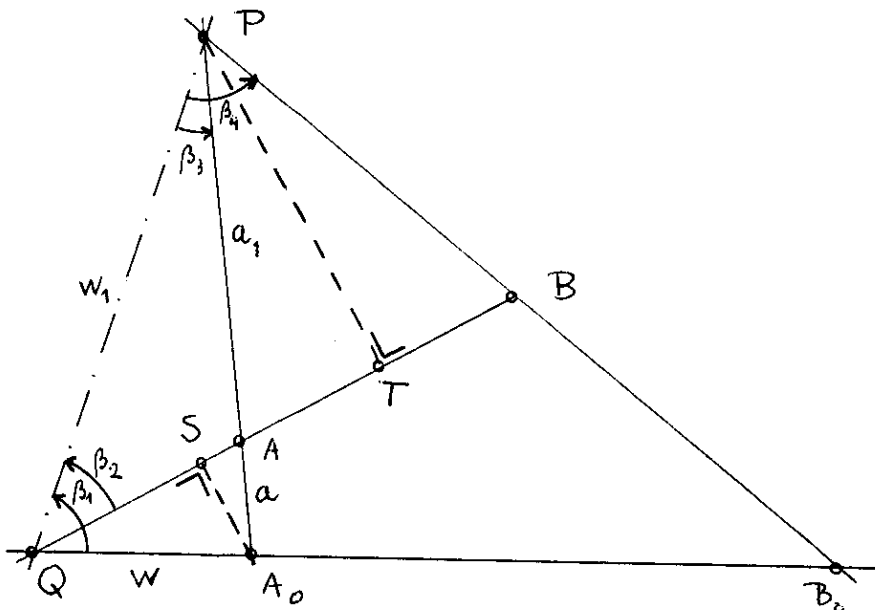
(108) gaat dus over in

$$(109) \quad \beta'_1 - \beta'_2 = -\frac{a}{a_1} \quad \text{en} \quad \beta'_1 + \beta'_3 = 1.$$

Met (107) en (109) kunnen we nu β'_2 uitrekenen:

$$(110) \quad \begin{aligned} \tau_4 + \tau_3\left(1 - \beta'_2 + \frac{a}{a_1}\right) &= \tau_2 + \tau_1\left(\beta'_2 - \frac{a}{a_1}\right), \\ \beta'_2 &= \frac{\tau_4 + \tau_3\left(1 + \frac{a}{a_1}\right) - \tau_2 + \tau_1 \frac{a}{a_1}}{\tau_1 + \tau_3}. \end{aligned}$$

Voorts kunnen we $\frac{a}{a_1}$ nog in τ_1, τ_2, τ_3 uitdrukken.



Volgens enige elementaire meetkundestellingen is

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\text{opp } \triangle AQA_0}{\text{opp } \triangle AQP} = \frac{A_0S}{PT} = \frac{w \sin(\beta_1 - \beta_2)}{w_1 \sin \beta_2}$$

en (in $\triangle QA_0P$)

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_1 + \beta_3)}$$

zodat

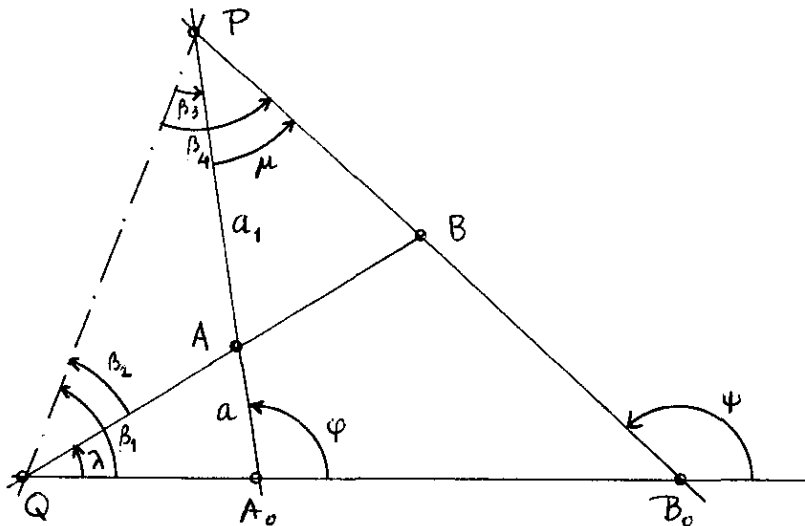
$$(111) \quad \frac{a}{a_1} = \frac{\sin \beta_3 (\sin \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \sin \beta_2)}{\sin \beta_2 (\sin \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \beta_1 \sin \beta_3)} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3}.$$

Substitutie van (111) in (110) geeft dan

$$\begin{aligned} (\tau_1 + \tau_3)\beta'_2 &= \tau_4 + \tau_3 \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1 + \tau_3} - \tau_2 + \tau_1 \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = \\ &= \tau_4 + \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_3) - \tau_2(\tau_1 + \tau_3) + \tau_1(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_1 + \tau_3} = \\ &= \tau_4 + \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_1 + \tau_3} = \tau_3 + \tau_4 - \tau_1, \end{aligned}$$

$$(112) \quad \beta'_2 = \frac{\tau_3 + \tau_4 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3}.$$

Tenslotte drukken we ook ϵ uit in $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$.



Uit hetgeen na formule (108) over $\omega = \dot{\lambda} = \lambda' \omega_1$ en na formule (110) over

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3}$$

is opgemerkt volgt

$$(113) \quad \lambda' = -\frac{a}{a_1} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_3}.$$

We voeren in $\mu := \psi - \varphi = \beta_4 - \beta_3$ zodat $\mu' = \nu - 1$. μ is dan de hoek tussen gestel* en koppelstang* van het reeds eerder beschouwde mechanisme*, en dus te vergelijken met λ in het oorspronkelijke mechanisme; bij deze verwisseling is

- β_3 de hoek tussen collineatieas* en gestel*, te vergelijken met $-\beta_1$
- β_4 de hoek tussen collineatieas* en koppelstang*, te vergelijken met $-\beta_2$
- β_1 de hoek tussen invoer* en collineatieas*, te vergelijken met $-\beta_3$
- β_2 de hoek tussen uitvoer* en collineatieas*, te vergelijken met $-\beta_4$

in het oorspronkelijk mechanisme.

Verder moeten we φ door $-\varphi$ vervangen. Hieruit volgt

$$(114) \quad \mu' = -\frac{d\mu}{d(-\varphi)} = -\frac{-\tau_3 + \tau_4}{-\tau_3 - \tau_1} = \frac{\tau_4 - \tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$$

zodat

$$(115) \quad \nu = \mu' + 1 = \frac{\tau_1 + \tau_4}{\tau_1 + \tau_3}.$$

Nu substitueren we (103), (112) en (115) in (104):

$$(116) \quad \begin{aligned} \nu'' &= \nu(1 - \nu)\tau_2(1 - 2\nu)\tau_2 - \nu(1 - \nu)(\tau_2^2 + 1) \frac{\tau_3 + \tau_4 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = \\ &= \nu(1 - \nu)\{\tau_2^2(1 - 2\nu) - (\tau_2^2 + 1) \frac{\tau_3 + \tau_4 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3}\} = \\ &= \nu(1 - \nu)\{\tau_2^2 \frac{-\tau_1 + \tau_3 - 2\tau_4}{\tau_1 + \tau_3} - (\tau_2^2 + 1) \frac{\tau_3 + \tau_4 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_3}\} = \end{aligned}$$

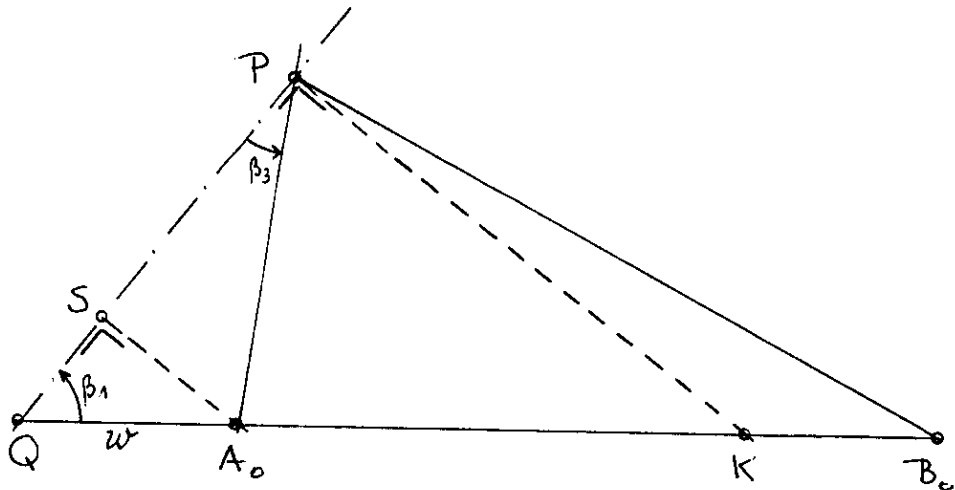
$$= \frac{l(1-l)}{\tau_1 + \tau_3} \{ \tau_2^2 (-3\tau_4) - \tau_3 - \tau_4 + \tau_1 \}$$

$$= \frac{l(1-l)}{\tau_1 + \tau_3} (\tau_1 - \tau_3 - \tau_4 - 3\tau_2^2 \tau_4) .$$

We keren terug tot de in de aanhef van deze § gesuggereerde vraag:

Welke mechanismen (met gegeven gestelpunten A_0 en B_0) hebben een gegeven momentele l , l' en l'' ?

Uit (101) volgt dat ze allemaal dezelfde w en Q hebben, uit (103) volgt dat ze dezelfde τ_2 en dus ook dezelfde β_2 hebben, terwijl uit (112) en (115) volgt dat ze dezelfde τ_4/τ_1 en τ_3/τ_1 hebben.



In het bijzonder is (met $A_0S \perp QP$ en $KP \perp QP$)

$$\tau_1 : \tau_3 = \frac{QS}{A_0S} : \frac{PS}{A_0S} = QS : PS = QA_0 : A_0K = w : A_0K$$

en hieruit volgt dat voor al die mechanismen ook K dezelfde is.

Dus ligt bij al die mechanismen P op de cirkel met $D = QK$ als middellijn (Carter-Hall-cirkel). Voor D geldt

$$D = w_1 \sec \beta_1$$

en men kan hieruit berekenen

$$D = 3\{l'^2 + l^2(l-1)^2\}(l-1)^{-1}\{(l-1)l'' - l(l+1)(l-1)^2 - 3l'^2\}^{-1}$$

(formule van Lakshminarayana (1971)).

4.2. Rechtgeleiding bij symmetrische koppelkrommen

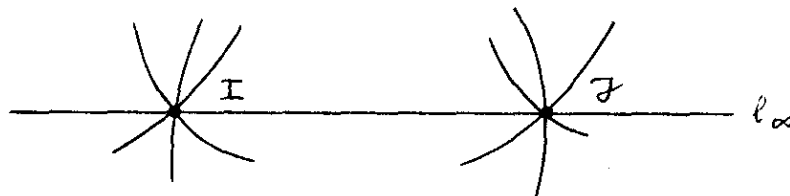
Het is met een vierstangen mechanisme AB ; A_0B_0 niet mogelijk om in het met de koppelstang AB meebewegend koppelvlak V_2 een punt te vinden waarvan de baan een rechte lijn is (vergelijk [1], p. 209 e.v.).

Men kan evenwel vragen naar mechanismen waarbij voor zulke punten de baan "zo goed mogelijk" een rechte lijn is; dat "zo goed mogelijk" dient natuurlijk uitgedrukt te worden in meetkundige eigenschappen van de baan.

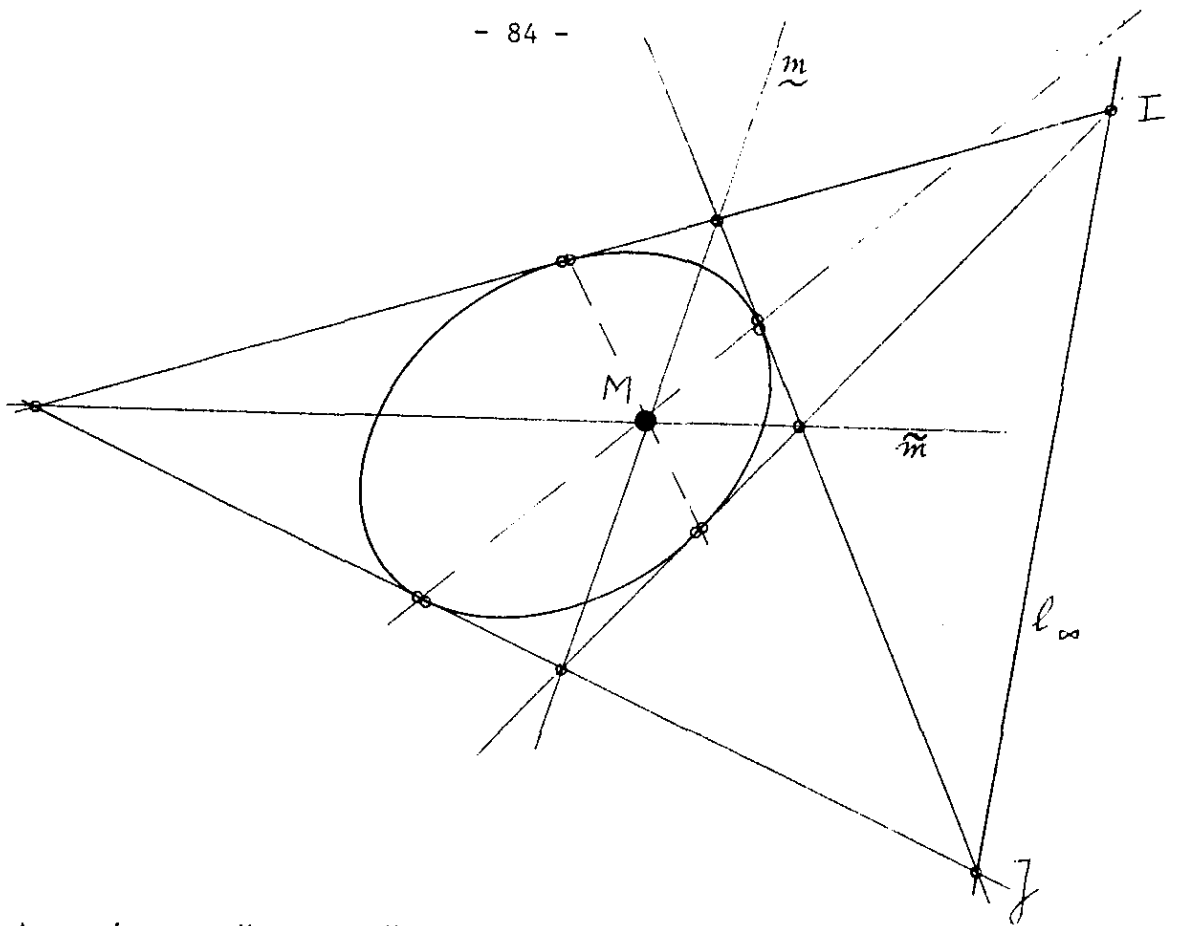
De baan van een punt $K \in V_2$ noemen we *koppelkromme*; de vergelijking van de koppelkromme K blijkt van de 6^e graad te zijn, bijgevolg is de koppelkromme van de 6^e graad. Aangezien we K beschouwen als de verzameling van punten die aan de vergelijking voldoen is ze omvangrijker dan haar kinematisch gedeelte: er behoren ook oneigenlijke en imaginaire punten toe, en soms bovendien een reële tak die kinematisch niet realiseerbaar is zonder het mechanisme geweld aan te doen.

We sommen hier enkele eigenschappen van de koppelkromme op (voor nadere bijzonderheden raadplege men [1], p. 72 e.v.).

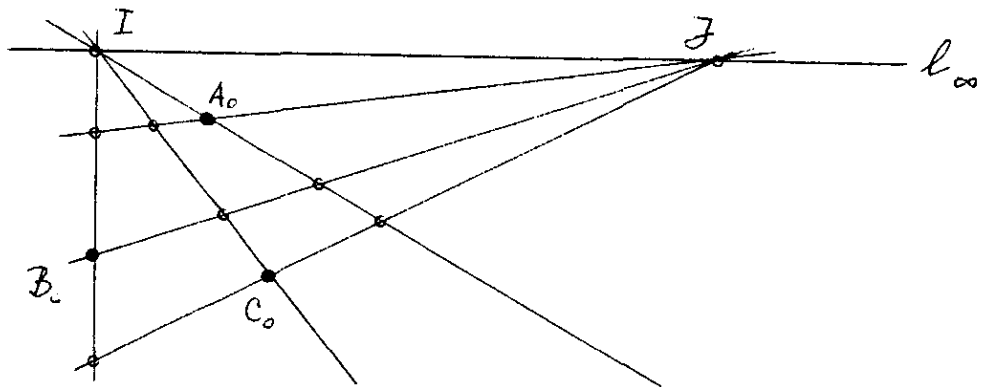
- i) De koppelkromme is *trircirculair*; dit betekent dat de vergelijking als 6^e -graads term heeft $(x^2 + y^2)^3$ en dat bijgevolg de isotrope punten I en J drievoudige punten van K zijn.



