TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

# INLEIDING in de MECHANICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. G.R. Veldkamp

Gegeven in het Najaarssemester 1968

2225 Bibl Mog

Technische Hogeschool Eindhoven

## *Onderafdeling der Wiskunde*

# *Inleiding in de Mechanica*

bestemd voor WSK-II

Dictaatnr. 2.225 Prijs $f$ 4,50

# Inhoudsbeschrijving

# Inleiding in de Mechanica

# G.R.Veldkamp (1967-1975)



JdG, 29 Juni 2005

0. Dit geschrift is geen collegedictaat want daarvoor vertoont het te weinig gelijkenis met de aantekeningen die een toehoorder van het college Inleiding in de Mechanica pleegt te maken. Het kan ook nauwelijks een syllabus van dit college worden genoemd. Hiervoor is het namelijk te onevenwichtig: sommige gedeelten van de collegestof worden slechts even aangestipt over andere wordt daarentegen breed uitgeweid. Conclusies over de mindere of meerdere belangrijkheid van deze gedeelten mogen hieraan niet worden verbonden. Na deze negatieve karakterisering is de opmerking, dat kennismaking van het geschrevene van positieve invloed kan zijn op ieder die het college met vrucht wenst te volgen, nu stellig wel op zijn plaats. En hiermee moge de verschijning van dit geschrift voldoende zijn gerechtvaardigd.
De oplettende gebruiker zal bemerken dat geen inhoudsopgave is bijgevoegd. Dit gemis wordt enigszins vergoed door het voorkomen van een vrij uitvoerig register. Het kan een nuttig hulpmiddel zijn, wanneer men het t.z.t. nodig vindt te controleren of men zich de collegestof in voldoende mate eigen heeft gemaakt.

# 1. Wiskundige inleiding

1.1. De ruimte waarin de volgende beschouwingen zich afspelen, is de driedimensionale euclidische ruimte, dat is de ruimte waarin ook de gewone schoolmeetkunde wordt bedreven. In deze ruimte $E_3$ is $OX_1X_2X_3$ steeds een orthonormaal rechts assenstelsel. De coördinaten van een punt X ten opzichte van dit assenstelsel worden $x_1$, $x_2$ en $x_3$ genoemd.

1.2. Zij $\{u_1,u_2,u_3\}$ een geordend drietal getallen.

Definitie 1.2. De vrije vector $\underline{u}$ met kengetallen $u_1$, $u_2$, $u_3$ is de verzameling van alle geordende puntenparen $\{P(p_1,p_2,p_3),Q(q_1,q_2,q_3)\}$ met:

$$(1.2.1) \qquad q_k - p_k = u_k \qquad (k = 1,2,3)\ .$$

Men noteert $\underline{u}$ ook als $(u_1,u_2,u_3)$. Elk geordend puntenpaar $\{P,Q\}$ met (1.2.1) heet een representant van $\underline{u}$. Zulk een puntenpaar wordt ook als $\overrightarrow{PQ}$ genoteerd en heet de gebonden vector met P als begin- en Q als eindpunt. Tenzij duidelijk anders blijkt, betekent het woord vector in het vervolg vrije vector.
De representant van de vector $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ die O als beginpunt heeft, wordt de positievector of plaatsvector van het punt $A(a_1,a_2,a_3)$ genoemd; dit punt wordt ook wel het punt $\underline{a}$ genoemd. We beschouwen uitsluitend vectoren met reële kengetallen (reële vectoren).
De vectoren $\underline{u}$ en $\underline{v}$ heten gelijk (notatie $\underline{u} = \underline{v}$) als $\underline{u}$ dezelfde verzameling geordende puntenparen is als $\underline{v}$. Noodzakelijk en voldoende hiervoor is $u_k = v_k$ $(k = 1,2,3)$.

1.3. Het rekenen met vectoren is gebonden aan de volgende rekenregels.

Optelling: $\underline{u} + \underline{v} := (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$.
De optelling is commutatief, associatief, heeft een neutraal element (de nulvector $\underline{0} = (0,0,0)$) en bezit een tegengestelde (de aftrekking).
Vermenigvuldiging van een vector $\underline{u} = (u_1,u_2,u_3)$ met een getal $\lambda$:
$\lambda\underline{u} := (\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)$. Soms is het doelmatig $\underline{u}\lambda$ te schrijven in plaats van $\lambda\underline{u}$.
Hiervoor gelden de rekenregels:

$$(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u}) \qquad \text{(associatieve wet) ;}$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + \mu)\underline{u} &= \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}\\ \lambda(\underline{u} + \underline{v}) &= \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}\end{aligned}\right. \qquad \text{(distributieve wetten) ;} \qquad 1\underline{u} = \underline{u} .$$

Getallen worden in de vectorrekening veelal scalairen genoemd.
De vector

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \underline{u}_k \qquad (\lambda_k \text{ scalair; } k = 1,\ldots,n)$$

heet een <u>lineaire combinatie</u> van de n vectoren $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$. Is $\lambda_k = 0$ ($k = 1,\ldots,n$) dan zullen we dit de triviale lineaire combinatie van deze vectoren noemen. Een aantal vectoren heet <u>lineair afhankelijk</u> als er een niet triviale lineaire combinatie van deze vectoren bestaat die gelijk is aan de nulvector. In $E_3$ zijn vier of meer vectoren steeds lineair afhankelijk. Anderzijds zijn er in $E_3$ oneindig veel drietallen bestaande uit lineair onafhankelijke (d.i. <u>niet</u> lineair afhankelijke) vectoren.
Het <u>inwendig product</u> (ook <u>inproduct</u> of <u>scalair product</u> genoemd) van de vectoren $\underline{u}$ en $\underline{v}$ (notatie $(\underline{u},\underline{v})$) wordt gedefinieerd door

$$(\underline{u},\underline{v}) := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 .$$

Gemakkelijk is te verifiëren: $(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{v},\underline{u})$; $(\lambda\underline{u},\underline{v}) = (\underline{u},\lambda\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})$; $(\underline{u} + \underline{v}, \underline{w}) = (\underline{u},\underline{w}) + (\underline{v},\underline{w})$; $(\underline{u},\underline{u}) \geq 0$, waarbij het gelijkteken dan en alleen dan geldt als $\underline{u} = \underline{0}$.
Belangrijk zijn de volgende eigenschappen:

1) $(\underline{u},\underline{u})^{\frac{1}{2}}$ is de <u>lengte</u> van elke representant van $\underline{u}$ en heet dan ook de lengte van $\underline{u}$ (notatie: $|\underline{u}|$). Is $|\underline{u}| = 1$ dan wordt $\underline{u}$ een eenheidsvector genoemd.
2) Zijn $\overrightarrow{PU}$ en $\overrightarrow{PV}$ representanten van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ dan is de hoek $\varphi$ tussen $\overrightarrow{PU}$ en $\overrightarrow{PV}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) onafhankelijk van de keuze van P. Men noemt $\varphi$ <u>de hoek tussen $\underline{u}$ en $\underline{v}$</u>.
3) $(\underline{u},\underline{v}) = |\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\varphi$. Maakt men de afspraak dat de nulvector loodrecht staat op elke vector dan geldt dus: de vectoren $\underline{u}$ en $\underline{v}$ staan dan en alleen dan loodrecht op elkaar als hun inwendig product nul is.
4) Als een vector loodrecht staat op drie lineair onafhankelijke vectoren, is deze vector de nulvector.

5) Is $\underline{n} \neq \underline{0}$ een vector en $\gamma$ een scalair dan is de verzameling van het punt $\underline{x}$ met $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma$ een plat vlak loodrecht op $\underline{n}$. Van dit vlak heet $\underline{n}$ een normaalvector. Twee vlakken zijn dan en alleen dan evenwijdig (samenvallen hier mede onder begrepen) als hun normaalvectoren lineair afhankelijk zijn.
6) Met $\det(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ zullen we bedoelen de determinant met $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ als eerste, tweede en derde kolomvector. Zijn $\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{PV}$ en $\overrightarrow{PW}$ representanten van $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ dan is zoals bekend $\det(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ gelijk aan de van een teken voorziene inhoud van het door deze representanten opgespannen parallelepipedum. Nodig en voldoende opdat $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair afhankelijk zijn, is: $\det(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = 0$.

Het uitwendig product (ook uitproduct of vectorproduct genoemd) van $\underline{u}$ met $\underline{v}$ (notatie: $\underline{u} \times \underline{v}$) wordt gedefinieerd als

$$\underline{u} \times \underline{v} := (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)\ .$$

Het gehoorzaamt aan de regels:

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u} \qquad \text{(anticommutatief)} ;$$

$$\lambda(\underline{u} \times \underline{v}) = (\lambda\underline{u}) \times \underline{v} = \underline{u} \times \lambda\underline{v} ; \tag{1.3.1}$$

$$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w} ;$$

$$(\underline{u} \times \underline{v}, \underline{w}) = \det(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = (\underline{u}, \underline{v} \times \underline{w})\ .$$

Uit de definitie volgt direct: $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$ is een nodige en voldoende voorwaarde opdat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ lineair afhankelijk zijn.
Uit (1.3.1) volgt $(\underline{u} \times \underline{v},\underline{u}) = 0$ en $(\underline{u} \times \underline{v},\underline{v}) = 0$. De vector $\underline{u} \times \underline{v}$ staat dus loodrecht op de vectoren $\underline{u}$ en $\underline{v}$. We veronderstellen dat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ lineair onafhankelijk zijn en beschouwen de representanten $\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{PV}$ en $\overrightarrow{PW}$ van $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{u} \times \underline{v}$. Dan staat $\overrightarrow{PW}$ dus loodrecht op het vlak door $\overrightarrow{PU}$ en $\overrightarrow{PV}$. De inhoud van het door $\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{PV}$ en $\overrightarrow{PW}$ opgespannen parallelepipedum is $\det(\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}) =$ $= (\underline{u} \times \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}) > 0$. Dus vormen $\overrightarrow{PU}$, $\overrightarrow{PV}$ en $\overrightarrow{PW}$ in deze volgorde een rechts driebeen. Is $\varphi$ de hoek tussen $\underline{u}$ en $\underline{v}$ dan kan voor de bovengenoemde inhoud ook worden geschreven $|\underline{u} \times \underline{v}|.|\underline{u}||\underline{v}|\sin\varphi$ (hoogte $\times$ oppervlakte grondvlak). Men heeft dus $|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = |u \times v||u||v|\sin\varphi$ en dus $|u \times v| = |u||v|\sin\varphi$; deze formule geldt ten duidelijkste ook voor het geval dat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ lineair afhankelijk zijn (immers dan is $\varphi = 0$ of $\pi$).

Een veel gebruikte rekenregel is die voor het <u>vectorieel tripelproduct</u>:

(1.3.2) $\quad \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) = (\underline{u},\underline{w})\underline{v} - (\underline{u},\underline{v})\underline{w}$ .

Het bewijs is eenvoudig: uit $\det(\underline{v},\underline{w},\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})) = (\underline{v} \times \underline{w}, \underline{u} \times (v \times w)) = 0$ volgt dat $\underline{v}$, $\underline{w}$ en $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})$ lineair afhankelijk zijn. Er is dus een niet triviale lineaire combinatie: $\lambda_1\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) + \lambda_2\underline{v} + \lambda_3\underline{w} = \underline{0}$. Zijn $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair onafhankelijk dan is hierin $\lambda_1 \neq 0$ zodat $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) = \alpha\underline{v} + \beta\underline{w}$. Hieruit volgt: $\alpha(\underline{u},\underline{v}) + \beta(\underline{u},\underline{w}) = (\underline{u},\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})) = 0$. Dus is $\alpha = \lambda(\underline{u},\underline{w})$, $\beta = -\lambda(\underline{u},\underline{v})$ en derhalve

$$\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) = \lambda\{(\underline{u},\underline{w})\underline{v} - (\underline{u},\underline{v})\underline{w}\} .$$

Door de eerste kengetallen links en rechts van het gelijkteken te vergelijken, vindt men $\lambda = 1$. Hiermee is (1.3.2) bewezen voor het geval dat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair onafhankelijk zijn. Het geval dat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair afhankelijk zijn laten we aan de lezer over.

1.4. Het is bijzonder nuttig de volgende opgaven volledig uit te werken, voorzover dit althans in de tekst niet reeds is geschied.

1) Zijn $\underline{u} \neq \underline{0}$ en $\underline{v}$ gegeven vectoren dan is er één en slechts één vector $\underline{w}$ en één en slechts één scalair $\lambda$, zodanig dat

(1.4.1) $\quad (\underline{u},\underline{w}) = 0 \quad$ en $\quad \underline{v} = \lambda\underline{u} + \underline{w}$ .

(Mogelijkheid en ondubbelzinnigheid van het ontbinden van een vector in een gegeven richting en loodrecht hierop.)
<u>Aanw.</u> Als enige mogelijke waarde voor $\lambda$ geeft (1.4.1): $\lambda = -(\underline{u},\underline{u})^{-1}(\underline{u},\underline{v})$, enz.

2) Bewijs dat $|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2|\underline{v}|^2 - (\underline{u},\underline{v})^2$.
<u>Aanw.</u> $|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = (\underline{u} \times \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{u},\underline{v} \times (\underline{u} \times \underline{v}))$ en verder met (1.3.2).

3) Bewijs: $\det(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \underline{c}, \underline{d}) = (\underline{a},\underline{d})\det(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$.

4) Bewijs dat voor elk drietal vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ geldt:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0} .$$

5) Los $\underline{x}$ op uit $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{0}$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$.
<u>Antw.</u> $\underline{x} = \lambda\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Meetkundige interpretatie: de verzameling van het punt $\underline{x}$ met $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{0}$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$ is een lijn met richtingsvector $\underline{a}$ door de oorsprong.

6) Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$ en $\underline{b}$. Gevraagd: discussie van de vergelijking $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$ in $\underline{x}$.
Aanw. Voor $\underline{b} = \underline{0}$ vorige opgave. Neem dus $\underline{b} \neq \underline{0}$. Als $\underline{x}_0$ een oplossing is, geldt $\underline{x}_0 \times \underline{a} = \underline{b}$ en dus $(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a}, \underline{x}_0 \times \underline{a}) = 0$. Noodzakelijk voor het bestaan van oplossingen is dus $(\underline{a},\underline{b}) = 0$. Veronderstel dat hieraan voldaan is en dat $\underline{x}_0$ een oplossing is, dan is $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{x}_0 \times \underline{a}$, of $(\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{a} = \underline{0}$ zodat $\underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda\underline{a}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$ alle oplossingen weergeeft. Slordig gezegd: als er één oplossing is, bestaat er een rechte lijn van oplossingen met $\underline{a}$ als richtingsvector en de bedoelde oplossing als steunvector. Nu heeft elke rechte juist één steunvector die loodrecht op de rechte staat. Dit brengt ons ertoe het bestaan van tenminste een oplossing te bewijzen door aan te tonen dat er één en slechts één vector $\underline{p}$ bestaat waarvoor geldt $\underline{p} \times \underline{a} = \underline{b}$ en $(\underline{p},\underline{a}) = 0$ (nog steeds in de veronderstelling $\underline{a} \neq \underline{0}$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$, $\underline{b} \neq \underline{0}$). Daar $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijk zijn en $\underline{p}$ loodrecht op $\underline{a}$ zowel als $\underline{b}$ moet staan, heeft $\underline{p}$ de gedaante $\mu\underline{a} \times \underline{b}$, waarin $\mu$ moet worden bepaald uit $\mu(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{b}$ of $\mu(\underline{a},\underline{a})\underline{b} = \underline{b}$.
Dus is $\mu = (\underline{a},\underline{a})^{-1}$ en $\underline{p} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b}$.
Conclusie: alle oplossingen van $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\underline{a} \neq 0$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ zijn vervat in $\underline{x} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \lambda\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; dit resultaat geldt ook als $\underline{b} = \underline{0}$. Meetkundig: de verzameling van het punt $\underline{x}$ met $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\underline{a} \neq \underline{0}$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ is de lijn $\underline{x} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \lambda\underline{a}$.

7) Gegeven de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$, $\underline{n} \neq \underline{0}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en het getal $\gamma$. Gevraagd: discussie van het stelsel vergelijkingen in $\underline{x}$:

$$\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b} \;, \quad (\underline{n},\underline{x}) = \gamma \;.$$

Meetkundig: onderlinge ligging van lijn en vlak.
Antw. $(\underline{n},\underline{a}) \neq 0$: 1 oplossing; lijn snijdt vlak;
$(\underline{n},\underline{a}) = 0$, $\gamma(\underline{a},\underline{a}) \neq \det(\underline{n},\underline{a},\underline{b})$: geen oplossing; lijn$||$vlak;
$(\underline{n},\underline{a}) = 0$, $\gamma(\underline{a},\underline{a}) = \det(\underline{n},\underline{a},\underline{b})$: alle oplossingen van $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, lijn in het vlak.

8) Gegeven de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$ en $\underline{d}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$, $(\underline{c},\underline{d}) = 0$.
Gevraagd: discussie van het simultane stelsel vergelijkingen in $\underline{x}$:

$$\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b} \;, \quad \underline{x} \times \underline{c} = \underline{d} \;.$$

Aanw. Het stelsel heeft dan en alleen dan een oplossing als er getallen $\lambda$ en $\mu$ bestaan, zodanig dat

$$(1.4.2) \qquad \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{(\underline{a},\underline{a})} + \lambda\underline{a} = \frac{\underline{c} \times \underline{d}}{(\underline{c},\underline{c})} + \mu\underline{c} \; .$$

Uit het bestaan van zulk een tweetal getallen volgt:

$$\frac{(\underline{a} \times \underline{c},\, \underline{a} \times \underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})} = \frac{(\underline{a} \times \underline{c},\, \underline{c} \times \underline{d})}{(\underline{c},\underline{c})} \; ,$$

of, na enige herleiding: $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) = 0$. Deze voorwaarde is dus noodzakelijk voor oplosbaarheid. We veronderstellen dat zij vervuld is. Uit (1.4.2) vindt men

$$\frac{(\underline{a} \times \underline{b},\, \underline{d})}{(\underline{a},\underline{a})} + \lambda(\underline{a},\underline{d}) = 0 \; .$$

Is $(\underline{a},\underline{d}) \neq 0$, en dus ook $(\underline{b},\underline{c}) \neq 0$, dan is

$$-\frac{(\underline{a} \times \underline{b},\, \underline{d})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{a},\underline{d})}$$

de enig mogelijke waarde voor $\lambda$. Men vindt dan

$$\frac{(\underline{a},\underline{d})\underline{a} \times \underline{b} - (\underline{a} \times \underline{b},\, \underline{d})\underline{a}}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{a},\underline{d})} = \frac{\underline{d} \times \underline{b}}{(\underline{a},\underline{d})} = \frac{\underline{b} \times \underline{d}}{(\underline{b},\underline{c})}$$

als enige oplossing (snijdende lijnen).

Is $(\underline{a},\underline{d}) = 0 = (\underline{b},\underline{c})$ dan onderscheiden we 2 gevallen:

a) $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair onafhankelijk. Dan zijn er getallen $\beta$ en $\delta$ zodanig dat $\underline{b} = \beta\underline{c} \times \underline{a}$ en $\underline{d} = \delta\underline{a} \times \underline{c}$. Er is nu dan en alleen dan een oplossing als $\lambda$ en $\mu$ kunnen worden bepaald uit $\beta\underline{c} + \lambda\underline{a} = \delta\underline{a} + \mu\underline{c}$. Dit is maar op een manier mogelijk: $\lambda = \delta$, $\mu = \beta$. Enige oplossing $\delta\underline{a} + \beta\underline{c}$ (snijdende lijnen).

b) $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair afhankelijk. Zij $\underline{c} = \nu\underline{a}$ $(\nu \neq 0)$. De vergelijkingen zijn nu: $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\nu\underline{x} \times \underline{a} = \underline{d}$. Noodzakelijk en voldoende voor oplosbaarheid: $\underline{d} = \nu\underline{b}$. Oneindig veel oplossingen (samenvallende lijnen). Voor $\underline{c} = \nu\underline{a}$, $\underline{d} \neq \nu\underline{b}$ geen oplossing (evenwijdige lijnen).

Tenslotte het geval $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) \neq 0$. Er is geen oplossing. De vectoren $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair onafhankelijk. Immers $\underline{c} = \nu\underline{a}$ $(\nu \neq 0)$ leidt tot

$0 = (\underline{a},\underline{b}) = \nu^{-1}(\underline{c},\underline{b})$ en $0 = (\underline{c},\underline{d}) = \nu(\underline{a},\underline{d})$ waaruit volgt: $(\underline{b},\underline{c}) = (\underline{a},\underline{d}) = 0$ wat absurd is. Meetkundig: de lijnen kruisen elkaar.

Merk op: $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) = 0$ is nodig en voldoende opdat de lijnen in een vlak liggen.

9) Gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en het getal $\alpha \neq 0$. Los $\underline{x}$ op uit:

$$\alpha\underline{x} + (\underline{b},\underline{x})\underline{a} = \underline{c} \ .$$

<u>Aanw.</u> $\alpha(\underline{b},\underline{x}) + (\underline{a},\underline{b})(\underline{b},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{c})$; als $(\underline{a},\underline{b}) \neq -\alpha$ eenvoudig. Als $(\underline{a},\underline{b}) = -\alpha$ dan geen oplossing als $(\underline{b},\underline{c}) \neq 0$. Als $(\underline{a},\underline{b}) = -\alpha$, $(\underline{b},\underline{c}) = 0$ dan $\underline{x} = \alpha^{-1}(\underline{c} - \lambda\underline{a})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10) Gegeven de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$. Los $\underline{x}$ op uit: $\underline{x} \times \underline{a} + (\underline{b},\underline{x})\underline{c} = \underline{d}$.
<u>Aanw.</u> Als $(\underline{a},\underline{c}) \neq 0$ kan men $(\underline{b},\underline{x})$ vinden, enz. Geen oplossing als $(\underline{a},\underline{c}) = 0$, $(\underline{a},\underline{d}) \neq 0$. Voor $(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{a},\underline{d}) = 0$:

$$\underline{x} = \frac{\underline{a} \times (\underline{d} - \lambda\underline{c})}{(\underline{a},\underline{a})} + \mu\underline{a}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R} \ .$$

11) Los $\underline{x}$ op uit $\underline{a} + \underline{x} \times \underline{b} + \underline{c} \times (\underline{c} \times \underline{x}) = \underline{0}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$).
<u>Aanw.</u> $(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{b},\underline{c})(\underline{c},\underline{x}) - (\underline{c},\underline{c})(\underline{b},\underline{x}) = 0$ $(\alpha)$; $(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{c} \times \underline{b}, \underline{x})$ $(\beta)$; $(\underline{a},\underline{b} \times \underline{c}) + (\underline{b},\underline{c})(\underline{b},\underline{x}) - (\underline{b},\underline{b})(\underline{c},\underline{x}) + (\underline{c},\underline{c})(\underline{c} \times \underline{b}, \underline{x})$ $(\gamma)$. Uit $(\alpha)$, $(\beta)$ en $(\gamma)$

$$|\underline{b} \times \underline{c}|^2(\underline{b},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{b})(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{c},\underline{c})(\underline{b},\underline{c})(\underline{a},\underline{c}) - (\underline{b},\underline{c})(\underline{a},\underline{c} \times \underline{b}) \ ,$$

$$|\underline{b} \times \underline{c}|^2(\underline{c},\underline{x}) = (\underline{a},\underline{b})(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{c},\underline{c})^2(\underline{a},\underline{c}) - (\underline{c},\underline{c})(\underline{a},\underline{c} \times \underline{b}) \ .$$

Als $\underline{b}$ en $\underline{c}$ lineair onafhankelijk zijn vindt men hieruit $(\underline{b},\underline{x})$ en $(\underline{c},\underline{x})$. Zij ter afkorting $(\underline{b},\underline{x}) = \delta$, $(\underline{c},\underline{x}) = \varepsilon$ dan wordt de vergelijking: $\underline{d} + \underline{x} \times \underline{b} - (\underline{c},\underline{c})\underline{x} = \underline{0}$, waarin $\underline{d} = a + \varepsilon\underline{c}$. Dus $\underline{b} \times \underline{d} + (\underline{b},\underline{b})x - \delta\underline{b} + (\underline{c},\underline{c})\underline{x} \times \underline{b} = \underline{0}$. Derhalve: $\underline{b} \times \underline{d} + (\underline{b},\underline{b})\underline{x} - \delta\underline{b} - (\underline{c},\underline{c})d + (\underline{c},\underline{c})^2\underline{x} = \underline{0}$, waaruit $\underline{x}$ kan worden opgelost. Zijn $\underline{b}$ en $\underline{c}$ lineair afhankelijk, dan luidt (met $\underline{c} = \nu\underline{b}$) de vergelijking: $\underline{a} + \underline{x} \times \underline{b} + \nu^2(\underline{b},\underline{x})\underline{b} - \nu^2(\underline{b},\underline{b})\underline{x} = \underline{0}$ zodat $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ noodzakelijk is voor oplosbaarheid. Men vindt nu

$$\underline{x} \times \underline{b} = -\frac{\underline{a} + \nu^2\underline{b} \times \underline{a}}{\nu^4(\underline{b},\underline{b}) + 1} \ , \text{ enz} \ .$$

12) Gegeven de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en de getallen $\alpha$ en $\beta$ met $\alpha\beta \neq 0$. Los $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op uit het stelsel: $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \underline{a}$, $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{b}$.
<u>Antw</u>. Als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijk zijn:

$$\underline{x} = \beta(\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \alpha^{-1}\underline{a},\ \underline{y} = -\alpha(\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b}\ ;$$

Als $\underline{a} = 0$, $\underline{b} \neq \underline{0}$: geen oplossingen.
Als $\underline{a} \neq 0$, $\underline{b} = \underline{0}$: $\underline{x} = \lambda\underline{a}$, $\underline{y} = \beta^{-1}(1 - \lambda\alpha)\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Als $\underline{a} = 0$, $\underline{b} = 0$: $\underline{x}$ willekeurig; $y = -\beta^{-1}\alpha\underline{x}$.

13) Als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijke vectoren zijn, volgt uit $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{y} \times \underline{b}$ dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ lineaire combinaties zijn van $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Bewijs dit.

1.5. Zijn $\underline{r} \neq \underline{0}$ en $\underline{r}^*$ twee vectoren en is $(\underline{r},\underline{r}^*) = 0$ dan is de verzameling van het punt $\underline{x}$ met $\underline{x} \times \underline{r} = \underline{r}^*$ de rechte lijn $\underline{x} = (\underline{r},\underline{r})^{-1}\underline{r} \times \underline{r}^* + \lambda\underline{r}$ (opgave 1.4.6). Deze lijn is door $\underline{r}$ en $\underline{r}^*$ ondubbelzinnig bepaald.
Het ligt voor de hand te vragen of elke rechte lijn $\ell$ twee vectoren bepaalt met soortgelijke eigenschappen als $\underline{r}$ en $\underline{r}^*$. De lijn met richtingsvector $\underline{r}$ ($\underline{r} \neq \underline{0}$) door het punt $\underline{a}$ is de verzameling van de punten $\underline{a} + \lambda\underline{r}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). We definiëren $\underline{r}^* := \underline{a} \times \underline{r}$. Dan geldt $(\underline{r},\underline{r}^*) = 0$. Bovendien hangt $\underline{r}^*$ niet van het punt $\underline{a}$ van de lijn af dat voor de definitie is gebruikt. Immers, bij een punt $\underline{b}$ van de lijn bestaat een getal $\lambda_0$, zodanig dat $\underline{b} = \underline{a} + \lambda_0\underline{r}$. Dus is $\underline{b} \times \underline{r} = \underline{a} \times \underline{r} = \underline{r}^*$. Het ziet er dus naar uit dat $\underline{r}$ en $\underline{r}^*$ door de gegeven lijn bepaald zijn. Geheel juist is dit niet. Men kan namelijk, zonder dat er aan de lijn iets verandert, de richtingsvector $\underline{r}$ door $\alpha\underline{r}$ ($\alpha \neq 0$) vervangen. Dan gaat $\underline{r}^*$ over in $\alpha\underline{r}^*$. Een rechte lijn bepaalt dus op eenzelfde van nul verschillende evenredigheidsfactor na twee vectoren $\underline{r} \neq \underline{0}$ en $\underline{r}^*$ met $(\underline{r},\underline{r}^*) = 0$ en is omgekeerd door zulk een tweetal ondubbelzinnig bepaald. Men noemt $\underline{r}$ en $\underline{r}^*$ <u>Plückervectoren</u> van de lijn. We zullen $\underline{R} := [\underline{r},\underline{r}^*]$ de voorstelling van de lijn in Plückervectoren noemen. Is $|\underline{r}| = 1$ dan heet deze voorstelling genormeerd.
Opdat de rechten $\underline{L}_k = [\underline{\ell}_k,\underline{\ell}_k^*]$ ($k = 1,2$) in één vlak liggen, is nodig en voldoende: $(\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2^*) + (\underline{\ell}_1^*,\underline{\ell}_2) = 0$ (opgave 1.4.8). Voor een meetkundig getint bewijs volgt hier een aanwijzing. Zij $\underline{a}_k$ een punt van $\underline{L}_k$ ($k = 1,2$) en $\underline{a}_1 \neq \underline{a}_2$. Nodig en voldoende voor het coplanair zijn van $\underline{L}_1$ en $\underline{L}_2$ is, dat $\underline{\ell}_1$, $\underline{a}_1 - \underline{a}_2$ en $\underline{\ell}_2$ lineair afhankelijk zijn, dus dat $\det(\underline{\ell}_1, \underline{a}_1 - \underline{a}_2, \underline{\ell}_2) = 0$. Voltooi dit. Voor $(\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2^*) + (\underline{\ell}_1^*,\underline{\ell}_2)$ voeren we de notatie $\langle\underline{L}_1,\underline{L}_2\rangle$ in en noemen deze uitdrukking het scalair moment van $\underline{L}_1$ en $\underline{L}_2$.

1.6. We beschouwen de vlakken $(\underline{n}_1,\underline{x}) = \gamma_1$ en $(\underline{n}_2,\underline{x}) = \gamma_2$ en veronderstellen dat $\underline{n}_1$ en $\underline{n}_2$ lineair onafhankelijk zijn. Dan hebben de vlakken een snijlijn $\underline{L}$ waarvan $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ een richtingsvector is. Voor een punt $\underline{x}$ geldt $\underline{x} \in \underline{L}$ dan en alleen dan als $\underline{x} \times (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) = (\underline{n}_2,\underline{x})\underline{n}_1 - (\underline{n}_1,\underline{x})\underline{n}_2 = \gamma_2\underline{n}_1 - \gamma_1\underline{n}_2$. Dus is $[\underline{n}_1 \times \underline{n}_2, \gamma_2\underline{n}_1 - \gamma_1\underline{n}_2]$ een voorstelling van $\underline{L}$ in Plückervectoren.

1.7. Als de vectoren $\underline{\ell}_1$ en $\underline{\ell}_2$ lineair onafhankelijk zijn, zijn de rechten $\underline{L}_k = [\underline{\ell}_k,\underline{\ell}_k^*]$ (k = 1,2) niet evenwijdig. Zij bezitten dan één loodrechte transversaal $\underline{T}$. Stelt men $\underline{\ell}_1 \times \underline{\ell}_2 = \underline{t}$ dan is

$$\underline{T} = [\underline{t}, \frac{(\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2)\langle\underline{L}_1,\underline{L}_2\rangle}{(\underline{t},\underline{t})}\underline{t} + \underline{\ell}_1^* \times \underline{\ell}_2 + \underline{\ell}_1 \times \underline{\ell}_2^*]$$

een voorstelling van deze transversaal in Plückervectoren. Toon dit aan (verificatie is flauw; afleiding is de bedoeling; paragraaf 1.6 kan van nut zijn).

1.8. Twee niet-evenwijdige rechten in één vlak hebben een snijpunt, twee evenwijdige rechten niet. Men kan echter, zoals bekend, ook aan twee evenwijdige rechten een "snijpunt" toekennen; dit punt wordt dan een oneindig ver, of beter: een oneigenlijk punt genoemd. Rechten met dezelfde richtingsvector gaan alle door hetzelfde oneigenlijke punt. Alle oneigenlijke punten van een plat vlak liggen op een rechte, de oneigenlijke rechte van dit vlak. Wie hier nooit van heeft gehoord, vindt een polulaire uiteenzetting in O. Bottema, Meetkunde, gewoon en anders, Torusreeks, no. 7 (Wolters-Noordhoff, Groningen).
In de stereometrie kan men nu ook aan twee evenwijdige vlakken een snijlijn toekennen, namelijk de gemeenschappelijke oneigenlijke rechte van deze vlakken. Alle oneigenlijke rechten van de ruimte liggen in één vlak: het oneigenlijke vlak.
Twee evenwijdige vlakken kunnen worden voorgesteld door $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma_1$, $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Hun oneigenlijke snijlijn noemen we $\underline{L}_\infty$. Om hiervan de Plückervoorstelling te vinden, passen we met terzijdestelling van elk gewetensbezwaar de procedure van paragraaf 1.6 toe. Dan vinden we $[\underline{0},(\gamma_2-\gamma_1)\underline{n}]$ of, wat wegens $\gamma_2 - \gamma_1 \neq 0$ op hetzelfde neerkomt, $[\underline{0},\underline{n}]$ als voorstelling van $\underline{L}_\infty$ in Plückervectoren. Dit brengt ons op de volgende gedachten. De voorstelling van een rechte in Plückervectoren is $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ met $(\underline{\ell},\underline{\ell}^*) = 0$ en $\ell \neq \underline{0}$;

dit laatste omdat $\underline{\ell}$ richtingsvector is. We laten nu de eis dat de eerste vector in zulk een voorstelling geen nulvector is, vallen. Dat wil zeggen: ook $[\underline{0},\underline{n}]$ ($\underline{n} \neq \underline{0}$) beschouwen we als voorstelling in Plückervectoren van een rechte en wel van de <u>oneigenlijke rechte</u> van alle vlakken $(\underline{n},\underline{x}) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ter onderscheiding noemen we een rechte $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ met $\underline{\ell} \neq \underline{0}$ <u>eigenlijk</u>. Het is allemaal wat roekeloos. Ter geruststelling:

a) Wanneer liggen een eigenlijke rechte $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ ($\underline{\ell} \neq \underline{0}$) en een oneigenlijke rechte $[\underline{0},\underline{n}]$ ($\underline{n} \neq \underline{0}$) in één vlak? Met toepassing van ons oude kriterium is dit dan en alleen dan het geval als $(\underline{\ell},\underline{n}) + (\underline{\ell}^*,\underline{0}) = (\underline{\ell},\underline{n}) = 0$. Dit is dus: als $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ evenwijdig is met het vlak $(\underline{n},\underline{x}) = 0$, of, als men dit liever ziet, in het vlak

$$(\underline{n},\underline{x}) = \frac{\det(\underline{n},\underline{\ell},\underline{\ell}^*)}{(\underline{\ell},\underline{\ell})}$$

ligt. Dit is precies in overeenstemming met de uiteenzetting aan het begin van deze paragraaf.

b) Twee oneigenlijke rechten $[\underline{0},\underline{n}_1]$ en $[\underline{0},\underline{n}_2]$ liggen "blijkens" $(\underline{0},\underline{n}_2) + (\underline{n}_1,\underline{0}) = 0$ steeds in één vlak. Dit klopt daarmee dat <u>alle</u> oneigenlijke rechten in één vlak liggen.

