TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

INLEIDING in de MECHANICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. G.R. Veldkamp

Gegeven in het Najaarssemester 1974

Jag/THE

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Inleiding in de Mechanica

bestemd voor WSK-I

najaar 1979

Dictaatnr. 2.225 Prijs *f* 3,50

Inhoudsbeschrijving

Inleiding in de Mechanica

G.R.Veldkamp (najaar 1974)

JdG, 30 Juni 2005

J de Graaf

There are ..... some minds which can go on contemplating with satisfaction pure quantities presented to the eye by symbols, and to the mind in a form which none but mathematicians can conceive. There are others who feel more enjoyment in following geometrical forms, which they draw on paper, or build up in the empty space before them. Others, again, are not content unless they can project their whole physical energies into the scene which they conjure up. They learn at what a rate the planets rush through space, and they experience a delightful feeling of exhilaration .....
For the sake of persons of these different types, scientific truth should be presented in different forms, and should be regarded as equally scientific, whether it appears in the robust form and the vivid colouring of a physical illustration, or in the tenuity and paleness of a symbolical expression.

James Clerk Maxwell (1870).

1. Wiskundige inleiding

1.0. In de mechanica worden bewegingen bestudeerd. Deze spelen zich af in de ruimte om ons heen. We veronderstellen dat in deze ruimte dezelfde meetkundige eigenschappen gelden als in de euclidische driedimensionale ruimte E_3; dit is de ruimte die ten grondslag ligt aan de gewone schoolmeetkunde. In deze inleiding wordt van de meetkunde in E_3 zoveel behandeld als van belang is voor de mechanica. Het gaat hierbij om onderwerpen die voor een deel ook voorkomen op de onderwijsprogramma's van scholen die voorbereiden op het wetenschappelijk onderwijs. Dit maakt dat de volgende behandeling aansluit bij bekende zaken, al zal de presentatie nu en dan wat verschillen van die tijdens het voorbereidend onderwijs.

1.1. Afstand van twee punten. In E_3 zij $OX_1X_2X_3$ een rechts orthonormaal assenstelsel; de coördinaten van een punt X ten opzichte van dit stelsel zullen met x_1, x_2 en x_3 worden aangegeven. De zes vlakken die door twee verschillende punten $P(p_1,p_2,p_3)$ en $Q(q_1,q_2,q_3)$ evenwijdig met de coördinaatvlakken kunnen worden aangebracht, begrenzen een rechthoekig blok (een balk) waarvan de afmetingen zijn: $|p_1-q_1|$, $|p_2-q_2|$ en $|p_3-q_3|$. Voor de lichaamsdiagonaal PQ vindt men gemakkelijk:

$$PQ^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 \; . \tag{1.1.1}$$

1.2. Vectoren. Voorlopig stellen we ons tevreden met de naïeve omschrijving: een vector is een gericht lijnstuk waarvan het ene uiteinde als beginpunt en het andere als eindpunt wordt aangewezen. De vector met $P(p_1,p_2,p_3)$ als begin- en $Q(q_1,q_2,q_3)$ als eindpunt wordt als $\overrightarrow{PQ}$ genoteerd en dient wel te worden onderscheiden van de vector $\overrightarrow{QP}$. In figuren wordt $\overrightarrow{PQ}$ voorgesteld door een pijl: $P \longrightarrow Q$. De lijn PQ heet de *drager* van $\overrightarrow{PQ}$. Het is doelmatig ook vectoren toe te laten waarvan begin- en eindpunt samenvallen; zij heten nulvectoren. Omtrent de drager van een nulvector staat slechts vast dat hij gaat door het punt waarin begin- en eindpunt samenvallen; de richting van de drager blijft onbepaald. De getallen:

$$q_1 - p_1 = v_1,\ q_2 - p_2 = v_2,\ q_3 - p_3 = v_3$$

heten de *kengetallen* van de vector $\overrightarrow{PQ}$. Door de kengetallen alleen is $\overrightarrow{PQ}$ niet bepaald. Immers, met een willekeurig punt $A(a_1,a_2,a_3)$ als beginpunt is er juist één vector $\overrightarrow{AB}$ met v_1, v_2 en v_3 als kengetallen. Het geordende drietal getallen $\{v_1,v_2,v_3\}$ bepaalt dus een oneindige verzameling vectoren in de zin van onze naïeve definitie. We grijpen dit aan om van het begrip vector een meer abstracte definitie te geven.

Zij $\{v_1,v_2,v_3\}$ een geordend drietal reële getallen. Onder de *vrije vector* $\underline{v}$ met kengetallen v_1, v_2, v_3 verstaat men de verzameling van alle puntenparen $\{P(p_1,p_2,p_3),\ Q(q_1,q_2,q_3)\}$ waarvoor geldt

$$q_k - p_k = v_k \qquad (k = 1,2,3) .$$

Elk puntenpaar $\{P,Q\}$ dat tot $\underline{v}$ behoort, heet een *representant* van $\underline{v}$. We noteren zo'n paar als $\overrightarrow{PQ}$ en noemen het een *gebonden vector*: gebonden namelijk aan het beginpunt $\underline{P}$. Dat $\overrightarrow{PQ}$ een representant is van de vrije vector $\underline{v}$, kan als $\overrightarrow{PQ} \in \underline{v}$ worden genoteerd. De vrije vector $\underline{v}$ met kengetallen v_1, v_2 en v_3 zullen we vaak met (v_1,v_2,v_3) aanduiden. Tenzij uitdrukkelijk anders blijkt, zal met vector in dit college steeds vrije vector worden bedoeld.
De vectoren $\underline{v} = (v_1,v_2,v_3)$ en $\underline{w} = (w_1,w_2,w_3)$ heten gelijk (notatie: $\underline{v} = \underline{w}$) als $\underline{v}$ dezelfde verzameling is als $\underline{w}$, dus als $v_k = w_k$ $(k = 1,2,3)$. De vrije vector $\underline{p} = (p_1,p_2,p_3)$ heeft juist één representant $\overrightarrow{OP}$ met de oorsprong als beginpunt. Het eindpunt P heeft de coördinaten (p_1,p_2,p_3). Men noemt $\overrightarrow{OP}$ de *plaats- of positievector van* P. We zullen ons de vrijheid veroorloven voor het aangeven van een punt dikwijls alleen de vrije vector te gebruiken waarvan de positievector van dit punt een representant is. In bovenstaand voorbeeld ging het dus over *het punt* $\underline{p}$.
De vector $(0,0,0)$ wordt met $\underline{0}$ aangegeven en heet *de nulvector*. Het punt $\underline{0}$ is de oorsprong.

1.3. Het rekenen met vectoren I.

1.3.1. De *optelling* van de vectoren $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$ en $\underline{y} = (y_1,y_2,y_3)$ definiëren we door

$$\underline{x} + \underline{y} := (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3) .$$

Aanschouwelijk betekent dit: als $\overrightarrow{PQ} \in \underline{x}$ en $\overrightarrow{QR} \in \underline{y}$ dan is $\overrightarrow{PR}$ een representant van $\underline{x} + \underline{y}$. Met behulp van de definitie stelt men gemakkelijk vast dat de volgende rekenregels gelden:

01. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$.
02. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$.
03. $\underline{x} + \underline{o} = \underline{x}$.
04. Bij gegeven $\underline{x}$ en $\underline{y}$ bestaat één en slechts één vector $\underline{v}$ waarvoor $\underline{y} + \underline{v} = \underline{x}$; deze vector wordt als $\underline{x} - \underline{y}$ genoteerd en heet het *verschil* van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. De vector $\underline{v}$ waarvoor geldt $\underline{y} + \underline{v} = \underline{o}$ noteert men als $-\underline{y}$; deze vector heet de *tegengestelde* van $\underline{y}$.

1.3.2. Voor de *vermenigvuldiging van een vector* $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *met een getal* λ, die gedefinieerd wordt door

$$\lambda\underline{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

gelden de regels:

S1. $\lambda(\mu\underline{x}) = (\lambda\mu)\underline{x}$.

S2. $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$.

S3. $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$.

In sommige gevallen kan het de duidelijkheid ten goede komen in plaats van $\lambda\underline{x}$ te schrijven $\underline{x}\lambda$; bijvoorbeeld $\underline{x}\cos\alpha$ in plaats van $\cos\alpha\underline{x}$. Getallen worden ter onderscheiding van vectoren vaak *scalairen* genoemd.

1.3.3. Het *scalair* of *inwendig product* $(\underline{x},\underline{y})$ van de vectoren $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ wordt door

$$(\underline{x},\underline{y}) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

vastgelegd. Men noemt $(\underline{x},\underline{y})$ gelezen als $\underline{x}$ in $\underline{y}$ ook wel het *inproduct* van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Het volgt de rekenregels:

IP1. $(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{y},\underline{x})$.

IP2. $(\underline{x},\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x},\underline{y}) + (\underline{x},\underline{z})$.

IP3. $\lambda(\underline{x},\underline{y}) = (\lambda\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\lambda\underline{y})$.

Is $P(p_1,p_2,p_3)$ een willekeurig punt en $\vec{PQ}$ een representant van $\underline{x}$, dan wordt het punt Q aangewezen door de coördinaten $(p_1+x_1,\ p_2+x_2,\ p_3+x_3)$. Wegens (1.1.1) volgt hieruit $PQ^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (\underline{x},\underline{x})$. Elke representant van $\underline{x}$ heeft dus de lengte $(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}$. Men noemt $(\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}$ de lengte of de norm van $\underline{x}$; we geven deze met $|\underline{x}|$ aan. Bijgevolg is

$$(1.3.1)\qquad |\underline{x}|^2 = (\underline{x},\underline{x}) \geq 0\ .$$

De enige vector met norm nul is blijkbaar de nulvector. Een vector met norm 1 heet een *eenheidsvector*. Is $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan heet $|\underline{x}|^{-1}\underline{x}$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{x}$. We geven de op de coördinaatassen liggende punten (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) in deze volgorde met E_1, E_2 en E_3 aan en de eenheidsvector waarvan $\vec{OE_k}$ een representant is met $\underline{e}_k$ (k = 1,2,3). Deze vector heet de eenheidsvector langs de x_k-as.
De definitie van $(\underline{x},\underline{y})$ is gegeven met behulp van de kengetallen van $\underline{x}$ en $\underline{y}$, die afhangen van de keuze van het assenstelsel. Het is gemakkelijk in te zien dat het inproduct $(\underline{x},\underline{y})$ niet van deze keuze afhangt. Zij $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{y} \neq \underline{0}$, $\vec{AB} \in \underline{x}$ en $\vec{AC} \in \underline{y}$. Volgens de elementaire meetkunde hangt de hoek BAC alleen af van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ en niet van de in het oog gevatte representanten. We noemen deze hoek - die we verder met φ aangeven - dan ook *de hoek tussen* $\underline{x}$ *en* $\underline{y}$. Toepassing van een cosinusregel in ABC geeft:

$$(1.3.2)\qquad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\varphi\ .$$

Daar $\vec{CB}$ een representant is van $\underline{x} - \underline{y}$, is $BC^2 = (\underline{x} - \underline{y},\ \underline{x} - \underline{y})$.
Met behulp van de rekenregels kunnen we hiervoor schrijven:

$$(1.3.3)\qquad BC^2 = (\underline{x},\underline{x}) + (\underline{y},\underline{y}) - 2(\underline{x},\underline{y}) = AB^2 + AC^2 - 2(\underline{x},\underline{y})\ .$$

Uit (1.3.2) en (1.3.3) volgt $(\underline{x},\underline{y}) = AB.AC\cos\varphi$, of

$$(1.3.4)\qquad (\underline{x},\underline{y}) = |\underline{x}|.|\underline{y}|\cos\varphi\ .$$

Inderdaad hangt dus het inproduct niet af van de keuze van het assenstelsel. Dat dit ook nog geldt wanneer onder de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ de nulvector voorkomt, zal duidelijk zijn. Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geen van beide gelijk aan de nulvector dan leert (1.3.4) dat $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ een nodige en voldoende voorwaarde is opdat de hoek tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ recht is; men zegt dan dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ loodrecht op elkaar staan. Maakt men de afspraak dat de nulvector geacht wordt loodrecht op elke vector te staan, dan geldt: $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ is een nodige en voldoende voorwaarde opdat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ loodrecht op elkaar staan. We merken op dat voor de eenheidsvectoren langs de coördinaatassen geldt:

$$(\underline{e}_k, \underline{e}_\ell) = \delta_{k\ell} ,$$

waarin $\delta_{k\ell}$ het symbool van Kronecker is, gedefinieerd door

$$\delta_{k\ell} := \begin{cases} 1 \text{ als } k = \ell \\ 0 \text{ als } k \neq \ell . \end{cases}$$

1.4. Enkele meetkundige toepassingen

1.4.1. Zij A een punt met positievector $\underline{a}$ en $\underline{r} \neq \underline{0}$ een vrije vector. De drager van de representant $\overrightarrow{AB}$ van $\underline{r}$ geven we met ℓ aan. Het punt X ligt dan en alleen dan op ℓ als er een reëel getal λ bestaat, zodanig dat $\overrightarrow{AX} \in \lambda\underline{r}$, dat wil zeggen: als de positievector $\underline{x}$ van dit punt kan worden geschreven als

(1.4.1) $\quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{r} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Zoals bekend heet (1.4.1) een vectorvoorstelling van ℓ met λ als parameter. In deze voorstelling heet $\underline{a}$ een *steunvector* en $\underline{r}$ een *richtingsvector* van ℓ.

1.4.2. Zij $\underline{n} \neq \underline{0}$ een vector en γ een reëel getal. We wensen te onderzoeken de verzameling van het punt X waarvan de plaatsvector $\underline{x}$ voldoet aan $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma$. Om te beginnen kan worden vastgesteld dat deze verzameling niet leeg is. Substitueren we namelijk voor $\underline{x}$ de vector $\underline{x}_0 = \gamma(\underline{n},\underline{n})^{-1}\underline{n}$ dan blijkt $(\underline{n},\underline{x}_0) = \gamma$. Het punt X_0 aangewezen door de positievector $\underline{x}_0$ behoort dus tot de gezochte verzameling. In plaats van $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma$ kunnen we nu schrijven: $(\underline{n},\underline{x}) = (\underline{n},\underline{x}_0)$, dus $(\underline{n},\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$. Het punt X met positievector $\underline{x}$ behoort derhalve dan en alleen dan tot de verzameling als $\overrightarrow{X_0X}$ representant is van een vector die loodrecht op $\underline{n}$ staat, dus als X ligt in het vlak ν door X_0 loodrecht op $\underline{n}$. De gezochte verzameling is dus dit vlak en $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma$ heet de vergelijking van ν. Het punt X_0 is blijkbaar het snijpunt van ν met de loodlijn (*normaal*) door 0 op het vlak. Voor de afstand van 0 tot ν vindt men $|\underline{x}_0| = |\gamma|/|\underline{n}|$.

1.4.3. Onder een *lineaire combinatie* van een aantal vectoren $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ verstaat men een vector van de gedaante $\lambda_1\underline{v}_1 +\ldots+ \lambda_n\underline{v}_n$, waarin $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ reële getallen zijn. Een verzameling vectoren heet een *lineair afhankelijk stelsel* als er een lineaire combinatie van deze vectoren bestaat, waarbij niet alle coëfficiënten nul zijn, die gelijk is aan de nulvector. Volgens deze definitie is $\{\underline{0}\}$ een lineair afhankelijk stelsel, want $\lambda\underline{0} = \underline{0}$ voor elk reëel getal λ. Een stelsel vectoren dat niet lineair afhankelijk is, heet *lineair afhankelijk*.