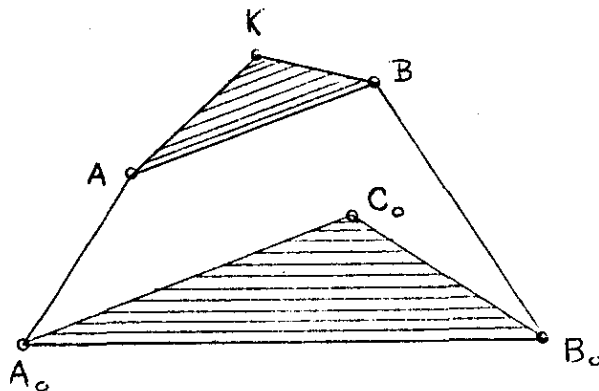
- ii) K heeft 3 reële *brandpunten*; onder een *brandpunt* van een kromme verstaan we een snijpunt van raaklijnen uit I en J aan de kromme; zo heeft een (reële) ellips E (die geen cirkel is) 4 brandpunten waarvan er 2 reëel zijn en op de lange as \tilde{m} liggen en 2 imaginair zijn en op de korte as \underline{m} liggen (in de tekening is die situatie niet direct herkenbaar, omdat l_∞ te dichtbij is getekend en omdat I en J daar getekend zijn als waren het reële punten; wat nog herkenbaar is, is dat het middelpunt M de pool is van l_∞ , "pool" hier genomen in de betekenis van wis 20, hoofdstuk 8).



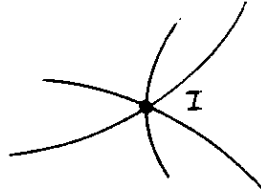
Aangezien $I \in K$ en $J \in K$, en wel drievoudig, zijn er aan K 3 raaklijnen door I , 3 raaklijnen door J en het blijkt dat er van de 9 opgeleverde (in dit geval zogenaamde *speciale*) brandpunten 3 reëel zijn, en



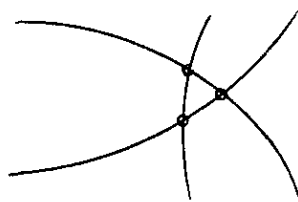
wel A_0 , B_0 en een punt C_0 dat zō in V_1 ligt dat $\Delta A_0 B_0 C_0$ en ΔABK rechtstreeks gelijkvormig zijn.



- iii) K heeft 3 (maar niet noodzakelijk reële) *dubbelpunten* die liggen op de omcirkel van $\Delta A_0 B_0 C_0$; het aantal dubbelpunten van een niet-ontaarde n -de graadskromme is $\leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ en we zouden er hier dus 10 kunnen verwachten. Een punt zoals I waar 3 takken elkaar snijden, opgevat als



de limietsituatie van het geval waarbij 3 takken bijna door 1 punt gaan,

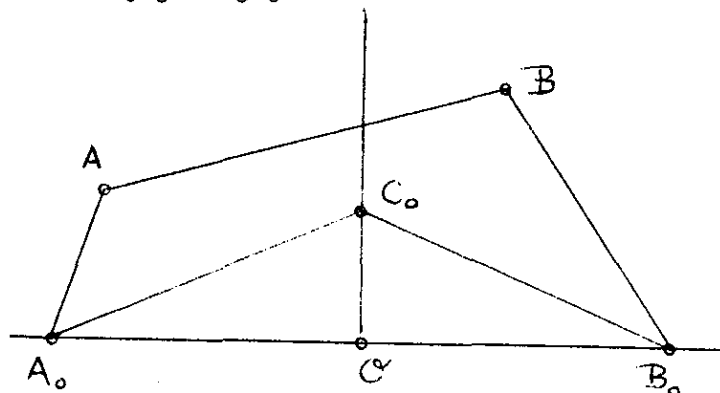


is te tellen als een 3-voudig dubbelpunt. Evenzo J .

Er blijkt een 10^e dubbelpunt te zijn als het mechanisme *strekbaar* is.

- iv) Een kromme heet *symmetrisch* als ze een as van symmetrie heeft. Als een kromme symmetrisch is, liggen uiteraard brandpunten en dubbelpunten ook symmetrisch t.o.v. de symmetrieas; voor K betekent dit dat de symmetrieas door één der brandpunten gaat en de middelloodlijn is van het lijnstuk tussen de beide andere. Dit betekent dat $\Delta A_0 B_0 C_0$ gelijkbenig moet zijn, zo ook ΔABK .

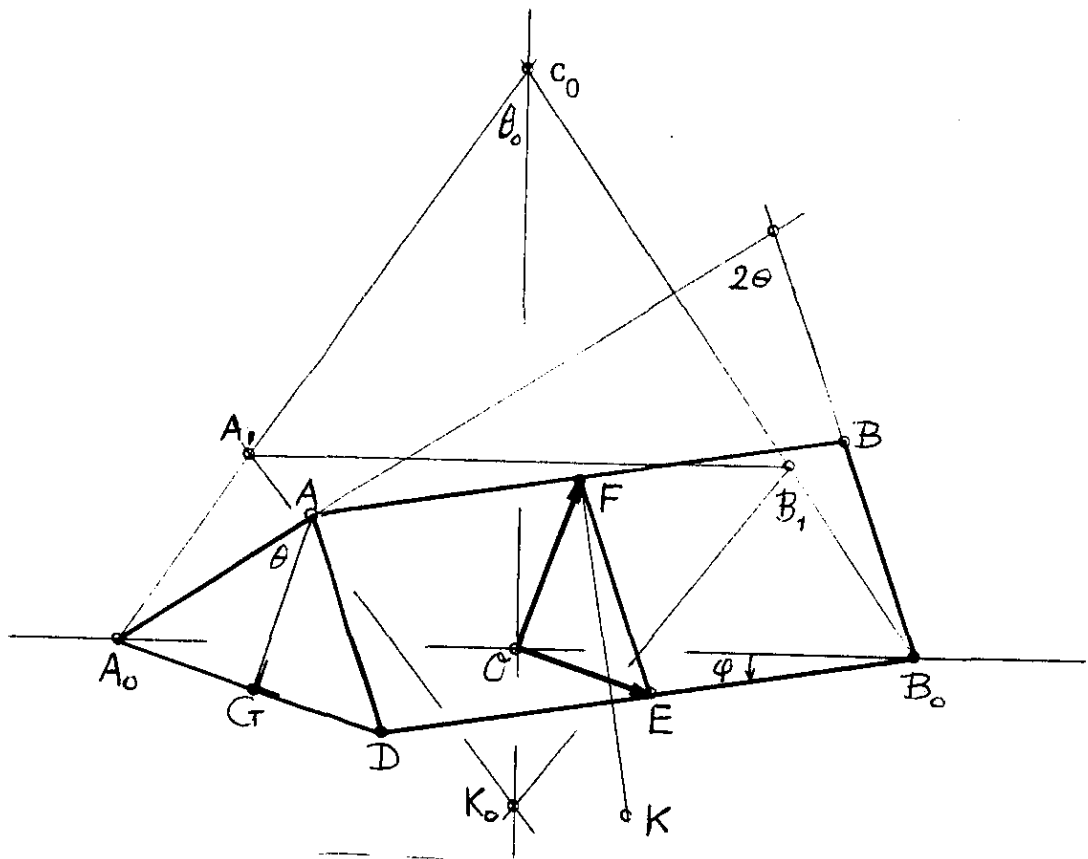
In het geval dat $A_0 C_0 = B_0 C_0$ en $AK = BK$ kunnen we het coördinatenstel-



sel in V_1 kiezen met het midden van $A_0 B_0$ als oorsprong, de X-as langs $A_0 B_0$ en de Y-as door C_0 ; de Y-as is dan symmetrieas voor K . In het mechanisme spelen $r_1 := |\overrightarrow{A_0 A}|$ en $r_2 := |\overrightarrow{B_0 B}|$ een symmetrische rol, terwijl vervanging van X door $-X$ dezelfde kromme moet opleveren; op grond hiervan is het plausibel dat $r_1 = r_2$.

Het is, omgekeerd, meetkundig direct duidelijk dat uit $AK = BK$ en $r_1 = r_2$ volgt dat K symmetrisch is.

Indien $\Delta A_0 B_0 C_0$ op een andere wijze gelijkbenig is kunnen we op grond van de stelling van *Roberts* de voortgebrachte koppelkromme verkrijgen met een mechanisme* waarbij $A_0^* C_0^* = B_0^* C_0^*$; we kunnen ons derhalve tot zulke mechanismen beperken.



Zij nu zo'n symmetrische stangenvierzijde in een positie als getekend; $AK = BK$, $A_0A = B_0B$; zij 2θ de hoek tussen A_0A en B_0B , φ de hoek tussen AB en de horizon (loodrecht op de symmetrieas). We construeren het parallellogram ABB_0D zodat ΔA_0DA gelijkbenig is. O is het midden van A_0B_0 (en oorsprong van het coördinatenstelsel met de Y -as langs de symmetrieas), E het midden van DB_0 , F het midden van AB , G het midden van A_0D ; $A_0B_0 =: 2a$, $AB =: 2b$, $KF =: c$.

Nu is

$$(a,0) = \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB_0} = \overrightarrow{OE} + D_\varphi(b,0) = \overrightarrow{OE} + b(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

zodat

$$\overrightarrow{OE} = (a - b \cos \varphi, -b \sin \varphi) .$$

Vervolgens is

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{GA} = \cot \theta D_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{GD} = \cot \theta D_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{OE} = \cot \theta (b \sin \varphi, a - b \cos \varphi) ,$$

en

$$\overrightarrow{FK} = D_\varphi(0,-c) = (c \sin \varphi, -c \cos \varphi)$$

zodat

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FK} = \\ &= ((b \cot \theta + c) \sin \varphi, a \cot \theta - (b \cot \theta + c) \cos \varphi) . \end{aligned}$$

Als $(x,y) := \overrightarrow{OK}$ dan is dus

$$(117a) \quad x = (b \cot \theta + c) \sin \varphi ,$$

$$(117b) \quad y = a \cot \theta - (b \cot \theta + c) \cos \varphi .$$

Om φ nog in θ uit te drukken merken we op dat $OE = A_0G = r \sin \theta$, zodat in $\triangle OEB_0$ met de cosinusregel volgt

$$r^2 \sin^2 \theta = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi ,$$

$$(118) \quad \cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - r^2 \sin^2 \theta}{2ab} ,$$

$$(119) \quad \sin \varphi = \pm (2ab)^{-1} \{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - r^2 \sin^2 \theta)^2\}^{\frac{1}{2}} .$$

Door substitutie van (118) en (119) in (117) verkrijgen we een parameter-voorstelling van de door K doorlopen koppelkromme K met θ als parameter. De symmetrie ten opzichte van de Y-as blijkt uit (119): bij gegeven y volgt uit (117b) en (118) een θ , en deze levert in (119) 2 tegengestelde waarden van φ , bijgevolg in (117a) 2 tegengestelde waarden van x op.

We vereenvoudigen de formules nog wat door $u := \cot \theta$ te substitueren, zodat $\sin^2 \theta = \frac{1}{1+u^2}$; als we de hoogte van het trapezium $A_0A_1B_1B_0$ h noemen, is $r^2 = (a-b)^2 + h^2$.

Dan is

$$y = au - \frac{(bu + c)}{2ab} \left(a^2 + b^2 - \frac{(a - b)^2 + h^2}{1 + u^2} \right)$$

en

$$2ab(1 + u^2)y = 2a^2bu(1 + u^2) - (bu + c)\{(a^2 + b^2)u^2 + 2ab - h^2\} .$$

We schrijven deze betrekking als een vergelijking in u:

$$(120) \quad bu^3(a^2 - b^2) - u^2(a^2c + b^2c + 2aby) + bu(2a^2 - 2ab + h^2) + \\ - (2abc - ch^2 + 2aby) = 0 .$$

Dit is voor iedere waarde van y een derdegraadsvergelijking in u; dat betekent dat bij iedere rechte die evenwijdig is met de X-as drie waarden van u worden gevonden (al of niet reëel) die ieder aanleiding geven tot 2 waarden van φ (119) en tot 2 waarden van x (117a); iedere horizontale rechte snijdt K (zoals het behoort) in 6 punten.

In de 0-stand (met $\varphi = 0$) zijn u en y bekend:

$$u_0 = \cot \theta_0 = \frac{h}{a - b} \quad \text{en} \quad y_0 = h - c .$$

Dat betekent dat we van de vergelijking die uit (120) ontstaat door $y := h - c$ te substitueren,

$$(121) \quad bu^3(a^2 - b^2) - u^2\{c(a - b)^2 + 2abh\} + bu(2a^2 - 2ab + h^2) + \\ - h(2ab - ch) = 0 ,$$

één wortel, u_0 , kennen. Noemen we de andere wortels van (121) u_1 en u_2 , dan is

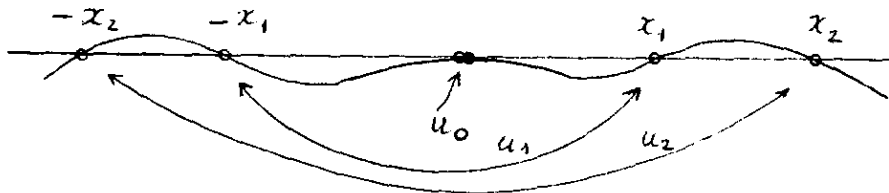
$$u_0 + u_1 + u_2 = \frac{c(a - b)^2 + 2abh}{b(a^2 - b^2)} , \quad u_0u_1u_2 = \frac{h(2ab - ch)}{b(a^2 - b^2)}$$

zodat

$$u_1 + u_2 = \frac{c(a - b) + bh}{b(a + b)} , \quad u_1u_2 = \frac{2ab - ch}{b(a + b)}$$

en u_1 en u_2 de wortels zijn van de vierkantsvergelijking

$$(122) \quad b(a + b)u^2 - \{c(a - b) + bh\}u + 2ab - ch = 0 .$$



Het spreekt vanzelf dat K in het met u_0 corresponderende punt $(0, y_0)$ een horizontale raaklijn heeft. Deze raaklijn snijdt verder K in 4 punten, namelijk (x_1, y_0) en $(-x_1, y_0)$ die met u_1 , en (x_2, y_0) en $(-x_2, y_0)$ die met u_2 corresponderen.

Opdat ook dit raakpunten zijn is nodig en voldoende dat de discriminant van (122) 0 is:

$$(123) \quad \{c(a - b) + bh\}^2 = 4b(a + b)(2ab - ch) .$$

En dan is

$$u_1 = u_2 = \frac{c(a - b) + bh}{2b(a + b)} = \frac{2(2ab - ch)}{c(a - b) + bh} .$$

Van de mechanismen die aan (123) voldoen interesseert ons alleen de vorm, zodat we zonder bezwaar $b := 1$ kunnen nemen:

$$(124) \quad (ac - c + h)^2 = 4(a + 1)(2a - ch) .$$

In deze uitdrukking beschouwen we c als een parameter, zodat (124) voor iedere waarde van c een betrekking tussen a en h bepaalt, die, in een a - h -vlak getekend, een kromme H_c vastlegt.