Geen tegenspraken dus tot zover en, hoevel de bovenstaande invoering van de oneigenlijke punten en rechten bepaald niet onberispelijk is (maar dit is geen meetkundeboek), achten we het wel verantwoord met de symbolen $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ ook als $\underline{\ell} = \underline{0}$, maar voor $\underline{\ell}^* \neq \underline{0}$, te rekenen zoals we hierboven hebben gedaan.

1.9. Zij $\underline{s} \neq \underline{0}$ een vrije vector. De deelverzameling van $\underline{s}$ gevormd door de representanten van $\underline{s}$ die dezelfde drager $\ell$ hebben, heet de <u>speer</u> met speervector $\underline{s}$ en drager $\ell$. Een speer wordt ook een <u>glijdende vector</u> genoemd. We beschouwen een speer $\underline{S}$ (speervector $\underline{s}$, drager $\ell$) waarvan de gevonden vector $\overrightarrow{AB}$ een representant moge zijn. De vrije vector $\underline{m}_x$ waarvan $\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{AB}$ een representant is, heet de momentvector van $\overrightarrow{AB}$ in het punt X. Is $\underline{a}$ de positievector van A en $\underline{x}$ die van X dan is $\underline{m}_x = (\underline{a} - \underline{x}) \times \underline{s} = \underline{a} \times \underline{s} - \underline{x} \times \underline{s}$. De vector $\underline{a} \times \underline{s} = \underline{s}^*$ hangt zoals we weten niet af van de keuze van de representant $\overrightarrow{AB}$ van $\underline{S}$. Dit geeft ons het recht de vector $\underline{m}_x = \underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}$ de <u>momentvector in</u> X <u>van de speer</u> $\underline{S}$ te noemen. Blijkbaar is $\underline{s}^*$ de momentvector van $\underline{S}$ in de oorsprong 0.

Kortheidshalve noemen we $\underline{s}^*$ de momentvector van de speer. Door $\underline{s}$ en $\underline{s}^*$ is $\underline{S}$ ondubbelzinnig bepaald; we noteren $\underline{S} = [\underline{s},\underline{s}^*]$. Het rechterlid is meteen ook de voorstelling van de drager van $\underline{S}$ in Plückervectoren. De speren $[\underline{s}_1,\underline{s}_1^*]$ en $[\underline{s}_2,\underline{s}_2^*]$ zijn dan en slechts dan dezelfde speer (gelijk) als $\underline{s}_1 = \underline{s}_2$ en $\underline{s}_2 = \underline{s}_2^*$. Merk op: $[\underline{s},\underline{s}^*]$ en $[\alpha\underline{s},\alpha\underline{s}^*]$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$) zijn als rechten dezelfde doch als speren verschillend, echter met dezelfde drager.

1.10. We beschouwen twee speren $\underline{S}_k = [\underline{s}_k,\underline{s}_k^*]$ $(k = 1,2)$. Zij $\overrightarrow{A_kB_k}$ een representant van $\underline{S}_k$. Men noemt $\det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2B_2})$ het <u>scalaire</u> of <u>wederkerige moment</u> van $\overrightarrow{A_1B_1}$ en $\overrightarrow{A_2B_2}$. Het is onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel en bestand tegen verwisseling van $\overrightarrow{A_1B_1}$ en $\overrightarrow{A_2B_2}$. Is $\underline{a}_k$ de positievector van $A_k$ dan is $\underline{s}_k^* = \underline{a}_k \times \underline{s}_k$ $(k = 1,2)$ en $\det(A_1B_1, A_1A_2, A_2B_2) = \det(\underline{s}_1,\underline{a}_2 - \underline{a}_1,\underline{s}_2) =$ $= \det(\underline{s}_1,\underline{a}_2,\underline{s}_2) + \det(\underline{a}_1,\underline{s}_1,\underline{s}_2) = (\underline{s}_1,\underline{a}_2 \times \underline{s}_2) + (\underline{a}_1 \times \underline{s}_1,\underline{s}_2) = (\underline{s}_1,\underline{s}_2^*) +$ $+ (\underline{s}_1^*,\underline{s}_2)$. In deze uitkomst herinnert niets meer aan de speciale keuze van de representanten. We kunnen $\det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2B_2})$ dus zonder bezwaar het <u>scalaire moment van de speren $\underline{S}_1$ en $\underline{S}_2$</u> noemen en noteren dit (zie 1.8) als $<\underline{S}_1,\underline{S}_2>$. Bijgevolg:

$$<\underline{S}_1,\underline{S}_2> = <\underline{S}_2,\underline{S}_1> = (\underline{s}_1,\underline{s}_2^*) + (\underline{s}_1^*,\underline{s}_2) .$$

$<\underline{S}_1,\underline{S}_2> = 0$ is noodzakelijk en voldoende opdat de speerdragers in één vlak liggen.

Is $\underline{L} = [\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ de genormeerde voorstelling in Plückervectoren van een rechte lijn en $\underline{S}$ een speer dan heet $<\underline{S},\underline{L}>$ het <u>moment van $\underline{S}$ om $\underline{L}$</u>. Is $\underline{x}$ een punt van $\underline{L}$, zodat dus $\underline{\ell}^* = \underline{x} \times \underline{\ell}$, dan is: $<\underline{S},\underline{L}> = (\underline{s},\underline{\ell}^*) + (\underline{s}^*,\underline{\ell}) = (\underline{s},\underline{x} \times \underline{\ell}) +$ $+ (\underline{s}^*,\underline{\ell}) = (\underline{\ell},\underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}) = (\underline{\ell},\underline{m}_x)$. Om welke lijn door X is dus de absolute waarde van het moment van $\underline{S}$ maximaal? (<u>As van maximaalmoment</u>). Wat is de verzameling van de lijnen door X waarom het moment van $\underline{S}$ nul is? De momenten van de speer $\underline{S} = [\underline{s},\underline{s}^*]$ om de positieve coördinaatassen zijn juist de kengetallen van $\underline{s}^*$. We zullen ook speren toelaten van de vorm $[\underline{0},\underline{m}]$ $(\underline{m} \neq \underline{0})$; zij hebben de nulvector als speervector en een oneigenlijke drager. Toepassing van $\underline{m}_x = \underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}$ doet zien dat zo'n oneigenlijke speer in elk punt dezelfde momentvector heeft. Het is verder doelmatig ook de nulspeer $[\underline{0},\underline{0}]$ in te voeren; de drager hiervan is onbepaald.

1.11. Een geordend tweetal vectoren $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ zullen we een <u>duo</u> noemen. Notatie $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\} = \underset{\sim}{U}$, $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\} = \underset{\sim}{V}$, enz. $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V}$ zal betekenen: $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{v}_2$.
<u>Rekenregels</u>: $\alpha\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\} := \{\alpha\underline{u}_1,\alpha\underline{u}_2\}$.
<u>Optelling</u>: $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\} + \{\underline{v}_1,\underline{v}_2\} := \{\underline{u}_1 + \underline{v}_1,\ \underline{u}_2 + \underline{v}_2\}$.
De optelling is commutatief, associatief, distributief ten opzichte van de vermenigvuldiging met scalairen en heeft een neutraal element: het nulduo $\{\underline{0},\underline{0}\}$.

De Plückervectoren van een speer vormen een speciaal soort duo (inwendig product nul).

N.B. Voor speren geldt: $\alpha[\underline{s},\underline{s}^*] = [\alpha s,\alpha s^*]$, maar $[\underline{s}_1,\underline{s}_1^*] + [\underline{s}_2,\underline{s}_2^*] = \{\underline{s}_1 + \underline{s}_2,\ \underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*\}$. Van de laatste formule is het duo rechts van het gelijkteken dan en alleen dan een speer als $(\underline{s}_1 + \underline{s}_2,\ \underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) = 0$, dus als $\langle\underline{S}_1,\underline{S}_2\rangle = 0$, d.i. als de speerdragers in één vlak liggen. In dit geval is $[\underline{s}_1,\underline{s}_1^*] + [\underline{s}_2,\underline{s}_2^*] = [\underline{s}_1 + \underline{s}_2,\ \underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*]$. Analoog aan het scalair moment van twee speren definiëren we voor twee duo's het <u>kruisproduct</u>

$$\underset{\sim}{U} \circ \underset{\sim}{V} = (\underline{u}_1,\underline{v}_2) + (\underline{u}_2,\underline{v}_1) .$$

De rekenregels: $\underset{\sim}{U} \circ \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{V} \circ \underset{\sim}{U}$, $\alpha(\underset{\sim}{U} \circ \underset{\sim}{V}) = (\alpha\underset{\sim}{U}) \circ \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{U} \circ (\alpha\underset{\sim}{V})$, $\underset{\sim}{U} \circ (\underset{\sim}{V} + \underset{\sim}{W}) = \underset{\sim}{U} \circ \underset{\sim}{V} + \underset{\sim}{U} \circ \underset{\sim}{W}$ zijn gemakkelijk te verifiëren.
De analogie voortzettend, definiëren we: <u>de momentvector $\underline{m}_x$ van het duo $\underset{\sim}{U} = \{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ in het punt $\underline{x}$ is</u> $\underline{m}_x = \underline{u}_2 - \underline{x} \times \underline{u}_1$. Door middel van het duo $\underset{\sim}{U}$ wordt zo een afbeelding vastgelegd van de verzameling van alle punten van de ruimte in de verzameling van alle vrije vectoren: $\underline{m}_x$ is het beeld van $\underline{x}$. Zo'n afbeelding heet een <u>vectorveld.</u> In het hier behandelde geval wordt dit vectorveld het momentenveld van het duo U genoemd. Voor twee verschillende punten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt: $\underline{m}_x - \underline{m}_y = \underline{u}_1 \times (\underline{x} - \underline{y})$ zodat

$$(\underline{m}_x - \underline{m}_y,\ \underline{x} - \underline{y}) = 0 . \qquad (1.11.1)$$

Ontbinding van $\underline{m}_x$ en $\underline{m}_y$ langs en loodrecht op $\underline{x} - \underline{y}$ geeft $\underline{m}_x = \lambda(\underline{x} - \underline{y}) + \underline{n}_x$, $\underline{m}_y = \mu(\underline{x} - \underline{y}) + \underline{n}_y$. Dus is $(\underline{m}_x - \underline{m}_y,\ \underline{x} - \underline{y}) = (\lambda - \mu)(\underline{x} - \underline{y},\ \underline{x} - \underline{y})$. Aan (1.11.1) is derhalve dan en alleen dan voldaan als $\lambda = \mu$, dus als de projecties van $\underline{m}_x$ en $\underline{m}_y$ op de verbindingslijn van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ dezelfde vrije vector representeren.

Een vectorveld waarbij de beeldvectoren van twee verschillende punten, geprojecteerd op de verbindingslijn van deze punten, representanten zijn van dezelfde vrije vector, zullen we equiprojectief noemen. Geven we de beeldvector van $\underline{x}$ met $\underline{w}_x$ aan dan is een equiprojectief vectorveld dus gekarakteriseerd door:

$$\forall_{\underline{x},\underline{y}} : (\underline{w}_x - \underline{w}_y, \underline{x} - \underline{y}) = 0 . \tag{1.11.2}$$

Als resultaat van deze paragraaf formuleren we de stelling: het momentenveld van een duo is equiprojectief.

1.12. Naar aanleiding van de vorige paragraaf kan de vraag worden gesteld of elk equiprojectief vectorveld momentenveld is van een duo. Zij W een equiprojectief vectorveld. Als aan elk punt dezelfde beeldvector $\underline{c}$ is toegevoegd (het vectorveld heet dan homogeen) is W het momentenveld van het duo $\{0,\underline{c}\}$. We veronderstellen daarom verder dat $\underline{W}$ niet homogeen is en beschouwen drie niet op één lijn gelegen punten $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en hun beeldvectoren $\underline{w}_A$, $\underline{w}_B$ en $\underline{w}_C$. Dan is $(\underline{a} - \underline{b}, \underline{w}_A - \underline{w}_B) = 0$, $(\underline{a} - \underline{c}, \underline{w}_A - \underline{w}_C) = 0$. Dit brengt ons tot het beschouwen van de rechten

$$\underline{L}_1 = [\underline{a} - \underline{b}, \underline{w}_A - \underline{w}_B] \quad \text{en} \quad \underline{L}_2 = [\underline{a} - \underline{c}, \underline{w}_A - \underline{w}_C] .$$

Zij zijn eigenlijk en niet evenwijdig. Wegens:

$$\begin{aligned} \langle \underline{L}_1, \underline{L}_2 \rangle &= (\underline{a} - \underline{b}, \underline{w}_A - \underline{w}_C) + (\underline{a} - \underline{c}, \underline{w}_A - \underline{w}_B) = \\ &= (\underline{a} - \underline{b}, \underline{w}_A - \underline{w}_B) + (\underline{a} - \underline{b}, \underline{w}_B - \underline{w}_C) + (\underline{a} - \underline{c}, \underline{w}_A - \underline{w}_C) + \\ &+ (\underline{c} - \underline{a}, \underline{w}_B - \underline{w}_C) = (\underline{c} - \underline{b}, \underline{w}_B - \underline{w}_C) = 0 ; \end{aligned}$$

snijden $L_1$ en $L_2$ elkaar dus in een punt $\underline{u}_1$. Stel: $\underline{w}_A + \underline{a} \times \underline{u}_1 = \underline{u}_2$ en voer in het duo $\underline{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. De momentvectoren in $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ van dit duo noemen we $\underline{m}_A$, $\underline{m}_B$ en $\underline{m}_C$. Dan is alvast $\underline{w}_A = \underline{m}_A$. Wegens $\underline{u}_1 \in \underline{L}_1$ en $\underline{u}_2 \in \underline{L}_2$ is $\underline{w}_A - \underline{w}_B = \underline{u}_1 \times (\underline{a} - \underline{b})$ en $\underline{w}_A - \underline{w}_C = \underline{u}_1 \times (\underline{a} - \underline{c})$. Dit leidt tot: $\underline{w}_B = \underline{u}_1 \times \underline{b} + \underline{w}_A + \underline{a} \times \underline{u}_1 = \underline{u}_2 - \underline{b} \times \underline{u}_1 = \underline{m}_B$; evenzo $\underline{w}_C = \underline{m}_C$. Voor een punt $\underline{x}$ dat niet in het vlak ABC ligt, zal de lijn $\underline{L} = [\underline{a} - \underline{x}, \underline{w}_A - \underline{w}_x]$ zowel $\underline{L}_1$ als $\underline{L}_2$ snijden doch niet met $\underline{L}_1$ en $\underline{L}_2$ in één vlak liggen. Dus gaat $\underline{L}$ door $\underline{u}_1$, zodat

$\underline{w}_A - \underline{w}_X = \underline{u}_1 \times (\underline{a} - \underline{x})$. Dit leidt tot $\underline{w}_X = \underline{u}_2 - \underline{u}_1 \times \underline{x} = \underline{m}_X$. Men vindt nu gemakkelijk dat $\underline{w}_X = \underline{m}_X$ ook geldt voor alle punten in vlak ABC. Bijgevolg is $\underset{\sim}{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ een duo waarvan het momentenveld het gegeven equiprojectieve vectorveld is. Is ook $\underset{\sim}{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2]$ een duo waarvan dit laatste veld het momentenveld is dan geldt voor elke $\underline{x}$: $\underline{w}_X = \underline{v}_2 - \underline{x} \times \underline{v}_1 = \underline{u}_2 - \underline{x} \times \underline{u}_1$. Bijgevolg is $\underline{v}_2 = \underline{u}_2$ en $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$. Hiermee is bewezen: <u>bij elk equiprojectief vectorveld bestaat één en slechts één duo waarvan dit veld het momentenveld is</u>. Dit duo is ondubbelzinnig bepaald door drie niet op een lijn gelegen punten met hun beeldvectoren.

1.13. Zij W een equiprojectief vectorveld, momentenveld van het duo $\underset{\sim}{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. We veronderstellen dat W niet homogeen is. Dan is $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$ en we kunnen $\underline{u}_2$ ondubbelzinnig langs en loodrecht op $\underline{u}_1$ ontbinden: $\underline{u}_2 = \sigma \underline{u}_1 + \underline{u}_1^*$ met $(\underline{u}_1, \underline{u}_1^*) = 0$ en $\sigma = \dfrac{(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$. De rechte $\underline{U} = [\underline{u}_1, \underline{u}_1^*]$ heet de <u>as</u> en het getal $\sigma$ de <u>spoed</u> van het duo $\underset{\sim}{U}$ (of van het veld W). Voor elk punt $\underline{x}$ is: $\underline{m}_x = \sigma \underline{u}_1 + \underline{u}_1^* - \underline{x} \times \underline{u}_1$. Is $\underline{p}$ een punt van $\underline{U}$, dus $\underline{u}_1^* = \underline{p} \times \underline{u}_1$, dan kan men schrijven:

$$\underline{m}_X = \sigma \underline{u}_1 + \underline{u}_1 \times (\underline{x} - \underline{p}) = \sigma \underline{u}_1 + \underline{u}_1 \times \overrightarrow{PX} .$$

Hiermee is $\underline{m}_X$ ontbonden in een component evenwijdig met de as (die voor alle punten $\underline{x}$ dezelfde is) en een component loodrecht op de as (de grootte hiervan is recht evenredig met de afstand van $\underline{x}$ tot de as). We trekken nog de conclusie: $|\underline{m}_X| \geq |\sigma| |\underline{u}_1|$ met gelijkheid dan en alleen dan als $\underline{u}_1 \times (\underline{x} - \underline{p}) = \underline{0}$, dus als $\underline{x}$ op de as ligt. Blijkbaar is de as de verzameling van de punten waarin de lengte van de momentvector zo klein mogelijk is. De as is derhalve onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. Van een duo $\{\underline{0}, \underline{u}\}$, $\underline{u} \neq \underline{0}$, moet de spoed geacht worden oneindig te zijn; de as is de oneigenlijke rechte $[\underline{0}, \underline{u}]$.

1.14. We beschouwen drie duo's: $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$ en $\underset{\sim}{W}$ met $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{V}$ en veronderstellen $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$. Van $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$ en $\underset{\sim}{W}$ is de spoed in deze volgorde $\sigma_1$, $\sigma_2$ en $\sigma_3$. De assen $\underline{U} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2 - \sigma_1 \underline{u}_1]$ en $\underline{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2 - \sigma_2 \underline{v}_1]$ van $\underset{\sim}{U}$ en $\underset{\sim}{V}$ hebben een loodrechte transversaal $\underline{T} = [\underline{t}, \underline{t}^*]$. Hiervoor geldt: $(\underline{t}, \underline{u}_1) = 0$, $(\underline{t}, \underline{v}_1) = 0$ en verder $(\underline{t}, \underline{u}_2) + (\underline{t}^*, \underline{u}_1) = (\underline{t}, \underline{v}_2) + (\underline{t}^*, \underline{v}_1) = 0$. Hieruit volgt: $(\underline{t}, \underline{u}_1 + \underline{v}_1) = (\underline{t}, \underline{w}_1) = 0$ en

$$(\underline{t},\ \underline{u}_2 + \underline{v}_2 - \sigma_3\underline{u}_1 - \sigma_3\underline{v}_1) + (\underline{t}^*,\ \underline{u}_1 + \underline{v}_1) = 0\ ,$$

of

$$(\underline{t},\ \underline{w}_2 - \sigma_3\underline{w}_1) + (\underline{t}^*, \underline{w}_1) = 0\ .$$

Dit betekent dat $\underline{T}$ de as van $\underset{\sim}{W}$ loodrecht snijdt. De assen van $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$ en $\underset{\sim}{W}$ hebben dus een gemeenschappelijke loodrechte transversaal.

1.15. Het komt vaak voor dat de kengetallen van een vector $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ functies zijn van eenzelfde parameter $\sigma$. In zo'n geval heet $\underline{x}$ een functie van $\sigma$. We definiëren

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0} \underline{x}(\sigma) := (\lim_{\sigma\to\sigma_0} x_1(\sigma),\ \lim_{\sigma\to\sigma_0} x_2(\sigma),\ \lim_{\sigma\to\sigma_0} x_3(\sigma))\ ,$$

mits de drie limieten in het rechterlid bestaan.
$\underline{x}$ heet continu voor $\sigma = \sigma_0$ als $\lim\limits_{\sigma\to\sigma_0} \underline{x}(\sigma) = \underline{x}(\sigma_0)$.

Als de kengetallen differentieerbare functies zijn, geven we de definitie:

$$\frac{d\underline{x}}{d\sigma} := (\frac{dx_1}{d\sigma}\ ,\ \frac{dx_2}{d\sigma}\ ,\ \frac{dx_3}{d\sigma})\ .$$

Bijgevolg (als het accent differentiëren naar $\sigma$ betekent):

$$\underline{x}'(\sigma) = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{x}(\sigma + h) - \underline{x}(\sigma)}{h}\ .$$

Voor het differentiëren van vectoren gelden dus dezelfde regels als voor differentiëren van scalaire functies. Bijvoorbeeld:

$$(\underline{u} + \underline{v})' = \underline{u}' + \underline{v}',\ (\underline{u},\underline{v})' = (\underline{u}',\underline{v}) + (\underline{u},\underline{v}'),$$

$$(\underline{u} \times \underline{v})' = \underline{u}' \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{v}'\ .$$

Voor een van $\sigma$ afhankelijke differentieerbare vector $\underline{u}$ met constante lengte c volgt uit $(\underline{u},\underline{u}) = c^2$ dat $(\underline{u}',\underline{u}) = 0$. De afgeleide vector staat dus loodrecht op de gegeven vector.
We leggen verder vast:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \underline{x}(\sigma)d\sigma := \left( \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x_1(\sigma)d\sigma, \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x_2(\sigma)d\sigma, \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x_3(\sigma)d\sigma \right) .$$

<u>Vraag</u>. Beschouw de differentiaalvergelijking $\underline{u}'' + k^2\underline{u} = \underline{v}$ waarin $\underline{u}$ een nog onbekende functie is van $\sigma$, $\underline{v}$ een bekende functie van $\sigma$ en $k > 0$ een constante. Als $\underline{u}_0(\sigma)$ hiervan een oplossing is, zijn alle oplossingen van de gedaante $\underline{u} = \underline{c}_1\cos k\sigma + \underline{c}_2\sin k\sigma + \underline{u}_0(\sigma)$ waarin $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ constante vectoren zijn. Is deze bewering juist?

## 2. Beginselen van de kinematica

2.1. Zij V een euclidische ruimte waarin $Ox_1x_2x_3$ een orthonormaal rechts assenstelsel is. Een punt X beweegt ten opzichte van dit assenstelsel als zijn positievector $\underline{x}$ een niet-constante functie is van een scalaire parameter t die gewoonlijk de tijd wordt genoemd. Omtrent deze parameter veronderstellen we dat ze elk reëel interval continu kan doorlopen. Is $\underline{x}$ niet afhankelijk van t dan heet X in rust ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$. Van vectoren die functies zijn van de tijd t veronderstellen we dat ze zo dikwijls continu differentieerbaar zijn naar t als voor het betoog nodig is. Het differentiëren van een functie naar t geven we meestal aan door het plaatsen van een stip boven het functieteken ($\dot{\underline{x}}$; spreek uit: fluksie iks). De verzameling van de punten van de ruimte waarmee een bewegend punt $\underline{x}$ gedurende zijn beweging samenvalt, heet de baan van het punt. Deze baan (die niet geheel in één vlak behoeft te liggen) heeft een parametervoorstelling van de vorm $\underline{x} = \underline{x}(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$; hierin kan $t_1$ ook het symbool $-\infty$ en $t_2$ het symbool $\infty$ zijn. Onder de snelheid $\underline{v}(t)$ van $\underline{x}$ op het tijdstip t verstaat men de vector $\dot{\underline{x}}(t)$. Zonder gevaar voor misverstand maakt men zich meestal schuldig aan de slordige notatie $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$. De snelheidsvector $\underline{v}$ is evenwijdig met de raaklijn aan de baan. Per definitie is de versnelling $\underline{a}$ van het punt $\underline{x}$ gegeven door: $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{x}}$.

2.2. We beschouwen thans een verzameling punten die zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ bewegen doch waarvan de afstand tussen elk tweetal punten van het stelsel onveranderlijk is. Zulk een verzameling heet een star stelsel. Het is doelmatig met dit stelsel een euclidische ruimte W vast verbonden te denken. Deze ruimte valt dan met V samen, doch beweegt ten opzichte van V. We zullen dan ook van de beweging W/V spreken. Een punt van W valt op het tijdstip t samen met een punt $\underline{x}$ van V en heeft dan de snelheid $\dot{\underline{x}}$. Zo wordt door de beweging W/V aan elk punt $\underline{x}$ van V een snelheidsvector $\dot{\underline{x}} = \underline{v}_X$ toegevoegd. We hebben dus weer te maken met een vectorveld: het snelheidsveld van de beweging. Daar voor twee verschillende punten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ de uitdrukking $(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})$ niet van t afhangt, is $(\underline{v}_X - \underline{v}_Y, \underline{x} - \underline{y}) = 0$. Het snelheidsveld is dus equiprojectief (zie 1.11). Dan is er juist één duo waarvan het snelheidsveld het momentenveld is. Geef dit duo met $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ aan; dan is dus

$\underline{v}_X = \underline{u}_2 - \underline{x} \times \underline{u}_1 = \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \times \underline{x}$ voor elk punt $\underline{x}$. Blijkbaar is $\underline{u}_2$ de snelheid $\underline{v}_0$ van het punt van W dat zich op het beschouwde tijdstip in 0 bevindt. In plaats van $\underline{u}_1$ gebruiken we in de mechanica het symbool $\underline{\omega}$; men noemt $\underline{\omega}$ de hoeksnelheid van de beweging W/V. Op elk tijdstip is het snelheidsveld dus het momentenveld van het duo $\underset{\sim}{S} = \{\underline{\omega}, \underline{v}_0\}$ dat ook wel een snelheidsschroef wordt genoemd; hierbij zijn $\underline{\omega}$ en $\underline{v}_0$ functies van t. Men heeft dus $\underline{v}_X = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{x}$ voor elke $\underline{x}$. Is $\underline{\omega} = \underline{0}$ voor elke t dan hebben alle punten op elk tijdstip dezelfde van t afhankelijke snelheid. De beweging heet een (voortdurende) translatie. Is $\underline{\omega} = \underline{0}$ op zeker tijdstip, doch niet identiek, nul dan heet de beweging op dit tijdstip een momentele translatie. De as $\underline{S} = [\underline{\omega}, \underline{\omega}^*]$ van $\underset{\sim}{S}$ heet de momentele schroefas (msa) van de beweging W/V. De vector $\underline{v}_0 - \underline{\omega}^*$ is lineair afhankelijk van $\underline{\omega}$; dus $\underline{v}_0 = \underline{\omega}^* + h\underline{\omega}$ waarin h de de spoed is. Is $\underline{P}$ een punt van $\underline{S}$ dan is $\underline{v}_X = h\underline{\omega} + \underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}$ voor elk punt X; $h\underline{\omega}$ heet de translatiesnelheid van de beweging W/V; we zullen deze soms met $\underline{\tau}$ aangeven. Bij de bovenstaande passage over de spoed is natuurlijk $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ verondersteld.

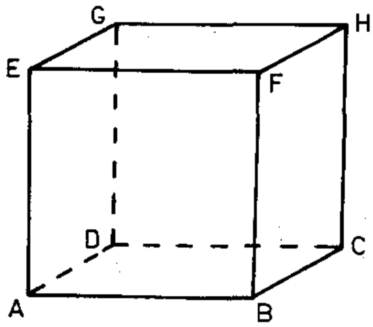
2.3. Als toepassing van de voorgaande twee paragrafen enkele min of meer uitgewerkte opgaven.

1. Een punt $\underline{x}$ beweegt zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ met de constante snelheid $\underline{v}_0$. Wat valt er van de baan te zeggen?
2. Een punt $\underline{x}$ beweegt zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ met een constante versnelling $\underline{c}$ en bevindt zich op het tijdstip $t = 0$ in het punt $\underline{p}$ en heeft dan de snelheid $\underline{v}_0$. Wat is de baan?
   Aanw. $\ddot{\underline{x}} = \underline{c}$ voert tot $\dot{\underline{x}} = \underline{c}t + \underline{v}_0$. Voor $\underline{c} = \underline{0}$ hebben we de vorige opgave. We veronderstellen daarom $\underline{c} \neq \underline{0}$. Als $\underline{v}_0$ lineair afhankelijk is van $\underline{c}$ is $\dot{\underline{x}} \times \underline{v}_0 = \underline{0}$ en dus $\underline{x} \times \underline{x}_0 = \underline{p} \times \underline{v}_0$ zodat $\underline{x} = \underline{p} + \lambda\underline{v}_0$ (rechte lijn). Hierbij is $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$ verondersteld. Hoe is het als $\underline{v}_0 = \underline{0}$? Zijn $\underline{c}$ en $\underline{v}_0$ lineair onafhankelijk dan is $(\underline{v}_0 \times \underline{c}, \dot{\underline{x}}) = 0$ en dus $(\underline{v}_0 \times \underline{c}, \underline{x}) = (\underline{v}_0 \times \underline{c}, \underline{p})$. Dit betekent: de baan ligt in het vlak door $\underline{p}$ evenwijdig met $\underline{c}$ en $\underline{v}_0$. Hoe kunt ge nu van deze wetenschap gebruik maken om de baan te vinden?
3. C is een vast punt. Een punt P beweegt zich zo dat de versnellingsvector op elk tijdstip lineair afhankelijk is van $\overrightarrow{CP}$ (centrale beweging met centrum C). Bewijs dat de baan een vlakke kromme is.
   Aanw. Kies C als oorsprong, dan is identiek in t: $\underline{x} \times \ddot{\underline{x}} = \underline{0}$. Uit welk vectorproduct kan $\underline{x} \times \ddot{\underline{x}}$ door differentiatie naar t ontstaan?

4. Bepaal de baan van het punt $\underline{x}$ als $\ddot{\underline{x}} = -k^2\underline{x}$, ($k > 0$ en constant) terwijl gegeven is dat $\underline{x}$ zich op het tijdstip $t = 0$ met snelheid $\underline{v}_0$ bevindt in het punt $\underline{p}$.
5. In een plat vlak waarin OXY een orthonormaal assenstelsel is, beweegt een punt $P(x,y)$, zodanig dat de versnelling van P op elk tijdstip gegeven is door de vector $(-\mu^2x, -9\mu^2y)$. Hierin is $\mu$ een positieve constante. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich met snelheid $(\mu p, 3\mu p)$ in de oorsprong ($p > 0$). Bepaal de baan van P. Schets deze voor $p = 4$ en geef nauwkeurig aan hoe de baan bij toenemende t wordt doorlopen.
6. In een plat vlak waarin OXY een orthonormaal assenstelsel is, beweegt zich een punt $P(x,y)$, zodanig dat op elk tijdstip de versnellingsvector van P gegeven is door $(4\mu^2(x + 2p), \mu^2y)$ waarin $\mu$ en p positieve constanten zijn. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich met snelheid $(0, 2\mu p)$ in de oorsprong. Bepaal de baan van P.
7. Van een orthonormaal rechts assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ wordt de positieve zin op de $x_k$-as aangewezen door de eenheidsvector $\underline{e}_k$ ($k = 1,2,3$). Een punt P met positievector $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$ beweegt ten opzichte van dit assenstelsel. De versnellingsvector van P is op elk tijdstip gelijk aan $-\mu^2(4\underline{x} - 3x_2\underline{e}_2 - 4c\underline{e}_3)$, waarin $\mu$ en c positieve constanten zijn. Op het tijdstip $t = 0$ is P met snelheid $\underline{v}_0 = (0,\mu c,0)$ in het punt $C(c,0,0)$. Bepaal de baan van P en schets deze in een duidelijke figuur.
<u>Aanw.</u> $\ddot{x}_1 = -4\mu^2x_1$; $\ddot{x}_2 = -\mu^2x_2$; $\ddot{x}_3 = -4\mu^2(x_3 - c)$. Dus $x_1 = c\cos 2\mu t$; $x_2 = c\sin\mu t$; $x_3 = 3(1 - \cos 2\mu t)$. Hieruit $x_1 + x_3 = c$ en $2x_2^2 = cx_3$. Baan is een deel van een parabool gelegen in het vlak $x_1 + x_3 = c$.
8. Bij een beweging van de ruimte $V_2$ ten opzichte van de ruimte $V_1$ beschouwt men een positie van $V_2$ waarbij de punten A, B en C van $V_2$ in deze volgorde ten opzichte van een in $V_1$ aangenomen orthonormaal assenstelsel $OX_1X_2X_3$ gegeven zijn door de coördinaten $(2,3,1)$, $(-1,0,2)$ en $(5,4,2)$. De snelheden van A, B en C zijn, ten opzichte van genoemnd assenstelsel, $\underline{v}_A = (1,1,4)$, $\underline{v}_B = (5,-3,4)$ en $\underline{v}_C = (1,3,2)$. Bepaal voor de beschouwde positie de hoeksnelheid en de translatiesnelheid van de beweging en leid de vergelijking van de momentele schroefas af.

9. Van een star viervlak DABC staan de in D samenkomende ribben loodrecht op elkaar en hebben dezelfde lengte p. De eenheidsvectoren met dezelfde zin als $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ en $\overrightarrow{DC}$ worden $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ genoemd; zij vormen in deze volgorde een rechts driebeen. Het viervlak beweegt ten opzichte van een vast assenstelsel $Ox_1x_2x_3$, zodanig dat identiek in t de betrekkingen $(\underline{v}_A,\underline{b}) = 2\lambda p$, $(\underline{v}_A,\underline{c}) = -\lambda p$; $(\underline{v}_B,\underline{a}) = \lambda p$, $(\underline{v}_B,\underline{c}) = 0$; $(\underline{v}_C,\underline{a}) = (\underline{v}_C,\underline{b}) = \lambda p$ (p en $\lambda$ constant) vervuld zijn. Onderzoek de beweging.
<u>Aanw.</u> Zij $\underline{\omega} = \omega_1\underline{a} + \omega_2\underline{b} + \omega_3\underline{c}$ de hoeksnelheid. Dan is: $(\underline{v}_A - \underline{v}_B,\underline{c}) = (\underline{\omega} \times (p\underline{a} - p\underline{b}),\underline{c}) = (p\underline{\omega},\ \underline{a} \times \underline{c} - \underline{b} \times \underline{c}) = -p(\underline{\omega},\ \underline{a} + \underline{b})$. Analoog $(\underline{v}_B - \underline{v}_C,\underline{a}) = -p(\underline{\omega},\ \underline{b} + \underline{c})$ en $(\underline{v}_C - \underline{v}_A,\underline{b}) = -p(\underline{\omega},\ \underline{c} + \underline{a})$. Dus: $\omega_1 + \omega_2 = \lambda$, $\omega_2 + \omega_3 = 0$, $\omega_3 + \omega_1 = \lambda$, zodat $\underline{\omega} = \lambda\underline{a}$. Men vindt nu verder: $\underline{v}_A = \lambda p(\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c})$; $\underline{v}_B = \lambda p(\underline{a} + 2\underline{b})$; $\underline{v}_C = \lambda p(\underline{a} + \underline{b} - \underline{c})$; $\underline{v}_D = \underline{v}_A$. De momentele schroefas is $[\underline{a},p(2\underline{b} - \underline{c})]$; zij is dus vast verbonden met het viervlak, d.w.z. vast in de bewegende ruimte. Is zij ook vast in de rustende ruimte?

