TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

HOOFDSTUKKEN UIT DE MEETKUNDE EN DE KINEMATICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. W. van der Meiden

Gegeven in het Voorjaarssemester 1980

Bibl tug

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Hoofdstukken uit de meetkunde en de kinematica

Dictaatnr. 2.212 Prijs f 5,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

HOOFDSTUKKEN UIT DE MEETKUNDE EN DE KINEMATICA

Voorjaarssemester 1980

Inhoud.

		Pagina
Inleiding		iii
Hoofdstuk I.	Affiene ruimten	
	1.1. Het begrip affiene ruimte	1
	1.2. Affiene deelruimten	3
	1.3. Affiene afbeeldingen	10
	1.4. Euclidische ruimten	14
	1.5. Differentieerbare functies	25
Hoofdstuk II.	Lijnenmeetkunde	
	2.1. Projectieve ruimte	34
	2.2. Lijncoördinaten	40
Hoofdstuk III.	Differentiaalmeetkunde	
	3.1. Krommen	56
	3.2. Vlakke krommen	63
	3.3. Oppervlakken	65
	3.4. Regelvlakken	76
Hoofdstuk IV.	Kinematica	
	4.1. Beweging	85
Literatuur		99

Inleiding.

Wanneer men uit machines de materie wegdenkt blijven mechanismen over; wanneer men dan van deze mechanismen de bijzonderheden weglaat die verraden dat het mechanisme een fysische herkomst heeft, ziet men bewegelijke configuraties, figuren in de tijd-ruimte. Deze figuren zijn het object van de kinematica, onderdeel van de meetkunde; ze zijn sedert eeuwen ontleend aan het vernuft van al of niet ingenieur geheten uitvinders.

Volgens een oeroud spraakgebruik vormt de wiskunde die aan natuurverschijnselen en artefacten is ontleend de toegepaste wiskunde, vormen de verschijnselen etc. de toepassingen.Zo wordt kinematica toegepast in de werktuigbouwkunde en daarbuiten voorzover beweging met mechanistische modellen wordt beschreven.

De plaats van de kinematica binnen de meetkunde is niet duidelijk. Naar haar aard behoort ze tot de differentiaalmeetkunde. Ze heeft evenwel ook steunpunten in de analytische en algebraische meetkunde, in een aantal hoofdstukken der analyse (differentiaalvergelijkingen, approximatie, optimalisering) en in algebraische onderwerpen (lineaire algebra, duale getallen, quaternionen); na de afronding van de klassieke kinematica in de eerste helft van deze eeuw ziet men thans in de literatuur pogingen om de kinematica te beschrijven in termen van moderne differentiaalmeetkunde of moderne algebraische structuren.

Naast een globale, op discipline gerichte indeling moet ook over een andere worden gesproken. De omstandigheid dat het vak zowel door werktuigbouwers als door wiskundigen is (en wordt) bedreven brengt tweeërlei gezichtspunt mee, Technische en Theoretische Kinematica, die zich, bij niet noodzakelijk verschillende keuze van onderwerp, onderscheiden doordat de eerste (meer) mechanisme-georiënteerd is, de tweede (meer) methodologisch van aard. Hierin weerspiegelt zich de zo vaak gehoorde opmerking of klacht dat voor de ingenieur een probleem is opgelost met de verkrijging van de numerieke antwoorden, terwijl het voor de wiskundige dan juist ontstaat in de vraag naar de mogelijkheid tot generalisatie, dat is de vraag naar het formuleren van methodologische winst.

De hierna volgende tot syllabus verenigde notities beogen methodologisch van aard te zijn en presenteren hoofdstukken uit de analytische en differentiaal-meetkunde. In tegenstelling tot hetgeen men zou verwachten, in aanmerking genomen dat het een vierdejaarscollege betreft, is de stof gedeeltelijk elementair tengevolge van het feit dat in de voorafgaande wiskundecolleges (WIS 10, 20,30,40), die bekend worden verondersteld, betrekkelijk weinig meetkunde voor-komt, en wel in de hoofdstukken in de lineaire algebra. Dit, op zijn beurt, is een gevolg van twee elkaar versterkende oorzaken: de meetkundigen hebben hun onderzoek sedert enige decennia gericht op algemenere (meer-dimensionale, niet noodzakelijk euclidische) structuren; de rekenmachine voorziet sneller en massaler in de behoefte aan numerieke antwoorden; dientengevolge is meetkunde in het technisch-wetenschappelijk onderwijs hier te lande en elders verdrongen door andere onderwerpen en vervangen door lineaire algebra, breed toepasbaar maar met geringere (klassiek-) meetkundige inhoud.

Welke voordelen de zojuist beschreven toestand ook heeft, voor de theoretische kinematica dreigde ze funest te worden: tot voor enige jaren dateerden de laatstverschenen leerboeken van 1940 (Garnier, vierde druk 1960) en 1953 (Blaschke-Müller) (volledigheidshalve wordt opgemerkt dat over technische kinematica een bescheiden aanbod voorhanden was). Een kentering is evenwel waarneembaar. De vraag naar fijnmechanische constructies, de toepassing in tot voor kort niet geëxploreerde omstandigheden en van nieuwgevonden materialen (ironisch genoeg niet zelden in computers), de herontdekte toepasbaarheid van mechanistische modellen buiten de werktuigbouw en de mogelijkheid uit de kinematica afkomstige problemen ook machinaal te bewerken, leidden tot een hernieuwde belangstelling voor kinematica. Deze opleving zou met verscheidene voorbeelden te illustreren zijn; hier wordt volstaan te melden dat sedert 1970 tenminste drie leerboeken over theoretische kinematica verschenen zijn, die van Veldkamp [17], Hunt [10] en Bottema en Roth [5] ; deze stemmen overeen in de aandacht voor ruimtelijke kinematica (voor enkele jaren bleken manuscripten over ruimtelijke kinematica bij uitgevers niet publicabel om commerciële redenen); ook hier wordt een actuele technische behoefte weerspiegeld, namelijk aan mechanismen die, ook bij benadering, niet vlak zijn. De wiskundige behandeling van ruimtelijke mechanismen is in het geheel niet een eenvoudig analogon van een vergelijkbare vlakke configuratie; ze blijkt doorgaans aanzienlijk moeilijker.

Een laatste opmerking betreft nog de literatuur. In de bijgevoegde literatuurlijst zijn titels opgenomen van werken waaruit voor de samenstelling van deze syllabus werd geput (zonder dat dit in de tekst expliciet is aangegeven) dan wel waarnaar in de tekst voor verder commentaar wordt verwezen (veelal opgaven); dit, en hetgeen eerder werd opgemerkt, mag niet de indruk wekken dat de literatuur in dit gebied niet omvangrijk is; men behoeft de literatuurverwijzingen in enkele der opgegeven boekwerken maar door te bladeren om van die omvang een beperkt idee te krijgen; er is een overmaat (met betrekking tot de inhoud van een college, of zelfs met betrekking tot bepaalde onderwerpen daaruit) aan tijdschriftartikelen, gepubliceerd in uiteenlopende tijdschriften (de IFToMM geeft sedert 1966 een tijdschrift "Mechanism and Machine Theory" uit, dat een centraliserende rol speelt). De historische ontwikkeling van de kinematica kan men, in kort bestek, volgen in Beyers artikel [3], één van de schaarse overzichten met een conscientieuze verwijzing naar de oorspronkelijke bronnen. Overigens bestaan er enige bibliografische werken over kinematica (zie [5] p.543).

Men kan het oogmerk waarmee het college "Meetkunde en Kinematica" wordt gegeven samenvatten als een poging tot

i : verdieping in de meetkundige achtergrond van de leer der mechanismen;
ii : inleiding in de nieuwere literatuur over kinematica.

Hoofdstuk I. AFFIENE RUIMTEN

1.1. *Het begrip affiene ruimte*

"Wie de beweging niet kent, kent de natuur niet".

Van een stoffelijk lichaam wordt gezegd dat het beweegt indien na enig tijdsverloop geconstateerd kan worden dat het in de ruimte een andere plaats dan wel een andere stand inneemt. Dit brengt ons tot de gedachte over de ruimte te spreken als een verzameling van plaatsen met de mogelijkheid om ook de verplaatsing in een wiskundig begrip onder te brengen. Daarbij kan men van meet af aan abstraheren van het begrip "stoffelijk lichaam". Dit ontslaat ons niet alleen van de plicht om zo'n lichamm te definieren, het leidt ook tot een geriefelijke algemeenheid. Het bij uitstek voor ons doel geschikte wiskundig model is dat van de *Affiene Ruimte.* Dan beschouwen we de ruimte als een verzameling van punten die plaatsen voorstellen en brengen we het begrip verplaatsing in verband met vectoren; door het aangeven van rekenregels worden deze twee soorten elementen in één algebraïsche structuur verenigd, en deze structuur hebben wij bij de "affiene ruimte" op het oog.

1.11. Definitie. Een *reële affiene ruimte* wordt gevormd door het ensemble van

i) een niet-lege verzameling R, elementen $a,b,c,\dots,x,y,z$;

ii) een reële vectorruimte U, vectoren $\underline{u},\underline{v},\dots,\underline{x},\underline{y},\dots$;

iii) een afbeelding $\sigma: R \times R \to U$ met de notatie $\sigma(a,b) = a \to b$, met de eigenschappen:

AR1: Voor iedere $a \in R$ is de afbeelding $\sigma_a : R \to U$ met $\sigma_a(x) := a \to x$ een bijectie;

AR2: voor iedere $A \in R$ geldt $a \to a = \underline{0}$;

AR3: voor alle $a,b,c \in R$ geldt $a \to b + b \to c = a \to c$.

We spreken over de affiene ruimte (R,U), of, als geen misverstand ontstaat, de affiene ruimte R.

De elementen van R noemen we *punten.*

1.12. Eigenschappen.

1.121. $b \to a = -(a \to b)$; dit volgt uit AR1 en AR2.

1.122. $[(a \to b) = (c \to d)] \Leftrightarrow [(a \to c) = (b \to d)]$; dit volgt uit AR3.

1.13. Nadere bepalingen.

1.131. We veronderstellen dat dim $U < \infty$, en beperken ons practisch tot dim $U =$ $= 0,1,2$, of 3.

1.132. Als $\underline{u} = a \to b$ schrijven we ook $b = a + \underline{u}$ of $a = b - \underline{u}$.
Dan betekent 1.122 dat $(a + \underline{u}) + \underline{v} = (a + \underline{v}) + \underline{u}$, zodat we mogen schrijven $a + \underline{u} + \underline{v}$.

1.133. $T_a(R) \; : = \sigma_a^{\leftarrow}(U) \;\underline{\underline{=}}\; \{ \; a + \underline{u} \mid \underline{u} \in U \; \}$.

Omdat σ_a een bijectie is, kan men $T_a(R)$ opvatten als een (met U isomorfe) vectorruimte, de *raakruimte* van R in a ; de elementen van $T_a(R)$ staan bekend als *gebonden vectoren.*

1.134. Als $\underline{u} \in U$ dan bevat de vezel $\sigma^{\leftarrow}(\underline{u})$ alle paren (a,b) waarvoor $\underline{u} = a \to b$.
Deze vezels vormen een partitie $\sigma^{\leftarrow}(U) = \{ \; \sigma^{\leftarrow} \; (\underline{u}) \}_{u \in U}$ van $R \times R$ die ook als vectorruimte kan worden beschouwd.
$\sigma^{\leftarrow}(U)$ heet de *vrije vectorruimte*, de elementen ervan *vrije vectoren* ; ook $\sigma^{\leftarrow}(U)$ is isomorf met U .

1.135. Definitie : dim R : = dim U .

1.136. De vectorruimte V heet de *met R verbonden lineaire* (of *vector-*) ruimte.
We schrijven ook wel $R_* \; : = \; U$.

1.137. Iedere vectorruimte V krijgt door de definitie $\underline{a} \to \underline{b} : \underline{b} - \underline{a}$ affiene structuur. Dit heeft er toe geleid dat de ruimte veelal wordt gezien als vectorruimte, waarin onderscheid gemaakt wordt tussen plaatsvectoren (punten) en andere vectoren ; nog afgezien van deze terminologische verwarring is de vectorruimte minder geschikt dan de affiene ruimte omdat er steeds *van te voren* een oorsprong moet worden gekozen.
Anderzijds kan men ieder affien resultaat direct op vectorruimten toepassen.

1.138. De n-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^n$ is, als affiene ruimte opgevat, een n-dimensionale ruimte $\mathbb{A}^n$ met verbonden lineaire ruimte $\mathbb{A}^n_* = \mathbb{R}^n$. In latere paragrafen , waar we ook over de euclidische metriek van de ruimte willen beschikken, spreken we van $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{E}^n_*$.
Aangezien iedere eindigdimensionale vectorruimte essentieel een $\mathbb{R}^n$ is, is iedere eindigdimensionale affiene ruimte essentieel een $\mathbb{A}^n$. Voor n = 0,1,2,3 spreken we van een punt, een lijn, een vlak, de ruimte.

1.139. Als $\{ \; \underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n \; \}$ een basis is voor $\mathbb{R}^n$, dan zijn er bij iedere $a,b \in \mathbb{A}^n$ eenduidig bepaalde getallen $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ zodat $a \to b = \sum_{i=1}^n \rho_i f_i$. De getallen

ρ_i heten de coördiaten van b ten opzichte van het coördinatenstelsel $\{ a, \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, f_n \}$.

1.14. Voorbeelden.

1.141. $\mathbb{A}^0$, $\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^2$ en $\mathbb{A}^3$.

1.142. In een tetraëder delen de middenverbinders van overstaande ribben elkaar doormidden.

1.2. *Affiene deelruimten.*

Zij R een affiene ruimte met verbonden vectorruimte R_* .

1.21. Definitie. Als U een lineaire deelruimte is van R_* en $a \in R$ dan heet $a + U \; := \overleftarrow{\sigma}_a (U) = \{ a + \underline{u} \mid \underline{u} \in U\}$ een *affiene deelruimte* van R; U heet de *richting* van $a + U$, a heet een *steunpunt* van $a + U$.

1.22. Eigenschappen.

1.221. $b \in a + U \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \in U$.

1.222. $a + U = b + V \Rightarrow U = V$

1.223. Als $\bigcap_{i=1}^{m} (a_i + U_i) \neq \emptyset$ dan is $\bigcap_{i=1}^{m} (a_i + U_i)$ een affiene deelruimte met richting $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$.

1.23. Stelling : Als $p, q, a_0, a_1, \ldots, a_m \in R$ en $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ dan is

$$p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \, (p \rightarrow a_i) = q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \, (q \rightarrow a_i).$$

Bewijs : Uit

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p \rightarrow a_i) - \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i (q \rightarrow a_i)\right)\right) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i ((p \rightarrow a_i) - (q \rightarrow a_i))$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \, (p \rightarrow q) = p \rightarrow q \text{ volgt}$$

$$p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \, (p \rightarrow a_i) = p + p \rightarrow q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (q \rightarrow a_i) = q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (q \rightarrow a_i$$

1.231. <u>Definitie</u> : Als $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R}$ en $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ dan heet, voor iedere $p \in \mathcal{R}$,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i \ := \ p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \ (p \to a_i)$$

de *affiene combinatie* van $a_0, a_1, \ldots, a_m$ met coefficienten (of gewichten) $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

1.232. <u>Stelling</u> : Als $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_0 \neq 0$ en $b := \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i$, dan is

$$a_0 = \lambda_0^{-1} b - \sum_{i=1}^m \lambda_0^{-1} \lambda_i a_i .$$

1.233. <u>Stelling</u> : Als

$$b_j = \sum_{i=0}^m \alpha_{ji} a_i \quad , \quad \sum_{i=0}^m \alpha_{ji} = 1, \ j = 0, 1, ., k,$$

en

$$c = \sum_{j=0}^k \beta_j b_j \quad , \quad \sum_{j=0}^k \beta_j = 1,$$

dan is

$$\sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{ji} \beta_j \right) = 1 \text{ en } c = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{ji} \beta_j \right) a_i$$

1.24. <u>Voorbeelden.</u>

1.241. Neem, in 1.23, $m := 1$.

1.242. Het zwaartepunt van Δabc is $3^{-1}(a + b + c)$.

1.243. Het zwaartepunt van tetraeder abcd is $4^{-1}(a + b + c + d)$.

1.244. Het hoogtepunt van Δabc is

$$(2F)^{-2} \sum_o (b \to c, a \to b)(b \to c, c \to a) a$$

met

$$4F^2 \ := \ \sum_o (b \to c, a \to b)(b \to c, c \to a), \text{ en}$$

$$F = \text{opp. } \Delta abc$$

1.245. $p \to \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^m \lambda_i \ (p \to a_i) \ , \ \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1.$

1.25. <u>Definitie</u> : Onder het *affiene opspansel* van de punten $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R}$ verstaan we $\ll a_0, a_1, \ldots, a_m \gg \ := \{ \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i \mid \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \}$;

als $A := \{ a_0, a_1, \ldots, a_m \}$ dan is $\ll A \gg \ := \ \ll a_0, a_1, \ldots, a_m \gg$;

als B niet eindig is dan is $\ll B \gg \ := \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \text{ eindig}}} \ll A \gg$

Voorbeelden en eigenschappen.

1.251. $\ll a_0 \gg = \{ a_0 \}$.

1.252. $\ll a_0, a_1 \gg$ is de lijn door a_0 en a_1; als tenminste $a_0 \neq a_1$

1.253. $\ll a_0, a_1, a_2 \gg$ is het vlak door a_0, a_1, a_2, mits a_0, a_1, a_2 niet collineair zijn.

1.254. Stelling : $\ll a_0, a_1, \ldots, a_m \gg = a_0 + < a_0 \to a_1, \ldots a_0 \to a_m >$, in woorden: het affien opspansel van een eindige verzameling is een affiene deelruimte.

1.26. Definitie. De punten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ heten (of: het stelsel punten $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$ heet *(affien) onafhankelijk* als géén van die punten tot het affiene opspansel der overige behoort; anders heten ze (of: heet het) *(affien) afhankelijk*.

Stelling. $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$ onafhankelijk $\Leftrightarrow [a_0 \to a_1, a_0 \to a_2, \ldots, a_0 \to a_m]$ onafhankelijk.

Bewijs. Stel dat $a_0 \to a_1, a_0 \to a_2, \ldots, a_0 \to a_m$ afhankelijk zijn; dan zijn er $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, niet $\forall_i\ \lambda_i = 0$, met $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_0 \to a_i = \underline{0}$.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1) $\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$; het is geen beperking te onderstellen dat $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$;
dan zijn equivalent $\sum_i \lambda_i\ (a_0 \to a_i) = \underline{0}$, $a_0 + \sum_i \lambda_i\ (a_0 \to a_i) = a_0$,
$\sum_i \lambda_i a_i = a_0$, $a_0 \in \ll a_1, a_2, \ldots, a_m \gg$.

2) $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$; het is geen beperking te onderstellen dat $\lambda_1 = -1$; nu is $\sum_{i=2}^m \lambda_i = 1$ en de volgende beweringen zijn equivalent:
$-a_0 \to a_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i\ (a_0 \to a_i) = \underline{0}$, $a_0 + \sum_{i=2}^m \lambda_i\ (a_0 \to a_i) = a_1$,
$\sum_{i=2}^m \lambda_i a_i = a_1$, $a_1 \in \ll a_2, a_3, \ldots, a_m \gg$.

Stel nu, omgekeerd, dat $\exists_{k \in 0,1,\ldots,m}\ a_k \in \ll a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m \gg$. Met $\sum_{i \neq k} \lambda_i = 1$ zijn dan equivalent; $a_k \in \ll a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m \gg$, $a_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i a_i$, $a_0 \to a_k = \sum_{i=k} \lambda_i a_0 \to a_i$, $[a_0 \to a_1, a_0 \to a_2, \ldots, a_0 \to a_m]$ afhankelijk. □

1.262. Als $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$ affien afhankelijk is geldt *niet* dat *ieder* der punten tot het opspansel der overige behoort; neem bijvoorbeeld $a_0 = a_1 \neq a_2$; $[a_0, a_1, a_2]$ is afhankelijk, maar $a_2 \notin \ll a_0, a_1 \gg$. Maar: als $[a_0, a_1 \ldots, a_m]$ afhankelijk en $[a_1, \ldots, a_m]$ onafhankelijk is, dan is $a_0 \in \ll a_1, \ldots, a_m \gg$;

want als, met $k \neq 0$,

$$a_k = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \lambda_m a_m$$

dan moet $\lambda_0 \neq 0$ zijn en kan men a_0 oplossen (1.232) zodat ook $a_0 \in \langle\!\langle a_1,\ldots,a_m \rangle\!\rangle$.
En in het bijzonder:

Stelling. Als $[a_0,a_1,\ldots,a_p]$ een maximaal onafhankelijk deel is van $[a_0,a_1,\ldots,a_m]$ dan is $\langle\!\langle a_0,a_1,\ldots,a_p \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a_0,a_1,\ldots a_m \rangle\!\rangle$.

Bewijs. Nu is $a_0,a_1,\ldots,a_m \in \langle\!\langle a_0,a_1,\ldots,a_p \rangle\!\rangle$ dus (1.233) ook $\langle\!\langle a_0,a_1,\ldots,a_m \rangle\!\rangle \subset \langle\!\langle a_0,a_1,\ldots,a_p \rangle\!\rangle$, het omgekeerde is triviaal. □

1.263. Voorbeelden.

[a] is onafhankelijk.
Als dim $R \geq 1$ en $a \neq b$, dan is [a,b] onafhankelijk. Als $R \geq 2$ en a,b,c liggen niet op één rechte, dan is [a,b,c] onafhankelijk (en omgekeerd). Als dim $R \geq 3$ en a,b,c,d liggen niet in één vlak, dan is [a,b,c,d] onafhankelijk (en omgekeerd) . Volledigheidshalve noemen we ∅ afhankelijk. Een nietleeg deel van een onafhankelijk stelsel is onafhankelijk.

1.264. Definitie. Een onafhankelijk stelsel punten $[a_0,a_1,\ldots,a_m]$ heet een *(affiene) basis* voor de affiene deelruimte $a + V$ indien

1) $a + V = \langle\!\langle a_0,a_1\ldots,a_m \rangle\!\rangle$,

2) $[a_0,a_1,\ldots,a_m]$ onafhankelijk.

1.265. Stelling. Iedere affiene deelruimte $a + V$ heeft een basis, en deze bestaat uit $1 + \dim V$ punten.

Bewijs. Neem in V een basis $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_m$ met $m = \dim V$ (vergelijk WIS 20, p.105-108). Dan zijn a, $a + \underline{v}_1$, $a + \underline{v}_2,\ldots,a + \underline{v}_m$ onafhankelijk (1.334) en $\langle\!\langle a, a + \underline{v}_1,\ldots,a + \underline{v}_m \rangle\!\rangle = a + \langle \underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m \rangle = a + V$ (1.332).
(Er zijn veel bases in $a + V$.) □

1.266. Stelling. Als $b \in \langle\!\langle a_0,a_1,\ldots,a_m \rangle\!\rangle$ met onafhankelijke $[a_0,a_1,\ldots,a_m]$ dan zijn de λ_i in $b = \sum_i \lambda_i a_i$ eenduidig bepaald.

Bewijs. Uit $\sum_i \lambda_i a_i = \sum_i \mu_i a_i$ volgt $a_0 + \sum_i \lambda_i (a_0 \to a_i) = a_0 + \sum_i \mu_i (a_0 \to a_i)$,

$$\sum_i \lambda_i (a_0 \to a_i) = \sum_i \mu_i (a_0 \to a_i), \sum_i (\lambda_i - \mu_i)(a_0 \to a_i) = \underline{0},\ \forall_i\ \lambda_i - \mu_i = 0 .$$ □

De getallen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heten de *affiene coördinaten* van b ten opzichte van de basis $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$.

1.267. Stelling. Iedere affiene deelruimte $a + V$ van R is een affiene ruimte met V als verbonden lineaire ruimte.

Bewijs. $a + V$ en V vormen al een ensemble van een verzameling en een vectorruimte; we zoeken nog een $\tau : (a + V) \times (a + V) \to V$ met de vereiste eigenschappen; neem

$$\tau := \sigma \mid (a + V) \times (a + V) .$$

dan is triviaal voldaan aan AR2 en AR3; voor $\tau_a : \tau_a(x) = a \to x$ (met $x \in a + V$) geldt

1) $a \to x \in V$ dus $\tau_a : a + V \to V$,
2) $\tau_a = \sigma_a \mid a + V$, τ_a is een injectie,
3) als $\underline{v} \in V$ dan is $\underline{v} = \tau_a\ (a + \underline{v})$, τ_a een surjectie. □

1.268. De dimensie van een affiene deelruimte is gelijk aan het aantal basispunten minus 1; en: iedere basis heeft evenveel punten (1.135, 1.265 en 1.34).

Affiene deelruimten S van R met dim $R = n$ heten

punten als dim $S = 0$,
lijnen als dim $S = 1$,
vlakken als dim $S = 2$,
ruimten als dim $S = 3$,
hypervlakken als dim $S = n-1$.

1.27. Stelling. Zij $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ onafhankelijk, $m \leq n$ en
$b_i := \sum_{j=0}^n \beta_{ij} a_j$; $\sum_{j=0}^n \beta_{ij} = 1$, $i = 0, \ldots, m$;
Dan is $[b_0, b_1, \ldots, b_m]$ onafhankelijk $\Leftrightarrow$ rang $[\beta_{ij}] = m + 1$.

Bewijs : De volgende beweringen zijn achtereenvolgens equivalent :
$[b_0, b_1, \ldots, b_m]$ onafhankelijk, $[b_0 \to b_i]_{i=1,\ldots m}$ onafhankelijk ,
$[\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - \beta_{oj})(a_0 \to a_j)]_{i=1,\ldots,m}$ onafhankelijk ,
rang $[\beta_{ij} - \beta_{oj}]_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n} = m$.

Nu is, daar $\sum_{j=0}^n \beta_{ij} = 1$ voor alle $i = 0, 1, \ldots, m$

$$\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01} & \cdots\beta_{0n}\\ \beta_{10} & \beta_{11} & \cdots\beta_{1n}\\ \vdots & \vdots & \\ \beta_{m0} & \beta_{m1} & \cdots\beta_{mn}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & \beta_{01} & \cdots & \beta_{0n}\\ 1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & \beta_{01} \cdots \beta_{0n}\\ 0 & \beta_{11}-\beta_{01}\cdots\beta_{1n}-\beta_{0n}\\ \vdots & \\ 0 & \beta_{m1}-\beta_{01}\cdots\beta_{mn}-\beta_{0n}\end{bmatrix}$$

zodat

$$\text{rang}[\beta_{ij} - \beta_{oj}]_{i=1,\dots,m;j=1,\dots n} = m \Leftrightarrow \text{rang}[\beta_{ij}]_{i=0,\dots,m;j=0,\dots,n+1} = m+1$$

1.271. Opmerking: Als $n=m$ is het criterium : $\det [\beta_{ij}] \neq 0$.

1.272. Voorbeelden.

1.2721. De stelling van Menelaos : Neem Δabc met punten

$\ell := (\lambda + 1)^{-1}(\lambda b + c)$, $m := (\mu + 1)^{-1}(\mu c + a)$, $n := (\nu + 1)^{-1}(\nu a + b)$,

dan zijn ℓ, m, n collineair dan en slechts dan als $\lambda\mu\nu = -1$.

1.2722. De stelling van de Ceva:

In 1.2721 zijn de lijnen $\langle a,\ell \rangle$, $\langle b,m \rangle$ en $\langle c,n \rangle$ concurrent dan en slechts dan als $\lambda\mu\nu = 1$.

1.273. Zij $[c_0,c_1,\dots,c_m]$ onafhankelijk, en zij $b_0,b_1,\dots,b_\ell \in \langle c_0,c_1,\dots,c_m \rangle$.
Als $[b_0,b_1,\dots,b_\ell]$ onafhankelijk is, dan is er een deelverzameling $\{d_0,d_1,\dots,d_{m-\ell}\}$ van $\{ c_0,c_1,\dots,c_m\}$ zó dat

$\langle b_0,b_1,\dots,b_\ell, d_1,d_2,\dots,d_{m-\ell} \rangle = \langle c_0,c_1,\dots,c_m \rangle$. □

1.28. Stelling. Als S en T affiene deelruimten zijn van R dan is precies één van de volgende uitspraken waar:

1) $S \subset T$ of $T \subset S$; en dan is $S_* \subset T_*$ respectievelijk $T_* \subset S_*$;

2) $S \cap T = \emptyset$;

3) $S \cap T$ is een affiene deeltuimte met $S_* \cap T_*$ als verbonden lineaire ruimte en $0 \leq \dim(S \cap T) < \min \{\dim S, \dim T\}$.

Bewijs. Als $S \subset T$ en $S = a + S_*$, dan is $\forall_{\underline{v} \in S_*}\ a + \underline{v} \in a + T_*$ zodat $\forall_{\underline{v} \in S_*}\ \underline{v} \in T_*$ dus $S_* \subset T_*$.

Als bovendien $S \neq T$ dan is blijkbaar ook $S_* \neq T_*$ en $\dim S_* < \dim T_*$.
Stel nu dat $S \cap T \neq \emptyset$; dan is (1.223)) $S \cap T$ een affiene deelruimte, $\dim S \cap T$ < 0 en volgens het voorgaande ook $\dim S \cap T \leq \min \{\dim S, \dim T\}$;

als bovendien niet geldt $S \subset T$ of $T \subset S$ dan is dim $S \cap T <$ min {dim S,dim T}. □

1.281. <u>Definitie</u>. Affiene deelruimten S en T heten *evenwijdig* indien $S_* \subset T_*$ of $T_* \subset S_*$. Men schrijft dan $S \parallel T$.

1.282. Als dim $R = n$, dan is voor $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ evenwijdigheid een equivalentierelatie voor alle deelruimten S van R met dim $S = k$.

1.283. Als $S \subset T$ dan is $S \parallel T$ (1.28).

1.29. Als S_i $(i = 0,1,\ldots,m)$ affiene deelruimten van R zijn dan is hun opspansel $\langle\!\langle S_0,S_1,\ldots,S_m \rangle\!\rangle := \langle\!\langle \cup_{i=0}^{m} S_i \rangle\!\rangle$ (zie 1.25).

1.291. <u>Stelling.</u> Voor iedere $A \subset R$ is $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle$ een affiene deelruimte.

<u>Bewijs</u>. Beschouw de verzameling $\mathcal{L}$ van alle maximale onafhankelijke eindige deelverzamelingen B van A; Als $B,C \in \mathcal{L}$ is (volgens 1.345) $\#B = \#C$, noem dit aantal $m+1$; blijkbaar is $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle = \cup_{B\in\mathcal{L}} \langle\!\langle B \rangle\!\rangle$.
Zij nu $d_i \in \langle\!\langle A \rangle\!\rangle$ $(i = 0,\ldots,p)$; voor iedere i is er een $B_i = \{b_{i0},b_{i1},\ldots,b_{im}\}$ zó dat $d_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_{ij}b_{ij}$ met $\sum_j \beta_{ij} = 1$. Dan is, met $\sum_{i=0}^{p} \delta_i = 1$,

$$\sum_i \delta_i d_i = \sum_i \delta_i \sum_j \beta_{ij}b_{ij} = \sum_{ij} \delta_i\beta_{ij}b_{ij} \text{ met}$$

$$\sum_{ij} \delta_i\beta_{ij} = \sum_i \delta_i \sum_j \beta_{ij} = 1, \text{ en } \sum_i \delta_i d_i \in \langle\!\langle A \rangle\!\rangle .$$ □

1.292. <u>Stelling.</u> $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle$ is de kleinste van alle affiene deelruimten die A omvatten. □

1.293 <u>Stelling</u>. Voor affiene deelruimten S en T van R geldt:

i) als $S \cap T \neq \emptyset$ dan dim $\langle\!\langle S,T \rangle\!\rangle$ = dim S + dim T − dim $S \cap T$
ii) als $S \cap T = \emptyset$ dan dim $\langle\!\langle S,T \rangle\!\rangle$ = dim S + dim T + 1 − dim $S_* \cap T_*$

Het eerste geval volgt direct uit de overeenkomstige stelling voor vectorruimten (WIS 20, § 3.3.5–3.3.7)

$$\dim S_* + T_* = \dim S_* + \dim T_* - \dim S_* \cap T_* .$$

Zij, in het tweede geval, $S = a + S_*$, $T = b + T_*$; neem $s = a + \underline{v} \in S$, $t = b + \underline{w} \in T$, $\lambda + \mu = 1$; dan $\lambda s + \mu t = \lambda a + \mu b + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w} = a + \mu(a \to b) + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ zodat dim $\langle\!\langle S,T \rangle\!\rangle$ = dim $\langle a \to b, S_*, T_* \rangle$ = dim $\langle a \to b, S_* + T_* \rangle$. We moeten laten zien dat $a \to b \notin V + W$; ware dit zo dan was $b = a + \underline{v} + \underline{w}$, $b - \underline{v} = a + \underline{w} \in S \cap T$ tegenspraak. Dus $a \to b \notin V + W$ en dim $\langle a \to b, V + W \rangle = 1 + \dim(V + W)$. □

1.3. *Affiene afbeeldingen*

1.31. Zij R een affiene ruimte.

Definitie. Voor iedere $\underline{u} \in R_*$ is een afbeelding $\tau_{\underline{u}} : R \to R$ gedefinieerd:

$$\tau_{\underline{u}}(a) := a + \underline{u} .$$

$\tau_{\underline{u}}$ heet een *translatie* van R.

1.311. Stelling.

1) $\tau_{\underline{u}}$ is een bijectie, voor iedere affiene deelruimte S van R is $\tau_{\underline{u}}(S) = S + \underline{u}$ een affiene deelruimte, $\tau_{\underline{u}}(S) \parallel S$ en $\dim \tau_{\underline{u}}(S) = \dim S$;
2) als $S \parallel T$ dan $\tau_{\underline{u}}(S) \parallel \tau_{\underline{u}}(T)$;
3) $\tau_{\underline{u}}^{\leftarrow} = \tau_{-\underline{u}}$, $\tau_{\underline{u}} \bullet \tau_{\underline{v}} = \tau_{\underline{u}+\underline{v}} = \tau_{\underline{v}} \bullet \tau_{\underline{u}}$.

1.32. Stel dat R en S affiene ruimten zijn.

Definitie. Een afbeelding $\alpha: R \to S$ heet *affien* indien voor alle $a_0, a_1, \ldots, a_m \in R$ en alle $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ met $\sum_i \lambda_i = 1$ geldt

$$\alpha(\textstyle\sum_i \lambda_i a_i) = \sum_i \lambda_i \alpha(a_i) .$$

1.321. Een translatie is affien; in het platte vlak zijn bijvoorbeeld gelijkvormigheidstransformaties affien; als men in een vectorruimte U de vectoren als punten opvat, dan zijn alle lineaire afbeeldingen affien. Parallelprojectie is affien. Centrale projectie is niet affien.

1.322. Stelling. Als $: R \to S$ affien is, en als T een affiene deelruimte van R is dan is $\alpha(T)$ een affiene deelruimte van S.

1.323. Stelling. Zij $\alpha : R \to S$ affien. Dan geldt voor alle $a, b \in R$ en $\underline{u} \in R_*$:

$$\alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u}) = \alpha(b) \to \alpha(b + \underline{u})$$

Bewijs. Schrijf $b + \underline{u} = (-1)a + (a + \underline{u}) + b$ dan is

$\alpha(b + \underline{u}) = (-1)\, \alpha(a) + \alpha(a + \underline{u}) + \alpha(b)$ zodat

$\alpha(b) \to \alpha(b + \underline{u}) = (-1)(\alpha(b) \to \alpha(a)) + (\alpha(b) \to \alpha(a + \underline{u})) =$

$= \alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u})$. □

1.324. Definitie. Als $\alpha: R \to S$ affien is dan wordt $\alpha_* : R_* \to S_*$ gedefinieerd door

$$\alpha_*(\underline{u}) := \alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u})$$

met een willekeurige $a \in R$.

1.325. Stelling. $\alpha_* : R_* \to S_*$ is een lineaire afbeelding.

Bewijs.

1) $\alpha_*(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u} + \underline{v}) =$

$= \alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u}) + \alpha(a + \underline{u}) \to \alpha(a + \underline{u} + \underline{v}) =$

$= \alpha_*(\underline{u}) + \alpha_*(\underline{v})$.

2) Uit

$$a + \lambda\underline{u} = \lambda(a + \underline{u}) + (1 - \lambda)a$$

volgt

$$\alpha(a + \lambda\underline{u}) = \lambda\alpha(a + \underline{u}) + (1 - \lambda)\alpha(a) =$$
$$= \alpha(a) + \lambda(\alpha(a) \to \alpha(a + \underline{u})) + (1 - \lambda)(\alpha(a) \to \alpha(a))$$

zodat

$$\alpha_*(\lambda\underline{u}) = \lambda\alpha_*(u) \quad .$$ □

α_* heet de *met α verbonden lineaire afbeelding.*

1.3251. Lemma : $\tau_* = I$ dan en slechts dan als τ een translatie is.

1.326. Stelling : Als : $R \to S$ affien is, en Q, S zijn affiene deelruimten van R met $Q \parallel S$, dan is $\alpha(Q) \parallel \alpha(S)$.

1.327. Zij dim $R = n$

Stelling. Een affiene afbeelding α: $R \to S$ wordt bepaald door ieder der volgende gegevens:

i) de beelden $\alpha(a_i)$ van $n + 1$ onafhankelijke punten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$;

ii) α_* en het beeld $\alpha(a)$ van één punt $a \in R$.

Bewijs.

i) Als $x \in R$ is $x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i a_i$ met (1.266) eenduidig bepaalde $\xi_0, \xi_i, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ en $\sum_{i=0}^{n} \xi_i = 1$. Dus $\alpha(x)$ volgt uit $\alpha(x) = \sum_i \xi_i \alpha(a_i)$.

ii) Nu is $\alpha(x) = \alpha(a) + \alpha_*(a \to x)$. □

1.328. Stelling. De affiene α: $R \to S$ is dan en slechts dan

i) injectief als α_* injectief is

ii) bijectief als α_* injectief is en dim R = dim S.