Wanneer we (124) uitwerken en de termen rangschikken zoals voor 2^e -graadskrommen gebruikelijk dan komt er

$$(125) \quad (c^2 - 8)a^2 + 6cah + h^2 - 2(c^2 + 4)a + 2ch + c^2 = 0 .$$

Snijden met de oneigenlijke rechte geeft 2 asymptotische richtingen (a, h) die voldoen aan

$$(c^2 - 8)a^2 + 6cah + h^2 = 0$$

zodat

$$\frac{h}{a} = -3c \pm 2\sqrt{2(c^2 + 1)},$$

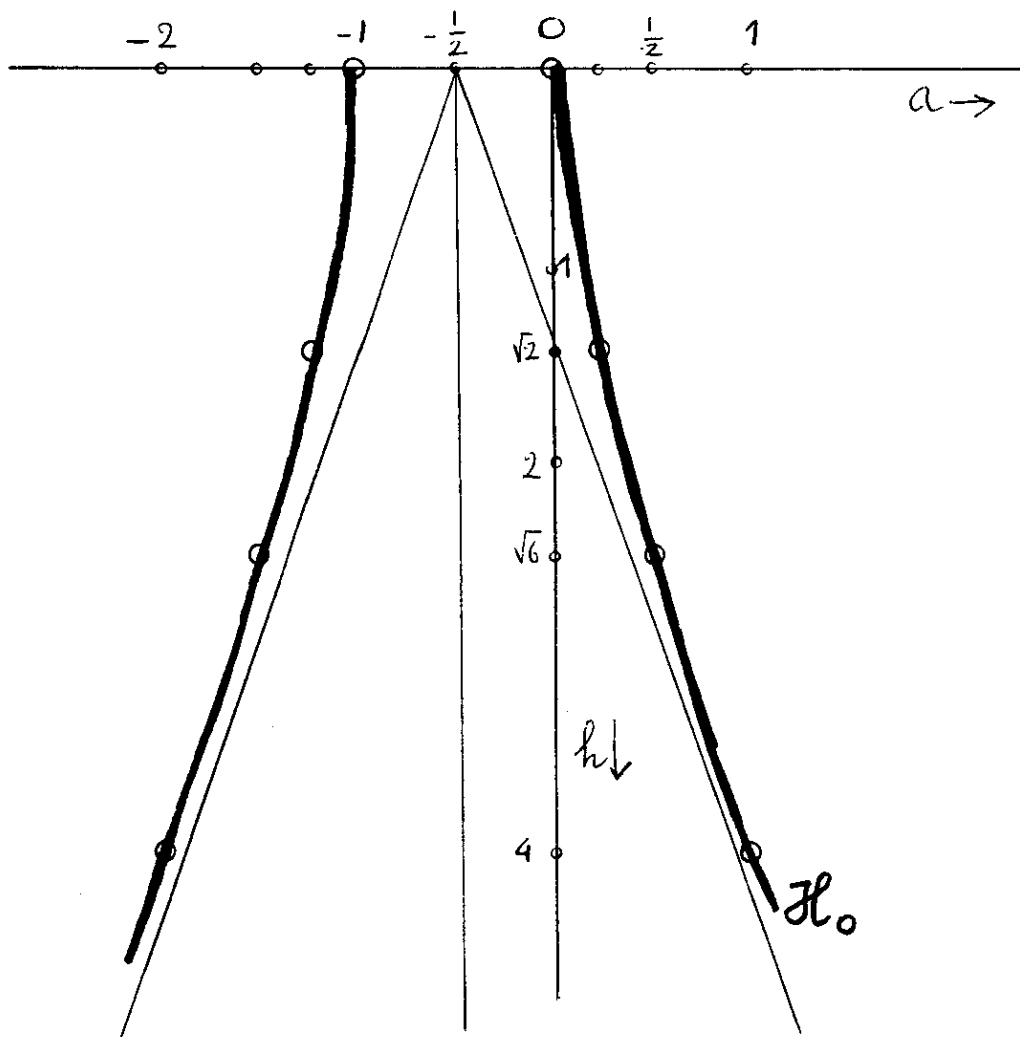
reëel voor alle c ; aangezien voorts $c^2 + 1 > 0$ voor alle c is H_c voor iedere c een hyperbool.

Substitueert men in (124) of (125) $a := 0$ dan komt er $(c + h)^2 = 0$ zodat de h -as raakt aan H_c in $-c$.

Opgave. Teken een *nomogram* voor de krommen H_c ; neem daarbij $h > 0$ en verder de volgende tekenafspraken:

Als $\overrightarrow{A_0 B_0}$ en \overrightarrow{AB} dezelfde richting hebben is $a > 0$, $\theta > 0$; anders is $a < 0$, $\theta < 0$.

Als men de zijden van $\triangle ABK$ in deze volgorde doorloopt en dan de driehoek links laat, is $c > 0$; anders is $c < 0$.



4.3. Opmerkingen bij 4.2.

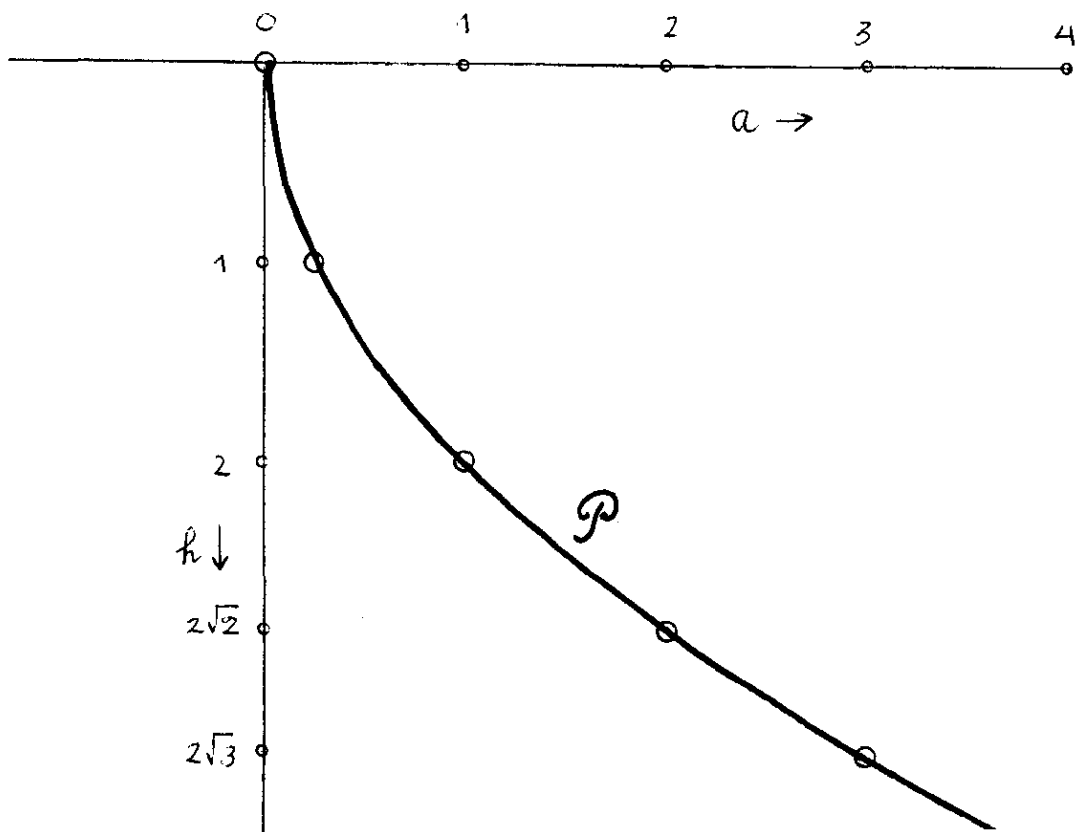
i) De stangenvierzijde $AB; A_0B_0$ heet *strekbaar* indien er een stand mogelijk is waarbij A en B op de gestellijn liggen. Bij het in 4.2 besproken geval is dat mogelijk als

α : $a = 1$ (= b) (*dubbel strekbare vierzijde*), zodat ABB_0A_0 altijd een parallelogram is; de beweging is dan op ieder moment een momentele translatie en iedere koppelkromme is een cirkel. Enkelvoudige strekking treedt voor $a \neq 1$ op als

β : $2a + 2 = 2r$ of $r = a + 1$; dan volgt uit $h^2 = r^2 - (a - 1)^2$ dat

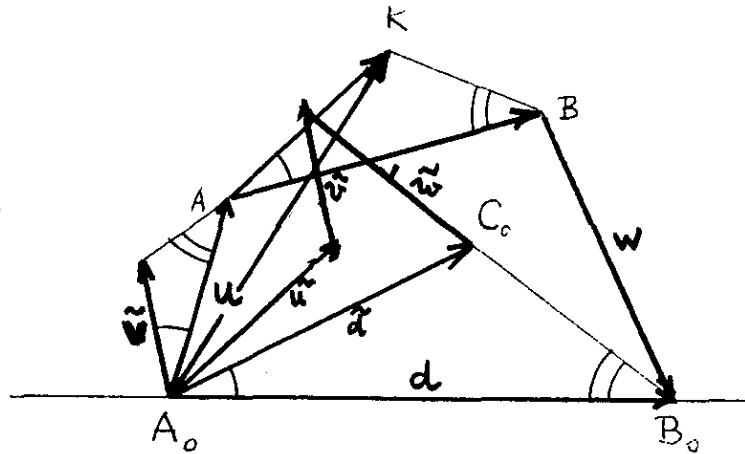
$$h^2 = (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = 4a .$$

In het a-h-nomogram is dit de vergelijking van een parabooltak, P.



Als $r < a + 1$ en bijgevolg $h^2 < 4a$ dan is de bijbehorende koppelkromme geheel kinematisch bereikbaar; in het andere geval heeft ze een onbereikbare tak.

ii) Het bewijs van de stelling van Roberts



Een stangenvierzijde kunnen we in het complexe vlak \mathbb{C} voorstellen; we laten A_0 samenvallen met 0 , B_0 met het reële getal d , A met het complexe getal u ; de vectoren \overrightarrow{AB} en $\overrightarrow{BB_0}$ worden door de complexe getallen v en w gerepresenteerd. u, v, w zijn op te vatten als complexe functies van een reële variabele, bijvoorbeeld de tijd t .

De beweging wordt dan volledig bepaald door de betrekkingen

$$(126) \quad u + v + w = d$$

$|u|, |v|, |w|$ zijn constant.

Als K het koppelpunt is dan geldt voor het complexe getal \overrightarrow{AK} dat \overrightarrow{AK} en \overrightarrow{AB} een constante (complexe) verhouding, zeg γ , hebben, zodat

$$\overrightarrow{A_0K} = u + \gamma v.$$

De koppelkromme is dan de baan van

$$z := u + \gamma v$$

onder de voorwaarden (126).

Zij nu $\tilde{u} := \gamma v$, $\tilde{v} := \gamma u$, $\tilde{w} := \gamma w$, $\tilde{d} := \gamma d$. Dan geldt

$$\tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w} = \gamma(v + u + w) = \gamma d, \text{ constant,}$$

$$|\tilde{u}| = |\gamma| |v| \text{ constant,}$$

$$|\tilde{v}| = |\gamma| |u| \text{ constant,}$$

$$|\tilde{w}| = |\gamma| |w| \text{ constant,}$$

terwijl

$$z = \gamma^{-1} \tilde{v} + \tilde{u} = \tilde{u} + \tilde{\gamma} \tilde{v} \text{ met } \tilde{\gamma} = \gamma^{-1} .$$

De koppelkromme wordt dus ook beschreven door een mechanisme waarin A_0 en het door $\tilde{d} := \gamma d$ aangewezen punt C_0 gestelpunten zijn. De koppelstang is dan die door \tilde{A} , corresponderend met \tilde{u} , en \tilde{B} corresponderend met $\tilde{u} + \tilde{v}$.

Men kan nog iets algemener zeggen:

Als u, v, w complexe functies van t zijn met constante moduli en constante (niet noodzakelijk reële) som d dan stelt

$$z = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

met constante $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ een koppelkromme bij een of andere stangen-vierhoek voor.

Uit

$$u + v + w = d$$

en

$$z = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

volgt (mits $\alpha \neq \gamma$)

$$\frac{z - \gamma d}{\alpha - \gamma} = u + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} v$$

zodat $\zeta := \frac{z - \gamma d}{\alpha - \gamma}$ de koppelkromme beschrijft van het punt $u + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} v$ in het door u, v, w en d bepaalde mechanisme. De door z doorlopen baan is dan die van een mechanisme dat uit het vorige ontstaat door vermenigvuldiging met $\alpha - \gamma$ en verschuiving over γd .

Deze laatste stelling kan men bij vierstangenmechanismen soms met voordeel toepassen om koppelkrommen op te sporen.

- iv) De door de stelling van Roberts met een symmetrische dubbelslinger verbonden mechanismen zijn krukslingermechanismen

Dit is direct duidelijk wanneer men de ongelijkheden beschouwt die voor zulke mechanismen bepalend zijn ([1], p. 152 e.v.).

- v) Nog enige benaderde rechtgeleidingen (zie ook [2], p. 78 e.v.).
Ja-knikker.

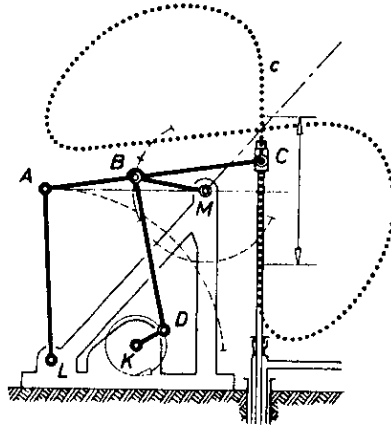


Abb. 63 Angenäherte Geradföhrung bei einer Ölpumpe.

Sneltransport in camera.

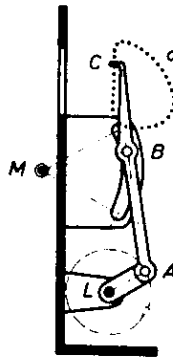


Abb. 65 Angenäherte Geradföhrung bei einem Fölmgreifer

(figuren uit [2], p. 82, 83).

λ -mechanismen ([1], p. 209).

4.4. Synthese met behulp van discrete standen

Veronderstel dat bij een lichaam \mathcal{L} een mechanisme moet worden geconstrueerd dat het mogelijk maakt \mathcal{L} te verplaatsen van een beginpositie S_1 naar een eindpositie S_2 , al of niet met inachtneming van andere condities; deze kunnen bijvoorbeeld zijn dat \mathcal{L} onderweg nog een tussenpositie S_3 inneemt, of dat de door de punten van \mathcal{L} doorlopen banen een gegeven deel van de ruimte niet doorsnijden. Dan rijst de vraag naar die bewegingen van de ruimte die S_1 in S_2 transformeren. We bespreken dit probleem voor vlakke bewegingen. Zij dus OXY een orthonormaal coördinatenstelsel in een vlak V , oxy een coördinatenstelsel dat vast met \mathcal{L} verbonden is en meebeweegt; in de stand S_1 vallen de coördinatenstelsels samen, en in de stand S_2 geldt voor een punt $(x,y) \in \mathcal{L}$ bij de beweging $\mathcal{L} \mid V$

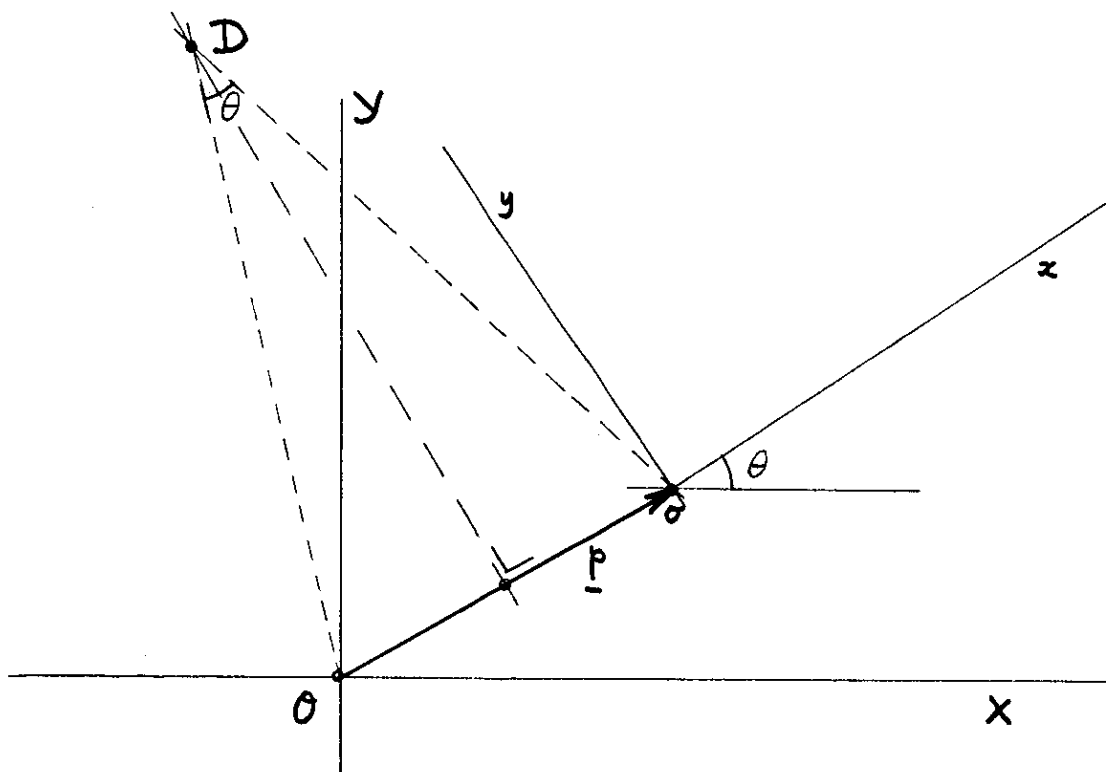
$$\underline{X} = \underline{p} + D_\theta \underline{x}$$

met een $\underline{p} \in V$ en één θ waarvoor $-\pi < \theta \leq \pi$.