1.4.4. De lezer wordt aangeraden zich ervan te overtuigen dat hij de juistheid van de volgende uitspraken kan bewijzen.

1) De lijn door de punten $\underline{a}$ en $\underline{b}$ ($\underline{a} \neq \underline{b}$) kan worden voorgesteld door $\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) De afstand van het punt $\underline{p}$ tot het vlak $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma$ is $|\underline{n}|^{-1}|(\underline{n},\underline{p}) - \gamma|$.
3) Is $\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\}$ een lineair afhankelijk stelsel en is $k > n$ dan is ook het stelsel $\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n,\underline{v}_{n+1},\ldots,\underline{v}_k\}$ lineair afhankelijk.
4) Elk stelsel vectoren waartoe de nulvector behoort is lineair afhankelijk.
5) In E_3 is het stelsel $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ dan en alleen dan lineair afhankelijk als de dragers van de representanten van $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_3$ alle evenwijdig zijn met eenzelfde vlak.
6) In E_3 zijn oneindig veel lineair onafhankelijke stelsels bestaande uit drie vectoren.
7) In E_3 is elk stelsel bestaande uit vier vectoren lineair afhankelijk.
8) Is $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ een lineair onafhankelijk stelsel vectoren in E_3 dan kan elke vector $\underline{x} \in E_3$ op een en slechts een wijze worden geschreven als $\underline{x} = \xi_1\underline{v}_1 + \xi_2\underline{v}_2 + \xi_3\underline{v}_3$.
9) Als een vector in E_3 loodrecht staat op drie lineair onafhankelijke vectoren van E_3, is deze vector de nulvector.
10) Is $\underline{u} \neq \underline{0}$ dan bestaat er bij elke vector $\underline{w}$ één en slechts één getal λ en één en slechts één vector $\underline{v}$ loodrecht op $\underline{u}$, zodanig dat $\underline{w} = \lambda\underline{u} + \underline{v}$. Het rechterlid van deze gelijkheid heet *de ontbinding van* $\underline{w}$ *langs en loodrecht op* $\underline{u}$; $\lambda\underline{u}$ en $\underline{v}$ heten de *componenten* van $\underline{w}$ bij deze ontbinding.

1.5. Het rekenen met vectoren II.

Van twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kan behalve het inproduct ook worden gevormd het *uitproduct* (ook genoemd *uitwendig product* of *vectorproduct*). Het uitproduct $\underline{x} \times \underline{y}$ (lees $\underline{x}$ uit $\underline{y}$) is een vector die op de volgende wijze wordt vastgelegd:

a) Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ lineair afhankelijk zijn:

$$\underline{x} \times \underline{y} := \underline{0} .$$

b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ lineair onafhankelijk, $\overrightarrow{PA} \in \underline{x}$ en $\overrightarrow{PB} \in \underline{y}$ dan is het vlak γ door PA en PB ondubbelzinnig bepaald.

We leggen nu de gebonden vector $\overrightarrow{PC}$ door de volgende drie eisen ondubbelzinnig vast:

1) $PC \perp \gamma$;

2) $\{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\}$ is een rechts driebeen;

3) de afstand van P en C is numeriek gelijk aan de oppervlakte van het parallelogram opgespannen door $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PB}$.

Tenslotte definiëren we: $\underline{x} \times \underline{y}$ *is de vector waarvan* $\overrightarrow{PC}$ *een representant is*. Blijkbaar is $\underline{x} \times \underline{y} \neq \underline{0}$ als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn. Is φ de hoek tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ - dus de hoek APB - dan geldt algemeen $|\underline{x} \times \underline{y}| = |\underline{x}|\,|\underline{y}| \sin \varphi$. Men kan y - indien $\underline{x} \neq \underline{0}$ is - ondubbelzinnig ontbinden in een component langs $\underline{x}$ en een component $\underline{y}_n$ loodrecht op $\underline{x}$. De definitie van vectorproduct houdt in dat $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{x} \times \underline{y}_n$. De volgende eigenschappen van het vectorproduct vloeien rechtstreeks voort uit de definitie

UP1. $\lambda(\underline{x} \times \underline{y}) = (\lambda\underline{x}) \times \underline{y} = \underline{x} \times (\lambda\underline{y})$.

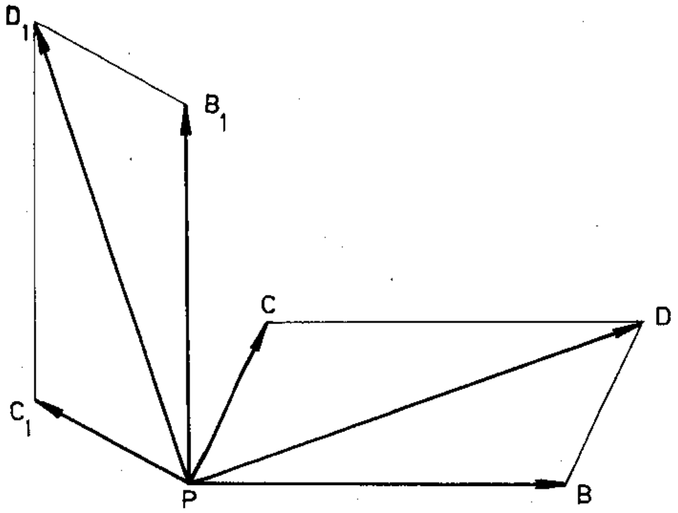
UP2. $\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$.

UP3. $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{0}$ is nodig en voldoende opdat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ lineair afhankelijk zijn.

Dat UP4

$$\underline{x} \times (\underline{y} + \underline{z}) = \underline{x} \times \underline{y} + \underline{x} \times \underline{z}\ , \tag{1.5.1}$$

is iets lastiger in te zien. Is een van de vectoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ de nulvector dan is (1.5.1) triviaal; ook als $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair afhankelijk zijn, is de juistheid ervan direct duidelijk. We veronderstellen daarom dat zich geen van deze bijzonderheden voordoet en ontbinden $\underline{y}$ zowel als $\underline{z}$ langs en loodrecht op $\underline{x}$ waardoor we krijgen $\underline{y} = \eta\underline{x} + \underline{y}_0$, $\underline{z} = \zeta\underline{x} + \underline{z}_0$. De ontbinding van $\underline{y} + \underline{z}$ langs en loodrecht op $\underline{x}$ luidt dan $\underline{y} + \underline{z} = (\eta + \zeta)\underline{x} + \underline{y}_0 + \underline{z}_0$. Dan valt dus nog te bewijzen: $\underline{x} \times (\underline{y}_0 + \underline{z}_0) = \underline{x} \times \underline{y}_0 + \underline{x} \times \underline{z}_0$, waarin $\underline{y}_0 \perp \underline{x}$, $\underline{z}_0 \perp \underline{x}$ en dus ook $\underline{y}_0 + \underline{z}_0 \perp \underline{x}$, terwijl mag worden aangenomen dat $\underline{y}_0$ en $\underline{z}_0$ lineair onafhankelijk zijn. Op grond van UP1 kan verder worden verondersteld dat $\underline{x}$ een eenheidsvector is. Zij P een willekeurig punt, $\overrightarrow{PA} \in \underline{x}$, $\overrightarrow{PB} \in \underline{y}_0$, $\overrightarrow{PC} \in \underline{z}_0$ en $\overrightarrow{PD} \in \underline{y}_0 + \underline{z}_0$. De zin van $\underline{x}$ kan steeds zo worden gekozen dat $\{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\}$ een rechts driebeen is. In figuur 1 is het vlak door PB en PC als tekenvlak gekozen, terwijl $\overrightarrow{PA}$ naar de beschouwer toe is gericht. De gebonden vectoren $\overrightarrow{PB}_1$, $\overrightarrow{PC}_1$ en $\overrightarrow{PD}_1$ zijn verkregen door $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ en $\overrightarrow{PD}$ over een hoek $\pi/2$ in gonio-



figuur 1

metrisch positieve zin (dat is dus: links om) te draaien. Dan is $\overrightarrow{PB}_1 \in \underline{x} \times \underline{y}_0$, $\overrightarrow{PC}_1 \in \underline{x} \times \underline{z}_0$ en $\overrightarrow{PD}_1 \in \underline{x} \times (\underline{y}_0 + \underline{z}_0)$. Hieruit besluit men tot $\underline{x} \times (\underline{y}_0 + \underline{z}_0) = \underline{x} \times \underline{y}_0 + \underline{x} \times \underline{z}_0$, waarmee de juistheid van UP4 is aangetoond.

Wij zijn nu in staat een eigenschap te bewijzen waardoor het uitproduct kan worden berekend uitgedrukt in kengetallen. Zij luidt:

UP5. Is $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dan is

$$\underline{x} \times \underline{y} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)\ .$$

Bewijs. We merken op dat $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$, $\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$, $\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$. Derhalve is:

$$\begin{aligned}\underline{x} \times \underline{y} &= (x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) \times (y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2 + y_3\underline{e}_3) = \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\underline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\underline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\underline{e}_3\ .\end{aligned}$$

Hieruit blijkt de juistheid van UP5.

We komen nu tot een tweetal productregels waarin drie vectoren een rol spelen. Voor elk drietal vectoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ kan men de producten $(\underline{x}, \underline{y} \times \underline{z})$ en $\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z})$ vormen. Van het eerste product is de uitkomst een scalair, van het tweede een vector. Beide producten zijn nul als $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair afhankelijk zijn en ook als $\underline{x} = \underline{0}$. We veronderstellen dat deze bijzonderheden niet optreden en beschouwen eerst $(\underline{x}, \underline{y} \times \underline{z})$. Dit inproduct is dan en alleen dan nul als $\underline{x} \perp (\underline{y} \times \underline{z})$, dus als de dragers van de representanten van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ evenwijdig zijn met eenzelfde vlak. Uit een en ander volgt *dat* $(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = 0$ *een nodige en voldoende voorwaarde is opdat* $\{\underline{x},\underline{y},\underline{z}\}$ *een lineair afhankelijk stelsel is.* We nemen verder aan dat dit laatste niet het geval is en stellen $\underline{y} \times \underline{z} = \underline{w}$, waarin dus $\underline{w} \neq \underline{0}$. Zij ψ de hoek tussen $\underline{x}$ en $\underline{w}$, dan is $(\underline{x},\underline{y} \times \underline{z}) = |\underline{x}|\,|\underline{w}|\cos\psi$. Zijn $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ en $\overrightarrow{PW}$ representanten van $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{x}$ en $\underline{w}$ dan is $\angle APW = \psi$ en dus is $|\underline{x}|\,|\cos\psi|$ de afstand van P tot de projectie D van A op de drager van $\overrightarrow{PW}$. Beschouwt men het parallelogram opgespannen door $\overrightarrow{PB}$ en $\overrightarrow{PC}$ als grondvlak van het blok dat door $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ en $\overrightarrow{PC}$ wordt opgespannen dan is PD dus de hoogte van dit blok. We vinden derhalve dat de absolute waarde van $(\underline{x},\underline{y} \times \underline{z})$ gelijk is aan de inhoud van het blok. We weten dat $\{\overrightarrow{PW},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\}$ een rechts driebeen is. Dus is $\{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\}$ een rechts of links driebeen al naar gelang $0 \leq \psi < \pi/2$ of $\pi/2 < \psi \leq \pi$, dus al naar gelang $\cos\psi > 0$ of $\cos\psi < 0$. Dit geeft als eindresultaat: $(\underline{x},\underline{y} \times \underline{z})$ *is gelijk aan de inhoud van een blok dat door drie representanten met hetzelfde beginpunt wordt opgespannen, voorzien van een plus- of minteken al naar gelang deze representanten een rechts of een links driebeen vormen.* Men kan dit ook nog volhouden als $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair afhankelijk zijn. Voor $(\underline{x},\underline{y} \times \underline{z})$ zullen we in het vervolg schrijven: $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$. De lezer bewijze:

$$(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = (\underline{y},\underline{z},\underline{x}) = (\underline{z},\underline{x},\underline{y})\,; \quad (\underline{x},\underline{y},\underline{u} + \underline{v}) = (\underline{x},\underline{y},\underline{u}) + (\underline{x},\underline{y},\underline{v})\ .$$

We gaan thans over tot de beschouwing van $\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z})$ in de veronderstelling dat $\underline{x} \neq \underline{0}$ is en $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair onafhankelijk zijn. Uit $(\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{x}),\underline{y} \times \underline{z}) = 0$ of: $(\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}),\underline{y},\underline{z}) = 0$ volgt dat $\{\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}),\underline{y},\underline{z}\}$ een lineair afhankelijk stelsel is. Er zijn dus getallen α, β en γ - niet alle nul - zodanig dat

$$\alpha\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} = \underline{0}\ .$$

Uit $\alpha = 0$ zou volgen $\beta\underline{y} + \gamma\underline{z} = \underline{0}$ waarin β en γ niet beide nul zijn. Dit is in strijd met de veronderstelling dat $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair onafhankelijk zijn. Dus $\alpha \neq 0$ en

$$\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = \lambda\underline{y} + \mu\underline{z}$$

met $\lambda = -\alpha^{-1}\beta$, $\mu = -\alpha^{-1}\gamma$. Uit deze betrekking volgt:

$$\lambda(\underline{x},\underline{y}) + \mu(\underline{x},\underline{z}) = (\underline{x},\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z})) = 0\ .$$

Derhalve is $\lambda = \nu(\underline{x},\underline{z})$, $\mu = -\nu(\underline{x},\underline{y})$ en

$$\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = \nu\{(\underline{x},\underline{z})\underline{y} - (\underline{x},\underline{y})\underline{z}\} .$$

De factor ν kan worden bepaald door vergelijking van de kengetallen van de vectoren die links en rechts van het gelijkteken staan. Zijn deze kengetallen niet alle nul dan vindt men $\nu = 1$; zijn ze wel alle nul dan kan ν ook gelijk aan 1 worden genomen. We vinden zo de belangrijke formule:

$$(1.5.2) \qquad \underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) = (\underline{x},\underline{z})\underline{y} - (\underline{x},\underline{y})\underline{z} .$$

Het is duidelijk dat deze ook geldt voor $\underline{x} = \underline{0}$. Dat zij ook juist is als $\underline{y}$ en $\underline{z}$ lineair afhankelijk zijn, blijkt als volgt. In dit geval is het linkerlid van (1.5.2) de nulvector en we kunnen $\underline{y} \neq \underline{0}$ veronderstellen, daar de juistheid voor $\underline{y} = \underline{0}$ evident is. Dan is $\underline{z} = \zeta\underline{y}$, zodat het rechterlid naar behoren overgaat in $\zeta(\underline{x},\underline{y})\underline{y} - \zeta(\underline{x},\underline{y})\underline{y} = \underline{0}$.
We geven nog een paar uitspraken waarvan we het bewijs aan de lezer overlaten:

$$\underline{x} \times (\underline{y} \times \underline{z}) + \underline{y} \times (\underline{z} \times \underline{x}) + \underline{z} \times (\underline{x} \times \underline{y}) = \underline{0} .$$

$$(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y}) = (\underline{x},\underline{x})(\underline{y},\underline{y}) - (\underline{x},\underline{y})^2 .$$

De snijlijn van de vlakken $(\underline{n}_1,\underline{x}) = 0$ en $(\underline{n}_2,\underline{x}) = 0$ waarin $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2 \neq \underline{0}$ is $\underline{x} = \lambda\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$.