Bewijs.

i) volgt uit de defiitie.

ii) als α, α_* injectief zijn dan is dim R = dim $U \le$ dim V = dim S.

Als nu α niet surjectief is, dan is er een $b \in S\backslash\alpha(R)$, zodat $\forall_{a\in R}\forall_{\underline{u}\in U}\ \alpha(a) + \alpha_*(\underline{u}) \neq b$, of ook $\forall_{a\in R}\forall_{\underline{u}\in U}\ \alpha(a) \to b \neq \alpha_*(\underline{u})$ of α_* is niet surjectief, en dim $S >$ dim R; en omgekeerd. □

1.3281. Stelling. Als $\alpha: R \to S$ affien en bijectief is, dan is $\overset{\leftarrow}{\alpha}: S \to R$ affien $(\overset{\leftarrow}{\alpha})_* = \overset{\leftarrow}{\alpha_*}$.

1.329. Stelling. Als $\alpha: R \to S$ en $\beta: S \to T$ affien zijn dan is $\beta \circ \alpha: R \to T$ affien en $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$

1.33. Veronderstel nu dat $\alpha : R \to R$; dan is $\alpha_*: R_* \to R_*$.

1.331. Stelling. Zij $\alpha: R \to R$ affien. Bij iedere $a \in R$ is een $\underline{w}_a \in U$ zó dat

$$\forall_{x\in R}\ \alpha(x) = a + \underline{w}_a + \alpha_*(a \to x) .$$

Bewijs. Neem $\underline{w}_a = a \to \alpha(a)$ □

$\underline{w}_a$ heet de *verplaatsing* van a bij de afbeelding α .

1.332. Definitie. Als $\alpha: R \to R$ affien en bijectief is, heet α een *affiniteit* van R.

Een $d \in R$ heet *dekpunt* van de affiniteit α indien $\alpha(d) = d$.
Een affiene deelruimte F van R heet *invariant* indien $\alpha(F) \subset F$. (Een dekpunt is een bijzonder geval van een invariante deelruimte.)

1.3321. Voorbeeld. Zij $\alpha: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ een affiniteit en ℓ een rechte in $\mathbb{A}^2$ met $\forall_{x\in\ell}\ \alpha(x) = x$. Bepaal .

1.333. Stelling. Als $\alpha: R \to R$ een affiniteit is, en als 1 niet eigenwaarde is van α_* dan heeft α precies één dekpunt.

Bewijs. Een vergelijking $\alpha(d) = d$ kan, voor iedere $a \in R$, geschreven worden als

$$a + \underline{w}_a + \alpha_*(a \to d) = d ,$$

equivalent met

$$\underline{w}_a + \alpha_*(a \to d) = a \to d ,$$
$$(\alpha_* - I)(a \to d) = -\underline{w}_a .$$

Als 1 niet eigenwaarde van α_* is dan is $\alpha_* - I$ regulier en dan heeft deze vergelijking precies één oplossing. Deze oplossing hangt niet van de keuze van a af: Uit

$$(\alpha_* - I)(b \to \tilde{d}) = -\underline{w}_b$$

volgt door aftrekken van de vorige vergelijking

$$(\alpha_* - I)(a \to b + \tilde{d} \to d) = \underline{w}_b - \underline{w}_a ,$$

$$(\alpha_* - I)(\tilde{d} \to d) = \underline{w}_b - \underline{w}_a - (\alpha_* - I)(a \to b)$$
$$= \underline{w}_b - \underline{w}_a + a \to b - a \to b - \underline{w}_b + \underline{w}_a = \underline{0}$$

zodat $d = \tilde{d}$. □

De stelling geldt ook als α niet bijectief is, maar in deze algemeenheid hebben we het resultaat niet nodig.

1.334. Voorbeelden.

1) Neem op de x-as: $x' = 2x + 1$.
Het vaste punt is -1.
Neem $y' = y + 2$. Er is geen vast punt.

2) Neem in het xoy-vlak

$$x' = 1 + \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad y' = 2 + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y .$$

Het vaste punt vindt men uit

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

en het is $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

3) Neem, in het xoy-vlak,

$$x' = 1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \quad y' = 2 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y .$$

De matrix $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ heeft 1 als eigenwaarde, en de afbeelding heeft geen dekpunt.

4) Neem, in het xoy-vlak,

$$x' = 1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \quad y' = -3 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y .$$

De matrix $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ is dezelfde als in voorbeeld 3; de afbeelding heeft een rechte van dekpunten, $\underline{x} = (5,0) + \xi(3,1)$

1.335. Stelling. Als van de affiniteit $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ de verbonden operator α_* als eigenwaarde 1 heeft, dan is er óf geen dekpunt, óf een affiene deelruimte $\mathcal{D}$ van dekpunten met $\dim \mathcal{D} \geq 1$.

Bewijs. De vergelijking $(\alpha_* - I)(a \to d) = -\underline{w}_a$ heeft dan en slechts dan oplossingen als $\underline{w}_a \in (\alpha_* - I)(\mathcal{R}_*)$; indien dit zo is dan volgt uit $\dim (\alpha_* - I)^{\leftarrow}(\underline{0}) = n - \text{rang}(\alpha_* - I)$ dat voor $\mathcal{D} = a + (\alpha_* - I)^{\leftarrow}(-\underline{w}_a)$ geldt $\dim \mathcal{D} \geq 1$. Dat $\mathcal{D}$ niet van de keuze van a afhangt blijkt op dezelfde maniet als in 1.333. □

1.336. Voor een bij $\alpha : R \to R$ invariante deelruimte F van R geldt (op grond van de bijectieve eigenschap van α) dat $\alpha(F) = F$; dus ook $\alpha_*(F_*) = F_*$. Dus is F alleen dan invariant bij α als F_* invariant is bij α_*; deze voorwaarde is evenwel niet voldoende: bij een translatie $\tau_{\underline{u}}$ is $(\tau_u)_* = I$ zodat $\tau_{\underline{u}}(F_*) = F_*$, maar als $\underline{u} \notin F_*$ is $\tau_{\underline{u}}(F) \neq F$.

1.337. Stelling. Voor invariante deelruimten F en G van R bij de affiniteit α zijn $F \cap G$ en $\ll F,G \gg$ ook invariant bij α.
Iedere invariante deelruimte is begrepen in een maximale invariante deelruimte.

1.338. Stelling. Iedere affiniteit α kan geschreven worden als $\alpha = \tau \circ \delta$, waarin τ een translatie is en δ een affiniteit met dekpunt en $\delta_* = \alpha_*$; δ heeft dan en slechts dan één dekpunt als α één dekpunt heeft.

Bewijs. Neem $a \in R$, $\underline{t} = \alpha(a) \to a$, $\tau(x) := x + \underline{t}$, en $\delta := \tau \circ \alpha$; dan is $\delta(a) = \alpha(a) + \underline{t} = a$, zodat a dekpunt van δ is.

$$\delta_*(a \to x) = \delta(a) \to \delta(x) = a \to (\alpha(x) + \underline{t}) = (a - \underline{t}) \to \alpha(x) =$$
$$= \alpha(a) \to \alpha(x) = \alpha_*(a \to x) ,$$

dat wil zeggen $\alpha_* = \delta_*$ en δ_* heeft eigenwaarde 1 alleen als α_* dat heeft. □

Voorbeeld. Neem voor α , zie 1.334 voorbeeld 3,

$$x' = 1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \quad y' = 2 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y .$$

α heeft geen dekpunt. Neem $a = (1,1)$ zodat $\alpha(a) = (\frac{12}{5},\frac{9}{5})$, $\underline{t} = (-\frac{7}{5},-\frac{4}{5})$ en δ:

$$x' = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \quad y' = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y .$$

δ heeft een rechte van dekpunten,

$$\mu(1,1) + (1 - \mu)(4,2) .$$

1.4. *Euclidische ruimten.*

Als R affien is, en als in R_* een inproduct is gedefinieerd (WIS 20, § 5.13, WIS 30, § 1.4.1 e.v.) dan heet R een *euclidische ruimte*; met dim $R = n$ schrijven we $R = \mathbb{E}^n$. Het gehele metrische apparaat, met lengte, afstand, hoek, loodrechte stand en topologie, is nu ook in $\mathbb{E}^n$ beschikbaar: de afstand van $a,b \in \mathbb{E}^n$ is $d(a,b) = |a \to b| = \sqrt{(a \to b, a \to b)}$. Bij een affiene deelruimte $a + V$ kan men V in R_* schrijven met behulp van vergelijkingen; als $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_p$ een basis is voor het orthoplement $V^\perp$ van V dan is

$$V = \{x \in R_* | \forall_{j=1,\ldots,p} (\underline{x},\underline{u}_j) = 0\} .$$

(WIS 20, § 3.8.1), zodat

$$a + V = \{x \in R \mid \forall_{j=1,\ldots,p}\ (a \to x, \underline{u}_j) = 0\}$$

In het bijzonder is voor een hypervlak $a + H$ door a loodrecht op $\underline{n}$

$$a + H = \{x \in R \mid (a \to x, \underline{n}) = 0\} .$$

De *vergelijking* van dit hypervlak is dan $(a \to x, \underline{n}) = 0$.

1.411. Voorbeeld. *Lemma van Crofton (1).*

Als in een tetraeder abcd geldt $[\angle a = \angle d] \wedge [\angle b = \angle c = \frac{\pi}{2}]$ dan is $|a \to b| = |c \to d|$.

Voorbeeld. *Lemma van Crofton (2).*

Als $\langle\!\langle p,q \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle p',q' \rangle\!\rangle$ elkaar kruisen met orthogonale transversaal $\langle\!\langle m,n \rangle\!\rangle$, $m = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$, $n \in \langle\!\langle p',q' \rangle\!\rangle$ en zo dat p' en q' de projecties zijn van p en q op $\langle\!\langle p',q' \rangle\!\rangle$; dan is $n = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}q'$, en $\langle\!\langle p,p' \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle q,q' \rangle\!\rangle$ maken gelijke hoeken met $\langle\!\langle m,n \rangle\!\rangle$.

1.413. *De orthogonale transversaal van twee rechten.*

Zij $\ell := a + \langle\underline{u}\rangle$, $m := b + \langle\underline{v}\rangle$ met $\underline{u} \neq \underline{0}$ en $\underline{v} \notin \langle\underline{u}\rangle$, dan is de orthogonale transversaal $n = a + \xi\underline{u} + \langle\underline{u} \times \underline{v}\rangle$; bewijs dat
$\xi = |\underline{u} \times \underline{v}|^{-2} \det[a \to b, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}]$

1.42. Definitie. Een afbeelding $\varphi: R \to S$ heet *isometrisch*, of een *isometrie* als $\forall_{a,b\in R}\ d(\varphi(a),\varphi(b)) = d(a,b)$. Als $R = S$ dan heet φ een *isometrie van R*.

1.421. Stelling. Zij $\varphi: R \to S$ een isometrie; dan geldt: φ is een injectief en continu en $\dim S \geq \dim R$.

1.422. Stelling. Zij $\psi: U \to V$ een isometrie van inwendige productruimten U en V en zij $\psi(\underline{0}) = \underline{0}$. Dan is ψ lineair en orthogonaal.

Bewijs. Voor een orthonormale basis $[\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n]$ in U is dankzij $\psi(\underline{0}) = \underline{0}$ het stelsel $[\psi(\underline{e}_1),\ldots,\psi(\underline{e}_n)]$ orthonormaal in V en aan te vullen tot een orthonormale basis $[\psi(\underline{e}_1),\ldots,\psi(\underline{e}_n),\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_p]$ van V .

Voor $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x},\underline{e}_i)\underline{e}_i$ geldt

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\psi(\underline{x}), \psi(\underline{e}_i))\psi(\underline{e}_i) + \sum_{i=1}^{p} (\psi(\underline{x}),\underline{f}_i)\underline{f}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\underline{x},\underline{e}_i)\psi(\underline{e}_i) + \sum_{i=1}^{p} (\psi(\underline{x}),\underline{f}_i)\underline{f}_i$$

en

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{x},\underline{e}_i)^2 = |x|^2 = |\psi(\underline{x})|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x,\underline{e}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\psi(x),\underline{f}_i)^2 .$$

Dus is $\forall_{i=1,\ldots,p}\ (\psi(\underline{x}),\underline{f}_i) = 0.$

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x},\underline{e}_i)\psi(\underline{e}_i) ,$$

$$\psi(\underline{x} + \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x} + \underline{y},\underline{e}_i)\psi(\underline{e}_i) = \psi(\underline{x}) + \psi(\underline{y})$$

en

$$\psi(\xi\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi\underline{x},\underline{e}_i)\psi(\underline{e}_i) = \xi\psi(\underline{x}) .$$

De orthogonaliteit van een isometrische lineaire afbeelding is in WIS 20 (p. 162) al bewezen. □

1.423. Stelling. Zij $\varphi : R \to S$ een isometrie; dan is φ affien.

Bewijs. Neem $a \in R$, $\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n\}$ als orthonormale basis in U en definieer $\varphi_*: U \to V$, $\varphi_*(\underline{u}) = \varphi(a) \to \varphi(a + \underline{u})$. φ_* voldoet nu aan de voorwaarden in 1.5.22, en is bijgevolg lineair.

Als $\sum_i \lambda_i = 1$ dan is

$$\varphi(\textstyle\sum_i \lambda_i a_i) = \varphi(a + \sum_i \lambda_i(a \to a_i)) = \varphi(a) + \varphi_*(\sum_i \lambda_i(a \to a_i)) =$$

$$= \varphi(a) + \textstyle\sum_i \lambda_i\varphi_*(a \to a_i) = \varphi(a) + \sum_i \lambda_i(\varphi(a) \to \varphi(a_i)) = \sum_i \lambda_i\varphi(a_i).$$ □

1.43. Isometrieën van $\mathbb{E}^2$

Er zijn géén dekpunten, er is er één, of er is een lijn van dekpunten (als niet de identieke afbeelding is bedoeld). Dit volgt uit 1.333 en 1.335. Alleen de identieke afbeelding I heeft $\mathbb{E}^2$ als vlak van dekpunten. Als er drie onafhankelijke dekpunten zijn, dan is $\alpha = I$.

1.431. Stelling. Een isometrie α van $\mathbb{E}^2$ met één dekpunt d is een draaiing om d over een hoek $\theta \in (0,2\pi)$; als $\theta = \pi$ is iedere rechte door d invariant, als $\theta \neq \pi$ dan zijn er geen invariante rechten.

1.432. Stelling. Een isometrie α met meer dan één dekpunt (anders dan de identieke afbeelding) heeft één rechte D van dekpunten; α is een spiegeling in D; invariant zijn alle rechten loodrecht op D.

Bewijs. Blijkbaar is 1 eigenwaarde van α_* (1.333 en 1.335) en als d,d' dekpunten zijn dan is $\mathcal{D} := \langle\!\langle d,d' \rangle\!\rangle$ een rechte van dekpunten. Als 1 een dubbele eigenwaarde is dan is $\alpha = I$, uitgesloten.
Dus is er een eigenwaarde -1 met eigenvector $\underline{v}$, en, met $\underline{u} := d \to d'$, geldt $(\underline{u},\underline{v}) = 0$. Dan is $\alpha(d + \xi\underline{u} + \eta\underline{v}) = d + \xi\underline{u} - \eta\underline{v}$; α is een spiegeling ten opzichte van $\mathcal{D}$; alle rechten loodrecht op $\mathcal{D}$ zijn invariant; als $\mathcal{E} = \langle\!\langle a,b \rangle\!\rangle$ invariant is dan is $a \to b$ een eigenvector van α_* (zie 1.336), dus $b = a + \underline{u}$ en $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ of $b = a + \underline{v}$ en $\mathcal{E}$ loodrecht op $\mathcal{D}$. □

1.433. Stelling. Als de isometrie α van $\mathbb{E}^2$ geen dekpunten heeft dan is één van beide waar:

1) α is een translatie, $\alpha_* = I$; als $\alpha = \tau_{\underline{u}}$ dan zijn alle lijnen $\parallel \langle\underline{u}\rangle$ invariant, andere niet.
2) α heeft één invariante rechte, $\mathcal{E}$; er is één $\underline{u} \in \mathcal{E}_*$ zodat $\alpha = \tau_{\underline{u}} \circ \delta$; δ is een spiegeling in $\mathcal{E}$ met $\delta_*(\underline{u}) = \underline{u}$.

Bewijs: Ook nu is 1 eigenwaarde van α_*; indien dubbel dan $\alpha_* = I$ en $\alpha(x) = a + \underline{w}_a + a \to x = x + \underline{w}_a$, a is de translatie met verplaatsing $\underline{w}_a$ en invariante rechten $\parallel \langle\underline{w}_a\rangle$.
Stel dus dat 1 en -1 eigenwaarden zijn met eigenvectoren $\underline{u}$ respectievelijk $\underline{v}$; zij $a \in \mathbb{E}^2$, $\underline{w} := a \to \alpha(a)$.
Neem $\delta := \tau_{-\underline{w}} \circ \alpha$, dan is $\delta(a) = a$ en δ is, volgens 1.338 en 1.431 een spiegeling met dekrechte $\mathcal{D} = a + \langle\underline{u}\rangle$.
Dan is $\mathcal{E} := a + \frac{1}{2}\underline{w} + \langle\underline{u}\rangle$ invariant onder α : zij $\underline{w} =: \lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$, dan

$$\alpha(a + \tfrac{1}{2}\underline{w} + \xi\underline{u}) = \tau_{\underline{w}} \circ \delta(a + \tfrac{1}{2}\underline{w} + \xi\underline{u}) = \tau_{\underline{w}}(a + \tfrac{1}{2}\lambda\underline{u} - \tfrac{1}{2}\mu\underline{v} + \xi\underline{u}) =$$

$$= a + \tfrac{1}{2}\underline{w} + (\xi + \lambda)\,\underline{u} \in \mathcal{E}.$$

In het bijzonder is $\alpha|\mathcal{E}$ een translatie met vector $\lambda\underline{u}$.
We kiezen nu a handig, op $\mathcal{E}$, dan is $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, $\underline{w} = \lambda\underline{u}$ en

$$\alpha(x) = a + \delta_*(a \to x) + \lambda\underline{u} ,$$

een schuifspiegeling ten opzichte van de rechte $\mathcal{E}$. Er zijn blijkbaar geen andere invariante rechten.

□

1.434. Overzicht.

		de dekpunten van α vormen een			
		$\emptyset$	punt d	lijn ℓ	vlak
multipliciteit van 1 als eigenwaarde van α (met eigenvector $\underline{u}$)	0		draaiing om d over $\theta \in (0,2\pi)$		-
	1	schuifspiegeling $\parallel \langle \underline{u} \rangle$		spiegeling met ℓ als as, $\ell \parallel \langle \underline{u} \rangle$	-
	2	translatie			identiek

1.435. Stelling. Het product van twee (schuif)spiegelingen langs niet-evenwijdige assen is een draaiing. Het product van twee(schuif)spiegelingen langs evenwijdige assen is een translatie (als de schuifspiegelingen elkaars inverse zijn dan de identieke afbeelding).
Omgekeerd: Iedere draaiing is te schrijven als het product van twee spiegelingen met assen door het dekpunt.
Iedere translatie is te schrijven als het product van twee spiegelingen met evenwijdige assen. In beide gevallen kan men één der factoren (mits door het dekpunt respectievelijk loodrecht op de translatie) willekeurig kiezen.

1.436. D_θ stelt in $\mathbb{E}^2$ een draaiing over θ voor. $J := D_{\pi/2}$.
Dus $J^2 = -I$ en $J^{-1} = -J = J^T$. Merk op dat $D_\theta = I\cos\theta + J\sin\theta$.

1.437. Opgave. Maak de beweringen in 1.435 expliciet en bewijs ze.

1.438. Een isometrie α met det $\alpha_* = 1$ heet *verplaatsing*. Een verplaatsing α van $\mathbb{E}^2$ heeft 1 als eigenwaarde met multipliciteit 0 of 2. In het laatste geval is α een translatie, in het andere geval een draaiing. Een isometrie α van $\mathbb{E}^2$ is volledig bepaald als van twee gegeven punten a en b de beelden $\alpha(a)$ en $\alpha(b)$ bekend zijn; als $\underline{w}_a = \underline{w}_b$ dan is α een translatie; als $\underline{w}_a \neq \underline{w}_b$ dan is α een draaiing.
We bepalen nog het dekpunt d en de draaiingshoek φ als a, b, $\alpha(a)$ en $\alpha(b)$ gegeven zijn, $\underline{w}_a \neq \underline{w}_b$.

Lemma: $D_\varphi - I = 2\sin(\varphi/2)\, J\, D_{\varphi/2}$.

Uit $\alpha(a) \to \alpha(b) = D_\varphi(a \to b)$ volgt φ direct meetkundig.
Analytisch is

$$\alpha(b) = \alpha(a) + D_\varphi(a \to b), \quad D_\varphi(a \to b) = \alpha(a) \to \alpha(b), \text{ dus}$$

$$\cos\varphi = |a \to b|^{-2}\ (a \to b,\ \alpha(a) \to \alpha(b));$$

$$D_\varphi(a \to b) = (a + \underline{w}_a) \to (b + \underline{w}_b) = a \to b + \underline{w}_b - \underline{w}_a\ ,$$

$$(D_\varphi - I)(a \to b) = \underline{w}_b - \underline{w}_a,\quad 2\sin(\varphi/2)\ J\ D_{\varphi/2}(a \to b) = \underline{w}_b - \underline{w}_a\ ,$$

$$(\underline{w}_b - \underline{w}_a,\ J(a \to b)) = 2\sin(\varphi/2)(D_{\varphi/2}(a \to b),\ a \to b) = |a \to b|^2 \sin\varphi \text{ en}$$

$$\sin\varphi = |a \to b|^{-2}\ (\underline{w}_b - \underline{w}_a,\ J(a \to b))\ ;$$

hierdoor is φ bepaald. Voorts is

$$a + \underline{w}_a = \alpha(a) = \alpha(d + d \to a) = d + D_\varphi(d \to a),\ (D_\varphi - I)(d \to a) = \underline{w}_a,$$

$$d = a + (2\sin(\varphi/2))^{-1}\ J\ D_{-\varphi/2}\ \underline{w}_a =$$

$$= a + (2\sin(\varphi/2))^{-1}\ J(I\cos(\varphi/2) - J\sin(\varphi/2))\ \underline{w}_a =$$

$$= a + \tfrac{1}{2}\underline{w}_a + \tfrac{1}{2}(\cot(\varphi/2))\ J(\underline{w}_a),$$ in overeenstemming met de

bekende constructie.

1.44. Isometrieën van $\mathbb{E}^3$

Voor iedere affiniteit α en voor iedere translatie τ geldt, volgens 1.3251 en 1.329,

$$(\tau \circ \alpha)_* = \alpha_*\ .$$

In het bijzonder geldt dit voor de decompositie (1.338)

$$\alpha = \tau \circ \delta$$

waarin δ het dekpunt a heeft en τ de translatie met vector $\alpha(a) \to a$. Hieruit volgt dat weliswaar de decompositie $\tau \circ \delta$ met a varieert, maar niet de bijbehorende $\delta_* = \alpha_*$. Zo vallen de isometrieën van $\mathbb{E}^3$ uiteen in 2 soorten: *verplaatsingen*, met $\det \delta_* = 1$, en *omklappingen*, met $\det \delta_* = -1$

1.441. Stelling. Een verplaatsing α van $\mathbb{E}^3$ is volledig bepaald door de beelden $\alpha(a)$, $\alpha(b)$, $\alpha(c)$ van drie niet op een lijn gelegen gegeven punten a,b,c.

Bewijs. Met $\underline{h} := a \to b$ en $\underline{k} := a \to c$ voldoen a,b,c en $a + \underline{h} \times \underline{k}$ aan de voorwaarde van stelling 1.327, en

$$\alpha(a + \underline{h} \times \underline{k}) = \alpha(a) + \alpha_*(\underline{h} \times \underline{k}) = \alpha(a) + \alpha_*(\underline{h}) \times \alpha_*(k)\ . \qquad \square$$

1.442. Stelling. Als V een invariant vlak is van de verplaatsing α, en als $\alpha|V$ een translatie van V is, dan is α een translatie.

Bewijs. V_* is invariant voor α_*, bijgevolg is $\alpha_* = I$. $\square$

1.443. Stelling. Een verplaatsing is dan en slechts dan een translatie als $\alpha_* = I$.

Bewijs. Zie stelling 1.3251. □

1.444. Als de verplaatsing α geen translatie is, dan heeft α_*, een echte draaiing, twee invariante deelruimten, namelijk de (eendimensionale) *eigenruimte* $\langle \underline{e} \rangle$ bij de eigenwaarde 1, de draaiingsas, en het orthoplement $V_* = \langle \underline{e} \rangle^{\perp}$ hiervan (WIS 20, § 3.9.2). Volgens 1.336 moeten eventuele invariante deelruimten van $\mathbb{E}^3$ onder α dan gezocht worden onder de lijnen die met $\langle \underline{e} \rangle$, en onder de vlakken die met V_* evenwijdig zijn.
Neem nu een $a \in \mathbb{E}^3$, beschouw $\underline{w}_a$. We schrijven $\underline{w}_a = \varepsilon \underline{e} + \underline{f}$ met $\underline{f} \in V_*$. Voor een willekeurige vector $\underline{u}$ schrijven we $\xi \underline{e} + \eta \underline{v}$ met $\underline{v} \in V_*$. Dan is

$$\alpha(a + \underline{u}) = \alpha(a) + \alpha_*(\underline{u}) = a + \varepsilon \underline{e} + \underline{f} + \varepsilon \underline{e} + \eta \alpha_* \underline{v} =$$

$$= a + (\varepsilon + \xi)\underline{e} + (\underline{f} + \eta \alpha_* \underline{v}) .$$

Hieruit volgt dat de lijn $a + \langle \underline{e} \rangle$ overgaat in de lijn $a + \varepsilon \underline{e} + \underline{f} + \langle \underline{e} \rangle$ die ermee evenwijdig is (neem $\eta = 0$), en dat het vlak $a + V_*$ overgaat in $a + \varepsilon \underline{e} + V_*$, dat ermee evenwijdig is (neem $\xi = 0$).
Beschouw nu de afbeelding β: $\beta(x) := \alpha(x) - \varepsilon \underline{e}$, weer een isometrie, en met $\beta_* = \alpha_*$.

Nu is $\beta(a + V_*) = a + V_*$, zodat $\beta|(a + V_*)$ een isometrie van $a + V_*$ is; het is een verplaatsing maar geen translatie van $a + V_*$ (volgens 1.442); het is dus een draaiing van $a + V_*$, met een vast punt d; maar dan is $\alpha(d) = d + \varepsilon$ $\alpha(d + \langle \underline{e} \rangle) = d + \langle \underline{e} \rangle$ en $\alpha(d + \underline{u}) = d + \varepsilon \underline{e} + \alpha_*(\underline{u})$.

Definitie. Een verplaatsing α die bestaat uit een draaiing δ, gevolgd door een translatie τ langs de draaiingsas, heet een *schroeving*: $\alpha = \tau \circ \delta = \delta \circ$
We noteren $\alpha = \{a, \underline{t}, \theta\}$; hierin is $a + \underline{t}$ de draaiingsas, $\underline{t}$ de translatievector, θ de draaiingshoek, gezien in de richting van $\underline{t}$. Als α een echte draaiing is om $a + \underline{t}$ dan schrijven we $\alpha = \{a, 0\underline{t}, \theta\}$.

Stelling. (Mozzi 1763, Chasles 1830): Iedere verplaatsing α is een schroeving.

(Opmerking. Als $\alpha = \{a, \underline{t}, \theta\}$ dan kan men, met $\beta := \{a, 0\underline{t}, \theta\}$ en $\tau := \{a, \underline{t}, 0\}$, schrijven $\alpha = \tau \circ \beta = \beta \circ \tau$.)

Bewijs: (van Crofton, 1874).

Beschouw de punten a, b:= a + $\underline{w}_a$, c: = b + $\underline{w}_b$ en d:= c + $\underline{w}_c$; het is onmiddellijk duidelijk dat $|\underline{w}_a| = |\underline{w}_b| = |\underline{w}_c|$, dat $|\underline{w}_a + \underline{w}_b| = |\underline{w}_b + \underline{w}_c|$ en dat $\angle abc = \angle bcd$.
Zij L de orthogonale transversaal van de bissectrices dezer hoeken, met snijpunten f en g; de voetpunten van de loodlijnen uit a en d op L noemen we e en h. In vierhoek bcgf is $\angle cbf = \angle bcg$ en $\angle cgf = \angle bfg = \frac{\pi}{2}$; dan is (1.411) $|b \rightarrow f| = |c \rightarrow g|$.
Zij k het snijpunt van $\langle\!\langle b,f \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle a,c \rangle\!\rangle$ dan is $\langle\!\langle k,f \rangle\!\rangle$ de orthogonale transversaal van $\langle\!\langle a,c \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle e,h \rangle\!\rangle$, en $|a \rightarrow k| = |k \rightarrow c|$; dan is (1.412) ook $|a \rightarrow e| = |c \rightarrow g|$, $|e \rightarrow f| = |f \rightarrow g|$; evenzo $|b \rightarrow f| = |d \rightarrow h|$ en $|f \rightarrow g| = |g \rightarrow h|$ bovendien zijn de hoeken tussen $\langle\!\langle a,e \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle b,f \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle b,f \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle c,g \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle c,g \rangle\!\rangle$ en $\langle\!\langle d,h \rangle\!\rangle$ gelijk, zeg aan θ. Dus is α een schroeving met L als draaiingsas, θ als draaiingshoek en $f \rightarrow g$ als translatievector.
Als, in het bijzonder, f = g, dan is α een draaiing; als de bissectrices van $\angle abc$ en $\angle bcd$ evenwijdig zijn dat gaat de schroefas door a + $\frac{1}{2}\underline{w}_a$, b + $\frac{1}{2}\underline{w}_b$ en c + $\frac{1}{2}\underline{w}_c$, de draaiingshoek is π en de translatie $\frac{1}{2}(a \rightarrow c)$.
Als, tenslotte, a,b,c collineair zijn dan is $\langle\!\langle a,b,c \rangle\!\rangle$ een dekrechte. Neem dan een punt $\hat{a} \notin \langle\!\langle a,b \rangle\!\rangle$ en begin opnieuw; is nu weer $\langle\!\langle \hat{a},\hat{b},\hat{c} \rangle\!\rangle$ een rechte dan is α een translatie met vector $\underline{w}_a$. □

Opmerking. Als α vlak is (dat wil zeggen essentieel een verplaatsing van $\mathbb{E}^2$) dan levert deze constructie direct de verplaatsingspool en de draaiingshoek.

1.445. Definitie. Bij iedere lijn $\ell = a + \langle \underline{e} \rangle$ heet de draaiing $\lambda := \{a, 0\underline{e}, \pi\}$ een *lijnspiegeling* . Bij twee lijnspiegelingen $\lambda := \{a, 0\underline{e}, \pi\}$ en $\mu := \{b, 0\underline{f}, \pi\}$ is het product $\mu \circ \lambda$ uiteraard een schroeving. We kiezen a,b,$\underline{e}$ en $\underline{f}$ zó dat $|a \rightarrow b|$ minimaal is, $|\underline{e}| = |\underline{f}| = 1$, en, indien $\underline{e} \times \underline{f} \neq 0$ en $a \neq b$, geldt $\det|\underline{e}, \underline{f}, a \rightarrow b| > 0$.

Stelling. Als $\underline{e} \times \underline{f} = 0$ en $a \neq b$, dan is $\mu \circ \lambda$ de translatie $\{a, 2(a \rightarrow b), 0\}$.
Als $\underline{e} \times \underline{f} \neq \underline{0}$ en $a = b$, dan is $\mu \circ \lambda$ de draaiing $\{a, 0\acute{e} \times f, 2\arccos(\underline{e},\underline{f})\}$.
Als $\underline{e} \times \underline{f} \neq \underline{0}$ en $a \neq b$, dan is $\mu \circ \lambda$ de schroeving $\{a, 2(a \rightarrow b), 2\arccos(\underline{e},\underline{f})\}$.

Opmerking. $\lambda = \mu$ dan en slechts dan als a = b en $\underline{e} \times \underline{f} = \underline{0}$; in dit geval is $\lambda \circ \lambda = I$, anders gezegd $\lambda^{\leftarrow} = \lambda$.

Gevolg. Iedere schroeving α kan, op oneindig veel manieren, geschreven worden als product van twee lijnspiegelingen λ en μ; $\alpha = \mu \circ \lambda$. De assen van λ en μ staan loodrecht op de draaiingsas, hun afstand is de helft van de spoed hun hoek de helft van de draaiingshoek.

1.446. Stel dat $\alpha := \{a,\delta\underline{d},\varphi\}$ en $\beta := \{b,\varepsilon\underline{e},\psi\}$ schroevingen zijn, dat $(a \to b,\underline{d}) = 0$, $(a \to b,\underline{e}) = 0$ en $\rho := |a \to b| \neq 0$; verder dat $|\underline{d}| = |\underline{e}| = 1$ en dat $\det[\underline{d},\underline{e},a \to b] > 0$. Neem $\underline{f} := \rho^{-1}(a \to b)$, zodat $|\underline{f}| = 1$, en$[\det \underline{d},\underline{e},\underline{f}] > 0$. Als $\theta := \arccos(\underline{d},\underline{e})$ dan is, bij deze afspraken, $\det[\underline{d},\underline{e},\underline{f}] = \sin\theta$.
Zij $\gamma := \{a,0\underline{f},\pi\}$ de lijnspiegeling om $a + \langle\underline{f}\rangle$. Dan is $\alpha = \gamma \circ \lambda$ en $\beta = \mu \circ \gamma$ met nader te bepalen lijnspiegelingen λ en μ, en $\beta \circ \alpha = \mu \circ \gamma \circ \gamma \circ \lambda = \mu \circ \lambda$
Volgens het voorgaande is nu

$$\lambda = \{a - \tfrac{1}{2}\delta\underline{d},0(\underline{f}\cos\tfrac{\varphi}{2} + \underline{f}\times\underline{d}\sin\tfrac{\varphi}{2}),\pi\} ,$$

$$\mu = \{b + \tfrac{1}{2}\varepsilon\underline{e},0(\underline{f}\cos\tfrac{\psi}{2} - \underline{f}\times\underline{e}\sin\tfrac{\psi}{2}),\pi\} ,$$

en het product $\mu \circ \lambda$ van deze lijnspiegelingen bepaalt men als in 1.445.

1.45. <u>Formule van Euler.</u>
Een rotatie α_* in $\mathbb{R}^3$ met as $\langle\underline{d}\rangle$ over een hoek φ kan, indien $|\underline{d}| = 1$, volgens een bekende formule van Euler geschreven worden als

$$\alpha_*(u) = \underline{u}\cos\varphi + \underline{d}(\underline{u},\underline{d})(1 - \cos\varphi) + \underline{d}\times\underline{u}\sin\varphi$$

(vergelijk WIS 20, § 3.9.4).
Zij nu $\alpha = \{o,\delta\underline{d},\varphi\}$ een schroeving, en schrijf $\underline{u}_a := o \to a$. Dan is

$$\alpha(a) = \alpha(o) + \alpha_*\underline{u}_a = o + \delta\underline{d} + \alpha_*\underline{u}_a ,$$

$$\underline{w}_a := a \to \alpha(a) = \underline{d} + (\alpha_* - I)\underline{u}_a =$$

$$= \underline{d}\{\delta + (\underline{u}_a,\underline{d})(1 - \cos\varphi)\} - \underline{u}_a(1 - \cos\varphi) + \underline{d}\times\underline{u}_a\sin\varphi.$$

1.451. Gegeven drie verschillende punten $a,b,c \in \mathbb{E}^3$; $\underline{b} := c \to a$, $\underline{c} := a \to b$, en een verplaatsing $\alpha = \{\sigma,\delta\underline{d},\varphi\}$.

<u>Lemma</u>. $\det[\underline{w}_a,\underline{w}_b,\underline{w}_c] = 2\delta(1 - \cos\varphi)\det[\underline{d},\underline{b},\underline{c}]$.

<u>Bewijs</u>. Noem die determinant tijdelijk Δ,en zij

$$\underline{a} := b \to c, \text{ zodat } \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0} .$$

$$\Delta = \det[\delta\underline{d} + (\alpha_* - I)\underline{u}_a,\ \delta\underline{d} + (\alpha_* - I)\underline{u}_b,\ \delta\underline{d} + (\alpha_* - I)\underline{u}_c] =$$
$$= -\det[\delta\underline{d} + (\alpha_* - I)\underline{u}_a,\ (\alpha_* - I)\underline{c},\ (\alpha_* - I)\underline{b}] =$$
$$= -\det[\delta\underline{d},(\alpha_* - I)\underline{c},\ (\alpha_* - I)\underline{b}] =$$
$$= -\det[\delta\underline{d},\alpha_*\underline{c},\alpha_*\underline{b}] - \det[\delta d,\underline{c},\underline{b}] + \det[\delta\underline{d},\underline{c},\alpha_*\underline{b}] + \det[\delta\underline{d},\alpha_*\underline{c},\underline{b}] =$$
$$= \det[\delta\underline{d},\underline{b},2\underline{c}] - \det[\delta\underline{d},\underline{b},\alpha_*\underline{c} + \alpha_*^{-1}\underline{c}] =$$
$$= \det[\delta\underline{d},\underline{b},2\underline{c} - \alpha_*\underline{c} - \alpha_*^{-1}\underline{c}] .$$

Uit de formule van Euler blijkt

$$2\underline{c} - \alpha_* \underline{c} - \alpha_*^{-1} \underline{c} = 2(1 - \cos \varphi)\underline{c} - 2d(c,d)(1 - \cos \varphi) \ .$$

$$\Delta = 2\delta(1 - \cos \varphi)\det [\underline{d},\underline{b},\underline{c} - \underline{d}(\underline{c},\underline{d})] =$$

$$= 2\delta(1 - \cos \varphi)\det[\underline{d},\underline{b},\underline{c}] \ . \qquad \square$$

Conclusies:

i) Als $\delta = 0$ (als α een rotatie is) zijn $\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c$ afhankelijk. Ze behoren immers alle drie tot $\langle \underline{d} \rangle^{\perp}$.

ii) Als $\varphi = 0$ (als α een translatie is) zijn $\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c$ afhankelijk; ze zijn dan zelfs gelijk.

iii) Als α een echte schroeving is dan zijn $\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c$ dan en slechts dan afhankelijk als $\underline{d}$ evenwijdig is aan het vlak door a, b en c.