Is er bij deze beweging een punt van \mathcal{L} op zijn plaats (in V) gebleven? Dan is

$$\underline{X} = \underline{p} + D_\theta \underline{X}$$

$$(D_\theta - I)\underline{X} = -\underline{p}$$



Als $\theta \neq 0$ dan is $D_\theta - I$ regulier (D_θ heeft dan geen eigenwaarde 1, zie wis 20) en

$$\underline{X} = (D_\theta - I)^{-1}(-\underline{p}) = (I - D_\theta)^{-1}\underline{p}.$$

We noemen dat punt D, de draaipool.

Uit

$$\begin{aligned} I - D_\theta &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi - \theta}{2} & \sin \frac{\pi - \theta}{2} \\ -\sin \frac{\pi - \theta}{2} & \cos \frac{\pi - \theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} D_{\frac{\theta - \pi}{2}} \end{aligned}$$

volgt

$$(I - D_\theta)^{-1} = (2 \sin \frac{\theta}{2})^{-1} D_{\frac{\pi - \theta}{2}} = \frac{1}{2} (I + \cot \frac{\theta}{2} D_{\frac{\pi}{2}})$$

zodat

$$\underline{X}_D = (2 \sin \frac{\theta}{2})^{-1} D_{\frac{\pi - \theta}{2}} \underline{p}.$$

D kan worden geconstrueerd; het ligt op de middelloodlijn van Oo zó dat $\angle ODo = \theta$.

Als $\theta = 0$ dan is $D_\theta = I$; de vergelijking

$$(D_\theta - I)\underline{X} = \underline{p}$$

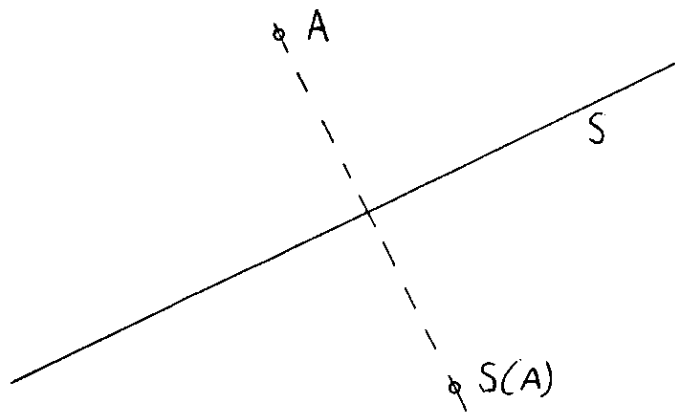
heeft geen oplossingen tenzij $\underline{p} = \underline{0}$, in welk geval $S_2 = S_1$, hetgeen we uitsluiten. Dan stelt echter

$$\underline{X} = \underline{x} + \underline{p}$$

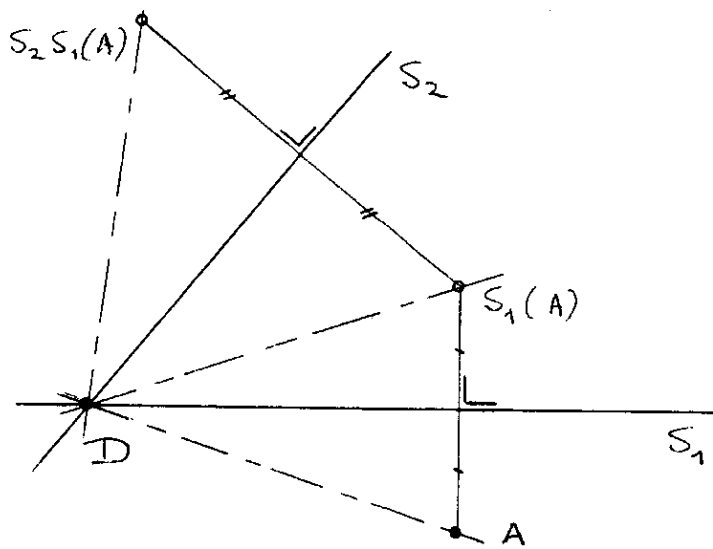
een translatie $T_{\underline{p}}$ voor.

Nu kunnen zowel draaiingen om een punt D als translaties over een vector \underline{p} worden uitgedrukt in lijnspiegelingen.

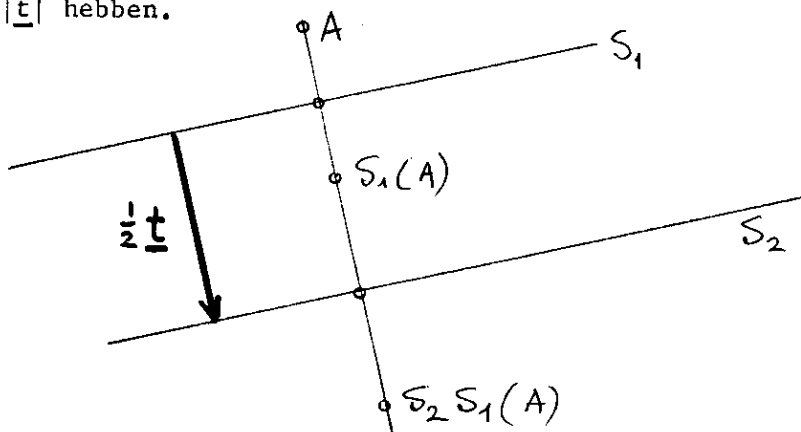
Een lijnspiegeling S in een rechte (die we ook met S aangeven) is de afbeelding waarbij voor ieder punt A en zijn beeld S(A) de middelloodlijn van AS(A) S is.



Een draaiing om D over een hoek α is het product van twee lijnspiegelingen S_1 en S_2 door D waarvan men er één willekeurig kan kiezen (maar door D) en die een hoek $\frac{\alpha}{2}$ met elkaar maken.



Een translatie over \underline{t} is het product van twee spiegelingen loodrecht op \underline{t} waarvan men er één willekeurig kan kiezen (maar $\perp \underline{t}$) en die een afstand $\frac{1}{2}|\underline{t}|$ hebben.

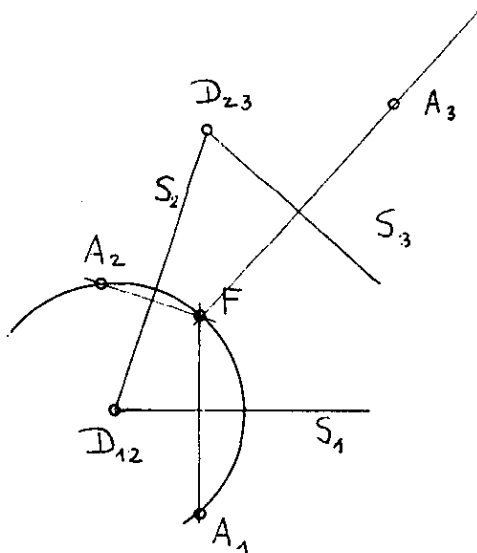


Draaiingen, translaties en spiegelingen hebben inversen; daarbij is (in de voor de hand liggende notaties)

$$D_{\alpha}^{-1} = D_{-\alpha}, \quad T_{\underline{t}}^{-1} = T_{-\underline{t}}, \quad S^{-1} = S.$$

Als $D = S_1 S_2$ dan is $D^{-1} = S_2 S_1$ en als $T = S_1 S_2$ dan is $T^{-1} = S_2 S_1$.

Veronderstel nu dat ℓ ten opzichte van V drie standen aanneemt, S_1, S_2, S_3 en dat deze door draaiing in elkaar overgaan: S_1 in S_2 door een draaiing om D_{12} over een hoek α_{12} , enzovoort.



We beginnen met in V te tekenen D_{12}, D_{23} en de plaatsen A_1, A_2, A_3 waar een punt $A \in \ell$ zich bevindt bij de standen S_1, S_2, S_3 . De lijn door D_{12} en D_{23} noemen we S_2 , het is de spiegelas van de gelijknamige spiegeling.

Zij $F := S_2(A_2)$.

We nemen nu voor S_1 de middelloodlijn van $A_1 F$ en voor S_3 de middelloodlijn van $A_3 F$; dan is

$$A_1 = S_1(F) = S_1 S_2(A_2) \quad \text{en} \quad A_3 = S_3(F) = S_3 S_2(A_2)$$

zodat

$$A_3 = S_3 S_2(A_2) = S_3 S_2 S_2 S_1(A_1) = S_3 S_1(A_1).$$

Maar ook

$$A_3 = D_{13}(A_1) ,$$

zodat D_{31} het snijpunt is van S_1 en S_3 .

Verder zijn de hoeken van $\Delta D_{12}D_{23}D_{31}$ volgens het voorgaande gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha_{12}$, $\frac{1}{2}\alpha_{23}$, $\frac{1}{2}\alpha_{31}$ zodat

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} = 2\pi.$$

(Wanneer men ook bijzondere gevallen beschouwt, bijvoorbeeld met $\alpha_{12} = \pi$, dan komt er iets algemener

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} \equiv 0 \pmod{2\pi}.)$$

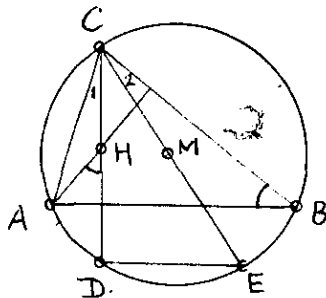
De driehoek $D_{12}D_{23}D_{31}$ heet de bij de standen S_1, S_2, S_3 behorende *polendriehoek*; het punt F heet het bij A behorende *fundamenteelpunt*; de punten A_1, A_2 en A_3 zijn de bij A (of F) behorende *homologe punten*.

Merk op dat F door de drie standen van A is bepaald in V (terwijl dit met A niet zo is).

4.5. Enige opmerkingen van meetkundige aard

- i) In ΔABC met zijn omcirkel $\Omega := \odot(M,R)$ zijn de hoogtelijn uit C , CD , en de middellijn door C , CE (met $D, E \in \Omega$) isogonaal verwant.

$$\begin{aligned} M &\in CE \\ \therefore DE &\perp CD \\ \therefore DE &\parallel AB \\ \therefore \text{bg } AD &= \text{bg } BE \\ \therefore \angle C_1 &= \angle C_2 \end{aligned}$$



ii) D is het spiegelpunt van het hoogtepunt H ten opzichte van AB want

$$\angle ADC = \frac{1}{2}bg AC = \angle ABC = \beta$$

en

$$\angle AHD = \frac{\pi}{2} - \angle HAB = \beta .$$

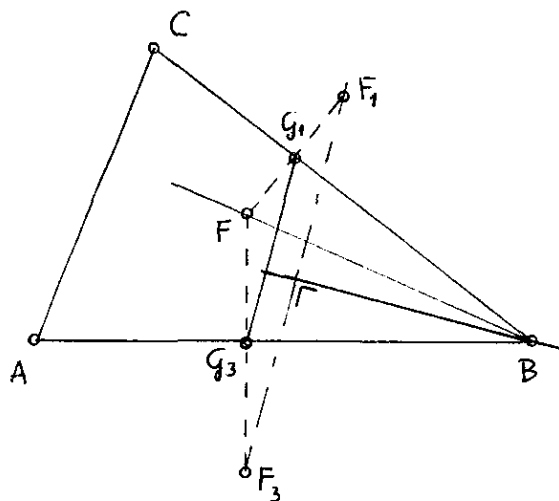
iii) Men noemt twee punten P en Q in ΔABC *isogonaal verwant* indien PA en QA isogonaal verwant zijn ten opzichte van $\angle BAC$, PB en QB isogonaal verwant zijn ten opzichte van $\angle ABC$ en PC en QC isogonaal verwant zijn ten opzichte van $\angle ACB$. Dan zijn H en M dus isogonaal verwant t.o.v. ΔABC .

iv) Wanneer de spiegelpunten van een punt F ten opzichte van ΔABC zijn F_1, F_2 en F_3 dan noemt men $\Delta F_1F_2F_3$ de *spiegelpuntdriehoek* van F ten opzichte van ΔABC . Zij voor een willekeurig punt F nu N_F het middelpunt van zijn spiegelpuntdriehoek (ten opzichte van ΔABC).

Stelling. F en N_F zijn ten opzichte van ΔABC isogonaal verwant.

Opmerking. De stelling is een generalisatie van wat ze zojuist hebben gevonden: M is in ΔABC het middelpunt van de spiegelpuntdriehoek van H ten opzichte van ΔABC .

Bewijs. Zij G_1 het snijpunt van FF_1 met BC en G_3 het snijpunt van FF_3 met AB. AB is de as van FF_3 , BC is de as van FF_1 , dus de as van F_1F_3

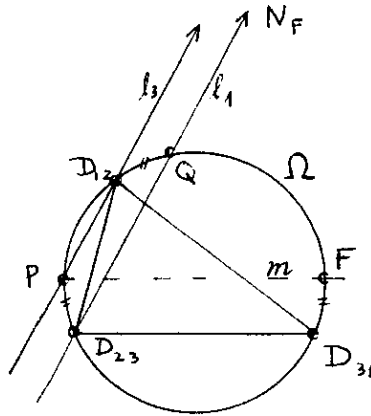


gaat door B; anders gezegd: de loodlijn uit B op F_1F_3 is tevens de middelloodlijn van F_1F_3 . G_1G_3 is middenverbinder in ΔFFF_3 zodat $G_1G_3 \parallel F_1F_3$. Bijgevolg: de middelloodlijn van F_1F_3 is hoogtelijn in

ΔBG_1G_3 . BF is een middellijn van de omcirkel van koordenvierhoek BG_1FG_3 , tevens omcirkel van ΔBG_1G_3 .

Volgens opmerking i), toegepast op ΔBG_1G_3 zijn BF en de as van F_1F_3 isogonaal verwant ten opzichte van $\angle G_1BG_3$; dit geldt analoog ten opzichte van de andere hoeken van ΔABC ; dus is F isogonaal verwant met het snijpunt van die assen, N_F .

- v) Kan men F ten opzichte van $\Delta D_{12}D_{23}D_{31}$ zó kiezen dat zijn spiegelpunten A_1, A_2, A_3 op één rechte liggen? De spiegelpuntsdriehoek is dan ontaard: één zijde is gelijk aan de som van de beide andere zijden, en de assen van de zijden zijn evenwijdig: $N_F \in \ell_\infty$. De vraag is dus: wat is de baan van het isogonale punt F van N_F wanneer dit de rechte ℓ_∞ doorloopt?

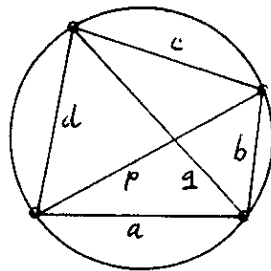


Zij ℓ_3 de lijn door D_{12} en N_F , P het snijpunt van ℓ_3 met de omcirkel Ω van $\Delta D_{23}D_{31}D_{12}$, en door P en $\parallel D_{23}D_{31}$, F het snijpunt van m met Ω . Uit $bg PD_{23} = bg FD_{31}$ volgt dat ℓ_1 en $D_{23}F$ isogonaal verwant zijn. Neem ℓ_1 door D_{23} en $\parallel \ell_3$ (dus ook door N_F) met snijpunt Q op Ω ; $bg D_{12}Q = bg PD_{23} = bg FD_{31}$ zodat ℓ_1 en $D_{23}F$ isogonaal verwant zijn. Dus is F isogonaal verwant met N_F : *als $N_F \in \ell_\infty$ dan $F \in \Omega$* . Door de redenering om te keren ziet men: *als $F \in \Omega$ dan $N_F \in \ell_\infty$* . Met andere woorden: De homologe punten van F liggen dan en slechts dan op een rechte als F ligt op de omcirkel van de pooldriehoek.

2^e Bewijs. In een koordenvierhoek met zijden a, b, c, d en diagonalen p, q geldt

$$pq = ac + bd ;$$

(stelling van Ptolemaeus). En omgekeerd:

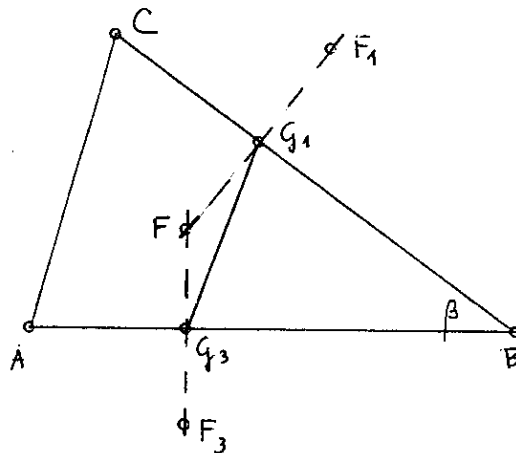


Als in een vierhoek geldt

$$pq = ac + bd$$

dan is het een koordenvierhoek.