1.6. Vectorvergelijkingen

We veronderstellen dat de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gegeven zijn en stellen de vraag alle vectoren $\underline{x}$ te bepalen waarvoor geldt: $\underline{x} \times \underline{b} = \underline{a}$. Het is duidelijk dat elke vector $\underline{x}$ hieraan voldoet als $\underline{a} = \underline{b} = \underline{0}$ en dat er geen enkele vector aan voldoet als $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} = \underline{0}$. *We veronderstellen daarom* $\underline{b} \neq \underline{0}$. Is $\underline{x}_0$ een vector waarvoor geldt $\underline{x}_0 \times \underline{b} = \underline{a}$ dan is $(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{x}_0 \times \underline{b},\underline{b}) = 0$. *Noodzakelijk* opdat de vergelijking $\underline{x} \times \underline{b} = \underline{a}$ in $\underline{x}$ oplossingen heeft, is dus $(\underline{a},\underline{b}) = 0$. We veronderstellen dat deze voorwaarde vervuld is. De opgave luidt nu dus: *Als* $\underline{b} \neq \underline{0}$ *en* $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ *bepaal dan alle oplossingen van*

$$(1.6.1) \qquad \underline{x} \times \underline{b} = \underline{a} .$$

We zijn direct klaar als $\underline{a} = \underline{0}$. Immers, nodig en voldoende voor $\underline{x} \times \underline{b} = \underline{0}$ is: $\underline{x} = \lambda\underline{b}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Stel daarom $\underline{a} \neq \underline{0}$. Is op de een of andere manier een oplossing $\underline{p}$ van (1.6.1) gevonden dan is $\underline{p} \times \underline{b} = \underline{a}$, zodat de vergelijking als $\underline{x} \times \underline{b} = \underline{p} \times \underline{b}$ of $(\underline{x} - \underline{p}) \times \underline{b} = \underline{0}$ kan worden geschreven met als oplossingen $\underline{x} = \underline{p} + \lambda\underline{b}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). We kunnen dit resultaat meetkundig interpreteren: als er één punt is waarvan de positievector $\underline{p}$ aan (1.6.1) voldoet, is er een rechte lijn door dit punt met de eigenschap dat de positievectoren van alle punten van deze lijn aan (1.6.1) voldoen. Deze lijn heeft - als zij bestaat - juist één steunvector $\underline{p}_0$ loodrecht op de lijn, dus loodrecht op $\underline{b}$. Uit het bovenstaande volgt dat het bestaan van deze lijn kan worden bewezen door aan te tonen dat er één en slechts één vector $\underline{p}_0$ bestaat waarvoor geldt: $\underline{p}_0 \times \underline{b} = \underline{a}$ en $(\underline{p}_0,\underline{b}) = 0$. Deze twee eisen houden in dat $\underline{p}_0$ loodrecht op $\underline{a}$ zowel als op $\underline{b}$ staat. Daar $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijk zijn, is $\underline{p}_0$ dus noodwendig van de vorm $\underline{p}_0 = \mu\underline{b} \times \underline{a}$. Het gaat er dus alleen nog om of er een getal μ bestaat, zodanig dat $\mu(\underline{b} \times \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a}$. Hiervoor kan men volgens (1.5.2) schrijven: $\mu\{(\underline{b},\underline{b})\underline{a} - (\underline{b},\underline{a})\underline{b}\} = \underline{a}$ of $\mu(\underline{b},\underline{b})\underline{a} = \underline{a}$. Wegens $\underline{a} \neq \underline{0}$ volgt hieruit $\mu = (\underline{b},\underline{b})^{-1}$. Bijgevolg is

$$(1.6.2) \qquad \underline{p}_0 = (\underline{b},\underline{b})^{-1}\underline{b} \times \underline{a}$$

de gezochte vector en de verzameling van alle oplossingen van (1.6.1) is gegeven door

$$(1.6.3) \qquad \underline{x} = \underline{p}_0 + \lambda\underline{b} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

Men ziet zonder moeite dat deze uitspraak ook geldt als $\underline{a} = \underline{0}$.
Het is nog wel de moeite waard de volgende meetkundige inkleding van dit resultaat te formuleren: *de verzameling van het punt waarvan de positievector* $\underline{x}$ *voldoet aan*

$$(1.6.4) \qquad \underline{x} \times \underline{b} = \underline{a},\ \underline{b} \neq \underline{0}\ (\underline{a},\underline{b}) = 0$$

is een rechte lijn die door $\underline{a}$ *en* $\underline{b}$ *ondubbelzinnig is bepaald.* De vectoren $\mu\underline{a}$ en $\mu\underline{b}$ waarin μ een willekeurig van nul verschillend reëel getal is, bepalen kennelijk dezelfde lijn als $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Men noemt $\underline{a}$ en $\underline{b}$ een tweetal *Plückervectoren* van de lijn en noteert de lijn als $[\underline{b},\underline{a}]$. Bij gebruik van deze notatie wordt stilzwijgend verondersteld dat $\underline{b} \neq \underline{0}$ en $(\underline{a},\underline{b}) = 0$. Wanneer de vergelijking van een rechte lijn gegeven is in de vorm $\underline{x} = \underline{c} + \lambda\underline{d}$ ($\underline{d} \neq \underline{0}$) kan als Plückervoorstelling worden gekozen $[\underline{d},\underline{c} \times \underline{d}]$. Dit volgt direct daaruit dat de algemene oplossing van $\underline{x} \times \underline{d} = \underline{c} \times \underline{d}$ of $(\underline{x} - \underline{c}) \times \underline{d} = \underline{0}$ luidt:

$\underline{x} = \underline{c} + \lambda\underline{d}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Van het werken met Plückervoorstelling geven we nog een tweetal voorbeelden.

Voorbeelden.

1) Laten $\underline{L}_1 = [\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_1^*]$ en $\underline{L}_2 = [\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_2^*]$ de Plückervoorstellingen zijn van twee rechte lijnen L_1 en L_2. Zij $\underline{p}_k$ een punt van L_k; dan is dus $\underline{\ell}_k^* = \underline{p}_k \times \underline{\ell}_k$ ($k = 1,2$). Noodzakelijk en voldoende opdat L_1 en L_2 in één vlak liggen, is dat de vectoren $\underline{\ell}_1$, $\underline{p}_2 - \underline{p}_1$ en $\underline{\ell}_2$ lineair afhankelijk zijn, dus dat $(\underline{\ell}_1, \underline{p}_2 - \underline{p}_1, \underline{\ell}_2) = 0$. Hiervoor kan men achtereenvolgens schrijven:

$$(\underline{\ell}_1,\underline{p}_2,\underline{\ell}_2) - (\underline{\ell}_1,\underline{p}_1,\underline{\ell}_2) = 0; \quad (\underline{\ell}_1,\underline{p}_2,\underline{\ell}_2) + (\underline{p}_1,\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2) = 0;$$

$$(\underline{\ell}_1,\underline{p}_2 \times \underline{\ell}_2) + (\underline{p}_1 \times \underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2) = 0 .$$

De laatste betrekking komt neer op:

$$(1.6.5) \qquad (\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2^*) + (\underline{\ell}_1^*,\underline{\ell}_2) = 0 .$$

Voor het linkerlid hiervan voeren we in het symbool $<\underline{L}_1,\underline{L}_2>$; blijkbaar is $<\underline{L}_1,\underline{L}_2> = <\underline{L}_2,\underline{L}_1>$. Nodig en voldoende opdat L_1 en L_2 in één vlak liggen, is dus

$$(1.6.6) \qquad <\underline{L}_1,\underline{L}_2> = 0 .$$

2) We beschouwen de vlakken $(\underline{n}_1,\underline{x}) = \gamma_1$ en $(\underline{n}_2,\underline{x}) = \gamma_2$ en veronderstellen dat $\underline{n}_1$ en $\underline{n}_2$ lineair onafhankelijk zijn. Dan hebben de vlakken een snijlijn $\underline{L}$ waarvan $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ een richtingsvector is. Voor een punt $\underline{x}$ geldt $\underline{x} \in \underline{L}$ dan en alleen dan als $\underline{x} \times (\underline{n}_1 \times \underline{n}_2) = (\underline{n}_2,\underline{x})\underline{n}_1 - (\underline{n}_1,\underline{x})\underline{n}_2 = \gamma_2\underline{n}_1 - \gamma_1\underline{n}_2$. Dus is $[\underline{n}_1 \times \underline{n}_2, \gamma_2\underline{n}_1 - \gamma_1\underline{n}_2]$ een voorstelling van $\underline{L}$ in Plückervectoren.
3) Als de vectoren $\underline{\ell}_1$ en $\underline{\ell}_2$ lineair onafhankelijk zijn, zijn de rechten $\underline{L}_k = [\underline{\ell}_k,\underline{\ell}_k^*]$ ($k = 1,2$) niet evenwijdig. Zij bezitten dan één loodrechte transversaal $\underline{T}$. Stelt men $\underline{\ell}_1 \times \underline{\ell}_2 = \underline{t}$ dan is

$$\underline{T} = [\underline{t}, \frac{(\underline{\ell}_1,\underline{\ell}_2)<\underline{L}_1,\underline{L}_2>}{(\underline{t},\underline{t})}\underline{t} + \underline{\ell}_1^* \times \underline{\ell}_2 + \underline{\ell}_1 \times \underline{\ell}_2^*]$$

een voorstelling van deze transversaal in Plückervectoren. Toon dit aan (verificatie is flauw; afleiding is de bedoeling; voorbeeld 2 kan van nut zijn).

4) Twee niet-evenwijdige rechten in één vlak hebben een snijpunt, twee evenwijdige rechten niet. Men kan echter, zoals bekend, ook aan twee evenwijdige rechten een "snijpunt" toekennen; dit punt wordt dan een oneindig ver, of beter: een *oneigenlijk punt* genoemd. Rechten met dezelfde richtingsvector gaan alle door hetzelfde oneigenlijke punt. Alle oneigenlijke punten van een plat vlak liggen op een rechte, de *oneigenlijke rechte* van dit vlak. Wie hier nooit van heeft gehoord, vindt een populaire uiteenzetting in O. Bottema, Meetkunde, gewoon en anders, Torusreeks, no. 7 (Wolters-Noordhoff, Groningen).
In de stereometrie kan men nu ook aan twee evenwijdige vlakken een snijlijn toekennen, namelijk de gemeenschappelijke oneigenlijke rechte van deze vlakken. Alle oneigenlijke rechten van de ruimte liggen in één vlak: het *oneigenlijke vlak*.
Twee evenwijdige vlakken kunnen worden voorgesteld door $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma_1$, $(\underline{n},\underline{x}) = \gamma_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Hun oneigenlijke snijlijn noemen we $\underline{L}_\infty$. Om hiervan de Plückervoorstelling te vinden, passen we met terzijdestelling van elk gewetensbezwaar de procedure van paragraaf 1.6 toe. Dan vinden we $[\underline{0},(\gamma_2 - \gamma_1)\underline{n}]$ of, dat wegens $\gamma_2 - \gamma_1 \neq 0$ op hetzelfde neerkomt, $[\underline{0},\underline{n}]$ als voorstelling van $\underline{L}_\infty$ in Plückervectoren. Dit brengt ons op de volgende gedachte. De voorstelling van een rechte in Plückervectoren is $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ met $(\underline{\ell},\underline{\ell}^*) = 0$ en $\ell \neq \underline{0}$; dit laatste omdat $\underline{\ell}$ richtingsvector is. We laten nu de eis dat de eerste vector in zulk een voorstelling geen nulvector is, vallen. Dat wil zeggen: ook $[\underline{0},\underline{n}]$ $(\underline{n} \neq \underline{0})$ beschouwen we als voorstelling in Plückervectoren van een rechte en wel van de *oneigenlijke rechte* van alle vlakken $(\underline{n},\underline{x}) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ter onderscheiding noemen we een rechte $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ met $\underline{\ell} \neq \underline{0}$ *eigenlijk*. Het is allemaal wat roekeloos.
Ter geruststelling:

a) Wanneer liggen een eigenlijke rechte $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ $(\underline{\ell} \neq \underline{0})$ en een oneigenlijke rechte $[\underline{0},\underline{n}]$ $(\underline{n} \neq \underline{0})$ in één vlak? Met toepassing van ons oude kriterium is dit dan en alleen dan het geval als $(\underline{\ell},\underline{n}) + (\underline{\ell}^*,\underline{0}) = (\underline{\ell},\underline{n}) = 0$. Dit is dus: als $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ evenwijdig is met het vlak $(\underline{n},\underline{x}) = 0$, of, als men dit liever ziet, in het vlak

$$(\underline{n},\underline{x}) = \frac{\det(\underline{n},\underline{\ell},\underline{\ell}^*)}{(\underline{\ell},\underline{\ell})}$$

ligt. Dit is precies in overeenstemming met de uiteenzetting aan het begin van deze paragraaf.

b) Twee oneigenlijke rechten $[\underline{0},\underline{n}_1]$ en $[\underline{0},\underline{n}_2]$ liggen "blijkens" $(\underline{0},\underline{n}_2) + (\underline{n}_1,\underline{0}) = 0$ steeds in één vlak. Dit klopt daarmee dat *alle* oneigenlijke rechten in één vlak liggen.

Geen tegenspraken dus tot zover en, hoewel de bovenstaande invoering van de oneigenlijke punten en rechten bepaald niet onberispelijk is (maar dit is geen meetkundeboek), achten we het wel verantwoord met de symbolen $[\underline{\ell},\underline{\ell}^*]$ ook als $\underline{\ell} = \underline{0}$, maar voor $\underline{\ell}^* \neq \underline{0}$, te rekenen zoals we hierboven hebben gedaan.

1.7. Speren

Zij $\underline{s} \neq \underline{0}$ een vrije vector. De deelverzameling van $\underline{s}$ gevormd door de representanten van $\underline{s}$ die dezelfde drager ℓ hebben, heet de speer met speervector $\underline{s}$ en drager ℓ. Een speer wordt ook een *glijdende vector* genoemd. We beschouwen een speer $\underline{S}$ (speervector $\underline{s}$, drager ℓ) waarvan de gebonden vector $\overrightarrow{AB}$ een representant moge zijn. De vrije vector $\underline{m}_x$ waarvan $\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{AB}$ een representant is, heet de momentvector van $\overrightarrow{AB}$ in het punt X. Is $\underline{a}$ de positievector van A en $\underline{x}$ die van X dan is $\underline{m}_x = (\underline{a} - \underline{x}) \times \underline{s} = \underline{a} \times \underline{s} - \underline{x} \times \underline{s}$. De vector $\underline{a} \times \underline{s} = \underline{s}^*$ hangt zoals we weten niet af van de keuze van de representant $\overrightarrow{AB}$ van $\underline{S}$. Dit geeft ons het recht de vector $\underline{m}_x = \underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}$ de *momentvector in* X *van de speer* $\underline{S}$ te noemen. Blijkbaar is $\underline{s}^*$ de momentvector van $\underline{S}$ in de oorsprong 0. Kortheidshalve noemen we $\underline{s}^*$ de momentvector van de speer. Door $\underline{s}$ en $\underline{s}^*$ is $\underline{S}$ ondubbelzinnig bepaald; we noteren $\underline{S} = [\underline{s},\underline{s}^*]$. Het rechterlid is meteen ook de voorstelling van de drager van $\underline{S}$ in Plückervectoren. De speren $[\underline{s}_1,\underline{s}_1^*]$ en $[\underline{s}_2,\underline{s}_2^*]$ zijn dan en slechts dan dezelfde speer (gelijk) als $\underline{s}_1 = \underline{s}_2$ en $\underline{s}_1^* = \underline{s}_2^*$. Merk op: $[\underline{s},\underline{s}^*]$ en $[\alpha\underline{s},\alpha\underline{s}^*]$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$ zijn als rechten dezelfde doch als speren verschillend, echter met dezelfde drager.

1.8. Scalair moment

We beschouwen twee speren $\underline{S}_k = [\underline{s}_k, \underline{s}_k^*]$ $(k = 1,2)$. Zij $\overrightarrow{A_kB_k}$ een representant van $\underline{S}_k$. Men noemt $\det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2B_2})$ het *scalaire* of *wederkerige moment* van $\overrightarrow{A_1B_1}$ en $\overrightarrow{A_2B_2}$. Het is onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel en bestand tegen verwisseling van $\overrightarrow{A_1B_1}$ en $\overrightarrow{A_2B_2}$. Is $\underline{a}_k$ de positievector van A_k dan is $\underline{s}_k^* = \underline{a}_k \times \underline{s}_k$ $(k = 1,2)$ en $\det(A_1B_1, A_1A_2, A_2B_2) = \det(\underline{s}_1, \underline{a}_2 - \underline{a}_1, \underline{s}_2) = \det(\underline{s}_1, \underline{a}_s, \underline{s}_2) + \det(\underline{a}_1, \underline{s}_1, \underline{s}_2) = (\underline{s}_1, \underline{a}_2 \times \underline{s}_2) + (\underline{a}_1 \times \underline{s}_1, \underline{s}_2) = (\underline{s}_1, \underline{s}_2^*) + (\underline{s}_1^*, \underline{s}_2)$. In deze uitkomst herinnert niets meer aan de speciale keuze van de representanten. We kunnen $\det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2B_2})$ dus zonder bezwaar het *scalaire moment van de speren* $\underline{S}_1$ *en* $\underline{S}_2$ noemen en noteren dit (zie 1.6) als $<\underline{S}_1, \underline{S}_2>$. Bijgevolg:

$$<\underline{S}_1, \underline{S}_2> = <\underline{S}_2, \underline{S}_1> = (\underline{s}_1, \underline{s}_2^*) + (\underline{s}_1^*, \underline{s}_2) .$$

$<\underline{S}_1, \underline{S}_2> = 0$ is noodzakelijk en voldoende opdat de speerdragers in één vlak liggen.

Is $\underline{L} = [\underline{\ell}, \underline{\ell}^*]$ de genormeerde voorstelling in Plückervectoren van een rechte lijn en $\underline{S}$ een speer dan heet $<\underline{S}, \underline{L}>$ het *moment van* $\underline{S}$ *om* $\underline{L}$. Is $\underline{x}$ een punt van $\underline{L}$, zodat dus $\underline{\ell}^* = \underline{x} \times \underline{\ell}$, dan is: $<\underline{S}, \underline{L}> = (\underline{s}, \underline{\ell}^*) + (\underline{s}^*, \underline{\ell}) = (\underline{s}, \underline{x} \times \underline{\ell}) + (\underline{s}^*, \underline{\ell}) = (\underline{\ell}, \underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}) = (\underline{\ell}, \underline{m}_x)$. Om welke lijn door X is dus de absolute waarde van het moment van $\underline{S}$ maximaal? *(As van maximaalmoment)*. Wat is de verzameling van de lijnen door X waarom het moment van $\underline{S}$ nul is? De momenten van de speer $\underline{S} = [\underline{s}, \underline{s}^*]$ om de positieve coördinaatassen zijn juist de kengetallen van $\underline{s}^*$. We zullen ook speren toelaten van de vorm $[\underline{0}, \underline{m}]$ $(\underline{m} \neq \underline{0})$; zij hebben de nulvector als speervector en een oneigenlijke drager. Toepassing van $\underline{m}_x = \underline{s}^* - \underline{x} \times \underline{s}$ doet zien dat zo'n oneigenlijke speer in elk punt dezelfde momentvector heeft. Het is verder doelmatig ook de nulspeer $[\underline{0}, \underline{0}]$ in te voeren; de drager hiervan is onbepaald.