10. De kubus (ribbe c) die hier is getekend, beweegt door de ruimte. In de weergegeven stand hebben de snelheidsvectoren $\underline{v}_H$, $\underline{v}_B$ en $\underline{v}_G$ van de punten H, B en G dezelfde lengte $\mu c$ ($\mu > 0$); $\underline{v}_H$ heeft dezelfde zin als $\overrightarrow{EH}$, $\underline{v}_B$ heeft dezelfde zin als $\overrightarrow{BC}$ en de hoeksnelheid van de kubus is in deze stand niet nul. Welke zin heeft $\underline{v}_G$? Bepaal de hoeksnelheid $\underline{\omega}$, de translatiesnelheid $\underline{\tau}$ en de ligging van de momentele schroefas in de kubus.




2.4. Enkele bijzondere gevallen die zich bij bewegingen kunnen voordoen, zijn de aandacht waard.

1. De momentele schroefas is een <u>vaste rechte</u>; bovendien zijn h en $\underline{\omega}$ constant. Leg de $\underline{x}_3$-as langs deze lijn; dan is $\underline{\omega} = (0,0,\omega)$ en $\dot{x}_1 = -\omega x_2$, $\dot{x}_2 = \omega x_1$, $\dot{x}_3 = h\omega$. We bepalen de baan van het punt dat op het tijdstip $t = 0$ samenvalt met $A(r,0,0)$, $r > 0$. Uit $x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$ volgt $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Stel daarom $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Dan: $\dot{\varphi} = \omega$ en $\varphi = \omega t$. Bijgevolg is $x_3 = h\omega t = h\varphi$. De baan is een gewone schroeflijn (zie W10). De benamingen bij de algemene beweging zijn ontleend aan dit speciale geval.

Alleen de spoed van de schroeflijn komt niet precies overeen met de spoed van de beweging. Van de schroeflijn is namelijk de spoed $2\pi h$, zodat h de gereduceerde spoed (d.i. de spoed per radiaal) moet heten.

2. Is er bij de beweging W/V een punt dat voortdurend in rust is dan gaat de msa op elk tijdstip door dit punt. De baan van elk punt ligt op een bol met het vaste punt als middelpunt.
3. Een beweging W/V van een star stelsel heet vlak als op elk tijdstip de snelheden van alle punten evenwijdig zijn met een vast vlak. Een voortdurende translatie is een vlakke beweging. Er zijn echter ook vlakke bewegingen met $\underline{\omega} \neq \underline{0}$. Is $\underline{n}$ een normaalvector van het bedoelde vaste vlak dan geldt voor elk punt X identiek in t: $0 = (\underline{n},\underline{v}_X) = h(\underline{n},\underline{\omega}) + \det(\underline{n},\underline{\omega},\overrightarrow{PX})$. Hieruit volgt voor elk tijdstip (neem X in P): $h(\underline{n},\underline{\omega}) = 0$ en dus $\det(\underline{n},\underline{\omega},\overrightarrow{PX}) = (\underline{n} \times \underline{\omega}, \overrightarrow{PX}) = 0$ voor elke X. Op elk tijdstip is dus $\underline{n} \times \underline{\omega} = \underline{0}$. Hieruit volgt $\underline{\omega} = \lambda\underline{n}$ $(\lambda \neq 0)$ en verder $h = 0$ identiek in t. De spoed is dus nul en $\underline{\omega}$ heeft een vaste richting. Voor de snelheid geldt $\underline{v}_X = \underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}$. Is $\underline{e}$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{\omega}$ dan kunnen we stellen $\underline{\omega} = \omega\underline{e}$; $\underline{e}$ is nu onafhankelijk van t. Derhalve $(\underline{e},\underline{v}_X) = 0$ en $(\underline{e},\underline{x}) = \gamma$. Alle banen zijn vlakke krommen en in alle vlakken loodrecht op $\underline{e}$ heerst dezelfde snelheidsverdeling. In elk van deze vlakken is op elk tijdstip één punt (de snelheidspool) met snelheid nul. Voor een nader onderzoek kan men zich tot de beweging in een van deze vlakken beperken.

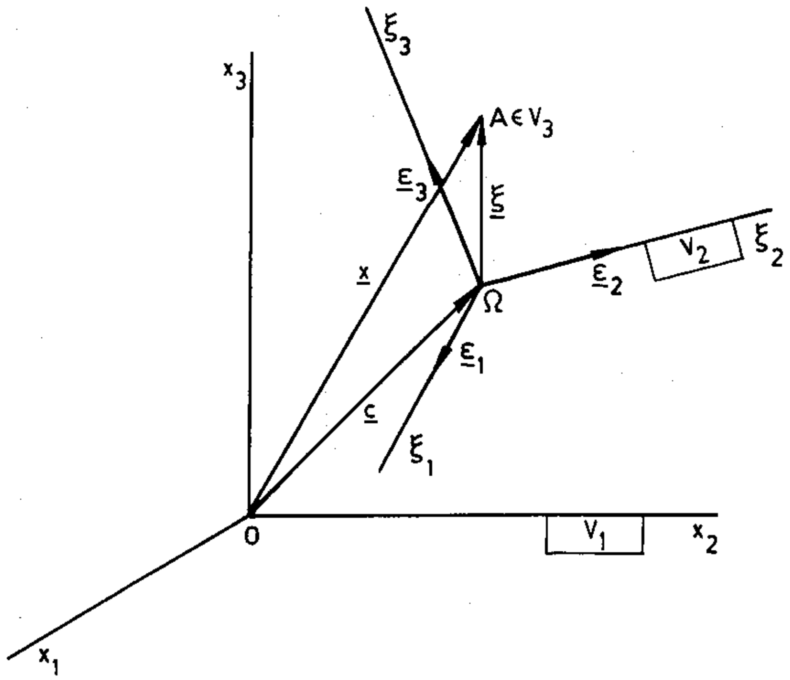
2.5. Uit $\underline{\dot{x}} = \underline{v}_\sigma + \underline{\omega} \times \underline{x}$ vindt men voor de versnelling $\underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{v}}_\sigma + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{x} + \underline{\omega} \times \underline{\dot{x}}$ of:

$$\underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{v}}_\sigma + \underline{\omega} \times \underline{v}_\sigma + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{x} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}) .$$

Men noemt $\underline{\dot{\omega}}$ de hoekversnelling.
Als $\underline{\dot{\omega}}$ en $\underline{\omega}$ lineair onafhankelijk zijn, is er juist één punt met versnelling nul (zie 1.4.11). Stelt men $\underline{\omega} = \omega\underline{e}$, $(\underline{e},\underline{e}) = 1$, $\omega > 0$ dan is $\underline{\dot{\omega}} = \dot{\omega}\underline{e} + \omega\underline{\dot{e}}$. Dus zijn $\underline{\omega}$ en $\underline{\dot{\omega}}$ lineair afhankelijk dan en alleen dan als $\underline{e}$ en $\underline{\dot{e}}$ lineair afhankelijk zijn, dus als $\underline{\dot{e}} = \underline{0}$. Dat dit op zeker tijdstip geldt, betekent dat de richting van $\underline{\omega}$ stationair is. Conclusie: op elk tijdstip waarop de richting van de msa niet stationair is, is er juist één punt met versnelling nul (de versnellingspool). Hoe wordt dit als $\underline{\dot{e}} = \underline{0}$?

Vraag. Wat is bij de beweging van 2.3.9 de versnelling van het punt D?
Aanw. Het komt neer op de berekening van $\dot{\underline{a}}$, $\dot{\underline{b}}$ en $\dot{\underline{c}}$. Het antwoord is $\lambda^2 p(\underline{b} + 2\underline{c})$. Het zou wel leuk zijn om ook de versnellingspool te bepalen.

2.6. We beschouwen drie samenvallende ruimten $V_1$, $V_2$ en $V_3$ die ten opzichte van elkaar bewegen. Zij A een punt van $V_3$. Tengevolge van de beweging $V_3/V_2$ heeft A op het tijdstip t een bepaalde snelheid $\underline{v}_{32}$; ook tengevolge van de beweging $V_3/V_1$ heeft A op hetzelfde tijdstip een snelheid $\underline{v}_{31}$. Maar op het tijdstip t valt A samen met een punt $A_2$ van $V_2$. Dit punt heeft tengevolge van de beweging $V_3/V_2$ de snelheid $\underline{v}_{32}$. Wat is het verband tussen deze drie snelheden? Neem in $V_1$ en $V_2$ orthonormale rechtse assenstelsels $Ox_1x_2x_3$ en $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ aan. De eenheidsvector die de positieve zin op de $\xi_i$-as aanwijst zij $\underline{\varepsilon}_i$ $(i = 1,2,3)$.




Verder is $\overrightarrow{OA} = \underline{x}$, $\overrightarrow{\Omega A} = \underline{\xi} = \xi_1\underline{\varepsilon}_1 + \xi_2\underline{\varepsilon}_2 + \xi_3\underline{\varepsilon}_3$ en $\overrightarrow{O\Omega} = \underline{c}$. Dan geldt:

$$\underline{v}_{31} = \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{c}} + \dot{\underline{\xi}} = \dot{\underline{c}} + \xi_1\dot{\underline{\varepsilon}}_1 + \xi_2\dot{\underline{\varepsilon}}_2 + \xi_3\dot{\underline{\varepsilon}}_3 + \dot{\xi}_1\underline{\varepsilon}_1 + \dot{\xi}_2\underline{\varepsilon}_2 + \dot{\xi}_3\underline{\varepsilon}_3 =$$

$$= \underline{v}_{21} + \underline{v}_{32} = \underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} .$$

Men noemt $V_3/V_2$ de relatieve beweging, $V_2/V_1$ de sleepbeweging, $V_3/V_1$ de absolute beweging en hierbij aansluitend, $\underline{v}_{32}$ de relatieve snelheid van A, $\underline{v}_{21}$ de sleepsnelheid en $\underline{v}_{31}$ de absolute snelheid. Erg belangrijk zijn deze benamingen niet, zoals uit het voorgaande blijkt. Er is geen enkele veronderstelling gemaakt ten aanzien van het al of niet verschillend zijn van de ruimten $V_1$, $V_2$ en $V_3$. Er is dan ook niets op tegen voor $V_3$ de ruimte $V_1$ te nemen. Dan is $V_3/V_2$ de beweging $V_1/V_2$ die de inverse beweging van $V_2/V_1$ wordt genoemd. Voor elk punt is nu $\underline{v}_{31} = \underline{v}_{11} = \underline{0}$ en $\underline{v}_{32} = \underline{v}_{12}$ zodat $\underline{v}_{12} + \underline{v}_{21} = \underline{0}$. Bij overgang op de inverse beweging worden alle snelheden dus door hun tegengestelden vervangen. Enkele gevolgen hiervan:

a) De fundamentele betrekking tussen de snelheden kan worden geschreven $\underline{v}_{12} + \underline{v}_{23} + \underline{v}_{31} = \underline{0}$ en direct worden uitgebreid tot het geval dat meer dan 3 ruimten ten opzichte van elkaar bewegen.

b) $V_1/V_2$ en $V_2/V_1$ hebben op elk tijdstip dezelfde msa, want de msa is de verzameling van de punten waarvan de snelheid zo klein mogelijk is.

c) $V_1/V_2$ en $V_2/V_1$ hebben translatie snelheden die elkaars tegengestelden zijn.

d) Maar dan zijn dus ook de hoeksnelheden elkaars tegengestelden: $\underline{\omega}_{12} + \underline{\omega}_{21} = \underline{0}$.

2.7. Als drie ruimten $V_1$, $V_2$ en $V_3$ ten opzichte van elkaar bewegen, zijn er drie momentele schroefassen te onderscheiden. Immers de msa van $V_i/V_j$ (aan te geven met $\sigma_{ij}$) is dezelfde als de msa $\sigma_{ji}$ van $V_j/V_i$.
We beschouwen de bewegingstoestand op een bepaald tijdstip. Op dit tijdstip mogen de assenstelsels van 2.6 nog willekeurig worden gekozen. We kiezen $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ samenvallend met $Ox_1x_2x_3$. Voor elk punt $\underline{x}$ van $V_3$ geldt dan:

$$\underline{v}_{21} = \underline{v}_{21}^{\sigma} + \underline{\omega}_{21} \times \underline{x};\ \underline{v}_{32} = \underline{v}_{32}^{\sigma} + \underline{\omega}_{32} \times \underline{x};\ \underline{v}_{31} = \underline{v}_{31}^{\sigma} + \underline{\omega}_{31} \times \underline{x}\ .$$

Bijgevolg is

$$\underline{v}_{31}^{\sigma} + \underline{\omega}_{31} \times \underline{x} = \underline{v}_{32}^{\sigma} + \underline{v}_{21}^{\sigma} + (\underline{\omega}_{32} + \underline{\omega}_{21}) \times \underline{x}$$

voor elke $\underline{x}$. Hieruit volgt:

$$\underline{v}_{31}^{\sigma} = \underline{v}_{32}^{\sigma} + \underline{v}_{21}^{\sigma} \quad \text{en} \quad \underline{\omega}_{31} = \underline{\omega}_{32} + \underline{\omega}_{21}\ .$$

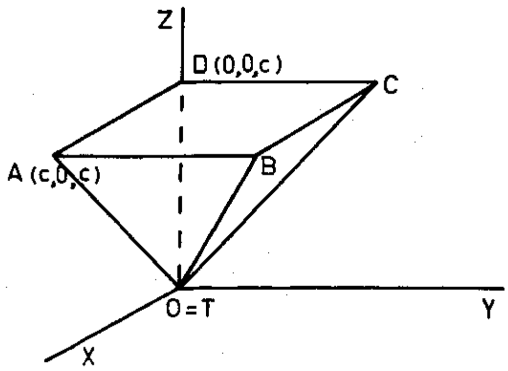
De laatste betrekking levert ons dat de drie momentele schroefassen $\sigma_{31}$, $\sigma_{32}$ en $\sigma_{21}$ op elk tijdstip evenwijdig zijn met eenzelfde vlak. We kunnen nog iets verder gaan. Is $\underset{\sim}{S}_{ij}$ de snelheidschroef verbonden met de beweging $V_i/V_j$ dan mogen we blijkens het bovenstaande tot $\underset{\sim}{S}_{31} = \underset{\sim}{S}_{32} + \underset{\sim}{S}_{21}$ besluiten. Op grond van 1.14 besluiten we hieruit: de momentele schroefassen hebben op elk tijdstip een gemeenschappelijke loodrechte transversaal.

2.8. Enige oefening is dringend aan te bevelen.

1. Bij een beweging van de ruimte $V_2$ ten opzichte van de ruimte $V_1$ beschouwt men de positie van $V_2$ waarbij de punten A, B en C van $V_2$ in deze volgorde ten opzichte van een in $V_1$ aangenomen orthonormaal assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ gegeven zijn door hun positievectoren (2,5,1), (1,1,1) en (3,0,2). De snelheden van A, B en C zijn ten opzichte van genoemd assenstelsel: $\underline{v}_A = (0,5,-2)$; $\underline{v}_B = (4,4,-8)$ en $\underline{v}_C = (3,5,-5)$. Bereken voor de beschouwde positie de hoeksnelheid $\underline{\omega}$, de translatiesnelheid $\underline{\tau}$ en stel een vergelijking op voor de msa.
2. Vaan een piramide (top T, hoogte c) is het grondvlak ABCD een vierkant met zijde c; de ribbe TD staat loodrecht op het grondvlak. Deze piramide neemt deel aan de volgende bewegingen.

   I. Een rotatie met as TA en een hoeksnelheid groot $\rho\sqrt{2}$ voorgesteld door een vector die de zin heeft van $\overrightarrow{TA}$; $\rho$ is een (positieve) constante. (Sleepbeweging.)

   II. Een schroefbeweging met schroefas DC, hoeksnelheid $2\rho$ (voorgesteld door een vector die de zin heeft van $\overrightarrow{DC}$) en translatiesnelheid $2\rho c$ in de zin van $\overrightarrow{CD}$ (relatieve beweging).




   a) Bewijs dat ten opzichte van het vaste assenstelsel OXYZ van bijgaande figuur de hoeksnelheid van de absolute beweging wordt voorgesteld door de vector $\underline{\omega}_a = (\rho, 2\rho, \rho)$.

b) Bepaal van het punt B de sleepsnelheid, de relatieve snelheid en de absolute snelheid.

c) Bepaal met behulp van de in a en b gevonden resultaten de schroefas en de translatiesnelheid van de sleepbeweging. Teken deze schroefas in de figuur.

3. Nog eens de kubus van vraagstuk 2.3.10 die we nu zullen beschouwen als een doos met deksel EFGH dat om EH scharniert met hoeksnelheid $\mu$, in de stand van de kubus die in vraagstuk 2.3.10 is beschouwd loodrecht op EF staat en bezig is <u>dicht</u> te klappen. Wat is de snelheid van het middelpunt van het deksel in de bedoelde stand?

4. Drie ruimten $V_1$, $V_2$ en $V_3$ bewegen ten opzichte van elkaar. De msa, de hoeksnelheid en de translatiesnelheid van de beweging $V_i/V_j$ noemen we $\sigma_{ij}$, $\underline{\omega}_{ij}$ en $\underline{\tau}_{ij}$. We beschouwen een positie van de ruimten ten opzichte van elkaar en kiezen in de ruimten orthonormale rechtse assenstelsels die alle drie samenvallen met het stelsel $Ox_1x_2x_3$. In deze positie is: $\underline{\omega}_{21} = (2,-2,4)$, $\underline{\tau}_{21} = (-1,1,-2)$; $\underline{\omega}_{32} = (-4,4,-6)$; $\underline{\tau}_{32} = (2,-2,3)$. Verder gaat $\sigma_{21}$ door het punt $(3,-1,5)$ en $\sigma_{32}$ door het punt $(1,-3,4)$. Bepaal $\underline{\omega}_{31}$, $\underline{\tau}_{31}$ en stel een vergelijking op voor $\sigma_{31}$.

5. In de ruimte V die we als vast beschouwen, is een orthonormaal rechts assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ gegeven. Alle gegevens van deze opgave worden verstrekt ten opzichte van dit assenstelsel. De ruimten $V_1$ en $V_2$ bewegen ten opzichte van V. Op het tijdstip dat we beschouwen, is de beweging $V_1/V$ een schroeving met hoeksnelheid $\underline{\omega}_1 = (2,1,0)$ en translatiesnelheid $\underline{\tau}_1 = (4,2,0)$ waarvan de <u>msa</u> door 0 gaat. De beweging $V_2/V$ is ook een schroeving met hoeksnelheid $\underline{\omega}_2 = (4,2,-2)$ en translatiesnelheid $\underline{\tau}_2 = (2,1,-1)$ waarvan de <u>msa</u> door het punt $(-3,-3,0)$ gaat. Bereken de hoeksnelheid $\underline{\omega}$ van de beweging $V_2/V_1$, stel een vergelijking op voor de <u>msa</u> van deze beweging, bereken de translatiesnelheid $\underline{\tau}$ en bepaal de lijn die de drie momentele schroefassen loodrecht snijdt.

6. Als bij de beweging van drie ruimten ten opzichte van elkaar twee van de drie momentele schroefassen evenwijdig zijn, liggen deze drie schroefassen in één vlak en zijn onderling evenwijdig. Wat is Uw oordeel over deze bewering?

7. Drie samenvallende vlakken bewegen ten opzichte van elkaar. Op elk tijdstip zijn er drie snelheidspolen. Deze liggen op één lijn. Bewijs deze stelling van Aronhold-Kennedy.

2.9. In 2.6 hebben we een betrekking tussen de relatieve, de absolute en de sleepsnelheid afgeleid. Hoe staat het met de versnellingen? Voor de absolute snelheid hebben we gevonden

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{\dot{c}} + \xi_1\underline{\dot{\varepsilon}}_1 + \xi_2\underline{\dot{\varepsilon}}_2 + \xi_3\underline{\dot{\varepsilon}}_3} + \dot{\xi}_1\underline{\varepsilon}_1 + \dot{\xi}_2\underline{\varepsilon}_2 + \dot{\xi}_3\underline{\varepsilon}_3 \; . \qquad (\alpha)$$

Het onderstreepte deel in het rechterlid is gelijk aan $\underline{v}_{21}$; maar voor $\underline{v}_{21}$ geldt ook $\underline{v}_{21} = \underline{\dot{c}} + \underline{\omega}_{21} \times \underline{\xi}$. Dus

$$\xi_1\underline{\dot{\varepsilon}}_1 + \xi_2\underline{\dot{\varepsilon}}_2 + \xi_3\underline{\dot{\varepsilon}}_3 = \underline{\omega}_{21} \times \underline{\xi} \; . \qquad (\beta)$$

Door ($\alpha$) nog eens te differentiëren, krijgen we:

$$\underline{\ddot{x}} = \underbrace{\underline{\ddot{c}} + \xi_1\underline{\ddot{\varepsilon}}_1 + \xi_2\underline{\ddot{\varepsilon}}_2 + \xi_3\underline{\ddot{\varepsilon}}_3}_{\underline{a}_{21}} + \underbrace{\ddot{\xi}_1\underline{\varepsilon}_1 + \ddot{\xi}_2\underline{\varepsilon}_2 + \ddot{\xi}_3\underline{\varepsilon}_3}_{\underline{a}_{32}} + 2(\dot{\xi}_1\underline{\dot{\varepsilon}}_1 + \dot{\xi}_2\underline{\dot{\varepsilon}}_2 + \dot{\xi}_3\underline{\dot{\varepsilon}}_3) \; .$$

of (let op $\beta$):

$$\underline{a}_{31} = \underline{a}_{32} + \underline{a}_{21} + 2\underline{\omega}_{21} \times \underline{v}_{32} \; .$$

De absolute versnelling $\underline{a}_a$ is dus de som van de relatieve versnelling $\underline{a}_r$, de sleepversnelling $\underline{a}_s$ en de vector $\underline{a}_c = 2\underline{\omega}_s \times \underline{v}_r$, waarin $\omega_s$ de hoeksnelheid van de sleepbeweging voorstelt en $\underline{v}_r$ de relatieve snelheid is. Derhalve: $\underline{a}_a = \underline{a}_r + \underline{a}_s + \underline{a}_c$; $\underline{a}_c$ heet de <u>Coriolisversnelling</u>.

2.10. Met behulp van een reële parameter t die een interval J doorloopt, kunnen de positievectoren van de punten van een kromme k worden voorgesteld door $\underline{x} = \underline{x}(t)$. We veronderstellen dat $\underline{x}$ continu-differentieerbaar is op J met van nul verschillende afgeleide. Dan heet k een <u>gladde kromme</u> (of gladde boog). In het punt $\underline{x}(t)$ heeft de kromme een raaklijn met richtingsvector $\underline{\dot{x}}(t)$. De analyse leert dat de lengte s van het deel van de kromme tussen het punt $\underline{x}(t_0)$ en het punt $\underline{x}(t)$ gelijk is aan

$$s = \int_{t_0}^{t} (\dot{\underline{x}}(u),\dot{\underline{x}}(u))^{\frac{1}{2}}\, du ,$$

zodat $\dot{s} = (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}} > 0$. Men noemt s de booglengte op de kromme. Door $\dot{s} = (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}}$ is s op een additieve constante na bepaald; dat is logisch want men kan het nulpunt van een meetlint bij elk punt van k leggen. Op het interval J is $\dot{s} > 0$. Bijgevolg is t een differentieerbare functie van s en $\underline{x} = \underline{x}(t(s))$. Geeft men differentiatie naar s met een accent aan dan is $\underline{x}' = \dot{\underline{x}}t' = \dot{\underline{x}}/|\dot{\underline{x}}|$ een eenheidsvector met dezelfde zin als $\dot{\underline{x}}$. Men noteert $\underline{x}' = \underline{t}$ en noemt $\underline{t}$ de raaklijnvector.

We zullen verder veronderstellen dat $\underline{x}$ zo dikwijls continu-differentieerbaar is als voor het volgende betoog nodig is. Uit $(\underline{t},\underline{t}) = 1$ volgt $(\underline{t},\underline{t}') = 0$. We veronderstellen dat $\underline{t}'$ niet identiek nul is, d.w.z. dat k geen rechte lijn is. Zij $\underline{n}$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{t}'$. Dan is $\underline{t}' = \kappa\underline{n}$ waarin $\kappa$ een niet-negatieve scalaire functie van s is. Men noemt $\underline{n}$ de hoofdnormaalvector. Tenslotte voeren we nog in de eenheidsvector $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ die de naam binormaalvector draagt. De vectoren $\underline{t}$, $\underline{n}$ en $\underline{b}$ vormen, uitgezet met $\underline{x}(s)$ als gemeenschappelijk beginpunt een orthonormaal rechts driebeen (driebeen van Serret-Frenet). Uit $(\underline{n},\underline{n}) = 1$ volgt $(\underline{n},\underline{n}') = 0$; bijgevolg is $\underline{n}' = \alpha\underline{t} + \tau\underline{b}$. Voor $\alpha$ vinden we $\alpha = (\underline{t},\underline{n}') = -(\underline{t}',\underline{n}) = -\kappa(\underline{n},\underline{n}) = -\kappa$. Dus $\underline{n}' = -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}$. Verder $\underline{b}' = \underline{t}' \times \underline{n} + \underline{t} \times \underline{n}' = \underline{t} \times (-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}) = \tau\underline{t} \times \underline{b} = -\tau\underline{n}$. Hiermee zijn afgeleid de drie vergelijkingen van Serret-Frenet:

$$\underline{t}' = \kappa\underline{n} , \quad \underline{n}' = -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b} , \quad \underline{b}' = -\tau\underline{n} \tag{1}$$

die grondslag zijn voor de differentiaalmeetkunde van de krommen. De scalaire functies $\kappa$ en $\tau$ die hierin voorkomen, heten de kromming en de torsie. De krommen met torsie nul zijn de vlakke krommen. Immers uit $\tau = 0$ volgt $\underline{b}' = 0$, dus $\underline{b} = \underline{c}$ (= constant). Dan is $(\underline{c},\underline{x}') = (\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma$ (= constant). En terug: uit $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma$ volgt $(\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\kappa\underline{n}) = 0$ of $(\underline{c},\underline{n}) = 0$, zodat $(\underline{c}, -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}) = 0$ of $\tau(\underline{c},\underline{b}) = 0$ en dus $\tau = 0$ (kunt ge elke stap verantwoorden?).

Het voorafgaande vestigt de indruk dat de torsie een maat is voor de afwijking die de kromme vertoont van een vlakke kromme.

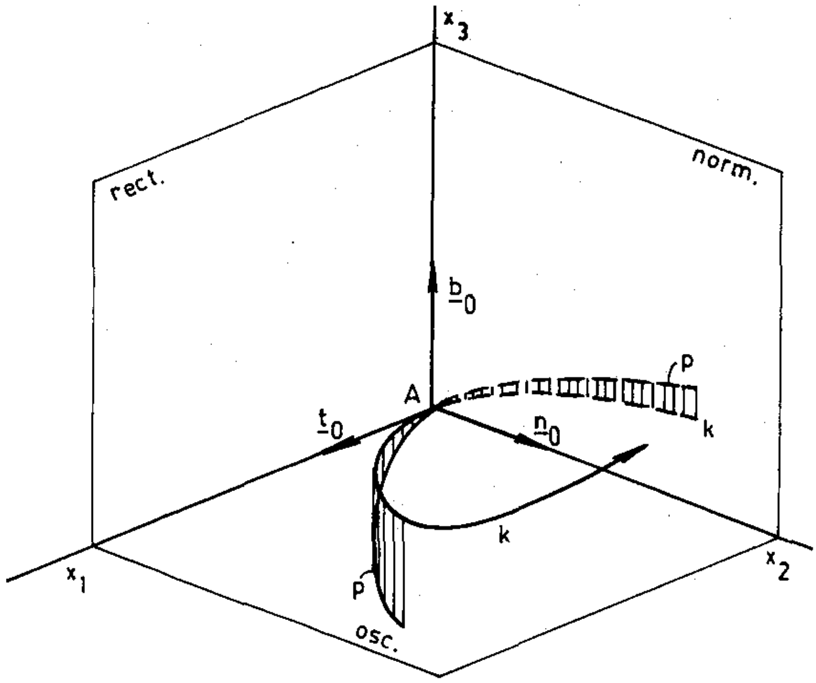
Vlakke krommen met constante kromming zijn cirkels. Voor een vlakke kromme ($\tau = 0$) blijft van (1) over $\underline{t}' = \kappa\underline{n}$, $\underline{n}' = -\kappa\underline{t}$. Is $\kappa$ constant dan volgt hieruit: $\underline{t}'' + \kappa^2\underline{t} = \underline{0}$ en dus $\underline{t} = \underline{c}_1\cos \kappa s + \underline{c}_2\sin \kappa s$ ($\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ constant). Uit

$(\underline{t},\underline{t}) = 1$ kan men afleiden dat $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ eenheidsvectoren zijn die loodrecht op elkaar staan (doe dit!). Stel $\underline{c}_1 \times \underline{c}_2 = \underline{c}_3$ en leid uit het bovenstaande af dat $\kappa(\underline{x} - \underline{m}) = \underline{c}_1 \sin \kappa s - \underline{c}_2 \cos \kappa s$ ($\underline{m}$ constant). Dus is nu: $(\underline{c}_3, \underline{x} - \underline{m}) = 0$ en $(\underline{x} - \underline{m}, \underline{x} - \underline{m}) = \kappa^{-2}$. Hieruit lezen we af: de kromme is een cirkel met middelpunt $\underline{m}$ en straal $\kappa^{-1}$ (de naam kromming voor $\kappa$ is aan dit bijzondere geval ontleend).

2.11. We gaan op de betekenis van $\kappa$ nog iets nader in. Zij A een punt van de kromme $\underline{x} = \underline{x}(s)$. Als waarde van s corresponderend met A mogen we nul nemen. Bovendien kunnen we de oorsprong van het assenstelsel met A laten samenvallen. Dan is dus $\underline{x}(0) = \underline{0}$ de positievector van A. Raaklijn-, hoofdnormaal en binormaalvector in A geven we met $\underline{t}_0$, $\underline{n}_0$ en $\underline{b}_0$ aan; de kromming en de torsie met $\kappa_0$ en $\tau_0$. Een vlak door A kan worden voorgesteld door $(\underline{c},\underline{X}) = 0$. Als we de snijpunten van de kromme met dit vlak willen vinden, zullen we s moeten oplossen uit de vergelijking $f(s) = (\underline{c}, \underline{x}(s)) = 0$. De vergelijking heeft een wortel $s = 0$ (logisch: A is een snijpunt). Men heeft $f'(s) = (\underline{c},\underline{t}(s))$ en dus $f'(0) = (\underline{c},\underline{t}_0)$. Als nu $f'(0) = 0$ oftewel $(\underline{c},\underline{t}_0) = 0$ heeft de vergelijking $f(s) = 0$ een dubbeltellende wortel nul. Dat wil zeggen: elk vlak door de raaklijn in A heeft twee in A samenvallende punten met de kromme gemeen (dat is geen verrassing, wel?). Is $f(0) = f'(0) = f''(0)$ dan heeft $f(s) = 0$ een drievoudige wortel nul. Nu is $f''(s) = \kappa(\underline{c},\underline{n}(s))$ en dus $f''(0) = 0$ geldt dan en alleen dan als $(\underline{c},\underline{n}_0) = 0$. Dus wanneer $\underline{c}$ langs $\underline{b}_0$ valt heeft het vlak drie in A samenvallende punten met de kromme gemeen. Maar dit vlak is het vlak opgespannen door $\underline{t}_0$ en $\underline{n}_0$. Het heet om zijn innige aanraking met de kromme het <u>osculatievlak</u>. Van een vlak kan geen grotere prestatie worden verwacht (het is immers door drie punten bepaald) of het moest al zijn dat de kromme zich in A bijzonder gedraagt. Door $\underline{c} = \underline{b}_0$ te nemen is $f''(s) = \kappa(\underline{b}_0,\underline{n}(s))$ en dus $f'''(s) = \kappa'(\underline{b}_0,\underline{n}(s)) + \kappa(\underline{b}_0,\underline{n}'(s))$. Dus $f'''(0) = \kappa_0(\underline{b}_0, -\kappa_0\underline{t}_0 + \tau_0\underline{b}_0) = \kappa_0\tau_0$. Als $\tau_0 = 0$ dus vier in A samenvallende punten, maar dit is uitzondering: A is geen "gewoon" punt meer. We beschouwen nu nog in het osculatievlak $(\underline{b}_0,\underline{X}) = 0$ een door A gaande cirkel met straal $|\rho|$ waarvan het middelpunt op de hoofdnormaal ligt. Deze cirkel is de doorsnede van het osculatievlak met de bol $(\underline{X} - \rho\underline{n}_0, \underline{X} - \rho\underline{n}_0) = \rho^2$. Om gemeenschappelijke punten van de kromme en de bol te vinden lossen we s op uit $g(s) = (\underline{x}(s) - \rho\underline{n}_0, \underline{x}(s) - \rho\underline{n}_0) - \rho^2 = 0$. Men vindt:

$g'(s) = 2(\underline{t}(s), \underline{x}(s) - \rho\underline{n}_0)$. Bijgevolg is $g(0) = g'(0) = 0$ en dit betekent dat de bol (en dus ook de cirkel in kwestie) voor elke waarde van $\rho$ twee in A samenvallende punten met de kromme gemeen heeft (geen wonder, want zo is hij gekozen!). Uit $g''(s) = 2(\kappa(s)\underline{n}(s), \underline{x}(s) - \rho\underline{n}_0) + 2(\underline{t}(s),\underline{t}(s))$ volgt: $g''(0) = -2\kappa_0\rho + 2$. Kiest men $\rho = \kappa_0^{-1}$ dan heeft de cirkel drie in A samenvallende punten met de kromme gemeen. Deze cirkel heet de <u>osculatie</u>- of <u>kromtecirkel</u> in A en zijn straal $\kappa_0^{-1}$ de <u>kromtestraal</u> in A van de kromme. <u>Drie</u> is ook hier weer het maximum (waarom?). Het middelpunt van de kromtecirkel heet het <u>krommingsmiddelpunt</u>.