1.452. Gegeven zijn drie vectoren $\underline{u},\underline{v},\underline{w} \in \mathbb{R}^3$

Lemma. $\underline{u} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{u},\underline{v},\underline{w}$ collineair.

Bewijs. Uit $\underline{u} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{u} = \underline{0}$ volgt, door inwendig met $\underline{u}$ te vermenigvuldigen, $\det[\underline{u},\underline{v},\underline{w}] = 0$. Dus, bijvoorbeeld, $\underline{u} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$. Invullen geeft $\underline{0} = \mu\underline{w} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{w} + \lambda\underline{w} \times \underline{v} = (1 - \lambda - \mu)\underline{v} \times \underline{w}$. Nu is òf $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0}$, $\underline{v} = \nu\underline{w}$ en $\underline{u} = (\lambda\nu + \mu)\underline{w}$ òf $\lambda + \mu = 1$, $\underline{u} = (1 - \mu)\underline{v} + \mu\underline{w} = \underline{w} + \mu(\underline{w} - \underline{v})$.
Als, omgekeerd, $\underline{u} = \mu\underline{v} + (1 - \mu)\underline{w}$, volgt door berekening direct dat $\underline{u} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{u} = \underline{0}$. $\square$

Opmerking. Men kan dit ook meetkundig min of meer inzien.

1.453. Bepaling van de schroef uit drie gegeven verplaatsingen van drie gegeven punten.

Gegeven zijn $a,b,c,\underline{w}_a,\underline{w}_b,\underline{w}_c$.
Deze gegevens zijn uiteraard niet onafhankelijk; omdat α een isometrie is, is er de nodige en voldoende voorwaarde

$$|(a + \underline{w}_a) \rightarrow (b + \underline{w}_b)| = |a \rightarrow b|, \text{ cyclisch in } a,b,c.$$

equivalent met

$$\underline{c} + \underline{w}_b - \underline{w}_a = \underline{c} \quad \text{en cyclisch ,}$$

$$(2\underline{c} + \underline{w}_b - \underline{w}_a,\ \underline{w}_b - \underline{w}_a) = 0 \text{ en cyclisch.}$$

Dit is het discrete analogon van de later te bespreken equiprojectiviteit. Uit $\underline{w}_a = \underline{d}\{\delta + (\underline{u}_a,\underline{d})(1 - \cos\varphi)\} - \underline{u}_a(1 - \cos\varphi) + \underline{d} \times \underline{u}_a \sin\varphi$ volgt direct $(\underline{w}_a,\underline{d}) = \delta$, en evenzo $(\underline{w}_b,\underline{d}) = \delta$, zodat $(\underline{w}_a - \underline{w}_b,\underline{d}) = 0$ en evenzo $(\underline{w}_b - \underline{w}_c,\underline{d}) = 0$.

1.4531. 1[e] geval : We veronderstellen eerst dat $\det[\underline{w}_a,\underline{w}_b,\underline{w}_c] \neq 0$. Dan is (1.451) $\det[\underline{d},\underline{a},\underline{b}] \neq 0$ en (1.452) ook $\underline{w}_a \times \underline{w}_b + \underline{w}_b \times \underline{w}_c + \underline{w}_c \times \underline{w}_a \neq \underline{0}$. Zij $\underline{w}_\Delta := \underline{w}_a \times \underline{w}_b + \underline{w}_b \times \underline{w}_c + \underline{w}_c + \underline{w}_c \times \underline{w}_a$.

Blijkbaar is $\underline{d} = \underline{w}_\Delta/|\underline{w}_\Delta|$ en $\delta = (\underline{w}_a,\underline{w}_\Delta)/|\underline{w}_\Delta|$ zodat het translatiegedeelte van α bekend is:

$$\delta\underline{d} = \underline{w}_\Delta(\underline{w}_a,\underline{w}_\Delta)/(\underline{w}_\Delta,\underline{w}_\Delta) .$$

Merk op: $(\underline{w}_a,\underline{w}_\Delta) = (\underline{w}_b,\underline{w}_\Delta) = (\underline{w}_c,\underline{w}_\Delta) = \det[\underline{w}_a,\underline{w}_b,\underline{w}_c] =: \Delta$, zodat $\delta = \Delta/|\underline{w}_\Delta|$.
Uit 1.45 volgt nu

$$(\alpha_* - I)\underline{u}_b = \underline{w}_b - \delta d \wedge (\alpha_* - I)\underline{u}_c = \underline{w}_c - \delta d$$

waaruit door aftrekken ontstaat $(\alpha_* - I)\underline{a} = \underline{w}_c - \underline{w}_b$, en evenzo $(\alpha_* - I)\underline{b} = \underline{w}_a - \underline{w}_c$; bovendien $(\alpha_* - I)\underline{d} = \underline{0}$.
Aangezien $\underline{a},\underline{b},\underline{d}$ onafhankelijk zijn is hierdoor α_* bepaald. Daar de schroefas $O + \langle\underline{d}\rangle$ het vlak $\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$ snijdt kunnen we O in dit vlak kiezen. Dan volgt $\underline{u}_a$ uit

$$(\alpha_* - I)\underline{u}_a = \underline{w}_a - \delta\underline{d} \wedge \det[\underline{a},\underline{b},\underline{u}_a] = 0 .$$

Stel $\underline{u}_a = \xi\underline{a} + \eta\underline{b}$; dan is

$$\underline{w}_a - \delta\underline{d} = (\alpha_* - I)(\xi\underline{a} + \eta\underline{b}) = \xi(\underline{w}_c - \underline{w}_b) + \eta(\underline{w}_a - \underline{w}_c) =$$
$$= \eta\underline{w}_a - \xi\underline{w}_b + (\xi - \eta)\underline{w}_c ,$$

zodat

$$(\eta - 1)\underline{w}_a - \xi\underline{w}_b + (\xi - \eta)\underline{w}_c + \delta\underline{d} = \underline{0} .$$

Vermenigvuldig dit inwendig met $\underline{w}_b \times \underline{w}_c$ respectievelijk $\underline{w}_a \times \underline{w}_c$;

$$(\eta - 1)\Delta + \delta(\underline{d},\underline{w}_b \times \underline{w}_c) = 0 , \quad \xi\Delta + \delta(\underline{d},\underline{w}_a \times \underline{w}_c) = 0 ,$$

$$\eta = 1 - |w_\Delta|^{-2}\det[\underline{w}_\Delta,\underline{w}_b,\underline{w}_c], \quad \xi = -|w_\Delta|^{-2}\det[\underline{w}_\Delta,\underline{w}_a,\underline{w}_c] .$$

Hieruit volgt

$$O = a - \underline{u}_a = (1 - \eta)a + \xi b + (\eta - \xi)c =$$
$$= |w_\Delta|^{-2}\{a \det[\underline{w}_\Delta,\underline{w}_b,\underline{w}_c] + b \det[w_\Delta,\underline{w}_c,\underline{w}_a] + c \det[w_\Delta,\underline{w}_a,\underline{w}_b]\} .$$

Om, tenslotte, φ te bepalen merken we op

$$(\underline{w}_a - \underline{w}_b) \times \underline{d} = \underline{d} \times \alpha_*\underline{c} + \underline{c} \times \underline{d} ,$$

$$(\underline{w}_a - \underline{w}_b - \underline{c}) \times \underline{d} = \underline{d} \times \{\underline{c} \cos \varphi + \underline{d} \times \underline{c} \sin \varphi\} ,$$

$$\det[\underline{w}_a - \underline{w}_b, \underline{d}, \underline{c}] = \sin \varphi \det[\underline{d}, \underline{d} \times \underline{c}, \underline{c}] ,$$

en

$$\sin \varphi = |\underline{c} \times \underline{d}|^{-2} \det[\underline{w}_a - \underline{w}_b, \underline{c}, \underline{d}] ;$$

$$\det[\underline{w}_a - \underline{w}_b - \underline{c}, \underline{d}, \underline{d} \times \underline{c}] = \cos \varphi \det[\underline{d}, \underline{c}, \underline{d} \times \underline{c}] ,$$

$$\cos \varphi = |\underline{c} \times \underline{d}|^{-2} \det[\underline{w}_a - \underline{w}_b - \underline{c}, \underline{c} \times \underline{d}, \underline{d}] ;$$

hierdoor ligt φ ondubbelzinnig vast; we vinden

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\det[\underline{w}_a - \underline{w}_b, \underline{d}, \underline{c} \times \underline{d}]}{\det[\underline{w}_a - \underline{w}_b, \underline{c}, \underline{d}]} .$$

1.4532. 2e geval : $\det[\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c] = 0$,

$$\delta = 0 \wedge \varphi \neq 0 \wedge \det[\underline{d}, \underline{a}, \underline{b}] \neq 0 .$$

1.4533. 3e geval : $\det[\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c] = 0$,

$$\delta \neq 0 \wedge \varphi = 0 \wedge \det[\underline{d}, \underline{a}, \underline{b}] \neq 0$$

1.4534. 4e geval : $\det[\underline{w}_a, \underline{w}_b, \underline{w}_c] = 0$,

$$\delta \neq 0 \wedge \varphi \neq 0 \wedge \det[\underline{d}, \underline{a}, \underline{b}] = 0 .$$

1.4535. Overige gevallen.

1.5. *Differentieerbare functies.*

Differentieerbaarheid voor vectorfuncties $\underline{f} : \mathbb{E}_*^n \to \mathbb{E}_*^m$ is behandeld in WIS 30 (hoofdstuk 2, p.48 e.v.). We maken hier gebruik van de aldaar ingevoerde begrippen.

1.51. Differentieerbaarheid.

R en S zijn euclidische affiene ruimten.

1.511. Definitie.

Zij $A \subset R$, $f: A \to S$, $g: A \to S$.

f en g *raken elkaar in* a indien

i) $f(a) = g(a)$ en

ii) $\lim_{x \to a} | f(x) \to g(x) | / | a \to x | = 0.$

1.512. Stelling. Als f en g elkaar raken in a en als f in a continu is dan is g in a continu.

1.513. Stelling. Als a een inwendig punt van A is, is er onder de afbeelding $A \to S$ die $f : A \to S$ in a raken ten hoogste één affien.

1.514. Definitie. Als $A \in R$, $f: A \to S$ en $a \in A$ dan heet f *differentieerbaar* indien er een affiene afbeelding $\alpha: R \to S$ raakt aan f in a.
α_* heet de *afgeleide* van f in a. (Andere notaties voor α_* in dit verband: $Df(a)$, $[Df(a)]$ of, minder juist, Df.) f heet *differentieerbaar* (*op* A.) als ze voor alle a ($\in$ A) differentieerbaar is.
Als a een inwendig punt van A is, is de afgeleide uniek (1.513); we zullen dit in het vervolg stilzwijgend blijven veronderstellen.

Stelling. f is dan en slechts dan differentieerbaar in a, als

$$f(a + \underline{h}) = f(a) + [Df(a)]\underline{h} + |\underline{h}|\,\underline{\rho}(\underline{h})$$

met een $\underline{\rho}: R_* \to S_*$ waarvoor $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\rho}(\underline{h}) = \underline{0}$

1.515. Stelling. Als f in a differentieerbaar is, is f in a continu.

1.516. Voorbeelden.

1.5161. $R := \mathbb{E}^1$, $S := \mathbb{E}^3$, $f: \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^3$, f differentieerbaar.

$f(a + h) = f(a) + [Df(a)]h + |h|\rho(h)$.

$[Df(a)] : \mathbb{E}^1_* \to \mathbb{E}^3_*$ is een lineaire afbeelding, op te vatten als een vector de *raakvector* aan $f(\mathbb{E}^1)$ in $f(a)$.

1.5162. $R := \mathbb{E}^3$, $S := \mathbb{E}^1$, $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$, f differentieerbaar.

$f(a + \underline{h}) = f(a) + [Df(a)]\underline{h} + |\underline{h}|\rho(\underline{h})$.

$[Df(a)] : \mathbb{E}^3_* \to \mathbb{E}^1_*$ is een lineaire afbeelding, op te vatten als een vector, de *gradient* van f in a.

1.5163. $R := S := \mathbb{E}^3$, $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, f differentieerbaar.

$f(a + \underline{h}) = f(a) + [Df(a)]\underline{h} + |\underline{h}|\rho(\underline{h})$.

$[Df(a)] : \mathbb{E}^3_* \to \mathbb{E}^3_*$ is een lineaire afbeelding, de *functionaaloperator* van f in a.

$Jf(a) := \det [Df(a)]$ is de *Jacobiaan.*

1.517. Stelling. Zij $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, en $\{q, \underline{j}_1, \ldots, \underline{j}_m\}$ een orthonormaal coördinatenstelsel in $\mathbb{E}^m$ en $f(x) = q + \sum_{i=1}^m f_i(x)\underline{j}_i$. Dan geldt:
f is differentieerbaar in a dan en slechts dan als iedere $f_i : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ in a differentieerbaar is; en indien dit zo is dan is

$$[Df(a)]\underline{h} = \sum_{i=1}^{m} (\text{grad } f_i(a), \underline{h})\underline{j}_i$$

1.518. Rekenregels.

Bewijzen kan men vinden in boeken over "Advanced Calculus", bijvoorbeeld [LS] hfdst. 3, [F] hfdst. 4 of [P] hfdst.18,19.

1.5181. Regel van Leibniz: $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$.

1.5182. Zij $\underline{f}, \underline{g} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m_*$, dan is $(\underline{f},\underline{g}) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ en

$$D(\underline{f},\underline{g}) = (\underline{f},D\underline{g}) + (\underline{g},D\underline{f}).$$

1.5183. Zij $\underline{f},\underline{g} : = \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^3_*$, dan is $\underline{f} \times \underline{g}: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^3_*$ en

$$D\underline{f} \times \underline{g} = \Omega(\underline{f}).D\underline{g} - \Omega(\underline{g}).D\underline{f}.$$

Hierin is $\Omega(\underline{f})$ de lineaire afbeelding $\mathbb{E}^3_* \to \mathbb{E}^3_*$, gedefinieerd door

$$\Omega(\underline{f})\underline{x} = \underline{f} \times \underline{x}.$$

1.5184. Kettingregel. $D(f \circ g)(a) = [Df(g(a))][Dg(a)]$.

1.519. Partiele afgeleiden.

Zij $f : A \to \mathbb{E}^m$ met A open in $\mathbb{E}^n$. Zij $1 \leq k \leq n - 1$ en schrijf $\mathbb{E}^n_* = \mathbb{E}^k_* \times \mathbb{E}^{n-k}_*$; als $\underline{u} \in \mathbb{E}^n_*$ dan schrijven we $\underline{u} = (\underline{v},\underline{w})$ met $\underline{v} \in \mathbb{E}^k_*$ en $\underline{w} \in \mathbb{E}^{n-k}_*$.

Zij f differentieerbaar in a, zij $g : \mathbb{E}^k_* \to \mathbb{E}^m$ met $g(\underline{v}) := f(a + (\underline{v},\underline{0}))$.

1.5191. Stelling. g is differentieerbaar in $\underline{0}$.

Definitie. $[D_1 f(a)] := [Dg(\underline{0})]$ heet de *partiele afgeleide* van f naar $\underline{v}$ in a. Evenzo is er een partiele afgeleide $[D_2 f(a)]$ van f naar $\underline{w}$ in a. Als f differentieerbaar is bestaan de partiele afgeleiden (maar niet omgekeerd), en

$$f(a + (\underline{v},\underline{w})) = f(a) + [D_1 f(a)]\underline{v} + [D_2 f(a)]\underline{w} + |(\underline{v},\underline{w})|\rho(\underline{v},\underline{w})$$

Dus $\quad [Df(a)](\underline{v},\underline{w}) = [D_1 f(a)]\underline{v} + [D_2 f(a)]\underline{w}$.

1.5192. Inverse functie stelling. Zij A open in $\mathbb{E}^n$, $A \to \mathbb{E}^n$, f differentieerbaar op A, Df continu op A, $a \in A$ en $\det[Df(a)] \neq 0$.
Dan zijn er omgevingen U van a en V van $b := f(a)$ zódat $V = f(U)$, $f|U$ is een bijectie met inverse $g: V \to U$, g is differentieerbaar op V, Dg is continu op V en $[Dg(b)] = [Df(a)]^{-1}$.

1.5193 Impliciete functie stelling. Zij A open in $\mathbb{E}^{k+\ell}$, $\mathbb{E}^{k+\ell}_* = \mathbb{E}^k_* \times \mathbb{E}^\ell_*$. Zij $f : A \to \mathbb{E}^k$; f differentieerbaar op A en Df continu op A. Zij $f(a) = c$ en det $[D_1 f(a)] \neq 0$.

Dan is er een omgeving U van $\underline{0}$ in $\mathbb{E}^{\ell}_{*}$ en een injectie φ: $U \to \mathbb{E}^{k}_{*}$ zó dat

i) $\forall_{\underline{u}\in U}\ f(a + (\varphi(\underline{u}), \underline{u}) = c$.

ii) φ is differentieerbaar op U en

$$D\varphi(\underline{0}) = [D_1 f(a)]^{-1}[D_2 f(a)] .$$

iii) $D\varphi$ continu op U. □

Deze stelling drukt uit dat een kromme (oppervlak), gegeven door een (of enkele) vergelijking(en) ook geparametriseerd kan worden, althans locaal.

1.52. Omhullenden.

1.521. Een vlak stelsel vlakke krommen.

Beschouw een vergelijking van het type $f(x;t) = 0$ met een f: $\mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ die differentieerbaar is met Df continu. Men kan voor iedere vaste t de vergelijking opvatten als die van een kromme $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{E}^2 \mid f(x;t) = 0\}$. Onder een *omhullende* van dit stelsel verstaan we een kromme Γ met de volgende eigenschappen:

i) Er is een surjectie φ: $\mathbb{E}^1 \to \Gamma$ zó dat Γ_t in $\varphi(t)$ raakt aan Γ (locale voorwaarde),

ii) $\forall_t[\Gamma \cap \Gamma_t$ is discreet] (globale voorwaarde).

Vat men φ op als een parametervoorstelling voor Γ, dan volgt uit de locale voorwaarde dat voor φ geldt

$$\forall_t\ [f(\varphi(t);t) = 0 \wedge [D_1 f(\varphi(t);t)][D\varphi(t)] = 0\ ]$$

(nodige voorwaarde), equivalent met

$$\forall_t\ [f(\varphi(t);t) = 0 \wedge D_2 f(\varphi(t);t) = 0] .$$

φ voldoet aan de vergelijkingen

$$f(\varphi(t);t) = 0 \wedge D_2 f(\varphi(t);t) = 0$$

en is (1.5193) bepaald door x en y op te lossen als functies van t uit

$$f(x,y;t) = 0 \wedge D_2 f(x,y;t) = 0 .$$

Dit resultaat wordt gewoonlijk als volgt gepresenteerd:
Beschouw "het" snijpunt $S(t,\Delta t)$ van Γ_t en $\Gamma_{t+\Delta t}$:

$$f(x,y;t) = 0 \wedge f(x,y;t + \Delta t) = 0 .$$

$$f(x,y;t + \Delta t) \approx f(x,y;t) + [D_2 f(x,y;t)]\Delta t$$

zodat $S(t,\Delta t)$ ongeveer voldoet aan $D_2 f(x,y;t) = 0$, en des te beter naarmate Δt kleiner is; vandaar.

1.5211. Beschouw een afbeelding $f: \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}^2$; we kunnen dit opvatten als een stelsel kromme Γ_t: voor iedere $t \in \mathbb{E}^1$ is $f(s;t)$ een parametervoorstelling van Γ_t met parameter s. Volgens de locale voorwaarde moet voor $\Gamma = \varphi(\mathbb{R}_1)$ nu gelden

$$\forall_t\ [\exists_s\ \varphi(t) = f(s;t) \wedge \det[D\varphi(t), D_1 f(s,t)] = 0] .$$

Noem de functie die in de eerste eis wordt gepostuleerd $\psi: \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$; dan staat er

$$\forall_t\ [\varphi(t) = f(\psi(t),t) \wedge \det[D\varphi(t), D_1 f(\psi(t),t)] = 0] .$$

Nu volgt uit $\varphi(t) = f(\psi(t),t)$ dat

$$D\varphi(t) = [D_1 f(\psi(t),t)]\, D\psi(t) + D_2 f(\psi(t),t)$$

en daarom is ook

$$\det[D_1 f(\psi(t),t), D_2 f(\psi(t),t)] = 0$$

of

$$\det[Df(\psi(t),t)] = 0$$

zodat men ψ vindt door s op te lossen uit

$$\det[Df(s,t)] = 0 .$$

Men vindt dan $\varphi(t) = f(\psi(t),t)$ als parametervoorstelling van Γ.

1.5212. Voorbeeld. De lijnen ℓ_t die de x-as snijden in (t,0) en met de coördinaat-assen in $\mathbb{R}^2$ een oppervlakte $2a^2$ insluiten hebben als vergelijking

$$\ell_t: \frac{x}{t} \pm \frac{yt}{4a^2} = 1 ,$$

en naar t differentiëren geeft

$$-xt^{-2} \pm (4a^2)^{-1} y = 0$$

zodat

$$[4a^2 x \pm yt^2 = 4a^2 t] \wedge [t^2 y = \pm 4a^2 x].$$

Eliminatie van t geeft $xy = \pm a^2$, de vergelijking van twee hyperbolen.
De tweede manier: een parametervoorstelling voor ℓ_t is

$$\ell_t: \underline{x} = [t,0]^T + s[t,\ 4a^2 t^{-t}]^T ;$$

$$\underline{Dx}(s,t) = \begin{vmatrix} 1+s & t \\ \pm 4a^2st^{-2} & \pm 4a^2t^{-1} \end{vmatrix}$$

en de vergelijking wordt

$$\pm 4a^2(1+s)t^{-t} \quad \pm 4a^2st^{-1} = 0$$

$$s = -\tfrac{1}{2} \ .$$

De omhullende is

$$\underline{x}(t) = [\tfrac{1}{2}t, \pm 2a^2t^{-1}]$$

inderdaad een parametervoorstelling voor het al gevonden paar hyperbolen. □

1.5213. Voorbeeld. Op een cirkel met straal a bevindt zich een lichtbron in het punt p, waarvan de stralen in de cirkel worden gereflecteerd. Te bepalen de omhullende der gereflecteerde stralen.

1.5214. Voorbeeld. De vergelijking $(x^2 + (y-t)^2)^2 - a^2(x^2 - (y-t)^2) = 0$ (a constant en > 0) stelt voor iedere t een lemniscaat voor. De omhullende voldoet aan $(y - t)\{2(x^2 + (y-t)^2) + a^2\} = 0$, en eliminatie van t geeft $x^4 - a^2x^2 = 0$, dat is $x = 0 \vee x = a \vee x = -a$. De rechte $x = 0$ behoort niet tot de omhullende, maar is de verzameling der dubbelpunten.

1.5215. Voorbeeld. Beschouw, met $\delta := ad - bc \neq 0$, het stelsel rechten

$$\ell_t : \frac{x}{t} + \frac{y}{\frac{at+b}{ct+d}} = 1, \quad \text{of, met } \varphi(t) := \frac{at+b}{ct+d},$$

$$\varphi x + ty = t\varphi \ .$$

De omhullende is de kegelsnede met vergelijking

$$a^2x^2 + 2(ad - 2bc)xy + d^2y^2 + 2abx - 2bdy + b^2 = 0 \ .$$

1.5216. Voorbeeld. Een cirkel C rolt zonder glijden over een rechte lijn L. Zij D een diameter van C. Bepaal de omhullende van D.

1.5217. Voorbeeld. Een cirkel C rolt zonder glijden over een cirkel C_0. Zij D een diameter van C. Bepaal de omhullende van D.

1.522. Een stelsel ruimtekrommen.

Beschouw de vergelijkingen

$$f_1(x,y,z;t) = 0$$

$$f_2(x,y,z;t) = 0$$

Ze bepalen voor iedere t een ruimtekromme Γ_t, en die ruimtekrommen vormen in 't algemeen een oppervlak; een parametervoorstelling verkrijgt men door met

$$f(\underline{x};\underline{z}) := \begin{bmatrix} f_1(x,y;z,t) \\ f_2(x,y;z,t) \end{bmatrix},$$

als $D_2f(\underline{x};\underline{z}) \neq 0$, z en t uit $f(\underline{x};\underline{z}) = 0$ op te lossen.

1.523. Een stelsel oppervlakken met één parameter.

Beschouw de vergelijking $f(x,y,z;t) = 0$. Het bepaalt voor iedere t een oppervlak Σ_t.

Beschouw

$$\Sigma_t\colon f(x,y,z;t) = 0$$

$$\Sigma_{t+h}\colon f(x,y,z;t+h) = 0 \;.$$

De snijkromme voldoet aan beide vergelijkingen, dus ook aan

$$D_2f(x,y,z;t) + \rho(x,y,z;h) = 0$$

met een ρ waarvoor $\lim\limits_{h\to 0} \rho(h) = 0$

Voor $h \to 0$ gaat de snijkromme over in de zogenaamde *karakteristiek* Γ_t,

$$f(x,y,z;t) = 0 \wedge D_2f(x,y,z;t) = 0 \;;$$

en de omhullende van het stelsel Σ_t is de vereniging Σ van deze karakteristieken, met een vergelijking

$$g(x,y,z) = 0$$

die ontstaat door t uit de vorige vergelijkingen te elimineren.

Stelling. Σ en Σ_t raken elkaar in ieder punt van Γ_t.

Bewijs: Beschouw $\Sigma_t : f(\underline{x},t) = 0$

$\Sigma'_t : D_2f(\underline{x},t) = 0$,

zodat $\Gamma_t = \Sigma_t \cap \Sigma'_t$ aan beide vergelijkingen voldoet; zij $\underline{x} = \underline{\xi}_t(u)$ een parametervoorstelling vóor Γ_t; dit betekent $\forall_t \forall_u [f(\underline{\xi}_t(u),t) = 0 \wedge D_2f(\underline{\xi}_t(u),t) = 0$

Bepaal uit Σ'_t een $g_t(\underline{x})$ zó dat $\forall_{\underline{x}}\ D_2f(\underline{x},g_t(\underline{x})) = 0$,

dan is

$$\Sigma : F(\underline{x}) \equiv f(\underline{x},g(\underline{x})) = 0,$$

en in het bijzonder

$$\forall_{\underline{\xi}_t} \quad D_2 f(\underline{\xi}_t, g(\underline{\xi}_t)) = 0 .$$

Nu is

$$\operatorname{grad} F\big|_{\underline{\xi}_t} = [D_1 f(\underline{\xi}_t, g(\underline{\xi}_t))] + [D_2 f(\underline{\xi}_t, g(\underline{\xi}_t))][Dg(\underline{\xi}_t)] =$$

$$= [D_1 f(\underline{\xi}_t, g(\underline{\xi}_t))] = [D_1 f(\underline{\xi}_t, t)] = \operatorname{grad} f\big|_{\underline{\xi}_t, t},$$

daar $g(\underline{\xi}_t) = t$ per definitie. □

1.5231. Voorbeeld. Beschouw het stelsel bollen

$$B_t\colon x^2 + (y - t)^2 + z^2 = a^2 t^2 ,$$

met een vaste $a \in [0,1]$ dan is de afgeleide naar t

$$-2(y - t) = 2a^2 t$$

en de karakteristieken zijn de cirkels

$$\Gamma_t\colon x^2 + (y - t)^2 + z^2 = a^2 t^2 \wedge y = t(1 - a^2) .$$

Eliminatie van t uit deze twee vergelijkingen geeft achtereenvolgens

$$t = y(1 - a^2)^{-1}, \quad y - t = -ya^2(1 - a^2)^{-1} ,$$

$$x^2 + y^2 a^4 (1 - a^2)^{-2} + z^2 = a^2 y^2 (1 - a^2)^{-2},$$

en

$$B\colon x^2 - a^2 y^2 (1 - a^2)^{-1} + z^2 = 0$$

of ook

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1 - a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 0 ,$$

de omhullende kegel.

1.5232. Voorbeeld. Zij $\underline{m}(u)$ een kromme, $r(u)$ een functie van u en B_u de bol met middelpunt $\underline{m}(u)$ en straal $r(u)$:

$$B_u\colon (\underline{x} - \underline{m}(u), \underline{x} - \underline{m}(u)) = r^2(u) .$$

Differentieren naar u geeft

$$(\underline{x} - \underline{m}(u), -\dot{\underline{m}}(u)) = r(u)\dot{r}(u) .$$

de karakteristieken zijn cirkels en de omhullende heet een *kanaalvlak*.

1.5233. Voorbeeld. Het stelsel oppervlakken $f(x,y,z) = \alpha$ heeft geen omhullende.

1.524. Een stelsel oppervlakken met twee parameters

Beschouw de vergelijking $f(\underline{x};\underline{u}) = 0$ met $x \in \mathbb{R}^3$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$, voorstellend een vlak $\Sigma_{\underline{u}}$; als $\underline{u}$ in $\mathbb{R}^2$ varieert, ontstaat een stelsel vlakken $\{\Sigma_{\underline{u}}\}_{\underline{u}\in\mathbb{R}^2}$.
Onder de omhullende verstaan wij een oppervlak Σ met de volgende eigenschappen:

i) Er is een surjectie φ: $\mathbb{R}^2 \to \Sigma$ zó dat $\Sigma_{\underline{u}}$ in $\varphi(\underline{u})$ raakt aan Σ (locale voorwaarde).

ii) $\forall_{\underline{u}}$ [$\Sigma \cap \Sigma_{\underline{u}}$ bestaat uit krommen en geïsoleerde punten] (globale voorwaarde).

Als we φ opvatten als een parametervoorstelling voor Σ dan volgt uit de locale voorwaarde voor φ

$$\forall_{\underline{u}} \; [f(\varphi(\underline{u});\underline{u}) = 0 \wedge [D_1 f(\varphi(\underline{u});\underline{u})][D\varphi(\underline{u})] = \underline{0}]$$

als nodige voorwaarde, equivalent met

$$\forall_{\underline{u}} \; [f(\varphi(\underline{u});\underline{u}) = 0 \wedge D_2 f(\varphi(\underline{u});\underline{u}) = 0] \; .$$

Met andere woorden: men kan φ vinden door x,y en z op te lossen uit

$$f(x,y,z;u,v) = 0 \wedge \frac{\partial}{\partial u} f(x,y,z;u,v) = 0 \wedge \frac{\partial}{\partial v} f(x,y,z;u,v) = 0 \; .$$

1.53. Beweging in $\mathbb{E}^2$

1.531. De pool en de vaste polode

Bij een verplaatsing in $\mathbb{E}^2$ geldt (1.438) voor het dekpunt d en een willekeurig punt a

$$d = a + \tfrac{1}{2}\, \underline{w}_a + \tfrac{1}{2} \cot(\varphi/2)\; J\underline{w}_a, \text{ met } \underline{w}_a := a \to \alpha(a).$$

Stel dat $\underline{w}_a$ en φ van een parameter t afhangen met $\underline{w}_a(0) = \underline{0}, \varphi(0) = 0$.
Dan is $\tfrac{1}{2}\, \underline{w}_a \cot(\varphi/2) = \dfrac{\varphi/2}{\tan(\varphi/2)} \cdot \dfrac{\underline{w}_a}{\varphi}$ zodat

$$p := \lim_{t \to 0} d = a + (\varphi'(0))^{-1}\; J\underline{w}_a'(0) \; .$$

Hieruit volgt

$$\underline{w}_a'(0) = \varphi'(0)\; J(p \to a),$$

in overeenstemming met de bekende stelling over de instantane snelheidsverdeling (J. Bernoulli,1742).
De verzameling der punten p, een kromme, heet *vaste polode*.

Hoofdstuk II. *LIJNENMEETKUNDE*

2.1. *Projectieve ruimte.*

2.11. Zij $\{\sigma, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ een, niet noodzakelijk orthonormaal, coördinatenstelsel in $\mathbb{E}^3$. Bij iedere $x \in \mathbb{E}^3$ is er een eenduidig bepaald drietal $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, met $x = \sigma + \Sigma_i x_i \underline{e}_i$; zij vormen een kolomvector $\underline{x}$ = $=[x_1, x_2 x_3]^T \in \mathbb{R}^3$.

Definitie. De vier getallen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ van het viertal $[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]$ heten *homogene coördinaten* van x als $\xi_0^{-1}\xi_i = x_i (i = 1,2,3)$.
Een viertal homogene coördinaten vormt een kolomvector $\underline{\xi} := [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]^T \in \mathbb{R}^4$, waarbij $\xi_0 \neq 0$. Als x door $\underline{\xi}$ wordt voorgesteld, dan ook door $\rho\underline{\xi}$ met $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. In het bijzonder is $[1, x_1, x_2, x_3]^T$ een homogene voorstelling voor x.

2.111. Zij $a,b \in \mathbb{E}^3$, $a = o + \sum_i a_i \underline{e}_i$, $b = o + \sum_i b_i \underline{e}_i$, $a \neq b$.
De lijn $\ll a,b \gg$ is de verzameling $\{x = \lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Neem voor a en b homogene coördinaten, $\underline{\alpha}$ en $\underline{\beta}$.
Dan vindt men de homogene coördinaten $\underline{\xi}$ van x met

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_0^{-1}\beta_1 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_2 + (1-\lambda)\alpha_0^{-1}\beta_2 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_3 + (1-\lambda)\alpha_0^{-1}\beta_3 \end{bmatrix} = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \lambda\beta_0\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_0\beta_1 \\ \lambda\beta_0\alpha_2 + (1-\lambda)\alpha_0\beta_2 \\ \lambda\beta_0\alpha_3 + (1-\lambda)\alpha_0\beta_3 \end{bmatrix}$$

Omdat α_0 en β_0 willekeurig in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gekozen kunnen worden, kan men ook $\rho := \lambda\beta_0$ en $\sigma := (1-\lambda)\alpha_0$ willekeurig in $\mathbb{R}$ kiezen mits niet beide 0. Dan is

$$\alpha_0\beta_0 = \alpha_0\beta_0\{\lambda + (1-\lambda) = \rho\alpha_0 + \sigma\beta_0, \quad \text{en}$$

$$\underline{\xi} = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1} \begin{bmatrix} \rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 \\ \rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 \\ \rho\alpha_2 + \sigma\beta_2 \\ \rho\alpha_3 + \sigma\beta_3 \end{bmatrix} = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}\rho \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}\sigma \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix};$$

omdat $\underline{\xi}$ een homogene vector is, kunnen we $\alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}$ weglaten,

$$\underline{\xi} = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta} .$$

Dit is een *homogene paramatervoorstelling* voor de rechte $\ll a,b \gg$ door a en b.

2.112. Beschouw drie niet-collineaire punten $a,b,c \in \mathbb{E}^3$.

$\langle\!\langle a,b,c \rangle\!\rangle = \{x = \lambda a + \mu b + \nu c \mid \lambda + \mu + \nu = 1\}$.

voor x vinden we de homogene vector

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_1 + \mu\beta_0^{-1}\beta_1 + \nu\gamma_0^{-1}\gamma_1 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_2 + \mu\beta_0^{-1}\beta_2 + \nu\gamma_0^{-1}\gamma_2 \\ \lambda\alpha_0^{-1}\alpha_3 + \mu\beta_0^{-1}\beta_3 + \nu\gamma_0^{-1}\gamma_3 \end{bmatrix} = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}\gamma_0^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_0\gamma_0 \\ \lambda\alpha_1\beta_0\gamma_0 + \mu\alpha_0\beta_1\gamma_0 + \nu\alpha_0\beta_0\gamma_1 \\ \lambda\alpha_2\beta_0\gamma_0 + \mu\alpha_0\beta_2\gamma_0 + \nu\alpha_0\beta_0\gamma_2 \\ \lambda\alpha_3\beta_0\gamma_0 + \mu\alpha_0\beta_3\gamma_0 + \nu\alpha_0\beta_0\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Met $\rho := \lambda\beta_0\gamma_0$, $\sigma := \mu\alpha_0\lambda_0$, $\tau := \nu\alpha_0\beta_0$, ρ,σ,τ niet alle 0, is

$$\underline{\xi} = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}\gamma_0^{-1} \begin{bmatrix} \rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0 \\ \rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 + \tau\gamma_1 \\ \rho\alpha_2 + \sigma\beta_2 + \tau\gamma_2 \\ \rho\alpha_3 + \sigma\beta_3 + \tau\gamma_3 \end{bmatrix} \quad \text{en}$$

$$\langle\!\langle a,b,c \rangle\!\rangle \doteqdot \{\underline{\xi} = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta} + \tau\underline{\gamma} \mid |\rho| + |\sigma| + |\tau| \neq 0\},$$

een homogene parametervoorstelling van het vlak $\langle\!\langle a,b,c \rangle\!\rangle$.

2.113. Beschouw twee evenwijdige vlakken V en W in $\mathbb{E}^3$,

$$V : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f, \qquad (\underline{c},\underline{x}) = f\ ;$$

$$W : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = g, \qquad (\underline{c},\underline{x}) = g\ ;$$

met $f \neq g$ en $\underline{c} \neq \underline{0}$.

In homogene coördinaten komt er

$$V : \quad -f\xi_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0,$$

$$W : \quad -g\xi_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0.$$

Deze vergelijkingen hebben als oplossing

$$\underline{\xi} = \lambda[0,\ -c_2,\ c_1, 0]^T + \mu[0,\ -c_3,\ 0,\ c_1]^T,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\ ;$$

voor $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ zou er de parametervoorstelling van een lijn staan als $[0,\ -c_2.\ c_1,\ 0]^T$ en $[0,\ -c_3,\ 0,\ c_1]^T$ punten zouden voorstellen; helaas is dit niet zo.