Opgaven bij hoofdstuk 1.

1. Zijn $\underline{u} \neq \underline{0}$ en $\underline{v}$ gegeven vectoren dan is er één en slechts één vector $\underline{w}$ en één en slechts één scalair λ, zodanig dat

   (1.4.1) $(\underline{u},\underline{w}) = 0$ en $\underline{v} = \lambda\underline{u} + \underline{w}$.

   (Mogelijkheid en ondubbelzinnigheid van het ontbinden van een vector in een gegeven richting en loodrecht hierop.)
   Aanw. Als enige mogelijke waarde voor λ geeft (1.4.1): $\lambda = -(\underline{u},\underline{u})^{-1}(\underline{u},\underline{v})$, enz.

2. Bewijs dat

   $$|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2|\underline{v}|^2 - (\underline{u},\underline{v})^2 .$$

   Aanw. $|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = (\underline{u} \times \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{u},\underline{v} \times (\underline{u} \times \underline{v}))$ en verder met (1.3.2).

3. Bewijs:

   $$\det(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \underline{c}, \underline{d}) = (\underline{a},\underline{d})\det(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) .$$

4. Bewijs dat voor elk drietal vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ geldt:

   $$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0} .$$

5. Los $\underline{x}$ op uit $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{0}$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$.
   Antw. $\underline{x} = \lambda\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Meetkundige interpretatie: de verzameling van het punt $\underline{x}$ met $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{0}$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$ is een lijn met richtingsvector $\underline{a}$ door de oorsprong.

6. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$ en $\underline{b}$. Gevraagd: discussie van de vergelijking $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$ in $\underline{x}$.
   Aanw. Voor $\underline{b} = \underline{0}$ vorige opgave. Neem dus $\underline{b} \neq \underline{0}$. Als $\underline{x}_0$ een oplossing is, geldt $\underline{x}_0 \times \underline{a} = \underline{b}$ en dus $(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a}, \underline{x}_0 \times \underline{a}) = 0$. *Noodzakelijk* voor het bestaan van oplossingen is dus $(\underline{a},\underline{b}) = 0$. Veronderstel dat hieraan voldaan is en dat $\underline{x}_0$ een oplossing is, dan is $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{x}_0 \times \underline{a}$, of $(\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{a} = \underline{0}$ zodat $\underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda\underline{a}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$ alle oplossingen weergeeft. Slordig gezegd: als er één oplossing is, bestaat er een rechte lijn van oplossingen met $\underline{a}$ als richtingsvector en de bedoelde oplossing als steunvector. Nu heeft elke rechte juist één steunvector die loodrecht op de rechte staat. Dit brengt ons ertoe het bestaan van tenminste een oplossing te bewijzen door aan te tonen dat er één en slechts één vector $\underline{p}$ bestaat waarvoor geldt $\underline{p} \times \underline{a} = \underline{b}$ en $(\underline{p},\underline{a}) = 0$

(nog steeds in de veronderstelling $\underline{a} \neq \underline{0}$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$, $\underline{b} \neq \underline{0}$). Daar $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijk zijn en $\underline{p}$ loodrecht op $\underline{a}$ zowel als $\underline{b}$ moet staan, heeft $\underline{p}$ de gedaante $\mu\underline{a} \times \underline{b}$, waarin μ moet worden bepaald uit $\mu(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = \underline{b}$ of $\mu(\underline{a},\underline{a})\underline{b} = \underline{b}$. Dus is $\mu = (\underline{a},\underline{a})^{-1}$ en $\underline{p} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b}$.

Conclusie: alle oplossingen van $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\underline{a} \neq 0$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ zijn vervat in $\underline{x} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \lambda\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; dit resultaat geldt ook als $\underline{b} = \underline{0}$. Meetkundig: *de verzameling van het punt* $\underline{x}$ *met* $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\underline{a} \neq \underline{0}$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ *is de lijn* $\underline{x} = (\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \lambda\underline{a}$.

7. Gegeven de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$, $\underline{n} \neq \underline{0}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en het getal γ. Gevraagd: discussie van het stelsel vergelijkingen in $\underline{x}$:

$$\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}, \quad (\underline{n},\underline{x}) = \gamma \ .$$

Meetkundig: onderlinge ligging van lijn en vlak.

Antw. $(\underline{n},\underline{a}) \neq 0$: 1 oplossing; lijn snijdt vlak; $(\underline{n},\underline{a}) = 0$, $\gamma(\underline{a},\underline{a}) \neq \det(\underline{n},\underline{a},\underline{b})$: geen oplossing; lijn||vlak; $(\underline{n},\underline{a}) = 0$, $\gamma(\underline{a},\underline{a}) = \det(\underline{n},\underline{a},\underline{b})$: alle oplossingen van $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, lijn in het vlak.

8. Gegeven de vectoren $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$ en $\underline{d}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$, $(\underline{c},\underline{d}) = 0$. Gevraagd: discussie van het simultane stelsel vergelijkingen in $\underline{x}$:

$$\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}, \ \underline{x} \times \underline{c} = \underline{d} \ .$$

Aanw. Het stelsel heeft dan en alleen dan een oplossing als er getallen λ en μ bestaan, zodanig dat

$$\frac{\underline{a} \times \underline{b}}{(\underline{a},\underline{a})} + \lambda\underline{a} = \frac{\underline{c} \times \underline{d}}{(\underline{c},\underline{c})} + \mu\underline{c} \ . \tag{1.4.2}$$

Uit het bestaan van zulk een tweetal getallen volgt:

$$\frac{(\underline{a} \times \underline{c},\ \underline{a} \times \underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})} = \frac{(\underline{a} \times \underline{c},\ \underline{c} \times d)}{(\underline{c},\underline{c})} \ ,$$

of, na enige herleiding: $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) = 0$. Deze voorwaarde is dus noodzakelijk voor oplosbaarheid. We veronderstellen dat zij vervuld is. Uit (1.4.2) vindt men

$$\frac{(\underline{a} \times \underline{b},\ \underline{d})}{(\underline{a},\underline{a})} + \lambda(\underline{a},\underline{d}) = 0 \ .$$

Is $(\underline{a},\underline{d}) \neq 0$, en dus ook $(\underline{b},\underline{c}) \neq 0$, dan is

$$-\frac{(\underline{a} \times \underline{b},\ \underline{d})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{a},\underline{d})}$$

de enig mogelijke waarde voor λ. Men vindt dan

$$\frac{(\underline{a},\underline{d})\underline{a} \times \underline{b} - (\underline{a} \times \underline{b},\ \underline{d})\underline{a}}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{a},\underline{d})} = \frac{\underline{d} \times \underline{b}}{(\underline{a},\underline{d})} = \frac{\underline{b} \times \underline{d}}{(\underline{b},\underline{c})}$$

als enige oplossing (snijdende lijnen).
Is $(\underline{a},\underline{d}) = 0 = (\underline{b},\underline{c})$ dan onderscheiden we 2 gevallen:

a) $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair onafhankelijk. Dan zijn er getallen β en δ zodanig dat $\underline{b} = \beta\underline{c} \times \underline{a}$ en $\underline{d} = \delta\underline{a} \times \underline{c}$. Er is nu dan en alleen dan een oplossing als λ en μ kunnen worden bepaald uit $\beta\underline{c} + \lambda\underline{a} = \delta\underline{a} + \mu\underline{c}$. Dit is maar op een manier mogelijk: $\lambda = \delta$, $\mu = \beta$. Enige oplossing $\delta\underline{a} + \beta\underline{c}$ (snijdende lijnen).

b) $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair afhankelijk. Zij $\underline{c} = \nu\underline{a}$ $(\nu \neq 0)$. De vergelijkingen zijn nu: $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{b}$, $\nu\underline{x} \times \underline{a} = \underline{d}$. Noodzakelijk en voldoende voor oplosbaarheid: $\underline{d} = \nu\underline{b}$. Oneindig veel oplossingen (samenvallende lijnen). Voor $\underline{c} = \nu\underline{a}$, $\underline{d} \neq \nu\underline{b}$ geen oplossing (evenwijdige lijnen).

Tenslotte het geval $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) \neq 0$. Er is geen oplossing. De vectoren $\underline{a}$ en $\underline{c}$ zijn lineair onafhankelijk. Immers $\underline{c} = \nu\underline{a}$ $(\nu \neq 0)$ leidt tot $0 = (\underline{a},\underline{b}) = \nu^{-1}(\underline{c},\underline{b})$ en $0 = (\underline{c},\underline{d}) = \nu(\underline{a},\underline{d})$ waaruit volgt: $(\underline{b},\underline{c}) = (\underline{a},\underline{d}) = 0$ wat absurd is. Meetkundig: de lijnen kruisen elkaar.
Merk op: $(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{a},\underline{d}) = 0$ is nodig en voldoende opdat de lijnen in een vlak liggen.

9. Gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en het getal $\alpha \neq 0$. Los $\underline{x}$ op uit:

$$\alpha\underline{x} + (\underline{b},\underline{x})\underline{a} = \underline{c}\ .$$

<u>Aanw.</u> $\alpha(\underline{b},\underline{x}) + (\underline{a},\underline{d})(\underline{b},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{c})$; als $(\underline{a},\underline{b}) \neq -\alpha$ eenvoudig. Als $(\underline{a},\underline{b}) = -\alpha$ dan geen oplossing als $(\underline{b},\underline{c}) \neq 0$. Als $(\underline{a},\underline{b}) = -\alpha$, $(\underline{b},\underline{c}) = 0$ dan $\underline{x} = \alpha^{-1}(\underline{c} - \lambda\underline{a})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Gegeven de $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$. Los $\underline{x}$ op uit: $\underline{x} \times \underline{a} + (\underline{b},\underline{x})\underline{c} = \underline{d}$.
<u>Aanw.</u> Als $(\underline{a},\underline{c}) \neq 0$ kan men $(\underline{b},\underline{x})$ vinden, enz. Geen oplossing als $(\underline{a},\underline{c}) = 0$, $(\underline{a},\underline{d}) \neq 0$. Voor $(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{a},\underline{d}) = 0$:

$$\underline{x} = \frac{\underline{a} \times (\underline{d} - \lambda\underline{c})}{(\underline{a},\underline{a})} + \mu\underline{a},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\ .$$

11. Los $\underline{x}$ op uit $\underline{a} + \underline{x} \times \underline{b} + \underline{c} \times (\underline{c} \times \underline{x}) = \underline{0}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$).
<u>Aanw.</u> $(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{b},\underline{c})(\underline{c},\underline{x}) - (\underline{c},\underline{c})(\underline{b},\underline{x}) = 0$ (α); $(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{c} \times \underline{b}, \underline{x})$ (β); $(\underline{a},\underline{b} \times \underline{c}) + (\underline{b},\underline{c})(\underline{b},\underline{x}) - (\underline{b},\underline{b})(\underline{c},\underline{x}) + (\underline{c},\underline{c})(\underline{c} \times \underline{b}, \underline{x})$ (γ). Uit (α), (β) en (γ)

$$|\underline{b} \times \underline{c}|^2(\underline{b},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{b})(\underline{a},\underline{b}) + (\underline{c},\underline{c})(\underline{b},\underline{c})(\underline{a},\underline{c}) - (\underline{b},\underline{c})(\underline{a},\underline{c} \times \underline{b}) ,$$

$$|\underline{b} \times \underline{c}|^2(\underline{c},\underline{x}) = (\underline{a},\underline{b})(\underline{b},\underline{c}) + (\underline{c},\underline{c})^2(\underline{a},\underline{c}) - (\underline{c},\underline{c})(\underline{a},\underline{c} \times \underline{b}) .$$

Als $\underline{b}$ en $\underline{c}$ lineair onafhankelijk zijn vindt men hieruit $(\underline{b},\underline{x})$ en $(\underline{c},\underline{x})$. Zij ter afkorting $(\underline{b},\underline{x}) = \delta$, $(\underline{c},\underline{x}) = \varepsilon$ dan wordt de vergelijking: $\underline{d} + \underline{x} \times \underline{b} - (\underline{c},\underline{c})\underline{x} = \underline{0}$, waarin $\underline{d} = a + \varepsilon\underline{c}$. Dus $\underline{b} \times \underline{d} + (\underline{b},\underline{b})x - \delta\underline{b} + (\underline{c},\underline{c})\underline{x} \times \underline{b} = \underline{0}$. Derhalve: $\underline{b} \times \underline{d} + (\underline{b},\underline{b})\underline{x} - \delta\underline{b} - (\underline{c},\underline{c})d + (\underline{c},\underline{c})^2\underline{x} = \underline{0}$, waaruit $\underline{x}$ kan worden opgelost. Zijn $\underline{b}$ en $\underline{c}$ lineair afhankelijk, dan luidt (met $\underline{c} = \nu\underline{b}$) de vergelijking: $\underline{a} + \underline{x} \times \underline{b} + \nu^2(\underline{b},\underline{x})\underline{b} - \nu^2(\underline{b},\underline{b})\underline{x} = \underline{0}$ zodat $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ noodzakelijk is voor oplosbaarheid. Men vindt nu

$$\underline{x} \times \underline{b} = -\frac{\underline{a} + \nu^2\underline{b} \times \underline{a}}{\nu^4(\underline{b},\underline{b}) + 1} \text{, enz .}$$

12. Gegeven de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ met $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en de getallen α en β met $\alpha\beta \neq 0$.
Los $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op uit het stelsel: $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \underline{a}$, $\underline{x} \times \underline{y} = \underline{b}$.
<u>Antw.</u> Als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijk zijn:

$$\underline{x} = \beta(\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} + \alpha^{-1}\underline{a},\ \underline{y} = -\alpha(\underline{a},\underline{a})^{-1}\underline{a} \times \underline{b} ;$$

Als $\underline{a} = 0$, $\underline{b} \neq \underline{0}$: geen oplossingen.
Als $\underline{a} \neq 0$, $\underline{b} = \underline{0}$: $\underline{x} = \lambda\underline{a}$, $\underline{y} = \beta^{-1}(1 - \lambda\alpha)\underline{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Als $\underline{a} = 0$, $\underline{b} = 0$: $\underline{x}$ willekeurig; $y = -\beta^{-1}\alpha\underline{x}$.

13. Als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ lineair onafhankelijke vectoren zijn, volgt uit $\underline{x} \times \underline{a} = \underline{y} \times \underline{b}$ dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ lineaire combinaties zijn van $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Bewijs dit.

2. Beginselen van de kinematica

2.1. Zij V een Euclidische ruimte waarin $Ox_1x_2x_3$ een orthonormaal rechts assenstelsel is. Een punt X *beweegt* ten opzichte van dit assenstelsel als zijn positievector $\underline{x}$ een niet-constante functie is van een scalaire parameter t die gewoonlijk de *tijd* wordt genoemd. Omtrent deze parameter veronderstellen we dat ze elk reëel interval continu kan doorlopen. Is $\underline{x}$ niet afhankelijk van t dan heet X *in rust* ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$.
We definiëren de volgende limiet:

$$\lim_{t\to t_0} \underline{x}(t) := (\lim_{t\to t_0} x_1(t), \lim_{t\to t_0} x_2(t), \lim_{t\to t_0} x_3(t))$$

mits de drie limieten in het rechterlid bestaan.
De vectorfunctie $\underline{x}(t)$ heet continu voor $t = t_0$ als

$$\lim_{t\to t_0} \underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) .$$

Als de kengetallen $x_k(t)$ $(k = 1,2,3)$ van $\underline{x}(t)$ differentieerbare functies zijn, geven we de definitie:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} := (\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}) .$$

Bijgevolg (als de punt differentiëren naar t betekent)

$$\dot{\underline{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{x}(t + h) - \underline{x}(t)}{h} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) .$$

(Voor de uitspraak: $\dot{\underline{x}}$ is fluksie iks.)
Voor het differentiëren van vectoren gelden dus dezelfde regels als voor het differentiëren van scalaire functies. Bijvoorbeeld:

$$(\underline{u} \dot{+} \underline{v}) = (\dot{\underline{u}} + \dot{\underline{v}})$$

$$(\underline{u} \dot{,} \underline{v}) = (\dot{\underline{u}}, \underline{v}) + (\underline{u}, \dot{\underline{v}})$$

$$(\underline{u} \dot{\times} \underline{v}) = \dot{\underline{u}} \times \underline{v} + \underline{u} \times \dot{\underline{v}} .$$

Voor een van t onafhankelijke differentieerbare vector $\underline{x}(t)$ met constante lengte c volgt uit $(\underline{x}(t), \underline{x}(t)) = c^2$ dat $(\dot{\underline{x}}, \underline{x}) = 0$.