2.12. Behalve het osculatievlak onderscheiden we in A nog het <u>normaalvlak</u> (opgespannen door $\underline{n}_0$ en $\underline{b}_0$) en het <u>rectificerend vlak</u> (opgespannen door $\underline{b}_0$ en $\underline{t}_0$).




Wie naar volledigheid streeft, vindt hieronder nog iets van zijn gading. We veronderstellen dat de vectoren $\underline{t}_0$, $\underline{n}_0$ en $\underline{b}_0$ als eenheidsvectoren van het assenstelsel $Ax_1x_2x_3$ worden gekozen. Dan is dus: $\underline{t}_0 = (1,0,0)$; $\underline{n}_0 = (0,1,0)$; $\underline{b}_0 = (0,0,1)$. Verder nemen we aan dat de kengetallen van $\underline{x}(s)$ in machtreeksen naar s kunnen worden ontwikkeld. Dan is

$$\underline{x}(s) = \underline{x}(0) + s\underline{x}'(0) + \frac{1}{2}s^2\underline{x}''(0) + \frac{1}{6}s^3\underline{x}'''(0) + \ldots ,$$

$$\underline{x}'(0) = \underline{t}_0, \ \underline{x}''(0) = \kappa_0\underline{n}_0, \ \underline{x}'''(0) = \kappa'(0)\underline{n}_0 + \kappa_0(-\kappa_0\underline{t}_0 + \tau_0\underline{b}_0) \ .$$

Dus:

$$\underline{x}'(0) = (1,0,0), \ \underline{x}''(0) = (0,\kappa,0), \ \underline{x}'''(0) = (-\kappa_0^2,\kappa'(0),\kappa_0\tau_0) \ .$$

Bijgevolg vinden we voor de eerste termen van de reeksontwikkelingen van de kengetallen:

$$x_1(s) = s; \ x_2(s) = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2; \ x_3(s) = \frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3 \ .$$

Eliminatie van s geeft:

$$x_2 = \frac{1}{2}\kappa_0 x_1^2 \ ; \quad x_3 = \frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 x_1^3 \ ; \quad x_3^2 = \frac{2\tau_0^2}{9\kappa_0} x_2^3 \ .$$

We lezen hieruit: het deel van de kromme dat in een voldoend kleine omgeving van A ligt heeft als projectie op het osculatievlak een parabool p (zie de figuur). De projectie op het normaalvlak heeft de gedaante van fig. n (semikubische parabool) en de projectie op het rectificerend vlak de gedaante van fig. r+ of fig. r- al naar gelang $\tau_0$ positief of negatief is. De

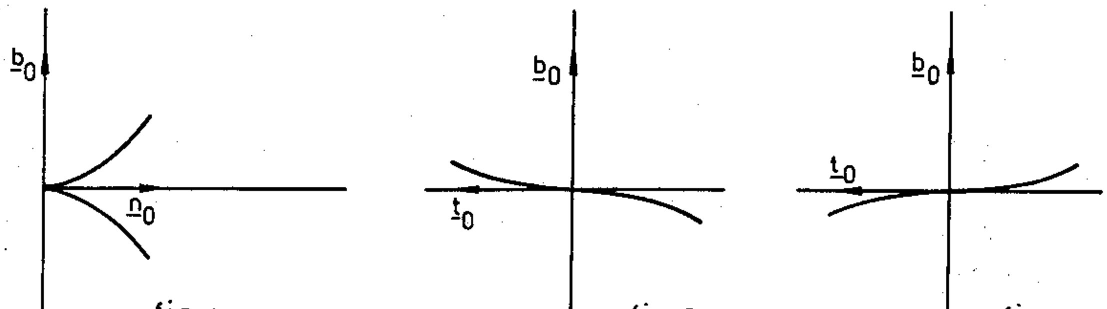



fig. n fig. r+ fig. r-

torsie is dus positief of negatief al naar gelang de kromme, georiënteerd in de zin van toenemende booglengte, het osculatievlak van beneden naar boven of van boven naar beneden passeert.

2.13. Een gewone schroeflijn kan worden voorgesteld door:

$$\underline{x}(\varphi) = (r \cos \varphi,\ r \sin \varphi,\ h\varphi) \quad (h \text{ constant evenals } r;\ r > 0)$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + h^2}\ ; \quad \underline{x}' = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} (-r \sin \varphi,\ r \cos \varphi,\ h) = \underline{t}\ ;$$

$$\underline{t}' = \frac{1}{r^2 + h^2} (-r \cos \varphi,\ -r \sin \varphi,\ 0) = \kappa \underline{n}\ ;$$

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + h^2}\ ; \quad \underline{n} = -(\cos \varphi,\ \sin \varphi,\ 0)\ ;$$

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} (h \sin \varphi,\ -h \cos \varphi,\ r)\ ;$$

$$\underline{b}' = \frac{1}{r^2 + h^2} (h \cos \varphi,\ h \sin \varphi,\ 0) = -\tau \underline{n}\ ; \quad \tau = \frac{h}{r^2 + h^2}\ .$$

Kromming en torsie zijn constant! De torsie is positief als $h > 0$ (rechts gewonden schroeflijn) en negatief voor een links gewonden schroeflijn ($h < 0$). Raaklijn en binormaal maken een vaste hoek met de schroefas; de hoofdnormaal snijdt deze as loodrecht. Men kan bewijzen dat de enige krommen met constante kromming en torsie de gewone schroeflijnen zijn.

2.14. Als de baan van een bewegend punt de kromme $\underline{x} = \underline{x}(s)$ is, zal de waarde van $s$ die de positie van het punt op de kromme aanwijst een functie zijn van de tijd $t$. We veronderstellen weer continue differentieerbaarheid zo vaak als nodig is. Voor de snelheid vinden we: $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{s}\underline{x}' = \dot{s}\underline{t}$ en voor de versnelling $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{s}\underline{t} + \dot{s}^2\underline{t}'$ of:

$$\underline{a} = \ddot{s}\underline{t} + \kappa \dot{s}^2 \underline{n}\ .$$

De versnelling ligt dus in het osculatievlak en heeft de componenten $\underline{a}_t = \ddot{s}\underline{t}$ (<u>tangentiële versnelling</u>) en $\underline{a}_n = \kappa(\underline{v},\underline{v})\underline{n}$ (<u>normale versnelling</u>) waarvan de laatste <u>naar het kromtemiddelpunt</u> gericht is. Beschrijft het punt een vlakke baan dan is in veel gevallen een andere ontbinding van snelheid en versnelling doelmatig. Het punt kan nu worden aangewezen door zijn positievector $\underline{x}$ ten opzichte van een rechts assenstelsel $Ox_1x_2$ in het vlak van de baan. Met een rechts assenstelsel is hier bedoeld dat de positieve zin op de $x_2$-as uit de positieve zin op de $x_1$-as ontstaat door draaiïng over een hoek $\pi/2$ in tegenwijzerzin (zie verder de figuur). Zij $\underline{e}_r$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{x}$, zodat $\underline{x} = r\underline{e}_r$ $(r \geq 0)$, $\varphi$ de hoek tussen $\underline{e}_r$ en de positieve $x_1$-as en $\underline{e}_\varphi$ de vector die uit $\underline{e}_r$ ontstaat door draaiing over de hoek $\pi/2$ in tegenwijzerzin. Dan is $\underline{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ en $\underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Hierbij is $\varphi$ een functie van t. Blijkbaar is: $\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$ en $\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\underline{e}_r$. Hieruit volgt:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\underline{e}_r + \dot{\varphi}r\underline{e}_\varphi$$

en:

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\underline{e}}_r + \ddot{\varphi}r\underline{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{r}\underline{e}_\varphi + \dot{\varphi}r\dot{\underline{e}}_\varphi ,$$

of

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi .$$

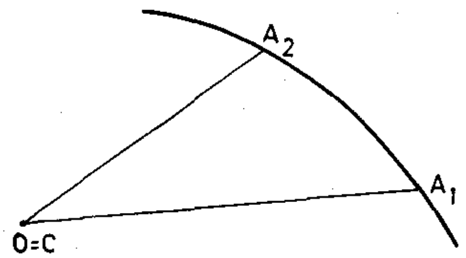
Hiermee is zowel de snelheid als de versnelling geschreven als de som van twee componenten waarvan er één langs de voerstraal OA valt en de andere er loodrecht op staat.

We geven een toepassing op de centrale beweging (zie 2.3.3). Kies het centrum van de beweging als oorsprong van een stelsel poolcoördinaten r en $\varphi$ in het vlak van de beweging. Voor de versnelling geldt dan $\underline{a} = \lambda\underline{e}_r$ waarin $\lambda$ een scalaire functie is die kan afhangen van r en $\varphi$. Dus is:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \lambda , \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 . \qquad (1)$$

Uit de tweede differentiaalvergelijking volgt $r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = 0$ en hier staat $\frac{d}{dt}\, r^2\dot{\varphi} = 0$. Dus is $r^2\dot{\varphi} = h$ (= constant). Integratie hiervan tussen de grenzen $t_1$ en $t_2$ $(t_1 < t_2)$ geeft:

$$\int_{t_1}^{t_2} r^2\dot{\varphi}\,dt = h(t_2 - t_1) . \qquad (2)$$



Zijn $A_1$ en $A_2$ de posities van het bewegende punt op de tijdstippen $t_1$ en $t_2$ dan stelt de integraal in het linkerlid van (2) voor: de dubbele oppervlakte van de sector (of het perk) $\overline{OA_1A_2}$. Bijgevolg drukt (2) uit dat de voerstraal in gelijke tijdsdelen over gelijke perken veegt (perkenwet): de perksnelheid is constant.

Voor een speciaal (maar wel zeer belangrijk) geval bepalen we de baan. We veronderstellen dat de versnelling naar het centrum is gericht en omgekeerd evenredig is met $r^2$. Dan wordt de eerste van de vergelijkingen (1):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu^2}{r^2}$$

waarin $\mu$ een positieve constante is. Het bepalen van de baan komt neer op het bepalen van r als functie van $\varphi$. We stellen $\frac{1}{r} = u$ en bepalen u als functie van $\varphi$. Uit

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

volgt in verband met de perkenwet: $\dot{r} = -h\frac{du}{d\varphi}$ en dus (we gebruiken bij herhaling de perkenwet):

$$\ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}\,.$$

Voor u als functie van $\varphi$ ontstaat dus de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu^2}{h^2}\,,$$

met als oplossing:

$$u = \frac{\mu^2}{h^2} + k\cos(\varphi + \varphi_0)$$

met $k \geq 0$ en $\varphi_0$ als integratieconstanten.

Als poolas kiezen we de lijn die C verbindt met het punt van de baan dat zo dicht mogelijk bij C ligt (het pericentrum). Anders gezegd: we zorgen ervoor dat u maximaal is voor $\varphi = 0$. Dan is $\varphi_0 = 0$ (zoek dit uit) en

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{3}$$

waarin $p = h^2/\mu^2$ en $\varepsilon = kh^2/\mu^2$. Vergelijking (3) is de voorstelling in poolcoördinaten van een kegelsnede waarvan C een brandpunt is. Deze kegelsnede is een ellips als $0 \leq \varepsilon < 1$ (voor $\varepsilon = 0$ een cirkel), een parabool als $\varepsilon = 1$ en een hyperbool (althans één tak hiervan) als $\varepsilon > 1$. Is $\varepsilon = 0$ dan is de baan de cirkel met middelpunt C en straal p die met de constante snelheid $v_c = h/p$ wordt doorlopen. Voor een niet cirkelvormige baan is $p/(1 + \varepsilon)$ de pericentrumafstand en $h(1 + \varepsilon)/p = v_p$ de snelheid in het pericentrum. Dus is $\varepsilon = (v_p - v_c)/v_c$. De baan is dus een ellips, een parabool of een hyperbool al naar $v_p < 2v_c$, $v_p = 2v_c$ of $v_p > 2v_c$. We komen later nog op de centrale beweging terug.

2.14. Ter afwisseling enkele opgaven.

1. Een punt P beweegt zich zodanig langs een ruimtekromme dat de versnellingslijn van P (d.i. de lijn door P met de versnellingsvector als richtingsvector) een vaste rechte $\ell$ voortdurend snijdt. Bewijs dat de snelheid van het punt op elk tijdstip omgekeerd evenredig is met de afstand van P tot $\ell$ en met de cosinus van de hoek die het vlak door P en $\ell$ maakt met het normaalvlak van de baan in het punt P.
   <u>Aanw.</u> Gebruik Plückervectoren: stel $\ell$ voor door $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$, $(\underline{\ell},\underline{\ell}) = 1$ en de versnellingslijn door $[\ddot{\underline{x}}, \underline{x} \times \ddot{\underline{x}}]$. Dan is $(\underline{\ell}, \underline{x} \times \ddot{\underline{x}}) + (\underline{\ell}^*,\ddot{\underline{x}}) = 0$. Dus: $(\underline{\ell}, \underline{x} \times \dot{\underline{x}}) + (\underline{\ell}^*,\dot{\underline{x}}) = \gamma$ (= constant). Ga na wat dit meetkundig betekent.
2. Een punt $P(x_1,x_2,x_3)$ beweegt ten opzichte van het orthonormale assenstelsel $Ox_1x_2x_3$. Op elk tijdstip is de versnelling van P de som van twee vectoren $\underline{a}_1$ en $\underline{a}_2$. De vector $\underline{a}_1$ valt voortdurend langs de loodlijn uit P op de $x_3$-as neergelaten, is naar de $x_3$-as gericht en heeft de lengte $2c^3/3r^2$, waarin c een positieve constante is en r de afstand van P tot de $x_3$-as voorstelt. De vector $\underline{a}_2$ is evenwijdig met de $x_3$-as. De projectie van P op het vlak $x_3 = 0$ is Q. Op het tijdstip $t = 0$ valt Q samen met het punt $(c,0,0)$ en heeft de snelheid $(0,c,0)$. Bepaal de baan van Q. Als gegeven is dat voor de beweging van P steeds geldt $x_3 = 2r$ druk dan $\underline{a}_2$ uit in c en r en bepaal de baan van P.
3. Bij een centrale beweging is de versnelling omgekeerd evenredig met de derde macht van de afstand van het bewegende punt tot het centrum. Bepaal de baan.
   <u>Opmerking</u>. Onderscheid verschillende gevallen.

4. Bij een centrale beweging is de versnelling steeds <u>naar</u> het centrum gericht en omgekeerd evenredig met de vijfde macht van de afstand van het bewegende punt tot het centrum. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt het punt zich met snelheid $(0,v)$ en versnelling $(-v^2/p,0)$ in het punt $(2p,0)$. Hierin zijn $p$ en $v$ positief, terwijl de gegevens bedoeld zijn ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel Oxy met de oorsprong in het centrum. Bepaal de baan.

Aanw. Men vindt: $r^2\dot{\varphi} = 2pv$, $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\dfrac{32p^4v^2}{r^5}$. Hieruit volgt:

$$\ddot{r} - \frac{4p^2v^2}{r^3} = -\frac{32p^4v^2}{r^5}$$

en dus:

$$2\dot{r}\ddot{r} - \frac{8p^2v^2\dot{r}}{r^3} = -\frac{64p^4v^2\dot{r}}{r^5} .$$

Na integratie ontstaat hieruit (rekening houdend met de beginvoorwaarde):

$$\dot{r}^2 + \frac{4p^2v^2}{r^2} = \frac{16p^4v^2}{r^4} .$$

Wegens

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\,\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2pv}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}$$

wordt dit

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = 4p^2 - r^2 ,$$

zodat

$$\frac{dr}{\sqrt{4p^2 - r^2}} = \pm\, d\varphi \qquad \text{en} \qquad \arcsin\frac{r}{2p} = \pm\,(\varphi + \varphi_0) .$$

Dus

$$r = \pm\, 2p\,\sin(\varphi + \varphi_0) .$$

Wegens de beginvoorwaarde is dan $r = 2p\cos\varphi$. De baan is een cirkel door C met straal $p$ en middelpunt $(p,0)$.

5. Het punt $\underline{x}$ beweegt zich zodanig ten opzichte van een orthonormaal rechts assenstelsel dat

$$\ddot{\underline{x}} = k\,\frac{\dot{\underline{x}} \times \underline{x}}{|\underline{x}|^3} \quad (k \text{ constant}) .$$

Bewijs dat de baan op een omwentelingskegel ligt.
<u>Aanw.</u> Zij $\underline{e}_x$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{x}$ (dus $\underline{e}_x = \underline{x}/|\underline{x}|$). Nodig en voldoende opdat de baan op een omwentelingskegel ligt, is: er bestaat een vaste vector $\underline{c}$, zodanig dat $(\underline{c},\underline{e}_x)$ constant is, dus $(\underline{c},\dot{\underline{e}}_x) = 0$. Laat zien dat $\dot{e}_x = k^{-1}\underline{x} \times \ddot{\underline{x}}$, enz.

6. Het is verleidelijk de baan in de vorige opgave nader te onderzoeken. <u>Aanw.</u> Uit de vorige opgave $\underline{x} \times \dot{\underline{x}} = k\underline{e}_x + \underline{c}$ ($\underline{c}$ constant) en dus $(\underline{c},\underline{e}_x) = -k$. Leg de positieve $x_3$-as in de zin van $\underline{c}$, zodat dus $\underline{c} = (0,0,c)$ $(c > 0)$ en geef de halve tophoek van de omwentelingskegel met $\gamma$ aan. Gebruik cylindercoördinaten $r$ en $\varphi$. Dan $\underline{e}_x = (\cos\varphi \sin\gamma, \sin\varphi \sin\gamma, \cos\gamma)$ en $k = -c\cos\gamma$. Verder volgt dan $r^2\dot{\varphi} = c$. Daar $(\dot{\underline{x}},\ddot{\underline{x}}) = 0$, is $(\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}) = p^2$ $(p > 0$, constant). Dit leidt tot:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\gamma = p^2 \quad \text{of} \quad \dot{r}^2 + \frac{c^2\sin^2\gamma}{r^2} = p^2 .$$

Stel $r^{-1} = u$ dan

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{p^2}{c^2} - u^2\sin^2\gamma = \frac{p^2\cos^2\gamma}{k^2} - u^2\sin^2\gamma .$$

Leg het assenstelsel zo dat $r$ minimaal is voor $\varphi = 0$. Dan komt er:

$$r\cos(\varphi\sin\gamma) = \frac{k\tan\gamma}{p} .$$

Probeer eens of ge U enigszins een voorstelling van deze baan kunt vormen.

7. In een vast vlak liggen twee cirkels $C_1$ (straal $r_1$) en $C_2$ (straal $r_2$) beide met middelpunt O $(r_1 < r_2)$. Een rechte lijn $\ell$ door O snijdt $C_1$ in S en $C_2$ in T, zodanig dat O tussen S en T ligt. In het vlak beweegt zich een punt A waarvan de versnelling steeds naar O gericht is en de grootte $\mu^2 r^{-2}$ heeft, waarin $r$ de afstand OA voorstelt en $\mu$ een positieve constante is. Aanvankelijk beweegt A langs $C_1$. Wanneer A het punt S passeert,

wordt de grootte van de snelheid van A zodanig gewijzigd dat de baan overgaat in een ellips die $C_1$ in S en $C_2$ in T raakt. In T wordt de grootte van de snelheid weer veranderd, zodanig dat de baan overgaat in de cirkel $C_2$. Gevraagd de beide snelheidswijzigingen.

## 3. Inleiding tot de dynamica

3.1. De ervaring leert dat bewegende voorwerpen elkaar wederzijds kunnen beïnvloeden wat betreft het verloop van de beweging van elk van deze voorwerpen afzonderlijk. In de kinematica wordt hierover niet gerept. Zij maakt uitsluitend gebruik van twee grondbegrippen lengte en tijd en daaruit afgeleide begrippen zoals oppervlakte, snelheid, versnelling. Slechts met veel vallen en opstaan is men er in geslaagd enkele fundamentele regels op te stellen die het mogelijk maken voor een stelsel bewegende en elkaar beïnvloedende voorwerpen uit de bewegingstoestand op een bepaald ogenblik het verdere verloop van de beweging langs wiskundige weg af te leiden. Men kan zich verdiepen in de vraag of deze regels juist zijn, eventueel met allerlei nuances van wat in dit verband met "juist zijn" is bedoeld. Wij zullen dit niet doen, doch wel willen we vaststellen dat de fundamentele regels die we hier bedoelen, en die in de volgende paragraaf zullen worden genoemd, hun bruikbaarheid in hoge mate hebben bewezen. Het blijkt namelijk dat de bewegingen die zij voorspellen inderdaad bij waarneming worden geconstateerd.

3.2. Voor het formuleren van de meergenoemde regels wordt naast de grondbegrippen lengte en tijd het begrip massapunt ingevoerd. Een massapunt is een meetkundig punt voorzien van een constante positieve coëfficiënt m die de in het punt geconcentreerde massa wordt genoemd. Wat betreft de invloed die de omgeving op de beweging van het massapunt P uitoefent, wordt aangenomen dat deze voorgesteld kan worden door een vector met P als beginpunt. Deze vector $\underline{f}$ heet de kracht die op P werkt. Zijn $U_1$ en $U_2$ disjuncte delen van de omgeving van P en stellen $\underline{f}_1$ en $\underline{f}_2$ de invloeden voor die ze op de beweging van P hebben, dan wordt de invloed van hun vereniging $U_1 \cup U_2$ op de beweging weergegeven door de vector $\underline{f} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ (parallelogram van krachten). We nemen verder aan dat de beide volgende regels gelden:

I. Als op een punt P met massa m op zeker tijdstip de kracht $\underline{f}$ werkt, voldoet de versnelling $\underline{a}$ van P op dit tijdstip aan de betrekking $\underline{f} = m\underline{a}$.

II. Als de invloed van een massapunt $P_2$ op de beweging van een massapunt $P_1$ op zeker tijdstip wordt gerepresenteerd door de vector $\underline{f}_{21}$ dan wordt de invloed van $P_1$ op de beweging van $P_2$ op dit tijdstip voorgesteld door de vector $\underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}$; beide vectoren hebben $P_1P_2$ als drager (actie = reactie).

De mechanica die aan de bovenstaande fundamentele regels gehoorzaamt wordt de klassieke mechanica genoemd. Zij is door Newton (1643-1727) voor het eerst systematisch opgebouwd. Zijn werk vormt een afsluiting van een ontwikkeling die reeds 20 eeuwen voor hem is aangevangen. En op haar beurt is ook de mechanica van Newton weer het begin van een periode waarin steeds nieuwe problemen om een oplossing vragen. Aangename lectuur over de geschiedenis van de mechanica tot en met het optreden van Newton biedt:

> M. Fierz, Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik (Lecture Notes in Physics no. 15), Springer-Verlag, Berlin etc. 1972,

een boekje van 97 bladzijden, waarvan 2 blz. met literatuuropgaven.

3.3. We geven enkele voorbeelden die alle betrekking hebben op de beweging van een punt langs een rechte lijn. De kracht die op het punt werkt, heeft deze lijn als drager. We nemen op de lijn een voorsprong 0 aan en een positieve zin aangewezen door de eenheidsvector $\underline{e}$. De massa van het bewegende punt P noemen we m en we stellen $\overrightarrow{OP} = x\underline{e}$.

1. Eenvoudig is het als de kracht uitsluitend van de tijd afhangt; bijvoorbeeld $\underline{f} = (k^2 \sin \omega t)\underline{e}$ (k en $\omega$ positieve constanten). Dan is $m\ddot{x} = k^2 \sin \omega t$, of $\ddot{x} = \mu^2 \sin \omega t$, waarin $\mu = \frac{k}{\sqrt{m}}$ de bewegingsvergelijking. Men heeft dus:

$$\dot{x} = -\frac{\mu^2}{\omega}\cos \omega t + A\ , \quad x = -\frac{\mu^2}{\omega^2}\sin \omega t + At + B$$

waarin A en B integratieconstanten zijn die bepaald kunnen worden zodra snelheid en positie op één enkel tijdstip gegeven zijn. Stellen we dat het punt zich op het tijdstip t = 0 met snelheid nul in de oorsprong bevindt dan is $A = \mu^2\omega^{-1}$ en B = 0 zodat:

$$\dot{x} = 2\omega^{-1}\mu^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega t\ ; \quad x = \omega^{-2}\mu^2(\omega t - \sin \omega t)\ .$$

Bij toenemende t groeit de afstand tot 0 monotoon en onbegrensd aan.

2. De kracht kan een functie zijn van x alleen: $\underline{f} = mf(x)\underline{e}$. De bewegingsvergelijking is $\ddot{x} = f(x)$. We geven een paar voorbeelden.

α. $f(x) = -\omega^2 x$ ($\omega$ positief en constant). Daar $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, is

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \ .$$

Er is één hoek $\alpha$ met $0 \leq \alpha < 2\pi$ zodanig dat

$$\cos \alpha = c_1 (c_1^2 + c_2^2)^{-\frac{1}{2}} , \quad \sin \alpha = c_2 (c_1^2 + c_2^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

Met $c = (c_1^2 + c_2^2)^{\frac{1}{2}}$ is dus $x = c \cos(\omega t - \alpha)$. Blijkbaar zijn $x$, $\dot{x}$ en $\ddot{x}$ periodieke functies van de tijd; de periode is $2\pi/\omega = T$. Men noemt T ook de trillingstijd; $T^{-1} = \nu$ heet de frequentie en $\omega = 2\pi\nu$ de cirkelfrequentie. De grootste afstand tot 0 is c; men noemt deze afstand de amplitude. De beweging wordt een harmonische trilling genoemd. Men kan P beschouwen als de projectie op de x-as van een punt Q dat met hoeksnelheid $\omega$ de cirkel met middelpunt 0 en straal c doorloopt.

β. $f(x) = -2\mu^2 x^3$ ($\mu > 0$ en constant). Nu is de kracht net als in het vorige voorbeeld ook weer steeds naar 0 gericht (behalve in 0 zelf). Uit $2\dot{x}\ddot{x} = -4\mu^2 x^3 \dot{x}$ volgt $\dot{x}^2 = c_1^2 - \mu^2 x^4$. Blijkbaar is $|c_1|$ de snelheid als P in 0 is. We veronderstellen $c_1 \neq 0$. De grootste afstand tot 0 bedraagt $\sqrt{|c_1|/\mu} = c$ (= amplitude). Is $\dot{x} = 0$ voor $x = c$ dan beweegt het punt zich met toenemende snelheid naar 0, passeert 0 met de maximale snelheid $\mu^2 c^2$ en beweegt met afnemende snelheid naar het punt $x = -c$; hier keert de bewegingsrichting om en het spel herhaalt zich. De beweging is periodiek, het is een trilling. De trillingstijd T is de tijd nodig om, uitgaande van $x = c$, dit punt voor het eerst weer te bereiken. Daar $\dot{x}^2 = \mu^2(c^4 - x^4)$ vinden we:

$$T = 4\mu^{-1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{c^4 - x^4}} = 4\mu^{-1} c^{-1} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} .$$

De hierin voorkomende integraal kan niet elementair worden uitgerekend (waarde is ongeveer 1,3). We merken op dat $x = 0$ een evenwichtsstand is, d.w.z. wanneer het punt zich met snelheid nul in de oorsprong bevindt, blijft het in rust (ga dit na).

γ. Is $f(x) = \frac{3}{2}\mu^2x^2$ ($\mu > 0$ en constant) dan is de oorsprong weer een evenwichtsstand. De beweging is nu echter niet periodiek. Men vindt: $\dot{x}^2 = \mu^2x^3 + c$. Is het punt op het tijdstip $t = 0$ met snelheid $\mu p > 0$ in de oorsprong dan is $\dot{x}^2 = \mu^2(x^3 + p^2)$, zodat $x \geq -\sqrt[3]{p^2}$. Het punt beweegt zich met voortdurend toenemende snelheid $\mu\sqrt{x^3 + p^2}$ van de oorsprong af. Is $p < 0$ dan begint het punt zich met snelheid $\dot{x}\underline{e} = -\mu\sqrt{x^3 + p^2}\underline{e}$ te bewegen totdat het punt $-\sqrt[3]{p^2}$ is bereikt. Hier keert de bewegingszin om en het punt beweegt nu met snelheid $\mu\sqrt{x^3 + p^2}\underline{e}$. Ga dit alles zorgvuldig na en geef ook een discussie voor het geval dat het punt zich op het tijdstip $t = 0$ met snelheid $-\mu q$ ($q > 0$) in het punt $x = x_0 > 0$ bevindt (nb. er zit hier een klein addertje onder het gras).

Opmerking. Wanneer men bij dit voorbeeld probeert $x$ expliciet uit te drukken in $t$, stuit men op een integraal van de gedaante

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + k^2}},$$

die niet in elementaire functies kan worden uitgedrukt.

3.4. Kepler formuleerde als resultaat van een grondige studie van waarnemingsmateriaal afkomstig van Tycho Brahe voor de beweging van de planeten de volgende beroemd geworden wetten:

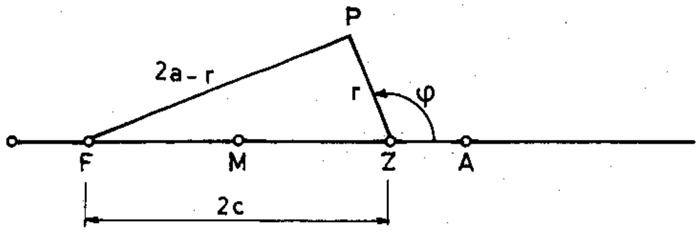
I. Elke planeet beschrijft een ellips waarvan één van de brandpunten in de zon valt.

II. De perksnelheid is hierbij constant.

III. Van twee verschillende planeten verhouden zich de kwadraten van de omloopstijden als de derde machten van de lange assen van hun banen.

De diepere betekenis van deze wetten is door Newton gevonden. Kort samengevat en vergaand gemoderniseerd (waardoor de geniale prestatie van Newton nauwelijks aan het licht komt), kan het onderzoek van Newton als volgt worden weergegeven. We beschouwen een punt P dat zich beweegt langs een ellips met middelpunt M en brandpunten Z (zon ) en F. Met a en b geven we de lengten van de halve lange en halve korte as aan. Dan is $MZ = MF = \sqrt{a^2 - b^2} = c$

PZ + PF = 2a. Men noemt c de lineaire en $\varepsilon = \frac{c}{a}$ de numerieke excentriciteit van de ellips. We geven de top van de ellips die het dichtst bij Z ligt met




A aan en kiezen Z en ZA als pool en poolas van een stelsel poolcoördinaten r, φ. In Δ ZPF is nu $(2a - r)^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\varphi$; hieruit volgt: $b^2 = r(a + c\cos\varphi)$ zodat

$$r = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi} \quad \text{of} \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

waarin $p = b^2/a$ de parameter van de ellips heet (populair gezegd is 2p de dikte van de ellips gemeten over een brandpunt). Uit de tweede wet van Kepler volgt $r^2\dot{\varphi} = h$ (= constant); dus $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$. Dit betekent dat de versnelling van P steeds langs PZ valt. Deze versnelling is

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}.$$

Uit $r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = p$ volgt $\dot{r}(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon r\dot{\varphi}\sin\varphi$ of $p\dot{r} = \varepsilon h\sin\varphi$ en dus

$$p\ddot{r} = \varepsilon\frac{h^2}{r^2}\cos\varphi = \frac{h^2}{r^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right) = \frac{ph^2}{r^3} - \frac{h^2}{r^2}.$$

Derhalve is $a_r = -\frac{h^2}{pr^2}$. De versnelling is dus naar Z gericht en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot Z. De evenredigheidsfactor

$h^2/p$ schijnt nog af te hangen van de beschouwde planeet. Volgens de tweede wet geldt voor de omloopstijd T: $hT = 2\pi ab = 2\pi a\sqrt{pa}$ of: $T^2/a^3 = 4\pi^2 p/h^2$. De derde wet spreekt uit dat $T^2/a^3$ voor alle planeten dezelfde waarde heeft. Hetzelfde geldt dus voor $h^2/p = \mu^2$ $(\mu > 0)$. De versnellingswet luidt dus $a_r = -\frac{\mu^2}{r^2}$ waarbij $\mu$ voor alle planeten van het stelsel dezelfde is. Kepler formuleerde zijn wetten voor het planetenstelsel. Latere waarnemingen toonden dat ze ook gelden voor het stelsel gevormd door Jupiter en zijn manen. Ook hier geldt dus eenzelfde versnellingswet doch met een andere waarde van de constante $\mu$. De gevolgtrekking die Newton maakte, was dan ook dat $\mu$ bepaald wordt door de massa in het centrum. Hij stelde $\mu^2 = fm_c$ waarin $m_c$ deze massa is en f een constante voorstelt. Is m de massa van de planeet (of maan) dan is dus de kracht die op de planeet wordt uitgeoefend $f\,\frac{m_c m}{r^2}$. De grote stap die Newton deed, was dat hij deze wet algemene geldigheid toekende: twee massapunten met massa's $m_1$ en $m_2$ op een afstand r van elkaar, trekken elkaar aan met een kracht $f\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (gravitatiewet; f heet de gravitatieconstante en is een universele constante). Deze wet beheerst dus ook de beweging van de maan om de aarde en de beweging van vallende voorwerpen.

3.5. In de natuur is de massa niet geconcentreerd in meetkundige punten. Veeleer is het zo dat we ons ruimtedelen moeten voorstellen die geheel met massa zijn gevuld (of met massa zijn belegd). Zo'n ruimtedeel wordt een materieel of stoffelijk lichaam genoemd. Zij L een stoffelijk lichaam, G het ruimtedeel dat door L wordt ingenomen, P een punt van G en U een deel van G dat P bevat. De massa waarmee U is gevuld, noemen we m(U) en de meetkundige maat van U geven we met $\mu(U)$ aan. Het quotiënt $m(U)/\mu(U)$ kan dan de gemiddelde massa in U worden genoemd. We veronderstellen dat dit quotiënt een limiet heeft als $\mu(U) \to 0$, zodanig dat P steeds tot U blijft behoren (dus als U zich samentrekt op P). Deze limiet heet de massadichtheid van L in het punt P. We geven deze met $\sigma(P)$ aan; uiteraard is $\sigma(P) \geq 0$. Het kan voorkomen dat $\sigma(P)$ niet afhangt van de keuze van P in G. In dit geval heet L homogeen. De massa van L is dan $M = \sigma\mu(G)$ waarin $\sigma$ de constante massadichtheid is. Is $\sigma(P)$ niet constant dan wordt de massa van L voorgesteld door de integraal

$$M = \int_G \sigma(P)\,d\mu\,, \tag{3.5.1}$$

die enkelvoudig, tweevoudig of drievoudig is al naar gelang L lijnvormig, plaatvormig of driedimensionaal is. Men noemt $\sigma(P)d\mu = dm$ het massaelement in P.