2.114. Beschouw een vlak V en een lijn ℓ in $\mathbb{E}^3$, $\ell \parallel V$,

$$V : \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f \quad ; \underline{c} \neq \underline{0}.$$

$$\ell : \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u} \quad ; \quad (\underline{u},\underline{c}) = 0 \wedge (\underline{a},\underline{c}) \neq f \wedge \underline{u} \neq \underline{0}.$$

In homogene coördinaten wordt het

$$V : \quad -f\xi_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0$$

$$\ell : \quad \underline{\xi} = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta}, \text{ met, bijvoorbeeld,}$$

$$\underline{\alpha} = [1,\ a_1,\ a_2,\ a_3]^T\ ,\ \underline{\beta} = [1,\ a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3]^T$$

Door substitutie van ℓ in V komt er

$$-f\ (\rho + \sigma) + \Sigma_i\ c_i(\rho a_i + \sigma(a_i + u_i)) = 0,$$

waaruit volgt

$$\rho + \sigma = 0.$$

Er is dus een oplossing $\underline{\xi}_0 = \sigma(\underline{\beta} - \underline{\alpha}) = \sigma[\ 0, u_1, u_2, u_3]^T$;

helaas is dit geen punt.

2.115. Als m een lijn in V is, evenwijdig aan ℓ,

$$m : \underline{x} = \underline{b} + \lambda\underline{u}\ ; \quad (\underline{b},\underline{c}) = f\ ;$$

dan is een parametervoorstelling in homogene coördinaten

$$m : \xi = \rho[1, b_1, b_2, b_3]^T + \sigma[1, b_1 + u_1, b_2 + u_2, b_3 + u_3]^T$$

en ook deze bevat $\underline{\xi}_0$.

2.12. Definitie. Zij $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ en $\Sigma_i|\xi_i| \neq 0$; onder een *oneigenlijk punt* $\underline{\xi}$ van $\mathbb{E}^3$ verstaan we de viertallen $\rho[0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ met $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
De verzameling van zulke punten heet het *oneigenlijke vlak* V_∞ van $\mathbb{E}^3$. De (driedimensionale) projectieve ruimte is $\mathbb{P}^3 := \mathbb{E}^3 \cup V_\infty$.
De *oneigenlijke punten van een lijn (vlak)* zijn die oneigenlijke punten die voldoen aan een homogeen gemaakte vergelijking of parametervoorstelling van die lijn (dat vlak).

Stelling . Als $\ell \parallel V$ en niet $\ell \subset V$, dan hebben ze in $\mathbb{P}^3$ één oneigenlijk punt gemeen.
Als $\ell \parallel m$ en niet $\ell = m$, dan hebben ze in $\mathbb{P}^3$ één oneigenlijk punt gemeen.

Bewijs. 2.114 en 2.115. □

Stelling. Een rechte ℓ in $\mathbb{E}^3$ heeft precies één oneigenlijk punt.

Bewijs. Zij $\ell : \underline{\xi} = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta}$, met $\underline{\alpha}$ en $\underline{\beta}$ behorend bij a, b $\in \mathbb{E}^3$. Voor een oneigenlijk punt is $\xi_0 = 0$; dit is zo als $\rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 = 0$; het oneigenlijke punt is dus $\beta_0\underline{\alpha} - \alpha_0\underline{\beta}$. □

2.123. Definitie. Als $\underline{\alpha} \in V_\infty$, $\underline{\beta} \in V_\infty$ dan noemen we h : $\xi = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta}$ $(|\rho| + |\sigma| \neq 0$ een *oneigenlijke rechte.*

Stelling. Ieder vlak $V \in \mathbb{E}^3$ heeft precies één oneigenlijke rechte, h_V .

Bewijs. Zij a,b,c $\in \mathbb{E}^3$, V: $\underline{\xi} = \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta} + \tau\underline{\gamma}(|\rho| + |\sigma| + |\tau| \neq 0)$.
Voor de oneigenlijke punten is $\xi_0 = 0$, dus $\rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0 = 0$, $\tau =$
$= -\gamma_0^{-1}\alpha_0\rho - \gamma_0^{-1}\beta_0\sigma$. De oneigenlijke punten van V zijn dus $\underline{\xi} =$
$= \rho\underline{\alpha} + \sigma\underline{\beta} - \gamma_0^{-1}(\alpha_0\rho + \beta_0\sigma)\underline{\gamma} = \rho\gamma_0^{-1}(\gamma_0\underline{\alpha} - \alpha_0\underline{\gamma}) + \sigma\gamma_0^{-1}(\gamma_0\underline{\beta} - \beta_0\underline{\gamma})$.

Hierin is $\gamma_0\underline{\alpha} - \alpha_0\underline{\gamma}$ het oneigenlijke punt van $\langle a,c\rangle$, $\gamma\underline{\beta}_0 - \beta_0\underline{\gamma}$ dat van $\langle b,c\rangle$. Bovendien is $|\rho\gamma_0^{-1}| + |\sigma\gamma_0^{-1}| = |\gamma_0|^{-1}(|\rho| + |\sigma|) \neq 0$ (!),
Die uitdrukking is derhalve een parametervoorstelling van een oneigenlijke rechte, h_V . □

2.124. Stelling. Twee vlakken V, W in $\mathbb{E}^3$, met $V \parallel W$ en $V \neq W$, hebben dezelfde oneigenlijke rechte.

Bewijs. 2.113 en 2.123. □

2.125. Het oneigenlijke punt van ℓ : $x = a + \lambda\underline{u}$ in $\mathbb{E}^3$ $(\underline{u} \neq 0)$, is $[0,u_1,u_2,u_3]^T$.
De oneigenlijke rechte van V : $(\underline{c},\underline{x}) = f$ in $\mathbb{E}^3$ $(\underline{c} \neq \underline{0})$ is
$\{[0,x_1,x_2,x_3]^T | (\underline{c},\underline{x}) = 0\}$.

2.126. In $\mathbb{P}^3$ geldt nu :
Twee vlakken V en W, met $V \neq W$, hebben één rechte gemeen.
Twee lijnen ℓ en m, $\ell \neq m$ hebben één punt gemeen dan en slechts dan als ze in één vlak liggen. We spreken voortaan gemakshalve in zulke gevallen altijd van "snijden".

2.127 Als, in $\mathbb{E}^3$, $\{o,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3\}$ een orthonormaal coördinatenstelsel is, dan noemen we de afgeleide homogene coördinaten $[1,x_1,x_2,x_3]$ van x de *gewone* homogene coördinaten.

2.128 Als a,b,c,d punten in $\mathbb{P}^4$ zijn dan geldt a,b,c collineair $\Leftrightarrow$ rang $[a,b,c] < 3$.
a,b,c,d coplanair $\Leftrightarrow$ rang $[a,b,c,d] < 4$.

2.13. In $\mathbb{E}^3$ is de vergelijking van een vlak V

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f ,$$

in (al of niet gewone) homogene coördinaten wordt dit

$$- f\xi_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0 .$$

Men kan de coëfficiënten $-f$, c_1, c_2, c_3 met een willekeurige factor $\rho \neq 0$

vermenigvuldigen, en dan komt er weer een vergelijking van V. Men kan, met andere woorden, het vlak kenmerken door een homogeen viertal $[v_0,v_1,v_2,v_3]^T \neq [0,0,0,0]^T$. Analoog aan de situatie bij punten geldt:

Als $\underline{v} = [v_0,v_1,v_2,v_3]^T$ en $\underline{w} = [w_0,w_1,w_2,w_3]^T$ verschillende vlakken voorstellen dan stelt $\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ voor alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, niet beide 0, een vlak voor *door de snijlijn* van $\underline{v}$ en $\underline{w}$.

2.131 . Als $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_\ell$ vlakken voorstellen, kan men uit de rang van $[\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_\ell]$ aflezen wat hun doorsnede is. Aangezien de rang ≤ 4 is, beperke men zich tot $\ell \leq 4$. In het bijzonder : $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4$ hebben een lege doorsnede als rang $[\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4] = 4$, één punt gemeen als de rang = 3, een lijn gemeen als de rang = 2, vallen samen als de rang = 1. Dit volgt rechtstreeks uit de hoofdstelling der lineaire algebra (en de definitie van de punten in $\mathbb{P}^3$).

2.132. Definitie : Een *projectieve transformatie* π van $\mathbb{P}^3$ is een afbeelding $\pi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ met $\pi(\alpha\underline{\xi} + \beta\underline{\eta}) = \alpha\pi(\underline{\xi}) + \beta\pi(\underline{\eta})$. Het hoeft geen betoog dat bij een projectieve afbeelding een matrix behoort : $\pi(\underline{\xi}) = [\pi_{ij}]\underline{\xi} =: P\underline{\xi}$.
De afbeelding heet *regulier* als $\det[\pi_{ij}] \neq 0$.
Als π een reguliere projectieve transformatie is, is het beeld van een lijn weer een lijn, van een vlak weer een vlak. Meer expliciet: als $\underline{v}^T\underline{\xi} = 0$ de vergelijking is van een vlak, dan voldoet $P\underline{\xi}$ aan $v^TP^{-1}P\underline{\xi} = 0$, zodat het beeld van vlak $\underline{v}$ is $P^{-T}\underline{v}$.

2.133 . Veronderstel dat $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{P}^3$ met rang $[a_1,a_2,a_3,a_4] = 4$.
Dan kan ieder punt x van $\mathbb{P}^3$ geschreven worden als $x = \sum_{i=1}^{4} \xi_i a_i$; en, afgezien van een factor, is $\underline{\xi}$ eenduidig bepaald. Deze vector heet de *homogene coordinatenvector* van x ten opzichte van het *grondtetraeder* $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$. Uit

$$x = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4]\underline{\xi} =: A\underline{\xi}$$

volgt

$$\underline{\xi} = A^{-1}x .$$

2.14. Definitie. Voor vier punten h_i op $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ in $\mathbb{P}^3$ met $a \neq b$,

$$a := [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^T,\ b := [\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]^T \text{ en}$$

$$h_i = \lambda_i a + \mu_i \beta \ (i = 1,2,3,4) \text{ heet de uitdrukking}$$

$$DV(h_1,h_2,h_3,h_4) := \frac{\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1}{\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2} : \frac{\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1}{\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2}$$

de *dubbelverhouding*.

2.141. Stelling. D dubbelverhouding is onafhankelijk van de gekozen punten a en b op $\langle a,b \rangle$ en ook van hun voorstelling.

Bewijs. Neem $c := \varphi a + \psi b$ en $d := \chi a + \rho b$ op $\langle a,b \rangle$; opdat $c \neq d$ is nodig en voldoende dat de determinant van $M := \begin{bmatrix} \varphi & \chi \\ \chi & \rho \end{bmatrix}$ ongelijk aan 0 is; dit zo zijnde, dan is

$$h_i = [a,b]\begin{bmatrix}\lambda_i \\ \mu_i\end{bmatrix} \quad \text{en } [c,d] = [a,b]\, M^T \text{ zodat } h_i = [c,d]\, M^{-T}\begin{bmatrix}\lambda_i \\ \mu_i\end{bmatrix} =$$

$$(\det M^{-1})[c,d]\begin{bmatrix}\rho & -\chi \\ -\psi & \varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_i \\ \mu_i\end{bmatrix} =: [c,d]\begin{bmatrix}\hat\lambda_i \\ \hat\mu_i\end{bmatrix}$$

en dan blijkt

$$(\det M)(\hat\lambda_1\hat\mu_3 - \hat\lambda_3\hat\mu_1) = (\det M)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1), \text{ enzovoort.} \qquad \square$$

2.142. Stelling. De DV is invariant bij projectieve transformatie, en ook bij homogene coördinatentransformatie.

Bewijs. Dit volgt direct uit 2.133 en 2.134.

2,143. Als S en T vlakken zijn dan is $S + T$ een vlak door $S \cap T$. Neem $V_i := \lambda_i S + \mu_i T$ $(i = 1.2,3,4)$ en definieer

$$DV(V_1\ V_2\ V_3\ V_4) := \frac{\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1}{\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2} : \frac{\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1}{\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2}.$$

Zij $\langle a,b \rangle$ een willekeurige lijn, die $S \cap T$ niet snijdt; dan snijdt $\langle a,b \rangle$ de vlakken S, T, V_1, V_2, V_3, V_4, voor zover niet samenvallend, in verschillende punten, s, t, v_1, v_2, v_3, v_4. We veronderstellen dat $S \neq T$, dan $s \neq t$.

Stelling. $DV(V_1, V_2, V_3, V_4) = DV(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Bewijs. Het is, 2.141, geen beperking te veronderstellen dat $a = s$ en $b = t$. Zijn nu $\underline{\sigma}$, $\underline{\tau}$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ homogene voorstellingen voor S, T, a, b, dan geldt $\underline{\sigma}^T\underline{\alpha} = 0$, $\underline{\sigma}^T\underline{\beta} = 0$; bijgevolg geldt voor het snijpunt $v_i = \xi_i a + \eta_i b$ van $\langle a,b \rangle$ met $V_i = \lambda_i S + \mu_i T$

$$0 = [\lambda_i\underline{\sigma} + \mu_i\underline{\tau}]^T\,[\xi_i\underline{\alpha} + \eta_i\underline{\beta}] = \lambda_i\eta_i\underline{\sigma}^T\beta + \mu_i\xi_i\underline{\tau}^T\underline{\alpha},$$

$\xi_i = \lambda_i\underline{\sigma}^T\underline{\beta}$, $\eta_i = -\mu_i\underline{\tau}^T\underline{\alpha}$, en door een beroep op 2.141 blijkt dat $DV(v_1, v_2, v_3, v_4) = DV(V_1, V_2, V_3, V_4)$. $\square$

2.144. Bij het berekenen van de DV kan men het beste twee der punten in de overige uitdrukken:

$$DV(a,b,\lambda_1 a + \mu_1 b,\ \lambda_2 a + \mu_2 b) = \frac{1.\mu_1 - 0.\lambda_1}{0.\mu_1 - 1.\lambda_1} : \frac{1.\mu_2 - 0.\lambda_2}{0.\mu_2 - 1.\lambda_2} = \frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}.$$

2.145. Voorbeelden.

2.1451. Als DV(a,b,c,d) = -1 dan wordt het paar (a,b) *harmonisch gescheiden* door het paar (c,d). Bewijs dat dan DV(c,d,a,b) = -1, en ook DV(b,a,c,d) = DV(a,b,d,c) = -1 .
Als men uit p aan de kegelsnede K raaklijnen trekt met raakpunten r_1, r_2, dan heet $\langle\!\langle r_1, r_2 \rangle\!\rangle$ de *poollijn* van p ten opzichte van K. Een lijn L door P snijdt $\langle\!\langle r_1, r_2 \rangle\!\rangle$ en K in $s, k_1 k_2$. Dan is $DV(p,s,k_1,k_2) = -1$.

2.1452. Zij K_p de poollijn van p ten opzichte van K. Bewijs dat $a \in K_p \Rightarrow p \in K_a$.

2.1453. De poollijn K_r van een oneigenlijk punt r ten opzichte van K is een middellijn; de poollijn K_m van het middelpunt van K is de oneigenlijke rechte.

2.2. *Lijncoordinaten.*

2.21. Lijncoördinaten van een lijn door twee punten.

Zij $a \in \mathbb{P}^3$, $b \in \mathbb{P}^3$, en beschouw

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, \quad i,j = 0,1,2,3 .$$

2.211. De matrix $P := [p_{ij}]$ is scheefsymmetrisch.

2.212. $\det P = (p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12})^2 = 0$

2.213. Als $a' = \lambda a + \mu b$, $b' = \rho a + \sigma b$, $\lambda\sigma - \mu\rho \neq 0$ (d.w.z. $a' \neq b'$) dan is

$$p'_{ij} = (\lambda\sigma - \mu\rho)p_{ij}$$

en

$$P' = (\lambda\sigma - \mu\rho)P \neq 0.$$

2.214. De getallen $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ heten de *lijn-*, *Plücker-* of *Grassmann coördinaten* van de lijn door a en b.

2.215. De rijen (of kolommen) van P stellen in $\mathbb{P}^3$ de punten voor waar de rechte door a en b de respectieve zijden van het grondtetraeder snijdt.

2.216. Opdat de lijn P in het vlak α ligt, is nodig en voldoende dat $P\alpha = 0$.

2.22. Lijncoördinaten van een lijn door twee vlakken.

Als α en β vlakken in $\mathbb{P}^3$ zijn, beschouw dan

$$q_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}, \quad i,j = 0, 1,2,3 .$$

2.221. De matrix $Q := [q_{ij}]$ is scheefsymmetrisch.

2.222. $\det Q = (q_{01}q_{23} + q_{02}q_{31} + q_{03}q_{12})^2 = 0$.

2.223. Als $\alpha' = \lambda\alpha + \mu\beta$, $\beta' = \rho\alpha + \sigma\beta$, $\lambda\sigma - \mu\rho \neq 0$, dan is

$$q'_{ij} = (\lambda\sigma - \mu\rho)q_{ij}$$

en

$$Q' = (\lambda\sigma - \mu\rho)Q \neq 0.$$

2.224. $\dfrac{q_{01}}{p_{23}} = \dfrac{q_{02}}{p_{31}} = \dfrac{q_{03}}{p_{12}} = \dfrac{q_{12}}{p_{03}} = \dfrac{q_{31}}{p_{02}} = \dfrac{q_{23}}{p_{01}}$.

2.225. De rijen van Q stellen de vlakken voor die door één lijn gaan (namelijk die door α en β), en die door de respectieve hoekpunten van het grondtetraeder gaan.

2.226. Opdat een punt a op de lijn Q ligt, is nodig en voldoende dat $Qa = 0$.

2.23 Enige eigenschappen van scheefsymmetrische 4 × 4-matrices.

Zij $\mathbb{K}$ de verzameling der scheefsymmetrische 4 × 4-matrices en $\mathbb{L} := \{A \in \mathbb{K} \mid \det A = 0\}$.

2.231. Definitie.
Voor $A, B \in \mathbb{K}$ is

$$\Omega(A,B) := a_{01}b_{23} + a_{02}b_{31} + a_{03}b_{12} + a_{12}b_{03} + a_{31}b_{02} + a_{23}b_{01}$$

$$\omega(A) := \Omega(A,A)/2$$

$$\nu(A) := a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 .$$

2.232. De minor van a_{01} is $a_{23}\omega(A)$, enzovoort.
De minor van a_{00} is 0, enzovoort.

2.233. $\det A = \omega(A)^2$; als $\det A = 0$ dan is $\operatorname{rang} A \leq 2$; als $A \in \mathbb{L}$ en $A \neq 0$ dan is $\operatorname{rang} A = 2$.

2.234. Definitie. Voor iedere $A \in \mathbb{K}$ definieren we

$$A^{\mathsf{v}} := \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ -a_{23} & 0 & a_{03} & a_{20} \\ -a_{31} & -a_{03} & 0 & a_{01} \\ -a_{12} & -a_{20} & -a_{01} & 0 \end{bmatrix} .$$

2.235. Eigenschappen.

2.2351. Voor $A, B \in \mathbb{K}$ is $\Omega(A,B) = \Omega(B,A) = \Omega(A^{\gamma},B^{\gamma})$.

2.2352. Voor $A,B,C \in \mathbb{K}$ is $\Omega(\alpha A + \beta B,C) = \alpha\Omega(A,C) + \beta\Omega(B,C)$

2.2353. Voor $A,B \in \mathbb{K}$ is $\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha^2\omega(A) + \alpha\beta\Omega(A,B) + \beta^2\Omega(B)$.

2.2354. Voor $A,B \in \mathbb{K}$ is $ABA = \omega(A)B^{\gamma} - \Omega(A,B^{\gamma})A \in \mathbb{K}$.

2.2355. Voor $A \in \mathbb{R}^{(4\times 4)}$ en $B \in \mathbb{K}$ is $\omega(ABA^T) = (\det A)\ \omega(B)$.

2.2356. Voor $A,B \in \mathbb{K}$ is $\omega(ABA^T) = \omega(A)^2\ \omega(B)$.

2.2357. Voor $A,B \in \mathbb{K}$ is $(ABA)^{\gamma} = A^{\gamma}B^{\gamma}A^{\gamma}$.

2.2358. Voor $A,B \in \mathbb{K}$ is $AB^{\gamma} + BA^{\gamma} = -\Omega(A,B)I$.

2.2359. Voor $A \in \mathbb{K}$ is $\det(A-\lambda I) = \lambda^4 + \nu(A)\lambda^2 + \omega(A)^2$.

2.236. Voor $A,B \in \mathbb{L}$, $A \neq B$ en $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ is $\alpha A + \beta B \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \Omega(A,B) = 0$.

2.24. Incidentievoorwaarden; transformaties.

2.241. Een punt a en een vlak α zijn incident als $\alpha^T a = 0$.

2.242. Een lijn L en een punt a zijn incident als $L^{\gamma}a = 0$.

2.243. Een lijn L en een vlak α zijn incident als $L\alpha = 0$.

2.244. Twee lijnen L en M snijden elkaar (of: liggen in één vlak) als $\Omega(L,M) = 0$.

2.245. De lijn door de punten a en b is $ab^T - ba^T$.

2.246. De lijn in de vlakken α en β is $(\alpha\beta^T - \beta\alpha^T)^{\gamma}$.

2.247. Het snijpunt a en het gemeenschappelijke vlak α van twee lijnen L en M voldoen voor iedere b op L en voor iedere β door M (niet samenvallend met a respectievelijk α) aan

$$LM^{\gamma} = -(a\alpha^T)(b^T\beta)$$

zodat (2.2358) ook

$$ML^{\gamma} = (a\alpha^T)(b^T\beta) .$$

2.248. Stelling. (van von Staudt). Zij $O_1O_2O_3O_4$ een viervlak, L een rechte; de vlakken door L en O_i zijn α_i, de punten op L en in $O_jO_kO_\ell$ zijn a_i $(i = 1,2,3,4;\ j,k,\ell \neq i)$; dan is $DV(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = DV(a_1a_2a_3a_4)$.

Bewijs. De vlakken α door L voldoen aan $L\alpha = 0$, zodat α ligt in de door L^{γ} opgespannen nulruimte van L:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell_{23} \\ \ell_{31} \\ \ell_{12} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \ell_{23} \\ 0 \\ -\ell_{03} \\ \ell_{02} \end{bmatrix}$$

α_1 gaat door O_1: $\lambda_1 = 0$.

α_2 gaat door O_2: $\lambda_2 = \infty$.

α_3 gaat door O_3: $\lambda_3 = \ell_{31}/\ell_{03}$.

α_4 gaat door O_4: $\lambda_4 = -\ell_{12}/\ell_{02}$.

$$DV(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 \quad \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 \quad \lambda_4} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = -\frac{\ell_{31}\ell_{02}}{\ell_{03}\ell_{12}}$$

De punten a op L voldoen aan $L^{\gamma}a = 0$ zodat a ligt in de door L opgespannen nulruimte van L^{γ}:

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell_{01} \\ \ell_{02} \\ \ell_{03} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \ell_{01} \\ 0 \\ -\ell_{12} \\ -\ell_{13} \end{bmatrix}$$

a_1 ligt in $O_2O_3O_4$: $\mu_1 = 0$.

a_2 ligt in $O_3O_4O_1$: $\mu_2 = \infty$.

a_3 ligt in $O_4O_1O_2$: $\mu_3 = \ell_{02}/\ell_{12}$.

a_4 ligt in $O_1O_2O_3$: $\mu_4 = \ell_{03}/\ell_{13}$.

$$DV(a_1a_2a_3a_4) = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{\mu_3}{\mu_4} = \frac{\ell_{02}\ell_{13}}{\ell_{12}\ell_{03}} .$$ □

2.249. Stelling. Als $a' = Aa$ een coördinatentransformatie voorstelt (met $\det A \neq 0$), dan geldt voor de coördinaten α' en P' van een vlak α en een lijn P:

$$\alpha' = A^{-T}\alpha, \; P' = APA^{T}, \; P^{\gamma\prime} = A^{-T}P^{\gamma}A^{-1} .$$

Bewijs. Voor alle punten x van het vlak geldt $\alpha^{T}x = 0$, $\alpha^{T}A^{-1}x' = 0$, $(A^{-T}\alpha)^{T}x' = 0$, zodat $\alpha' = A^{-T}\alpha$.

Voor de lijncoördinaten $p'_{k\ell}$ geldt, met b en c op de lijn P,

$$p'_{k\ell} = \begin{vmatrix} b'_k & b'_\ell \\ c'_k & c'_\ell \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_i a_{ki}b_i & \sum_j a_{\ell j}b_j \\ \sum_i a_{ki}c_i & \sum_j a_{\ell j}c_j \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_i\sum_j a_{ki}a_{\ell j}p_{ij} = \sum_i\sum_j a_{ki}p_{ij}a^T_{j\ell}.$$

De laatste bewering volgt uit de vorigen. □

2.2491. Zij σ een projectieve transformatie die aan O_1,O_2,O_3,O_4 toevoegt de punten waarvan de coördinaten zijn verzameld in de kolommen van de matrix S. Dan zijn de coördinaten van $\sigma(x)$ voor alle x gelijk aan Sx, en voor een lijn L geldt $\sigma(L) = SLS^T$.

Stelling. Als y de coördinatenvector is van een punt ten opzichte van O_1,O_2,O_3,O_4, dan zijn de coördinaten ten opzichte van $\sigma O_1,\sigma O_2,\sigma O_3,\sigma O_4$ verzameld in $y' = S^{-1}y$. □

2.25. De raaklijn aan een kromme

Zij, met $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, een functie $x: \mathbb{I} \to \mathbb{P}^3$ gegeven; bij iedere $u \in \mathbb{I}$ is er een $x(u) \in \mathbb{P}^3$; de verzameling $x(\mathbb{I})$ is een kromme. Beschouw een $i \in \mathbb{I}$, $h \in \mathbb{R}$. Dan zijn $a := x(i)$ en $b := x(i+h)$ punten van de kromme, en $x(i+h) - x(i)$ is een punt van de lijn door a en b, bijgevolg ook $h^{-1}(x(i+h) - x(i))$ (mits $x(i+h) \neq x(i)$). Als $h \to 0$ nadert deze uitdrukking tot $x'(i)$, en dit is blijkbaar een punt op de raaklijn in $a = x(i)$ aan de kromme $x(\mathbb{I})$.

2.251. Stelling. In $\mathbb{P}^3$ gaat de raaklijn in $x(i)$ aan de kromme met parametervoorstelling x ook door het punt $x'(i)$. □

2.252. Zij nu $P: \mathbb{I} \to \mathbb{L}$, zodat bij iedere $u \subset \mathbb{I}$ een rechte $(p_{01}\cdot p_{02},p_{03},p_{23},p_{31},p_{12})$ is bepaald. We veronderstellen dat $\forall_u\ p_{01}(u) \neq 0$. Dan gaat P door de punten $a := (0,p_{01},p_{02},p_{03})$ en $b := (-p_{01},0,p_{12},p_{13})$ van $\mathbb{P}^3$.
Opdat het lijnenstelsel $P(u)$ een kromme als omhullende heeft, is nodig en voldoende dat er een functie $\lambda : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ bestaat zó dat $P(u)$ in $c(u) :=$ $= a(u) + \lambda(u)b(u)$ raakt aan de kromme $c(u)$.
Hiervoor is nodig en voldoende dat $c'(u)$ een punt van $P(u)$ is, dat wil zeggen dat er $\alpha,\beta : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ bestaan zó dat

$$c'(u) = \alpha(u)a(u) + \beta(u)b(u) .$$

Dit is hetzelfde als

$$a' + \lambda' b + \lambda b' = \alpha a + \beta b \ .$$

Vermenigvuldig dit met P^{γ}:

$$P^{\gamma}a' + \lambda P^{\gamma}b' = 0, \text{ of } P^{\gamma}(a' + \lambda b') = 0 \ .$$

Deze vergelijking moet oplosbaar zijn naar λ; dus moet $a' + \lambda b'$ een punt van P zijn, dus moeten P en $\tilde{P}$ (door a' en b') elkaar snijden.
Nu heeft $\tilde{P}$ met P' (als matrices gezien) de eerste twee rijen en de eerste twee kolommen gemeen; als P' een lijn voorstelt dan is zeker $P' = \tilde{P}$ (omdat dan ook het enig overgebleven element p'_{32} overeenstemt), en dan snijden P' en P elkaar; want uit

$$\omega(P) = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$$

volgt

$$\Omega(P',P) = p'_{01}p_{23} + p'_{02}p_{31} + p'_{03}p_{12} + p'_{23}p_{01} + p'_{31}p_{02} + p'_{12}p_{03} = 0 \ .$$

Is, omgekeerd, $\tilde{P}$ een rechte die P snijdt, en die, op p'_{32} na, alle elementen met P' gemeen heeft, dan geldt

$$\Omega(\tilde{P},P) = p'_{01}p_{23} + p'_{02}p_{31} + p'_{03}p_{12} + q_{23}p_{01} + p'_{31}p_{02} + p'_{12}p_{03} = 0 \ ,$$

en op grond van de vorige identiteit is dan (daar $p_{01} \neq 0$)

$$q_{23} + p'_{23}, \text{ en } \tilde{P} = P' \ .$$

Met andere woorden: $\tilde{P}$ en P snijden elkaar dan en slechts dan als P' een rechte voorstelt, $\omega(P') = 0$.

<u>Stelling</u>. Opdat het stelsel lijnen $P(u)$ een omhullende heeft is nodig en voldoende dat $\omega(P') = 0$.

Men kan gemakkelijk inzien dat $P \equiv P'$ alleen dan als $P = P_0 f(u)$ met een constante P_0 en een of andere functie f van u, zodat P dan, projectief gesproken, constant is. Als dus $\omega(P') = 0$ dan bepalen P' en P precies één punt $a' + \lambda b'$, en precies één λ (projectief gesproken). Voor deze $\lambda(u)$ is $c(u) = a(u) + \lambda b(u)$ de omhullende.

2.253. Voorbeeld. In $\mathbb{E}^3$:

$$P(u) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2u & 3u^2 \\ -1 & 0 & u^2 & 2u^3 \\ -2u & -u^2 & 0 & u^4 \\ -3u^2 & -2u^3 & -u^4 & 0 \end{vmatrix}, \quad P'(u) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 6u \\ 0 & 0 & 2u & 6u^2 \\ -2 & -2u & 0 & 4u^3 \\ -6u & -6u^2 & -4u^3 & 0 \end{vmatrix}$$

en $\omega(P) = \omega(P') = 0$.
$c(u) = a(u) + \lambda b(u)$ en λ voldoet aan

$$0 = P^{T}(a' + \lambda b') = \begin{vmatrix} 0 & u^4 & -2u^3 & u^2 \\ -u^4 & 0 & 3u^2 & -2u \\ -2u^3 & -3u^2 & 0 & 1 \\ -u^2 & 2u & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 + 2u\lambda \\ 6u + 6u^2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * \\ * \\ 6u + 6u^2\lambda \\ -2 - 2u\lambda \end{vmatrix}$$

zodat

$$\lambda = -u^{-1}, \quad c(u) \doteq [u^{-1}, 1, u, u^2]^T,$$

en in niet homogene coordinaten $\underline{x} = [u, u^2, u^3]^T$.

2.254. Het bepalen van $c(u)$ kan iets minder omslachtig door λ op te lossen uit de vergelijking

$$\text{rang}[a, b, a' + \lambda b'] = 2 .$$

In het bovenstaande voorbeeld is

$$[a, b, a' + \lambda b'] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2u & u^2 & 2(1 + \lambda u) \\ 3u^2 & 2u^3 & 6u(1 + \lambda u) \end{vmatrix}$$

en men ziet direct dat $\lambda = -u^{-1}$.

2.26. Het lineaire complex

In $\mathbb{P}^3$ heeft een lijn L de homogene coördinaten $\ell_{01}, \ell_{02}, \ell_{03}, \ell_{23}, \ell_{31}, \ell_{12}$, die aan de betrekking $\omega(L) = 0$ voldoen. Er zijn dus vier van deze coördinaten willekeurig te kiezen en men zegt dan ook dat er ∞^4 lijnen in $\mathbb{P}^3$ zijn. Stelsels rechten die men verkrijgt door aan ℓ_{ij} nog 1, 2 of 3 voorwaarden op te leggen heten achtereenvolgens *complex*, *congruentie*, *regulus* (of *regelschaar*) en bevatten achtereenvolgens $\infty^3, \infty^2, \infty^1$ rechten.

2.261. De raaklijnen aan een cylinder vormen een complex; ieder punt "snijdt op het complex twee lijnenbundels in"; ieder vlak "snijdt op het complex een kwadratisch vlak lijnenstelsel in".
De gemeenschappelijke raaklijnen van twee cylinders vormen een congruentie; ieder punt snijdt op de congruentie vier raaklijnen in; ieder vlak snijdt op de congruentie vier raaklijnen in. De congruentie heet daarom een (4,4)-congruentie.
De gemeenschappelijke snijlijnen van twee elkaar kruisende lijnen vormen een (1.1)-congruentie. De gemeenschappelijke snijlijnen van drie elkaar kruisende lijnen vormen een regulus; de puntverzameling waarvan de regulus de drager is, is een (tweedegraads-) oppervlak, namelijk een eenbladige hyperboloïde of een hyperbolische paraboloïde .

2.262. Zij $A \in \mathbb{K}$ en $L \in \mathbb{L}$; $A \neq 0$. Door de voorwaarde $\Omega(A,L) = 0$ wordt een complex bepaald,

$$C_A := \{L \in \mathbb{L} \mid \Omega(A,L) = 0\} .$$

De voorwaarde $\Omega(A,L) = 0$ is lineair in de coordinaten $\ell_{01},\ldots,\ell_{12}$, en we noemen zo'n complex een *lineair complex*; als $A \in \mathbb{L}$ dan heet het complex *speciaal*, als $A \in \mathbb{K}\setminus\mathbb{L}$ dan heet het complex *algemeen*. Een speciaal complex C_A is de verzameling van snijlijnen van A (2.4.4).

2.263. Stelling. De lijnen van C_A die door een gegeven punt a gaan liggen in het vlak $A^{\gamma}a$ (door a).

Bewijs. Allereerst ligt a in $A^{\gamma}a$ want $a^{T}A^{\gamma}a = 0$. Neem een punt $x \neq a$ op een lijn L door a en in C_A. Dan is $\ell_{ij} = a_i x_j - a_j x_i$ en

$$0 = \Omega(A,L) = \textstyle\sum_{i,j} a^{\gamma}_{ij}\ell_{ij} = \sum_{i,j} a^{\gamma}_{ij}(a_i x_j - a_i x_j) =$$

$$= \textstyle\sum_{i,j} a^{\gamma}_{ij}a_i x_j - \sum_{i,j} a^{\gamma}_{ji}a_i x_j - 2\sum_{i,j} a^{\gamma}_{ij}a_i x_j = 2a^{T}A^{\gamma}x ,$$

en $a^{T}A^{\gamma} = (-A^{\gamma}a)^{T}$.
x ligt dus in het vlak $A^{\gamma}a$, en bijgevolg ook L. □

2.264. Stelling. De lijnen van C_A die in een gegeven vlak α liggen, gaan door het punt $A\alpha$ (in α).

2.265. Uit $AA^{\gamma} = A^{\gamma}A = -\omega(A)E$ volgt dat, indien $A \notin \mathbb{L}$, dus als C_A algemeen is, het complex een bijectieve afbeelding van punten en vlakken in duceert. $A^{\gamma}a$ heet het poolvlak van a ten opzichte van C_A, $A\alpha$ heet de pool van α, en de toevoeging noemt men een *polariteit* of *correlatie*; omdat iedere pool in zijn poolvlak ligt, spreekt men hier in het bijzonder van een *nulpolariteit* of *nulcorrelatie*. Als $A \in \mathbb{L}$ is $A^{\gamma}A = 0$, hetgeen wil zeggen en ook meetkundig direct duidelijk is, dat de pool $A\alpha$ op A ligt en het poolvlak $A^{\gamma}\alpha$ door A gaat. De polariteit is nu ontaard, de toevoeging $a \to A^{\gamma}a$ is niet bijectief; voor alle $b \in A^{\gamma}a$ is $A^{\gamma}b = A^{\gamma}a$; vlakken niet door A zijn geen poolvlak, punten niet op A zijn geen pool.

2.266. <u>Bijzondere complexen.</u>

2.2661. Het fundamentaal complex $p_{01} + p_{23} = 0$.

$$A = A^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Het poolvlak van $a = (a_0,a_1,a_2,a_3)$ is (a_1,a_0,a_4,a_3).

De pool van $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ is $(\alpha_1,\alpha_0,\alpha_4,\alpha_3)$.

2.2662. Het fundamentaal complex $p_{01} - p_{23} = 0$.
De grondpunten hebben dezelfde poolvlakken als in het vorige geval; toch zijn de correlaties verschillend.

2.2663. Er zijn zes fundamentaal complexen (Klein,

2.267. <u>Poollijn.</u>

Zij $A \in \mathbb{K}$, C_A een complex, niet speciaal, Beschouw een rechte L door a en b. Voor een willekeurig punt $x = \lambda a + \mu b$ van L geldt

$$A^{\gamma}x = \lambda A^{\gamma}x + \mu A^{\gamma}b$$

zodat deze poolvlakken door de snijlijn M van $A^{\gamma}a$ en $A^{\gamma}b$ gaan. Dus $MA^{\gamma}a = 0$ en $MA^{\gamma}b = 0$. Beschouw A^{γ} als de matrix van een projectieve transformatie σ. Dan staat er dat de lijn M^{γ} door $\sigma(a)$ en $\sigma(b)$ gaat; dus gaat $\sigma^{\leftarrow}(M^{\gamma})$ door a en b, dus

$$\sigma^{\leftarrow}(M^{\gamma}) = L,\ M^{\gamma} = \sigma(L) = A^{\gamma}LA^{\gamma T} = A^{\gamma}LA^{\gamma}$$

$$M = AL^{\gamma}A = \omega(A)L - \Omega(A,L)A \quad (2.2354)$$

Men noemt M de poollijn van L; de poollijn van M is $AM^{\gamma}A = AA^{\gamma}LA^{\gamma}A = L$.

Als $L \in C_A$ dan is $\Omega(A,L) = 0$ en

$$M = AL^{\gamma}A = -(LA^{\gamma} + \Omega(A,L)I)A = -LA^{\gamma}A = \omega(A)L \;;$$

met andere woorden, de complexlijnen zijn hun eigen poollijn (en omgekeerd).

Stelling. Als L en zijn poollijn M niet samenvallen, is iedere lijn P, die L en M snijdt, een complexlijn.