De afgeleide vector staat dus loodrecht op de gegeven vector.
We leggen verder vast:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{x}(t)dt := \left(\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)dt, \int_{t_1}^{t_2} x_2(t)dt, \int_{t_1}^{t_2} x_3(t)dt\right) .$$

Voorbeeld: Zij

$$\underline{x}(t) = (\cos \varphi(t) \sin \theta(t), \sin \varphi(t) \sin \theta(t), \cos \theta(t))$$

dan:

$$\begin{aligned}(\underline{x},\underline{x}) &= \cos^2\varphi \sin^2\theta + \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta = \\ &= \sin^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta = \\ &= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 .\end{aligned}$$

Verder:

$$\dot{\underline{x}}(t) = (-\dot\varphi \sin \varphi \sin \theta + \dot\theta \cos \varphi \cos \theta, \dot\varphi \cos \varphi \sin \theta + \dot\theta \sin \varphi \cos \theta, -\dot\theta \sin \theta)$$

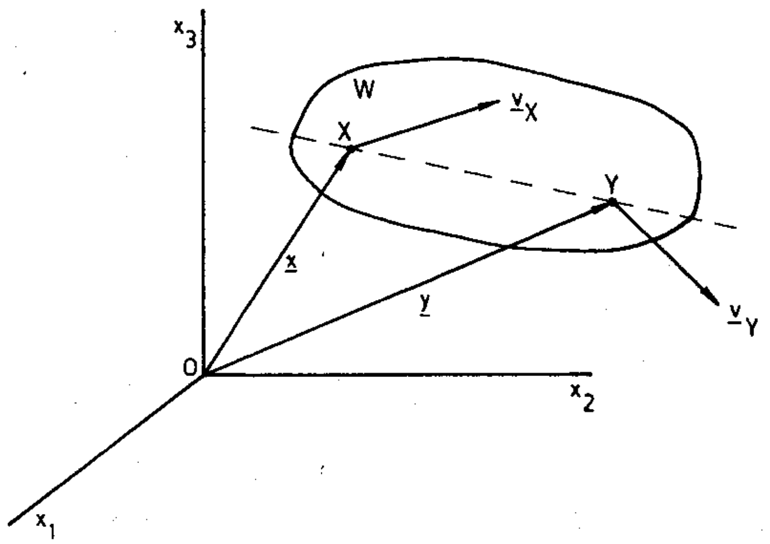
$$\begin{aligned}(\underline{x},\dot{\underline{x}}) &= -\dot\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin^2\theta + \dot\theta \cos^2\varphi \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \dot\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin^2\theta + \dot\theta \sin^2\varphi \sin \theta \cos \theta \\ &- \dot\theta \sin \theta \cos \theta = \\ &= \dot\theta \sin \theta \cos \theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1) = 0 .\end{aligned}$$

2.2. De verzameling van de punten van de ruimte waarmee een bewegend punt X gedurende zijn beweging samenvalt, heet de *baan* van het punt. Deze baan (die niet geheel in één vlak hoeft te liggen) heeft een parametervoorstelling van de vorm $\underline{x} = \underline{x}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$; hierin kan t_1 ook het symbool $-\infty$ en t_2 het symbool $+\infty$ zijn.
Onder de *snelheid* $\underline{v}(t)$ van X op het tijdstip t verstaat men de vector $\dot{\underline{x}}(t)$. Zonder gevaar voor misverstand maakt men zich meestal schuldig aan de slordige notatie $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$. De snelheidsvector $\underline{v}$ is evenwijdig met de raaklijn aan de baan. Per definitie is de *versnelling* $\underline{a}$ van het punt X gegeven door:
$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{x}}$.

<u>Twee voorbeelden:</u>

1) De snelheid van een bewegend punt X is constant: $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \underline{c}$.
   Voor de positie van X volgt dan: $\underline{x}(t) = \underline{x}(0) + t\underline{c}$. De baan is een rechte lijn.
2) De versnelling van een bewegend punt X is constant: $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{x}} = \underline{k}$.
   Voor de snelheid van X volgt: $\underline{v}(t) = \underline{v}(0) + t\underline{k}$, en voor de positie: $\underline{x}(t) = \underline{x}(0) + t\underline{v}(0) + \frac{1}{2}t^2\underline{k}$. Eenvoudig volgt: $(\underline{x}(t), \underline{v}(0) \times \underline{k}) =$
   $= (\underline{x}(0), \underline{v}(0) \times \underline{k}) =$ constant. De baan ligt in een plat vlak.

2.3. We beschouwen thans een verzameling punten die zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ bewegen, doch waarvan de afstand tussen elk tweetal punten van het stelsel onveranderlijk is. Zulk een verzameling heet een *star stelsel*. Het is doelmatig met dit stelsel een Euclidische ruimte W vast verbonden te denken. Deze ruimte valt voortdurend samen met de oorspronkelijke ruimte V, doch beweegt ten opzichte van V. We zullen dan ook spreken van de beweging W/V. Een punt X van W valt op het tijdstip t samen met een punt $\underline{x}$ van V en heeft dan de snelheid $\dot{\underline{x}}$. Zo wordt door de beweging W/V aan elk punt $\underline{x}$ van V een snelheidsvector $\dot{\underline{x}} = \underline{v}_X$ toegevoegd. We hebben hier te maken met een vectorveld, dat we het *snelheidsveld* zullen noemen.

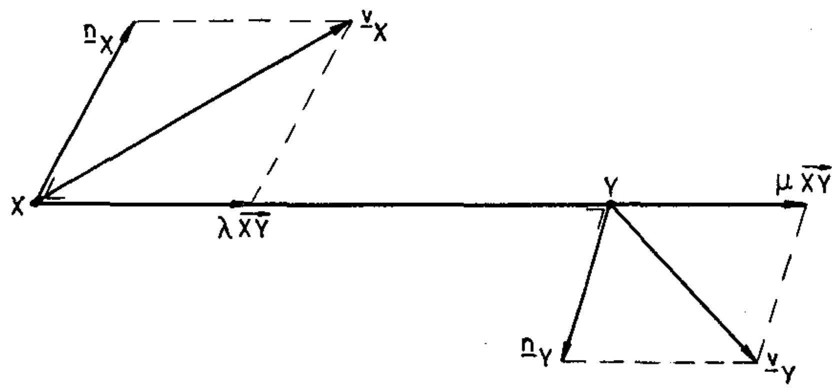


Daar voor twee verschillende punten X en Y de uitdrukking $(\underline{x}(t) - \underline{y}(t), \underline{x}(t) - \underline{y}(t))$ een constante is, en dus niet van t afhangt, geldt: $(\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{y}}, \underline{x} - \underline{y}) = 0$, ofwel: $(\underline{v}_X - \underline{v}_Y, \underline{x} - \underline{y}) = 0$.

Bij de beweging van een star stelsel heeft het snelheidsveld dus de volgende *fundamentele eigenschap:* voor elk tweetal punten X en Y van het stelsel geldt identiek in t:

(2.3.1) $(\underline{v}_X - \underline{v}_Y, \underline{x} - \underline{y}) = 0$.

Het kan voorkomen dat een stelsel W dat niet star is zich zo beweegt dat het snelheidsveld de fundamentele eigenschap heeft (zie het voorbeeld in 2.10). In dit geval geldt voor elk tweetal punten X en Y identiek in t dus $(\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{y}}, \underline{x} - \underline{y}) = 0$ zodat $(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})$ constant is. De afstand XY blijft dus gedurende de beweging dezelfde. Men zegt nu dat dit stelsel, zij het dan niet star, een *starre beweging* heeft.



Een formulering van de fundamentele eigenschap die gelijkwaardig is met (2.3.1) verkrijgen we als volgt. Ontbinden we $\underline{v}_X$ en $\underline{v}_Y$ langs en loodrecht op XY dan vinden we:

(2.3.2) $\underline{v}_X = \underline{n}_X + \lambda\overrightarrow{XY}, \ \underline{v}_Y = \underline{n}_Y + \mu\overrightarrow{XY}$

waarin $\underline{n}_X$ en $\underline{n}_Y$ loodrecht op XY staan.
Hierdoor gaat (2.3.1) over in:

$$(\underline{n}_X - \underline{n}_Y + \lambda\overrightarrow{XY} - \mu\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{YX}) = 0 \Rightarrow (\mu - \lambda)(\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XY}) = 0$$

en dus (voor $X \neq Y$) : $\lambda = \mu$. Omgekeerd volgt uit $\lambda = \mu$ en (2.3.2):

$$(\underline{v}_X - \underline{v}_Y, \underline{x} - \underline{y}) = (\underline{n}_X - \underline{n}_Y, \underline{x} - \underline{y}) = 0 .$$

De fundamentele eigenschap is dus gelijkwaardig met de uitspraak dat de projecties van $\underline{v}_X$ en $\underline{v}_Y$ op de lijn XY gelijk zijn. Men zegt daarom dan ook dat een starre beweging gekarakteriseerd wordt door een equiprojectief snelheidsveld.

2.4. We verdiepen ons nog wat nader in de structuur van het snelheidsveld van een starre beweging. Zijn A, B en C (positievectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$) drie niet op één lijn gelegen punten dan is op het tijdstip t waarop we de beweging beschouwen:

$$(\underline{a} - \underline{b}, \underline{v}_A - \underline{v}_B) = 0, \ (\underline{a} - \underline{c}, \underline{v}_A - \underline{v}_C) = 0 .$$

Dit brengt ons ertoe de rechten

$$\underline{L}_1 = [\underline{a} - \underline{b}, \underline{v}_A - \underline{v}_B] \text{ en } \underline{L}_2 = [\underline{a} - \underline{c}, \underline{v}_A - \underline{v}_C]$$

te beschouwen. Zij zijn eigenlijk en niet evenwijdig.
Verder is

$$\langle \underline{L}_1, \underline{L}_2 \rangle = (\underline{a}-\underline{b}, \underline{v}_A - \underline{v}_C) + (\underline{a}-\underline{c}, \underline{v}_A - \underline{v}_B) = (\underline{a}-\underline{b}, \underline{v}_B - \underline{v}_C) +$$

$$+ (\underline{a}-\underline{c}, \underline{v}_C - \underline{v}_B) = (\underline{c}-\underline{b}, \underline{v}_B - \underline{v}_C) = 0 .$$

Dus snijden $\underline{L}_1$ en $\underline{L}_2$ elkaar. De positievector van het snijpunt is representant van een vrije vector die we met $\underline{\omega}$ aangeven. Men heeft nu $\underline{v}_A - \underline{v}_B = \underline{\omega} \times (\underline{a} - \underline{b})$ en $\underline{v}_A - \underline{v}_C = \underline{\omega} \times (\underline{a} - \underline{c})$, *zodat* $\underline{v}_A - \underline{\omega} \times \underline{a} = \underline{v}_B - \underline{\omega} \times \underline{b} = \underline{v}_C - \omega \times \underline{c}$ *dezelfde vector* $\underline{u}$ *voorstellen.* Zij nu X (positievector $\underline{x}$) een punt dat niet in vlak ABC ligt. We beschouwen de vector $\underline{w} = \underline{v}_X - \underline{\omega} \times \underline{x}$.
Blijkbaar is:

$$\underline{u}-\underline{w} = (\underline{v}_A - \underline{v}_X) - \underline{\omega} \times (\underline{a}-\underline{x}) = (\underline{v}_B - \underline{v}_X) - \underline{\omega} \times (\underline{b}-\underline{x}) =$$

$$= (\underline{v}_C - \underline{v}_X) - \underline{\omega} \times (\underline{c} - \underline{x}) .$$

Hieruit volgt:

$$(\underline{u} - \underline{w}, \underline{a} - \underline{x}) = (\underline{u} - \underline{w}, \underline{b} - \underline{x}) = (\underline{u} - \underline{w}, \underline{c} - \underline{x}) = 0 .$$

Daar $\underline{a} - \underline{x}$, $\underline{b} - \underline{x}$ en $\underline{c} - \underline{x}$ lineair onafhankelijk zijn, besluiten we tot $\underline{u} - \underline{w} = \underline{0}$, dus $\underline{w} = \underline{u}$. Voor elk punt X niet in vlak ABC geldt dus $\underline{v}_X = \underline{u} + \underline{\omega} \times \underline{x}$. Bovendien geldt dit als X in A, B of C valt. Dat de formule ook geldt voor elk punt X in vlak ABC blijkt als volgt. Het bewijs van de formule steunt uitsluitend op het feit dat zij geldt voor drie punten A, B en C die niet op één lijn liggen. Zij nu D een punt niet in ABC. Dan geldt de formule voor D, A en B en ook voor D, A en C. Dus geldt ze voor alle punten van vlak ABC die niet in vlak DAB liggen en ook voor alle punten van ABC die niet in DAC liggen, dat is dus voor alle punten van ABC behalve voor A. Maar dat ze voor A geldt weten we al uit anderen hoofde. We vatten samen:

bij een starre beweging bestaan twee vectoren $\underline{u}$ *en* $\underline{\omega}$*, zodanig dat voor elk punt* X *geldt:* $\underline{v}_X = \underline{u} + \underline{\omega} \times \underline{x}$. Deze vectoren die functies zijn van de tijd, zijn door de beweging ondubbelzinnig bepaald. Immers, geldt op zeker tijdstip t: $\underline{v}_X = \underline{u} + \underline{\omega} \times \underline{x} = \underline{u}_1 + \underline{\omega}_1 \times \underline{x}$ voor elke keuze van $\underline{x}$ dan volgt hieruit voor $\underline{x} = \underline{0}$ dat $\underline{u} = \underline{u}_1$. Dus is $\underline{\omega} \times \underline{x} = \underline{\omega}_1 \times \underline{x}$ voor elke $\underline{x}$. Bijgevolg $\underline{\omega}_1 = \underline{\omega}$. De betekenis van $\underline{u}$ wordt duidelijk als we $\underline{x} = \underline{0}$ nemen. Dan blijkt dat $\underline{u}$ de snelheid is van het punt van het bewegende stelsel dat op het beschouwde tijdstip met 0 samenvalt. In plaats van $\underline{u}$ schrijven we dan ook liever $\underline{v}_0$ waardoor we krijgen:

(2.4.1) $\quad \underline{v}_X = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{x}$.

Men noemt $\underline{\omega}$ de *hoeksnelheid* van de beweging en zegt *dat door* (2.4.1) *het snelheidsveld op de oorsprong* 0 *gereduceerd is.*
Reductie op een punt A (positievector $\underline{a}$) is evenzeer mogelijk. Hiertoe behoeft men slechts uit (2.4.1) en $\underline{v}_A = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a}$ af te leiden

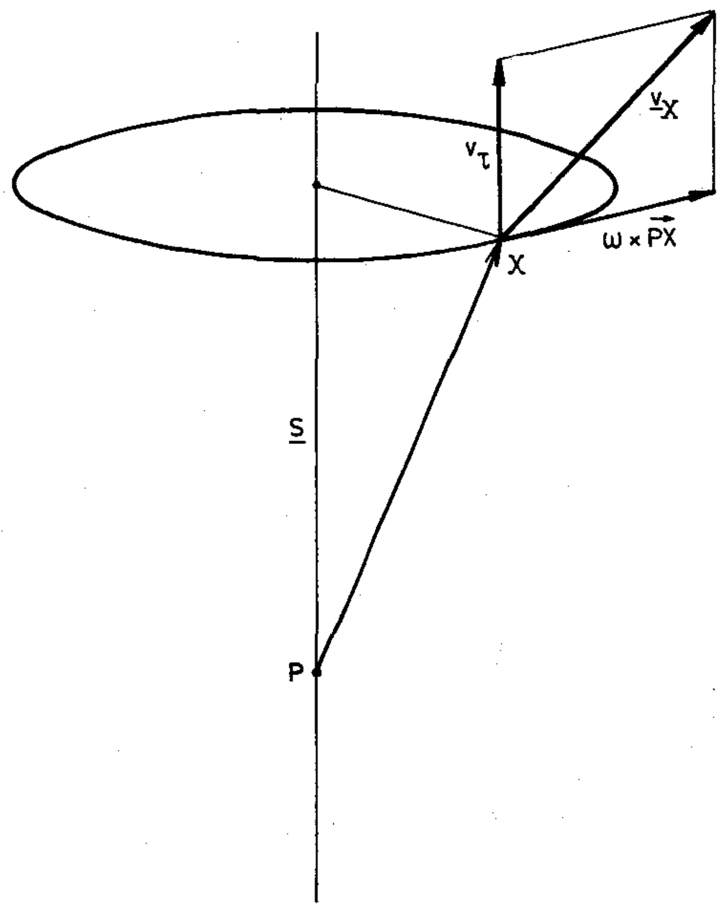
$$\underline{v}_X = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times (\underline{x} - \underline{a}) = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \overrightarrow{AX} .$$

Als $\underline{\omega} = \underline{0}$ voor elke t hebben alle punten dezelfde snelheid $\underline{v}_0$. In dit geval heet de beweging een *translatie*. Ook bij een beweging waarbij $\underline{\omega}$ niet identiek nul is, kunnen er tijdstippen zijn waarop $\underline{\omega} = \underline{0}$. Op zulk een tijdstip heet de beweging een momentele translatie.