Let er op dat een stoffelijk lichaam niet een verzameling is van oneindig veel massapunten $P_i$ met massa's $m_i$. Immers dan zou elk stoffelijk lichaam een oneindig grote massa hebben. Wel kunnen we aan elk punt $P_i$ een massa-element $(dm)_i$ toewijzen. We gaan nu een slordige notatie invoeren. Dit massaelement geven we met $m_i$ aan; met op de achtergrond de gedachte dat een integraal een limiet is van een som, schrijven we voor (3.4.1) brutaalweg: $M = \Sigma m_i$. Het lijkt onvergeeflijk slordig, doch het bespaart heel wat geschrijf en gepraat. Dit blijkt al direct zeer duidelijk wanneer een materieel (of mechanisch) stelsel ter sprake komt. Dit is een stelsel waarin naast een aantal stoffelijke lichamen ook nog massapunten kunnen voorkomen. De totale massa van dit stelsel kunnen we nu noteren als $M = \Sigma m_i$ waarbij de "som" moet worden uitgestrekt over alle punten die met massa behept zijn. In werkelijkheid is deze "som" de echte som van een aantal integralen (te danken aan de stoffelijke lichamen) vermeerderd met de echte som van een aantal massa's (afkomstig van de massapunten, die uiteraard eindig in aantal zijn). Wiskundig kan de zaak onberispelijk worden gemaakt zodra we de beschikking hebben over een integraalbegrip dat ietwat ruimer is dan de Riemann-integraal, de enige die we in dit stadium bekend mogen veronderstellen.

3.6. Van een mechanisch stelsel zij $P_i$ (positievector $\underline{x}_i$) een punt behept met massa $m_i$. We voeren in de vector $\underline{z}$ bepaald door

$$m\underline{z} = \Sigma m_i \underline{x}_i \quad , \qquad (3.6.1)$$

waarin $m = \Sigma m_i$ de totale massa van het stelsel is. Zij Z het punt met positievector $\underline{z}$. Dit punt hangt niet van de keuze van het assenstelsel af. Is namelijk O' (met $\overrightarrow{OO'} = \underline{d}$) oorsprong van een ander assenstelsel en $\underline{x}_i'$ de positievector van $P_i$ ten opzichte van dit stelsel, dan zou in plaats van $\underline{z}$ komen de vector $\underline{z}'$ bepaald door $m\underline{z}' = \Sigma m_i \underline{x}_i'$. Wegens $\underline{x}_i = \underline{x}_i' + \underline{d}$ is nu:

$$m\underline{z} = \Sigma m_i(\underline{x}_i' + \underline{d}) = \Sigma m_i \underline{x}_i' + m\underline{d} = m\underline{z}' + m\underline{d} \; .$$

Bijgevolg: $\underline{z} = \underline{z}' + \underline{d}$. Dit betekent dat $\underline{z}'$ ten opzichte van het tweede assenstelsel de positievector is van het bovengenoemde punt Z. Dit punt is derhalve ondubbelzinnig bepaald door het stelsel en heet het massamiddelpunt hiervan.
Van de massapunten $P_1,\ldots,P_n$ met positievectoren $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$, massa's $m_1,\ldots,m_n$ en gezamenlijke massa m is de positievector $\underline{z}$ van het massamiddelpunt Z bepaald door

$$m\underline{z} = \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{x}_k \, . \tag{3.6.2}$$

Zij S een mechanisch stelsel bestaande uit de lichamen $L_k$ $(k = 1,\ldots,n)$, $M_k$ de massa van $L_k$, $\underline{z}_k$ de positievector van het massamiddelpunt $Z_k$ van $L_k$ en M de totale massa van S. Dan is $M_k\underline{z}_k = \Sigma m_i\underline{x}_i$, het tweede lid uit te strekken over het gehele lichaam $L_k$. Voor de positievector $\underline{z}$ van het massamiddelpunt Z van S vindt men dus:

$$M\underline{z} = \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{z}_k \, .$$

Bijgevolg is Z het massamiddelpunt van n massapunten met massa's $M_k$ geplaatst in de massamiddelpunten $Z_k$ $(k = 1,\ldots,n)$. Het is nu natuurlijk verleidelijk (en misschien verwacht de lezer het ook) een lange serie vraagstukken op te geven waarin van allerlei lichamen het massamiddelpunt moet worden bepaald. Dat is echter meer een oefening (en een goede!) in integreren dan een toetsing van mechanisch inzicht. We laten dit daarom achterwege en noemen slechts een tweetal algemene stellingen waarvan men bij het oplossen van zulke vraagstukken profijt kan hebben. Een mechanisch stelsel heeft een middelpunt C als met elk punt $X_i$ van het stelsel ook het punt $X_i'$ bepaald door $\overrightarrow{CX_i'} = -\overrightarrow{CX_i}$ tot het stelsel behoort. Zijn $X_i$ en $X_i'$ behept met dezelfde massa $m_i$ dan zegt men dat de massaverdeling symmetrisch is ten opzichte van C. De volgende stelling is nu gemakkelijk te bewijzen.
Is van een mechanisch stelsel met middelpunt de massaverdeling symmetrisch ten opzichte van dit middelpunt, dan valt het massamiddelpunt van het stelsel samen met genoemd middelpunt.
Een vlak $\pi$ heet een symmetrievlak van een mechanisch stelsel S als aan elk punt $X_i$ van S een punt $X_i'$ van S kan worden toegevoegd, zodanig dat $X_iX_i'$ een vaste richting (de symmetrierichting) heeft en het midden van $X_iX_i'$ in $\pi$ ligt. Zijn $X_i$ en $X_i'$ ook nog steeds met dezelfde massa behept dan is $\pi$ ook

een symmetrievlak voor de massaverdeling.

Stelling. Hebben een stoffelijk stelsel en zijn massaverdeling hetzelfde symmetrievlak $\pi$, dan ligt het massamiddelpunt in $\pi$.

3.7. Bij de invoering van het begrip stoffelijk lichaam is gebruik gemaakt van begrippen uit de analyse zoals volume-, oppervlakte-, lijnelement en naderhand ook van het begrip massaelement. Een voor de hand liggende stap is de invoering van krachtelementen. We doen dit door de volgende modificatie van de fundamentele regels I en II van 3.2.

I*. Als op een punt P van een mechanisch stelsel waar zich het massaelement $dm = \sigma(P)d\mu = \sigma d\mu$ bevindt, op het tijdstip t het krachtelement $d\underline{f}$ aangrijpt, wordt de versnelling op dit tijdstip bepaald door:

$$d\underline{f} = (dm)\underline{a} = (\sigma d\mu)\underline{a} \ .$$

Dit is een differentiële regel een regel in "het kleine". Een integratieproces is nodig om uit te maken wat er aan beweging resulteert, want alleen de uitkomst hiervan kan door waarneming en experiment worden getoetst. We volstaan in dit stadium met de vermelding dat de uitslag van de toets de stap die we hebben ondernomen, rechtvaardigt.

II*. Als de invloed die een punt $P_2$ van een lichaam uitoefent op een punt $P_1$ van hetzelfde of van een ander lichaam door het krachtelement $(df)_{21}$ wordt voorgesteld dan representeert $(df)_{12} = -(df)_{21}$ te zelfder tijd de invloed van $P_1$ op $P_2$; beide krachtelementen hebben dezelfde drager $P_1P_2$.

3.8. Als toepassing van het voorafgaande berekenen we de kracht die door een massieve bol (middelpunt O, straal R) volgens de gravitatiewet wordt uitgeoefend op een massapunt A met massa m dat zich op een afstand p van het middelpunt bevindt. We kiezen de positieve zin op de z-as van een orthonormaal assenstelsel Oxyz langs $\overrightarrow{OA}$ en voeren poolcoördinaten $\rho$, $\varphi$, $\theta$ in door

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta \ , \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \ , \quad z = \rho \cos \theta \ .$$

Is $\sigma$ de massadichtheid dan is $dm = \sigma\rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi$ het massaelement in het punt $P(\rho,\varphi,\theta)$. Stelt men $PA = r$ dan is

$$\frac{mf\sigma\rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi}{r^2}$$

de kracht die dit massaelement op A uitoefent; de drager van deze kracht is PA. We veronderstellen dat $\sigma$ niet van $\varphi$ en $\theta$ afhangt. Dan is het duidelijk dat we alleen rekening hebben te houden met de component van deze kracht langs OA. Is $\angle OAP = \psi$ dan is $\cos\psi = \frac{p - \rho\cos\theta}{r}$. Voor de grootte van de kracht die de bol op A uitoefent, vindt men zodoende:

$$k = mf \int_V \frac{\sigma\rho^2 (p - \rho\cos\theta)\sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi}{r^3}$$

waarbij over het inwendige van de bol moet worden geintegreerd. We voeren de integratie naar $\varphi$ uit en schrijven:

$$k = 2\pi mf \int_0^R \sigma\rho d\rho \int_0^\pi \frac{p - \rho\cos\theta}{r^3} \rho \sin\theta \, d\theta \, .$$

Uit $r^2 = p^2 + \rho^2 - 2p\rho\cos\theta$ volgt $rdr = 2p\rho\sin\theta \, d\theta$.

Dus:

$$k = 2\pi mf \int_0^R \sigma\rho d\rho \int_{|p-\rho|}^{p-\rho} \frac{p^2 - \rho^2 + r^2}{2p^2 r^2} dr \, .$$

We stellen

$$\int_{|p-\rho|}^{p+\rho} \frac{p^2 - \rho^2 + r^2}{2p^2 r^2} dr = g(\rho) \, .$$

Dan is:

$$g(\rho) = \begin{cases} 2p^{-2}\rho & \text{voor } 0 \le \rho < p \, , \\ p^{-1} & \text{voor } \rho = p \, , \\ 0 & \text{voor } \rho > p \, . \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$k = 2\pi m f \int_0^R \sigma \rho g(\rho) d\rho \; .$$

We onderscheiden twee gevallen:

I. A ligt buiten of op de bol. Dan is $p \geq R$ en

$$k = \frac{4\pi m f}{p^2} \int_0^R \sigma \rho^2 d\rho \; .$$

Daar $4\pi \int_0^R \sigma \rho^2 d\rho$ de totale massa M van de bol is, vinden we $k = f \frac{mM}{p^2}$.

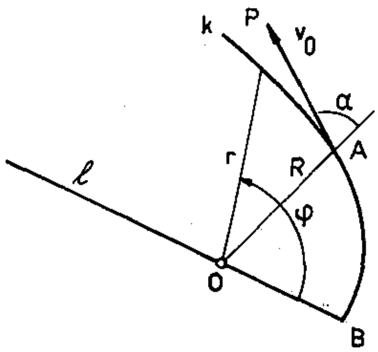
Het punt A ondervindt dus van de bol dezelfde aantrekkingskracht als van een massapunt met dezelfde massa als de bol en geplaatst in het middelpunt van de bol.

II. A ligt binnen de bol. Dan is $0 < p < R$. In dit geval is

$$k = \frac{4\pi m f}{p^2} \int_0^p \sigma \rho^2 d\rho \; .$$

Is de bol homogeen dan wordt dit: $k = \frac{4}{3} \pi \sigma m f p$, of: $k = f \frac{mM}{R^3} p$. De kracht is nu recht evenredig met de afstand tot het middelpunt. De uitkomst geldt ook voor $p = 0$.

Merk op dat bij de doorgang van A door het boloppervlak de kracht continu verandert. Beschouwt men in plaats van een massieve bol een boloppervlak (middelpunt 0, straal r) dat homogeen met massa is belegd dan is de aantrekkingskracht hiervan op een massapunt met massa m op een afstand p van 0 geplaatst gelijk aan $f \frac{mM}{p^2}$ als $p > R$ en nul als $p < R$. Is $p = R$ dan is deze kracht $f \frac{mM}{2R^2}$ (M = totale massa op het boloppervlak); bij doorgang door het oppervlak verandert de kracht niet continu. De aantrekkingskracht die twee buiten elkaar geplaatste massieve bollen met massa's $m_1$ en $m_2$ op elkaar uitoefenen, is $f \frac{m_1 m_2}{d^2}$ waarin d de afstand van hun middelpunten is.




3.9. Een toepassing van het behandelde in de vorige paragraaf mag niet ontbreken. Van een homogene bol (middelpunt O, straal R, massa M) vertrekt uit een punt A een massapunt P (massa m) met een beginsnelheid $v_0$ die een hoek $\alpha$ $(0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi)$ met $\overrightarrow{OA}$ maakt. De bol is in rust. Dit is een grove simplificatie van het afvuren van een projectiel (raket) in een of ander punt op aarde.

De baan van P is een kegelsnede waarvan O een brandpunt is. We veronderstellen dat $\ell$ de hoofdas is en B het pericentrum. Bij gebruik van de aangegeven poolcoördinaten r en $\varphi$ is nu:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = - f\,\frac{M}{r^2}\,, \qquad r^2\dot{\varphi} = h = \text{constant}\,.$$

Hieruit volgt:

$$2\dot{r}\ddot{r} - 2\,\frac{h^2}{r^3}\,\dot{r} = -2f\,\frac{M}{r^2}\,\dot{r}\,.$$

Integratie geeft:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - 2\,\frac{fM}{r} = C\,, \quad \text{of} \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2\,\frac{fM}{r} = C\,,$$

waarin C constant is. Is v de snelheid dan is $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = v^2$, zodat $v^2 - 2\,\frac{fM}{r} = C$. Op het tijdstip $t = 0$ van afvuren is $v = v_0$ en $r = R$ zodat:

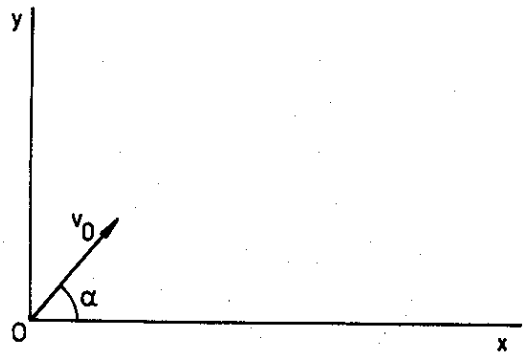
$v^2 - 2\frac{fM}{r} = v_0^2 - 2\frac{fM}{R}$. Is $v_p$ de pericentrumsnelheid dan is dus:

$$v_p^2 - 2\frac{fM(1+\varepsilon)}{p} = v_0^2 - 2\frac{fM}{R}.$$

Hierin is p de parameter en $\varepsilon$ de excentriciteit van de baan. Uit het voorbeeld in paragraaf 2.13 kan nu gemakkelijk worden afgeleid: $\frac{fM(1+\varepsilon)}{p} = v_c v_p$. Derhalve is $v_p^2 - 2v_c v_p = v_0^2 - 2\frac{fM}{R}$. We schrijven hiervoor $v_p^2 - 2v_p v_c = v_0^2 - 2\gamma R$, waarin $\gamma = \frac{fM}{R^2}$. Volgens paragraaf 2.13 is de baan dus dan en alleen dan hyperbolisch of parabolisch als $v_0^2 \geq 2\gamma R$. Men noemt $v_k = \sqrt{2\gamma R}$ de kritische snelheid of de ontsnappingssnelheid. Een projectiel met een beginsnelheid $\geq v_k$ afgevuurd, keert niet op de bol terug. Is de beginsnelheid kleiner dan $v_k$ dan komt het weer op de bol terecht. Ook voor $\alpha = 0$ is $\sqrt{2\gamma R}$ de ontsnappingssnelheid (overtuig U hiervan). Merk vooral op dat $v_k$ niet afhangt van de hoek waaronder het schot wordt afgevuurd.

3.10. In het bovenstaande voorbeeld is $m\gamma$ de kracht die de bol uitoefent op een punt met massa m gelegen op het boloppervlak. Zo oefent ook de aarde die nagenoeg bolvormig is op een massapunt met massa m een kracht mg uit waarin g ongeveer de waarde $f\frac{M}{R^2}$ heeft (M is de massa van de aarde en R de aardstraal). Dat dit slechts ongeveer uitkomt, heeft allerlei oorzaken. Om te beginnen is de aarde niet homogeen. Verder is zij niet bolvormig doch gelijkt meer op een omwentelingsellipsoide waarvan de korte as langs de lijn noordpool-zuidpool valt. Bovendien wentelt de aarde om deze lijn als as. Dit alles heeft tot gevolg dat g niet overal dezelfde waarde heeft en dat de kracht mg niet naar het middelpunt gericht is. Om enig idee te geven van de variatie in grootte: op zeeniveau is aan de evenaar: $g = 9{,}780\ 30\ m/s^2$ en aan de polen $g = 9{,}832\ 13\ m/s^2$. Dus is $9{,}8\ m/s^2$ een redelijk gemiddelde voor g. Men noemt g de versnelling van de zwaartekracht en mg het gewicht van het massapunt. Voor verschijnselen die zich op een klein deel van het aardoppervlak afspelen en waarbij hoogten worden bereikt die klein zijn in vergelijking met de gemiddelde aardstraal - die 6371 km is - kan de oppervlakte van de aarde als een plat vlak worden beschouwd en mag worden aangenomen dat de versnelling van de zwaartekracht overal dezelfde richting en grootte heeft (homogeen zwaarteveld).

Toepassing. Bij een schot met een aanvangssnelheid $v_0$ zeer veel kleiner dan de ontsnappingssnelheid (die ongeveer 11 km/s bedraagt) is de baan een kromme gelegen in het verticale vlak door de beginsnelheid.




We nemen in dit vlak het rechthoekig assenstelsel Oxy aan met de oorsprong 0 in het beginpunt. Dan is: $\ddot{x} = 0$ en $\ddot{y} = -g$. Hieruit volgt: $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt$ en verder: $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Door t te elimineren vinden we als vergelijking van de baan:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2(1 + \tan^2\alpha) + x \tan \alpha \,.$$

De baan is dus een parabool met $T(v_0^2/g \sin \alpha \cos \alpha,\ v_0^2/2g \sin^2\alpha)$ als top. Het punt $(x_0, y_0)$ kan met een gegeven beginsnelheid $v_0$ worden geraakt als de vierkantsvergelijking:

$$gx_0^2 \tan^2\alpha - 2v_0^2 x_0 \tan \alpha + gx_0^2 + 2v_0^2 y_0 = 0$$

voor $\tan \alpha$ reële wortels heeft. Dit is dan en alleen dan het geval als $(x_0, y_0)$ ligt binnen of op de parabool met vergelijking: $y = v_0^2/2g - gx^2/2v_0^2$ (veiligheidsparabool). Een punt binnen deze parabool en niet op de y-as kan door een laag en een hoog schot worden getroffen; voor het hoge schot is de meeste tijd (vluchttijd) nodig. Is 0 een punt van het aardoppervlak dan is

$$\frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

de afstand van 0 tot het punt waar het projectiel in slaat (verheid). De maximale verheid treedt op voor de elevatiehoek $\alpha = \pi/4$.

Bij het bovenstaande is verondersteld dat er geen luchtweerstand is. Voor de practische bepaling van de baan door berekening moet met deze weerstand rekening worden gehouden. Dit geschiedt door het aannemen van een luchtweerstandswet van de gedaante $mf(v)$ waarin $v$ de snelheid is op het tijdstip $t$ en $f$ een functie voorstelt die door proefneming wordt bepaald. Is $\theta$ de hoek van de snelheidsvector met de positieve $x$-as dan is $\dot{v} = -f(v) - g \sin \theta$ en $v\dot{\theta} = - g \cos \theta$. Hieruit vindt men

$$\frac{dv}{d\theta} = v\{\frac{f(v)}{g \cos \theta} + \tan \theta\} ,$$

de hoofdvergelijking van de (uitwendige) ballistiek. Zij kan ook worden geschreven als

$$\frac{d}{d\theta} (v \cos \theta) = g^{-1} vf(v) .$$

3.11. Zij $P_i$ een punt van een mechanisch stelsel en $m_i$ de massa waarmee $P_i$ behept is; $m_i$ kan dus een massaelement zijn. De totale op $P_i$ werkende kracht zij $\underline{f}_i$, zodat $\underline{f}_i$ ook een krachtelement kan zijn. De som van alle door vectoren gerepresenteerde invloeden op de beweging van $P_i$ is dus $\underline{f}_i$. Onder deze invloeden zijn er die afkomstig zijn van punten die niet tot het gegeven stelsel S behoren. De som van de corresponderende vectoren noemen we $\underline{f}_{iu}$. Dan heet $\underline{f}_{iu}$ de uitwendige kracht die op $P_i$ werkt. Daarnaast wordt de beweging van $P_i$ beïnvloed door punten $P_j$ $(j \neq i)$ die wel tot S behoren. Is $\underline{f}_{ji}$ de kracht die $P_j$ op $P_i$ uitoefent dan is dus

$$\underline{f}_i = \underline{f}_{iu} + \sum_{1} \underline{f}_{ji} \qquad (3.11.1)$$

waarbij de "som" moet worden uitgedrukt over alle van $P_i$ verschillende punten van S. De krachten $\underline{f}_{ji}$ heten de inwendige krachten die op S werken. Volgens onze fundamentele regels is $\underline{f}_{ji} = -\underline{f}_{ij}$. Dit heeft tot gevolg: Voor elk mechanisch stelsel is op elk tijdstip de vectorsom van alle inwendige krachten een nulvector.

In verband met (3.11.1) leidt dit tot de zeer belangrijke conclusie: De vectorsom van alle op een mechanisch stelsel werkende krachten is gelijk aan de vectorsom van alle uitwendige krachten die op het stelsel werken.

3.12. Zij S een mechanisch stelsel met totale massa m, $X_i$ een punt van S met positievector $\underline{x}_i$ en behept met de massa $m_i$. De kracht die op $X_i$ werkt, noemen we $\underline{f}_i$. Dan is $\underline{f}_i = m_i\ddot{\underline{x}}_i$. Zij $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z van S, zodat dus $m\underline{z} = \Sigma m_i\underline{x}_i$. Dan is $m\ddot{\underline{z}} = \Sigma m_i\ddot{\underline{x}}_i = \Sigma \underline{f}_i$. Het laatste lid is gelijk aan de vectorsom $\underline{f}_u$ van alle uitwendige krachten die op S werken. Bijgevolg is $\underline{f}_u = m\ddot{\underline{z}}$. Derhalve: de beweging van het massamiddelpunt van een mechanisch stelsel met massa m stemt overeen met die van een massapunt met massa m geplaatst in het massamiddelpunt van het stelsel onder invloed van een kracht gelijk aan de vectorsom van alle uitwendige krachten die op het stelsel werken.

3.13. Onder de impuls van een massapunt met massa m en snelheid $\underline{v}$ verstaat men de vector $m\underline{v}$.

Zij P een massapunt met impuls $\underline{p}$ en Q een willekeurig punt. Onder het impulsmoment van P ten opzichte van Q verstaat men de momentvector in Q van de speer met speervector $\underline{p}$ waarvan de drager door P gaat.

We beschouwen nu een mechanisch stelsel S bestaande uit punten $P_i$ met positievectoren $\underline{x}_i$ en massa's $m_i$. Het impulsmoment van $P_i$ ten opzichte van $\underline{q}$ is dan $(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\dot{\underline{x}}_i$. We definiëren: het impulsmoment van S ten opzichte van $\underline{q}$ is de vector

$$\underline{D} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\dot{\underline{x}}_i \; . \qquad (3.13.1)$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\underline{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\ddot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{q}} \times \Sigma m_i\dot{\underline{x}}_i \; . \qquad (3.13.2)$$

Nu is $m_i\ddot{\underline{x}}_i = \underline{f}_i$ de kracht die op $P_i$ werkt. Twee inwendige krachten $\underline{f}_{ij}$ en $\underline{f}_{ji} = -\underline{f}_{ij}$ hebben dezelfde drager. De som van hun momenten ten opzichte van Q is dus een nulvector. Voor (3.13.2) kan dus worden geschreven:

$$\dot{\underline{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times \underline{f}_{iu} - \dot{\underline{q}} \times \Sigma m_i\dot{\underline{x}}_i \qquad (3.13.3)$$

waarin $\underline{f}_{iu}$ de uitwendige kracht op $P_i$ is. Is $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z van S dan is $\Sigma m_i\dot{\underline{x}}_i = m\dot{\underline{z}}$ waarin m de totale massa van S is. Hierdoor gaat (3.13.3) over in

$$\dot{\underline{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times \underline{f}_{iu} - m\dot{\underline{q}} \times \dot{\underline{z}} \; . \qquad (3.13.4)$$

Wanneer $\underline{q}$ een vast punt is en ook wanneer $\underline{q}$ het massamiddelpunt is van het stelsel, is $\dot{\underline{q}} \times \dot{\underline{z}} = \underline{0}$. Hiermee is aangetoond: <u>de fluxie van het impulsmoment van een mechanisch stelsel ten opzichte van een vast punt is gelijk aan de som van de momenten van de uitwendige krachten die op het stelsel werken ten opzichte van dit punt</u>. In de stelling mag in plaats van <u>vast punt</u> ook <u>massamiddelpunt</u> worden gelezen.
Deze stelling en die van de vorige paragraaf gelden voor elk mechanisch stelsel star of niet star. We zullen ze aanhalen onder de naam <u>algemene theorema's</u>.
Omdat noch de vectorsom van een krachtenstelsel, noch de som van de momenten van de krachten van het stelsel ten opzichte van eenzelfde punt verandert als elke kracht willekeurig langs zijn drager wordt verschoven, kunnen bij het toepassen van de algemene theorema's de krachten als speren worden beschouwd.

3.14. Als het aangrijpingspunt K van een constante kracht $\underline{f}$ zich verplaatst van een punt P naar een punt Q heet $(\underline{f},\overrightarrow{PQ})$ de <u>arbeid die $\underline{f}$ bij deze verplaatsing verricht</u>. Deze arbeid is blijkbaar onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel, van de baan die K volgt om van P naar Q te komen en van de tijd die hiervoor nodig is.
Is $\underline{f}$ niet constant en is $\underline{x} = \underline{x}(s)$ de baan die K volgt bij de verplaatsing van P naar Q dan is

$$\int_{s_P}^{s_Q} (\underline{f},\underline{t})ds = A$$

de arbeid die $\underline{f}$ bij deze verplaatsing verricht. We passen dit toe op het geval dat een massapunt P met massa m onder de inwerking van een kracht $\underline{f}$ (al dan niet afhankelijk van de tijd t) een zekere baan k beschrijft, voorgesteld door $\underline{x} = \underline{x}(t)$. Op het tijdstip $t_1$ is P in het punt $Q_1$ en op het tijdstip $t_2$ in het punt $Q_2$ van de baan. De arbeid A die $\underline{f}$ in het tijdsinterval $[t_1,t_2]$ verricht, is dan

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (\underline{f},\underline{v})dt = m\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\underline{v}},\underline{v})dt = \tfrac{1}{2}m(\underline{v}_2,\underline{v}_2) - \tfrac{1}{2}m(\underline{v}_1,\underline{v}_1) = T_2 - T_1 .$$

Men noemt $\frac{1}{2}m(\underline{v},\underline{v}) = T$ de kinetische energie van het massapunt op het tijdstip t. De door $\underline{f}$ verrichte arbeid is dus gelijk aan de toename van de kinetische energie. Als kinetische energie van een mechanisch stelsel bestaande uit punten $P_i$ behept met massa's $m_i$ definiëren we op een tijdstip waarop $\underline{v}_i$ de snelheid van $P_i$ is: $T := \frac{1}{2}\Sigma m_i(\underline{v}_i,\underline{v}_i)$. Men ziet nu gemakkelijk in dat de gezamenlijke arbeid van alle krachten die op het stelsel werken, gelijk is aan de toename van de kinetische energie. Is het stelsel star dan is de gezamenlijke arbeid van de inwendige krachten nul. In dit geval is dus de toename van de kinetische energie gelijk aan de gezamenlijke arbeid van de uitwendige krachten.

Wanneer het aangrijpingspunt van een kracht $\underline{f}$ zich verplaatst en op zeker tijdstip de snelheid $\underline{v}$ heeft, wordt $(\underline{f},\underline{v})$ het vermogen van f op dit tijdstip genoemd.

3.15. Is $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z van het stelsel en stellen we $\underline{x}_i - \underline{z} = \underline{u}_i$ dan is wegens $\Sigma m_i\dot{\underline{u}}_i = \underline{0}$:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{\underline{z}},\dot{\underline{z}}) + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(\dot{\underline{u}}_i,\dot{\underline{u}}_i) ,$$

waarin m de totale massa van het stelsel is. Dit resultaat wordt vaak samengevat als slagzin: de kinetische energie van een stelsel is de som van de kinetische energie van het massamiddelpunt en de kinetische energie om dit punt.

3.16. Voor de kinetische energie van een star lichaam L (massadichtheid $\sigma$) bij rotatie om een vast punt 0 dat we als oorsprong van een orthonormaal rechts assenstelsel $0X_1X_2X_3$ kiezen, geldt:

$$2T = \int_L (\underline{\omega} \times \underline{X}, \underline{\omega} \times \underline{X})\sigma d\mu ,$$

of

$$2T = \int_L \{(\omega_2 X_3 - \omega_3 X_2)^2 + (\omega_3 X_1 - \omega_1 X_3)^2 + (\omega_1 X_2 - \omega_2 X_1)^2\}\sigma d\mu \ .$$

Hiervoor kan men schrijven

$$2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 - 2P_{12}\omega_1\omega_2 - 2P_{23}\omega_2\omega_3 - 2P_{31}\omega_3\omega_1 \ ,$$

waarin

$$I_1 = \int_L (X_2^2 + X_3^2)\sigma d\mu \ , \quad P_{12} = P_{21} = \int_L X_1 X_2 \sigma d\mu$$

en cycl. $I_1$, $I_2$, $I_3$, $P_{12}$, $P_{23}$ en $P_{31}$ heten de traagheidsgrootheden van L ten opzichte van O. In het bijzonder noemt men $I_k$ het <u>traagheidsmoment</u> ten opzichte van de $X_k$-as en $P_{k\ell}$ het <u>traagheidsproduct</u> ten opzichte van het lijnenpaar gevormd door de $X_k$-as en de $X_\ell$-as. Met gebruikmaking van de symmetrische matrix

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{21} & I_2 & -P_{23} \\ -P_{31} & -P_{32} & I_3 \end{pmatrix} ,$$

de kolomvector $\underline{\omega}$ en de rijvector $\underline{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ kan men schrijven

$$2T = \underline{\omega}^T J \underline{\omega} \ . \tag{3.16.1}$$

Men noemt J de <u>traagheidsmatrix</u> voor het punt O. Let erop dat de elementen van J evenals $\underline{\omega}$ functies zijn van de tijd t.

3.17. Zij $Ox_1x_2x_3$ een orthonormaal rechts assenstelsel dat vast met het starre lichaam L is verbonden en n een rechte door O met als richtingsvector de eenheidsvector $\underline{\nu}$. De afstand van een punt $\underline{x}$ van L tot n noemen we d. Dan heet $I_n = \int_L d^2 \sigma d\mu$ het <u>traagheidsmoment van L ten opzichte van n</u>. Daar $d^2 = (\underline{\nu} \times \underline{x}, \underline{\nu} \times \underline{x})$ vindt men $I_n = \underline{\nu}^T J_0 \underline{\nu}$, waarin

$$J_0 = \begin{pmatrix} i_1 & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & i_2 & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & i_3 \end{pmatrix}$$

met:

$$i_1 = \int_L (x_2^2 + x_3^2)\sigma d\mu \,, \quad p_{12} = p_{21} = \int_L x_1 x_2 \sigma d\mu \text{ en cycl.}$$

De elementen van $J_0$ zijn constanten. Het is bekend dat door geschikte keuze van het assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ de traagheidsmatrix $J_0$ de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

krijgt. Hierin zijn $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $\lambda_3$ de eigenwaarden van $J_0$. De assen van het assenstelsel waarvoor $J_0$ een diagonaalmatrix wordt, heten de hoofdtraagheidsassen van L in het punt O (is O het massamiddelpunt dan de centrale hoofdtraagheidsassen); $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $\lambda_3$ zijn de traagheidsmomenten van L om deze assen (hoofdtraagheidsmomenten). Bijgevolg zijn $\lambda_1$, $\lambda_2$ en $\lambda_3$ positief. Het oppervlak $\underline{x}^T J_0 \underline{x} = 1$ is dus een ellipsoide E (de traagheidsellipsoide met middelpunt O). Is O het massamiddelpunt dan spreekt men van de centrale traagheidsellipsoide. Is N het snijpunt van n met E, zo gekozen dat $\overrightarrow{ON}$ en $\underline{\nu}$ dezelfde zin hebben dan is $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\underline{\nu}}{\sqrt{I_n}}$. Voeren we nog de totale massa m van L in dan kan men schrijven $I_n = m\rho_n^2$ waarin $\rho_n$ een lengte voorstelt die de traagheidstraal van L ten opzichte van de as n wordt genoemd. Blijkbaar is $|\overrightarrow{ON}|$ omgekeerd evenredig met deze traagheidsstraal.

Men kan gemakkelijk aantonen dat het traagheidsmoment $I_z$ om een rechte door het massamiddelpunt $\underline{x}$ evenredig met $\ell$ gegeven is door $I_z = I_\ell - mc^2$, waarin c de afstand is tussen beide rechten (verschuivingswet; stelling van Steiner).