Bewijs.

i) Meetkundig: het poolvlak van $L \cap P$ gaat door $L \cap P$ en door M; het poolvlak van $M \cap P$ gaat door $M \cap P$ en L; P is de snijlijn van beide, en dus poollijn van P; dus $P \in C_A$.

ii) Algebraisch: $\Omega(L,P) = 0$, $\Omega(M,P) = 0$ en $M = AL^{\gamma}A$; volgens 2.236 is $M = \omega(A)L - \Omega(A,L)A$, zodat

$$0 = \Omega(M,P) = \omega(A)\Omega(L,P) - \Omega(A,L)\Omega(A,P) = -\Omega(A,L)\Omega(A,P) \;;$$

omdat $\Omega(A,L) \neq 0$ volgt hieruit $\Omega(A,P) = 0$. □

2.268. Zij $A \in \mathbb{K}$, C_A een lineair complex, niet speciaal. Neem het grondtetraeder zo dat O_0O_1 en O_2O_3 poollijnen zijn; dan volgt uit 2.5.7 dat O_0O_2, O_0O_3, O_1O_2 en O_1O_3 complexlijnen zijn. De Plückervoorstellingen van deze vier rechten zijn

	p_{01}	p_{02}	p_{03}	p_{23}	p_{31}	p_{12}
O_0O_2	0	1	0	0	0	0
O_0O_3	0	0	1	0	0	0
O_1O_2	0	0	0	0	0	1
O_1O_3	0	0	0	0	-1	0

zodat $a_{02} = a_{03} = a_{31} = a_{12} = 0$, en

$$C_A : a_{01}p_{23} + a_{23}p_{01} = 0 \qquad (a_{01} \neq 0 \neq a_{23}) \;.$$

Als C_A speciaal is, is A een lijn; neem die als zijde O_0O_1 van het grondtetraeder, en de vergelijking wordt:

$$C_A\colon p_{01} = 0 \ .$$

Als C_A niet speciaal is, is de volgende <u>stelling</u> waar: Als van een tetraeder twee paar overstaande zijden tot C_A behoren, is het derde paar een paar poollijnen.

2.27. Lijncoördinaten in $\mathbb{E}^3$

Neem in $\mathbb{E}^3$ een assenstelsel $(a_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ en de gewone projectieve coördinaten. Voor een lijn L, die door twee punten $(1,x_1,x_2,x_3)$ en $(1,y_1,y_2,y_3)$ van $\mathbb{E}^3$ gaat, is

$$p_{0i} = y_i - x_i,\ i = 1,2,3;\ p_{12} = x_1y_2 - x_2y_1 = [\underline{x} \times \underline{y}]_3 \ .$$

Dus $[p_{01},p_{02},p_{03}] = \underline{y} - \underline{x}$, $[p_{23},p_{31},p_{12}] = \underline{x} \times \underline{y}$ en $\omega(L) = (\underline{y} - \underline{x},\underline{x} \times \underline{y}) = 0$, zoals het behoort.

De vector $\underline{y} - \underline{x}$ is een richtingsvector voor L, en $\underline{x} \times \underline{y}$ is het moment van $\underline{y} - \underline{x}$ ten opzichte van de oorsprong a_0. In deze versie worden lijncoördinaten toegepast in de mechanica, zie [18], [19].

Zij ℓ een richtingsvector voor L met $|\underline{\ell}| = 1$, en zij $\underline{\ell}^*$ het moment van $\underline{\ell}$ ten opzichte van a_0. Dan is $(\underline{\ell},\underline{\ell}^*) = 0$. De voorwaarde van het snijden van twee lijnen L en M wordt nu

$$(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m}) = 0 \ .$$

Als L een oneigenlijke rechte is, door $[0,u_1,u_2,u_3]^T$ en $[0,v_1,v_2,v_3]^T$ dan is $[p_{01},p_{02},p_{03}]^T = 0$, $[p_{12},p_{23},p_{31}]^T = \underline{u} \times \underline{v}$.

Opdat deze L een lijn M : $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{m}$ snijdt moeten $[0,u_1,u_2,u_3]^T$, $[0,v_1,v_2,v_3]^T$ en $[0,m_1,m_2,m_3]^T$ collineair zijn, equivalent met

$$0 = \det[\underline{u},\underline{v},\underline{m}] = (\underline{u} \times \underline{v},\underline{m}) = (\underline{0},\underline{m}^*) + (\underline{u} \times \underline{v},\underline{m}) .$$

Het paar $(\underline{0},\underline{u} \times \underline{v})$ speelt voor L dezelfde rol als $(\underline{m},\underline{m}^*)$ voor M. We stellen een lijn L in $\mathbb{E}^3$ ook voor deze vectoren in plaats van de matrix $L = [\ell,\ell^*]$.

Als $\underline{\ell} \neq \underline{0}$ dan is $\underline{\ell}$ een richtingsvector, L eigenlijk, $\underline{\ell}^*$ het moment; $(\underline{\ell},\underline{\ell}^*) = 0$.
Als $\underline{\ell} = \underline{0}$ dan is L de oneigenlijke rechte van de vlakken $(\underline{\ell}^*,\underline{x}) = c$ $(c \in \mathbb{R})$; $\underline{\ell}^* = \underline{u} \times \underline{v}$.
Voorwaarde voor snijden voor L en M is in ieder geval

$$(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m}) = 0 .$$

<u>Definitie</u>: Als, in$[\ell,\ell^*]$ en $[\underline{m},\underline{m}^*]$, geldt $|\ell|=|m| = 1$ dan heet

$$[\![L,M]\!] := (\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,m)$$

het *wederzijds moment* van L en M.
$\underline{\ell}$ en $\underline{\ell}^*$ heten de (genormeerde) *Plückervectoren*, $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ heet de *Plückervoorstelling* van L.

2.271. De lijn L met richtingsvector $\underline{\ell}$ en moment $\underline{\ell}^*$ noteren we als $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$; $\underline{\ell}$ en $\underline{\ell}^*$ zijn op een evenredigheidsfactor na bepaald. Het paar $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ legt de lijn L eenduidig vast (ten opzichte van een gegeven coördinatenstelsel $\{a_0;\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3\}$).
Als $|\underline{\ell}| = 1$ noemen we (de voorstelling $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ van) de lijn *genormeerd*.
Als van $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ en $[m,m^*]$ niet geldt $\underline{\ell} \times \underline{m} = \underline{0}$, zodat deze lijnen niet evenwijdig zijn, dan is de orthogonale transversaal van deze lijnen

$$[\xi\underline{\ell} \times \underline{m},\ \eta\underline{\ell} + \zeta\underline{m}]$$

met $\xi := |\underline{\ell} \times \underline{m}|^2$,

$$\eta := (\underline{\ell},\underline{m})\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*] - (\underline{m},\underline{m})\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{\ell}^*] ,$$

$$\zeta := (\underline{\ell},\underline{m})\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{\ell}^*] - (\underline{\ell},\underline{\ell})\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*] .$$

Men kan dit nog herleiden:

$$\eta = (\underline{\ell} \det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*] - \underline{m} \det[\underline{\ell},\underline{m},\ell^*],\underline{m})$$

$$\zeta = (\underline{\ell},\underline{m} \det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{\ell}^*] - \underline{\ell} \det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*]) ,$$

en we definiëren

$$\underline{\ell} \oplus \underline{m} := \underline{\ell} \det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*] - \underline{m} \det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{\ell}^*] .$$

Merk op dat $\underline{\ell} \oplus \underline{m} = \underline{m} \oplus \underline{\ell}$.
Dan is

$$\eta\underline{\ell} + \zeta\underline{m} = (\underline{\ell} \oplus \underline{m},\underline{m})\underline{\ell} - (\underline{\ell} \oplus \underline{m},\underline{\ell})\underline{m} = (\underline{\ell} \oplus \underline{m}) \times (\underline{\ell} \times \underline{m}) .$$

We vinden voor de orthogonale transversaal derhalve

$$[|\underline{\ell}\times\underline{m}|^2\underline{\ell}\times\underline{m},\ (\underline{\ell}\oplus\underline{m})\times(\underline{\ell}\times\underline{m})],$$

zodat een parametervoorstelling is

$$\underline{x} = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}(\underline{\ell}\oplus\underline{m}) + \lambda\underline{\ell}\times\underline{m}\ .$$

Het snijpunt $\underline{p}$ van deze met $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ moet voldoen aan

$$\{|\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}(\underline{\ell}\oplus\underline{m}) + \lambda\underline{\ell}\times\underline{m}\}\times\underline{\ell} = \underline{\ell}$$

en door inwendig met $\underline{m}$ te vermenigvuldigen komt er

$$\det[|\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}(\underline{\ell}\oplus\underline{m}) + \lambda\underline{\ell}\times\underline{m},\underline{\ell},\underline{m}] = (\underline{\ell}^*,\underline{m})\ ,$$

$$\lambda = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}(\underline{\ell}^*,\underline{m})\ ,$$

$$\underline{p} = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}\{\underline{\ell}\oplus\underline{m} + (\underline{\ell}^*,\underline{m})\underline{\ell}\times\underline{m}\}\ .$$

Door verwisseling van ℓ en m komt er voor het snijpunt van de transversaal met $[\underline{m},\underline{m}^*]$

$$\underline{q} = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}\{\underline{\ell}\oplus\underline{m} - (\underline{\ell},\underline{m}^*)\underline{\ell}\times\underline{m}\}$$

zodat

$$\underline{p}-\underline{q} = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-2}\{(\underline{\ell}^*,\underline{m}) + (\underline{\ell},\underline{m}^*)\}\underline{\ell}\times\underline{m}\ ,$$

en de afstand d van de lijnen $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ en $[\underline{m},\underline{m}^*]$ is

$$d = |\underline{\ell}\times\underline{m}|^{-1}|(\underline{\ell}^*,\underline{m}) + (\underline{\ell},\underline{m}^*)|\ .$$

2.2711. $\underline{\ell}\oplus\underline{m} = \underline{m}\oplus\underline{\ell}$.

2.2712. $(\alpha\underline{\ell})\oplus\underline{m} = \alpha^2\underline{\ell}\oplus\underline{m}$.

2.2713. $\underline{\ell}\oplus\underline{m} = [\underline{\ell}\underline{m}^{*T} - \underline{m}\underline{\ell}^{*T}]\ \underline{\ell}\times\underline{m}$; de afbeelding $[\underline{\ell}\underline{m}^{*T} - \underline{m}\underline{\ell}^{*T}]$ heeft eigenwaarden $(\underline{m}^*,\underline{\ell})$, $-(\underline{\ell}^*,\underline{m})$ en 0; $\underline{\ell}$ en $\underline{m}$ zijn eigenvectoren.

2.2714. Bij overgang naar een andere oorsprong $\tilde{a}_0 = a_0 + \underline{a}$ verandert het moment van $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*] = \{\underline{x}\mid\underline{b}+\lambda\underline{\ell}\}$ in $\tilde{\underline{\ell}} = (-\underline{a}+\underline{b})\times\underline{\ell} = \underline{b}\times\underline{\ell} - \underline{a}\times\underline{\ell} = \underline{\ell}^* - \underline{a}\times\underline{\ell}$. Dan is $(\underline{\ell}\oplus\underline{m})^{\sim} = \underline{\ell}\det[\underline{\ell},\underline{m},\tilde{\underline{m}}] - \underline{m}\det[\underline{\ell},\underline{m},\tilde{\underline{\ell}}] = \underline{\ell}\oplus\underline{m} - \underline{\ell}\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{a}\times\underline{m}] +$ $+ \underline{m}\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{a}\times\underline{\ell}] = \underline{\ell}\oplus\underline{m} + (\underline{a}\times(\underline{\ell}\times\underline{m}))\times(\underline{\ell}\times\underline{m})$.
De term $(\underline{a}\times(\underline{\ell}\times\underline{m}))\times(\underline{\ell}\times\underline{m})$ is dan en slechts dan $\underline{0}$ als $\underline{a}$ en $\underline{\ell}\times\underline{m}$ afhankelijk zijn.

2.2715 Bij rechts-orthogonale coördinatentransformaties $\hat{\underline{x}} = A\underline{x}$ is het moment

$$\hat{\underline{\ell}} = \hat{\underline{b}} \times \hat{\underline{\ell}} = A\underline{b} \times A\underline{\ell} = A(\underline{b} \times \underline{\ell}) = A\underline{\ell}^*,$$

en

$$(\underline{\ell} \oplus \underline{m})\hat{} = \det[A\underline{\ell}, A\underline{m}, A\underline{m}^*]A\underline{\ell} - \det[A\underline{\ell}, A\underline{m}, A\underline{\ell}^*]A\underline{m} =$$

$$= A\{\underline{\ell}\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{m}^*] - \underline{m}\det[\underline{\ell},\underline{m},\underline{\ell}^*]\} =$$

$$= A(\underline{\ell} \oplus \underline{m}) \;.$$

2.272. De matrixvoorstellingen van $L = [\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ zijn

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\ell}^T \\ -\underline{\ell} & -\Omega(\underline{\ell}^*) \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad L^\tau = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\ell}^{*T} \\ -\underline{\ell}^* & -\Omega(\underline{\ell}) \end{bmatrix}$$

Hierin is $\Omega(\underline{\ell})$ de 3×3-matrix met het effect $\Omega(\underline{\ell})\underline{x} = \underline{\ell} \times \underline{x}$.

Voor twee lijnen $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ en $[\underline{m},\underline{m}^*]$ is

$$LM^\tau = \begin{bmatrix} -\underline{\ell}^T\underline{m}^* & -\underline{\ell}^T\Omega(\underline{m}) \\ \Omega(\underline{\ell}^*)\underline{m}^* & -\underline{\ell}\underline{m}^{*T} + \Omega(\underline{\ell}^*)\Omega(\underline{m}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{\ell}^T\underline{m}^* & (\Omega(\underline{m})\underline{\ell})^T \\ \Omega(\underline{\ell}^*)\underline{m}^* & -\underline{\ell}\underline{m}^{*T} + \underline{m}\underline{\ell}^{*T} - \underline{\ell}^{*T}\underline{m}I_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{\ell}^T\underline{m}^* & (\underline{m} \times \underline{\ell})^T \\ \underline{\ell}^* \times \underline{m}^* & -\underline{\ell}\underline{m}^{*T} + \underline{m}\underline{\ell}^{*T} - \underline{\ell}^{*T}\underline{m}I_3 \end{bmatrix} .$$

Door verwisseling van L en M komt er

$$ML^\tau = \begin{bmatrix} -\underline{m}^T\underline{\ell}^* & (\underline{\ell} \times \underline{m})^T \\ \underline{m}^* \times \underline{\ell}^* & -\underline{m}\underline{\ell}^{*T} + \underline{\ell}\underline{m}^{*T} - \underline{m}^{*T}\underline{\ell}I_3 \end{bmatrix}$$

zodat

$$LM^\tau + ML^\tau = -\{(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m})\}I_4 \;,$$

in overeenstemming met 2.2358

2.273. Zijn $L = [\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ en $M = [\underline{m},\underline{m}^*]$ twee (gerichte) lijnen met $|\underline{\ell}| = |\underline{m}| = 1$, $\underline{\ell},\underline{m}$ onafhankelijk.

Zij N de orthogonale transversaal, van $p \in L$ naar $q \in \mathbb{M}$, zodat
$N = [\underline{\ell} \times \underline{m},\ |\underline{\ell} \times \underline{m}|^{-2}(\underline{\ell} \oplus \underline{m}) \times (\underline{\ell} \times \underline{m})]$. Dan is

$$p \to q = -|\underline{\ell} \times \underline{m}|^{-2}\{(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m})\}\underline{\ell} \times \underline{m} .$$

Als $(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m}) < 0$ dan is het volume V van het tetraeder $p(p+\underline{\ell})q(q+\underline{m})$ gelijk aan

$$V = \frac{1}{6}\det[\underline{\ell},\underline{m},\ p \to q] = -\frac{1}{6}\{(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m})\} ,$$

als $(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m}) > 0$ dan komt er

$$V = \frac{1}{6}\{(\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m})\} ;$$

We korten af, $[\![L,M]\!] := (\underline{\ell},\underline{m}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{m})$, en dan geldt:

Stelling. $V = \frac{1}{6}|[\![L,M]\!]|$. □

Gevolg. $[\![L,M]\!]$ hangt niet van de keuze van de oorsprong af.

Opmerking. $[\![L,M]\!] > 0$ dan en slechts dan als $p \to q$ en $\underline{\ell} \times \underline{m}$ tegengesteld gericht zijn.

2.28. Het lineaire complex in $\mathbb{E}^3$

Uit het voorgaande volgt dat in $\mathbb{E}^3$ een complex wordt bepaald door twee vectoren $\underline{a},\underline{a}^*$; de vergelijking van het complex wordt

$$(\underline{\ell},\underline{a}^*) + (\underline{\ell}^*,\underline{a}) = 0 \text{ met } (\underline{\ell},\underline{\ell}^*) = 0 .$$

De oneigenlijke rechten $[\underline{0},\ell^*]$ van het complex voldoen aan

$$(\underline{\ell}^*,\underline{a}) = 0$$

en aangezien voor iedere oneigenlijke rechte ℓ^* wordt verkregen uit de projectieve voorstellingen $(0,\underline{u})$ en $(0,\underline{v})$ van twee van zijn oneigenlijke punten met $\underline{\ell}^* = \underline{u} \times \underline{v}$, kunnen we ook schrijven

$$\det[\underline{u},\underline{v},\underline{a}] = 0,$$

hetgeen wil zeggen dat $(0,\underline{u})$, $(0,\underline{v})$ en $(0,\underline{a})$ collineair zijn; anders gezegd: de oneigenlijke rechten uit het complex zijn precies de oneigenlijke rechten door het oneigenlijke punt $(0,\underline{a})$; anders gezegd: $(0,\underline{a})$ is de pool van het oneigenlijke vlak.

De poollijnen van oneigenlijke rechten gaan dus door dit punt, zijn dus, in $\mathbb{E}^3$ bekeken, evenwijdig.
Deze lijnen heten *middellijnen* van het complex; ze hebben alle de richting $\underline{a}$.
We zoeken nog de middellijn die loodrecht staat op de poolvlakken van zijn punten.

Hoofdstuk III. *DIFFERENTIAALMEETKUNDE*

We beschouwen C^k-afbeeldingen van $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$, $m = 1$ of 2, $n = 2$ of 3, $k = 2$ of. 3.

3.1. *Krommen*.

Zij $\mathbb{I}$ een interval in $\mathbb{R}$, $\underline{x}$: $\mathbb{I} \to \mathbb{E}^3$ een C^1-afbeelding. We noteren het beeld $\underline{x}(t)$ als een vector $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, en x^1, x^2, x^3 zijn dan reële functies van de parameter $t \in \mathbb{I}$. Als voor de afgeleide $\dot{\underline{x}}$ van $\underline{x}$ naar t geldt $\dot{\underline{x}}(t) \neq \underline{0}$ voor alle $t \in \mathbb{I}$ dan heet de parametervoorstelling $\underline{x}$ *regulier*.

3.11. Als $\mathbb{I}$, $\hat{\mathbb{I}}$ intervallen zijn, θ: $\hat{\mathbb{I}} \to \mathbb{I}$ een C^1-functie is met $\theta'(\hat{t}) \neq 0$ voor alle $\hat{t} \in \hat{\mathbb{I}}$ en $\theta(\hat{\mathbb{I}}) = \mathbb{I}$, dan heet θ een *toegelaten substitutie*. Een toegelaten substitutie is monotoon en heeft een inverse $\theta^{\leftarrow}$: $\mathbb{I} \to \hat{\mathbb{I}}$ die ook een toegelaten substitutie is.

Stelling. Als $\underline{x}$ een reguliere parametervoorstelling is en θ een toegelaten substitutie, dan is ook $\underline{\xi} = \underline{x} \circ \theta$ een reguliere parametervoorstelling. □

Blijkbaar is $\dot{\underline{\xi}}(\hat{t}) = \dot{\underline{x}}(\theta(\hat{t}))\theta'(\hat{t})$.

3.12. Onder de "kromme $\underline{x}$" verstaan we $\underline{x}(\mathbb{I})$ tezamen met alle reguliere parametervoorstellingen.

3.13. Zij $\mathbb{I} := [a,b]$, $\underline{x}$ een reguliere parametervoorstelling. De lengte van $\underline{x}(\mathbb{I})$ is $L = \int_a^b |\dot{x}(t)|dt$, en door $\sigma(t) := s := \int_a^t |\dot{\underline{x}}(\tau)|d\tau$ wordt een toegelaten substitutie σ: $\mathbb{I} \to [0,L]$ gedefinieerd.

$$\frac{ds}{dt} = \sigma'(t) = |\dot{\underline{x}}(t)| > 0 .$$

Zij $\underline{\xi} = \underline{x} \circ \sigma^{\leftarrow}$, dan is $\underline{x} = \underline{\xi} \circ \sigma$,

$$\dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{\xi}}(\sigma(t))\sigma'(t), \quad \dot{\underline{\xi}}(s) = \dot{\underline{x}}(t)/|\dot{\underline{x}}(t)| .$$

De parameter s heet de *booglengte*, de parametervoorstelling $\underline{\xi}(s)$ heet de *natuurlijke* parametervoorstelling; en om het bijzondere karakter aan te geven schrijven we $\frac{d}{ds}$ met een accent: '.

Stelling. Voor een natuurlijke parametervoorstelling $\underline{x}$ heeft de raakvector $\underline{x}'$ de lengte 1. □

3.14. De *raaklijn* aan de kromme $\underline{x}$ in $\underline{x}(s)$ is $\underline{x}(s) + \langle\underline{x}'(s)\rangle$.
Het *normaalvlak* van de kromme $\underline{x}$ in $\underline{x}(s)$ is $\underline{x}(s) + \langle\underline{x}'(s)\rangle^{\perp}$.

We werken locaal, laten daarom de parameter vaak weg, en noemen $\underline{t} := \underline{x}'$. Omdat $\underline{t}' \perp \underline{t}$, is $\underline{t}' \in \langle\underline{t}\rangle^{\perp}$; we nemen $\underline{n}$ en $\kappa \geq 0$ zó dat $\underline{t}' = \kappa\underline{n}$. Voorts nemen we $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$; dan is $\langle\underline{t}\rangle^{\perp} = \langle\underline{n},\underline{b}\rangle$, en $\{\underline{t},\underline{n},\underline{b}\}$ is een (rechts georienteerd) orthonormaal stelsel; κ heet de *kromming*.

Het *osculatievlak* is de limiet van het vlak door $\underline{x}(s+h)$ en de raaklijn in $\underline{x}(s)$, als $h \to 0$. Met als lopende plaatsvector $\underline{\xi}$ volgt uit

$$0 = |\underline{x}(s) - \underline{\xi}, \underline{t}, \underline{x}(s+h) - \underline{x}(s)| =$$

$$= |\underline{x}(s) - \underline{\xi}, \underline{t}, h\underline{x}'(s) + \tfrac{h^2}{2}\underline{x}''(s) + h^2\underline{\rho}(h)| =$$

$$= \frac{h^2}{2}|\underline{x}(s) - \underline{\xi}, \underline{t}, \underline{x}''(s) + 2\underline{\rho}(h)|$$

voor de vergelijking van het osculatievlak, als $\kappa > 0$,

$$|\underline{x} - \underline{\xi}, \underline{t}, \underline{n}| = 0 \ .$$

De lijn $\underline{x} + \langle\underline{n}\rangle$ heet de *hoofdnormaal*, de lijn $\underline{x} + \langle\underline{b}\rangle$ de *binormaal* en het vlak $\underline{x} + \langle\underline{t},\underline{b}\rangle$ heet het *rectificerend vlak* van de kromme in $\underline{x}$.

Als $\kappa = 0$ dan is het osculatievlak (nog) niet bepaald; een punt met $\kappa = 0$ heet *buigpunt*; als $\forall_{s\in I}\ \kappa(s) = 0$ dan is de kromme een rechte lijn (of recht lijnstuk).

3.15. $\{\underline{t},\underline{n},\underline{b}\}$ is een orthonormaalstelsel, een basis voor de raakruimte $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^3)$. Iedere vector in $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^3)$ kan in $\{\underline{t},\underline{n},\underline{b}\}$ worden uitgedrukt.

3.151. Voorbeelden: Zie [12] hoofdstuk 4.

3.152. Stelling van Frenet. $\{\underline{t}',\underline{n}',\underline{b}'\} = \{\underline{t},\underline{n},\underline{b}\}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$.

De matrix $C_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$ heet de *Cartanmatrix* van de kromme; τ heet de *torsie*.

3.153. Stelling. Als $\kappa(s)$ en $\tau(s)$ continu zijn op een interval I dan is er één (op verplaatsing na bepaalde) kromme $\underline{x}(s)$ waarvan s, κ en τ de booglengte, kromming en torsie zijn. □

(Vergelijkingen $\kappa = \varphi(s)$, $\tau = \psi(s)$ heten de *natuurlijke* vergelijkingen van de kromme.)

Bewijs.

1. Er is hoogstens één kromme met die eigenschappen. Veronderstel dat $\underline{x}(s)$ en $\hat{\underline{x}}(s)$ zulke krommen zijn, waarvoor $\underline{x}(0) = \hat{\underline{x}}(0)$, $\underline{t}(0) = \hat{\underline{t}}(0)$, $\underline{n}(0) = \hat{\underline{n}}(0)$ en $\underline{b}(0) = \hat{\underline{b}}(0)$.

   Beschouw dan de functie (van s) $(\underline{t},\hat{\underline{t}}) + (\underline{n},\hat{\underline{n}}) + (\underline{b},\hat{\underline{b}})$;

$$\frac{d}{ds}(\underline{t},\hat{\underline{t}}) = (\underline{t}',\hat{\underline{t}}) + (\underline{t},\hat{\underline{t}}') = \kappa(\underline{n},\hat{\underline{t}}) + \kappa(\underline{t},\hat{\underline{n}}) ,$$

$$\frac{d}{ds}(\underline{n},\hat{\underline{n}}) = (\underline{n}',\hat{\underline{n}}) + (\underline{n},\hat{\underline{n}}') = -\kappa(\underline{t},\hat{\underline{n}}) + \tau(\underline{b},\hat{\underline{n}}) - \kappa(\underline{n},\hat{\underline{t}}) + \tau(\underline{n},\hat{\underline{b}}) ,$$

$$\frac{d}{ds}(\underline{b},\hat{\underline{b}}) = (\underline{b}',\hat{\underline{b}}) + (\underline{b},\hat{\underline{b}}') = -\tau(\underline{n},\hat{\underline{b}}) - \tau(\underline{b},\hat{\underline{n}}) ;$$

   dus

$$\frac{d}{ds}\{(\underline{t},\hat{\underline{t}}) + (\underline{n},\hat{\underline{n}}) + (\underline{b},\hat{\underline{b}})\} = 0$$

   en

$$(\underline{t},\hat{\underline{t}}) + (\underline{n},\hat{\underline{n}}) + (\underline{b},\hat{\underline{b}}) = \{(\underline{t},\hat{\underline{t}}) + (\underline{n},\hat{\underline{n}}) + (\underline{b},\hat{\underline{b}})\}\Big|_{s=0} = 3;$$

   dus $\forall_s\ \underline{t} = \hat{\underline{t}} \wedge \underline{n} = \hat{\underline{n}} \wedge \underline{b} = \hat{\underline{b}}$, en bovendien

$$\frac{d}{ds}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) = 0,\quad \underline{x} - \hat{\underline{x}} = [\underline{x} - \hat{\underline{x}}]\Big|_{s=0} = \underline{0} ,$$

   equivalent met $\forall_s\ \underline{x}(s) = \hat{\underline{x}}(s)$.

2. Er is minstens één kromme met die eigenschappen. Beschouw het stelsel $\{\underline{t}',\underline{n}',\underline{b}'\} = \{\underline{t},\underline{n},\underline{b}\}K$.

Op een vaste basis zij $[\underline{t},\underline{n},\underline{b}] =: A$, zodat $A' = [\underline{t}',\underline{n}',\underline{b}']$.

Dan is $A' = AK$ een stelsel lineaire differentiaal vergelijkingen.

Bij iedere beginvoorwaarde A_0 is er één oplossing met $A(0) = A_0$.

Kies een orthonormale matrix A_0, en bepaal die oplossing A.

Dan is

$$(AA^T)' = A'A^T + AA^{T'} = AKA^T + AK^TA^T = 0. \text{ dus}$$

$$AA^T = A_0A_0^T = I.$$

Vervolgens nemen we $\underline{x}(s) = \int_0^s \underline{t}(u)du + \underline{x}_0$

met een gegeven $\underline{x}_0$.

Dan is $\underline{x}(s)$ een kromme uit $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, $\underline{t}(0) = \underline{t}_0$, $\underline{n}(0) = \underline{n}_0$, $\underline{b}(0) = \underline{b}_0$, en waarvan κ en τ de bij de booglengte behorende natuurlijke parameters zijn. □

Opmerking. Op precies dezelfde manier bewijst men dat in het platte vlak door ieder punt $\underline{x}(0)$ één kromme in iedere richting $\underline{t}(0)$ gaat met een gegeven continue kromming κ.

3.154. Stelling: Een kromme $\underline{x}(\mathbb{I})$ is dan en slechts dan een rechte als $\forall_s \kappa = 0$. Een kromme, geen rechte, is dan en slechts dan vlak als $\forall_s\ \tau = 0$.

Bewijs. $\kappa = 0 \Leftrightarrow |\underline{x}''(s)| = 0 \Leftrightarrow \underline{x}''(s) = 0 \Leftrightarrow \underline{x}'(s) = \underline{c}$ (constant) $\Leftrightarrow \underline{x} = \underline{c}s + \underline{a}$, een rechte.

Stel nu $\kappa \neq 0$.

Als $\underline{x}(s)$ vlak is dan $\exists_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \exists_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_s (\underline{x}(s), \underline{a}) = \alpha$

Differentieren

$$\forall_s\ (\underline{t}(s), \underline{a}) = 0 \wedge \kappa(\underline{n}, \underline{a}) = 0$$

dus $\quad (\underline{t}, \underline{a}) = 0 \wedge (\underline{n}, \underline{a}) = 0$.

Dus $\quad \underline{a} \approx \underline{t} \times \underline{n} = \underline{b}$ en $\underline{b}' = \underline{0}$ dus $\tau = 0$.

Als, omgekeerd, $\forall_s\ \tau = 0$, dan is $\underline{b}' = 0$ en $\underline{b}$ constant.

In het vlak $(\underline{x}, \underline{b}) = (\underline{x}_0, \underline{b})$ door een punt $\underline{x}_0$ van de kromme is een kromme door κ, $\underline{x}_0$ en $\underline{t}_0$ bepaald. Volgens 3.153 is er maar één. Dus de kromme is vlak. □

3.155. Als een kromme $\underline{x}: \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ een parameter u heeft, ongelijk aan de booglengte s, dan geldt (met . respectievelijk ' voor afgeleiden naar u respectievelijk s):

$$\dot{s} = |\dot{\underline{x}}|,\ \dot{\underline{x}} = \dot{s}\underline{x}' = \dot{s}\underline{t},\ \ddot{\underline{x}} = \ddot{s}\underline{t} + \dot{s}^2\kappa\underline{n},$$

$$\dddot{\underline{x}} = (\dddot{s} - \kappa^2\dot{s}^3)\underline{t} + \dot{s}(3\kappa\ddot{s} + \dot{\kappa}\dot{s})\underline{n} + \kappa\tau\dot{s}^3\underline{b};$$

ook

$$\underline{b} = \dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}/\kappa\dot{s}^3,\ \underline{n} = (\dot{s}\ddot{\underline{x}} - \ddot{s}\dot{\underline{x}})/\kappa\dot{s}^3$$

$$\kappa^2 = ((\ddot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}) - \ddot{s}^2)/\dot{s}^4,\ \tau = \det(\dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}, \dddot{\underline{x}})/\kappa^2\dot{s}^6.$$

Merk op dat $\kappa = \dot{s}^{-3}(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}, \underline{b}) = \dot{s}^{-3}\det(\dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}, \underline{b})$.

3.156. Voorbeelden. Zie [12] hoofdstuk 5.

3.157. Bijzondere krommen.

i : Rechte lijn : $\kappa = 0$.

ii : Vlakke kromme : $\tau = 0$.

iii: Bertrand kromme : $a\kappa + b\tau = c(a \neq 0)$.

iv : Cirkelschroeflijn : κ en τ constant.

v : Kromme op een bol : $\kappa^{-1}\tau + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa}) = 0$

vi : Schroeflijn : $\tau\kappa^{-1}$ constant.

(Een Bertrandkromme γ is een kromme waarvan de hoofdnormalen ook hoofdnormalen zijn van een tweede kromme $\hat{\gamma}$; een schroeflijn is een kromme waarvan de raaklijnen een constante hoek maken met een vaste richting.)

3.16. Osculatiecirkel, kromtestraal, torsiestraal, involuut.

3.161. We beschouwen een kromme $\underline{x}(s)$ met een booglengte s, en het punt $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$ met zijn driebeen $\underline{t}_0, \underline{n}_0, \underline{b}_0$.

Een bol die $\underline{x}$ in $\underline{x}_0$ raakt heeft een middelpunt $\underline{x}_0 + \lambda\underline{n}_0 + \mu\underline{b}_0$ en als vergelijking (ξ is de lopende coördinaat)

$$|\xi - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0|^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

We beschouwen

$$f(s) = |\underline{x}(s) - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0|^2 - \lambda^2 - \mu^2 .$$

Teneinde de Maclaurinreeks van f te bepalen berekenen we de afgeleiden $f^{(k)}(0)$, $k = 0,1,2,\ldots$.

$f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

$f'(s) = 2(\underline{t}, \underline{x} - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0)$, $f'(0) = 0$;

$f''(s) = 2(\kappa\underline{n}, \underline{x} - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0) + 2(\underline{t},\underline{t})$, $f''(0) = -2\kappa_0\lambda + 2$;

$f'''(s) = 2\,(\kappa'\underline{n} + \kappa(-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}), \underline{x} - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0) + 2(\kappa\underline{n},\underline{t}) + 4(\underline{t},\kappa\underline{n})$,

$$f'''(0) = 2(-\lambda\kappa_0' - \mu\kappa_0\tau_0) ;$$

$f^{(4)}(s) = 2(\kappa''\underline{n} + 2\kappa'(-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}) + \kappa(-\kappa'\underline{t} - \kappa^2\underline{n} + \tau'\underline{b} - \tau^2\underline{n}), \underline{x} - \underline{x}_0 - \lambda\underline{n}_0 - \mu\underline{b}_0) +$

$+ 2(\kappa'\underline{n} + \kappa(-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}), \underline{t})$,

$$f^{(4)}(0) = -\lambda(\kappa_0'' - \kappa_0^3 - \kappa_0\tau_0^2) - \mu(2\kappa_0'\tau_0 + \kappa_0\tau_0') - 2\kappa_0^2 \quad .$$ Dus

$$f(s) = (1 - \kappa_0\lambda)s^2 - \frac{1}{3}(\lambda\kappa_0' + \mu\kappa_0\tau_0)s^3 + \frac{1}{24}\{\lambda(\kappa_0'' - \kappa_0^3 - \kappa_0\tau_0^2) +$$

$$- \mu(2\kappa_0'\tau_0 + \kappa_0\tau_0') - 2\kappa_0^2\}s^4 + \ldots..$$

Ieder der bollen heeft met γ een dubbeltellend punt $\underline{x}_0$ gemeen. Opdat $\underline{x}_0$ een meer -(dan twee-)voudig punt is, is nodig dat $\lambda = \kappa_0^{-1}$; als bovendien $\mu = -\kappa_0'\kappa_0^{-2}\tau_0^{-1}$ dan is $\underline{x}_0$ een (tenminste) viervoudig snijpunt van γ met die bol. Dez bol heet *kromtebol* of *osculerende bol*, zijn middelpunt $\hat{\underline{m}} = \underline{x} + \kappa^{-1}\underline{n} - \kappa'\kappa^{-2}\tau^{-1}\underline{b}$ heet *sferisch kromte-middelpunt* van γ in $\underline{x}$ (de index 0 is weer weggelaten).

We definiëren $\rho := \kappa^{-1}$, de *kromtestraal* en $\sigma := \tau^{-1}$, de *torsiestraal* .

Dan is $\hat{\underline{m}} = \underline{x} + \rho\underline{n} + \sigma\rho'\underline{b}$ en de *sferische kromtestraal* is $R = (\rho^2 + \sigma^2\rho'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Iedere bol door $\underline{x}$ en met $\tilde{\underline{m}} = \underline{x} + \rho\underline{n} + \mu\underline{b}$ snijdt het osculatievlak volgens de *osculatiecirkel* met middelpunt $\underline{m} = \underline{x} + \rho\underline{n}$; dit punt heet *kromtemiddelpunt* van γ in $\underline{x}$.

Ieder dier bollen heeft met γ het drievoudige punt $\underline{x}$ gemeen, bijgevolg is de raking van γ met de osculatiecirkel ook drievoudig.

3.162. Beschouw nu de raaklijnen $\underline{x} + \lambda\underline{t}$ als functie van s. Ze vormen een oppervlak, het raaklijnenoppervlak.

We bepalen $\lambda(s)$ zó dat

$$\underline{y}(s) := \underline{x}(s) + \lambda(s)\ \underline{t}(s)$$

een orthogonale trajectorie van de raaklijnen is.

Dan is

$$\underline{y}' = \underline{t} + \lambda'\underline{t} + \lambda\kappa\underline{n}$$

zodat

$$0 = (\underline{t},\underline{y}) = 1 + \lambda',\ \lambda(s) = c - s \text{ met een willekeurige } c.$$

Voor iedere c heet zo'n kromme een *ontwindende* (*involuut*) .