Voor een willekeurig punt $F \in V$ geldt nu in $\triangle ABC$, waarvan de straal van de omcirkel R zij, dat (met gebruikmaking van de sinusregel in $\triangle ABC$)



$$R \times F_1 F_3 = 2R \times G_1 G_3 = \frac{AC}{\sin \beta} \times G_1 G_3 =$$

(met gebruikmaking van de sinusregel in $\triangle BG_1 G_3$ waarvan de omcirkel als middellijn heeft BF)

$$= AC \times \frac{G_1 G_3}{\sin \beta} = AC \times FB ,$$

$$R \times F_1 F_3 = AC \times FB .$$

Evenzo is

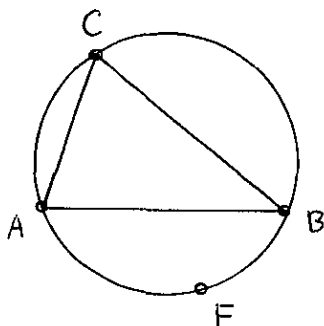
$$R \times F_2 F_3 = BC \times FA \quad \text{en} \quad R \times F_1 F_2 = AB \times FC .$$

Opdat de spiegelpuntsdriehoek ontaardt is nodig en voldoende dat een der zijden $F_1 F_2$, $F_2 F_3$, $F_3 F_1$ de som der beide andere is, bijvoorbeeld

$$F_1 F_2 = F_2 F_3 + F_3 F_1$$

equivalent met

$$AB \times FC = BC \times FA + AC \times FB .$$



Maar dit is equivalent met de bewering dat F hoekpunt is van een koordenvierhoek met zijden AC, CB, BF en FA en diagonalen AB en FC; of ook: F ligt op de omcirkel, tussen A en B.

- vi) Aan ieder punt F op de omcirkel Ω van ΔABC kan men dus een rechte ℓ_F toevoegen, namelijk die door de homologe punten F_1 , F_2 en F_3 .

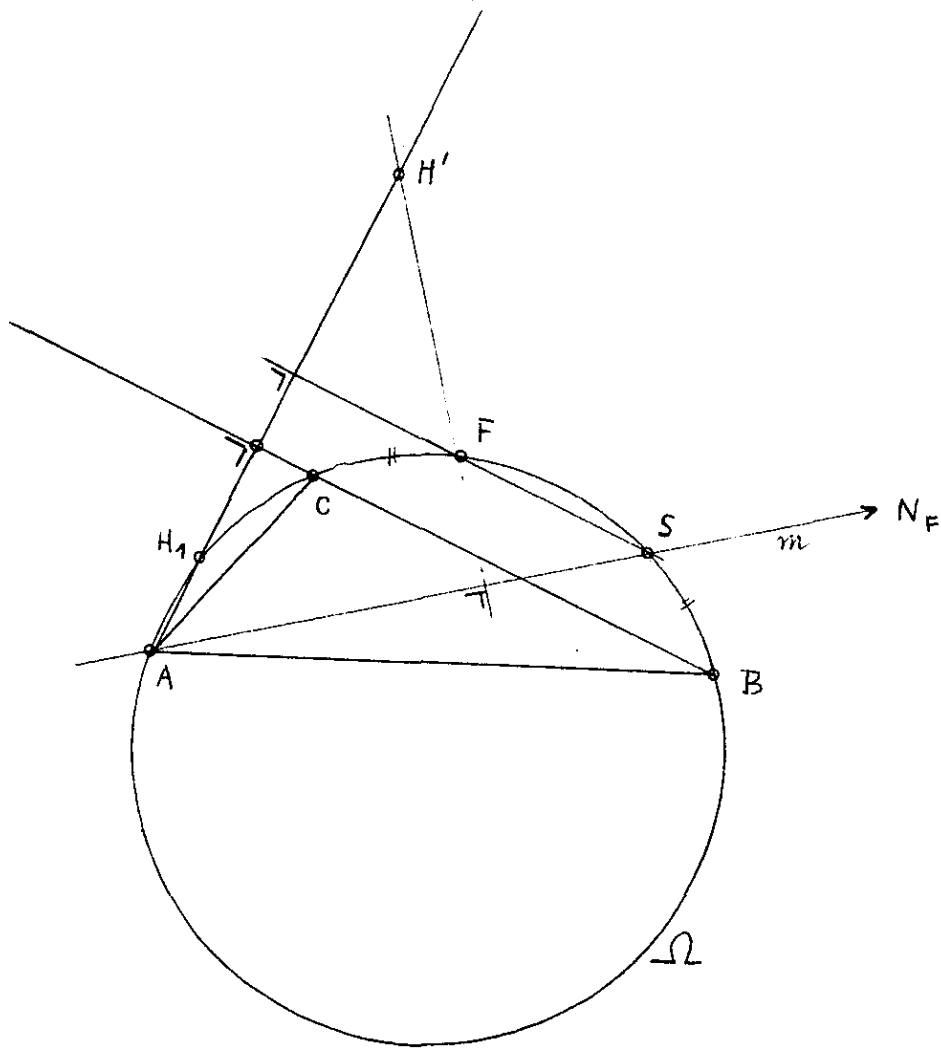
Stelling. Voor alle $F \in \Omega$ geldt $H \in \ell_F$.

Bewijs. Allereerst merken we op dat de lijn m door A en N_F de as is van $F_2 F_3$ (zoals in iv is bewezen). Zij S het snijpunt van m met Ω , dan is (wegens de isogonale verwantschap van F en N_F)

$$FS \parallel BC$$

en bijgevolg

$$AH_1 \perp FS$$



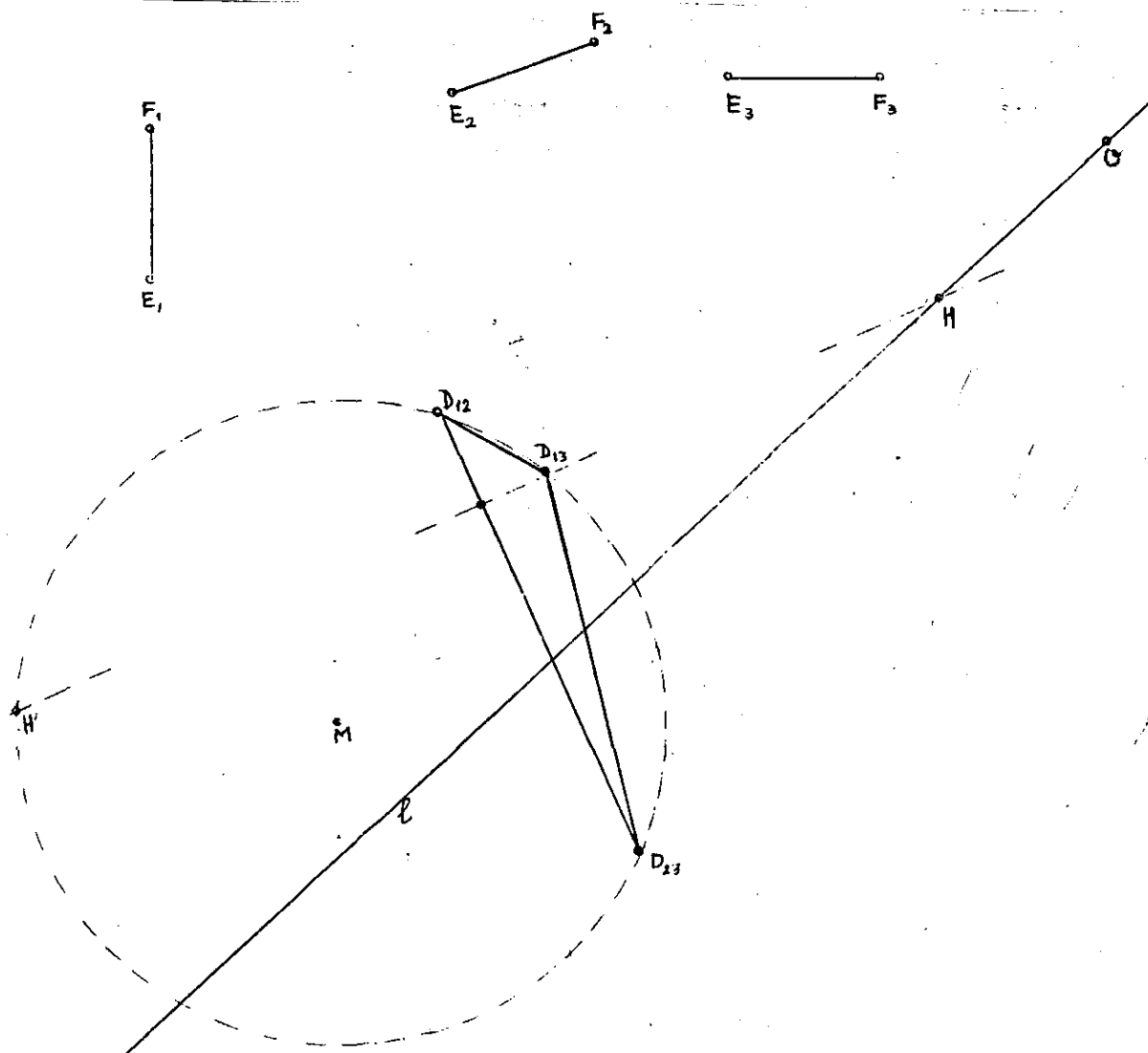
zodat AH_1 ook hoogtelijn is in $\triangle ASF$.

Zij nu H' het hoogtepunt van deze driehoek, $H' \in AH_1$. Dan is $H'F \perp AS$ en dus $H'F \parallel F_2F_3$. Ω is omcirkel van $\triangle ASF$ dus H' en H_1 liggen gespiegeld ten opzichte van FS (zie ii). $H'F$ is het spiegelbeeld van H_1F in FS ; HF_1 is het spiegelbeeld van H_1F in BC ; $FS \parallel BC$; hieruit volgt $H'F \parallel HF_1$. Wegens $H'F \perp AS$ is $H'F \parallel F_2F_3$, en zodoende is $HF_1 \parallel F_2F_3$; uit $F_1 \in F_2F_3$ volgt nu $H \in F_2F_3$.

- viii) Wanneer men voor F kiest één der punten A, B, C, H_1, H_2 of H_3 dan ziet men direct dat $H \in \ell_F$.
- ix) Wanneer drie homologe punten niet op één rechte liggen, liggen ze op een cirkel, en wel die met het middelpunt N_F dat de isogonale partner is van F in $\triangle ABC$.
- x) Drie homologe punten F_1, F_2, F_3 kunnen worden opgevat als drie consecutieve posities van een punt $A \in \ell$; dat ze op een rechte liggen kan worden opgevat als een mate van "rechtheid" van de baan van A , die "rechter" is naarmate F_1, F_2, F_3 "dichter bij elkaar" liggen; in het infinitesimale grensgeval bevindt A zich in een buigpunt van zijn baan.

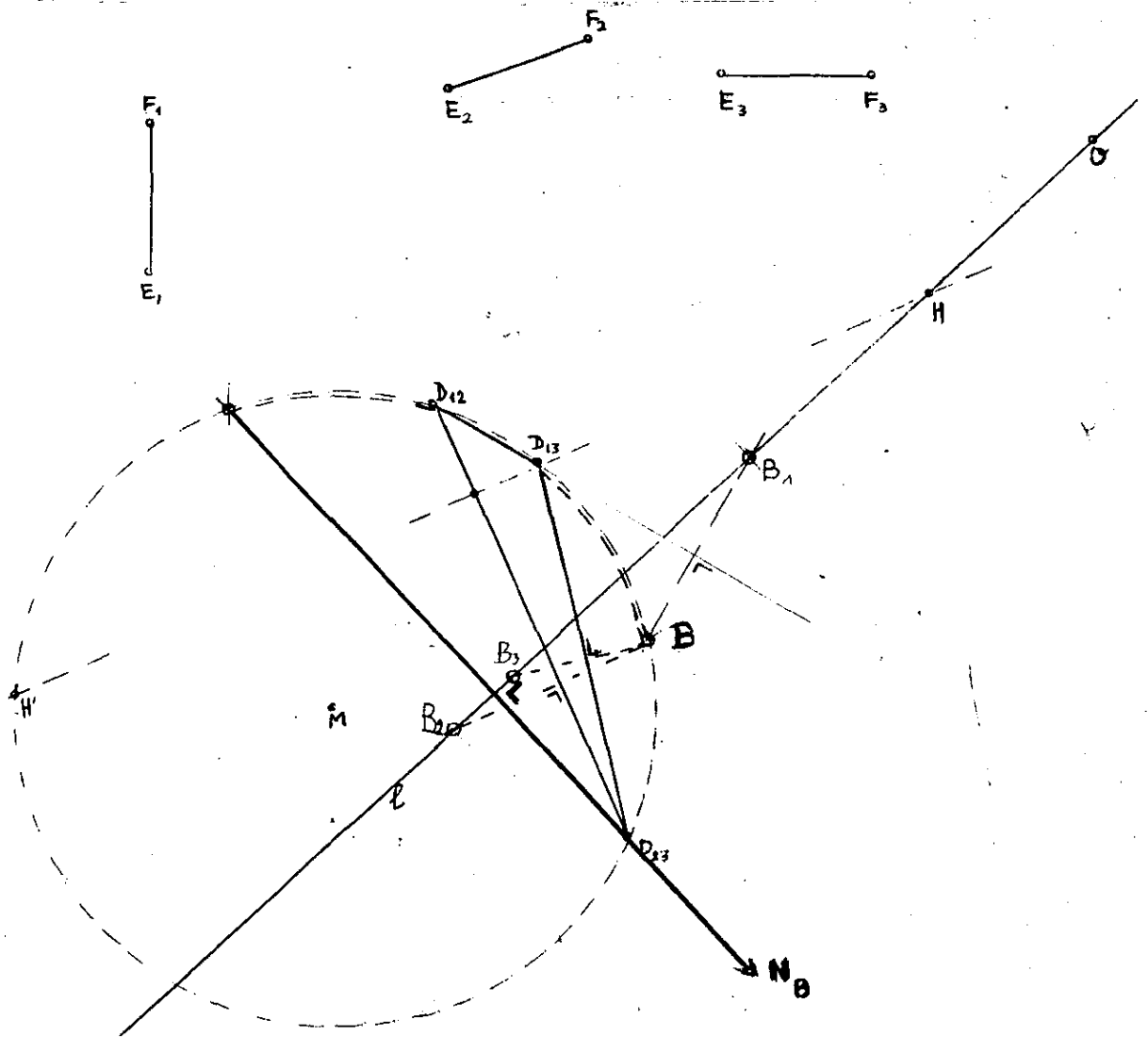
*4.6. Toepassing op een kruk-drijfstangbeweging

Veronderstel dat van een lijnstuk EF in \mathcal{L} drie posities E_1F_1 , E_2F_2 , E_3F_3 in V bekend zijn; voorts is een punt $O \in V$ gegeven. Er is dan een centrische kruk-drijfstangbeweging $\mathcal{L}|V$ met O als middelpunt van de kruk die EF de posities E_iF_i ($i = 1, 2, 3$) doet innemen.