3.18. De traagheidsellipsoide E is vast met L verbonden. Beweegt L ten opzichte van het assenstelsel van 3.16 dan neemt ook E aan deze beweging deel. Een vector $\overrightarrow{OP}$, waarin P een punt van L is, kan worden beschreven door zijn kengetallen $x_1, x_2, x_3$ maar ook door zijn kengetallen ten opzichte van $OX_1X_2X_3$ die we $X_1$, $X_2$ en $X_3$ genoemd hebben. Al naar gelang de eerste of de tweede beschrijving is bedoeld, zullen we $\overrightarrow{OP}$ met $\underline{x}$ of $\underline{X}$ aangeven. Dus: $\underline{x}$ hangt niet van t af, maar $\underline{X}$ wel. Het verband tussen $\underline{X}$ en $\underline{x}$ is $\underline{X} = A\underline{x}$ waarin A een rechtstreeks orthogonale matrix voorstelt waarvan de elementen functies van t zijn. Dus $\dot{\underline{X}} = \dot{A}\underline{x} = \dot{A}A^T\underline{x}$. Anderzijds is:

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\omega} \times \underline{X} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \underline{X} .$$

Bijgevolg:

$$\dot{A}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \Omega .$$

(N.B. Dat $\dot{A}A^T$ een scheefsymmetrische matrix is, konden we van te voren weten. Want $AA^T = I$ = eenheidsmatrix. Dus $\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0$ = nulmatrix).
De vector $\underline{v}$ heeft ten opzichte van het vaste assenstelsel de beschrijving $\underline{N} = A\underline{v}$. Hieruit volgt: $I_n = \underline{N}^T AJ_0A^T\underline{N}$. We concluderen hieruit: $J = AJ_0A^T$ of $J_0 = A^TJA$ (kunt ge dit volgen?). Wordt de vector $\underline{\omega}$ (dit is een beschrijving ten opzichte van het vaste assenstelsel) ten opzichte van het bewegende beschreven door $\underline{w}$ dan is $\underline{\omega} = A\underline{w}$. Hierin hangt $\underline{w}$ van t af, want de momentele rotatieas verplaatst zich ook ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$. Wat vinden we nu voor $\dot{\underline{\omega}}$? Omdat dit een moeilijke vraag is, gaan we hem nog iets moeilijker maken door het volgende probleem te beschouwen. Een punt P dat ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ wordt aangewezen door de positievector $\underline{x}$ beweegt ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$. Het assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ draait om 0, dus beweegt ten opzichte van het vaste stelsel $OX_1X_2X_3$. Ten opzichte van $OX_1X_2X_3$ heeft P de positievector $\underline{Z} = A\underline{z}$. De snelheid van P is dus

$$\dot{\underline{Z}} = A\dot{\underline{x}} + \dot{A}\underline{z} = A\dot{\underline{x}} + \dot{A}A^TA\underline{z} = A\dot{\underline{z}} + \underline{\omega} \times \underline{Z} .$$

Nu is $\dot{\underline{z}}$ de snelheid van P ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ zoals deze wordt waargenomen en beschreven door een geborneerd mannetje dat vast verbonden is met $Ox_1x_2x_3$, niet weet dat $Ox_1x_2x_3$ beweegt en er bovendien onkundig van is dat er buiten $Ox_1x_2x_3$ nog andere assenstelsels zijn. Een wiskundig meer geschoold schepsel dat vast verbonden is met $OX_1X_2X_3$ en het dictaat W II kent redeneert: de beschrijving van de snelheid van P in de veronderstelling dat $Ox_1x_2x_3$ niet beweegt ten opzichte van $OX_1X_2X_3$ is $A\dot{\underline{z}}$ (vroeger noemden we dat de relatieve snelheid). Men geeft nu $A\dot{\underline{z}}$ vaak met $\frac{\partial}{\partial t}\underline{Z}$ aan. De bedoeling is dan dat $\underline{Z}$ naar t wordt gedifferentieerd waarbij evenwel de eenheidsvectoren $\underline{\varepsilon}_1$, $\underline{\varepsilon}_2$ en $\underline{\varepsilon}_3$ langs de assen van $Ox_1x_2x_3$ constant worden gehouden. Men heeft dus:

$$\dot{\underline{Z}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{Z} + \underline{\omega} \times \underline{Z} \,. \qquad (3.18.1)$$

$\underline{\omega} \times \underline{Z}$ is de sleepsnelheid in onze vroegere terminologie. Het valt niet te ontkennen dat het symbool $\frac{\partial}{\partial t}$ hier wordt gebruikt in een betekenis die lichtelijk afwijkt van de wiskundig gangbare. Misbruik kan men het nauwelijks noemen, oneigenlijk gebruik ware hier te prefereren. Uit (3.18.1) blijkt dat voor alle vectoren $\underline{Z}$ die lineair afhankelijk zijn van $\underline{\omega}$ geldt: $\dot{\underline{Z}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{Z}$. In het bijzonder geldt dit voor $\dot{\underline{\omega}}$.

3.19. We gaan voor het starre lichaam van 3.16 het impulsmoment $\underline{D}$ ten opzichte van 0 bepalen. Dit is:

$$\underline{D} = \int_L \underline{X} \times (\underline{\omega} \times \underline{X})\sigma d\mu \,.$$

We vinden:

$$\{\underline{X} \times (\underline{\omega} \times \underline{X})\}^T = (\omega_1(X_2^2 + X_3^2) - \omega_2 X_1 X_2 - \omega_3 X_1 X_3, \text{ cycl., cycl.}) \,.$$

Dus:

$$\underline{D} = (\omega_1 I_1 - \omega_2 P_{12} - \omega_3 P_{13}, -\omega_1 P_{21} + \omega_2 I_2 - \omega_3 P_{23}, -\omega_1 P_{31} - \omega_2 P_{32} + \omega_3 I_3),$$

zodat:

$$\underline{D} = J\underline{\omega} \,. \qquad (3.19.1)$$

Gevolgen hiervan:

$$\underline{D} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\,\underline{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\,\underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\,\underline{e}_3 \; ; \quad T = \tfrac{1}{2}(\underline{\omega},\underline{D}) \; ;$$

hierin is $\underline{e}_i$ de eenheidsvector langs de $X_i$-as.
We merken op dat de formules (3.16.1) en (3.19.1) gelden zowel bij beschrijving van de vectoren ten opzichte van $OX_1X_2X_3$ als ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$. In het laatste geval echter wordt J vervangen door $J_0$.

3.20. Ten opzichte van het bewegende assenstelsel is

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\underline{D} + \underline{\omega} \times \underline{D} = \underline{M} \; ,$$

waarin $\underline{M}$ de momentvector van het stelsel uitwendige krachten in 0 is. Neemt men $Ox_1x_2x_3$ langs de hoofdtraagheidsassen in 0 en zijn A, B en C de traagheidsmomenten van de $x_1$-, $x_2$- en $x_3$-as dan ontstaat het volgende stelsel bewegingsvergelijkingen van Euler:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 &= M_1 \; , \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 &= M_2 \; , \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 &= M_3 \; . \end{aligned} \qquad (3.20.1)$$

Indien we er in slagen dit stelsel op te lossen, weten we alleen nog maar hoe de momentele rotatieas gedurende de beweging zich ten opzichte van L beweegt; we hebben de bewegende poolkegel gevonden. Voor het vaststellen van de beweging van L zijn nadere beschouwingen noodzakelijk.
Zelfs voor betrekkelijk eenvoudig schijnende gevallen (als bijvoorbeeld op L alleen maar de zwaartekracht werkt en 0 niet het massamiddelpunt is) is de volledige oplossing nog niet gevonden. Men beperkt zich dan ook in de literatuur tot speciale lichamen, of tot speciale bewegingen. Ook dat heeft zijn nut omdat men zo op het spoor kan komen van bewegingen van L die niet mogelijk zijn.
Volledig opgelost is het probleem voor het geval het stelsel van de uitwendige krachten de momentvector nul in 0 heeft. Dan is

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 &= 0\ . \end{aligned} \tag{3.20.2}$$

Hieruit volgt:

$$A\dot{\omega}_1\omega_1 + B\dot{\omega}_2\omega_2 + C\dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

en dus

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2T_0 = \text{constant}\ . \tag{3.20.3}$$

Uit (3.20.2) volgt verder

$$A^2\dot{\omega}_1\omega_1 + B^2\dot{\omega}_2\omega_2 + C^2\dot{\omega}_3\omega_3 = 0\ ,$$

dus

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = D_0^2 = \text{constant}\ . \tag{3.20.4}$$

We hadden (3.20.3) en (3.20.4) ook direct (zonder (3.20.2) te gebruiken) kunnen neerschrijven (Waarom?). Uit (3.20.3) en (3.20.4) zien we dat de baan van het uiteinde $U_r$ van de rotatievector in L de doorsnijding is van 2 co-axiale ellipsoiden. Deze baan is dus een kromme van de vierde graad. Men kan verder gemakkelijk vaststellen hoe de baan van $U_r$ in afhankelijkheid van de tijd wordt doorlopen. Uit (3.20.2) volgt namelijk

$$A\,\frac{\omega_1\dot{\omega}_1}{\omega_1\omega_2\omega_3} = B - C \text{ en cycl.}$$

Stelt men $\omega_1\omega_2\omega_3 = \dot{u}$ dan is dus $A\omega_1\,\dfrac{d\omega_1}{du} = B - C$ en cycl. zodat

$$\tfrac{1}{2}A\omega_1^2 = (B - C)u + c_1,\ \tfrac{1}{2}B\omega_2^2 = (C - A)u + c_2,\ \tfrac{1}{2}C\omega_3^2 = (A - B)u + c_3$$

waarbij de integratieconstanten voldoen aan

$$c_1 + c_2 + c_3 = T_0\ ,\quad 2Ac_1 + 2bC_2 + 2Cc_3 = D_0^2\ .$$

Blijkbaar is:

$$ABC\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 8\{(B - C)u + c_1\}\{(C - A)u + c_2\}\{(A - B)u + c_3\} .$$

Hieruit kan u als functie van t worden bepaald door een integratie die overigens alleen in bijzondere gevallen elementair is. De beweging van $U_r$ in L is dan geheel bekend.

De beweging van L ten opzichte van $OX_1X_2X_3$ is voor het eerst door Poinsot als volgt bepaald. Vast met L verbonden is de traagheidsellipsoide E met vergelijking $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = 1$. Zij wordt door de mra gesneden in het punt P $\left(\frac{\omega_1}{2T_0}, \frac{\omega_2}{2T_0}, \frac{\omega_3}{2T_0}\right)$ en heeft daar het raakvlak $\alpha$: $A\omega_1x_1 + B\omega_2x_2 + C\omega_3x_3 = 2T_0$ waarvan $\underline{D}$ normaalvector is. Blijkens $\dot{\underline{D}} = 0$ is $\underline{D}$ vast in de ruimte. De afstand van $\alpha$ tot 0 is: $\frac{2T_0}{D_0^2}$ dus constant. Bijgevolg is $\alpha$ een vast vlak van de ruimte. L beweegt zich nu zo dat E aan dit vaste vlak blijkt raken in een punt van de mra. Het raakpunt heeft de snelheid nul. Dus E wringt zich, al rollend over $\alpha$, tussen 0 en $\alpha$ door (Poinsot-beweging). Men kan zo begrijpen dat L permanent kan roteren om de kortste as van E. Exact bewijzen kan men dit door met behulp van (3.20.2) de vraag te beantwoorden: is er een as waarom L een permanente eenparige rotatie ($\dot{\underline{\omega}} = \underline{0}$) kan uitvoeren? Zijn A, B en C twee aan twee verschillend dan is hiervoor nodig en voldoende $\omega_2\omega_3 = \omega_3\omega_1 = \omega_1\omega_2 = 0$. Hieraan is voldaan in 3 gevallen: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 \neq 0$; $\omega_2 = \omega_3 = 0$, $\omega_1 \neq 0$; $\omega_3 = \omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Een mogelijke beweging is dus: eenparige rotatie met willekeurige hoeksnelheid om een hoofdtraagheidsas. Stel eens dat L met hoeksnelheid $\omega$ om $Ox_3$ roteert en dat door een storing $(\delta_1, \delta_2, \omega + \delta_3)$ de hoeksnelheid wordt. Substitutie in (3.20.2) levert:

$$A\dot{\delta}_1 - (B - C)\omega\delta_2 = 0$$

$$B\dot{\delta}_2 - (C - A)\omega\delta_1 = 0$$

$$C\dot{\delta}_3 - (A - B)\delta_1\delta_2 = 0 .$$

We veronderstellen de storing zo klein dat alleen lineaire termen in $\delta_1$ en $\delta_2$ in aanmerking behoeven te worden genomen. Dan is $\delta_3$ constant. Verder zijn $\delta_1$ en $\delta_2$ oplossingen van een differentiaalvergelijking van de gedaante $\ddot{\delta} + k^2\omega^2\delta = 0$. Is $k^2 > 0$ dan zijn $\delta_1$ en $\delta_2$ dus van de gedaante $c \cos(k\omega t + \alpha)$, waarin $c > 0$ en zeer klein is. Nu is $k^2 > 0$:

1. als $C > A$ en $C > B$ en
2. als $C < A$ en $C < B$.

Dat betekent: roteert L op de langste of om de kortste as van E dan wijkt de beweging die bij een kleine storing intreedt, zeer weinig af van de oorspronkelijke beweging. De afwijking is geringer naarmate de storing geringer is. Men zegt daarom dat de rotatie om de langste en die om de kortste as <u>stabiel</u> zijn. Is $k^2 < 0$, dus ligt C tussen A en B dan roteert L om de middelste as van E. In dit geval hebben $\delta_1$ en $\delta_2$ de vorm $Pe^{k\omega t} + Qe^{-k\omega t}$. Na een storing gaat de beweging meer en meer van de oorspronkelijke afwijken. De rotatie om de middelste as van E is een <u>labiele beweging</u>.

## 4. Statica of evenwichtsleer

4.1. Een mechanisch stelsel heet in evenwicht wanneer het blijvend in rust is; hierin betekent blijvend: gedurende een eindig tijdsinterval.

We beschouwen een mechanisch stelsel S dat in evenwicht is. De verzameling van de uitwendige krachten die op S werken, noemen we $\underset{\sim}{K}$. Volgens de algemene theorema's van 3.12 en 3.13 voldoet $\underset{\sim}{K}$ aan de volgende twee voorwaarden:

V1. De vectorsom van de krachten waaruit $\underset{\sim}{K}$ bestaat, is nul.

V2. De som van de momenten van deze krachten ten opzichte van een vast punt is nul.

In het vervolg zullen we elke verzameling krachten die aan de voorwaarden V1 en V2 voldoet een neutraal krachtenstelsel noemen. Dan geldt dus: als een mechanisch stelsel in evenwicht is, vormen de uitwendige krachten die er op werken een neutraal stelsel. Anders gezegd: noodzakelijk voor het evenwicht van een mechanisch stelsel is dat de uitwendige krachten die er op werken een neutraal stelsel vormen.

Is deze voorwaarde ook voldoende? We gaan uit van een mechanisch stelsel S dat uitwendige krachten ondervindt die samen een neutraal stelsel vormen. De algemene theorema's garanderen dan:

1. de versnelling van het massamiddelpunt Z van S is blijvend nul;
2. de fluxie van het impulsmoment $\underline{D}$ van S ten opzichte van een vast punt 0 dat we als oorsprong kiezen, is blijvend nul.

Uit 1 kunnen we slechts de conclusie trekken dat de snelheid van Z constant is. Hieruit volgt dat S niet blijvend in rust behoeft te zijn. We zullen daarom aan onze veronderstellingen nog toevoegen dat op zeker tijdstip $t_0$ alle punten van S de snelheid nul hebben. Dan is de snelheid van Z blijvend nul: Z is een vast punt.

Uit 2 volgt dat $\underline{D}$ constant is. Dus geldt blijvend: $\underline{D} = \underline{0}$. Hieruit kunnen we nog steeds niet besluiten dat het stelsel blijvend in rust is. Om dit in te zien, veronderstellen we dat S bestaat uit twee massapunten $P_1$ en $P_2$ beide met massa m en dat op S geen uitwendige krachten werken. De enige krachten zijn dan die waarmee de punten elkaar volgens de gravitatiewet aantrekken en dit zijn inwendige krachten. Stel nu dat de punten op een afstand r van elkaar zonder beginsnelheid worden losgelaten. Ze bewegen zich dan naar elkaar toe. Het massamiddelpunt is hierbij blijvend in rust en $\underline{D}$ is blijvend nul. De oorzaak dat dit stelsel niet blijvend in rust is, schuilt natuurlijk daarin dat het niet star is. We voegen daarom aan onze veronderstellingen nog toe dat het aanvankelijk beschouwde stelsel star is en vatten de draad weer op bij het punt waar we constateerden dat $\underline{D}$ blijvend nul is. Zij $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z waarvan we al weten dat het een vast punt is. Laat S bestaan uit punten $\underline{x}_i$ behept met massa's $m_i$; de totale massa van het stelsel noemen we m. Het impulsmoment ten opzichte van Z is

$$\begin{aligned}\underline{D}_z &= \Sigma(\underline{x}_i - \underline{z}) \times (m_i\dot{\underline{x}}_i) = \Sigma\underline{x}_i \times (m_i\dot{\underline{x}}_i) - \underline{z} \times \Sigma m_i\dot{\underline{x}}_i = \\ &= \underline{D} - \underline{z} \times (m\dot{\underline{z}}) = \underline{D} = \underline{0}\ .\end{aligned}$$

We stellen $\overrightarrow{ZX_i} = \underline{x}_i - \underline{z} = \underline{z}_i$. Dan is $\dot{\underline{x}}_i = \dot{\underline{z}}_i$ en $\underline{D}_z = \Sigma\underline{z}_i \times (m_i\dot{\underline{z}}_i)$. Is $\underline{\omega}$ de hoeksnelheid dan is $\dot{\underline{z}}_i = \underline{\omega} \times \underline{z}_i$ en dus

$$\Sigma\underline{z}_i \times (m_i\dot{\underline{z}}_i) = \Sigma\underline{z}_i \times (m_i\underline{\omega} \times \underline{z}_i) = \underline{D}_z = \underline{0}\ .$$

Hieruit volgt

$$(\underline{\omega},\underline{D}_z) = \Sigma(\underline{\omega},\ \underline{z}_i \times (m_i\underline{\omega} \times \underline{z}_i)) = \underline{0}\ ,$$

zodat

$$\Sigma m_i(\underline{\omega} \times \underline{z}_i,\ \underline{\omega} \times \underline{z}_i) = \Sigma m_i(\dot{\underline{z}}_i,\dot{\underline{z}}_i) = \underline{0}$$

op elk tijdstip t. Wegens $m_i > 0$ en $(\dot{\underline{z}}_i,\dot{\underline{z}}_i) \geq 0$ (waarbij gelijkheid alleen optreedt voor $\dot{\underline{z}}_i = \underline{0}$) volgt uit het bovenstaande dat $\dot{\underline{z}}_i$ blijvend nul is voor elk punt $X_i$. Dus S is in evenwicht. Hiermee is bewezen: opdat een star mechanisch stelsel in evenwicht verkeert, is nodig en voldoende dat de uitwendige krachten die er op werken blijvend een neutraal stelsel vormen en dat er één tijdstip is waarop alle punten van het stelsel de snelheid nul hebben.

4.2. Bij het beoordelen of een krachtenstelsel al dan niet neutraal is, kunnen de krachten als speren worden opgevat. We zullen dan ook een kracht voorstellen door $\underline{F} = [\underline{f},\underline{f}^*]$. Hierin is $\underline{f}$ de krachtvector en $\underline{f}^*$ de momentvector in de oorsprong 0 ($\underline{f} \neq \underline{0}$; $(\underline{f},\underline{f}^*) = 0$). De drager van de kracht is

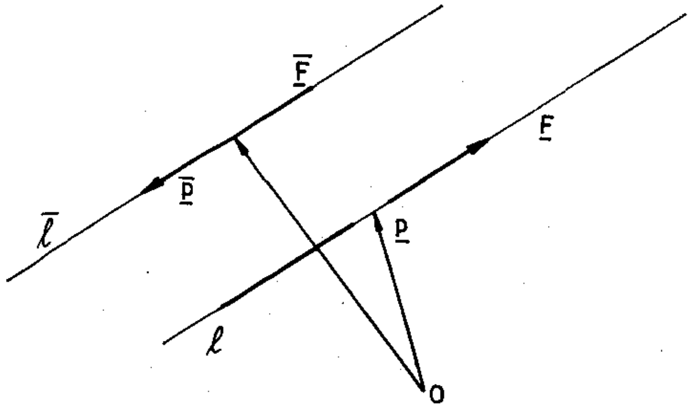
$$\underline{x} = \frac{\underline{f} \times \underline{f}^*}{(\underline{f},\underline{f})} + \lambda\underline{f}\ .$$

4.3. Zij $\underset{\sim}{K}$ een krachtenstelsel (dat ook krachtelementen mag bevatten en dus uit oneindig veel exemplaren kan bestaan). We geven de exemplaren van $\underset{\sim}{K}$ met $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ aan; $\underline{f}_i \neq \underline{0}$, $(\underline{f}_i, \underline{f}_i^*) = 0$. Voorwaarde is dat de vectorsom $\underline{r} = \Sigma \underline{f}_i$ en de som $\underline{m} = \Sigma \underline{f}_i^*$ van de momentvectoren in 0 beide eindig zijn. Onder de momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in een punt verstaat men de som van de momentvectoren van de exemplaren van $\underset{\sim}{K}$ in dit punt. Zo is $\underline{m}$ dus de momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in 0.
De momentvector van $\underline{F}_i$ in het punt $\underline{x}$ is $\underline{f}_i^* - \underline{x} \times \underline{f}_i$. De momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in $\underline{x}$ is dus

$$\underline{m}_x = \underline{m} - \underline{x} \times \underline{r} \,. \tag{4.3.1}$$

We zien dat $\underset{\sim}{K}$ in elk punt dezelfde momentvector heeft als het duo $\{\underline{r}, \underline{m}\}$. Gemakshalve zullen we dit duo met $\underset{\sim}{K}$ aangeven; het wordt in dit verband wel een krachtschroef genoemd. Het momentenveld hiervan wordt het momentenveld van het krachtenstelsel genoemd. Twee krachtenstelsels met hetzelfde momentenveld heten statisch equivalent.
Aan de theorie over duo's (zie 1.11 ÷ 1.14) ontlenen we: twee krachtenstelsels zijn dan en alleen dan statisch equivalent als ze dezelfde vectorsom en in éénzelfde punt dezelfde momentvector hebben. En verder ook: nodig en voldoende voor statische equivalentie van twee krachtenstelsels is, dat hun momentvectoren in drie niet op één lijn gelegen punten gelijk zijn.

4.4. Volgens (4.3.1) is het momentenveld van een krachtenstelsel dan en alleen dan homogeen als de vectorsom van het stelsel nul is. De bijbehorende krachtschroef is dan van de vorm $\{\underline{0}, \underline{m}\}$ en kan dus worden opgevat als een kracht nul met $[\underline{0}, \underline{m}]$ als oneigenlijke drager. Zulk een kracht zullen we een oneigenlijke kracht noemen (kracht zonder meer betekent steeds eigenlijke kracht). Het eenvoudigste krachtenstelsel met vectorsom nul bestaat uit twee tegengesteld gerichte krachten met dezelfde norm en verschillende dragers (zie de figuur). Zo'n stelsel heet een koppel en kan worden voorgesteld door $\{\underline{F}, \bar{\underline{F}}\}$ waarbij $\underline{F} = [\underline{f}, \underline{f}^*]$ en $\bar{\underline{F}} = [-\underline{f}, \bar{\underline{f}}^*]$. Is $\underline{p}$ een punt op de drager van $\underline{F}$ en $\bar{\underline{p}}$ een punt op de drager van $\bar{\underline{F}}$ dan heeft het koppel in elk punt de momentvector $\underline{m} = (\underline{p} - \bar{\underline{p}}) \times \underline{f}$. Deze vector, die ook het moment van het koppel of




de koppelvector wordt genoemd, staat blijkbaar loodrecht op het vlak door de dragers $\ell$ en $\bar{\ell}$ van de koppelkrachten $\underline{F}$ en $\bar{\underline{F}}$. Dit vlak heet het koppelvlak. Een en ander is in overeenstemming met de opvatting van het koppel als een kracht nul met drager $[\underline{0},\underline{m}]$, de oneigenlijke rechte van het koppelvlak.

Hoewel volgens de definitie het moment van een koppel geen nulvector kan zijn, is het om sommige uitspraken over krachtenstelsels algemene geldigheid te geven, doelmatig ook koppels met moment nul toe te laten (nulkoppels). Onder een nulkoppel heeft men dan te verstaan een koppel waarvan de beide koppelkrachten nulsperen zijn. Het vlak van een nulkoppel blijft onbepaald. Gemakkelijk is in te zien: elk krachtenstelsel met vectorsom nul is statisch equivalent met een koppel waarvan de koppelvector gelijk is aan de momentvector van het stelsel. Een bijzonder geval hiervan is: een verzameling koppels is statisch equivalent met één koppel waarvan de koppelvector gelijk is aan de som van de koppelvectoren van de gegeven koppels.

4.5. We beschouwen nog eens het krachtenstelsel $\underset{\sim}{K}$ van 4.3 waarvan het momentenveld gegeven is door (4.3.1). Dit stelsel is statisch equivalent met het stelsel bestaande uit de kracht $\underline{R}_\sigma = [\underline{r},\underline{0}]$ waarvan de drager door 0 gaat en het koppel $\underline{K}_\sigma$ met koppelvector $\underline{m}$. De overgang van $\underset{\sim}{K}$ naar het statisch equivalente stelsel $\{\underline{R}_\sigma,\underline{K}_\sigma\}$ heet de reductie van $\underset{\sim}{K}$ op het punt 0. Om $\underset{\sim}{K}$ te reduceren op een punt C (positievector $\underline{c}$), kan men als volgt te werk gaan. De momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in C is $\underline{m}_c = \underline{m} - \underline{c} \times \underline{r}$. Stel nu $\underline{c} \times \underline{r} = \underline{r}^*$ en beschouw het stelsel $\{\underline{R}_c, \underline{K}_c\}$ gevormd door de kracht $\underline{R}_c = [\underline{r}, \underline{r}^*]$ waarvan de drager door C gaat, en het koppel $\underline{K}_c$ met koppelvector $\underline{m}_c$. Bij dit stelsel behoort $\{\underline{r}, \underline{r}^* + \underline{m}_c\} = \{\underline{r}, \underline{m}\}$ als krachtschroef. Het is dus statisch equivalent met $\underset{\sim}{K}$. Bij deze reductie op C pleegt men $\underline{R}_c$ de <u>resulterende kracht</u> en $\underline{K}_c$ het <u>resulterend koppel</u> te noemen; samen vormen ze de <u>resultante</u>.

4.6. Het stelsel $\underset{\sim}{K}$ heeft $\underset{\sim}{K} = \{\underline{r}, \underline{m}\}$ als krachtschroef. De as van deze krachtschroef (vgl. 1.13) heet de <u>centrale as van het krachtenstelsel</u>. Zij is onbepaald als $\underset{\sim}{K}$ neutraal is, een geval dat we verder uitsluiten. Is $\underline{r} = \underline{0}$, $\underline{m} \neq 0$, dus is $\underset{\sim}{K}$ statisch equivalent met een koppel dan is de oneigenlijke rechte $[\underline{0}, \underline{m}]$ de centrale as. We bekijken nu verder het geval $\underline{r} \neq \underline{0}$. De spoed van de krachtschroef (of van het krachtenstelsel) is dan $\sigma = (\underline{r}, \underline{m})/(\underline{r}, \underline{r})$ en de centrale as is $[\underline{r}, \underline{r}^*]$ waarin $\underline{r}^* = \underline{m} - \sigma\underline{r}$. Is $\underline{K}$ een koppel met koppelvector $\sigma\underline{r}$ dan is het stelsel $\{\underline{R}, \underline{K}\}$ waarin $\underline{R} = [\underline{r}, \underline{r}^*]$ statisch equivalent met $\underset{\sim}{K}$. Het stelsel $\{\underline{R}, \underline{K}\}$ vertoont de bijzonderheid dat het vlak van het koppel $\underline{K}$ loodrecht staat op de drager van de kracht $\underline{R}$. Zulk een combinatie van een kracht en een koppel heet een <u>dyname</u>; $\underline{R}$ is hiervan het <u>kracht</u>- en K het <u>koppelbestanddeel</u>. Een kracht is een bijzonder geval van een dyname (koppelbestanddeel nul) en een koppel eveneens (krachtbestanddeel nul). Uit de theorie over duo's volgt: <u>elk krachtenstelsel is statisch equivalent met één ondubbelzinnig door het stelsel bepaalde dyname</u>.

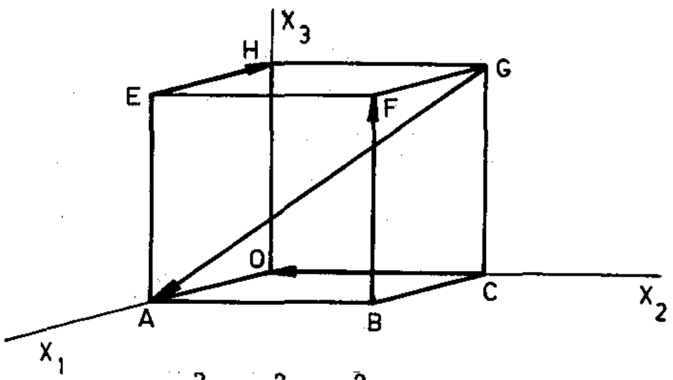
4.7. Hier volgen enkele voorbeelden en opgaven.

1. Opdat twee krachten $\underline{F}_1 = [\underline{f}_1, \underline{f}_1^*]$ en $\underline{F}_2 = [\underline{f}_2, \underline{f}_2^*]$ een neutraal stelsel vormen, is nodig en voldoende. $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \underline{0}$; $\underline{f}_1^* + \underline{f}_2^* = \underline{0}$. Dit is dan en alleen dan het geval als $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ dezelfde drager hebben en de krachtvectoren elkaars tegengestelden zijn.
2. We beschouwen een neutraal stelsel bestaande uit drie krachten $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ $(i = 1,2,3)$. Dan is $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 = \underline{0}$ en $\underline{f}_1^* + \underline{f}_2^* + \underline{f}_3^* = \underline{0}$. Hieruit volgt, indien i,j,k een permutatie van de getallen 1,2,3 betekent:

$$0 = (\underline{f}_k, \underline{f}_k^*) = (\underline{f}_i + \underline{f}_j, \underline{f}_i^* + \underline{f}_j^*) = (\underline{f}_i, \underline{f}_j^*) + (\underline{f}_i^*, \underline{f}_j) = \langle \underline{F}_i, \underline{F}_j \rangle .$$

De dragers van de krachten liggen dus bij tweeën in één vlak. Voor elke speer $\underline{S}$ waarvan de drager in het vlak $\alpha$ van $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ ligt, geldt $<\underline{S},\underline{F}_1> = <\underline{S},\underline{F}_2> = 0$. Hieruit volgt $<\underline{S},\underline{F}_3> = 0$. <u>De dragers van de drie krachten liggen dus in één vlak $\alpha$.</u> Tussen hun richtingsvectoren bestaat het verband $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 = \underline{0}$. Zijn dus twee van de dragers evenwijdig dan zijn de drie dragers onderling evenwijdig. Snijden de dragers van $\underline{F}_i$ en $\underline{F}_j$ elkaar dan is ten opzichte van het snijpunt als oorsprong $\underline{f}_i^* = \underline{f}_j^* = \underline{0}$ en dus ook $\underline{f}_k^* = \underline{0}$. De drager van $\underline{F}_k$ gaat dus door het snijpunt. Een <u>noodzakelijke</u> voorwaarde opdat drie krachten een neutraal stelsel vormen, is dus dat hun dragers in één vlak liggen en door één (eventueel oneigenlijk) punt gaan. Is het bedoelde punt eigenlijk, dan wordt deze voorwaarde na toevoeging van de eis dat de vectorsom nul is, tot een nodige en voldoende voorwaarde. Dit is evenwel niet het geval als de dragers evenwijdig zijn: dan moet bovendien nog een zekere relatie bestaan tussen de onderlinge afstanden van de dragers en de krachten. (Ga dit maar eens zorgvuldig na.)

3. ABCDEFGH is een kubus met ribbe 2c; BF, CO, EH en GA zijn dragers van speren met speervectoren $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{EH}$ en $\overrightarrow{GA}$. Ga na dat ten opzichte van het aangegeven assenstelsel $\{\underline{r},\underline{m}\}$ met




$\underline{r} = (0,-4c,0)$, $\underline{m} = (4c^2,-4c^2,-4c^2)$ de krachtschroef is. De spoed is $\sigma = c$.. De resulterende dyname bestaat uit de kracht $\underline{R} = [\underline{r},\underline{r}^*]$ met $\underline{r}^* = (4c^2,0,-4c^2)$ en het koppel $\underline{K}$ met koppelvector $(0,-4c^2,0)$. De centrale as is $\underline{x} = (c,0,c) + \lambda(0,-c,0)$.

4. De ribben van een viervlak ABCD zijn dragers van een (niet neutraal) krachtenstelsel $\underset{\sim}{K}$. De krachtvectoren langs DA, DB en DC zijn in deze volgorde $\alpha.\overrightarrow{DA}$, $\beta.\overrightarrow{DB}$ en $\gamma.\overrightarrow{DC}$; die langs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{AB}$ zijn $\lambda.\overrightarrow{BC}$, $\mu.\overrightarrow{CA}$ en $\nu.\overrightarrow{AB}$. Gevraagd een betrekking (of betrekkingen) tussen getallen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$ en $\nu$ af te leiden nodig en voldoende opdat $\underset{\sim}{K}$ statisch equivalent is met één enkele kracht.

Antw. $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$; $(\alpha + \mu - \nu)^2 + (\beta + \nu - \lambda)^2 + (\gamma + \lambda - \mu)^2 \neq 0$.

5. Ten opzichte van een rechts orthonormaal assenstelsel Oxyz zijn gegeven de lijnen

$$\ell_1 : z = c;\ y = x \tan \alpha \text{ en } \ell_2 : z = -c;\ y = -x \tan \alpha ,$$

waarin $c > 0$ en $0 < \alpha < \pi/2$. De lijn $\ell_k$ is drager van een kracht $\underline{F}_k$ $(k = 1,2)$. Bepaal de verzameling van de centrale as van het stelsel $\{\underline{F}_1, \underline{F}_2\}$.

Aanw. De krachtvectoren van $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ kunnen worden voorgesteld door $\underline{f}_1 = (f_1 \cos \alpha,\ f_1 \sin \alpha,\ 0)$ en $\underline{f}_2 = (f_2 \cos \alpha,\ -f_2 \sin \alpha,\ 0)$. De momentvectoren in O zijn dan:

$$\underline{f}_1^* = (-cf_1 \sin \alpha,\ cf_1 \cos \alpha,\ 0) \text{ en}$$

$$\underline{f}_2^* = (-cf_2 \sin \alpha,\ -cf_2 \cos \alpha,\ 0) .$$

Centrale as:

$$x = \lambda(f_1 + f_2)\cos \alpha,\ y = \lambda(f_1 - f_2)\sin \alpha ,$$

$$z = \frac{c(f_2^2 - f_1^2)}{(f_1 + f_2)^2 \cos^2\alpha + (f_1 - f_2)^2 \sin^2\alpha} .$$

Eliminatie van $f_1$, $f_2$ en $\lambda$ geeft $(x^2 + y^2)z \sin 2\alpha = 2cxy$ als vergelijking van de gevraagde verzameling. Regeloppervlak van de derde graad waarvan alle beschrijvenden de z-as snijden en evenwijdig zijn met het vlak $z = 0$. De niet op de z-as gelegen reële punten van het oppervlak (cylindroïde van Cayley) liggen tussen (of in) de vlakken $z = c/\sin 2\alpha$ en $z = -c/\sin 2\alpha$.

6. Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ zijn gegeven de punten $A(2,0,-1)$ en $B(2,-2,-1)$, alsmede de lijn $\ell$ voorgesteld door $\underline{x} = (2,-1,2) + \lambda(1,-2,4)$. Een dyname heeft $\overrightarrow{AB}$ als krachtvector, AB als as en als koppelbestanddeel het koppel met $(0,-6,0)$ als koppelvector. Gevraagd: twee krachten $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ die de gegeven dyname als resultante hebben en waarvan $\underline{F}_1$ de lijn $\ell$ als drager heeft.

7. Gegeven een krachtenstelsel met $\underline{r} = (1,-2,3)$ als vectorsom en $\underline{m} = (5,4,2)$ als momentvector in de oorsprong. Aan dit stelsel wordt een kracht $\underline{F}$ toegevoegd met $\underline{f} = (2,3,3)$ als krachtvector. Van het aldus uitgebreide stelsel gaat de centrale as door $(2,-1,1)$. Bepaal de resulterende dyname van genoemd stelsel en de drager van $\underline{F}$.
8. Gegeven zijn twee krachten $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ met kruisende dragers en een kracht $\underline{F}$ waarvan de drager door de oorsprong gaat en de krachtvector een gegeven lengte k heeft. Gevraagd: een nodige en voldoende voorwaarde opdat het stelsel $\{\underline{F}_1,\underline{F}_2,\underline{F}\}$ statisch equivalent is met één enkele kracht. Bewijs dat de drager van $\underline{F}$ dan op een omwentelingskegel ligt.
9. Een krachtenstelsel bestaat uit twee krachten $\underline{F}_k = [\underline{f}_k,\underline{f}_k^*]$ $(k = 1,2)$ waarvan $\underline{r}$ (de vectorsom) en $\underline{m}$ (de momentvector van het stelsel in de oorsprong) gegeven zijn. Verondersteld wordt: $(\underline{r},\underline{m}) \neq 0$. De drager van $\underline{F}_1$ gaat door een punt P waarvan de positievector $\underline{p}$ gegeven is. Verder is bekend dat $\underline{F}_2$ ligt in het vlak door P loodrecht op de drager van $\underline{F}_1$. Druk $\underline{f}_1$, $\underline{f}_1^*$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_2^*$ uit in $\underline{r}$, $\underline{m}$ en $\underline{p}$. Waar mag $\underline{p}$ niet worden gekozen, wil het vraagstuk oplosbaar zijn?

4.8. We beschouwen een krachtenstelsel $\underset{\sim}{K}$ bestaande uit krachten $\underline{F}_i$ (waaronder mogelijk krachtelementen) met onderling evenwijdige dragers $\ell_i$ waarvan de richting wordt aangewezen door de eenheidsvector $\underline{u}$. We stellen $\underline{F}_i = [\underline{f}_i,\underline{f}_i^*]$ waarin $\underline{f}_i = f_i\underline{u}$. De vectorsom van het stelsel is $\underline{r} = (\Sigma f_i)\underline{u} = f\underline{u}$. Is $\underline{x}_i$ een punt van $\ell_i$ dan is $\underline{f}_i^* = f_i\underline{x}_i \times \underline{u}$. Bijgevolg is de momentvector van het stelsel in 0 bepaald door $\underline{m} = (\Sigma f_i\underline{x}_i) \times \underline{u}$. Hieruit volgt $(\underline{r},\underline{m}) = 0$. Het stelsel is dus statisch equivalent met een koppel of met een kracht al naar gelang de vectorsom al dan niet nul is, dat wil zeggen al naar gelang f al dan niet nul is. We veronderstellen $f \neq 0$. De resultante van het stelsel is dan de kracht

$$\underline{F} = [f\underline{u},\ (\Sigma f_i\underline{x}_i) \times \underline{u}]\ . \tag{4.8.1}$$

De drager c van $\underline{F}$ gaat door het punt C aangewezen door de positievector

$$\underline{c} = f^{-1}\Sigma f_i\underline{x}_i\ . \tag{4.8.2}$$

Op dezelfde manier waarop we dit voor het massamiddelpunt van een mechanisch stelsel hebben gedaan, kunnen we laten zien dat C niet afhangt van de keuze van het assenstelsel. Uit (4.8.2) blijkt bovendien dat C niet afhangt van de keuze van $\underline{u}$ dus van de richting van de krachten. Beschouwen we de punten $\underline{x}_i$ als punten van een mechanisch stelsel waar de krachten $\underline{F}_i$ aangrijpen dan kunnen we het bovenstaande als volgt interpreteren. Draait men alle krachten van een gegeven krachtenstelsel met evenwijdige dragers en van nul verschillende vectorsom om de punten waarin zij op een mechanisch stelsel S aangrijpen over dezelfde hoek, zodanig dat de dragers weer evenwijdig zijn, dan draait de drager van de resultante over dezelfde hoek in dezelfde zin om een punt C waarvan de ligging ondubbelzinnig bepaald is door de scalaire waarden van de krachten en de configuratie van hun aangrijpingspunten. Het punt C heet het <u>astatisch middelpunt</u> van het krachtenstelsel. Elk krachtenstelsel waarvoor een astatisch middelpunt bestaat wordt <u>astatisch</u> genoemd. Let er op dat beide begrippen alleen zin hebben voor krachtenstelsels waarvan de krachten als gebonden vectoren worden opgevat.

Beschouwen we het zwaarteveld van de aarde als homogeen (richting van de zwaartekracht aangewezen door de eenheidsvector $\underline{e}$) dan oefent de aarde op een punt $P_i$ (positievector $\underline{x}_i$) behept met de massa $m_i$ van een mechanisch stelsel $\underset{\sim}{S}$ (totale massa m) de kracht

$$\underline{F}_i = [m_i g\underline{e},\ \underline{x}_i \times (m_i g\underline{e})]$$

uit. Op het gehele stelsel werkt dan het gewicht:

$$\underline{G} = [mg\underline{e},\ \Sigma \underline{x}_i \times m_i g\underline{e}] .$$

Deze resultante gaat door het punt aangewezen door de positievector

$$(mg)^{-1}\Sigma m_i g\underline{x}_i = m^{-1}\Sigma m_i \underline{x}_i = \underline{z} ,$$

dus door het massamiddelpunt van $\underset{\sim}{S}$. Het massamiddelpunt is dus het astatisch middelpunt van het stelsel gevormd door de krachten $\underline{F}_i$. Het wordt dan ook wel het <u>zwaartepunt</u> van $\underset{\sim}{S}$ genoemd.

Let op het volgende. Definieert men het zwaartepunt als astatisch middelpunt van het stelsel bestaande uit de krachtelementen die door de aarde op de massaelementen van het stelsel worden uitgeoefend dan is in een homogeen zwaarteveld zwaartepunt hetzelfde als massamiddelpunt. Is het noodzakelijk om, terwijl men eraan vasthoudt dat g een vaste richting heeft, in rekening te brengen dat g afhangt van de afstand tot het middelpunt van de aarde dan vallen de genoemde punten niet meer samen. Enig idee van de afwijking geeft het volgende voorbeeld, waarin gebruik gemaakt is van het feit dat op een hoogte z boven het aardoppervlak $g = k(R + z)^{-2}$, waarin R de straal van de aarde voorstelt en k een constante is. We beschouwen een massieve homogene omwentelingscylinder $\underline{K}$ (straal r, massadichtheid $\sigma$ en lengte h). Hij staat met een van zijn platte grensvlakken op het horizontaal gedachte aardoppervlak. Het massamiddelpunt ligt op de cylinderas op een hoogte h/2 boven de aarde. We wensen het zwaartepunt als astatisch middelpunt (zie boven) te bepalen en voeren hiertoe een rechthoekig assenstelsel in waarvan de z-as langs de hartlijn ligt en het x,y-vlak samenvalt met het grondvlak van de cylinder. Men ziet nu gemakkelijk dat het gevraagde punt op de hartlijn ligt en tot het grondvlak de afstand $c_2$ heeft die volgens (4.8.2) kan worden gevonden uit $c_2 = f^{-1}\Sigma f_i z_i$. Hierbij is in dit geval (m is de totale massa van $\underline{K}$):

$$f = \sigma k \iiint_K \frac{1}{(R+z)^2}\,dxdydz = \sigma k\pi r^2 \int_0^h \frac{dz}{(R+z)^2} = \frac{km}{R(R+h)}$$

en

$$\Sigma f_i z_i = k\sigma\pi r^2 \int_0^h \frac{zdz}{(R+z)^2} = k\sigma\pi r^2\{\log(1+\frac{h}{R}) - \frac{h}{R+h}\} .$$

We veronderstellen h < R en vinden door ontwikkeling in machtreeksen naar h/R:

$$\Sigma f_i z_i = km\{\frac{h}{2R^2} - \frac{2h^2}{3R^3} + \frac{3h^3}{4R^4} - \dots\}$$

en dus

$$c_z = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6R} + \frac{h^3}{12R^2} - \frac{h^4}{20R^3} + \ldots\ .$$

Het gezochte punt ligt lager dan het massamiddelpunt (zoals te voorzien was) en zijn afstand tot dit punt is kleiner dan $h^2/6R$. Is $h = 300$ meter (een zeer hoge toren) en stellen we de omtrek van de aarde op $4.10^7$ meter dan is $h^2/6R$ kleiner dan 2,4 mm. Voor aardse constructies maakt men dus een te verwaarlozen fout als men massamiddelpunt en zwaartepunt identificeert.

4.9. Zij $\underset{\sim}{K}$ een vlak kraachtenstelsel bestaande uit krachten $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ met vectorsom $\underline{r} \neq \underline{0}$. Kiezen we de oorsprong 0 in het vlak van het stelsel dan staan alle vectoren $\underline{f}_i^*$ loodrecht op dit vlak. Hetzelfde geldt dus voor de momentvector $\underline{m}$ van het stelsel in 0. Bijgevolg: $(\underline{r},\underline{m}) = 0$. De resultante is dus een kracht $\underline{R}$ waarvan de drager $\ell$ wordt voorgesteld door $[\underline{r},\underline{m}]$. We bewijzen: <u>elk vlak krachtenstelsel met van nul verschillende vectorsom is astatisch</u>. Wijzen we aan $\underline{F}_i$ het aangrijpingspunt $\underline{x}_i$ toe dan is $\underline{f}_i^* = \underline{x}_i \times \underline{f}_i$ en $\underline{m} = \Sigma \underline{x}_i \times \underline{f}_i$. Zij $\underline{e}$ een eenheidsvector loodrecht op het vlak van het stelsel. De kracht

$$\bar{\underline{F}}_i = [\underline{e} \times \underline{f}_i,\ \underline{x}_i \times (\underline{e} \times \underline{f}_i)] = [\bar{\underline{f}}_i, \bar{\underline{f}}_i^*]$$

ontstaat uit $\underline{F}_i$ door draaiing over een hoek $\pi/2$ om $\underline{x}_i$ en in het vlak van $\underset{\sim}{K}$. De vectorsom van het stelsel $\bar{\underset{\sim}{K}}$ gevormd door de krachten $\bar{\underline{F}}_i$ is $\bar{\underline{r}} = \underline{e} \times \underline{r} \neq \underline{0}$. De resultante van $\bar{\underset{\sim}{K}}$ is dus een kracht $\bar{\underline{R}}$. Zij C het snijpunt van de dragers van $\underline{R}$ en $\bar{\underline{R}}$; C is een eigenlijk punt. We kiezen C nu verder als oorsprong. Dan hebben $\underset{\sim}{K}$ en $\bar{\underset{\sim}{K}}$ de momentvector nul in de oorsprong. Draaien we alle krachten van $\underset{\sim}{K}$ in het vlak van $\underset{\sim}{K}$ over een hoek $\varphi$ om hun aangrijpingspunten dan ontstaat het stelsel gevormd door de krachten

$$[\underline{f}_i \cos\varphi + \bar{\underline{f}}_i \sin\varphi,\ \underline{f}_i^* \cos\varphi + \bar{\underline{f}}_i^* \sin\varphi]\ .$$

De resultante hiervan is de kracht $[\underline{r}\cos\varphi + \bar{\underline{r}}\sin\varphi, \underline{0}]$, waarvan de drager door C gaat en uit die van $\underline{R}$ ontstaat door draaiing over de hoek $\varphi$ om C. <u>Opmerking</u>. Stelt men de momentvectoren van $\underset{\sim}{K}$ en $\bar{\underset{\sim}{K}}$ in een willekeurig in het vlak van $\underset{\sim}{K}$ gekozen oorsprong voor door $\mu\underline{e}$ en $\bar{\mu}\underline{e}$ dan geldt voor de positievector $\underline{c}$ van het astatisch middelpunt: $\underline{c} = (\bar{\mu}\underline{r} - \mu\bar{\underline{r}})/(\underline{r},\underline{r})$. Toon dit aan.

4.10. Van een starre beweging W/V zij de snelheidsverdeling op zeker tijdstip t gegeven door de snelheidsschroef $\underset{\sim}{S} = \{\underline{\omega}, \underline{v}_0\}$. Het vermogen van een kracht $\underline{F} = [\underline{f}, \underline{f}^*]$ waarvan het aangrijpingspunt aan deze beweging deelneemt is dan

$$(\underline{v}_X, \underline{f}) = (\underline{v}_0, \underline{f}) + (\underline{\omega} \times \underline{x}, \underline{f}) = (\underline{v}_0, \underline{f}) + (\underline{\omega}, \underline{x} \times \underline{f}) =$$

$$= (\underline{v}_0, \underline{f}) + (\underline{\omega}, \underline{f}^*) = \underset{\sim}{S} \circ \underline{F} .$$

Het gezamenlijk vermogen van de krachten van een stelsel met krachtschroef $\underset{\sim}{K} = \{\underline{r}, \underline{m}\}$, waarvan de aangrijpingspunten aan de beweging W/V deelnemen is dus

$$W = (\underline{v}_0, \underline{r}) + (\underline{\omega}, \underline{m}) = \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{K} .$$

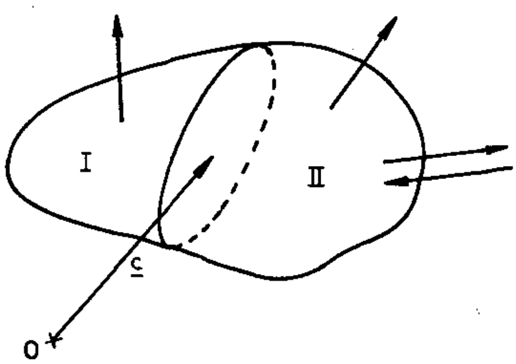
Hiermee is aan het kruisproduct van twee duo's een physische betekenis toegekend.
Is $W = 0$ dan zegt men dat $\underset{\sim}{S}$ en $\underset{\sim}{K}$ <u>wattloos</u> ten opzichte van elkaar liggen.
Zij $\underline{p}$ een punt van de schroefas $\underline{S}$ van $\underset{\sim}{S}$, $\underline{q}$ een punt van de centrale as $\underline{C}$ van $\underset{\sim}{K}$, h de spoed van $\underset{\sim}{S}$ en $\sigma$ die van $\underset{\sim}{K}$. Dan is $\underline{v}_0 = \underline{p} \times \underline{\omega} + h\underline{\omega}$ en $\underline{m} = \underline{q} \times \underline{r} + \sigma\underline{r}$. We kiezen $\underline{p}$ en $\underline{q}$ zodat $\underline{q} - \underline{p}$ loodrecht op $\underline{S}$ en $\underline{C}$ staat en stellen $\underline{q} - \underline{p} = d\underline{n}$, waarin $\underline{n}$ de eenheidsvector is met dezelfde zin als $\underline{\omega} \times \underline{r}$. Dan is $\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{K} = (\underline{p} - \underline{q}, \underline{\omega} \times \underline{r}) + (h + \sigma)(\underline{\omega}, \underline{r})$. Voeren we in de hoek $\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ tussen $\underline{\omega}$ en $\underline{r}$ dan kunnen we hiervoor schrijven:

$$\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{K} = |\underline{\omega}|\,|\underline{r}|\{(h + \sigma)\cos\varphi - d \sin\varphi\} ;$$

bij dit alles is $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, $\underline{r} \neq \underline{0}$ verondersteld.
De voorwaarde voor wattloze ligging van $\underset{\sim}{S}$ en $\underset{\sim}{K}$ is dus:

$$(h + \sigma)\cos\varphi - d \sin\varphi = 0 .$$

4.11. Beschouw een materieel lichaam dat belast wordt door uitwendige krachten en koppels.



Verondersteld wordt dat het lichaam in rust is en het krachtenstelsel neutraal. In gedachten wordt het lichaam door een snijvlak in twee paren verdeeld. Evenals het lichaam zelf zijn de beide delen I en II in evenwicht. De delen van het krachtenstelsel die op de delen werken zijn in het algemeen niet neutraal. Via het snijvlak oefenen de delen in grootte gelijke maar tegengesteld gerichte invloeden op elkaar uit, welke beide kunnen worden voorgesteld door een krachtschroef. Als $\underset{\sim}{K} = \{\underline{r},\underline{m}\}$ de krachtschroef, op de oorsprong gereduceerd, van de uitwendige belasting voorstelt, dan noemen we

$\underset{\sim}{K}_1 = \{\underline{r}_1,\underline{m}_1\}$ dat deel van de krachtschroef dat werkt op deel I en
$\underset{\sim}{K}_2 = \{\underline{r}_2,\underline{m}_2\}$ dat deel van de krachtschroef dat werkt op deel II.

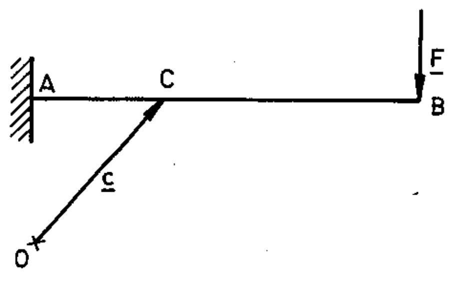
Gelden moet dat $\underset{\sim}{K}_1 + \underset{\sim}{K}_2 = \underset{\sim}{K}$, terwijl $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{0}$ omdat de belasting neutraal is, zodat

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = \underline{0}$$

$$\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{0}\ .$$

Omdat beide delen van het materiële stelsel in rust zijn en blijven, is de invloed van deel II op deel I voor te stellen door $-\underset{\sim}{K}_1 = \underset{\sim}{K}_2$ en de invloed van deel I op deel II door $-\underset{\sim}{K}_2 = \underset{\sim}{K}_1$.

<u>Voorbeelden</u>. Ingeklemde balk.



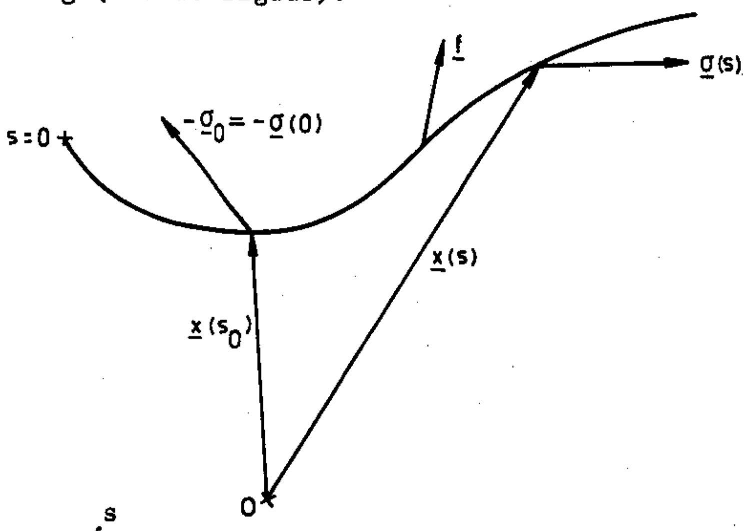

De ingeklemde balk AB wordt op de in de figuur aangegeven wijze belast door de kracht $\underline{F} = [\underline{f},\underline{f}^*]$.
In C oefent het deel CB een kracht $\underline{F}_c$ en een koppel $\underline{K}_c$ op deel AC uit, waarvoor geldt $\{\underline{F}_c,\underline{K}_c\} \sim \{\underline{F}\}$.

Hieruit volgt:

$$\underline{F}_c = [\underline{f}_c, \underline{f}_c^*], \text{ met } \underline{f}_c = \underline{f} \text{ en } \underline{f}_c^* = \underline{c} \times \underline{f} ,$$

$$\underline{K}_c = [\underline{0}, \underline{k}_c] , \text{ met } \underline{k}_c = \underline{f}^* - \underline{c} \times \underline{f} .$$

4.12. We passen het voorafgaande toe op een volkomen buigzaam koord, dat is een lijnvormig lichaam waarbij onder elke belasting in alle doorsneden alleen een kracht als snedegrootheid optreedt. We veronderstellen dat een continu verdeelde uitwendige belasting $\underline{f}$ werkzaam is en dat het koord in evenwicht is. De evenwichtsvorm is een kromme die met de booglengte als parameter wordt voorgesteld door $\underline{x} = \underline{x}(s)$. Het deel $(0,s_0)$ van het koord oefent op het deel $(s_0,s)$ een kracht $-\underline{\sigma}_0$ uit. Het deel voorbij s oefent op het deel $(s_0,s)$ de kracht $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(s)$ uit. Het koord en dus ook het deel $(s_0,s)$ is in evenwicht. Bijgevolg (zie de figuur):




$$\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0 + \int_{s_0}^{s} \underline{f}(u)\,du = \underline{0} ,$$

(A)

$$\underline{x} \times \underline{\sigma} - \underline{x}_0 \times \underline{\sigma}_0 + \int_{s_0}^{s} \underline{x}(u) \times \underline{f}(u)\,du = \underline{0} .$$

Door differentiatie (mag dat?) naar s:

$$\underline{\sigma}' + \underline{f} = \underline{0},\ \underline{t} \times \underline{\sigma} + \underline{x} \times \underline{\sigma}' + \underline{x} \times \underline{f} = \underline{0} . \qquad \text{(B)}$$

Voegen we hier nog aan toe $\underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0$ dan krijgen we een stelsel differentiaalvergelijkingen gelijkwaardig met (A). Voor dit stelsel kan men ook schrijven:

$$\underline{\sigma}' + \underline{f} = \underline{0},\ \underline{t} \times \underline{\sigma} = \underline{0},\ \underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0 .$$

Hieruit blijkt $\underline{\sigma}$ valt langs $\underline{t}$. Stel daarom $\underline{\sigma} = \sigma\underline{t}$; dan is $\underline{\sigma}' = \sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n}$ waarin $\kappa$ de kromming is. We vinden zo:

$$\underline{f} + \sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n} = \underline{0},\ \underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0 .$$

In de evenwichtsstand is de vorm van het koord zodanig dat de uitwendige belasting in het osculatievlak ligt. Uiteraard is $\sigma \geq 0$. Heeft $\underline{f}(s)$ een vaste richting dan is $\underline{f}(s) = f(s)\underline{e}$ waarin $\underline{e}$ een vaste eenheidsvector is. Dus $\underline{\sigma}' + f(s)\underline{e} = \underline{0}$; hieruit $\underline{e} \times \underline{\sigma}' = \underline{0}$ en dus $\underline{e} \times \underline{\sigma} = \underline{c} =$ constant. Derhalve $(\underline{\sigma},\underline{c}) = 0$, waaruit volgt $(\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma =$ constant. <u>De vorm van het koord is een vlakke kromme</u>.

4.13. Als voorbeeld nemen we het geval dat de uitwendige belasting het eigen gewicht van het koord is. We nemen aan dat het koord homogeen is (massadichtheid $\mu$) en niet elastisch. Het krachtelement is nu $\underline{f} = \mu g\underline{e}$. Als assenstelsel nemen we Oxz in het vlak van het koord met Oz verticaal naar boven. Dan is $\underline{f} = (0,-\mu g)$, $\underline{t} = (x',z')$, $\underline{\sigma} = (\sigma x',\sigma z')$. Uit $\underline{\sigma}' + \underline{f} = \underline{0}$ volgt dan:

$$(\sigma x')' = 0 \quad \text{en} \quad (\sigma z')' = \mu g .$$

Dus $\sigma x' = \gamma =$ constant, zodat $\gamma \frac{d}{ds}\frac{dz}{dx} = \mu g$. Derhalve: $\frac{d^2x}{dx^2}\frac{dx}{ds} = \gamma^{-1}\mu g$. Nu is

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}}$$

en dus

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{\mu g}{\gamma} \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2} .$$

Als we deze differentiaalvergelijking kunnen oplossen hebben de vorm van het koord gevonden. Voer in de nieuwe veranderlijke $\varphi$ door $\sinh\varphi = \frac{dz}{dx}$. Dan is $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}\cosh\varphi$ en we krijgen $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\mu g}{\gamma}$. Met $\frac{\gamma}{\mu g} = a$ en $x_0$ als integratieconstante: $\varphi = a^{-1}(x - x_0)$. Bijgevolg: $\frac{dz}{dx} = \sinh\frac{x - x_0}{a}$, waaruit (integratieconstante $z_0$):

$$z - z_0 = a\cosh\frac{x - x_0}{a}.$$

Deze vergelijking stelt een kromme voor die in de wiskunde kettinglijn wordt genoemd. Men noemt a de parameter en $z = z_0$ de basis van de kettinglijn; de lijn $x = x_0$ is de symmetrie as en het punt $(x_0, z_0 + a)$ de top. De kromme keert haar convexe kant naar de aarde.

De spankracht in het punt (x,x) van het koord is volgens het bovenstaande

$$\gamma/x' = \gamma a\frac{d^2z}{dx^2} = \mu g(z - z_0).$$

De spankracht in een punt P van het koord is dus gelijk aan het gewicht van een deel van het koord met een lengte gelijk aan de afstand van P tot de basis.

4.14. We veronderstellen dat het koord van de vorige paragraaf met de eindpunten aan twee vaste punten A en B is bevestigd. Kiezen we de basis en de symmetrie as als x- en z-as dan is $z = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ de vergelijking van de koordkromme k. Daar de ligging van het assenstelsel ten opzichte van de punten A en B niet bekend is, zijn a en de coördinaten $(x_1,z_1)$ en $(x_2,z_2)$ van A en B onbekend. De afstand d van de verticalen door A en B, het hoogteverschil h van A en B en de lengte $\ell$ van het koord kunnen worden gemeten. We zullen daarom d, h en $\ell$ als bekenden beschouwen. Voor $\ell$ moet gelden $\ell > \sqrt{h^2 + d^2}$. Zij $x_1 > x_2$ en $z_1 > z_2$. Dan is

$$x_1 - x_2 = d \qquad a\left(\cosh\frac{x_1}{a} - \cosh\frac{x_2}{a}\right) = h$$

en

$$\ell = \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}dx = \int_{x_2}^{x_1} \cosh \frac{x}{a}\, dx = a(\sinh \frac{x_1}{a} - \sinh \frac{x_2}{a}) \ .$$

Dus

$$\ell + h = a(\exp \frac{x_1}{a} - \exp \frac{x_2}{a}),\ \ell - h = a(\exp(-\frac{x_2}{a}) - \exp(-\frac{x_1}{a})) \ .$$

Dit geeft

$$\ell^2 - h^2 = a^2\{\exp \frac{d}{a} + \exp(-\frac{d}{a}) - 2\} = 4a^2\sinh^2 \frac{d}{2a}$$

zodat

$$\sqrt{\ell^2 - h^2} = 2a \sinh \frac{d}{2a} \ .$$

Stel

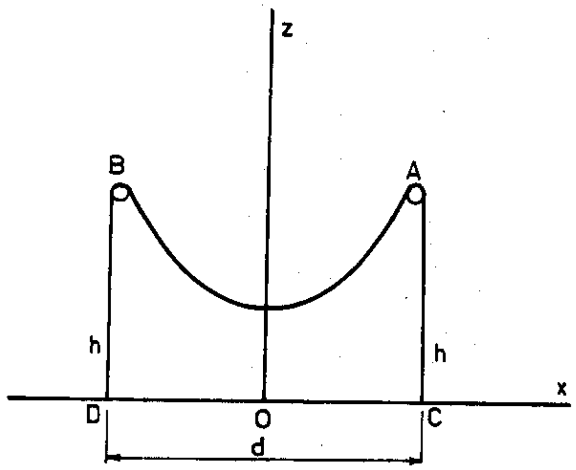
$$\frac{d}{2a} = u \text{ en } \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{d} = \lambda$$

dan is dus $\sinh u - \lambda u = 0$ waarin $\lambda > 1$ en $u > 0$. Om het aantal positieve wortels van de vergelijking $f(u) = \sinh u - \lambda u = 0$ te bepalen, merken we op dat $f'(u) = \cosh u - \lambda$. Er is juist één positieve $u_1$ met $\cosh u_1 = \lambda$. Voor $0 \leq u < u_1$ is $f'(u) < 0$ en $f(u)$ monotoon afnemend; voor $u > u_1$ is $f'(u) > 0$ en $f(u)$ monotoon toenemend. Wegens $f(0) = 0$ is $f(u) < 0$ voor $0 < u \leq u_1$ terwijl $f(u)$ voor $u \to \infty$ onbegrensd aan groeit. De vergelijking $\sinh u - \lambda u = 0$ heeft dus juist een positieve wortel $u_0 > u_1$. Er is dus juist één waarde van a, nl. $d/2u_0$ zodanig dat

$$\sqrt{\ell^2 - h^2} = 2a \sinh \frac{d}{2a} \ .$$

Met behulp hiervan kan men $x_2$, $x_1$, $z_2$ en $z_1$ vinden. Er is dus juist een kettinglijn die aan alle eisen voldoet. De wortel $u_0$ zal door een benaderingsmethode moeten worden bepaald. Een eerste benadering is $\sqrt{6(\lambda - 1)}$ verkregen door van de reeksontwikkeling voor $\sinh u$ de eerste twee termen in rekening te brengen.

4.15. Wanneer het koord met lengte $\ell$ over twee even hoog gelegen volkomen gladde




pennen A en B wordt geslagen reiken in de evenwichtsstand de uiteinden C en D van de verticaal neerhangende delen juist tot aan de basis. Er is nu een fraaie symmetrie: A en B zijn de punten $(\frac{1}{2}d,h)$ en $(-\frac{1}{2}d,h)$; hierin is $h = a \cosh \frac{d}{2a}$. Het deel van het koord tussen A en B heeft de lengte $2a \sinh \frac{d}{2a}$. De totale lengte van het koord is derhalve $\ell = 2a \exp \frac{d}{2a}$, waarin a de enige onbekende is. Stelt men $\frac{d}{2a} = u$ dan moet ter bepaling van a de vergelijking $g(u) = e^u - \lambda u = 0$ $(\lambda = \ell/d)$ wordt opgelost. Het blijkt dat deze vergelijking alleen voor $\lambda \geq e$ reële wortels heeft en wel:

1. voor $\lambda = e$ de tweevoudige wortel 1;
2. voor $\lambda > e$ de positieve wortels $u_1$ en $u_2$ met $u_1 < 1 < \log \lambda < u_2$.

Er zijn dus voor $\lambda > e$ twee evenwichtsstanden mogelijk.

4.16. We beschouwen als laatste voorbeeld nog een koord van te verwaarlozen gewicht dat over een vaste, horizontaal opgestelde, ruwe cylinder is geslagen. Het koord ligt geheel in het vlak van een loodrechte doorsnede van de cylinder en is langs de boog $P_1P_2$ met het oppervlak in aanraking. Op het vrije deel van het koord dat in $P_i$ aan de cylinder raakt, werkt in bovengenoemd vlak een kracht $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ $(i = 1,2)$. We veronderstellen dat het koord in evenwicht is, doch op het punt staat uit te glijden in de zin van $P_1$ naar $P_2$. Voor de spankracht in de punten $P_1$ en $P_2$ vindt men opvolgend $-\underline{\underline{S}}_1 = -\underline{\underline{F}}_1$, $\underline{\underline{S}}_2 = \underline{\underline{F}}_2$. Is $\underline{f}$ ds het krachtelement in het punt $\underline{x}(s)$ van $P_1P_2$ dan is $\sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n} + \underline{f} = \underline{0}$. Is N de grootte van de kracht die de cylinder in de richting van de oppervlaktenormaal op het koord uitoefent, dan is $\sigma\kappa = N$. Daar het koord op het punt staat uit te glijden is de tangentiële kracht op het koord dan kN waarin k een constante is (de wrijvingscoëfficiënt). Dus $\sigma' = kN$. Hieruit volgt: $\sigma' = k\kappa\sigma$. Nu is $\underline{t} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ en $\underline{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ waarin $\varphi$ de hoek is tussen $\underline{t}$ en de positieve $x_1$-as. Dus: $\kappa\underline{n} = \underline{t}' = \varphi'(-\sin\varphi, \cos\varphi) = \varphi'\underline{n}$; hieruit volgt $\kappa = \varphi'$. Derhalve: $\sigma' = k\sigma\varphi'$ of $\frac{d\sigma}{d\varphi} = k\sigma$. Integratie over het deel van het koord dat met de cylinder in aanraking is, levert

$$\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k(\varphi_2 - \varphi_1) = -k\alpha \ ,$$

zodat $|\underline{f}_2| = |\underline{f}_1|e^{-k\alpha}$ (formule van Eytelwein). Het koord kan meerdere slagen om de cylinder zijn gewikkeld, zodat $\alpha$ niet tot het interval $(0,2\pi)$ behoeft te zijn beperkt.

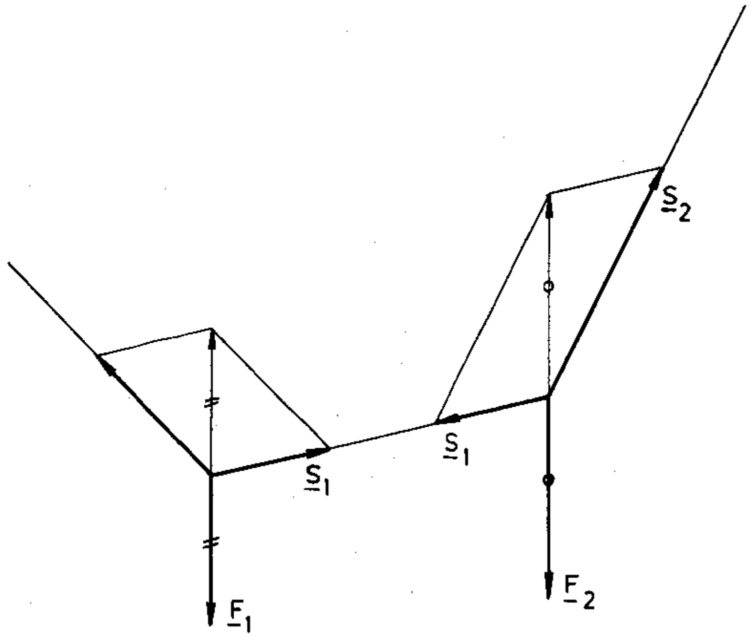
4.17. Van een volkomen buigzaam koord is, voor de spanning in het koord afgeleid de vergelijking:

$$\underline{\sigma}(s) - \underline{\sigma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{f}(u)du$$

waarin $\underline{f}$ de uitwendige belasting voorstelt.