3.163. Voorbeelden

3.1631. Schroeflijn $\underline{x} = [\cos\varphi, \sin\varphi, h\varphi]$,

$$\underline{\dot{x}} = [-\sin\varphi, \cos\varphi, h] \quad , \quad \dot{s} = \sqrt{1+h^2} \; , \; s = \sqrt{1+h^2}\,\varphi \quad \underline{t} = \underline{x}' = \underline{\dot{x}}/\dot{s},$$

$$\underline{y} = [\cos\varphi, \sin\varphi, h\varphi] + \frac{c-s}{\sqrt{1+h^2}}[-\sin\varphi, \cos\varphi, h] =$$

$$[\ldots, \ldots, \frac{ch}{\sqrt{1+h^2}}] \text{ , vlakke krommen.}$$

3.1632. De hoofdnormalen hebben een omhullende dan en slechts dan als de kromme vlak is.

Bewijs. We brengen de normaal $\underline{x} + \lambda\underline{n}$ in lijncoördinaten,

$$P = [\underline{n}, \underline{x} \times \underline{n}] \text{ . Dan is}$$

$$P' = [-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b} \; , \; \underline{t} \times \underline{n} + \underline{x} \times (-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b})] = [-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}, \underline{b} + \underline{x} \times (-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b})]$$

We berekenen, conform 2.252, $\omega(P')$:

$$\omega(P') = (-\kappa\underline{t}' + \tau\underline{b}, \underline{b} + \underline{x} \times (-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b})) =$$

$$= -\kappa[\det \underline{t}, \underline{x}, -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}] + \tau + \tau\det[\underline{b}, \underline{x}, -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}] = \tau \; .$$

Er is een omhullende als $\omega(P') = 0$, en dit leidt precies tot de bewering . □

3.1633. De omhullende van de normalen van een vlakke kromme is de verzameling der kromtemiddelpunten.

Bewijs. Beschouw $\underline{y} = \underline{x} + \rho\underline{n}$, dan is

$$\underline{y}' = \underline{t} + \rho'\underline{n} + \rho(-\kappa\underline{t}) = \rho'\underline{n} \; .$$

Deze kromme raakt dus in het kromtemiddelpunt aan de betreffende normaal, en is bijgevolg de omhullende. □

3.2. *Vlakke krommen*

3.21. Een kromme $r(u): \mathbb{I} \to \mathbb{E}^3$ is dan en slechts dan vlak als $\tau = 0$ (3.153); het vlak van de kromme is bijvoorbeeld $a + \langle \underline{t},\underline{n}\rangle$ met vergelijking $(a \to x,\underline{b}) = 0$. In dit vlak is de kromme bepaald door $\{\underline{t}',\underline{n}'\} = \{\underline{t},\underline{n}\}\begin{bmatrix}0 & -\kappa\\ \kappa & 0\end{bmatrix}$.
$\{\underline{t},\underline{n}\}$ is een orthornormaal stelsel, en de lineaire afbeelding J definiëren we in $\langle \underline{t},\underline{n}\rangle$: $J\underline{t} := \underline{n}$, $J\underline{n} := -\underline{t}$. We laten de conventie $\kappa \geq 0$ varen, en nemen in plaats daarvan $\{\underline{t},\underline{n}\}$ rechtsdraaiend. Dan is J een rechtse draaiing over $\frac{\pi}{2}$.
De matrix van J is op iedere orthonormale basis $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.
In het bijzonder is $\underline{t}' = \kappa J\underline{t}$ (in de terminologie van 1.536: $J = D_{\frac{\pi}{2}}$).

3.211. Als $\kappa = \psi(s)$ met een gegeven continue ψ, dan is de gedaante van r(s) bepaald. "$\kappa = \psi(s)$" heet de *natuurlijke* vergelijking van de kromme.

3.212. De formules van 3.154 gaan over in

$$\dot{\underline{x}} = \dot{s}\underline{t},\ \ddot{\underline{x}} = \ddot{s}\underline{t} + \dot{s}^2\kappa\underline{n}\ ,$$

waaruit door eliminatie van $\underline{t}$ en $\underline{n}$ ontstaat

$$\ddot{\underline{x}} = \ddot{s}\dot{s}^{-1}\dot{\underline{x}} + \dot{s}\kappa J\dot{\underline{x}}\ .$$

3.213. Zij θ de hoek van $\underline{t}_0 = \underline{t}(0)$ naar $\underline{t} := \underline{t}(s)$, afhankelijk van s; dan is $\underline{t} = D_\theta \underline{t}_0$.
Hieruit volgt $\kappa J\underline{t} = \underline{t}' = \theta' J D_\theta \underline{t}_0 = \theta' J\underline{t}$, zodat $\theta' = \kappa$, $\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)du$.

3.214. *Kromtestraal* in $\underline{x}(s)$: $\rho(s) := \kappa(s)^{-1}$.
Kromtemiddelpunt in $\underline{x}(s)$: $\underline{m}(s) := \underline{x}(s) + \rho(s)\underline{n}(s)$. De *osculatiecirkel* in $\underline{x}(s)$: de cirkel met $\underline{m}(s)$ als middelpunt en $\rho(s)$ als straal.

3.22. *Ontwondene* = développée = Evolute = evolute; *Ontwindende* = développante = Evolvente = involute.
De *evoluut* van $\underline{x}(s)$ is $E\underline{x}(s) := \underline{x}(s) + \rho(s)\underline{n}(s)$, de kromme die door het kromtemiddelpunt wordt doorlopen.
De *involuut* van $\underline{x}(s)$ in $\underline{x}(0)$ is $I\underline{x}(s) := \underline{x}(s) - s\underline{t}(s)$.

3.221. Op de involuut $\underline{y} := I\underline{x}$ zijn de booglengte, kromming en kromtestraal $\tilde{s},\tilde{\kappa},\tilde{\rho}$ (differentiëren naar s: ').

$$\underline{y}' = \underline{x}' - \underline{t} - s\underline{t}' = \underline{t} - \underline{t} - s\kappa\underline{n} = -s\kappa\underline{n}\ ,$$

zodat $\tilde{s}' = |-s\kappa|$.

$$\underline{y}'' = -\kappa\underline{n} - s\kappa'\underline{n} + s\kappa^2\underline{t}$$

$$\tilde{\kappa} = (\tilde{s}')^{-3}\det(-s\kappa\underline{n}, s\kappa^2\underline{t}, \underline{b}) = \frac{s^2\kappa^3}{|-s\kappa|^3} = s^{-1}\operatorname{sgn}(\kappa s)$$

$$\tilde{\rho} = |s|\operatorname{sgn}(\kappa)$$

$$\tilde{\underline{n}} = \operatorname{sgn}(s\kappa)\underline{t}\ .$$

De evoluut $EI\underline{x} = E\underline{y}$ van de involuut is

$$\underline{y} + \tilde{\rho}\tilde{\underline{n}} = \underline{x} - s\underline{t} + |s|\operatorname{sgn}(\kappa)\operatorname{sgn}(s\kappa)\underline{t} = \underline{x}\ ,$$

$$EI\underline{x} = \underline{x}\ .$$

3.222. Op de evoluut $\underline{y} := E\underline{x}$ zijn de booglengte, kromming en kromtestraal $\hat{s}, \hat{\kappa}, \hat{\rho}$ (differentiëren naar s: ').

$$\underline{y}' = \underline{x}' + \rho'\underline{n} - \rho\kappa\underline{t} = \underline{t} + \rho'\underline{n} - \underline{t} = \rho'\underline{n}\ ,$$

zodat $\hat{s}' = |\rho'|$ en $\hat{\underline{t}} = (\operatorname{sgn}\rho')\underline{n}$.
De involuut $IE\underline{x} = I\underline{y}$ in $\underline{y}_0$ van de evoluut is

$$\underline{y} - \hat{s}\hat{\underline{t}} = \underline{y} - \hat{s}(\operatorname{sgn}\rho')\underline{n} = \underline{x} + \rho\underline{n} - \hat{s}(\operatorname{sgn}\rho')\underline{n}\ .$$

We veronderstellen dat $\rho(s)$ monotoon is; dan is óf $\rho' \geq 0$, $\hat{s}' = \rho'$, $\hat{s} = \rho + c$ en $\hat{s}(\operatorname{sgn}\rho') = \rho + c$, óf $\rho' \leq 0$, $\hat{s}' = -\rho'$, $\hat{s} = -\rho + c$ en $\hat{s}(\operatorname{sgn}\rho') = \rho - c$; nemen we de involuut in $\underline{y}_0$ dan is $c = 0$ en $IE\underline{x} = \underline{x}$.

3.223. Voorbeelden . Zie [12] hoofdstuk 5.

3.224. De stellingen van Hartmann(1893), Savary (1845?) en Bobillier (   ).

3.225. Theorie van raderwerken.

3.3. *Oppervlakken*

Zij $\mathbb{I}$ een interval in $\mathbb{R}^2$, bijvoorbeeld $\mathbb{I} = [a,b] \times [c,d]$. Zij $\underline{x}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ een C^2-afbeelding, dat wil zeggen dat de componenten x^1, x^2, x^3 van $\underline{x}$ continue tweede afgeleiden hebben naar $u = u^1$ en $v = u^2$. (We passen de indicering aan aan de af en toe te gebruiken Einsteinconventie voor sommaties.)
De afgeleiden van $\underline{x}$ naar u^α heten $\partial_\alpha \underline{x}$ $(\alpha = 1,2)$, die van x^h heten $\partial_\alpha x^h$ $(\alpha = 1,2,\ h = 1,2,3)$. (Als we aan deze notatie geen behoefte hebben, schrijven we ook wel $\underline{x}_u$ en $\underline{x}_v$.) De afgeleide van $\underline{x}$ naar $\underline{u} = (u^1,u^2)$ in (u_0^1,u_0^2) heet $D\underline{x}(\underline{u}_0)$ (ook geschreven $[D\underline{x}(\underline{u}_0)]$, $D\underline{x}$ of $[D\underline{x}]$, al naar behoefte).

3.31. Beschouw $\underline{\hat{x}}\colon [a,b] \times \{v_0\} \to \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $\hat{x}(u) = \underline{x}(u,v_0)$.
Als $\forall_{u \in [a,b]}\ \partial_1 \underline{x}(u) \neq \underline{0}$ dan is dit een reguliere parametervoorstelling van een kromme die op $\underline{x}(\mathbb{I})$ ligt; *een u-kromme* (u^1-kromme).
Evenzo gaat er door $\underline{x}(\underline{u}_0)$ een v-kromme. ξ

3.311. De parametervoorstelling $\underline{x}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ heet *regulier* als $\operatorname{rang}[D\underline{x}(\underline{u})] = 2$ voor alle $\underline{u} \in \mathbb{I}$; dit is gelijkwaardig met $\partial_1 \underline{x}(\underline{u}) \times \partial_2 \underline{x}(\underline{u}) \neq \underline{0}$.

3.312. Een substitutie $\theta\colon \hat{\mathbb{I}} \to \mathbb{I}$ heet *toegelaten* als θ een C^2-afbeelding is, met $\det[D\theta(\hat{\underline{u}})] \neq 0$ voor alle $\hat{\underline{u}} \in \hat{\mathbb{I}}$. Dan is θ ook locaal bijectief.

3.313. Stelling. Als $\underline{x}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ regulier is en $\theta\colon \hat{\mathbb{I}} \to \mathbb{I}$ toegelaten, dan is $\underline{x} \circ \theta$ ook regulier. $\square$

3.314. Onder "het oppervlak" verstaan we $\underline{x}(\mathbb{I})$ samen met zijn reguliere parametervoorstellingen.

3.32. Beschouw een punt $\underline{x}_0 = \underline{x}(\underline{u}_0) = \underline{x}(u_0^1,u_0^2) \in \underline{x}(\mathbb{I})$. Zij $\underline{\xi}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ een reguliere kromme, met $\underline{\xi}(t_0) = \underline{u}_0$; dan is ook $\underline{x} \circ \underline{\xi}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ een reguliere kromme. Dan geldt $\dot{\underline{x}} = [\partial_\alpha \underline{x}]\dot{u}^\alpha \in \langle \partial_1 \underline{x}, \partial_2 \underline{x}\rangle$. Het vlak $\underline{x}_0 + \langle \partial_1 \underline{x}, \partial_2 \underline{x}\rangle_0$ heet het *raakvlak* aan het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{I})$ in $\underline{x}_0$. De *normaal* in $\underline{x}_0$ is $\underline{x}_0 + \langle \partial_1 \underline{x} \times \partial_2 \underline{x}\rangle_0$.
De *normaalvector* (soms kortweg ook normaal) is $\underline{N} := \partial_1 \underline{x} \times \partial_2 \underline{x} / |\partial_1 \underline{x} \times \partial_2 \underline{x}|$.
$\underline{N}$ ligt in het normaalvlak van iedere kromme op $\underline{x}(\mathbb{I})$ door $\underline{x}$.

3.33. De booglengte s van de zojuist beschouwde kromme is $s(t) = \int^t (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}} d\tau$, met

$$\dot{s}^2 = (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}) = \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta (\partial_\alpha \underline{x}, \partial_\beta \underline{x}) .$$

Men schrijft $G_{\alpha\beta} := (\partial_\alpha \underline{x}, \partial_\beta \underline{x})$ en de getallen $G_{\alpha\beta}$ (door Gauss, met een andere notatie, ingevoerd) vormen de *eerste* of *metrische fundamentaalvorm* van het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{I})$; de uitdrukking

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \text{ , equivalent met } \dot{s}^2 = G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta \text{ ,}$$

noemt men het *lijnelement* van het oppervlak. Uit

$$G = [G_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_1\underline{x})^T \\ (\partial_2\underline{x})^T \end{bmatrix} [\partial_1\underline{x}, \partial_2\underline{x}] = [D\underline{x}]^T[D\underline{x}]$$

volgt (WIS 20, 3.6.6, p. 146)

$$g := \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = |\partial_1\underline{x} \times \partial_2\underline{x}|^2 > 0$$

en bovendien dat G positief definiet is.
Voor twee krommen $\underline{x}$ en $\underline{x}^*$ op $\underline{x}(\mathbb{U})$ en door $\underline{x}_0$ zij de hoek (van de raaklijnvectoren) φ; dan is

$$\cos\varphi = (\dot{\underline{x}}_0, \dot{\underline{x}}_0^*)/|\dot{\underline{x}}_0||\dot{\underline{x}}_0^*| = (G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^{*\beta})_0/(G_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta G_{\gamma\delta}\dot{u}^{*\gamma}\dot{u}^{*\delta})_0^{\frac{1}{2}} .$$

In het bijzonder geldt voor de hoek ψ tussen de parameterkrommen

$$\cos\psi = (G_{12})_0/(G_{11}G_{22})_0^{\frac{1}{2}}$$

zodat de parameterkrommen een zogenaamd *orthogonaal net* vormen indien $\forall_{\underline{u}\in\mathbb{U}}\, G_{12}(\underline{u}) = 0$. De oppervlakte van $\underline{x}(\mathbb{U})$ is

$$\iint\limits_{\mathbb{U}} \det[\underline{N}, \partial_1\underline{x}, \partial_2\underline{x}]du^1du^2 = \iint\limits_{\mathbb{U}} \sqrt{g}\, du^1du^2 .$$

3.331. De inverse van G is $g^{-1}\begin{vmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{vmatrix}$ en in verkorte schrijfwijze noteren we deze matrix als $G^{\alpha\beta}$. Dus $G^{\alpha\beta}G_{\beta\gamma} = G_{\beta\gamma}G^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\gamma$.

3.332. Als $\underline{u}$ en $\underline{\hat{u}}$ twee krommen door $\underline{x}_0$ zijn, op het oppervlak, beide geparametriseerd met hun booglengte, en elkaar raken, dan is $\underline{t} = \underline{\hat{t}}$, dus $'u^\alpha\partial_\alpha\underline{x} = {}'\hat{u}^\alpha\partial_\alpha\underline{x}$, dus $'u^\alpha = {}'\hat{u}^\alpha$.

3.333. Voorbeelden.

3.3331. Bol.

3.3332. Recht schroefvlak.

3.3333. Hyperboloïde.

3.34. $\{\partial_1\underline{x},\partial_2\underline{x},\underline{N}\}$ is een (gewoonlijk niet orthonormale) basis voor $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^3)$, zodat de afgeleiden van $\partial_1\underline{x}$, $\partial_2\underline{x}$ en $\underline{N}$ weer in $\partial_1\underline{x}$, $\partial_2\underline{x}$ en $\underline{N}$ kunnen worden uitgedrukt.

3.341. We definiëren eerst de *tweede fundamentaalvorm* van het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{I})$ in een punt $\underline{x}(\underline{u})$:

$$L_{\alpha\beta} := (\underline{N},\partial_\alpha\partial_\beta\underline{x}) \ .$$

$$L := [L_{\alpha\beta}] \ .$$

$$\ell := \det L = L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \ .$$

Merk op dat geldt $\det[\partial_1\underline{x},\partial_2\underline{x},\partial_{\alpha\beta}\underline{x}] = \sqrt{g}\, L_{\alpha\beta}$, zodat in het bijzonder $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$.

3.342. Voorbeelden.

3.3421. Bol.

3.3422. Recht schroefvlak.

3.3423. Hyperboloïde.

3.3424. De meetkundige betekenis van L.

3.343. De afgeleide van $\underline{N}$

Uit $|\underline{N}| = 1$ volgt $(\partial_\alpha\underline{N},\underline{N}) = 0$ zodat $\partial_\alpha\underline{N} \in \langle\partial_1\underline{x},\partial_2\underline{x}\rangle$ of ook

$[D\underline{N}] = [D\underline{x}]\Lambda$ met een nog te bepalen matrix Λ . $\sim\delta\kappa$

Uit $(\underline{N},\partial_\alpha\underline{x}) = 0$ volgt door differentiëren naar u^β dat

$(\partial_\beta\underline{N},\partial_\alpha\underline{x}) + (\underline{N},\partial_\alpha\partial_\beta\underline{x}) = 0$ zodat $[D\underline{N}]^T[D\underline{x}] = -L$.

Λ voldoet aan de vergelijking

$$\Lambda^T[D\underline{x}]^T[D\underline{x}] = -L \ , \text{ of } \Lambda^T G = -L$$

en dat betekent $\Lambda = -G^{-1}L$, $[D\underline{N}] = -[D\underline{x}]\, G^{-1}L$.

In uitgeschreven vormen staat de laatste uitdrukking bekend als de formules van Weingarten (1861) :

$$\partial_1\underline{N} = -(L_{11}G^{11} + L_{12}G^{12})\partial_1\underline{x} - (L_{11}G^{12} + L_{12}G^{22})\partial_2\underline{x} =$$

$$= g^{-1}(G_{12}L_{12} - G_{22}L_{11})\partial_1\underline{x} + g^{-1}(G_{12}L_{11} - G_{11}L_{12})\partial_2\underline{x} \,,$$

$$\partial_2\underline{N} = g^{-1}(G_{12}L_{22} - G_{22}L_{12})\partial_1\underline{x} + g^{-1}(G_{12}L_{12} - G_{11}L_{22})\partial_2\underline{x} \,.$$

3.35. Stellingen.

3.351. $\partial_1\underline{N} \times \partial_2\underline{N} = g^{-\frac{1}{2}}\ell\underline{N}$.

3.352. $\det[\underline{N},\partial_1\underline{N},\partial_2\underline{N}] = g^{-\frac{1}{2}}\ell$.

3.353. $\det[\underline{N},\partial_\alpha\underline{N},\partial_1\underline{x}] = g^{-\frac{1}{2}}\{G_{11}L_{\alpha 2} - G_{12}L_{\alpha 1}\}$.

3.354. $\det[\underline{N},\partial_\alpha\underline{N},\partial_2\underline{x}] = g^{-\frac{1}{2}}\{G_{12}L_{\alpha 2} - G_{22}L_{\alpha 1}\}$.

3.36. Beschouw een vlak door $\underline{x} + \langle\underline{N}\rangle$; dit snijdt het oppervlak volgens een kromme, die we met zijn booglengte geparametriseerd denken. Voor deze (vlakke) kromme is dan $\underline{n} = \pm\underline{N}$, we kiezen de parametrisering zó dat $\underline{n} = \underline{N}$. Nu is

$$\underline{x}'' = ('u^\alpha\partial_\alpha\underline{x})' = {}''u^\alpha\partial_\alpha\underline{x} + {}'u^\alpha{}'u^\beta\partial_\alpha\partial_\beta\underline{x} \,,$$

en anderzijds is $\underline{x}'' = \kappa\underline{N}$, zodat

$$\kappa = (\underline{N},\underline{x}'') = {}'u^\alpha{}'u^\beta L_{\alpha\beta} \,.$$

De kromming van déze kromme noemen we de *normale kromming* κ_n van het oppervlak in $\underline{x}$ in de richting $\underline{t}$. We krijgen zo

$$\kappa_n = L_{\alpha\beta}{}'u^\alpha{}'u^\beta = \frac{L_{\alpha\beta}\dot u^\alpha\dot u^\beta}{G_{\alpha\beta}\dot u^\alpha\dot u^\beta}$$

(met . voor willekeurige parameters).

Beschouw nu een willekeurige kromme door $\underline{x}$, op het oppervlak en geparametriseerd met zijn booglengte. Stel dat θ de hoek tussen $\underline{N}$ en $\underline{n}$ is, en dat κ de kromming van de kromme is. Dan is

$$\underline{x}'' = \kappa\underline{n} \quad \text{en} \quad (\underline{x}'',\underline{N}) = \kappa\cos\theta \,.$$

Anderzijds is

$$(\underline{x}'',\underline{N}) = {}'u^\alpha{}'u^\beta L_{\alpha\beta} = \kappa_n \qquad \text{(volgens 3.332)}$$

zodat $\kappa_n = \kappa\cos\theta$ (stelling van Meusnier, 1776).

Men noemt nu κ_n ook de *normale kromming* van die kromme, het is de normale component van de kromming, en voor alle krommen in die richting even groot.

3.361. Voorbeelden

3.3611. Plat vlak.

3.3612. Bol.

3.3613. Recht schroefvlak.

3.3614. Voorstelling van Monge.

3.362. Stellingen

3.3621. Als $L_{\alpha\beta} = 0$ voor alle $\underline{u} \in \mathbb{U}$ dan is $\underline{x}(\mathbb{U})$ een plat vlak.

3.3622. Als c constant is en $L_{\alpha\beta} = cG_{\alpha\beta}$ voor alle $\underline{u} \in \mathbb{U}$ dan is $\underline{x}(\mathbb{U})$ een bol of een plat vlak.

3.3623. Als $\underline{u}^\alpha$ een kromme is op $\underline{x}(\mathbb{U})$ met raakvector $\underline{t}$ in $\underline{x}$, en als $\underline{a}$ de normale sectie is van het vlak door $\underline{x} + \langle \underline{t} \rangle$, dan is het kromtemiddelpunt van $\underline{u}^\alpha$ in $\underline{x}$ de projectie van het kromtemiddelpunt van $\underline{a}^\alpha$ op het osculatievlak van $\underline{u}^\alpha$ in $\underline{x}$.

3.37. We kunnen, in een punt $\underline{x}_0$, κ_n beschouwen als een differentieerbare functie van de raaklijnvector $\underline{\dot{x}} = \underline{\xi} = (\xi,\eta)^T$, namelijk

$$\kappa_n = L_{11}\xi^2 + 2L_{12}\xi\eta + L_{22}\eta^2 = \underline{\xi}^T[L_{\alpha\beta}]\underline{\xi} ,$$

onder de nevenvoorwaarden $\underline{\xi}^T[G_{\alpha\beta}]\underline{\xi} = 1$. Dus heeft, omdat $[g_{\alpha\beta}]$ positief definiet is, κ_n een globaal maximum en een globaal minimum, *hoofdkrommingen* genaamd, laten we zeggen κ_1 en κ_2, met $\kappa_1 \leq \kappa_n \leq \kappa_2$. Als $\kappa_1 = \kappa_2$, dan is κ_n constant en

$$\left.\frac{L_{11}}{G_{11}}\right|_{\underline{x}_0} = \left.\frac{L_{12}}{G_{12}}\right|_{\underline{x}_0} = \left.\frac{L_{22}}{G_{22}}\right|_{\underline{x}_0} ;$$

zo'n punt heet een *umbilicaalpunt*; van een bol en een plat vlak is ieder punt umbilicaalpunt.

Stel nu dat κ_n niet constant is, $\kappa_1 \neq \kappa_2$.

Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de functies $f(\underline{\xi}) = \underline{\xi}^T L \underline{\xi}$ en $h(\underline{\xi}) = \underline{\xi}^T G \underline{\xi}$.

κ_1 en κ_2 zijn extremen van f onder de voorwaarde $h(\underline{\xi}) = 1$.

De vectoren $\underline{\xi}$ waar $f(\underline{\xi})$ deze extreme waarden aanneemt voldoen aan vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} f_1(\hat{\underline{\xi}}) - \Theta h_1(\hat{\underline{\xi}}) &= 0 \\ f_2(\hat{\underline{\xi}}) - \Theta h_2(\hat{\underline{\xi}}) &= 0 \\ h(\hat{\underline{\xi}}) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{terwijl } \hat{\kappa} = f(\hat{\underline{\xi}})$$

Omdat f en h homogene polynomen van graad 2 zijn, is

$2f(\underline{\xi}) = \xi_1 f_1(\underline{\xi}) + \xi_2 f_2(\underline{\xi})$ en h analoog. Vermenigvuldig de eerste twee vergelijkingen met $\hat{\xi}_1$ resp. $\hat{\xi}_2$ en tel op :

$$2f(\hat{\underline{\xi}}) - 2\Theta h(\hat{\underline{\xi}}) = 0, \ \Theta = \hat{\kappa} \ .$$

Voorts is $f_1(\hat{\underline{\xi}}) = \underline{e}_1^T L\underline{\xi} + \underline{\xi}^T L\underline{e}_1 = 2\,\underline{e}_1^T L\underline{\xi}$ zodat

$$\begin{bmatrix} f_1(\hat{\underline{\xi}}) \\ f_2(\hat{\underline{\xi}}) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L\underline{\xi} = 2L\underline{\xi} \ ,$$

evenzo

$$\begin{vmatrix} h_1(\hat{\underline{\xi}}) \\ h_2(\hat{\underline{\xi}}) \end{vmatrix} = 2G\underline{\xi} \ ,$$

en de eerste twee vergelijkingen gaan over in

$$L\hat{\underline{\xi}} - \hat{\kappa}G\hat{\underline{\xi}} = 0 \quad , \text{ equivalent met } G^{-1}L\hat{\underline{\xi}} = \hat{\kappa}\hat{\underline{\xi}} \ .$$

Dus κ_1 en κ_2 zijn de eigenwaarden van $G^{-1}L$, en $\hat{\xi}_1$ en $\hat{\xi}_2$ zijn de bijbehorende eigenvectoren.

Omdat $g = \det G > 0$, heeft $\det(G^{-1}L)$ hetzelfde teken als $\det L = \ell$;
verder is $\kappa_1\kappa_2 = \det(G^{-1}L) = \ell g^{-1}$ en

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \mathrm{tr}\,(G^{-1}L) = g^{-1}\,\{G_{11}L_{22} - 2G_{12}L_{12} + G_{22}L_{11}\}$$

i) $\ell > 0$ dan $\kappa_1\kappa_2 > 0$, $\kappa_1 > 0$ en $\kappa_2 > 0$, elliptisch punt ;

ii) $\ell = 0$, $0 = \kappa_1 \lessgtr \kappa_2$, parabolisch punt ;

iii) $\ell < 0$, $\kappa_1 < 0 < \kappa_2$, hyperbolisch punt.

Als $L_{\alpha\beta}|_{\underline{x}_0} = 0$ dan spreken we van een planair punt.

3.371. Voorbeelden.

3.3711. Bol.

3.3712. Torus.

3.3713. $\underline{x} = [u, v, \; u^3 + v^3 + u^4]^T$

3.3714. $\underline{x} = [x, y, \; x^2 + y^3]^T$

3.3715. Alle punten op het raaklijnenoppervlak van een kromme zijn parabolisch.

3.372. De *eerste* of *gemiddelde* kromming van het oppervlak in $\underline{x}_0$ is $\mu := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$, de *tweede, totale, specifieke* of *Gausse* kromming is $\kappa = \kappa_1\kappa_2$;

$$\mu = \frac{G_{11}L_{22} + G_{22}L_{11} - 2G_{12}L_{12}}{2g} ,$$

$$\kappa = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g} = \frac{\ell}{g} .$$

De hoofdkrommingen κ_1 en κ_2 zijn de wortels van de vierkantsvergelijking $x^2 - 2\mu x + \kappa = 0$, of van

$$gx^2 - (G_{11}L_{22} + G_{22}L_{11} - 2G_{12}L_{12})x + \ell = 0 .$$

3.373. De bij κ_1 en κ_2 behorende eigenvectoren $\underline{\xi}_1$ en $\underline{\xi}_2$ bepalen de orthogonale *hoofdrichtingen* in $\underline{x}_0$. Een kromme op het oppervlak, waarvan de raakvector overal hoofdrichting is, heet *kromtelijn*.

Uit $\hat{\kappa}G\underline{\xi} - L\underline{\xi} = \underline{0}$ volgt, via 3.33 en 3.343 ,

$$[\hat{\kappa}D\underline{x} + D\underline{N}]^T[D\underline{x}]\hat{\underline{\xi}} = \underline{0} .$$

Nu stelt $[D\underline{x}]\hat{\underline{\xi}}$ een raakvector $\underline{t}$ voor, met de kolommen van $\hat{\kappa}D\underline{x} + D\underline{N}$ in het raakvlak gelegen; dat beide kolommen met $\underline{t}$ orthogonaal zijn, hetgeen de laatste afgeleide betrekking juist voorstelt, betekent dat die kolommen afhankelijk zijn, anders gezegd, er is een $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ met $[\hat{\kappa}D\underline{x} + D\underline{N}]\underline{\lambda} = \underline{0}$. Voor zo'n $\underline{\lambda}$ is dan evenwel ook

$$[\hat{\kappa}G - L]\underline{\lambda} = \underline{0}\ ,$$

zodat $\underline{\lambda} = \underline{\bar{\xi}}$:

$$[\hat{\kappa}D\underline{x} + D\underline{N}]\underline{\xi} = \underline{0}\ ,$$

$$\hat{\kappa}\frac{d\underline{x}}{ds} + \frac{d\underline{N}}{ds} = \underline{0}\ ,$$

de differentiaalvergelijking (van Rodrigues, 1815) voor de kromtelijnen; als $\underline{x}(\underline{u}(s))$ aan deze differentiaalvergelijking voldoet is het, omgekeerd, een kromtelijn.
Door ieder punt van het oppervlak (niet umbilicaalpunt) gaan precies twee kromtelijnen.

Stelling. $\underline{x}(\underline{u}(s))$ is dan en slechts dan kromtelijn als $\det[\underline{x}',\underline{N},\underline{N}'] = 0$.

Bewijs. Uit de vergelijking $\hat{\kappa}\underline{x}' + \underline{N}' = \underline{0}$ volgt direct dat $\det[\underline{x}',\underline{N},\underline{N}'] = 0$; omgekeerd volgt uit deze betrekking dat er κ,λ,μ bestaan zó dat

$$\kappa\underline{x}' + \lambda\underline{N} + \mu\underline{N}' = \underline{0}\ ,$$

en aangezien $\underline{x}'$ en $\underline{N}$ orthonormaal zijn, is $\mu \neq 0$; voorts volgt door met $\underline{N}$ inwendig te vermenigvuldigen, $\lambda = 0$; dus $\kappa\underline{x}' + \mu\underline{N}' = \underline{0}$ of $\hat{\kappa}\underline{x}' + \underline{N}' = \underline{0}$. □

Definitie (Strubecker, 1958): De grootheid

$$\tau_g := \det[\underline{x}',\underline{N},\underline{N}']$$

heet de *geodetische torsie* van de kromme (op het oppervlak, in het punt).

3.374. Als de parameterlijnen kromtelijnen zijn, dan is

$$\kappa_1\partial_1\underline{x} + \partial_1\underline{N} = \underline{0}\ ,$$

$$\kappa_2\partial_2\underline{x} + \partial_2\underline{N} = \underline{0}$$

en

$$G_{12} = L_{12} = 0;$$

en omgekeerd.

3.375. Stelling (van Joachimsthal, 1846; van Bonnet, 1853). Als de snijkromme van twee oppervlakken een kromtelijn is op beide oppervlakken, dan is de hoek tussen die vlakken langs de kromme constant; en omgekeerd: als de hoek constant is en de kromme is kromtelijn op één, dan is ze ook kromtelijn op het andere oppervlak.

<u>Bewijs</u>. Langs die kromme is

$$\kappa \underline{x}' + \underline{N}' = \underline{0}$$
$$\tilde{\kappa} \underline{x}' + \tilde{\underline{N}}' = \underline{0}$$

waaruit door vermenigvuldigen met $\tilde{\underline{N}}$, respectievelijk $\underline{N}$ volgt

$$(\underline{N}',\tilde{\underline{N}}) + (\tilde{\underline{N}}',\underline{N}) = 0$$

of

$$(\underline{N},\tilde{\underline{N}})' = 0 \ ;$$

omgekeerd, uit $(\underline{N},\tilde{\underline{N}})' = 0$ en $\kappa\underline{x}' + \underline{N}' = \underline{0}$ volgt $(\underline{N}',\tilde{\underline{N}}) = 0$, dus $(\underline{N},\tilde{\underline{N}}') = 0$, en omdat ook $(\tilde{\underline{N}},\tilde{\underline{N}}') = 0$ is $\tilde{\underline{N}}' = \tilde{\underline{N}} \times \underline{N}$, zodat er een $\tilde{\kappa}$ is met $\tilde{\underline{N}}' + \tilde{\kappa}\underline{x}' = \underline{0}$.□

3.376. <u>Stelling van Euler</u> (1760).

Als een raakvector van $\underline{x}$ ($\mathfrak{J}$) een hoek φ maakt met een hoofdrichting $\hat{\underline{\xi}}_1$ dan geldt voor de normale kromming in die richting

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi \ . \qquad \square$$

3.377. <u>Indicatrix van Dupin</u> (1813).

Teken in een normale sectie van het oppervlak de osculatiecirkel, en snijdt deze met een vlak dat op een afstand h met het raakvlak evenwijdig is; men vindt dan 2 punten, op afstand $\sqrt{h(2\rho - h)} \approx \sqrt{2\rho h}$ van de projectie van $\underline{x}$ verwijderd; nu is $\rho = \kappa_n^{-1}$, en Dupin beschouwde in verband hiermee de verzameling

$$\{|\kappa_n|^{-\frac{1}{2}}\xi^\alpha \partial_\alpha \underline{x} \mid \underline{\xi}^T G \underline{\xi} = 1\}$$

van vectoren in $T_{x_0}(\underline{x}(\mathrm{II}))$. Voor de coëfficiënten ξ^α geldt dan

$$|\kappa_n|^{-\frac{1}{2}}\underline{\xi}^T L \underline{\xi} |\kappa_n|^{-\frac{1}{2}} = \kappa_n |\kappa_n|^{-1} = \pm 1$$

zodat die verzameling uit één of twee kegelsnede(n) bestaat, en wel een ellips in een elliptisch, twee hyperbolen in een hyperbolisch, een paar evenwijdige rechten in een parabolisch punt.

3.378. <u>Asymptotische richtingen</u>

Richtingen waar $\kappa_n = 0$ corresponderen met een asymptoot van de indicatrix en heten *asymptotische richtingen*. In een elliptisch punt zijn er geen;

in een parabolisch punt is er één, tevens hoofdrichting; in een hyperbolisch punt zijn er twee, gespiegeld ten opzichte van de hoofdrichtingen.
Als $\kappa_n = 0$ dan heeft de betreffende normale sectie een buigpunt (of nog platter punt), en dan heeft iedere kromme door dat punt in die richting de kromming 0, behalve als het osculatievlak met het raakvlak samenvalt.
Als ℓ continu is op $\underline{x}(\mathbb{I})$ is met een hyperbolisch punt ook een omgeving hyperbolisch, en in die omgeving zijn twee velden van asymptotische richtingen gedefinieerd; krommen die in ieder punt raken aan een asymptotische richting heten *asymptotische krommen;* op $\{\underline{y} \in \underline{x}(\mathbb{I}) \mid \ell < 0\}$ gaan door ieder punt twee asymptotische krommen, bepaald door

$$L_{\alpha\beta}{}'u^\alpha{}'u^\beta = 0 \quad \text{of} \quad (\underline{x}',\underline{N}') = 0 \ .$$

In het bijzonder is iedere rechte lijn op $\underline{x}(\mathbb{I})$ een asymptotische kromme.

3.38. Aangezien $\{\partial_1\underline{x},\partial_2\underline{x},\underline{N}\}$ een basis is voor $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^3)$ kunnen ook $\partial_{11}\underline{x},\partial_{12}\underline{x} = \partial_{21}\underline{x}$ en $\partial_{22}\underline{x}$ in deze vectoren worden uitgedrukt, zodat, gebruik makend van 3.341,

$$\partial_\alpha\partial_\beta\underline{x} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma\underline{x} + L_{\alpha\beta}\underline{N}$$

met zekere, naar Christoffel (1869) genoemde, coëfficiënten $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ die we nog nader onderzoeken.

3.381. <u>Stelling</u>. $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}G^{\gamma\varepsilon}(\partial_\alpha G_{\beta\varepsilon} + \partial_\beta G_{\varepsilon\alpha} - \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta})$. □

De $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ hangen dus alleen van de fundamentaalvorm G af, en niet van L.

3.382. Zij weer $\underline{x}(u(s),v(s)) = \underline{x}(\underline{u}(s))$ een kromme op het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{I})$. Dan is

$$\begin{aligned}
\underline{t} = \underline{x}' &= {}'u^\alpha\partial_\alpha\underline{x} \ , \\
\kappa\underline{n} = \underline{x}'' &= {}'u^\alpha{}'u^\beta\partial_\alpha\partial_\beta\underline{x} + {}''u^\alpha\partial_\alpha\underline{x} = \\
&= {}'u^\alpha{}'u^\beta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma\underline{x} + {}''u^\gamma\partial_\gamma\underline{x} + {}'u^\alpha{}'u^\beta L_{\alpha\beta}\underline{N} = \\
&= \{{}'u^\alpha{}'u^\beta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + {}''u^\gamma\}\partial_\gamma\underline{x} + {}'u^\alpha{}'u^\beta L_{\alpha\beta}\underline{N}
\end{aligned}$$

en als we in het raakvlak de vector $\underline{s} := \underline{N} \times \underline{t}$ invoeren dan is de component van $\underline{x}''$ in het raakvlak door $\underline{s}$ gericht, zodat, met $\kappa\underline{n} := \kappa_n\underline{N} + \kappa_g\underline{s}$

$$\kappa_g\underline{s} = \{{}'u^\alpha{}'u^\beta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + {}''u^\gamma\}\partial_\gamma\underline{x}$$

κ_g heet de *geodetische kromming*, van de kromme, in $\underline{x}$.