2.5. Is $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ dan kan $\underline{v}_0$ ondubbelzinnig langs en loodrecht op ω worden ontbonden: $\underline{v}_0 = h\underline{\omega} + \underline{\omega}^*$ waarin $h = (\underline{\omega},\underline{v}_0)/(\underline{\omega},\underline{\omega})$ en $(\underline{\omega},\underline{\omega}^*) = 0$. Uit (2.4.1) volgt $(\underline{\omega},\underline{v}_0) = (\underline{\omega},\underline{v}_X)$. Hieruit blijkt dat h niet afhangt van het gekozen reductiepunt. Bijgevolg is h ondubbelzinnig door de beweging bepaald en $h\underline{\omega} = \underline{v}_\tau$ dus ook. Zij P (positievector $\underline{p}$) een punt van de lijn $\underline{S} = [\underline{\omega},\underline{\omega}^*]$. Dan is $\underline{\omega}^* = \underline{p} \times \underline{\omega}$. Voor de snelheid van P vindt men dus $\underline{v}_P = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{p} = \underline{v}_0 - \underline{\omega}^* = \underline{v}_\tau$. Elk punt van $\underline{S}$ heeft dus de snelheid $\underline{v}_\tau$ die de *translatiesnelheid* van de beweging wordt genoemd. Bij reductie van het snelheidsveld op P is nu

(2.5.1) $\quad \underline{v}_X = \underline{v}_\tau + \underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}$.

Dit betekent: *elk punt heeft een snelheid die ontbonden kan worden in een component* $\underline{v}_\tau$ *evenwijdig met* $\underline{S}$ *en voor alle punten dezelfde, en een component loodrecht op het vlak door* $\underline{S}$ *en het beschouwde punt die recht evenredig is met de afstand van het punt tot* $\underline{S}$.

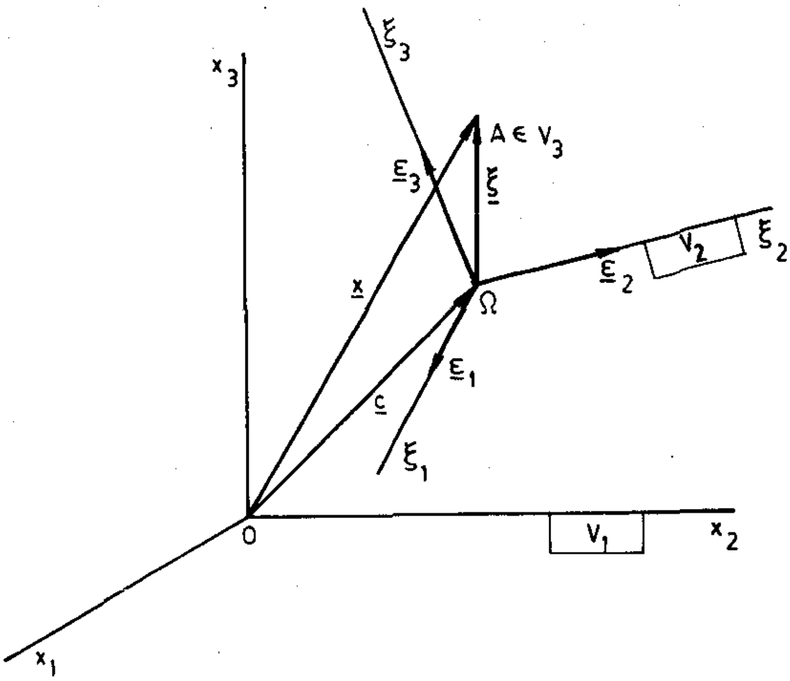


Het snelheidsveld stemt dus overeen met dat van een schroefbeweging met translatiesnelheid $\underline{v}_\tau$ en hoeksnelheid $\underline{\omega}$ om de schroefas $\underline{S}$. Men noemt $\underline{S}$ dan ook de *momentele schroefas* (msa); h heet de *gereduceerde spoed.* Kort gezegd: *momenteel beschouwd is elke starre beweging een schroeving.*
Uit (2.5.1) volgt

$$(\underline{v}_X, \underline{v}_X) = (\underline{v}\ , \underline{v}\ ) + (\underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}, \underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}) \ .$$

Blijkbaar is $\underline{S}$ dus de verzameling van de punten met minimale snelheid. Bijgevolg hangt $\underline{S}$ niet af van de keuze van het assenstelsel.

2.6. We beschouwen drie samenvallende ruimten V_1, V_2 en V_3 die ten opzichte van elkaar bewegen. Zij A een punt van V_3. Tengevolge van de beweging V_3/V_2 heeft A op het tijdstip t een bepaalde snelheid $\underline{v}_{32}$; tengevolge van de beweging V_3/V_1 heeft A op hetzelfde tijdstip een snelheid $\underline{v}_{31}$. Maar op het tijdstip t valt A samen met een punt A_2 van V_2. Dit punt heeft tengevolge van de beweging V_3/V_2 de snelheid $\underline{v}_{32}$. Wat is het verband tussen deze drie snelheden? Neem in V_1 en V_2 orthonormale rechtse assenstelsels $\hat{O}x_1x_2x_3$ en $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ aan. De eenheidsvector die de positieve zin op de ξ_i-as aanwijst zij $\underline{\varepsilon}_i$ $(i = 1,2,3)$.



Verder is $\overrightarrow{OA} = \underline{x}$, $\overrightarrow{\Omega A} = \underline{\xi} = \xi_1\underline{\varepsilon}_1 + \xi_2\underline{\varepsilon}_2 + \xi_3\underline{\varepsilon}_3$ en $\overrightarrow{O\Omega} = \underline{c}$. Dan geldt:

$$\underline{v}_{31} = \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{c}} + \dot{\underline{\xi}} = \dot{\underline{c}} + \xi_1\dot{\underline{\varepsilon}}_1 + \xi_2\dot{\underline{\varepsilon}}_2 + \xi_3\dot{\underline{\varepsilon}}_3 + \dot{\xi}_1\underline{\varepsilon}_1 + \dot{\xi}_2\underline{\varepsilon}_2 + \dot{\xi}_3\underline{\varepsilon}_3 =$$

$$= \underline{v}_{21} + \underline{v}_{32} = \underline{v}_{32} + \underline{v}_{21} \,.$$

Men noemt V_3/V_2 de *relatieve beweging*, V_2/V_1 de *sleepbeweging*, V_3/V_1 de *absolute beweging* en hierbij aansluitend, $\underline{v}_{32}$ de *relatieve snelheid* van A, $\underline{v}_{21}$ de *sleepsnelheid* en $\underline{v}_{31}$ de *absolute snelheid*. Erg belangrijk zijn deze benamingen niet, zoals uit het voorgaande blijkt. Er is geen enkele veronderstelling gemaakt ten aanzien van het al of niet verschillend zijn van de ruimten V_1, V_2 en V_3. Er is dan ook niets op tegen voor V_3 de ruimte V_1 te nemen. Dan is V_3/V_2 de beweging V_1/V_2 die de inverse beweging van V_2/V_1 wordt genoemd. Voor elk punt is nu $\underline{v}_{31} = \underline{v}_{11} = \underline{0}$ en $\underline{v}_{32} = \underline{v}_{12}$ zodat $\underline{v}_{12} + \underline{v}_{21} = \underline{0}$. *Bij overgang op de inverse beweging worden alle snelheden dus door hun tegengestelden vervangen.* Enkele gevolgen hiervan:

a) De fundamentele betrekking tussen de snelheden kan worden geschreven: $\underline{v}_{12} + \underline{v}_{23} + \underline{v}_{31} = \underline{0}$ en direct worden uitgebreid tot het geval dat meer dan 3 ruimten ten opzichte van elkaar bewegen.

b) V_1/V_2 en V_2/V_1 hebben op elk tijdstip dezelfde *msa*, want de *msa* is de verzameling van de punten waarvan de snelheid zo klein mogelijk is.

c) V_1/V_2 en V_2/V_1 hebben translatie snelheden die elkaars tegengestelden zijn.

d) Maar dan zijn dus ook de hoeksnelheden elkaars tegengestelden: $\underline{\omega}_{12} + \underline{\omega}_{21} = \underline{0}$.

2.7. Als drie ruimten V_1, V_2 en V_3 ten opzichte van elkaar bewegen, zijn er *drie* momentele schroefassen te onderscheiden. Immers de *msa* van V_i/V_j (aan te geven met σ_{ij}) is dezelfde als de *msa* σ_{ji} van V_j/V_i.
We beschouwen de bewegingstoestand op een bepaald tijdstip. Op dit tijdstip mogen de assenstelsels van 2.6 nog willekeurig worden gekozen. We kiezen $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ samenvallend met $Ox_1x_2x_3$. Voor elk punt $\underline{x}$ van V_3 geldt dan:

$$\underline{v}_{21} = \underline{v}^0_{21} + \underline{\omega}_{21} \times \underline{x};\ \underline{v}_{32} = \underline{v}^0_{32} + \underline{\omega}_{32} \times \underline{x};\ \underline{v}_{31} = \underline{v}^0_{31} + \underline{\omega}_{31} \times \underline{x}\ .$$

Bijgevolg is

$$\underline{v}^0_{31} + \underline{\omega}_{31} \times \underline{x} = \underline{v}^0_{32} + \underline{v}^0_{21} + (\underline{\omega}_{32} + \underline{\omega}_{21}) \times \underline{x}$$

voor elke $\underline{x}$. Hieruit volgt:

$$\underline{v}^0_{31} = \underline{v}^0_{32} + \underline{v}^0_{21} \quad \text{en} \quad \underline{\omega}_{31} = \underline{\omega}_{32} + \underline{\omega}_{21}\ .$$

De laatste betrekking levert ons dat de drie momentele schroefassen σ_{31}, σ_{32} en σ_{21} op elk tijdstip evenwijdig zijn met eenzelfde vlak.
De drie msa zijn wat men wel noemt *enkelkruisend*.
De drie schroefassen kunnen in Plückervectoren worden voorgesteld door:

$$\sigma_{ij} = [\underline{\omega}_{ij}, \underline{\omega}^*_{ij}]$$

bij de beweging V_i/V_j, waarbij:

$$\underline{\omega}^*_{ij} = \underline{v}^0_{ij} - h_{ij}\underline{\omega}_{ij}$$

zodat

$$(\underline{\omega}_{ij}, \underline{\omega}^*_{ij}) = 0\ .$$

De gemeenschappelijke loodrechte transversaal T van σ_{21} en σ_{32} zullen we voorstellen door:

$$T = [\underline{t},\underline{t}^*] \; .$$

De lijnen $[\underline{t},\underline{t}^*]$ en $[\underline{\omega}_{21},\underline{\omega}_{21}^*]$ snijden elkaar loodrecht dus:

$$(\underline{t},\underline{\omega}_{21}) = 0 \quad \text{én} \quad (\underline{t},\underline{\omega}_{21}^*) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{21}) = 0 \; .$$

De lijnen $[\underline{t},\underline{t}^*]$ en $[\underline{\omega}_{32},\underline{\omega}_{32}^*]$ snijden elkaar eveneens loodrecht:

$$(\underline{t},\underline{\omega}_{32}) = 0 \quad \text{én} \quad (\underline{t},\underline{\omega}_{32}^*) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{32}) = 0 \; .$$

Bovendien geldt: $\underline{\omega}_{31} = \underline{\omega}_{21} + \underline{\omega}_{32}$, zodat ook:

$$(\underline{t},\underline{\omega}_{31}) = (\underline{t},\underline{\omega}_{21}) + (\underline{t},\underline{\omega}_{32}) = 0 \; .$$

De lijnen $[\underline{t},\underline{t}^*]$ en $[\underline{\omega}_{31},\underline{\omega}_{31}^*]$ zijn dus onderling loodrecht.
Beschouwen we nu de uitdrukking:

$$(\underline{t},\underline{\omega}_{31}^*) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{31}) \; .$$

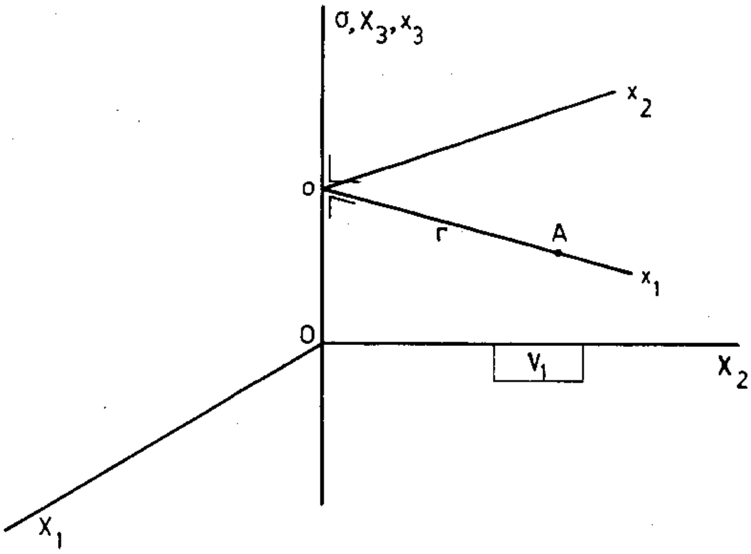
We vinden:

$$\begin{aligned}
(\underline{t},\underline{\omega}_{31}^*) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{31}) &= (\underline{t},\underline{v}_{31}^0 - h_{31}\underline{\omega}_{31}) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{32} + \underline{\omega}_{21}) = \\
&= (\underline{t},\underline{v}_{31}^0) - h_{31}(\underline{t},\underline{\omega}_{31}) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{32}) + (\underline{t}^*,\underline{\omega}_{21}) = \\
&= (\underline{t},\underline{v}_{31}^0) - (\underline{t},\underline{\omega}_{32}^*) - (\underline{t},\underline{\omega}_{21}^*) = \\
&= (\underline{t},\underline{v}_{31}^0) - (\underline{t},\underline{v}_{32}^0 - h_{32}\underline{\omega}_{32}) - (\underline{t},\underline{v}_{21}^0 - h_{21},\underline{\omega}_{21}) = \\
&= (\underline{t},\underline{v}_{31}^0 - \underline{v}_{32}^0 - \underline{v}_{21}^0) = 0 \; .
\end{aligned}$$

De lijn $[\underline{t},\underline{t}^*]$ snijdt dus de lijn $[\underline{\omega}_{31},\underline{\omega}_{31}^*]$ loodrecht. Bewezen is hiermede de volgende stelling:

Als drie ruimten V_1, V_2 *en* V_3 *ten opzichte van elkaar bewegen, bestaat er een rechte lijn die de drie schroefassen loodrecht snijdt.*

2.8. In deze paragraaf zullen we een bijzondere beweging van de ruimte V_2 ten opzichte van de ruimte V_1 wat nader onderzoeken.
We beschouwen de beweging V_2/V_1 waarvan gegeven is dat de msa een vaste rechte σ is, de hoeksnelheid $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ is constant en de spoed h is eveneens constant. Aangezien de beweging V_2/V_1 onafhankelijk is van de keuze van de assenstelsels in deze ruimten, zijn we nog vrij in de keuze. We nemen de x_3-as langs σ, zodanig dat $\underline{\omega} = (0,0,\omega)$ met $\omega > 0$. De beide andere assen kiezen we loodrecht op σ zdd. $Ox_1x_2x_3$ een rechts assenstelsel is.