Tot nu toe is verondersteld dat $\underline{f}$ continu verdeeld is over het koord. In deze paragraaf veronderstellen we dat het koord belast wordt in een discreet aantal punten door eindige krachten.

Als eerste voorbeeld zullen we beschouwen het geval dat de krachten evenwijdig zijn. De spankracht in het koord kan worden bepaald op de in de figuur aangegeven wijze:



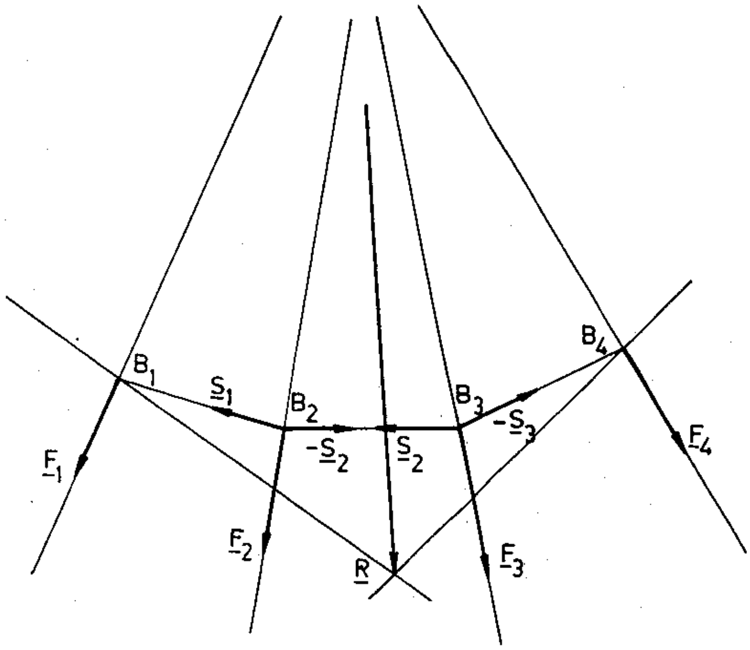

Tussen twee "aangrijpings"-punten is de aanpassing in het koord constant en het koord zal een zodanige vorm aannemen dat aan de evenwichtsvoorwaarden wordt voldaan. Tussen twee aangrijpingspunten is het koord recht, in de aangrijpingspunten treden knikken op, bepaald door de evenwichtsvoorwaarden van deze punten.

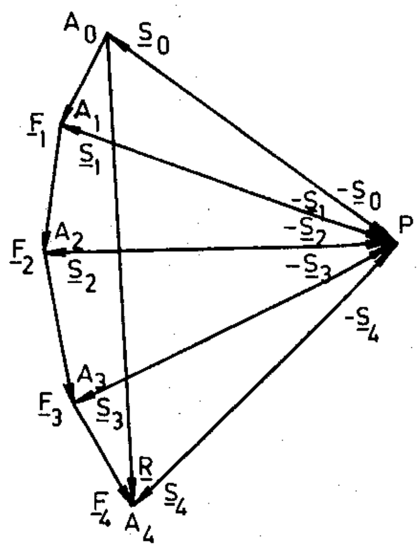
De aangeduide constructie kan eenvoudig worden uitgebreid tot gevallen waarbij de uitwendige krachten niet evenwijdig zijn, of zelfs niet in een vlak liggen.

De uitbreiding tot een vlak stelsel krachten zullen we wat nader toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Beschouw een vlak stelsel krachten: $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ en $\underline{F}_4$.

Gevraagd wordt de resultante $\underline{R}$, de kracht die statisch equivalent is met $\underline{F}_1$ t/m $\underline{F}_4$ te bepalen.




Naast de figuur waarin de dragers en de krachten zijn getekend, wordt een tweede figuur, de poolfiguur, beschouwd. Uitgaande van een punt $A_0$ worden representanten van $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ en $\underline{F}_4$ achter elkaar afgezet tot $A_4$. De figuur wordt gesloten door $\underline{R}$ de resultante.
Vanuit een overigens willekeurig punt P, de pool, worden verbindingslijnen met de knooppunten $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ en $A_4$ aangebracht. Uitgaande van een punt $B_1$ van de drager van $\underline{F}_1$ worden lijnen evenwijdig aan de verbindingslijnen $A_iP$ op de aangegeven wijze getekend. De lijnen door $B_1$ en $B_4$ evenwijdig met $A_0P$ resp. $A_4P$ snijden elkaar in een punt van de drager van $\underline{R}$. De polygoonkromme door de punten $B_1$, $B_2$, $B_3$ en $B_4$ is te vergelijken met de kromme waarlangs een volkomen buigzaam koord zich vlijt onder invloed van de uitwendige krachten $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ en $\underline{F}_4$.

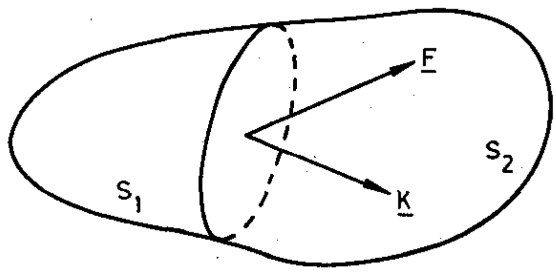
Bovenstaande figuur wordt in het door Varignon (19e eeuw) ontwikkelde vakgebied van de Grafostatica de stangenveelhoek (Seileck,D) genoemd.

Twee bijzondere vormen van vlakke krachtenstelsels zijn de volgende:

- De poolfiguur is gesloten, $A_0$ en $A_4$ vallen samen, de uitwendige krachten maken evenwicht als ook de stangenveelhoek gesloten is.
- Als de poolfiguur gesloten is en de stangenveelhoek niet, is de resulterende kracht nul, maar het stelsel is dan equivalent met een koppel.

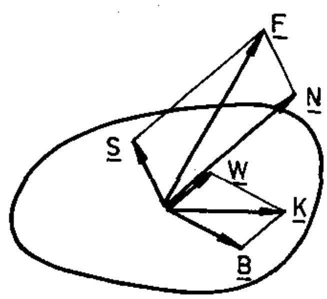
Voor een nadere bestudering van deze theorie wordt verwezen naar de literatuur op genoemd vakgebied.

4.18. In paragraaf 4.11 is een eerste aanzet gegeven tot de bestudering van de daar gedefinieerde snedegrootheden; vervolgens hebben we ons bezig gehouden met de bestudering van enige voorbeelden. In deze paragraaf willen we nog iets nader ingaan op de snedegrootheden.




De kracht $\underline{F}$ en het koppel $\underline{K}$ vormen de op het aangegeven punt gereduceerde invloed welke het deel $S_2$ van een materieel lichaam op het deel $S_1$ via de doorsnede uitoefent.

Laten we de doorsnede en de via haar overgebrachte invloed wat nader bekijken.

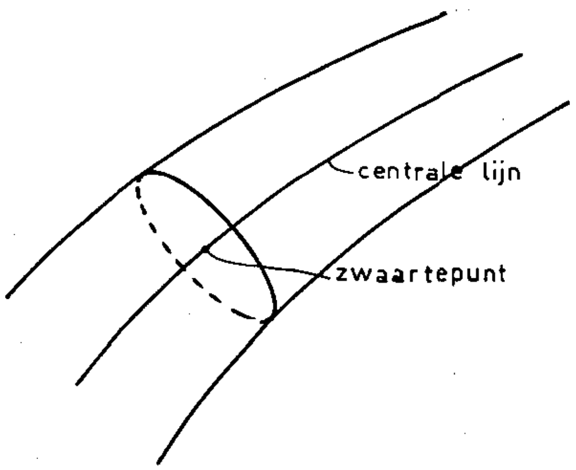



Laat $\underline{n}$ de eenheidsnormaalvector op de doorsnede zijn, gedefinieerd als de naar buiten gerichte normaal in het reductiepunt. De kracht $\underline{F}$ en het koppel $\underline{K}$ worden ontbonden langs $\underline{n}$ en loodrecht op $\underline{n}$.

$\underline{F} = \underline{S} + \underline{N}$, $\underline{S}$ heet de schuifkracht en
$\underline{N}$ de normaalkracht;

$\underline{K} = \underline{W} + \underline{B}$, $\underline{B}$ heet het buigend moment en
$\underline{W}$ het wringend moment.

De lichamen die wij zullen beschouwen hebben een eenvoudige gedaante zoals een cylindrische staaf, een gebogen cylindrische staaf of een ring, waarbij een van de afmetingen veel groter is dan beide andere. De doorsnede in een punt brengt men dan zodanig aan dat deze een zo klein mogelijk oppervlak heeft. De verbindingslijn van de meetkundige zwaartepunten van de doorsneden noemt men de centrale lijn.




De snedegrootheden worden steeds gereduceerd op het zwaartepunt van de doorsnede.

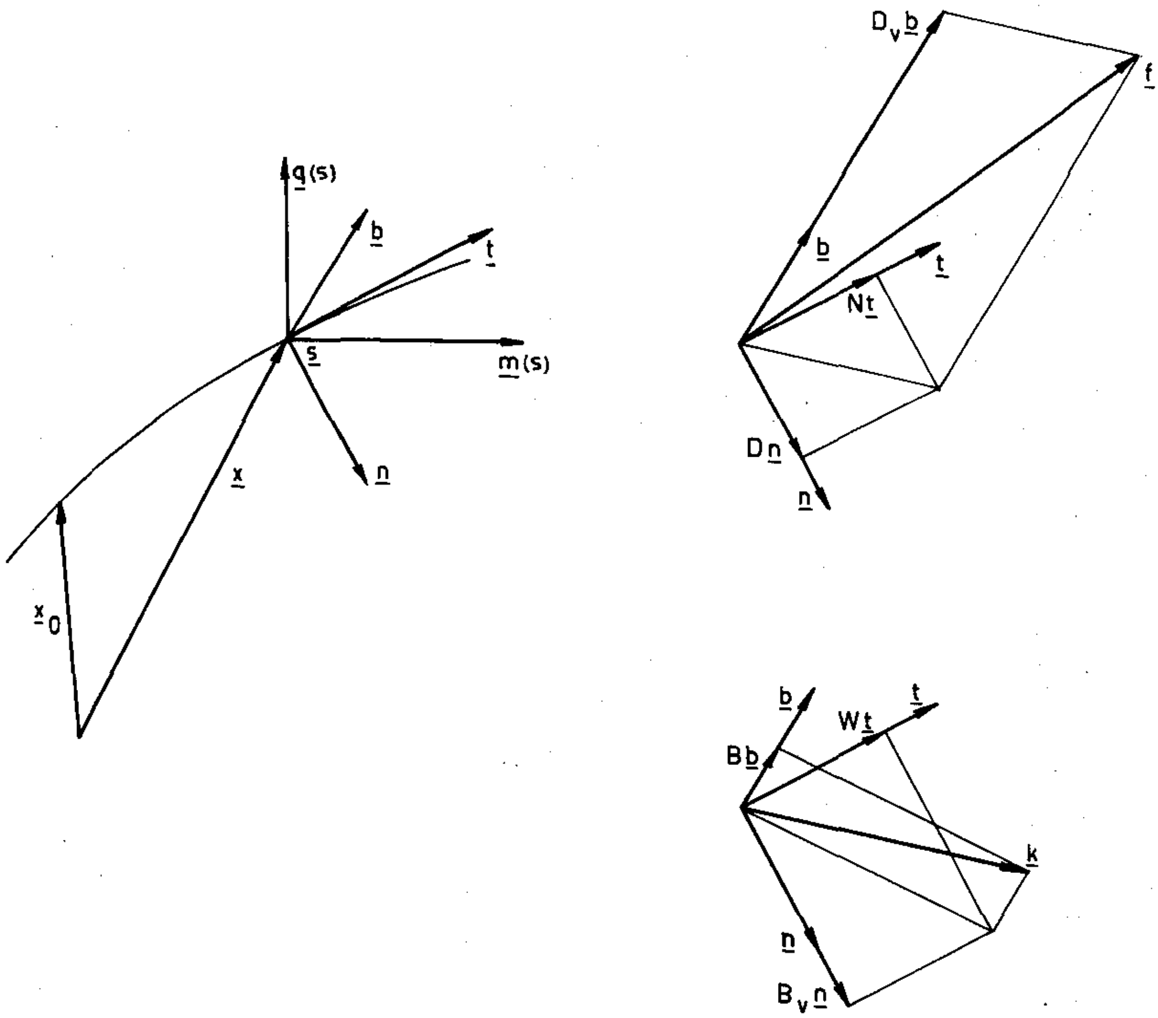
Beschouwd wordt als voorbeeld een balk waarvan de doorsnede overal dezelfde cirkelvorm heeft.
De centrale lijn is een ruimtekromme zoals we die in het voorgaande al in het algemeen bestudeerd hebben.
Laat de positie van een punt van de centrale lijn worden voorgesteld door $\underline{x}$ en laat $\underline{F} = [\underline{f}, \underline{x} \times \underline{f}]$ de door de doorsnede op plaats $\underline{x}$ overgebrachte kracht en $\underline{R} = [\underline{0}, \underline{k}]$ het koppel zijn.

Ontbinding op het driebeen van Seret-Frenet levert:

$$\underline{f} = N\underline{t} + D\underline{n} + D_v\underline{b}$$

$$\underline{k} = W\underline{t} + B_v\underline{n} + B\underline{b} \ .$$

Een en ander wordt in de figuur nader toegelicht.




Na differentiatie volgt:

$$\underline{f}' = N'\underline{t} + D'\underline{n} + D'_n\underline{b} + N\underline{t}' + D\underline{n}' + D_v\underline{b}'$$

$$\underline{k}' = W'\underline{t} + B'_v\underline{n} + B'\underline{b} + W\underline{t}' + B_v\underline{n}' + B\underline{b}' \ .$$

Met

$$\underline{t}' = \kappa\underline{n}$$

$$\underline{n}' = -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}$$

$$\underline{b}' = -\tau\underline{n}$$

volgt:

$$\underline{f}' = (N' - \kappa D)\underline{t} + (D' + \kappa N - \tau D_v)\underline{n} + (D_v' + \tau D)\underline{b}$$

$$\underline{k}' = (W' - \kappa B_v)\underline{t} + (B_v' + \kappa W - \tau B)\underline{n} + (B' + \tau B_v)\underline{b} \ .$$

De uitwendige belasting wordt voorgesteld door $\underline{q}(s)$, de kracht per lengte-eenheid, en $\underline{m}(s)$, het moment per lengte-eenheid van de centrale lijn.
De evenwichtsvergelijkingen leveren:

$$\underline{f}(s) - \underline{f}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{q}(u)\,du = \underline{0}$$

$$\underline{k}(s) - \underline{k}(s_0) + \underline{x}(s) \times \underline{f}(s) - \underline{x}(0) \times \underline{f}(0) + \int_{s_0}^{s} \underline{x}(u) \times \underline{q}(u)\,du +$$

$$+ \int_{s_0}^{s} \underline{m}(u)\,du = \underline{0} \ .$$

Verondersteld wordt dat de functies alle voldoende malen differentieerbaar zijn.
Na differentiatie volgt uit de evenwichtsvergelijkingen:

$$\underline{f}' + \underline{q} = \underline{0} \ ,$$

$$\underline{k}' + \underline{x}' \times \underline{f} + \underline{m} = \underline{0} \ .$$

Laat $\underline{q}$ en $\underline{m}$ ontbonden op het driebeen van Seret-Frenet worden voorgesteld door:

$$\underline{q} = q_t\underline{t} + q_n\underline{n} + q_b\underline{b} \ ,$$

$$\underline{m} = m_t\underline{t} + m_n\underline{n} + m_b\underline{b} \ .$$

Na substitutie van $\underline{f}'$, $\underline{k}'$ en $\underline{f}$ volgt met $\underline{x}' = \underline{t}$:

$$N' - \kappa D + q_t = 0 \ ,$$

$$D' + \kappa N - \tau D_v + q_n = 0 \ ,$$

$$D_v' + \tau D + q_b = 0 \ .$$

$$W' - \kappa B_v + m_t = 0 \ ,$$

$$B_v' + \kappa W - \tau B - D_v + m_n = 0 \ ,$$

$$B' + \tau B_v + D + m_b = 0 \ .$$

Voor een rechte balk, $\kappa = \tau = 0$, worden deze vergelijkingen, als bovendien verondersteld wordt: $q_t = q_b = 0$, dus $\underline{q}(s) = q(s)\underline{n}$ en $\underline{m}(s) = \underline{0}$, vereenvoudigd tot

$$N' = 0 \qquad W' = 0$$

$$D' + q = 0 \qquad B_v' - D_v = 0$$

$$D_v' = 0 \qquad B' + D = 0 \ .$$

Zodat geldt

$$D' = -q$$

$$B' = -D$$

$$B'' = q \ .$$

Deze laatste eenvoudige formules worden dikwijls gebruikt in de technische balkenleer.

## 5. Enkele klassieke voorbeelden

1. Mathematische slinger. Een massapunt P (massa m) is door middel van een starre, massaloze, rechte staaf (lengte $\ell$) verbonden met een vast punt 0, zodanig dat OP in een vast verticaal vlak zonder wrijving om 0 kan draaien. Het massapunt is onderworpen aan de zwaartekracht (versnelling g). De positie van P is ondubbelzinnig bepaald door de in goniometrisch positieve zin gemeten hoek $\varphi$ die $\overrightarrow{OP}$ maakt met de naar beneden gerichte verticaal.
Men heeft:

$$\ell\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \ ; \quad -m\ell\dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi - S \ , \tag{5.1.1}$$

waarin S de kracht is die de staaf op P uitoefent. Uit de eerste van de vergelijkingen (5.1.1) volgt dat $\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$ evenwichtsstanden aanwijzen. Voor kleine $|\varphi|$ is geldt $\ell\ddot{\varphi} = -g\varphi$. De kleine trillingen om de eerste stand hebben de cirkelfrequentie $\sqrt{g/\ell}$ en de trillingstijd $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ . Deze stand is dus stabiel. Is $\varphi = \pi + \varepsilon$ ($|\varepsilon|$ klein) dan is $\ell\ddot{\varepsilon} = g \sin \varepsilon \approx g\varepsilon$ met $\varepsilon = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$ $(k = \sqrt{g/\ell})$ als algemene oplossing. Deze evenwichtsstand is labiel. Uit de eerste van de vergelijkingen (5.1.1) volgt verder $2\ell\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -2g\dot{\varphi} \sin \varphi$, zodat

$$\ell\dot{\varphi}^2 - 2g \cos \varphi = \text{constant} = 2cg \ . \tag{5.1.2}$$

Derhalve:

$$S = mg(3 \cos \varphi + 2c) \ . \tag{5.1.3}$$

Voor de constante c in (5.1.2) moet blijkbaar gelden $c \geq -1$. Is $c = -1$ dan verkeert P in de laagste stand blijvend in rust. We veronderstellen daarom verder $c > -1$. Er is een omkeerpunt bij $\cos \varphi = -c$. Voor $c > 1$ zijn er dus geen omkeerpunten en P doorloopt de gehele cirkel $(0,\ell)$ steeds in dezelfde zin. Is $-1 < c < 1$ dan zijn er twee omkeerpunten Q en Q', symmetrisch ten opzichte van de verticaal door 0. Zij treden op voor $\varphi = \pm\, \alpha$, waarin $\cos \alpha = -c$ en $0 < \alpha < \pi$. Men heeft nu: $\ell\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos \varphi - \cos \alpha)$. Is $\varphi = 0$ voor $t = 0$ dan geldt voor t als functie van $\varphi$:

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} \ .$$

De trillingstijd is

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}}\ .$$

$\cos\psi - \cos\alpha \leq 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha - 2\sin^2\frac{1}{2}\psi$; we stellen: $\sin\frac{1}{2}\alpha = k$ en $\sin\frac{1}{2}\psi =$ $= k\sin u$, zodat $\cos\frac{1}{2}\psi = \sqrt{1 - k^2\sin^2 u}$.
Dan vinden we

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} \qquad (0 < k < 1)\ .$$

Voor niet al te grote waarden van k (dus van $\alpha$, de amplitude) is $T = 2\pi(1 + \frac{1}{4}k^2)\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ een goede benadering. Voor zeer kleine k kan men de reeds eerder genoemde formule van Huygens $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ nemen.
Is $c > 1$ dan kan men stellen $c = 1 + 2b$ $(b > 0)$ en $(b + 1)^{-\frac{1}{2}} = k$. Voor de omloopstijd vindt men dan

$$T = 2k\sqrt{\ell/g}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}} \qquad 0 < k < 1\ .$$

Het geval $c = 1$ is een grensgeval. We vinden dan

$$\dot{\varphi}^2 = (2g/\ell)(1 + \cos\varphi) = (4g\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)/\ell\ ,$$

zodat t als functie van $\varphi$ is bepaald door

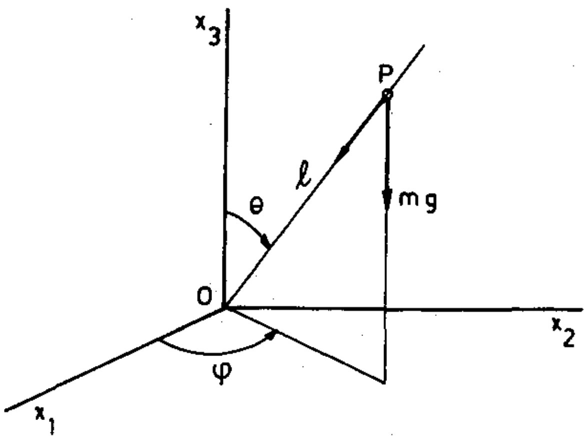
$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\psi}{\cos\psi} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\log\tan\frac{\pi + \varphi}{4}\ .$$

Het hoogste punt wordt met tot nul naderende snelheid asymptotisch genaderd.

2. Physische slinger. We beschouwen een star lichaam dat onder invloed van de zwaartekracht zonder wrijving kan draaien om een vaste horizontale as. Is d de afstand van het zwaartepunt Z tot deze as en O het voetpunt van de loodlijn uit Z op de as neergelaten, dan noemen we de hoek van $\overrightarrow{OZ}$ met de verticaal door O weer $\varphi$. Het impulsmoment van het lichaam ten opzichte van de as is $J\dot{\varphi}$ waarin J het traagheidsmoment ten opzichte van de rotatieas voorstelt. Is m de totale massa dan is dus $J\ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$. De physische slinger gedraagt zich dus als een mathematische met slingerlengte $\ell_g = \frac{J}{md}$ ; men noemt $\ell_g$ dan ook de gereduceerde slingerlengte. Bepaalt men op $\overrightarrow{OZ}$ het punt S zodanig dat OS = $\ell_g$ dan wordt S het slingerpunt genoemd. Volgens Steiner is $J = J_z + md^2$ waarin $J_z$ het traagheidsmoment is om een as door Z evenwijdig met de rotatieas. Bijgevolg is steeds $\ell_g = \frac{J_z}{md} + d > d$; in de stabiele evenwichtsstand ligt S beneden het zwaartepunt. Het traagheidsmoment om een as door S evenwijdig met de rotatieas is $J_s = J_z + m(\ell_g - d)^2 = md\ell_g - md^2 + m(\ell_g - d)^2 = m\ell_g(\ell_g - d)$. Laat men het lichaam in plaats van om de oorspronkelijke as bewegen om een as door S evenwijdig hiermee dan wordt de bewegingsvergelijking $m\ell_g(\ell_g - d)\ddot{\varphi} = -mg(\ell_g - d)\sin \varphi$ of $\ddot{\varphi} + (g \sin \varphi)/\ell_g = 0$, dus dezelfde als om de oorspronkelijke as. Slingerpunt en ophangpunt zijn verwisselbaar (reversieslinger).

3. Spherische slinger. Het verschil met de mathematische slinger is dat OP in alle richtingen om O kan draaien, zodat P blijft op een boloppervlak $(O,\ell)$. De coördinaten van P zijn:

$$(\ell \sin \theta \cos \varphi,\ \ell \sin \theta \sin \varphi,\ \ell \cos \theta)\ .$$



Hieruit vinden we voor de snelheid van P:

$\ell(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi,\ \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi,\ -\dot{\theta}\sin\theta)$ .

De momentvector in 0 van het stelsel van de uitwendige krachten heeft de component nul langs de $x_3$-as. De component langs de $x_3$-as van het impulsmoment is dus constant. Dit levert $\dot{\varphi}\sin^2\theta = c_1$. Zonder berekening vindt men dit door op te merken dat de versnelling van $P_3$ langs $OP_3$ valt. De perksnelheid van $P_3$ is dus constant. Om de beweging van P vast te leggen, hebben we nog een vergelijking nodig. Dit halen we uit de stelling dat de toename van de kinetische energie gelijk is aan de arbeid verricht door de uitwendige krachten. Zo vinden we:

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{2g}{\ell}\cos\theta = c_2 \ .$$

Daar $\dot{\varphi} = c_1/\sin^2\theta$, vinden we, als $u = \cos\theta$ wordt gesteld:

$$\dot{u}^2 = -\frac{2g}{\ell}u(1-u^2) + c_2(1-u^2) - c_1^2 \qquad (-1 \le u \le 1) \ .$$

Het rechterlid van deze vergelijking noemen we $f(u)$. Het punt P kan zich alleen bevinden op plaatsen corresponderend met waarden van $\theta$ waarvoor $f(u) \ge 0$. We merken op $f(-1) = f(1) < 0$ indien $c_1 \neq 0$ wordt verondersteld. Tussen $-1$ en $1$ liggen dus twee nulpunten $u_1$ en $u_2$ van $f(u)$, daar anders $f(u)$ overal op $[-1,1]$ negatief zou zijn. Is $u_1 \neq u_2$ (we veronderstellen maar $u_1 < u_2$) dan beweegt P zich tussen twee breedtecirkels van de bol met omkeerpunten op deze cirkels. Is $u_1 = u_2$ dan blijft P steeds op dezelfde breedtecirkel (conische slinger); dit kan elke breedtecirkel op het zuidelijk halfrond zijn. Hij wordt eenparig doorlopen. Kan elk paar keercirkels als meridianen fungeren? Antwoord: nodig en voldoende is dat hun midden cirkel op het zuidelijk halfrond ligt.

4. <u>Verschijnselen op een roterende aarde</u>. Zij P een punt op aarde; we kiezen P als oorsprong van een assenstelsel waarvan de positieve $x_1$-as naar het zuiden, de positieve $x_2$-as naar het oosten en de positieve $x_3$-as naar het zenith gericht is. We veronderstellen dat de aarde een bol is (middelpunt M, straal R) die met constante hoeksnelheid $\omega$ om een vaste middellijn (die als $X_3$-as is gekozen) wentelt. De $X_1$- en $X_2$-as van het orthonormale en in de ruimte vaste assenstelsel $MX_1X_2X_3$ kiezen we in het vlak van de evenaar (fig. ). De geografische breedte van P noemen we $\beta$. Zij voorts A een punt dat ten opzichte van $Px_1x_2x_3$ de positievector $\underline{x}$ heeft en dat ten opzichte

van dit stelsel beweegt (relatieve beweging). We wensen te vinden de absolute versnelling van A beschreven in het assenstelsel $Px_1x_2x_3$. De beweging van dit stelsel kan worden opgevat als een rotatie met hoeksnelheid $\omega$ om een as door P evenwijdig met de $X_3$-as gecombineerd met een translatie met P mee. De hoeksnelheidsvector is dus $(-\omega \cos\beta, 0, \omega \sin\beta)$; de versnelling van de translatie is $(-\omega^2 R \sin\beta \cos\beta, 0, -\omega^2 R \cos^2\beta)$. Voor de versnelling tengevolge van de sleeprotatie vindt men:

$$(-\omega^2 x_3 \sin\beta \cos\beta - \omega^2 x_1 \sin^2\beta,\ -\omega^2 x_2,\ -\omega^2 x_3 \cos^2\beta - \omega^2 x_1 \sin\beta \cos\beta).$$

De sleepversnelling is dus:

$$(-\omega^2 (R + x_3)\sin\beta \cos\beta - \omega^2 x_1 \sin^2\beta,\ -\omega^2 x_2,\ -\omega^2 (R + x_3)\cos^2\beta - \omega^2 x_1 \alpha\beta \cos\beta)\ .$$

Voor de Coriolisversnelling vindt men

$$(-2\omega\dot{x}_2 \sin\beta,\ 2\omega\dot{x}_1 \sin\beta + 2\omega\dot{x}_3 \cos\beta,\ -2\omega\dot{x}_2 \cos\beta)\ .$$

Tenslotte is de relatieve versnelling $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$. Voor de vector van de absolute versnelling vindt men dus:

$$a_1 = -\omega^2 x_1 \sin^2\beta - \omega^2 (R + x_3)\sin\beta \cos\beta - 2\omega\dot{x}_2 \sin\beta + \ddot{x}_1\ ,$$

$$a_2 = -\omega^2 x_2 + 2\omega\dot{x}_1 \sin\beta + 2\omega\dot{x}_3 \cos\beta + \ddot{x}_2\ ,$$

$$a_3 = -\omega^2 x_1 \sin\beta \cos\beta - \omega^2 (R + x_3)\cos^2\beta - 2\omega\dot{x}_2 \cos\beta + \ddot{x}_3\ .$$

We veronderstellen dat A zich ten tijde $t = 0$ met snelheid nul bevindt in het punt $(0,0,h)$ en een constante naar M gerichte versnelling g heeft. Hierbij is aangenomen dat h zeer klein is ten opzichte van R. Daar $\omega^2$ zeer klein is $(\omega = 2\pi/(24 \times 3600)\,\text{rad/s})$ en $\omega^2 R$ ook (ongeveer $0{,}003g$) verwaarlozen we alle termen met $\omega^2$. Dan vinden we:

$$\ddot{x}_1 = 2\omega\dot{x}_2 \sin\beta;\quad \ddot{x}_2 = -2\omega\dot{x}_1 \sin\beta - 2\omega\dot{x}_3 \cos\beta;\quad \ddot{x}_3 = 2\omega\dot{x}_2 \cos\beta - g\ .$$

Met inachtneming van de beginvoorwaarden volgt hieruit:

$$\dot{x}_1 = 2\omega x_2 \sin\beta;\ \dot{x}_2 = -2\omega x_1 \sin\beta - 2\omega x_3 \cos\beta + 2\omega h \cos\beta;$$

$$\dot{x}_3 = 2\omega x_2 \cos\beta - gt\ .$$

Dus $\ddot{x}_2 + 4\omega^2 x_2 = 2\omega g t \cos\beta$, zodat:

$$x_2 = \frac{g\cos\beta}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t)\ . \tag{5.4.1}$$

Dan is

$$\dot{x}_1 = \frac{g\sin\beta\cos\beta}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t)\ ;$$

$$\dot{x}_3 = \frac{g\cos^2\beta}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t) - gt\ ;$$

en

$$x_1 = \frac{g\sin 2\beta}{4\omega^2}(\omega^2 t^2 - \sin^2\omega t) \tag{5.4.2}$$

$$x_3 = h - \tfrac{1}{2}gt^2 + \frac{g\cos^2\beta}{2\omega^2}(\omega^2 t^2 - \sin^2\omega t)\ . \tag{5.4.3}$$

De uitkomsten leren dat het punt A ietwat ten zuidoosten van P het horizontale vlak door P treft ($0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ verondersteld). Het hoofdbestanddeel van de oostafwijking is volgens (5.4.2):

$$\frac{1}{3}\,g\omega t_0^3 \cos\beta$$

en dat van de zuidafwijking

$$\frac{1}{12}\,g\omega^2 t_0^4 \sin 2\beta\ ;$$

hierin is $t_0$ de valtijd. De oostafwijking is dus verreweg het grootst. Bij benadering is $t_0 = (2h/g)^{\frac{1}{2}}$ zodat de oostafwijking bij een val van 2000 m hoogte ongeveer 1,9 cos β meter is.

Een fraaie toepassing krijgen we door te veronderstellen dat A zich beweegt in het horizontale vlak door P met een absolute versnelling $-\mu^2\overrightarrow{PA}$ ($\mu > 0$ en constant). Met dezelfde benadering als zo juist krijgen we

$$\ddot{x}_1 = -\mu^2 x_1 + 2\omega\dot{x}_2 \sin\beta;\ \ddot{x}_2 = -\mu^2 x_2 - 2\omega\dot{x}_1 \sin\beta .$$

We stellen $x_1 = B_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = B_2 e^{\lambda t}$ en vinden

$$(\lambda^2 + \mu^2)B_1 - 2\omega\lambda B_2 \sin\beta = 0 ,$$

$$2\omega\lambda B_1 \sin\beta + (\lambda^2 + \mu^2)B_2) = 0 .$$

Karakteristieke vergelijking:

$$(\lambda^2 + \mu^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2\sin^2\beta = 0 .$$

Zij

$$\mu^2 + \omega^2\sin^2\beta = k^2 \quad (k > 0) .$$

Dan zijn

$$\lambda_1 = -i(k + \omega \sin\beta),\ \lambda_2 = i(k + \omega \sin\beta),\ \lambda_3 = -i(k - \omega \sin\beta)$$
$$\lambda_4 = i(k - \omega \sin\beta)$$

de wortels van deze vergelijking.

Is A voor $t = 0$ met relatieve snelheid nul in het punt $(c,0,0)$ dan vindt men:

$$x_1 = \frac{c}{2k}\{(k + \omega \sin\beta)\cos(k - \omega \sin\beta)t + (k - \omega \sin\beta)\cos(k + \omega \cos\beta)t\},$$

$$x_2 = \frac{c}{2k}\{(k + \omega \sin\beta)\sin(k - \omega \sin\beta)t - (k - \omega \sin\beta)\sin(k + \omega \cos\beta)t\}.$$

Dus

$$PA^2 = \frac{c^2}{4k^2}\{2k^2 + 2\omega^2\sin^2\beta + 2(k^2 - \omega^2\sin^2\beta)\cos 2kt\} .$$

Hieruit:

$$PA_{max} = c \ , \quad PA_{min} = (c\omega \sin \beta)/k \ .$$

De baan van A ligt dus in de ring tussen de cirkels $C_1 \equiv (P,c)$ en $C_2 \equiv (P,b)$ waarin $b = (c\omega \sin \beta)/k$. Voor $t = 0, \pi/k, 2\pi/k, 3\pi/k$ bevindt A zich met snelheid nul op $C_1$. De baan van A is de hypocycloïde die ontstaat als een cirkel met straal $c(k - \omega \sin \beta)/2k$ rolt langs de binnenkant van $C_1$; hierbij is $\beta \neq 0$ verondersteld. Voor $\beta = 0$ (dus aan de evenaar) is de baan van A rechtlijnig.

Namen register

## Register

(de getallen wijzen de bladzijden aan)