Men ziet voorts direct dat

$$\kappa_g = \kappa(\underline{n},\underline{s}) = \kappa(\underline{n},\underline{N} \times \underline{t}) = \kappa \det[\underline{N},\underline{t},\underline{n}] = \kappa(\underline{N},\underline{b})$$

en $(\underline{N},\underline{b})$ is de cosinus van de hoek tussen raakvlak en osculatievlak. Men kan ook schrijven $\kappa_g = \det[\underline{N},\underline{x}',\underline{x}'']$.

3.383. Een kromme waar in ieder punt geldt $\kappa_g = 0$ heet *geodeet of geodetische kromme.*

Geodeten worden bepaald door

$$'u^{\alpha}\,'u^{\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + ''u^{\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1,2)$$

of door

$$\det[\underline{N},\underline{x}',\underline{x}''] = 0 \ .$$

De tweede vergelijking drukt uit dat langs een geodeet het osculatievlak door de normaal op het oppervlak gaat (als $\underline{x}'' \neq \underline{0}$).

Stelling. Door ieder punt van het oppervlak gaat in iedere richting een geodeet. □

3.384. Stelling. Als een boog γ van $\underline{y}$ naar $\underline{z}$ op het oppervlak $\underline{x}(J)$ korter is dan alle andere bogen van $\underline{y}$ naar $\underline{z}$, dan is γ een boog op een geodeet. □

3.385. Voorbeelden.

3.4. *Regelvlakken.*

Zij $\mathbb{I}$ een interval in $\mathbb{R}$, $\mathbb{J} := \mathbb{I} \times \mathbb{R}$, $\underline{r}: \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ een reguliere kromme, $\underline{y}: \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ een C^1-afbeelding met $\forall_{u \in \mathbb{I}}\ \underline{y}(u) \neq \underline{0}$. Beschouw het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{J})$ met $\underline{x}(u,v) := \underline{r}(u) + v\underline{y}(u)$, dat met het punt $\underline{r}(u)$, een gehele rechte door $\underline{r}(u)$ bevat; dit oppervlak noemt men een *regelvlak*, zo'n lijn een *beschrijvende lijn*; een beschrijvende is een parameterkromme met vaste u, ℓ_u.

3.41. Opdat de parametervoorstelling regulier is, is nodig en voldoende dat geldt $\underline{\dot r} \times \underline{y} + v\underline{\dot y} \times \underline{y} \neq \underline{0}$ (voor alle u en v in een omgeving in $\mathbb{J}$).
We veronderstellen dat hieraan is voldaan; dan is in het punt $\underline{x}(u,v)$ de vector $\underline{\dot r} \times \underline{y} + v\underline{\dot y} \times \underline{y}$ een normaalvector van $\underline{x}(\mathbb{J})$.

3.411. Het geval dat $\underline{\dot y} \times \underline{y} = \underline{0}$ voor alle $u \in \mathbb{J}$. Dan is $\underline{y}(u) = f(u)\underline{y}_0$ en $\underline{x}(\mathbb{J})$ is een *cilinder* met *richtkromme* $\underline{r}$.

3.412. Het geval dat $\underline{\dot y} \times \underline{y} \neq \underline{0}$, en $\underline{\dot r} \times \underline{y}$ en $\underline{\dot y} \times \underline{y}$ zijn afhankelijk; dan is $\underline{\dot y} \times \underline{y}$ een normaalvector op $\underline{x}(\mathbb{J})$ langs de bij $\underline{r}(u)$ behorende beschrijvende, en bijgevolg is

$$V_u : (\underline{\xi} - \underline{r}(u), \underline{\dot y} \times \underline{y}) = 0$$

de vergelijking van het raakvlak langs die beschrijvende. Het oppervlak $\underline{x}(\mathbb{J})$ is dan de *omhullende* van dit stelsel raakvlakken.

Immers

$$V_u' : (-\underline{\dot r}, \underline{\dot y} \times \underline{y}) + (\underline{\xi} - \underline{r}, \underline{\ddot y} \times \underline{y}) = 0$$

of $\quad (\underline{\xi} - \underline{r}, \underline{\ddot y} \times \underline{y}) = 0$

geeft als karakteristiek

$$\underline{\xi} - \underline{r} = \lambda(\underline{\dot y} \times \underline{y}) \times (\underline{\ddot y} \times \underline{y}) = \lambda \det[y, \dot y, \ddot y]\underline{y}.$$

We veronderstellen voorlopig dat $\eta := \det[y, \dot y, \ddot y] \neq 0$.
Dan is de karakteristiek juist ℓ_u, en $\underline{x}(\mathbb{J})$, de verzameling der karakteristieken, de omhullende van $\{V_u\}_u$.

3.413. Als $\quad V_u : (\underline{\xi},\underline{a}) = p$

een stelsel vlakken voorstelt, met van de parameter u afhankelijke $\underline{a}$ en p, dan wordt (zoals we vroeger zagen) de karakteristieke lijn bepaald door V_u en V'_u , met

$$V'_u : (\underline{\xi},\underline{a}') = p' .$$

Nu heeft ℓ_u met V_v een punt gemeen waarvoor, indien we schrijven

$$f(u) := (\underline{\xi},\underline{a}(u)) - p(u) \text{ , geldt}$$

$$f(u) = 0 \wedge f'(u) = 0 \wedge f(v) = 0 ,$$

zodat er een w tussen u en v is met $f'(w) = 0$ en er een t is tussen u en w met $f''(t) = 0$. Dus voor zo'n $\underline{\xi}$ is $f''(t) = 0$, en als $v \to u$ dan geldt voor het limietpunt (als het bestaat)

$$V''_u : f''(u) = (\underline{\xi},\underline{a}'') - p'' = 0 .$$

Dit punt heet het karakteristieke punt $\underline{k}_u$, en het voldoet aan de vergelijkingen

$$(\underline{k}_u,\underline{a}) = p$$

$$(\underline{k}_u,\underline{a}') = p'$$

$$(\underline{k}_u,\underline{a}'') = p'' .$$

Men kan ook zeggen : het karakeristieke punt is het snijpunt van de karakteristiek ℓ_u en het vlak V''_u .
Op het ontwikkelbare oppervlak vinden we het karakteristieke punt door

$$\underline{\xi} = \underline{r} + v\underline{y} \text{ te snijden met}$$

$$V''_u : (-\dot{\underline{r}},\ddot{y} \times \underline{y}) + (\underline{\xi} - \underline{r}, \dddot{\underline{y}} \times \underline{y} + \ddot{y} \times \dot{y}) = 0 ,$$

zodat de parameter $v^{\int}$ wordt gevonden uit

$$(-\dot{r},\ddot{\underline{y}} \times \underline{y}) + (v^{\int}\underline{y}, \dddot{\underline{y}} \times \underline{y} + \ddot{y} \times \dot{y}) = 0,$$

$$v^{\int} = \det [\dot{\underline{r}},\ddot{\underline{y}},\underline{y}] / \det [y,\ddot{y},\dot{y}] =$$

$$= \det [\dot{r},y,\ddot{y}] / \det [y,\dot{y},\ddot{y}] .$$

De *keerkromme* van het oppervlak is dan

$$\underline{k} = \underline{r} + v^{\int}\underline{y} .$$

en de raakvector $\dot{\underline{k}}$ voldoet in het karakteristieke punt aan

$$\left.\begin{aligned}(\underline{\ddot{k}},\underline{a}) + (\underline{k},\underline{\dot{a}}) &= \dot{p}\\ (\underline{\ddot{k}},\underline{\dot{a}}) + (\underline{\dot{k}},\underline{\ddot{a}}) &= \ddot{p}\\ (\underline{\ddot{k}},\underline{\ddot{a}}) + (\underline{k},\underline{\dddot{a}}) &= \dddot{p}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}(\underline{\ddot{k}},\underline{a}) &= 0\\ (\underline{\ddot{k}},\underline{\dot{a}}) &= 0\end{aligned}\right\} \quad \underline{\ddot{k}} \in \langle \underline{a} \times \underline{\dot{a}} \rangle .$$

Op het oppervlak is $\underline{a} = \underline{y} \times \underline{\dot{y}}$ en $\underline{a} \times \underline{\dot{a}} = (\underline{y} \times \underline{\dot{y}}) \times (\underline{y} \times \underline{\ddot{y}}) = \eta \underline{y}$, zodat $\underline{\ddot{k}} \in \langle \underline{y} \rangle$.

De keerkromme is de omhullende van het stelsel $\{\ell_u\}_u$

3.4131. Bewijs deze laatste bewering met behulp van stelling 2.252.

3.414. In alle besproken gevallen geldt (zie 3.412)

$$(\underline{\dot{r}} \times \underline{y}) \times (\underline{\dot{y}} \times \underline{y}) = \underline{0} ,$$

equivalent met

$$\det[\underline{\dot{r}},\underline{y},\underline{\dot{y}}] = 0 ,$$

blijkbaar de noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een ontwikkelbaar regelvlak.

3.42. In het algemene geval is $\det[\underline{\dot{r}},\underline{y},\underline{\dot{y}}] \neq 0$ en we spreken dan van een *scheef regelvlak*. Voor twee regels $\underline{r}(u) + v\underline{y}(u)$ en $\underline{r}(u+h) + w\underline{y}(u+h)$ vindt men de gemeenschappelijke loodlijn door de punten met (noteer $\underline{r}(u+h) =: \underline{\hat{r}}$, $\underline{r}(u) =: \underline{r}$, enzovoort)

$$v_h = |\underline{y} \times \underline{\hat{y}}|^{-2}\det[\underline{\hat{y}} \times \underline{y},\underline{\hat{y}},\underline{\hat{r}} - \underline{r}]$$

en

$$w_h = |\underline{y} \times \underline{\hat{y}}|^{-2}\det[\underline{\hat{y}} \times \underline{y},\underline{y},\underline{\hat{r}} - \underline{r}] .$$

Substitueer

$$\underline{\hat{r}} = \underline{r} + h\underline{\dot{r}} + \underline{O}(h^2) ,$$

$$\underline{\hat{y}} = \underline{y} + h\underline{\dot{y}} + \underline{O}(h^2) ,$$

dan

$$v_h = \{|y \times \dot{y}| + O(h)\}^{-2}\{\det[\underline{\dot{y}} \times \underline{y},\underline{y},\underline{\dot{r}}] + O(h)\}$$

$$w_h = \{|y \times \underline{\dot{y}}| + O(h)\}^{-2}\{\det[\underline{\dot{y}} \times \underline{y},\underline{y},\underline{\dot{r}}] + O(h)\}$$

en de limiet voor $h \to 0$ is van beide

$$\tilde{v} = |\underline{y} \times \underline{\dot{y}}|^{-2}\det[\underline{\dot{y}} \times \underline{y},\underline{y},\underline{\dot{r}}] .$$

De kromme $\underline{r}(u) + \tilde{v}(u)\underline{y}(u)$ heet de *strictie-* of *keelkromme* van het oppervlak; ze bestaat uit de *strictiepunten*, ook *centrale* punten genoemd.

Kijk nu in de richting $\underline{y} \times \underline{\hat{y}}$, dan is $\hat{y}$ gedraaid over $\varphi \in [0,\pi]$.

$$\frac{(\underline{\hat{x}} - \underline{x} \,,\, \underline{y} \times \underline{\hat{y}})}{|\underline{y} \times \underline{\hat{y}}|} =: a \text{ is de van een teken voorziene door } \underline{x} \text{ "afgelegde weg"}$$

en

$$\sin \varphi = \frac{|y \times \hat{y}|}{|\underline{y}|\,|\underline{\hat{y}}|} .$$

Dus $\dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{|\underline{y}|\,|\underline{\hat{y}}|\,(\underline{\hat{x}} - \underline{x} \,,\, \underline{y} \times \underline{\hat{y}})}{|y \times \hat{y}|^2}$.

Nu is $(\underline{\hat{x}} - \underline{x} \,,\, \underline{y} \times \underline{\hat{y}}) = (\underline{\hat{r}} + \hat{u}_h\underline{\hat{y}} - \underline{r} - u_h\underline{y} \,,\, \underline{y} \times \underline{\hat{y}}) =$

$$= (\underline{\hat{r}} - \underline{r} \,,\, \underline{y} \times \underline{\hat{y}}) = (h\dot{r} + \mathcal{O}(h^2) \,,\, \underline{y} \times \{\underline{y} + h\underline{\dot{y}} + \mathcal{O}(h^2)\}) =$$

$$= h^2(\underline{\dot{r}},\, \underline{y} \times \underline{\dot{y}}) + \mathcal{O}(h^3) = h^2 \det[\underline{\dot{r}},\underline{y},\underline{\dot{y}}] + \mathcal{O}(h^3)$$

en $|y \times \hat{y}|^2 = h^2|y \times \dot{y}|^2 + \mathcal{O}(h^3)$; hieruit volgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{a}{\varphi} = \lim_{h \to 0} \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{\det[\underline{\dot{r}} \,,\, \underline{y} \,,\, \underline{\dot{y}}]\,|\underline{y}|^2}{|y \times \dot{y}|^2}$$

(Als $|\underline{y}| = 1$ gaat dit over in $\pm(\underline{\dot{y}},\underline{\dot{y}})^{-1}\det[\underline{y},\underline{\dot{y}},\underline{\dot{r}}]$.) We definiëren de *spoed* of *verdelingsparameter* van het regelvlak als

$$d := (\underline{y},\underline{y})\,(\underline{y} \times \underline{\dot{y}},\underline{y} \times \underline{\dot{y}})^{-1}\det[\underline{y},\underline{\dot{y}},\underline{\dot{r}}] .$$

Aangezien voor de oriëntatie van $\underline{y}$, $\underline{\hat{y}}$, $\underline{\hat{r}} + w_u\underline{\hat{y}} - \underline{r} - v_u\underline{y}$ geldt

$$\det[\underline{y},\underline{\hat{y}},\underline{\hat{r}} - \underline{r} + w_u\underline{\hat{y}} - v_u\underline{y}] \approx h^2\det[\underline{y},\underline{\dot{y}},\underline{\dot{r}}]$$

kan men zeggen dat de lijn $\hat{r} + w\hat{y}$ door een infinitesimale schroeving om een lijn door het strictiepunt uit $\underline{r} + v\underline{y}$ ontstaat; de spoed van deze schroeving is d.

Voorbeelden

3.421. Voor het raaklijnenoppervlak van een kromme is de spoed 0.

3.4211. Voor het oppervlak van de hoofdnormalen van een kromme is

3.4212. $\tilde{v} = (\kappa^2 + \tau^2)^{-1}\kappa \quad , \; d = (\kappa^2 + \tau^2)^{-1}\tau$.

3.4213. Voor het oppervlak van de bir[illegible]malen van een kromme is

$$\tilde{v} = 0 \quad , \quad d = \tau^{-1}$$

3.4214. Schroefvlak.

3.4215. Konoïde

3.4216. Op een ontwikkelbaar oppervlak is de strictiekromme de keerkromme.

3.422 De raakvector van de strictiekromme is $\dot{\underline{r}} + \dot{\tilde{v}}\underline{y} + \tilde{v}\dot{\underline{y}}$ en is in het algemeen *niet* loodrecht op de beschrijvenden.

3.423. Het raakvlak in $\underline{x}_0 = \underline{x}(u_0,v_0)$ aan $\underline{x}(\mathrm{II})$ is (met lopende vector $\underline{\xi}$)

$$\det[\underline{\xi} - \underline{x}_0, \dot{\underline{r}}_0 + v_0\dot{\underline{y}}_0, \underline{y}_0] = 0$$

waaraan voor alle $\underline{r}_0 + v\underline{y}_0$ is voldaan, zodat de raakvlakken langs een beschrijvende een bundel vormen:

$$\det[\underline{\xi} - \underline{x}_0, \dot{\underline{r}}_0, \underline{y}_0] + v\det[\underline{\xi} - \underline{x}_0, \dot{\underline{y}}_0, \underline{y}_0] = 0 \ .$$

Uit de gelijkheid der parameters van de punten $\underline{r}_0 + v\underline{y}_0$ en de corresponderende raakvlakken volgt de

<u>Stelling</u> (van Chasles). De dubbelverhouding van vier punten $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4$ op een beschrijvende is gelijk aan die van hun raakvlakken V_1, V_2, V_3, V_4.

3.424. Deze redenering geldt *niet* als *op de beschrijvende* geldt $\det[\dot{\underline{r}}_0, \underline{y}_0, \dot{\underline{y}}_0] = 0$, of, anders gezegd, als $\dot{\underline{r}}_0 \times \underline{y}_0$ en $\dot{\underline{y}}_0 \times \underline{y}_0$ afhankelijk zijn. Zo'n beschrijvende heet *singulier*. Stel $\dot{\underline{r}}_0 \times \underline{y}_0 = \lambda\dot{\underline{y}}_0 \times \underline{y}_0$, dan is in het strictiepunt

$$\tilde{v}_0 = |\underline{y}_0 \times \dot{\underline{y}}_0|^{-2}(\dot{\underline{y}}_0 \times \underline{y}_0, -\lambda\dot{\underline{y}}_0 \times \underline{y}_0) = -\lambda \ ,$$

mits $|\underline{y}_0 \times \dot{\underline{y}}_0| \neq 0$; het strictiepunt heet hier een *cuspidaalpunt* van het regelvlak, de beschrijvende een *torsielijn*. Als $\underline{y}_0 \times \dot{\underline{y}}_0 = \underline{0}$ dan heet die beschrijvende een *cilindrische* beschrijvende. (Als $\dot{\underline{r}}_0 = \underline{0}$, contrarie de afspraak, en $\underline{r}$ in $\underline{r}_0$ een keerpunt heeft, dan heet $\underline{r}_0 + v\underline{y}_0$ een *keerbeschrijvende*. Beschrijvenden die niet torsielijn, cilindrisch of keerbeschrijvende zijn, heten *reguliere* beschrijvenden. De stelling van Chasles geldt voor reguliere beschrijvenden.)

3.425. Het raakvlak aan $\underline{x}(\mathbb{I})$ in *een strictiepunt* heeft als normaal

$$\begin{aligned}
(\dot{\underline{r}} + \tilde{v}\dot{\underline{y}}) \times \underline{y} &= \dot{\underline{r}} \times \underline{y} - |\underline{y} \times \dot{\underline{y}}|^{-2}\det[\dot{\underline{y}} \times \underline{y},\underline{y},\dot{\underline{r}}]\dot{\underline{y}} \times \underline{y} = \\
&= |\underline{y} \times \dot{\underline{y}}|^{-2}\{(\underline{y} \times \dot{\underline{y}},\underline{y} \times \dot{\underline{y}})\dot{\underline{r}} \times \underline{y} - (\underline{y} \times \dot{\underline{y}},\dot{\underline{r}} \times \underline{y})\underline{y} \times \dot{\underline{y}}\} = \\
&= |\underline{y} \times \dot{\underline{y}}|^{-2}(\underline{y} \times \dot{\underline{y}}) \times ((\dot{\underline{r}} \times \underline{y}) \times (\underline{y} \times \dot{\underline{y}})) = \\
&= |\underline{y} \times \dot{\underline{y}}|^{-2}(\underline{y} \times \dot{\underline{y}}) \times \{\underline{y} \det[\dot{\underline{r}},\underline{y},\dot{\underline{y}}]\} \\
&= d(\underline{y},\underline{y})^{-1}(\underline{y} \times \dot{\underline{y}}) \times \underline{y} = \\
&= d(\underline{y},\underline{y})^{-1}\{(\underline{y},\underline{y})\dot{\underline{y}} - (\underline{y},\dot{\underline{y}})\underline{y}\} .
\end{aligned}$$

Als we hier nemen $|\underline{y}| = 1$ dan staat er, weer wegens $(\underline{y},\dot{\underline{y}}) = 0$,

$$(\dot{\underline{r}} + \tilde{v}\dot{\underline{y}}) \times \underline{y} = d\dot{\underline{y}} .$$

<u>Stelling</u>. Als $\underline{y}$ genormeerd is met norm 1, dan wordt de normaal van het oppervlak in een strictiepunt gericht door $\dot{\underline{y}}$.

3.43. <u>De locale basis</u>

Zij $\underline{s}(u)$ de naar zijn booglengte u geparametriseerde strictiekromme, zij $|\underline{y}(u)| = 1$ en zij

$$\underline{x}(u,v) = \underline{s}(u) + v\underline{y}(u) \text{ op } \mathbb{I} := \mathbb{I} \times \mathbb{R}.$$

In punten $\underline{s}$ nemen we als basis $\{\underline{y}_1,\underline{y}_2,\underline{y}_3\}$ met $\underline{y}_1 := \underline{y}$, $\underline{y}_2 := \dot{\underline{y}}/|\dot{\underline{y}}|$, $\underline{y}_3 = \underline{y}_1 \times \underline{y}_2$. $\{\underline{y}_1,\underline{y}_2,\underline{y}_3\}$ is een orthonormale basis voor $T_{\underline{s}}$, $\underline{y}_1$ richt de beschrijvende door $\underline{s}$, $\underline{y}_2$ richt de normaal door $\underline{s}$ en heet *centraalnormaalvector*, $\underline{y}_3$ ligt (evenals $\underline{y}_1$) in het raakvlak door $\underline{s}$ en heet de *centraalraakvector*. Merk op dat $\underline{y}_3 = |\dot{\underline{y}}|^{-1}\underline{y} \times \dot{\underline{y}}$.

3.431. De basis $\{\underline{y}_1,\underline{y}_2,\underline{y}_3\}$ hangt van u af, en dus geldt

$$\{\dot{\underline{y}}_1,\dot{\underline{y}}_2,\dot{\underline{y}}_3\} = \{\underline{y}_1,\underline{y}_2,\underline{y}_3\}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa & \alpha \\ \kappa & 0 & -\tau \\ -\alpha & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

waarin men direct herkent dat $\alpha = 0$.
Uit $\dot{\underline{y}} = \dot{\underline{y}}_1 = \kappa\underline{y}_2 = \kappa\dot{\underline{y}}/|\dot{\underline{y}}|$ volgt voorts $\kappa = |\dot{\underline{y}}|$; κ heet de *natuurlijke krom-*

ming, τ heet de *natuurlijke torsie* van het regelvlak, $k := (\kappa^2+\tau^2)^{\frac{1}{2}}$ heet de *totale natuurlijke kromming*.

3.432. Definitie. Onder de *strictie* van het regelvlak verstaan we een getal $\sigma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zó dat (na eventueel u door -u te hebben vervangen) geldt

$$\underline{s}' =: \underline{t} = \underline{y}_1 \cos\sigma + \underline{y}_3 \sin\sigma \ .$$

κ, τ en σ heten de *bewegingsinvarianten* van $\underline{x}(\mathbb{I})$.

3.433. Stelling. Als κ een C^3-functie, τ en σ C^2-functies van $u \in \mathbb{I}$ zijn dan is er één, op verplaatsing na eenduidig bepaald, regelvlak $\underline{x} = \underline{s}(u) + v\underline{y}(u)$ met als natuurlijke kromming, natuurlijke torsie en strictie de functies κ, τ en σ. □

3.434. Stelling. Bij de functies $-\kappa$, τ en $-\sigma$ hoort "hetzelfde" regelvlak als bij κ, τ en σ; bij $-\kappa$, $-\tau$ en σ, en bij κ, $-\tau$, $-\sigma$ horen regelvlakken die door spiegeling ontstaan uit het regelvlak bij κ, τ en σ; bij de drietallen functies $\pm\kappa$, $\pm\tau$, $\pm\sigma$ die nog niet genoemd zijn, horen met het bij κ,τ,σ horende regelvlak in het algemeen niet-congruente regelvlakken. □

3.435. $d = \kappa^{-1} \sin\sigma$.

3.44. Fundamentaalvormen

Zij $\underline{x}(u,v) = \underline{s}(u) + v\underline{y}(u)$, als tevoren.

3.441. Uit $\partial_1 \underline{x} = \underline{s}' + v\dot{\underline{y}}$, $\partial_2 \underline{x} = \underline{y}$ volgt

$$\partial_1 \underline{x} = \underline{y}_1 \cos\sigma + \underline{y}_3 \sin\sigma + \kappa v \underline{y}_2 = [\cos\sigma,\ kv,\ \sin\sigma]^T,$$

$$\partial_2 \underline{x} = \qquad\qquad = [1,0,0]^T,$$

$$G_{11} = 1 + \kappa^2 v^2,\ G_{12} = \cos\sigma,\ G_{22} = 1,\ g = \sin^2\sigma + \kappa^2 v^2 \ .$$

Uit $\partial_1 \underline{x} = \{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3\}[\cos\sigma,\ kv,\ \sin\sigma]^T$ volgt

$$\partial_1 \partial_1 \underline{x} = \{\dot{\underline{y}}_1, \dot{\underline{y}}_2, \dot{\underline{y}}_3\} \begin{bmatrix} \cos\sigma \\ \kappa^2 v \\ \sin\sigma \end{bmatrix} + \{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3\} \begin{bmatrix} -\dot{\sigma}\sin\sigma \\ \dot{\kappa} v \\ \dot{\sigma}\cos\sigma \end{bmatrix} =$$

$$= \{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3\} \begin{bmatrix} -\kappa^2 v & -\dot{\sigma} \sin \sigma \\ \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma & +\dot{\kappa} v \\ \tau\kappa v & +\dot{\sigma} \cos \sigma \end{bmatrix}$$

$$\partial_2 \partial_1 \underline{x} = \{\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3\}[0, \kappa, 0]^T$$

terwijl $\partial_2 \partial_2 \underline{x} = \underline{0}$, zodat

$$L_{11}\sqrt{g} = \begin{vmatrix} \cos \sigma & 1 & -\kappa^2 v - \dot{\sigma} \sin \sigma \\ \kappa v & 0 & \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma + \dot{\kappa} v \\ \sin \sigma & 0 & \tau\kappa v + \dot{\sigma} \cos \sigma \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \sigma(\kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma) + v(\dot{\kappa} \sin \sigma - \kappa\dot{\sigma} \cos \sigma) - \kappa^2 \tau v^2 \ ,$$

$$L_{12}\sqrt{g} = \begin{vmatrix} \cos \sigma & 1 & 0 \\ \kappa v & 0 & \kappa \\ \sin \sigma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \kappa \sin \sigma, \qquad L_{22}\sqrt{g} = 0 \ .$$

3.442. Voor de totale kromming vinden we

$$K = \frac{-\kappa^2 \sin^2 \sigma}{\sin^2 \sigma + \kappa^2 v^2} = \frac{-\sin^2 \sigma}{d^2 + v^2} = -\frac{\kappa^2 d^2}{d^2 + v^2}$$

zodat de totale kromming niet positief is. Op de strictiekromme $v = 0$ is $K\big|_{\underline{s}} = -\kappa^2$.

<u>Stelling</u>. Een regelvlak is dan en slechts dan ontwikkelbaar als $K = 0$. □

3.443. De normale kromming op de strictiekromme volgt uit 3.36, 3.43 en 3.432:

$$\kappa_n\big|_{\underline{s}} = (\underline{s}'', \underline{y}_2) = \kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma \ .$$

3.444. De geodetische kromming op de strictiekromme volgt uit 3.382:

$$\kappa_g\big|_{\underline{s}} = \det[\underline{y}_2, \underline{s}', \underline{s}''] = -\sigma' \ .$$

<u>Stelling</u> (van Bonnet). Als een kromme $\underline{c}$ op een scheef regelvlak twee van de drie volgende eigenschappen heeft, heeft ze ook de derde:

i) strictiekromme,

ii) geodeet,

iii) isogonaaltrajectorie van de beschrijvenden.

Bewijs. Hierboven staat i $\Rightarrow$ [ii $\Leftrightarrow$ iii], equivalent met[[i $\wedge$ ii] $\Rightarrow$ iii] $\wedge$ [[i $\wedge$ iii] $\Rightarrow$ ii]]. Blijft te bewijzen [ii $\wedge$ iii] $\Rightarrow$ i.
Neem een kromme $\underline{c} = \underline{s} + v\underline{y}_1$ met v een functie van u.
Dan geldt $\kappa_g = \det[\dot{\underline{c}},\ddot{\underline{c}},\underline{y}_2]$, en hierin is $\dot{\underline{c}}$ de afgeleide van $\underline{c}$ naar zijn booglengte, s. Dus $\dot{\underline{c}} = \underline{c}'\frac{du}{ds}$ en $\ddot{\underline{c}} = \underline{c}''(\frac{du}{ds})^2 + \underline{c}'\frac{d^2u}{ds^2} = \underline{c}''\dot{u}^2 + \underline{c}'\ddot{u}$. Met

$$\underline{c}' = \underline{s}' + v'\underline{y}_1 + v\underline{y}_1' = \underline{y}_1(\cos\sigma + v') + \kappa v\underline{y}_2 + \underline{y}_3\sin\sigma\ ,$$

$$\begin{aligned}\underline{c}'' &= \kappa\underline{y}_2(\cos\sigma + v') + \kappa v(-\kappa\underline{y}_1 + \tau\underline{y}_3) - \tau\underline{y}_2\sin\sigma + \\ &\quad + \underline{y}_1(-\sigma'\sin\sigma + v'') + \underline{y}_2(\kappa' v + \kappa v') + \sigma'\underline{y}_3\cos\sigma = \\ &= \underline{y}_1(-\kappa^2 v - \sigma'\sin\sigma + v'') + \underline{y}_2(\kappa\cos\sigma + \kappa v' - \tau\sin\sigma + \kappa' v + \kappa v') + \\ &\quad + \underline{y}_3(\kappa v\tau + \sigma'\cos\sigma)\ ,\end{aligned}$$

vinden we

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \det[\dot{u}\underline{c}',\dot{u}^2\underline{c}'' + \ddot{u}\underline{c}',\underline{y}_2] = \dot{u}^3\det[\underline{c}',\underline{c}'',\underline{y}_2] = \\ &= \dot{u}^3\begin{vmatrix}\cos\sigma + v' & -\kappa^2 v - \sigma'\sin\sigma + v'' & 0\\ \kappa v & \kappa\cos\sigma + 2\kappa v' - \tau\sin\sigma + \kappa v' & 1\\ \sin\sigma & \kappa v\tau + \sigma'\cos\sigma & 0\end{vmatrix} \\ &= -\dot{u}^3\begin{vmatrix}\cos\sigma + v' & -\kappa^2 v - \sigma'\sin\sigma + v''\\ \sin\sigma & \kappa v\tau + \sigma'\cos\sigma\end{vmatrix}\ .\end{aligned}$$

Dit is een gewone tweede-orde differentiaalvergelijking in v, die voor $\kappa_g = 0$ overgaat in

$$0 = \begin{vmatrix}\cos\sigma + v' & -\kappa^2 v - \sigma'\sin\sigma + v''\\ \sin\sigma & \kappa v\tau + \sigma'\cos\sigma\end{vmatrix}\ .$$

Opdat de (strictie)kromme v = 0 voldoet is nodig en voldoende dat

$$0 = \begin{vmatrix}\cos\sigma & -\sigma'\sin\sigma\\ \sin\sigma & \sigma'\cos\sigma\end{vmatrix} = \sigma'\ ,$$

en dit betekent precies dat de kromme v = 0 isogonaaltrajectorie is. □

3.445. De geodetische torsie op de strictiekromme volgt uit 3.373:

$$\tau_g\big|_{\underline{s}} = \det[\underline{s}',\underline{y}_2,\underline{y}_2'] = \tau\cos\sigma + \kappa\sin\sigma\ .$$

Stelling. Scheve regelvlakken hebben een kromtelijn als strictiekromme indien $\tau\cos\sigma + \kappa\sin\sigma = 0$. □

Hoofdstuk IV. *KINEMATICA*

4.1. *Beweging*

Een *beweging* in $\mathbb{E}^3$ is een continue schaar van verplaatsingen: er is een interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ en er is bij iedere $u \in \mathbb{I}$ een verplaatsing $\alpha_u : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$; anders gezegd, er is een afbeelding $\alpha : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{I} \to \mathbb{E}^3$ en $\alpha(x,u) := \alpha_u(x)$ is het beeld van $x \in \mathbb{E}^3$ bij de parameterwaarde $u \in \mathbb{I}$; in kinematisch jargon: $\alpha_u(x)$ is de plaats van x op het ogenblik u (ter vermijding van misverstand en vooroordeel: u stelt niet noodzakelijk de tijd voor).
We veronderstellen dat α voldoende vaak differentieerbaar is; dan is α zeker ook continu als functie van u.
Bij vaste x is $\alpha(x,\mathbb{I})$ een kromme, de *baan* van x.

4.11. <u>De bewegingsvergelijking</u>

Uit $\alpha(x+\underline{h},u) = \alpha(x,u) + \alpha_*(\underline{h},u)$ volgt dat de beweging gepaard gaat met een continue schaar direct-orthogonale lineaire afbeeldingen

$$\alpha_{*u} := \alpha_*(\ ,u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 .$$

In het bijzonder wordt een orthonormale basis $\{\underline{e},\underline{f},\underline{g}\}$ in $\mathbb{R}^3$ afgebeeld op een orthonormale basis $\{\alpha_{*u}\underline{e},\alpha_{*u}\underline{f},\alpha_{*u}\underline{g}\}$.
We kiezen nu een willekeurig punt $o \in \mathbb{E}^3$, daarbij een orthonormale basis $\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3\}$ in $\overleftarrow{\sigma}_o(\mathbb{R}^3)$.
Dan is $\alpha_u(o+\sum_j x_j\underline{e}_j) = \alpha_u(o) + \sum_j x_j\alpha_{*u}(\underline{e}_j)$. Het stelsel

$$\{\alpha_u(o),\alpha_{*u}(\underline{e}_1),\alpha_{*u}(\underline{e}_2),\alpha_{*u}(\underline{e}_3)\}$$

heet het *bewegend coordinatenstelsel*; het wordt geacht vast te zitten aan een *bewegende ruimte* E; ter onderscheiding noemen we de onderliggende ruimte E_0, de *vaste ruimte*.
In E_0 kiezen we een coördinatenstelsel $\{0,\underline{E}_1,\underline{E}_2,\underline{E}_3\}$. Zij $\underline{K} := 0 \to \alpha_u(o)$, dan is

$$\underline{K} = \sum_i K_i\underline{E}_i = \{\underline{E}_1,\underline{E}_2,\underline{E}_3\}[K_1,K_2,K_3]^T .$$

Zij voorts $a_{ij} := (\underline{E}_i,\alpha_{*u}(\underline{e}_j))$, dan is

$$\alpha_{*u}(\underline{e}_j) = \sum_i a_{ij}\underline{E}_i ,$$

$$\alpha_u(o+\sum_j x_j\underline{e}_j) = \alpha_u(o) + \sum_j x_j\alpha_{*u}(\underline{e}_j) = 0 + \sum_i \{K_i + \sum_j a_{ij}x_j\}\underline{E}_i ,$$

in matrixnotatie

$$[x_1, x_2, x_3]^T := \underline{X} = \underline{K} + A\underline{x}, \quad \text{met } A := [a_{ij}] ,$$

waarin $\underline{X} \in \overset{+}{\sigma}_0(\mathbb{R}^3)$.

De vergelijking $\underline{X} = \underline{K} + A\underline{x}$ heet de *bewegingsvergelijking* van de beweging E/E_0.

$\underline{X}$, $\underline{K}$ en A zijn functies van de *bewegingsparameter* u.

4.111. Sferische beweging

Er is (tenminste) één punt o voortdurend op dezelfde plaats; $\underline{K}$ is constant.

4.112. Draaiing om een vaste as

Er zijn tenminste twee punten o en p voortdurend op dezelfde plaats; dan blijven alle punten van de rechte <o,p> op dezelfde plaats.

4.113. Rust

Er zijn tenminste drie niet op één rechte liggende punten o,p,q voortdurend op dezelfde plaats; dan blijven alle punten op dezelfde plaats.

4.114. Translatie

Er zijn tenminste twee onafhankelijke vectoren $\underline{f}, \underline{g} \in \mathbb{R}^3$ die bij de beweging niet veranderen. Dan verandert geen enkele vector van $\mathbb{R}^3$ bij de beweging en A is constant.

4.115. Schroeving

Er is (tenminste) één rechte ℓ die bij de beweging voortdurend op zijn plaats blijft (maar niet noodzakelijk blijven alle punten van ℓ op hun plaatsen).

4.116. Vlakke beweging

Er is (tenminste) één vlak W dat bij de beweging op zijn plaats blijft. Dan blijven alle vlakken evenwijdig met W op hun plaats. De beweging is in ieder dezer vlakken congruent met $\alpha|W$.

4.12. De snelheidsverdeling

Uit de bewegingsvergelijking $\underline{X} = \underline{K} + A\underline{x}$ volgt door differentiëren naar u (aangegeven met ')

$$\underline{X}' = \underline{K}' + A'\underline{x} ;$$

indien de parameter de tijd t voorstelt dan levert differentiëren naar t (aangegeven met $\cdot$)

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{K}} + \dot{A}\underline{x} = \dot{\underline{K}} + \dot{A}(A^T(\underline{X} - \underline{K})) = \dot{A}A^T\underline{X} + \dot{\underline{K}} - \dot{A}A^T\underline{K} .$$

Deze uitdrukking stelt de snelheid voor op de plaats $\underline{X}$. Alleen de term $\dot{A}A^T\underline{X}$ hangt van $\underline{X}$ af. Het veld $\dot{\underline{X}}$ heet het *snelheidsveld* van de beweging op het beschouwde ogenblik en verandert (in het algemeen) met de tijd. Het snelheidsveld heeft de volgende eigenschappen:

4.121. De matrix A is orthogonaal, zodat $\dot{A}A^T$ scheefsymmetrisch is; als rang$(\dot{A}) = 0$, dan is $\dot{A} = 0$ en $\forall_{\underline{X}}\ \dot{\underline{X}} = \dot{\underline{K}}$, het snelheidsveld is constant (als functie van $\underline{X}$); we zeggen dat er een *instantane translatie* is.