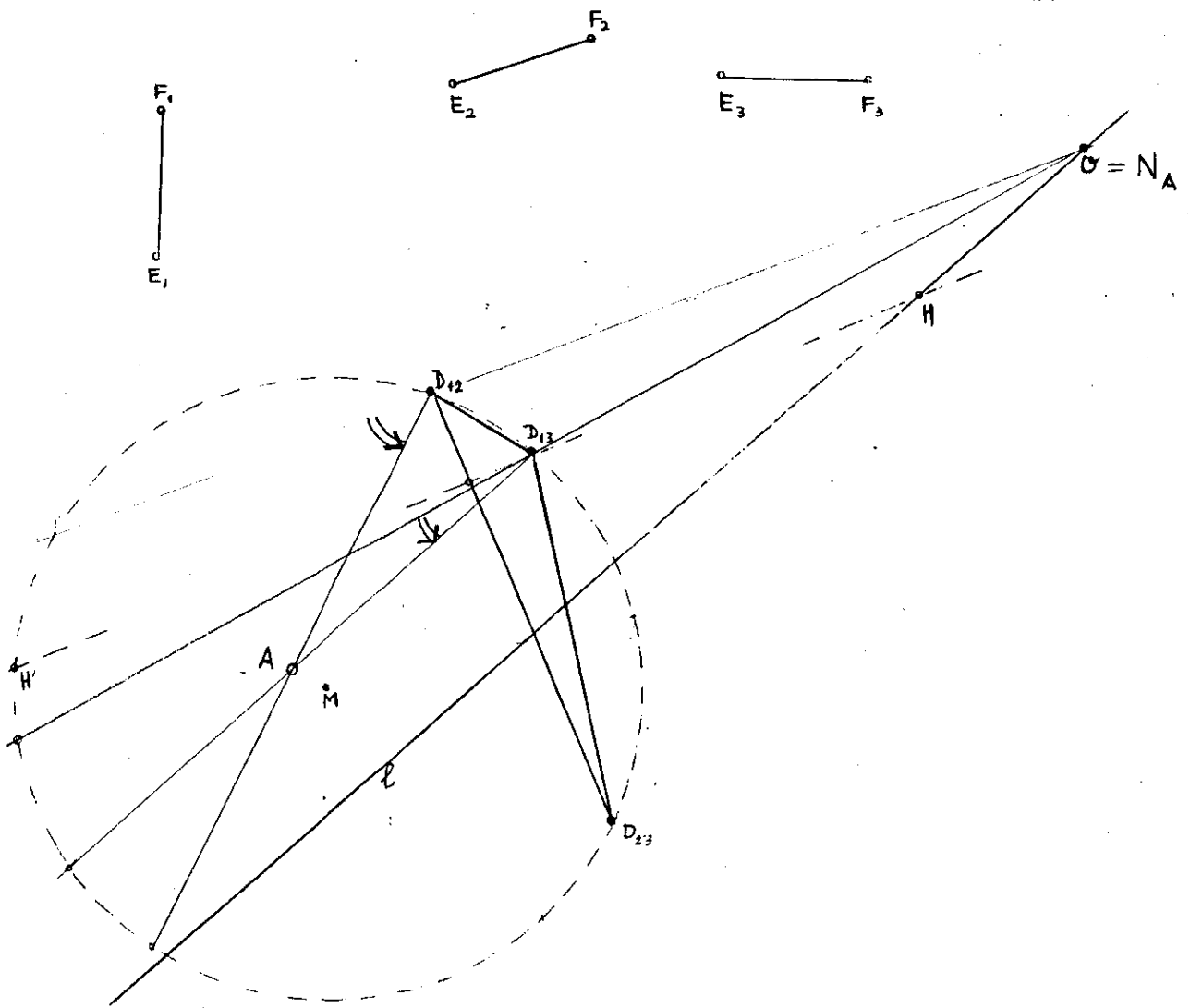


Zij AB de drijfstang, met A op de kruk en B op de drijfstang. De draaipolen D_{ij} construeren we als de snijpunten van de middelloodlijnen van E_iE_j en F_iF_j ; dan is ook de omcirkel Ω van $\Delta D_{12}D_{23}D_{31}$ bekend.

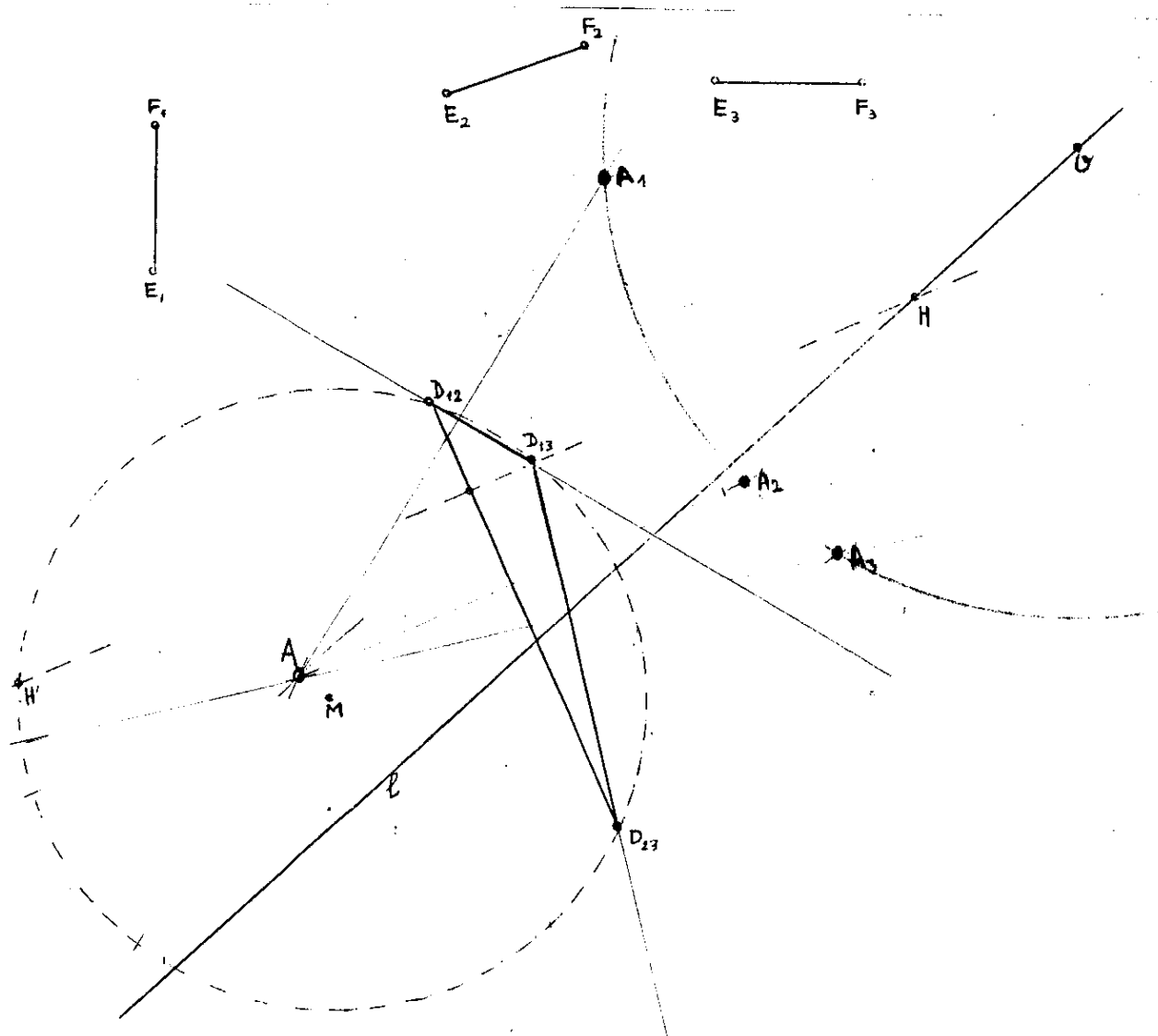
De punten B_1, B_2, B_3 (posities van B) moeten op één rechte (leibaan) ℓ liggen, door O ; krachtens het voorgaande gaat ℓ ook door het hoogtepunt H van $\Delta D_{12} D_{23} D_{31}$; daarmee is ℓ bepaald. De spiegelpunts-"driehoek" $B_1 B_2 B_3$ van B t.o.v. $\Delta D_{12} D_{23} D_{31}$ heeft als "middenpunt" het oneindig verre punt $N_B \perp \ell$ zodat het fundamenteelpunt B kan geconstrueerd worden (isogonaal t.o.v. N_B ; op Ω); daarmee zijn ook B_1, B_2, B_3 gevonden.



De punten A_1, A_2, A_3 vormen een spiegelpuntsdriehoek bij een fundamenteelpunt A waarvan het middelpunt O is: $N_A = O$. A is dus de isogonale partner van O t.o.v. $\Delta D_{12}D_{23}D_{31}$.



Nu kunnen A_1, A_2, A_3 geconstrueerd worden als de spiegelpunten van A t.o.v. $\Delta D_{12}D_{23}D_{31}$.



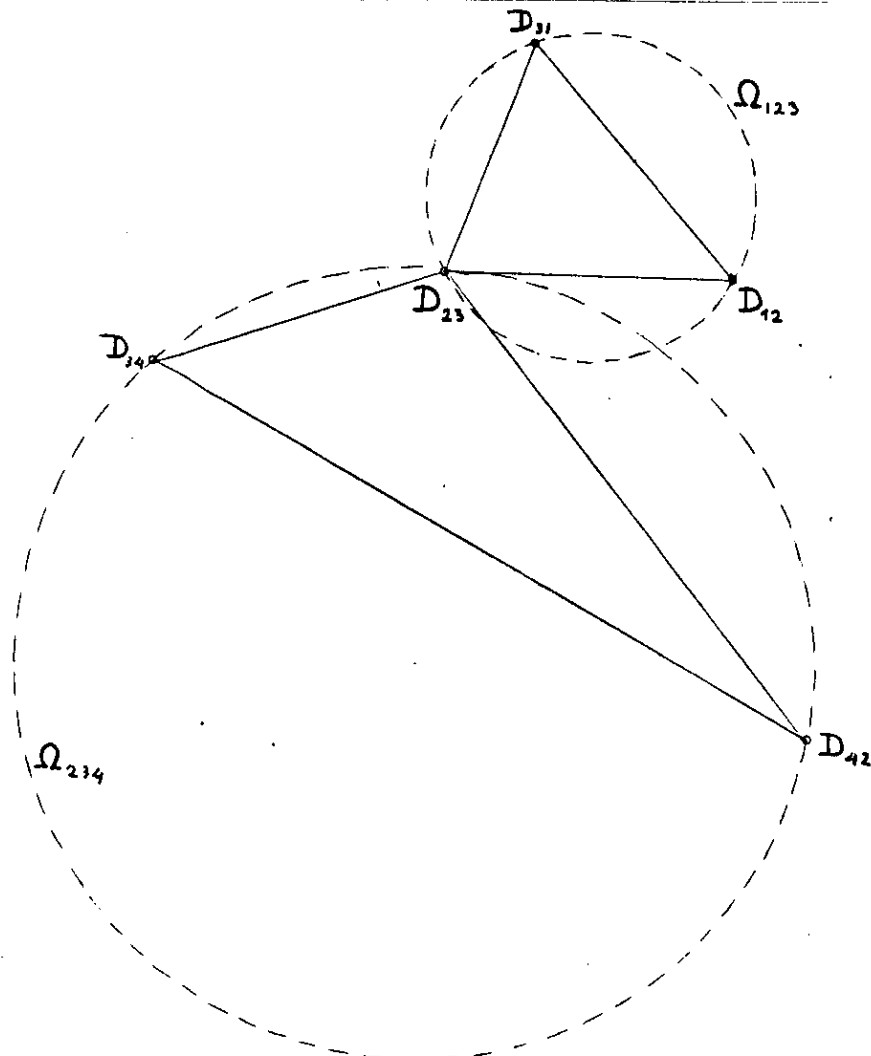
4.7. Stangenmechanismen die bepaald worden door vier of meer standen

In 4.6 is gebleken: door drie standen S_1, S_2, S_3 van het koppelvlak \mathcal{L} wordt bij iedere $0 \in V$ een krukdrijfstangmechanisme bepaald (bijzonder gevallen buiten beschouwing gelaten). Zo'n mechanisme is dus door de drie gegeven standen niet vastgelegd. Aangezien de plaats van 0 in V door twee parameters wordt bepaald, lijkt er ruimte te zijn om nog twee standen voor te schrijven.

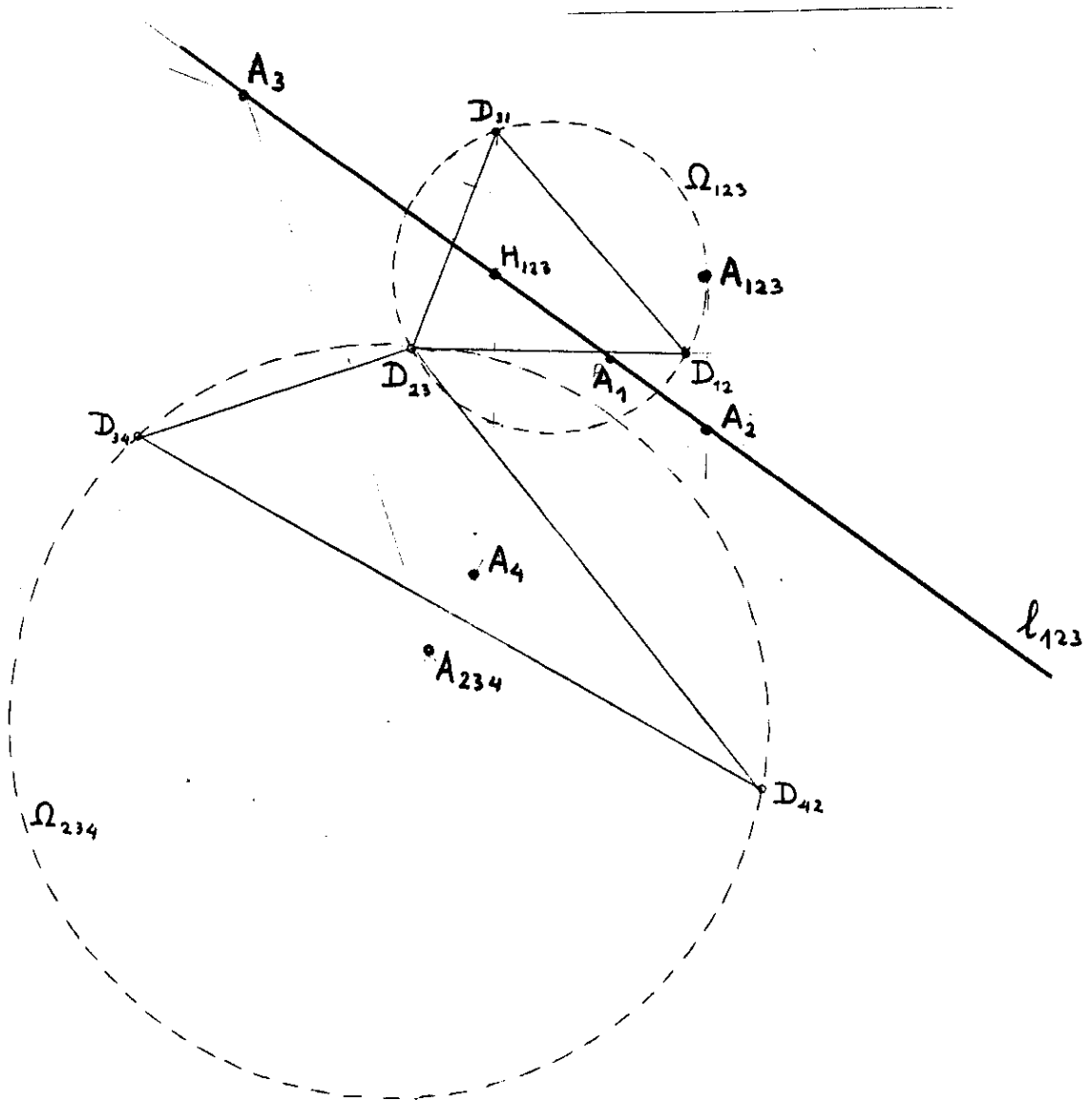
i) Homologe punten bij vier standen

Bij vier standen S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) van \mathcal{L} horen zes polen D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$) (want het aantal deelverzamelingen met twee elementen van een verzameling met vier elementen is $\binom{4}{2}$) en bij zes punten D_{ij} horen vier driehoeken $D_{ij}D_{jk}D_{ki}$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4; i \neq j \neq k \neq i$) (want (!): $\binom{4}{3} = 4$). Omgekeerd: de vier standen zijn bepaald door vier der bij de polen behorende draaiingen (bewijs: [1], § 97).

Stel dat twee polendriehoeken $D_{12}D_{23}D_{31}$ en $D_{23}D_{34}D_{42}$ uit deze gegevens zijn geconstrueerd.



Voor de standen S_1, S_2, S_3 noemen we bij drie posities A_1, A_2, A_3 het fundamen-
 taalpunt A_{123} (enzovoort). Als $A_{123} \in \Omega_{123}$ (de omcirkel van $\Delta D_{12} D_{23} D_{31}$) dan
 liggen A_1, A_2, A_3 op één rechte, l_{123} ; het fundamentaalpunt A_{234} van A_2, A_3
 en A_4 vinden we door spiegeling van A_2 in $D_{23} D_{24}$, voorts A_4 door spiegeling
 van A_{234} in $D_{24} D_{34}$.