Een punt $A \in V_2$ bevindt zich op het tijdstip $t = 0$ op de x_1-as.
Gevraagd wordt de baan van A te bepalen. In de ruimte V_2 kiezen we een rechts orthonormaal assenstelsel $O\xi_1\xi_2\xi_3$, waarvan de ξ_1-as langs de loodlijn vanuit A op σ valt, en de ξ_3-as met σ samenvalt. De ξ_2-as ligt dan eveneens vast.
De positievector van A uitgedrukt in de coördinaten van V_2 heeft dus steeds de voorstelling $(r,0,0)$, met $r > 0$.
Noemen we $\underline{x}$ de in de tijd veranderlijke positie van A ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ dan geldt:

$$\underline{v}_x = \dot{\underline{x}} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{x}$$

waarbij $\underline{v}_0 = h\underline{\omega}$, dus:

$$\begin{aligned}\underline{v}_x &= h\underline{\omega} + \underline{\omega} \times \underline{x}\\ &= (0,0,h\omega) + (0,0,\omega) \times (x_1,x_2,x_3)\\ &= (0,0,h\omega) + (-\omega x_2,\omega x_1,0)\end{aligned}$$

zodat

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2$$
$$\dot{x}_2 = \omega x_1$$
$$\dot{x}_3 = h\omega \ .$$

Uit de beide eerste vergelijkingen volgt:

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0 \ ,$$

dus $x_1^2 + x_2^2 = \text{constant} = c_1$.
Uit de derde vergelijking volgt:

$$x_3 = h\omega t + c_2 \ ,$$

c_2 een constante.
Op het tijdstip $t = 0$ bevindt A zich op de x_1-as op afstand r van 0, dus:

$$x_1(0) = r \ , \quad x_2(0) = 0 \quad \text{en} \quad x_3(0) = 0 \ .$$

De constanten c_1 en c_2 zijn nu bepaald en we verkrijgen voor alle t:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$
$$x_3 = h\omega t \ .$$

Stellen we:

$$x_1 = r \cos \varphi$$
$$x_2 = r \sin \varphi$$

dan volgt:

$$\dot{x}_1 = -r\dot{\varphi} \sin \varphi = -\dot{\varphi} x_2 \ ,$$
$$\dot{x}_2 = r\dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\varphi} x_1$$

zodat:

$$\dot{\varphi} = \omega \ , \ \text{constant}$$

$$\varphi = \omega t + c_3, \ c_3 \ \text{een constante} \ .$$

Omdat op $t = 0$ geldt $x_1 = r$ volgt $\cos \varphi(0) = 1$. We kunnen de constante c_3 dus gelijk aan nul nemen.

In parametervoorstelling is de baan van A nu bepaald door:

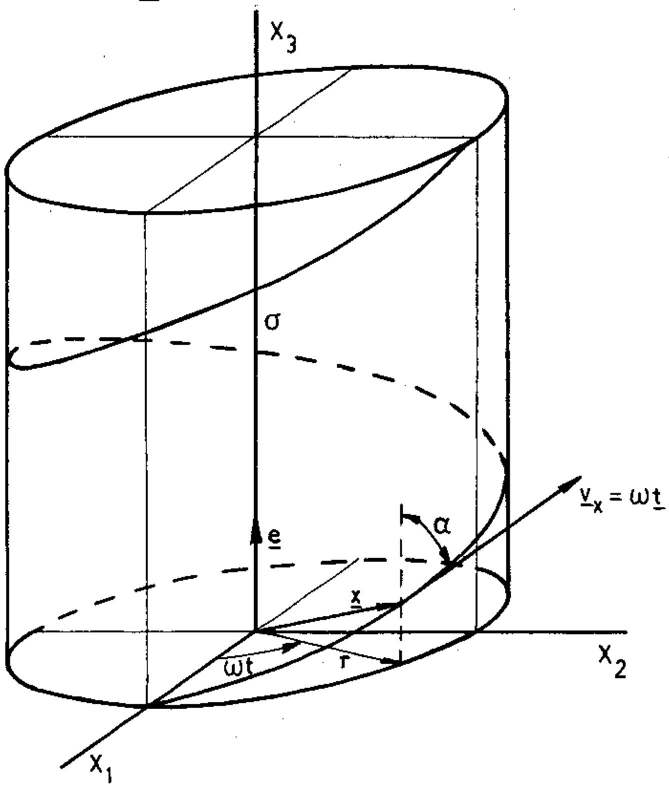
$$x_1 = r \cos \omega t$$

$$x_2 = r \sin \omega t$$

$$x_3 = h\omega t \ .$$

Wat is dit voor een kromme?
In de figuur is de kromme getekend

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v}_x = (-\dot{\varphi} r \sin \varphi, \dot{\varphi} r \cos \varphi, h\dot{\varphi}) =$$
$$= (-\omega r \sin \varphi, \omega r \cos \varphi, h\omega) =$$
$$= \omega(-r \sin \varphi, r \cos \varphi, h) =$$
$$=: \omega \underline{t} \ .$$



De richtingsvector $\underline{e}$ van σ is (0,0,1). Noemen we α de hoek tussen $\underline{v}_x$ en $\underline{e}$, dan geldt:

$$(\underline{t},\underline{e}) = |\underline{t}| \cos \alpha = h$$

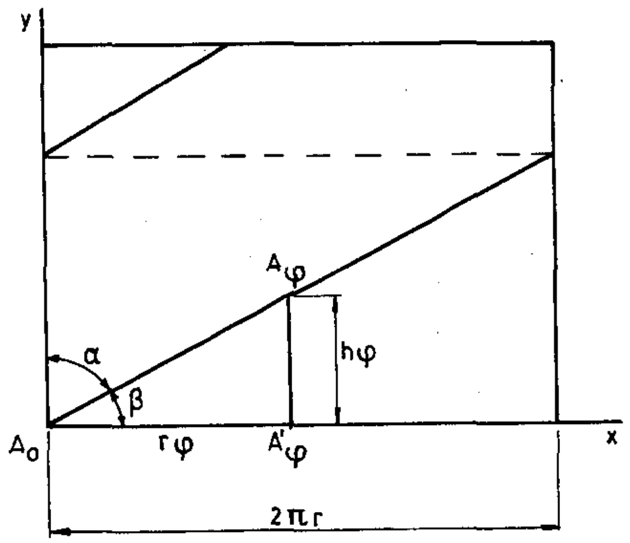
zodat:

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \ , \ \text{constant} \ .$$

Verder:

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \quad \text{en} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{r}{h}\,.$$

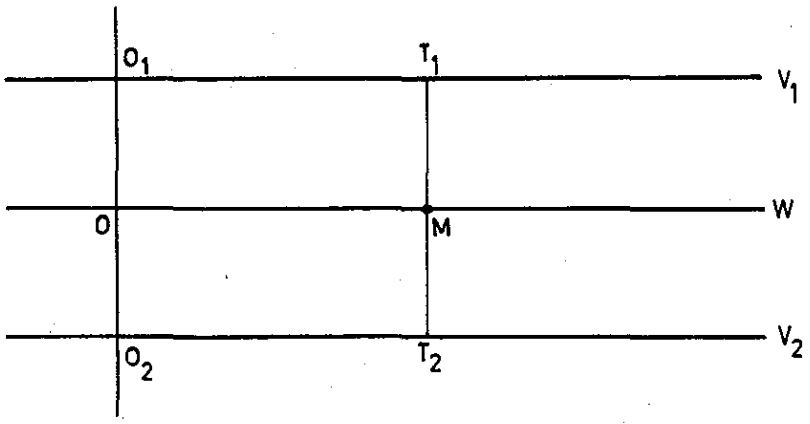
De hoek β tussen $\underline{v}_x$ en het Ox_1x_2 vlak, de hellingshoek heeft de grootte $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, en is constant.
De kromme is dus een *schroeflijn.*
Als de hoek φ een boog van 2π doorloopt beweegt het punt zich over een afstand $2\pi h$, de *spoed*, in de richting van de x_3-as. Daarom wordt h de gereduceerde spoed genoemd.
Zouden we de cylinder waarop de schroeflijn ligt, openknippen en uitslaan, dan verkrijgen we de volgende figuur:



In deze figuur geldt: $y = x\ \mathrm{tg}\beta$. Het punt A doorloopt in deze figuur een rechte.

2.9. Een starre beweging heet vlak als op elk tijdstip de snelheden van alle punten evenwijdig zijn met een vast vlak. Nodig en voldoende opdat (2.5.1) het snelheidsveld van een vlakke beweging weergeeft is dus dat er een constante vector $\underline{n} \neq \underline{0}$ bestaat, zodanig dat voor elke keuze van X en identiek in t geldt $(\underline{n},\underline{v}_\tau) + (\underline{n} \times \underline{\omega}, \overrightarrow{PX}) = 0$. Hieraan is dan en alleen dan voldaan als $(\underline{n},\underline{v}_\tau) = h(\underline{n},\underline{\omega}) = 0$ voor elke waarde van t en als bovendien voor elke X en identiek in t geldt $(\underline{n} \times \underline{\omega}, \overrightarrow{PX}) = 0$, dus als $\underline{n} \times \underline{\omega} = \underline{0}$ voor elke waarde van t. Dit laatste is dan en alleen dan het geval als $\underline{\omega} = \lambda\underline{n}$. Hierbij is $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ verondersteld. Uit $h(\underline{n},\underline{\omega}) = 0$ en $\underline{\omega} = \lambda\underline{n}$ volgt: $\lambda h(\underline{n},\underline{n}) = 0$, dus $h = 0$ en we constateren gemakkelijk dat de voorwaarden $h = 0$ en $\underline{\omega} = \lambda\underline{n}$ te zamen ook voldoende zijn, opdat identiek in t en voor elke X voldaan is aan $(\underline{n}, \underline{v}_X) = 0$. Onze conclusie is: *een starre beweging die geen translatie is, is dan en alleen dan vlak als de msa een vaste richting heeft en de translatiesnelheid nul is.* Veronderstel dat bij zulk een beweging π een vlak loodrecht op de msa is en $\underline{n}$ een eenheidsvector langs de msa. Het (met de tijd veranderlijke) snijpunt P van π met de msa heeft dus op elk tijdstip de snelheid nul. Van een punt $X \in \pi$ is de snelheid $\underline{v}_X = \underline{\omega} \times \overrightarrow{PX}$. Door de zin van $\underline{n}$ geschikt te kiezen kunnen we bereiken dat $\underline{\omega} = \omega\underline{n}$ met $\omega \geq 0$. Dan is dus $|\underline{v}_X| = \omega.PX$ voor elke X. In alle vlakken loodrecht op $\underline{n}$ is het snelheidsveld hetzelfde. Voor het bestuderen, van de snelheidsverdeling kan men zich dus tot π beperken. Het punt P wordt dan de (momentele) *pool* van de beweging genoemd. Het komt er dus op neer dat men de beweging onderzoekt van een vlak π_1 dat zich, steeds samenvallend met π, ten opzichte van π beweegt (*coplanaire beweging*).

2.10. We beschouwen twee evenwijdige vlakken V_1 en V_2 beide met coplanaire bewegingen $\underset{\sim}{B}_1$ en $\underset{\sim}{B}_2$ en een bol B (middelpunt M, straal r) die in *rollend contact* is met deze vlakken in de punten T_1 en T_2 (fig.). Dat B in rollend contact is met V_k betekent dat het punt van B dat samenvalt met T_k op elk tijdstip dezelfde snelheid heeft als het punt van V_k dat met T_k samenvalt $(k = 1,2)$. Het is duidelijk dat M beweegt in het vaste vlak W op een afstand r evenwijdig met V_1 en V_2. Zij O een vast punt in W, O_k de projectie van O op V_k en $\underline{n}$



een eenheidsvector, zodanig dat $MT_1 = r\underline{n}$. De pool van de beweging $\underset{\sim}{B}_k$ en de hoeksnelheid van deze beweging noemen we P_k en $\omega_k\underline{n}$; we stellen $\overrightarrow{O_kP_k} = \underline{p}_k$ en $\overrightarrow{OC} = \underline{x}$; dit alles op het tijdstip t. De hoeksnelheid van $\underline{B}$ op dit tijdstip zij $\underline{\omega}_0$. Voor de snelheid van het punt van V_k dat op het tijdstip t in T_k valt vinden we: $\omega_k\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}_k)$ (k = 1,2). Voor de snelheden van de punten van B die in T_1 en T_2 vallen, krijgen we: $\dot{\underline{x}} + r\underline{\omega}_0 \times \underline{n}$ en $\dot{\underline{x}} - r\underline{\omega}_0 \times \underline{n}$. Omdat er tussen V_k en B rollend contact optreedt, geldt nu

$$\dot{\underline{x}} + r\underline{\omega}_0 \times \underline{n} = \omega_1\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}_1) ,$$

$$\dot{\underline{x}} - r\underline{\omega}_0 \times \underline{n} = \omega_2\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}_2) .$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\underline{x}} = \tfrac{1}{2}\{\omega_1\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}_1) + \omega_2\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}_2)\} . \tag{2.10.1}$$

We nemen aan dat $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ en stellen

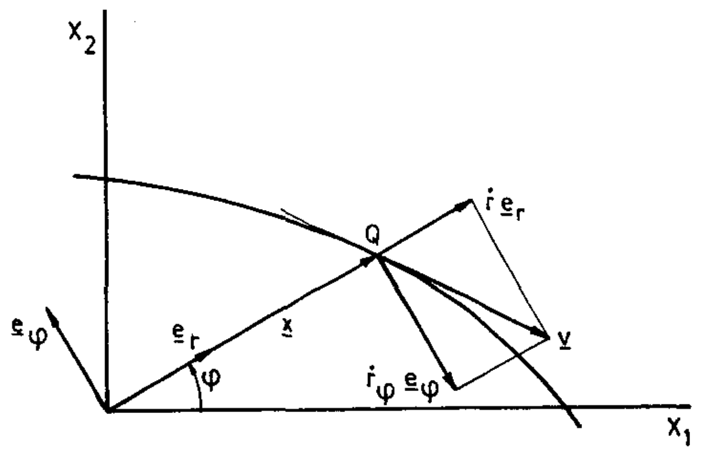
$$\omega = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),\ \underline{p} = \frac{\omega_1\underline{p}_1 + \omega_2\underline{p}_2}{\omega_1 + \omega_2} . \tag{2.10.2}$$

Dan kunnen we voor (2.10.1) schrijven:

$$\dot{\underline{x}} = \omega\underline{n} \times (\underline{x} - \underline{p}) . \tag{2.10.3}$$

Deze formule geeft het snelheidsveld weer van een vlakke starre beweging waarbij een vlak W_1 zich met hoeksnelheid $\underline{\omega} = \omega\underline{n}$ over W beweegt. De fysische betekenis van deze uitkomst is eenvoudig. Wanneer niet één bol maar een willekeurig aantal bollen met straal r in rollend contact zijn met V_1 en V_2, bewegen hun middelpunten zich als een star stelsel.

2.11. Bij een vlakke beweging is de baan van elk punt een vlakke kromme. Wij gaan daarom nu iets nader in op de beweging van één enkel punt in een plat vlak. Het punt noemen we Q en zijn positievector ten opzichte van de oorsprong van een vast assenstelsel OX_1X_2 in het vlak geven we met $\underline{x}$ aan.