4.122. Als rang$(\dot{A}) \neq 0$, dan is rang$(\dot{A}A^T)$ = rang$(\dot{A}) = 2$. Er is een vector $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$ zó dat $\dot{\underline{X}} = \underline{\Omega} \times \underline{X} + \dot{\underline{K}} - \underline{\Omega} \times \underline{K}$. Nu is $\forall_{\underline{X}}\ (\dot{\underline{X}},\underline{\Omega}) = (\dot{\underline{K}},\underline{\Omega})$, zodat $(\dot{\underline{X}},\underline{\Omega})$ onafhankelijk is van $\underline{X}$. Ontbind $\dot{\underline{X}}$ in twee componenten, één langs $\underline{\Omega}$, een loodrecht daarop.

$$\dot{\underline{X}} = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\dot{\underline{K}},\underline{\Omega})\underline{\Omega} + \underline{D}, \quad (\underline{D},\underline{\Omega}) = 0 .$$

4.1221. $\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{Y}}$ dan en slechts dan als $\underline{X} - \underline{Y} \in \langle\underline{\Omega}\rangle$.

4.1222. $\underline{D} = \underline{0}$ dan en slechts dan als

$$\underline{\Omega} \times (\underline{X} - \underline{K}) = -\dot{\underline{K}} - (\dot{\underline{K}},\underline{\Omega})(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} ,$$

$$\underline{X} - \underline{K} = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \dot{\underline{K}} + \alpha\underline{\Omega} ,$$

$$\underline{X} = \underline{K} + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \dot{\underline{K}} + \alpha\underline{\Omega} .$$

Dit is de parametervoorstelling van een rechte; op deze rechte is de snelheid

$$\underline{T} := (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\dot{\underline{K}},\underline{\Omega})\underline{\Omega} ,$$

de projectie van $\dot{\underline{K}}$ op $\langle\underline{\Omega}\rangle$.

4.1223. Als $\underline{Z}$ op deze lijn ligt, dan is voor alle $\underline{X}$

$$\dot{\underline{X}} - \dot{\underline{Z}} = \underline{\Omega} \times (\underline{X} - \underline{Z}) ,$$

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\Omega} \times (\underline{X} - \underline{Z}) + \underline{T} .$$

Het snelheidsveld is op dit ogenblik hetzelfde als van een schroeving. Die lijn heet derhalve *instantane schroefas* (ISA). De grootheid $h := (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\dot{\underline{K}},\underline{\Omega})$ heet de (instantane) *gereduceerde spoed*: $\underline{T} = h\underline{\Omega}$. $\underline{T}$ heet de (instantane) *translatiesnelheid*, $\underline{\Omega}$ de (instantane) *hoeksnelheid*. Als $h = 0$ dan is de beweging een *instantane rotatie*, anders een *instantane schroeving*.

4.123. Zij $X := 0 + \underline{X}$; we schrijven $\underline{V}_X := \dot{\underline{X}} = \underline{\Omega} \times (Z \to X) + \underline{T}$.
Beschouw de afbeelding $\beta: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, $\beta(X) := X + \underline{V}_X$.

Stelling. β is een affiene afbeelding.

Bewijs. Neem $n \in \mathbb{N}$, $X_i \in \mathbb{E}^3$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i := 1,\ldots,n)$ en $\sum_i \lambda_i = 1$. Dan is

$$\beta(\textstyle\sum_i \lambda_i X_i) = \sum_i \lambda_i X_i + \underline{\Omega} \times (Z \to \sum_i \lambda_i X_i) + \underline{T} =$$

$$= \textstyle\sum_i \lambda_i X_i + \underline{\Omega} \times (\sum_i \lambda_i (Z \to X_i)) + \sum_i \lambda_i \underline{T} =$$

$$= \textstyle\sum_i \lambda_i \{X_i + \underline{\Omega} \times (Z \to X_i) + \underline{T}\} = \sum_i \lambda_i \beta(X_i) \ . \qquad \square$$

4.1231. De met β verbonden lineaire afbeelding β_* volgt uit

$$\beta_*(\underline{u}) = \beta(X) \to \beta(X + \underline{u}) =$$

$$= \{X + \underline{\Omega} \times (Z \to X) + \underline{T}\} \to \{X + \underline{u} + \underline{\Omega} \times (Z \to (X + \underline{u})) + \underline{T}\} =$$

$$= \underline{u} + \underline{\Omega} \times \underline{u} \ .$$

β_* is regulier; β_* heeft één reële eigenwaarde, 1, met eigenruimte $<\underline{\Omega}>$ of $\mathbb{E}^3_*$, al naar gelang $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$ of $\underline{\Omega} = \underline{0}$; in het bijzonder is β een affiniteit.
Als $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$, dan is $<\underline{\Omega}>^\perp$ invariante deelruimte van β_*.

4.1232. Stelling. Als $\underline{T} = \underline{0}$, dan is ieder vlak E loodrecht op $\underline{\Omega}$ een invariant vlak van β, en $\beta|E$ is een gelijkvormigheidstransformatie.

Bewijs. Als $\underline{u},\underline{v} \in <\underline{\Omega}>^\perp$ dan

$$(\beta_*\underline{u},\beta_*\underline{v}) = (\underline{u} + \underline{\Omega} \times \underline{u}, \underline{v} + \underline{\Omega} \times \underline{v}) = (\underline{u},\underline{v}) + (\underline{\Omega} \times \underline{u}, \underline{\Omega} \times \underline{v}) =$$

$$= (\underline{u},\underline{v}) + ((\underline{\Omega} \times \underline{u}) \times \underline{\Omega},\underline{v}) = (\underline{u},\underline{v}) + ((\underline{\Omega},\underline{\Omega})\underline{u},\underline{v}) = (1 + (\underline{\Omega},\underline{\Omega}))(\underline{u},\underline{v}) . \square$$

Als de beweging vlak is, dan is op ieder ogenblik $\underline{T} = \underline{0}$, en dan heet deze stelling naar *Burmester*.

4.1233. Stelling (van *Mehmke*): Als $C := \alpha A + (1-\alpha)B$ dan is $\underline{V}_C = \alpha\underline{V}_A + (1-\alpha)\underline{V}_B$. $\square$

4.124. Neem $A,B \in \mathbb{E}^3$; dan is

$$(\underline{V}_A - \underline{V}_B, A \to B) = \det[\underline{\Omega}, A \to B, A \to B] = 0 \ .$$

Definitie. Een veld $\underline{U}_X : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3$ heet *equiprojectief* indien

$$\forall_{A \in \mathbb{E}^3} \forall_{B \in \mathbb{E}^3} (\underline{U}_B - \underline{U}_A, A \to B) = 0 .$$

Stelling. Het instantane snelheidsveld van een beweging is equiprojectief.□

4.1241. Stelling. Een equiprojectief veld is een snelheidsveld.

Bewijs. Neem vier niet coplanaire punten A,B,C,D, en beschouw het veld $\underline{U}_X$ in die punten. We zoeken een $\underline{\Omega}$, $\underline{T}$ en Z zó dat

$$[\forall_X \underline{U}_X = \underline{\Omega} \times (Z \to X) + \underline{T}] \wedge [\underline{\Omega} \times \underline{T}] = \underline{0} .$$

Daartoe beschouwen we allereerst de vergelijkingen

1) $\underline{\Omega} \times (Z \to A) + \underline{T} = \underline{U}_A$,

2) $\underline{\Omega} \times (Z \to B) + \underline{T} = \underline{U}_B$,

3) $\underline{\Omega} \times (Z \to C) + \underline{T} = \underline{U}_C$,

4) $\underline{\Omega} \times (Z \to D) + \underline{T} = \underline{U}_D$.

We veronderstellen eerst dat $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ en $\underline{U}_D$ niet alle gelijk zijn; dan is het geen beperking om te onderstellen dat $\underline{U}_A \neq \underline{U}_D$. Zij nu $\underline{a} := D \to A$, $\underline{b} := D \to B$, $\underline{c} := D \to C$, $\underline{u} = \underline{U}_A - \underline{U}_D$, $\underline{v} := \underline{U}_B - \underline{U}_D$, $\underline{w} := \underline{U}_C - \underline{U}_D$. Dan leidt eliminatie van $\underline{T}$ en Z uit (1)-(4) tot

5) $\underline{\Omega} \times \underline{a} = \underline{u}$,

6) $\underline{\Omega} \times \underline{b} = \underline{v}$,

7) $\underline{\Omega} \times \underline{c} = \underline{w}$.

De equiprojectiviteit, uitgedrukt in $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$, betekent

8) $(\underline{a},\underline{v}) + (\underline{b},\underline{u}) = (\underline{b},\underline{w}) + (\underline{c},\underline{v}) = (\underline{c},\underline{u}) + (\underline{a},\underline{w}) = 0$.

Kan men de paren $[\underline{a},\underline{u}]$, $[\underline{b},\underline{v}]$, $[\underline{c},\underline{w}]$ opvatten als Plücker-coördinaten? Ja, want $(\underline{a},\underline{u}) = (D \to A, \underline{u}_A - \underline{u}_D) = 0$. Dan stellen ze dus coplanaire lijnenparen voor, en die snijden elkaar in één punt (ze zijn, daar $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ onafhankelijk zijn, niet evenwijdig); dit punt is blijkbaar $\underline{\Omega}$, en eenduidig bepaald. Men verifieert zonder moeite dat, als $(\underline{u},\underline{b}) \neq 0$, geldt

9) $\underline{\Omega} = (\underline{u},\underline{b})^{-1} \underline{u} \times \underline{v}$,

en dat, als $(\underline{u},\underline{b}) = 0$, geldt

(10) $\underline{\Omega} = |\underline{a} \times \underline{b}|^{-2} \{\det[\underline{v},\underline{a},\underline{b}]\underline{a} - \det[\underline{u},\underline{a},\underline{b}]\underline{b}\}$.

Men ziet, eveneens met gemak, dat uit $\underline{\Omega} \in \langle \underline{a},\underline{b} \rangle$ ook omgekeerd volgt $(\underline{u},\underline{b}) = 0$. Aangezien $\underline{\Omega}$ expliciet in $\underline{a},\underline{b},\underline{u}$ en $\underline{v}$ is uitgedrukt, is $\underline{\Omega}$ niet afhankelijk van de keuze van C. Dus

(11) $\qquad \forall_X \; \underline{\Omega} \times (D \to X) = \underline{U}_X - \underline{U}_D$.

Uit de onafhankelijkheid van $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ volgt dat $\underline{\Omega} = \underline{0}$ dan en slechts dan als $\underline{u} = \underline{v} = \underline{w} = \underline{0}$, en deze conditie betekent dat $\underline{U}_X$ constant is; neem in dit geval $\underline{T} := \underline{U}_A$, Z willekeurig.
Als $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$ dan is $\underline{T} = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{U}_A,\underline{\Omega})\underline{\Omega}$, en de schroefas is

$$Z = A + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{U}_A + \alpha\underline{\Omega} \; .$$

Omdat $\underline{\Omega}$ eenduidig is bepaald, zijn ook $\underline{T}$ en de ISA eenduidig bepaald. □

4.1242. Stelling. Als $\underline{U}_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3$ equiprojectief is, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i := 1,\ldots,n)$ dan is $\underline{U} := \sum_i \lambda_i \underline{U}_i$ equiprojectief, en $\underline{\Omega} = \sum_i \lambda_i \underline{\Omega}_i$.

Bewijs. De equiprojectiviteit is vanzelfsprekend. Voor het overige nemen we $n := 2$; dan volgt het algemene geval door inductie. Veronderstel eerst dat $\underline{\Omega}_1$ en $\underline{\Omega}_2$ onafhankelijk zijn. Beschouw de velden (die we hernoemen $\underline{V}$ en $\underline{W}$)

in de punten	A	$A+\underline{\Omega}_1$	$A+\underline{\Omega}_2$
Het veld $\underline{V}$	$\underline{V}_A$	$\underline{V}_A$	$\underline{V}_A + \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2$
het veld $\underline{W}$	$\underline{W}_A$	$\underline{W}_A + \underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_1$	$\underline{W}_A$
het veld $\underline{U} = \lambda\underline{V} + \mu\underline{W}$	$\lambda\underline{V}_A + \mu\underline{W}_A$	$\lambda\underline{V}_A + \mu\underline{W}_A + \mu\underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_1$	$\lambda\underline{V}_A + \lambda\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 + \mu\underline{W}_A$

We verkeren met $\underline{U}$ in de situatie van formule (10) uit 4.1241; $\underline{u} := \mu\underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_1$, $\underline{b} := \underline{\Omega}_2$, en $(\underline{u},\underline{b}) = 0$. Dus

$$\underline{\Omega} = |\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2|^{-2}\{\det[\lambda\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2, \underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2]\underline{\Omega}_1 - \det[\mu\underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2]\underline{\Omega}_2\} = \lambda\underline{\Omega}_1 + \mu\underline{\Omega}_2 \; .$$

Als $\underline{\Omega}_1$ en $\underline{\Omega}_2$ afhankelijk zijn, dan volgt de bewering direct uit formules (5), (6) en (7) van 4.1241. □

4.125. De positie van de schroefassen

4.1251. Stelling. Als $\underline{U}$ en $\underline{W}$ equiprojectief zijn met onafhankelijke $\underline{\Omega}_1$ en $\underline{\Omega}_2$ en schroefassen p_1 en p_2, dan is de schroefas p van $\lambda\underline{U} + \mu\underline{W}$ een orthogonale snijlijn van de orthogonale transversaal q van p_1 en p_2.

<u>Bewijs</u>. Zij A het snijpunt van p_1 en q, B het snijpunt van p_2 en q. Dan is er een $d \in \mathbb{R}$ zó dat $A \to B = d\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2$. De Plückercoördinaten ten opzichte van A zijn

$$\begin{array}{ll} p_1 & [\underline{\Omega}_1, \underline{0}] \,, \\ p_2 & [\underline{\Omega}_2, d(\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2) \times \underline{\Omega}_2] \,, \\ q & [\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2, \underline{0}] \,. \end{array}$$

De ISA van $\underline{V} := \lambda\underline{U} + \mu\underline{W}$ vinden we met behulp van 4.1222:
Als de spoeden van $\underline{U}$ en $\underline{W}$ zijn h_1 en h_2, dan is $\underline{U}_A = h_1\underline{\Omega}_1$ en $\underline{W}_A = \underline{\Omega}_2 \times (-d\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2) + h_2\underline{\Omega}_2$, zodat

$$\underline{V}_A = \lambda h_1\underline{\Omega}_1 + \mu h_2\underline{\Omega}_2 + \mu d\underline{\Omega}_2 \times (\underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_1) := \ell\underline{\Omega}_1 + m\underline{\Omega}_2 \in \langle\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2\rangle \,,$$

en een parametervoorstelling voor p is

$$Z = A + (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A + \alpha\underline{\Omega} \,;$$

in Plückercoördinaten

$$p \qquad [\underline{\Omega}, (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}(\underline{\Omega} \times \underline{V}_A) \times \underline{\Omega}] \,,$$

met $\underline{\Omega} = \lambda\underline{\Omega}_1 + \mu\underline{\Omega}_2$.
Men ziet direct dat $(\underline{\Omega} \times \underline{V}_A) \times \underline{\Omega} \in \langle\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2\rangle$ zodat p en q elkaar snijden, en dan uiteraard orthogonaal. □

<u>Opmerking</u>. Het snijpunt $C = \gamma A + (1-\gamma)B$ van p en q is precies $A + (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A$. Dus

$$(1-\gamma)d\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 = (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A = (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}(\lambda m - \mu\ell)\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \,,$$

en

$$\begin{aligned} (1-\gamma)d(\underline{\Omega}, \underline{\Omega}) &= \lambda(\mu h_2 + \mu d(\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2)) - \mu(\lambda h_1 - \mu d(\underline{\Omega}_2, \underline{\Omega}_2)) = \\ &= \lambda\mu(h_2 - h_1) + \mu d(\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2) \,. \end{aligned}$$

4.1252. Neem, in het vorige geval, $\lambda = \mu = 1$; $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_1 + \underline{\Omega}_2$.

$$(1) \qquad 1 - \gamma = \frac{h_2 - h_1 + d(\underline{\Omega}, \underline{\Omega}_2)}{d(\underline{\Omega}, \underline{\Omega})} \,,$$

$$(2) \qquad \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{d(\underline{\Omega}, \underline{\Omega}_2) + h_2 - h_1}{d(\underline{\Omega}, \underline{\Omega}_1) + h_1 - h_2} \,;$$

Voor de translatievector $\underline{T}$ vindt men nu (met 4.1222) $\underline{T} = (\underline{\Omega}, \underline{\Omega})^{-1}(\underline{V}_A, \underline{\Omega})\underline{\Omega}$, zodat

$$h = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{V}_A,\underline{\Omega}) = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\ell\underline{\Omega}_1 + m\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_1 + \underline{\Omega}_2) =$$

$$= (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\{\ell(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_1) + (\ell+m)(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2) + m(\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2)\} ,$$

met $\ell = h_1 - d(\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2)$, $m = h_2 + d(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2)$; de factor in accolades wordt

$$h_1(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_1) - d(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_1)(\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2) + (h_1+h_2)(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2) +$$

$$+ d(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2)((\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2) - (\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2)) + h_2(\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2) + d(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2)(\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_2) =$$

$$= (h_1\underline{\Omega}_1 + h_2\underline{\Omega}_2,\underline{\Omega}_1 + \underline{\Omega}_2) - d|\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2|^2 = (\underline{T}_1 + \underline{T}_2,\underline{\Omega}) - d|\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2|^2 .$$

$$\underline{T} = h\underline{\Omega} = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega}\{(\underline{T}_1 + \underline{T}_2,\underline{\Omega}) - d|\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2|^2\} =$$

$$= \underline{T}_1 + \underline{T}_2 - d(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}|\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2|^2\underline{\Omega} .$$

4.1253. Stelling. Als $\underline{U}$ en $\underline{W}$ equiprojectief zijn, met $\underline{\Omega}_1 \neq 0$, $\underline{\Omega}_2 \neq \underline{0}$ en $\underline{\Omega}_1$ en $\underline{\Omega}_2$ afhankelijk, zeg $\underline{\Omega}_i = \omega_i\underline{\Omega}_0$, dan zijn p_1, p_2 en p coplanair.

Bewijs. Zij $q := A + \langle\underline{u}\rangle$ een orthogonale transversaal van p_1 en p_2, met $A \in p_1$ en $|\underline{u}| = 1$, die p_2 in $A + d\underline{u} =: B$ snijdt

p_1	$[\underline{\Omega}_1,\underline{0}]$
p_2	$[\underline{\Omega}_2,d\underline{u} \times \underline{\Omega}_2]$
q	$[\underline{u},\underline{0}]$.

Met 4.1222 is de ISA van $\underline{V} = \lambda\underline{U} + \mu\underline{W}$ de lijn

$$Z = A + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A + \alpha\underline{\Omega} ,$$

$$p \qquad [\underline{\Omega},(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{\Omega} \times \underline{V}_A) \times \underline{\Omega}]$$

en $[\![p,q]\!] = |\underline{\Omega}|^{-3}\det[\underline{\Omega} \times \underline{V}_A,\underline{\Omega},\underline{u}]$. In dit geval is

$$\underline{V}_A = \lambda h_1\underline{\Omega}_1 + \mu(h_2\underline{\Omega}_2 - d\underline{\Omega}_2 \times \underline{u}) = \lambda h_1\underline{\Omega}_1 + \mu h_2\underline{\Omega}_2 - \mu d\underline{\Omega}_2 \times \underline{u} ,$$

zodat $\underline{\Omega} \times \underline{V}_A = -\mu d\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega}_2 \times \underline{u}) = \mu d(\underline{\Omega}_1,\underline{\Omega}_2)\underline{u}$, en $[\![p,q]\!] = 0$.
Dus p snijdt q, en klaarblijkelijk orthogonaal. Nu is

$$h = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{V}_A,\underline{\Omega}) = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\lambda h_1\omega_1 + \mu h_2\omega_2)(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)(\underline{\Omega}_0,\underline{\Omega}_0) =$$

$$= (\lambda h_1\omega_1 + \mu h_2\omega_2)(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)^{-1} .$$

Het snijpunt C van p en q is juist $A + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A$; met $C = \gamma A + (1-\gamma)B$ en gebruik makend van zojuist gevonden betrekkingen geeft dit

$$(1-\gamma)d\underline{u} = \mu d(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega}_2)\underline{u} ,$$

$$1-\gamma = \mu(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)\omega_2(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)^{-2} = \mu\omega_2(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)^{-1} ,$$

$$\gamma = \lambda\omega_1(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)^{-1} ,$$

$$C = (\lambda\omega_1+\mu\omega_2)^{-1}\{\lambda\omega_1 A + \mu\omega_2 B\} .$$

Voor $\lambda := \mu := 1$ komt er

$$C = (\omega_1 + \omega_2)^{-1}(\omega_1 A + \omega_2 B) .$$

Dit geval doet zich, met $h_1 := h_2 := 0$, voor bij de vlakke beweging; deze versie van de stelling heet de stelling van *Aronhold (-Kennedy)*. □

4.1254. Zij nu $\underline{U}$ een veld met ISA $p_1 = A + \langle\underline{\Omega}\rangle$ en spoed h_1, $\underline{W}$ een constant veld. We beschouwen weer $\underline{V} := \lambda\underline{U} + \mu\underline{W}$.
De hoeksnelheid van $\underline{V}$ is $\lambda\underline{\Omega}$.
De ISA van $\underline{V}$ is dus

$$Z = A + \lambda^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{V}_A + \alpha\underline{\Omega} ,$$

en $\underline{V}_A = \lambda h_1\underline{\Omega} + \mu\underline{W}$, dus $\underline{\Omega} \times \underline{V}_A = \mu\underline{\Omega} \times \underline{W}$. Dus

$$Z = A + \lambda^{-1}\mu(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \underline{W} + \alpha\underline{\Omega} ,$$

een lijn p die evenwijdig is met p_1 .
Voor de spoed h geldt

$$h = \lambda^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{V}_A,\underline{\Omega}) = \lambda^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\{\lambda h_1(\underline{\Omega},\underline{\Omega}) + \mu(\underline{W},\underline{\Omega})\} =$$
$$= h_1 + \lambda^{-1}\mu(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{W},\underline{\Omega}) ,$$

zodat de translatiesnelheid is

$$\underline{T} = \underline{T}_1 + \lambda^{-1}\mu(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{W},\underline{\Omega})\underline{\Omega} .$$

In de laatste term is $(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}(\underline{W},\underline{\Omega})\underline{\Omega}$ de projectie van $\underline{W}$ op $\langle\underline{\Omega}\rangle$. Een bijzonder geval is hier $\underline{T}_1 := \underline{0}$ en $\underline{W} := \eta\underline{\Omega}$; dan komt er, met $\lambda := \mu := 1$

$$h = \eta \text{ en } \underline{T} = \eta\underline{\Omega} ,$$

met andere woorden: de snelheidsschroef is te beschouwen als de som van een instantane rotatie en een instantane translatie in de richting van de rotatie-as.

4.126. Voorbeelden

4.1261. Ruimtelijke drijfstang

De ruimtelijke drijfstangbeweging, met twee leibanen ([2], p. 113, [4], p. 120) (ellipsographe, Doppelschieber, double-slide mechanism).
Een stang pq beweegt ten opzichte van $\{0,\underline{E}_1,\underline{E}_2,\underline{E}_3\}$ zó dat p rechtlijnig langs de lijn $\{X = a \wedge Z = 0\}$, q rechtlijnig langs de Z-as beweegt; $\ell := |p \to q|$, en $\ell > a$.

i) Ieder punt $r = \alpha p + (1-\alpha)q$ van de stang doorloopt een kromme; met $P = [a,\eta,0]^T$, $Q = [0,0,\zeta]^T$ is $a^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \ell^2$ en $R = [\alpha a, \alpha\eta, (1-\alpha)\zeta]^T$, en door eliminatie van η en ζ vinden we de kromme:

$$\{\underline{X} \mid \alpha^{-2}(\ell^2 - a^2)^{-1}Y^2 + (1-\alpha)^{-2}(\ell^2 - a^2)^{-1}Z^2 = 1 \wedge X = \alpha a\},$$

een ellips, voor $\alpha := \frac{1}{2}$ een cirkel.
De lijn <p,q> doorloopt het 4-de graads regelvlak

$$\{\underline{X} \mid a^2(X^2(a-X)^2 + (a-X)^2Y^2 + X^2Z^2) = \ell^2X^2(a-X)^2\}.$$

ii) Laat een ruimte, vast met <p,q> verbonden, meebewegen. Dan geldt voor het snelheidsveld

$$\underline{V}_P = \dot\eta\underline{E}_2,\ \underline{V}_Q = \dot\zeta\underline{E}_3,\ \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta = 0,$$

$$\underline{\Omega} \times (P \to Q) = \underline{V}_Q - \underline{V}_P,$$

$$\underline{\Omega} = |P \to Q|^{-2}(P \to Q) \times (\underline{V}_Q - \underline{V}_P) + \lambda(P \to Q) =$$
$$= \ell^{-2}[-\eta\dot\zeta + \dot\eta\zeta, a\dot\zeta, a\dot\eta]^T + \lambda[-a,-\eta,\zeta].$$

De term met $P \to Q$ duidt erop dat de beweging door de gegevens niet is bepaald; een rotatie om <p,q> kan nog gekozen worden.
De snelheid in R is overigens nu wél bekend:

$$\underline{V}_R = \alpha\underline{V}_P + (1-\alpha)\underline{V}_Q.$$

iii) We beperken het aantal vrijheidsgraden van 2 tot 1 door de koppeling in Q te laten bestaan uit een prisma "P" en een rotatie "R"; de as van "P" is de Z-as, die van "R" evenwijdig met de X-as. Op iedere met ≪pq≫ verbonden, meebewegende lijn, die evenwijdig met de X-as is (en blijft), is het veld $\underline{V}_X$ constant. In het bijzonder is in T, de projectie van P op het YOZ-vlak, $\underline{V}_T = \underline{V}_P$. Uit $\underline{\Omega} \times (P \to T) = \underline{0}$ volgt nu $\underline{\Omega} = \xi\underline{E}_1$, zodat $\lambda = a\dot\zeta\ell^{-2}\eta^{-1}$ en $\xi = \dot\eta\zeta^{-1}$, dus $\underline{\Omega} = \dot\eta\zeta^{-1}\underline{E}_1$.

Uit $(\underline{V}_\tau,\underline{\Omega}) = (\underline{V}_P,\underline{\Omega}) = 0$ volgt $\underline{V}_\tau = \underline{0}$, $h = 0$.
De beweging is een instantane rotatie, en omdat het vlak $t + \langle p \to t\rangle^\perp$ in $T + \langle P \to T\rangle^\perp$ blijft, een vlakke beweging. Het is de *vlakke elliptische beweging*, waarbij alle punten ellipsvormige banen beschrijven.
De ISA is

$$0 \to Z = (\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-2}\underline{\Omega} \times \underline{V}_0 + \lambda\underline{\Omega} = \eta\underline{E}_2 + \zeta\underline{E}_3 + \mu\underline{E}_1,\ \mu \in \mathbb{R}\ ;$$

hierbij is gebruik gemaakt van $\underline{V}_0 = \underline{V}_P + \underline{V}_Q$.
De doorgang S van de ISA in het YOZ-vlak doorloopt de kromme $\eta\underline{E}_2 + \zeta\underline{E}_3$, dat is de cirkel $\{\underline{X} \mid Y^2 + Z^2 = \ell^2 - a^2 \wedge X = 0\}$.
De ISA doorloopt de cylinder $\{\underline{X} \mid Y^2 + Z^2 = \ell^2 - a^2\}$.

4.16. <u>De versnellingsverdeling</u>.

Uit de betrekkingen

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{K}} + \dot{A}\underline{x} \text{ en } \dot{A}A^T\underline{X} = \underline{\Omega} \times \underline{X}$$

(4.12, 4.122) volgt

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{K}} + \underline{\Omega} \times A\underline{x},$$

en door differentiëren

$$\ddot{\underline{X}} = \ddot{\underline{K}} + \dot{\underline{\Omega}} \times A\underline{x} + \underline{\Omega} \times \dot{A}\underline{x} =$$

$$= \ddot{\underline{K}} + \dot{\underline{\Omega}} \times A\underline{x} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times A\underline{x}) .$$

4.161. Uit

$$\ddot{\underline{X}} - \ddot{\underline{Y}} = \dot{\underline{\Omega}} \times A(\underline{x} - \underline{y}) + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times A(\underline{x} - \underline{y}))$$

volgt dat er dan en slechts dan punten zijn waar dezelfde versnelling is als de vergelijking

$$\dot{\underline{\Omega}} \times \underline{D} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{D}) = 0$$

een oplossing heeft.

Door inwendig te vermenigvuldigen met $\underline{\Omega}$ komt er

$$\det[\underline{\Omega}, \dot{\underline{\Omega}}, \underline{D}] = 0 ,$$

en substitutie van $\underline{D} := \xi\underline{\Omega} + \eta\dot{\underline{\Omega}}$ geeft dan

$$\xi\dot{\underline{\Omega}} \times \underline{\Omega} + \eta\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}}) = 0 .$$

Er zijn drie mogelijkheden :

4.1611. $\dot{\underline{\Omega}} \times \underline{\Omega} \neq \underline{0}$; dan zijn $\dot{\underline{\Omega}} \times \underline{\Omega}$ en $\underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \dot{\underline{\Omega}})$ lineair onafhankelijk,

en $\xi = \eta = 0$, dus $\underline{D} = \underline{0}$.

4.1612. $\dot{\underline{\Omega}} \times \underline{\Omega} = \underline{0} \wedge \underline{\Omega} \neq \underline{0}$; dan is $\dot{\underline{\Omega}} = a\underline{\Omega}$, de oorspronkelijke vergelijking wordt

$$a\underline{\Omega} \times \underline{D} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{D}) = \underline{0} ,$$

$$\underline{\Omega} \times (a\underline{D} + \underline{\Omega} \times \underline{D}) = \underline{0} ,$$

$$a\underline{D} + \underline{\Omega} \times \underline{D} = \mu\underline{\Omega} .$$

Zij de lineaire afbeelding W gedefinieerd door

$$W\underline{D} := \underline{\Omega} \times \underline{D} ,$$

dan is $(aI + W)^{-1} = a^{-1}(I - a\nu^{-1}W + \nu^{-1}W^2)$ met $\nu := a^2 + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})$.

Dus

$$\underline{D} = a^{-1}(I - a\nu^{-1}W + \nu^{-1}W^2)(\mu\underline{\Omega}) = a^{-1}\mu\underline{\dot{\Omega}}\ .$$

4.1613. Als $\underline{\Omega} = \underline{0}$ dan is blijkbaar $\underline{D} = \mu\underline{\dot{\Omega}}$.

Resumerend vinden we :

In het algemene geval zijn er geen punten met dezelfde versnelling.

Als de ISA stationnair is, $\underline{\dot{\Omega}} \times \underline{\Omega} = \underline{0}$, dan vinden we op lijnen evenwijdig met de ISA een constante versnelling.

Als de beweging een instantane translatie is, zodat de ISA niet is gedefinieerd, dan vinden we op lijnen met richting $\underline{\dot{\Omega}}$ een constante versnelling.

4.162. Als de lineaire afbeelding B wordt gedefinieerd door

$$B\underline{D} := \underline{\dot{\Omega}} \times \underline{D} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{D})$$

dan kan men de resultaten van 4.161 ook als volgt interpreteren:

Als $\underline{\dot{\Omega}} \times \underline{\Omega} \neq \underline{0}$ dan is rang (B) = 3 ; als $\underline{\dot{\Omega}} \times \underline{\Omega} = \underline{0}$ en $\underline{\dot{\Omega}}$ en $\underline{\Omega}$ zijn niet beide $\underline{0}$ dan is rang (B) = 2 ; als $\underline{\dot{\Omega}} = \underline{\Omega} = \underline{0}$ dan is rang (B) = 0 .

4.163. <u>De versnellingspool</u>. Als rang (B) = 3 dan is er precies één punt $\underline{H}$ waar de versnelling $\underline{0}$ is, en dat correspondeert met de oplossing van de vergelijking

$$\underline{\dot{\Omega}} \times A\underline{x} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times A\underline{x}) = -\underline{\ddot{K}}$$

Deze oplossing luidt

$$A\underline{h} = |\underline{\dot{\Omega}} \times \underline{\Omega}|^{-2}\{(\underline{\ddot{K}},\underline{\Omega})\underline{\dot{\Omega}} \times \underline{\Omega} + (\underline{\ddot{K}},\underline{\dot{\Omega}})\underline{\dot{\Omega}} + (\det[\underline{\dot{\Omega}},\underline{\Omega},\underline{\ddot{K}}] + (\underline{\Omega},\underline{\Omega})(\underline{\Omega},\underline{\ddot{K}}))\underline{\Omega}\}$$

hetgeen men door invullen kan verifieren.

Dus

$$\underline{H} = \underline{K} + A\underline{h} \text{ en } \underline{\ddot{H}} = \underline{0}$$

In dit geval is de versnellingsverdeling dus

$$\ddot{\underline{X}}\ (= \ddot{\underline{X}} - \ddot{\underline{H}}) = BA(\underline{x} - \underline{h}) = B(\underline{X} - \underline{H})\ .$$

4.164. Als $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$ en $\dot{\underline{\Omega}} = a\underline{\Omega}$ (zodat rang $(B) = 2$) dan vindt men de punten waar $\ddot{\underline{X}} = \underline{0}$ uit

$$a\underline{\Omega} \times A\underline{x} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times A\underline{x}) = -\ddot{\underline{K}}\ ,$$

met oplossing

$$A\underline{h} = a\nu^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\ \underline{\Omega} \times \ddot{\underline{K}} + \nu^{-1}\ddot{\underline{K}} + \mu\underline{\Omega} \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

als $(\ddot{\underline{K}},\underline{\Omega}) = 0$; en lege oplossing als $(\ddot{\underline{K}},\underline{\Omega}) \neq 0$.

Bij een vlakke beweging doet zich het eerste geval voordurend voor.
Daar is dus in *een vlak* van de vlakke beweging een versnellingspool, namelijk

$$H = \underline{K} + a\nu^{-1}(\underline{\Omega},\underline{\Omega})^{-1}\underline{\Omega} \times \ddot{\underline{K}} + \nu^{-1}\ddot{\underline{K}}$$

Ook hier is dan

$$\ddot{\underline{X}} = B(\underline{X} - \underline{H})\ .$$

In dit vlak beschouwen we dan nog de afbeelding

$$\alpha(\underline{X}) = \underline{X} + \ddot{\underline{X}}\ ,$$

uiteraard een affiene afbeelding met

$$\alpha(X + \underline{V}) = \underline{X} + \underline{V} + (\underline{X} + \underline{V})^{\ddot{}} \quad \text{en}$$

$$\alpha_*(\underline{V}) = \underline{V} + B\underline{V}\ ,\ \alpha_* = I + B.$$

Voor vectoren in $\underline{\Omega}^{\perp}$ is

$$B\underline{D} = a\underline{\Omega} \times \underline{D} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{D}) = a\underline{\Omega} \times \underline{D} - (\underline{\Omega},\underline{\Omega})\underline{D}\ ,$$

dus $\qquad B = aW - (\underline{\Omega},\underline{\Omega})I\ .$

Dan is $\alpha_* = I(1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega})) + aW$, $\alpha_*^T = I(1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega})) - aW$ en

$$\alpha_*\alpha_*^T = I(1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega}))^2 - a^2W^2 = I(1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega}))^2 + a^2(\underline{\Omega},\underline{\Omega})I\ .$$

Schrijf even $\mu^2 = (1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega}))^2 + a^2(\underline{\Omega},\underline{\Omega}) = (1 - (\underline{\Omega},\underline{\Omega}))^2 + (\dot{\underline{\Omega}},\dot{\underline{\Omega}})$ dan staat er

$\alpha_*\alpha_*^T = \mu^2 I$ zodat $\mu^{-1}\alpha_*$ een isometrie is .

Hieruit volgt dat α een gelijkvormigheid is met factor μ.

(Stelling van Mehmke) .

Literatuur

1. A.C.Aitken, Determinants and Matrices; Oliver and Boyd, Edinburgh etc., 1958

2. J.S. Beggs, Advanced Mechanism; Macmillan, New York & Collier. Macmillan, London, 1966.

3. R. Beyer, Geometrische Bewegungslehre; in Technische und Physikalische Mechanik, deel 1, p.405-467; Verlag J.A. Barth, Leipzig, 1929.

4. R. Beyer, Technische Raumkinematik; Springer, Berlin etc., 1963.

5. O. Bottema & B. Roth, Theoretical Kinematics; North-Holland Publ.Cy, Amsterdam etc., 1979.

6. K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik; Springer Berlin, 1932.

7. W. Fleming, Functions of several Variables (2nd edition); Springer, New York etc., 1977.

8. J. Haantjes, Inleiding tot de Differentiaalmeetkunde; Noordhoff, Groningen, 1954.

9. K.H. Hunt, Screw Axes and Mobility in Spatical Mechanisms; Jnl.Mech. 3 (1967) p. 307 - 327.

10. K.H. Hunt, Kinematic Geometry of Mechanisms; Oxford Univ. Press, Oxford, 1978.

11. D. Laugwitz, Differentialgeometrie; Teubner, Stuttgart, 1960.

12. M.M. Lipschutz, Theory and Problems of Differential Geometry; Schaum's Outline Series, McGraw - Hill etc., 1969.

13. L.H. Loomis & S. Sternberg, Advanced Calculus; Addison Wesley, Reading Mass. etc., 1968.

14. L. Mirsky, An Introduction to Linear Algebra; Oxford Univ. Press, Oxford, 1955.

15. I.R. Porteous, Topological Geometry; Van Nostrand Reinhold, New York etc., 1969.

16. J.J. Seidel, Tensorrekening; collegedictaat 2.237 THE, Eindhoven 1974.

17. G.R. Veldkamp, Kinematica; Oosthoek, Scheltema en Holkema, Utrecht, 1970.

18. G.R. Veldkamp, Statica; Oosthoek, Scheltema en Holkema, Utrecht, 1975.

19. G.R. Veldkamp, Inleiding in de Mechanica; collegedictaat 2.225 THE, Eindhoven, z.j.

20. C.E. Weatherburn, Differential Geometry of three Dimensions; Cambridge 1927 (1955).

21. T.J. Wilmore, An Introduction to Differential Geometry; Oxford Univ. Press, Oxford, 1959 (1972).