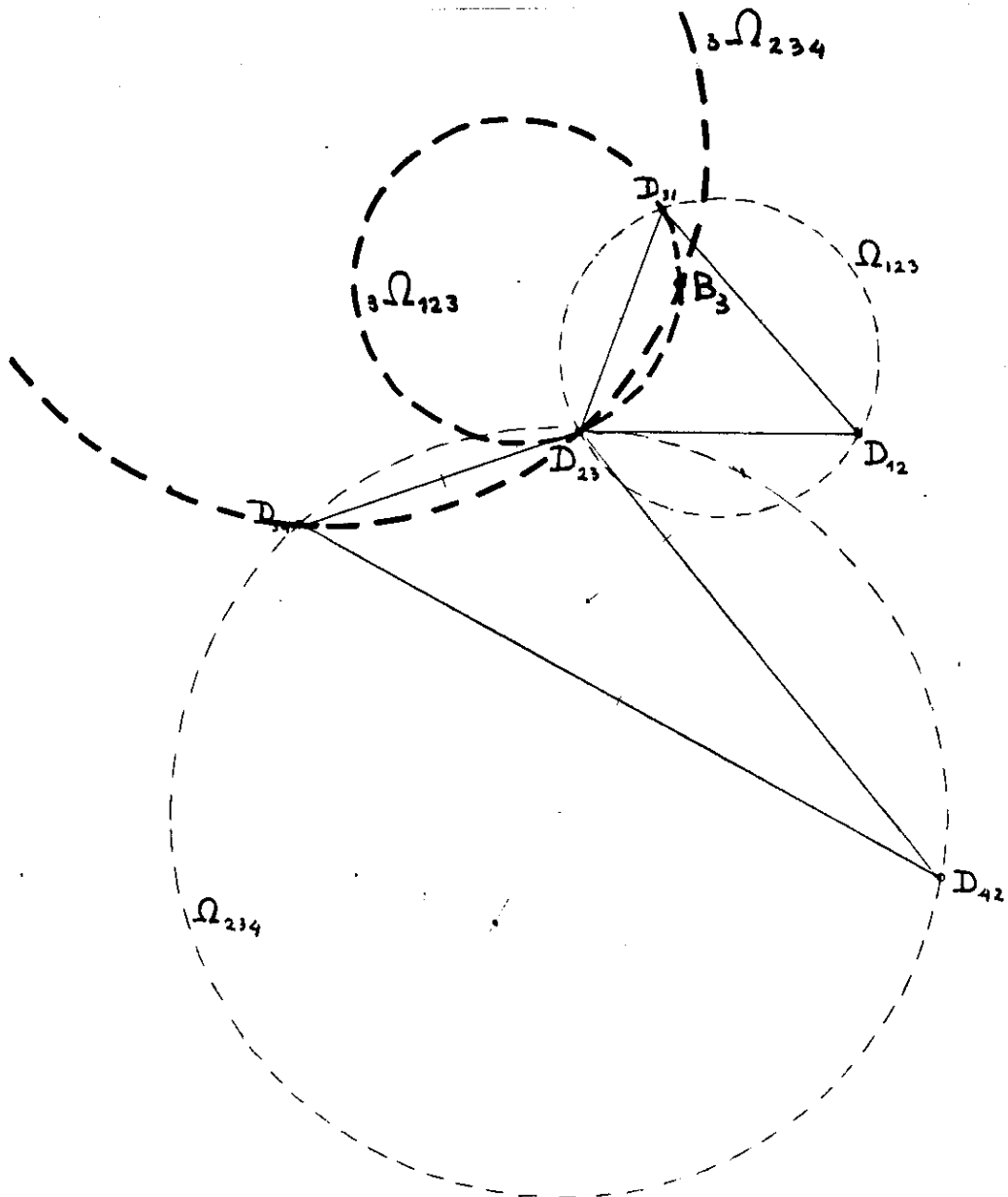


Opdat nu $A_4 \in \Omega_{123}$ is nodig en voldoende dat $A_{234} \in \Omega_{234}$, maar men kan ook zeggen: Opdat A_1, A_2, A_3, A_4 op één rechte liggen is nodig en voldoende dat $A_{123} \in \Omega_{123}$ en $A_{234} \in \Omega_{234}$.

We spiegelen deze cirkels in $D_{23}D_{31}$ resp. $D_{23}D_{34}$ en noemen de spiegelbeelden (weer cirkels) $3\Omega_{123}$ en $3\Omega_{234}$.

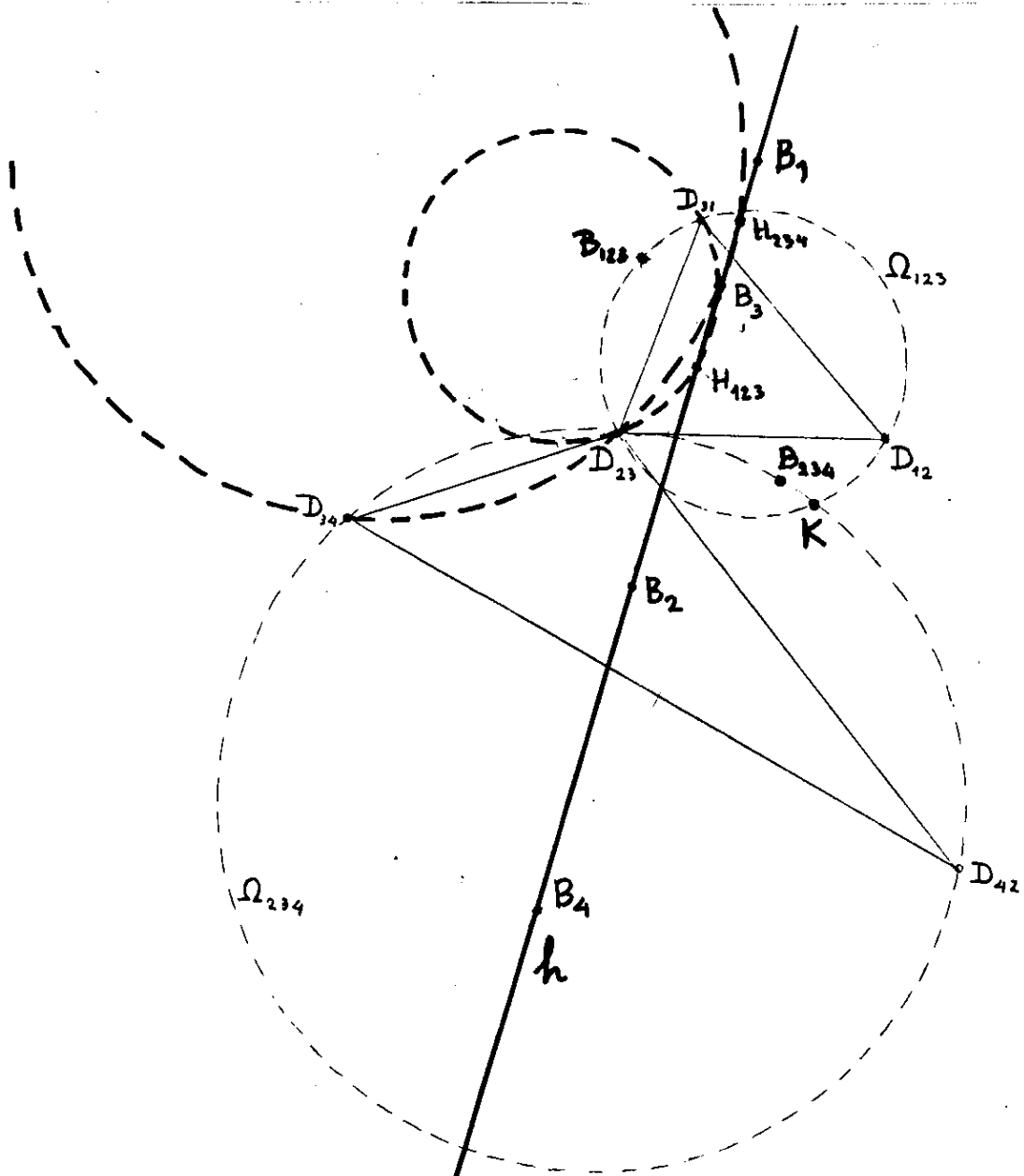
Opdat $A_{123} \in \Omega_{123}$ en $A_{234} \in \Omega_{234}$ is nodig en voldoende dat $A_3 \in 3\Omega_{123}$ en $A_3 \in 3\Omega_{234}$.

$3\Omega_{123}$ en $3\Omega_{234}$ snijden elkaar in D_{23} en een tweede punt, B_3 . Nemen we $A_3 := B_3$ dan ligt de configuratie geheel vast: B_{123} op Ω_{123} , B_{234} op Ω_{234} ,



B_1, B_2, B_3 en B_4 op een rechte h die ook door de hoogtepunten van de beide driehoeken gaat.

B_1, B_2, B_3 en B_4 zijn homologe punten bij een punt $B \in \ell$; dit punt heet het *punt van Ball* van de vier standen S_1, S_2, S_3, S_4 van $\ell|V$.



Het snijpunt K van Ω_{123} en Ω_{234} (ongelijk aan D_{23}) blijkt ook op Ω_{124} en Ω_{134} te liggen. (bewijs: [1], § 98).

Aangezien h ten opzichte van de gekozen pooldriehoeken geen andere rol speelt dan ten opzichte van de niet-getekende $\Delta D_{12} D_{24} D_{41}$ en $\Delta D_{13} D_{34} D_{41}$ liggen ook de hoogtepunten hiervan, H_{124} en H_{134} , op h .

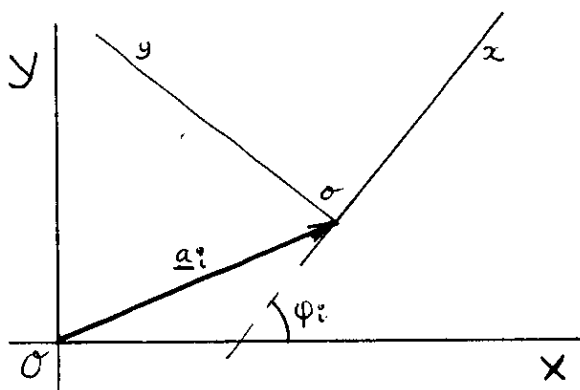
Wanneer nu een krukdraajfistangmechanisme moet worden geconstrueerd waarbij een lijnstuk EF in \mathcal{L} vier standen $E_i F_i$ ($i = 1, \dots, 4$) moet aannemen dan kunnen we de draaipolen D_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4; i \neq j$) construeren als tevoren in 4.6; nu ligt evenwel de leibaan vast: het is de lijn h door H_{ijk} ($i, j, k = 1, \dots, 4; i \neq j \neq k \neq i$). Het punt $B \in \mathcal{L}$ van Ball dient h te doorlopen. Blijft nog de vraag of er een kruk kan worden gevonden, dat wil zeggen of er vier op een cirkel gelegen homologe punten A_i ($i = 1, \dots, 4$) zijn, behorend bij een punt $A \in \mathcal{L}$.

(En bovendien kan men nog vragen of er een centrisch mechanisme is; dat wil zeggen dat het middelpunt van die cirkel op h moet liggen.)

ii) Op een cirkel gelegen homologe vijftallen

We omzeilen de zo juist gestelde vraag door eerst een andere te beantwoorden: Er zijn eindig veel punten in \mathcal{L} waarvan de homologe punten bij vijf standen S_i ($i = 0, \dots, 4$) van \mathcal{L} op een cirkel liggen. Om dit in te zien beschouwen we opnieuw de beweging $\mathcal{L}|V$.

We kiezen in V een assenstelsel OXY , in \mathcal{L} een assenstelsel oxy , beide ortho-normaal, samenvallend in stand S_0 . S_i ($i = 1, \dots, 4$) wordt dan gekarakteriseerd door de plaatsvector $\underline{a}_i = (a_i, b_i)^T$ van o ten opzichte van V en de hoek φ_i tussen de x -as en de X -as.



De vergelijking van een willekeurige cirkel Ω in V met middelpunt $(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0})$ luidt

$$(127) \quad c_0(X^2 + Y^2) - 2c_1X - 2c_2Y + c_3 = 0$$

met een $c_0 \neq 0$.

Het punt $A = (x, y)^T \in \mathcal{L}$ heeft ten opzichte van V de coördinaten

$$(128) \quad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y \text{ in } S_0. \end{aligned}$$

$$(129) \quad \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \underline{a}_i + D_{\varphi_i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ in } S_i \quad (i = 1, \dots, 4)$$

en die kentallen behoren juist bij de homologe punten A_i ($i = 0, \dots, 4$) van A . Opdat deze op een cirkel liggen moeten er dus getallen c_0, c_1, c_2, c_3 zijn z6 dat

$$(130) \quad \begin{aligned} c_0(x^2 + y^2) - 2c_1x - 2c_2y + c_3 &= 0 \text{ en} \\ c_0(X_i^2 + Y_i^2) - 2c_1X_i - 2c_2Y_i + c_3 &= 0 \quad (i = 1, \dots, 4). \end{aligned}$$

Bij gegeven \underline{a}_i en φ_i ($i = 1, \dots, 4$) moeten uit deze 5 vergelijkingen worden opgelost x, y, c_0, c_1, c_2, c_3 ; dit zijn schijnbaar 6 onbekenden; aangezien alleen de verhoudingen $\frac{c_i}{c_0}$ ($i = 1, 2, 3$) interessant zijn, zijn er in werkelijkheid 5 onbekenden.

We schrijven (127) in matrixnotatie (zoals in wis 30).

Zij

$$\underline{c} := (c_1, c_2)^T$$

dan luidt de vergelijking (127)

$$(131) \quad c_0 \underline{x}^T \underline{x} - 2 \underline{c}^T \underline{x} + c_3 = 0$$

en substitutie van (129), (waarbij we tijdens deze berekening om typografische redenen de index i weglaten)

$$\underline{X} = \underline{a} + D_{\varphi} \underline{x}$$

geeft in plaats van (130)

$$\begin{aligned} c_0 (\underline{a} + D_{\varphi} \underline{x})^T (\underline{a} + D_{\varphi} \underline{x}) - 2 \underline{c}^T (\underline{a} + D_{\varphi} \underline{x}) + c_3 &= 0, \\ c_0 (\underline{a}^T \underline{a} + \underline{a}^T D_{\varphi} \underline{x} + \underline{x}^T D_{\varphi}^T \underline{a} + \underline{x}^T D_{\varphi}^T D_{\varphi} \underline{x}) - 2 \underline{c}^T D_{\varphi} \underline{x} - 2 \underline{c}^T \underline{a} + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nu is

$$D_{\varphi}^T D_{\varphi} = D_{\varphi}^{-1} D_{\varphi} = I$$

en

$$\underline{a}^T D_{\varphi} = (D_{\varphi}^T \underline{a})^T = (D_{-\varphi} \underline{a})^T$$

zodat de vergelijking, met de substitutie $\underline{b} := D_{-\varphi} \underline{a}$, wordt

$$(132) \quad c_0 (\underline{x}^T \underline{x} + 2 \underline{x}^T \underline{b} + \underline{a}^T \underline{a}) - 2 \underline{x}^T D_{\varphi}^T \underline{c} - 2 \underline{a}^T \underline{c} + c_3 = 0 .$$

Hiervan trekken we (131) af,

$$2c_0 \underline{x}^T \underline{b} + 2 \underline{x}^T \underline{c} - 2 \underline{x}^T D_{\varphi}^T \underline{c} + c_0 \underline{a}^T \underline{a} - 2 \underline{a}^T \underline{c} = 0 ,$$

maken de vergelijking, die nu lineair is in x en y , homogeen,

$$2c_0 \underline{x}^T \underline{b} + 2 \underline{x}^T (I - D_{\varphi}^T) \underline{c} + c_0 \underline{a}^T \underline{a} z - 2 \underline{a}^T \underline{c} z = 0 ,$$

en voeren nieuwe variabelen in volgens het volgende schema

$$(133) \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

zodat

$$u_0 = c_0 z, \quad \underline{u} = z \underline{c}, \quad \underline{v} = c_0 \underline{x}, \quad u_5 = \underline{x}^T \underline{c}, \quad u_6 = \underline{x}^T D_{\frac{\pi}{2}} \underline{c} .$$

Verder is

$$\begin{aligned} I - D_{\varphi}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \cos \varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

Deze laatste matrix wordt vaak J genoemd (omdat $J^2 = -I$) en correspondeert met een draaiing over $\frac{\pi}{2}$ in het vlak: $J = D_{\frac{\pi}{2}}$.

Dan is

$$\begin{aligned} \underline{x}^T (I - D_\varphi^T) \underline{c} &= (1 - \cos \varphi) \underline{x}^T \underline{c} + \sin \varphi \underline{x}^T \underline{Jc} = \\ &= (1 - \cos \varphi) u_5 + (\sin \varphi) u_6 . \end{aligned}$$

Alles bijeengenomen gaat de vergelijking over in

$$\underline{a}^T \underline{a} u_0 - 2 \underline{a}^T \underline{u} + 2 \underline{b}^T \underline{v} + 2(1 - \cos \varphi) u_5 + 2(\sin \varphi) u_6 = 0$$

of

$$\frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{a} u_0 - \underline{a}^T \underline{u} + \underline{b}^T \underline{v} + (1 - \cos \varphi) u_5 + (\sin \varphi) u_6 = 0 ;$$

tenslotte plaatsen we nog de index i (ook bij de \underline{b}):

$$(134) \quad \frac{1}{2} \underline{a}_i^T \underline{a}_i u_0 - \underline{a}_i^T \underline{u} + \underline{b}_i^T \underline{v} + (1 - \cos \varphi_i) u_5 + (\sin \varphi_i) u_6 = 0 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Dit zijn 4 homogene lineaire vergelijkingen met 7 onbekenden.

Uit (133) volgen nog betrekkingen tussen u_0, \dots, u_6 :

$$u_0 u_5 = c_0 z \underline{x}^T \underline{c} = \underline{v}^T \underline{u}$$

$$u_0 u_6 = c_0 z \underline{x}^T \underline{Jc} = \underline{v}^T \underline{Ju} ,$$

uitgeschreven

$$(135a) \quad u_0 u_5 = u_1 u_3 + u_2 u_4$$

$$(135b) \quad u_0 u_6 = u_1 u_4 - u_2 u_3 .$$

Dit zijn 2 homogene, maar nu kwadratische vergelijkingen in u_0, \dots, u_6 .

We kunnen deze 7 onbekenden opvatten als homogene coördinaten van punten in \mathbb{R}^6 ; als $u_0 \neq 0$, corresponderend met $c_0 \neq 0$ en $z \neq 0$ zodat \underline{x} en \underline{c} eigenlijke punten van \mathcal{L} voorstellen, kunnen we $u_0 := 1$ nemen (met $c_0 = z = 1$); dan is $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ een eigenlijk punt in \mathbb{R}^6 . Uit de stelling van Bézout volgt dat het stelsel (134) & (135) in het algemeen 4 oplossingen heeft. De bijbehorende vier punten $\underline{x} \in \mathcal{L}$ heten de *Burmesterpunten* bij die gegeven vijf standen, de bijbehorende vier middelpunten \underline{c} heten de *Burmestermiddelpunten*, een corresponderend paar $(\underline{x}, \underline{c})$ heet een *Burmesterpaar*.

iii) Om het stelsel vergelijkingen (134) en (135) op te lossen beschouwen we allereerst het lineaire stelsel (134) dat uit 4 vergelijkingen bestaat. Daaruit kunnen we 4 der onbekenden u_0, \dots, u_6 trachten op te lossen, dat wil zeggen uitdrukken in de overige. We richten ons eerst op de Burmesterpunten, dat wil zeggen, we proberen eerst u_3 en u_4 te berekenen. Daartoe schrijven we (134) wat anders

$$-\underline{a}_i^T \underline{u} + (1 - \cos \varphi_i)u_5 + (\sin \varphi_i)u_6 = -\frac{1}{2}\underline{a}_i^T \underline{a}_i u_0 - \underline{b}_i^T \underline{v} \quad (i = 1, \dots, 4),$$

uitgewerkt

$$(136) \quad -a_{i1}u_1 - a_{i2}u_2 + (1 - \cos \varphi_i)u_5 + (\sin \varphi_i)u_6 = \\ = -\frac{1}{2}\underline{a}_i^T \underline{a}_i u_0 - b_{i1}u_3 - b_{i2}u_4 .$$

Zij M de matrix

$$[-\underline{a}_{*1}, -\underline{a}_{*2}, \underline{(1 - \cos \varphi)}_*, \underline{(\sin \varphi)}_*]$$

(hierin is \underline{Q}_* gebruikt als notatie voor de kolomvector met kentallen Q_i), en $\Delta := \det M$.

In het rechterlid van (136) staat de kolomvector

$$\underline{k} = -\frac{1}{2}u_0 \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 \\ a_{41}^2 + a_{42}^2 \end{pmatrix} - u_3 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} - u_4 \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{2}u_0 \underline{|a_*|^2} - u_3 \underline{b_{*1}} - u_4 \underline{b_{*2}}$$

en we kunnen het stelsel schrijven als

$$M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \underline{k} ;$$

als $\Delta \neq 0$ dan volgt hieruit

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = M^{-1} \underline{k} = -\frac{1}{2} u_0 M^{-1} |\underline{a}_*|^2 - u_3 M^{-1} \underline{b}_{*1} - u_4 M^{-1} \underline{b}_{*2}$$

zodat u_1, u_2, u_5 en u_6 *linear* in u_0, u_3 en u_4 zijn uitgedrukt; als we de in het rechterlid optredende coëfficiënten opnieuw in een matrix verzamelen staat er

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{20} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{50} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \\ \alpha_{60} & \alpha_{63} & \alpha_{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

waarin de $\alpha_{10}, \dots, \alpha_{64}$ uitdrukkingen zijn in de parameters van de standen S_1, \dots, S_4 , dus als gegeven zijn te beschouwen. We partitioneren deze uitdrukking

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_0 & | & A \\ \alpha_{50} & | & \underline{\alpha}_5^T \\ \alpha_{60} & | & \underline{\alpha}_6^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \underline{v} \end{pmatrix},$$

schrijven dit uit,

$$\underline{u} = u_0 \underline{\alpha}_0 + A \underline{v}$$

$$u_5 = u_0 \alpha_{50} + \underline{\alpha}_5^T \underline{v}$$

$$u_6 = u_0 \alpha_{60} + \underline{\alpha}_6^T \underline{v},$$

en substitueren dit in de aan (135) voorafgaande formules:

$$u_0 (u_0 \alpha_{50} + \underline{\alpha}_5^T \underline{v}) = \underline{v}^T (u_0 \underline{\alpha}_0 + A \underline{v})$$

$$u_0 (u_0 \alpha_{60} + \underline{\alpha}_6^T \underline{v}) = \underline{v}^T J (u_0 \underline{\alpha}_0 + A \underline{v}).$$

Tenslotte substitueren we weer x, y, z (met (133)),

$$c_0^2 z (\alpha_{50} z + \underline{\alpha}_5^T \underline{x}) = c_0^2 \underline{x}^T (z \underline{\alpha}_0 + A \underline{x})$$

$$c_0^2 z (\alpha_{60} z + \underline{\alpha}_6^T \underline{x}) = c_0^2 \underline{x}^T J (z \underline{\alpha}_0 + A \underline{x}),$$

en delen door c_0^2 (uit $c_0 = 0$ zou volgen, (133), dat $u_0 = u_3 = u_4 = 0$ en bij de veronderstelling $\Delta \neq 0$ ook dat $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = 0$, zodat $\delta f x = y = z = 0$ $\delta f c_1 = c_2 = c_0 = 0$, beide zonder meetkundige betekenis); na herleiden staat er dan:

$$(137a) \quad \underline{x}^T A \underline{x} + (\underline{\alpha}_0 - \underline{\alpha}_5)^T \underline{x} z - \alpha_{50} z^2 = 0$$

$$(137b) \quad \underline{x}^T J A \underline{x} + (J \underline{\alpha}_0 - \underline{\alpha}_6)^T \underline{x} z - \alpha_{60} z^2 = 0 ;$$

dit zijn de vergelijkingen van twee kegelsneden K_1 en K_2 op homogene coördinaten; ze gaan over in vergelijkingen op Cartesische coördinaten in \mathcal{L} als we $z := 1$ substitueren. Er zijn 4 snijpunten, welgeteld. Dat zijn de 4 (mogelijk gedeeltelijk samenvallende, oneigenlijke of zelfs imaginaire) Burmesterpunten $B^{(i)}$ bij de standen S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . Ieder van de punten $B^{(i)} \in \mathcal{L}$ leidt in die standen tot homologe punten $B_j^{(i)}$ ($j = 0, \dots, 4$) die op een cirkel liggen. Om de Burmesterpunten werkelijk uit (137) te berekenen passen we op K_1 en K_2 nog een meetkundige redenering toe; als we (137a) en (137b) korthedshalve schrijven als

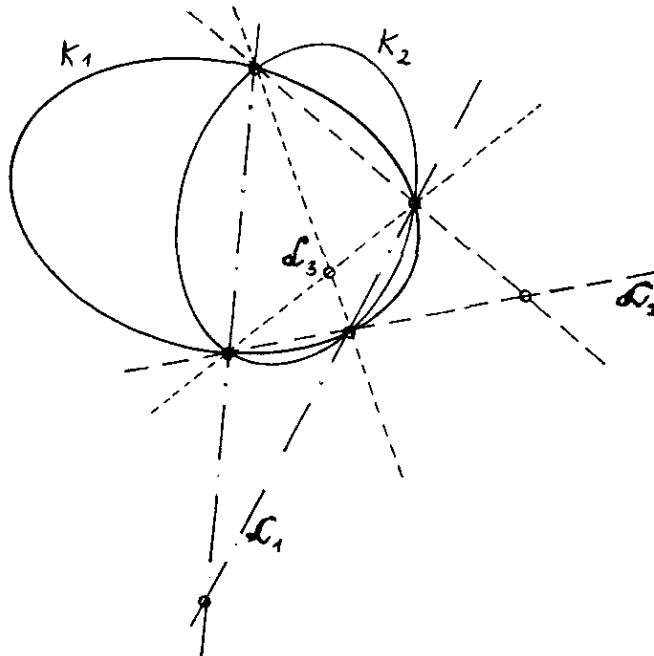
$$K_1 = 0$$

$$K_2 = 0$$

dan stelt voor iedere $\lambda \in \mathbb{R}$

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$

weer de vergelijking van een kegelsnede voor, wederom door de Burmesterpunten. In het bijzonder kan men λ zo bepalen dat $K_1 + \lambda K_2$ ontgaat in 2 rechten; dit



is dan en slechts dan het geval als de determinant van de coëfficiënten, die van de graad 3 in λ is, 0 is; dit geeft drie waarden λ_j ($j = 1, 2, 3$) drie ontaarde exemplaren, $K_1 + \lambda_1 K_2$, $K_1 + \lambda_2 K_2$, $K_1 + \lambda_3 K_2$ die ieder uit twee rechten bestaan. Ieder der punten $B^{(i)}$ kan men dus ook als snijpunt van rechten verkrijgen, dat wil zeggen als oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Het voor deze procedure vereiste rekenwerk kan men beter machinaal (doen) verrichten. Als de $B^{(i)}$ gevonden zijn, zijn ze nog niet altijd praktisch bruikbaar, zelfs indien ze eigenlijk en reëel zijn; ze kunnen dan bijvoorbeeld nog te ver weg liggen.

Als de $B^{(i)}$ bekend zijn kan men, terugrekenend, ook de bijbehorende Burmestermiddelpunten $M^{(i)}$ vinden, maar dit kan natuurlijk ook direct gebeuren door met (135) u_3 , u_4 , u_5 en u_6 uit te drukken in u_0 , u_1 en u_2 . De gedachtegang is daarbij geheel dezelfde als in de zojuist besproken redenering; de matrix die dan een rol speelt is

$$\tilde{M} := [\underline{b}_{*1}, \underline{b}_{*2}, \underline{(1 - \cos \varphi_*)}, \underline{(\sin \varphi_*)}]$$

met $\tilde{\Delta} := \det \tilde{M}$.

Als $\tilde{\Delta} \neq 0$ dan is $z \neq 0$ (dit bewijst men zoals $c_0 \neq 0$ volgt uit $\Delta \neq 0$). Als dus zowel $\Delta \neq 0$ als $\tilde{\Delta} \neq 0$ dan zijn zowel de Burmesterpunten als de Burmestermiddelpunten eigenlijke punten van \mathcal{L} .

Indien evenwel $c_0 = 0$ dan is het corresponderende Burmestermiddelpunt oneigenlijk, zodat het corresponderende Burmesterpunt in de standen S_0, \dots, S_4 op één rechte gelegen homologe punten oplevert; dit is zeer bijzonder; men noemt zo'n punt een *punt van Ball met excess 1*.

iv) Aangezien het aantal der punten in \mathcal{L} waarvan de homologe punten in V bij 5 gegeven standen op een cirkel liggen, eindig is, ligt het voor de hand om te vermoeden dat bij 4 gegeven standen oneindig veel van zulke punten worden gevonden; dit blijkt zo te zijn: die punten vormen een derdegraadskromme in \mathcal{L} (cirkelpuntskromme); evenzo vormen de bijbehorende middelpunten een derdegraadskromme in V (middelpuntskromme).

Het is nu ook mogelijk om de centrische krukstangbeweging aan te geven die 4 gegeven standen inneemt. De leibaan construeerden we in het eerste deel van deze paragraaf. Het middelpunt van de kruk moet op deze leibaan liggen, en kan dus een van de drie snijpunten van deze leibaan met de middelpuntskromme zijn. Het mechanisme kan dan worden geconstrueerd met de methode van § 4.6, op drie van de vier gegeven standen.

4.8. Formules van Grüber

Zie [1], § 106, 107.

Hoofdstuk 5. Appendix

5.1. Aanvulling op § 4.2

Nog enige berekeningen over de gesloten rechtgeleiding (de dubbele acht). In de stand waarin $\varphi = 0$ (\overrightarrow{AB} en $\overrightarrow{A_0B_0}$ dezelfde zin) is h de afstand van AB en A_0B_0 terwijl dan

$$(1) \quad \{c(a - b) + bh\}^2 = 4b(a + b)(2ab - ch) .$$

De tritangent heeft als vergelijking $y = h - c$. In de stand waarbij $\varphi = \pi$ (\overrightarrow{AB} en $\overrightarrow{A_0B_0}$ tegengestelde zin) is h_1 de afstand van AB en A_0B_0 en wordt als gesteld dat $y = h_1 + c$ tritangent is, zodat

$$(2) \quad \{c(a + b) + bh_1\}^2 = 4b(a - b)(2ab - ch_1) .$$

Verder is nu

$$r^2 = (a - b)^2 + h^2 = (a + b)^2 + h_1^2$$

en dus

$$h_1^2 = h^2 - 4ab .$$

Het is duidelijk dat $a = r \sin \theta_0 + b$, $h = r \cos \theta_0$. Substitutie in (1) geeft na enig rekenen:

$$(3br \sin \theta_0 - cr \sin \theta_0)^2 + 8b^2(3br \sin \theta_0 - cr \cos \theta_0) + 16b^4 - r^2(b^2 + c^2) = 0$$

of

$$(3) \quad (3br \sin \theta_0 - cr \cos \theta_0 + 4b^2)^2 = r^2 b^2 / \sin^2 \gamma ,$$

waarbij $\angle AKB = 2\gamma$ is gesteld (dus $c = b \cot \gamma$). Daar $a = r \sin \theta_\pi - b$, $h_1 = r \cos \theta_\pi$ levert (2):

$$(4) \quad (3br \sin \theta_\pi - cr \cos \theta_\pi - 4b^2)^2 = r^2 b^2 / \sin^2 \gamma .$$

Om aan (3) en (4) te voldoen, nemen we

$$(3a) \quad r(3 \sin \gamma \sin \theta_0 - \cos \gamma \cos \theta_0 - 1) + 4b \sin \gamma = 0 ,$$

$$(4a) \quad r(3 \sin \gamma \sin \theta_\pi - \cos \gamma \cos \theta_\pi - 1) - 4b \sin \gamma = 0 .$$

Bovendien is $r \sin \theta_0 + b = r \sin \theta_\pi - b$ en dus

$$\cos \theta_0 = \cos\{\frac{1}{2}(\theta_\pi + \theta_0) - \frac{1}{2}(\theta_\pi - \theta_0)\} = \frac{\cos(\pi/4 + \epsilon) + 2 \sin^2(\pi/4 + \epsilon)\sqrt{2} \sin 2\epsilon}{1 + 2 \sin 2\epsilon}$$

$$(11) \quad h = r \cos \theta_0 = \frac{\cos(\pi/4 + \epsilon) + 2 \sin^2(\pi/4 + \epsilon)\sqrt{2} \sin 2\epsilon}{\cos 2\epsilon\sqrt{2} \sin 2\epsilon} b .$$

Door $\tan \epsilon = \tau^2$ te stellen kunnen we nu uit (8), (9), (10) en (11) afleiden

$$a = \lambda(1 + \tau^2)(1 + \tau^4), \quad b = 2\lambda\sqrt{2} \tau(1 - \tau^4)$$

$$c = 2\lambda\sqrt{2} \tau(1 - \tau^2)^2, \quad h = \lambda\{4\tau(1 + \tau^2)^2 + (1 - \tau^2)(1 + \tau^4)\}.$$

De afstand δ tussen de beide horizontale raaklijnen is: $\delta = h - h_1 - 2c = 4b \tan 2\epsilon$. De lengte van de rechtgeleiding is ten naaste bij $4b$.

Uit $h_1 = r \cos \theta_\pi > 0$ volgt:

$$\cos(\pi/4 + \epsilon) - 2 \sin^2(\pi/4 + \epsilon)\sqrt{2} \sin 2\epsilon > 0 .$$

Dit komt neer op

$$4 \sin^3 2\epsilon + 8 \sin^2 2\epsilon + 5 \sin 2\epsilon - 1 < 0 .$$

Als kleinste bovengrens voor ϵ geeft dit $\epsilon_s \approx 4,5^\circ$ en voor $|\tau|$: $\tau_s \approx 0,28$.

Literatuur

1. G.R. Veldkamp, Kinematica; Scheltema en Holkema, Amsterdam, 1970.
2. W. Wunderlich, Ebene Kinematik; B.I. Hochschultaschenbücher 447/447a*, Mannheim etc. 1970.