We voeren een assenstelsel in dat meebeweegt met het punt Q. De ene as leggen we langs OQ, de andere daar loodrecht op. Het nieuwe en het oude assenstelsel hebben dezelfde orientatie. De hoek tussen OQ en de X_1-as noemen we φ, het *argument*; de lengte van OQ, $|\underline{x}|$ noemen we r, de *voerstraal*. De eenheidsvector langs OQ is $\underline{e}_r$, die langs de andere as is $\underline{e}_\varphi$. We verkrijgen dan:

$$\underline{x} = r\underline{e}_r \; ,$$

en voor de snelheid vinden we:

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r \; .$$

In het OX_1X_2 stelsel kunnen we schrijven:

$$\underline{e}_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$$

$$\underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi)$$

waaruit:

$$\dot{\underline{e}}_r = (-\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{\varphi}\cos\varphi) = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \; ,$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = (-\dot{\varphi}\cos\varphi,\ -\dot{\varphi}\sin\varphi) = -\dot{\varphi}\underline{e}_r \; .$$

Voor de snelheid is dus afgeleid:

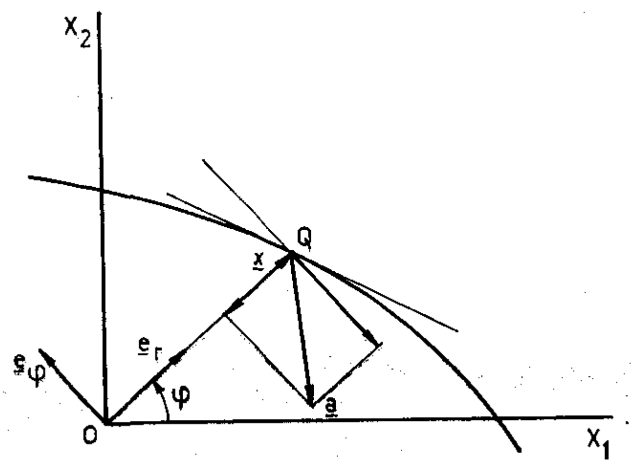
$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \; . \tag{2.11.1}$$

Hierin is $\dot{\varphi}$ de hoeksnelheid van de lijn OQ ten opzichte van het assenstelsel OX_1X_2. Op dezelfde wijze vinden we voor de versnelling:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r$$

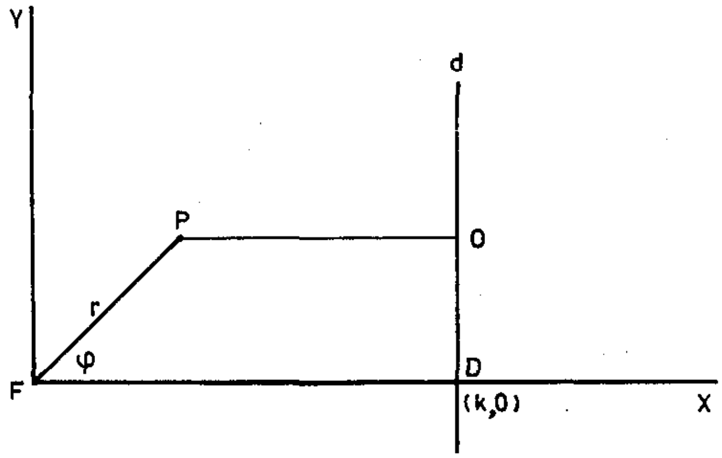
zodat:

$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi \; . \tag{2.11.2}$$



Voordat we een belangrijk geval van een vlakke beweging behandelen, laten we twee paragrafen wiskunde volgen.

2.12. In het platte vlak kan een punt worden aangewezen door zijn coördinaten x en y t.o. van een rechthoekig assenstelsel OXY. Een andere manier om het punt P vast te leggen is met behulp van de afstand $r = OP$ en de hoek φ van $\overrightarrow{OP}$ met de positieve x-as ($0 \leq \varphi < 2\pi$, òf $-\pi < \varphi \leq \pi$). Men noemt r (de *voerstraal*) en φ (het *argument*) de *poolcoördinaten* van het punt.



We veronderstellen dat gegeven zijn een punt F en een rechte d; de afstand van F tot d noemen we k. We vragen naar de verzameling van het punt waarvan de afstand tot F en de afstand tot d een gegeven verhouding $\varepsilon > 0$ hebben. Kiezen we het assenstelsel FXY zoals in de figuur is aangegeven en gebruiken we poolcoördinaten (r,φ) dan behoort P dan en alleen dan tot de verzameling als $r: (k - r\cos\varphi) = \varepsilon$ dus als $r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = k\varepsilon$. Dit is dus de vergelijking in poolcoördinaten van de gezochte verzameling. Zij stelt een kromme voor die (neem $\varphi = \pi/2$) de positieve y-as snijdt in $(0,k\varepsilon)$. We stellen $k\varepsilon = p$ en schrijven de vergelijking als

$$(2.12.1) \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \; .$$

Om de vergelijking in rechthoekige coördinaten te vinden, leiden we uit (2.12.1) achtereenvolgens af $r = p - \varepsilon x$, $r^2 = (p - \varepsilon x)^2$, dus

$$(2.12.2) \qquad x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2 \; .$$

We hebben dus te doen met een kromme van de tweede graad (kegelsnede). Is $\varepsilon = 1$ dan wordt (2.12.2) eenvoudig $y^2 = p(p - 2x)$; de kromme is een parabool. We veronderstellen verder $\varepsilon \neq 1$. Dan zijn er twee snijpunten $(x_1,0)$ en $(x_2,0)$ met de x-as waarbij x_1 en x_2 de wortels zijn van $(1-\varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x - p^2 = 0$. Dus $x_1 + x_2 = -2p\varepsilon/(1 - \varepsilon^2)$. We verschuiven de x-as evenwijdig naar het punt $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2),0)$. Dan is

$$(2.12.3) \quad (1 - \varepsilon^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

de vergelijking op het nieuwe assenstelsel.
Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

I. $0 < \varepsilon < 1$. Dan stellen we $\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} = b^2$ en $\frac{b^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2$.

Dan wordt (2.12.3):

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 .$$

Deze vergelijking stelt een *ellips* voor. Wordt $\varepsilon = 0$ toegestaan dan hebben we met een cirkel te doen.

II. $\varepsilon > 1$. In dit geval stellen we $\frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1} = b^2$ en $\frac{b^2}{\varepsilon^2 - 1} = a^2$, waardoor (2.12.3) overgaat in

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

welke vergelijking en hyperbool voorstelt.
In alle gevallen (uitgezonderd $\varepsilon = 0$) is F een brandpunt van de door (2.12.1) voorgestelde kegelsnede. Men noemt ε de (numerieke) excentriciteit en p de parameter van de kromme.

2.13. In de mechanica ontmoeten we vaak differentiaalvergelijkingen. Op de theorie van de eenvoudige differentiaalvergelijkingen die in dit college voorkomen, gaan we iets nader in.
Een eenvoudige differentiaalvergelijking treedt op bij het volgende probleem. Zij a een constante; bepaal alle functies waarvan de afgeleide functie gelijk is aan a maal de functie zelf. Is y een functie van x dan willen we dus dat $y' = ay$ of $y' - ay = 0$. Hierbij betekent het accent differentieren naar x.

Als $a = 0$ is het eenvoudig. Dan is $y' = 0$ en dus y = constant. We veronderstellen nu $a \neq 0$. Dan is e^{ax} een functie die aan de vergelijking voldoet, want $(e^{ax})' = ae^{ax}$. Zijn er nog meer oplossingen? Stel dat $\varphi(x)$ een oplossing is. Dan is dus $\varphi' - a\varphi = 0$. Beschouw $z = e^{-ax}\varphi(x)$. Dan is $z' = e^{-ax}(\varphi' - a\varphi) = 0$. Dus $z = C$ = constant. Bijgevolg $\varphi(x) = Ce^{ax}$, waarin de constante C willekeurig kan worden gekozen. We zeggen nu dat $y = Ce^{ax}$ de *algemene oplossing* is van $y' - ay = 0$. Natuurlijk is $y = Ce^{-ax}$ de algemene oplossing van $y' + ay = 0$.
Iets moeilijker is de vergelijking:

(2.13.1) $y'' + ay' + by = 0$ (a en b constant) .

Als φ_1 en φ_2 oplossingen zijn, is

$$\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2 = 0 \ .$$

Zijn A en B constanten en stelt men $A\varphi_1 + B\varphi_2 = z$ dan is dus:

$$z'' + az' + bz = A(\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1) + B(\varphi_2'' + a\varphi_2' + b_2\varphi_2) = 0 \ .$$

Dit betekent dat $A\varphi_1 + B\varphi_2$ een oplossing is.
Elke lineaire combinatie met constante coëfficiënten van oplossingen van (2.13.1) *is dus ook een oplossing.*
We beschouwen naast (2.13.1) nog de vergelijking

(2.13.2) $y'' + ay' + by = f(x)$

waarin $f(x)$ een gegeven functie van x is, niet identiek gelijk aan nul. Zij $p(x)$ een oplossing van (2.13.2). Dan is $p'' + ap' + bp = f(x)$ en dus $(y - p)'' + a(y - p)' + b(y - p) = 0$. Is nu $w(x)$ een oplossing van (2.13.1) dan is dus $y(x) = w(x) + p(x)$ een oplossing van (2.13.2) en men krijgt alle oplossingen van (2.13.2) door $w(x)$ de oplossingsverzameling van (2.13.1) te laten doorlopen.
Voorlopig hebben we van (2.13.1) alleen een speciaal geval nodig, namelijk $y'' + \ y = 0$ waarin φ constant is. Aan deze vergelijking wordt voldaan door de functie die voor elke waarde van x nul (de nuloplossing). We bewijzen: *als* φ *een oplossing is met de eigenschap dat voor* $x = x_0$ *geldt* $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ *dan is* φ *de nuloplossing.* Dit blijkt als volgt: uit $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ leiden we af: $2\varphi'\varphi'' + 2\lambda\varphi\varphi' = 0$; dus $(\varphi')^2 + \lambda\varphi^2 = c$ = constant. Dan $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ is $c = 0$ en dus $(\varphi')^2 + \lambda\varphi^2 = 0$. Voor $\lambda > 0$ volgt hieruit dat φ identiek nul is.

Is $\lambda < 0$ dan stellen we $\lambda = -\mu^2$ en vinden $\varphi' \pm \mu\varphi = 0$ zodat $\varphi(x) = Ce^{\mp\mu x}$ (C constant). Daar $\varphi(x_0) = 0$, is $C = 0$ en $\varphi(x) = 0$ voor elke x. Uit deze stelling volgt: *zijn* x_0, p *en* q *gegeven getallen dan heeft* $y'' + \lambda y = 0$ *ten hoogste één oplossing* ψ *waarvoor geldt:* $\psi(x_0) = p$ *en* $\psi'(x_0) = q$. Immers waren er twee zulke oplossingen ψ_1 en ψ_2 dan zou voor de oplossing $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ gelden $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$. Bijgevolg is φ dan de nuloplossing, zodat ψ_1 en ψ_2 dezelfde oplossing voorstellen.

We vragen nu: is er altijd een oplossing waarvoor geldt $y(x_0) = p$ en $y'(x_0) = q$? We hebben alleen het geval nodig dat $x_0 = 0$, maar we doen het ook maar voor $x_0 \neq 0$. Er zijn twee gevallen.

I. $\lambda > 0$. We stellen $\lambda = \mu^2$ waardoor de vergelijking wordt $y'' + \mu^2 y = 0$. Er is niets tegen om $\mu > 0$ te veronderstellen. Dan is $y = \cos\mu(x - x_0)$ een oplossing en $y = \sin\mu(x - x_0)$ ook. Dus is $y = A\cos\mu(x - x_0) + B\sin\mu(x - x_0)$ ook een oplossing (A en B constant). We zien: $y(x_0) = A$; neem dus $A = p$. Verder is $y' = -A\mu\sin\mu(x - x_0) + B\mu\cos\mu(x - x_0)$. Dus $y'(x_0) = B\mu$. Neem dus $B = q\mu^{-1}$. Dan is bijgevolg $y = p\cos\mu(x - x_0) + q\mu^{-1}\sin\mu(x - x_0)$ de gezochte oplossing.

II. $\lambda < 0$. Stel $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$. De vergelijking wordt $y'' - \mu^2 y = 0$. Hiervan zijn $\cosh\mu(x - x_0)$ en $\sinh\mu(x - x_0)$. Als boven vinden we nu voor de gevraagde oplossing

$$y = p\cosh\mu(x - x_0) + q\mu^{-1}\sinh\mu(x - x_0) .$$

2.14. We gaan het bovenstaande toepassen op de *centrale beweging*. Hieronder verstaan we een beweging *waarbij de versnelling van het bewegende punt op elk tijdstip linear afhankelijk is van de positievector van het punt ten opzichte van een vast punt* C (het *centrum*). Geven we deze positievector met $\underline{x}$ aan dan is dus $\ddot{\underline{x}} = \lambda\underline{x}$ waarin λ nog kan afhangen van de positie van het punt en van de tijd. Dat $\ddot{\underline{x}}$ lineair afhankelijk is van $\underline{x}$ kunnen we ook weergeven door $\ddot{\underline{x}} \times \underline{x} = \underline{0}$. Men ziet onmiddellijk dat $\ddot{\underline{x}} \times \underline{x} = \frac{d}{dt}(\dot{\underline{x}} \times \underline{x})$. Dus is $\dot{\underline{x}} \times \underline{x} = \underline{c}$ waarin $\underline{c}$ een constante vector is. Hieruit volgt: $(\underline{c},\underline{x}) = 0$. Dit is belangrijk omdat er uit blijkt dat het punt beweegt in een vlak door C met constante normaalvector $\underline{c}$, dus in een vast vlak. Vandaar de

Stelling. *Elke centrale beweging is een vlakke beweging.*

We werken nu verder in het vlak waarin de beweging zich afspeelt en kiezen hierin een rechthoekig assenstelsel OX_1X_2 waarvan de oorsprong samenvalt met het centrum C maar dat overigens voorlopig nog geheel willekeurig is. We gebruiken poolcoördinaten (r,φ) met de positieve X_1-as als poolas. Dan vertegenwoordigt $\ddot{\underline{x}} = \lambda\underline{x}$ de beide vergelijkingen

(2.14.1) $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \lambda r$.

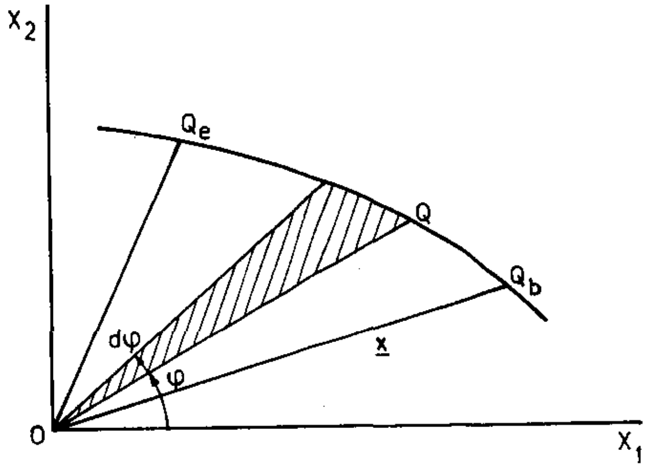
Uit de eerste vergelijking volgt:

$$r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

ofwel:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \ ,$$

zodat $r^2\dot{\varphi} = h$, constant.



Laat het punt Q het deel van de baan tussen de punten Q_b en Q_e doorlopen. Voor het gearceerde oppervlak dF vinden we:

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\varphi \ ,$$

waaruit met gebruikmaking van $r^2 d\varphi = h dt$ volgt:

$$2dF = h dt \ .$$

Het door de voerstraal OQ beschreven oppervlak als Q langs de baan van Q_b naar Q_e loopt heeft de grootte:

$$2 \int_{t_b}^{t_e} dF = \int_{t_b}^{t_e} h dt .$$

Dus: opp $OQ_bQ_e = \frac{1}{2}h(t_e - t_b)$.
Het geveegde oppervlak is rechtevenredig met de tijd waarin wordt geveegd. Het geveegde oppervlak of perk per tijdseenheid noemen we de *perksnelheid*. Afgeleid is de volgende stelling (de *perkenwet*):

Bij een centrale beweging is de perksnelheid constant.

2.15. Met de tweede vergelijking (2.14.1) kunnen we zonder nadere informatie omtrent λ weinig uitrichten. Een uiterst belangrijk bijzonder geval (planetenbanen, maanbanen) is dat waarbij $\lambda = -\mu^2 r^{-3}$ ($\mu > 0$ en constant). De bewegingsvergelijkingen luiden dan:

(2.15.1) $r^2\dot{\varphi} = h$ (h constant); $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\mu^2 r^{-2}$.

We stellen ons als doel de baan te vinden. Dat wil dus zeggen dat we r willen vinden als functie van φ. Hiertoe stellen we $r^{-1} = u$, dus $r = u^{-1}$. Dan is

$$\dot{r} = -\dot{u}u^{-2} = -r^2\dot{u} = -h\dot{u}/\dot{\phi} = -h \frac{du}{d\varphi} .$$

En verder

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2u}{d\varphi^2} \dot{\phi} = -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} .$$

Substitutie in de tweede bewegingsvergelijking geeft

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = h^{-2}\mu^2 .$$

Hiervan is

(2.15.2) $u = h^{-2}\mu^2 + A \sin \varphi + B \cos \varphi$ (A en B constant)

de algemene oplossing.

Noemen we $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ en kiezen we $\varphi_0 \in [0,2\pi)$ zodanig dat:

$$\sin \varphi_0 = \frac{A}{k} \quad \text{en} \quad \cos \varphi_0 = \frac{B}{k} ,$$

dan kunnen we de algemene oplossing voorstellen door:

$$u = \frac{\mu^2}{h^2} + k \cos(\varphi - \varphi_0) ,$$

φ_0 en k (reëel en positief) nog willekeurig.
Als poolas, de X_1-as, kiezen we de lijn die de oorsprong verbindt met het punt van de baan dat zo dicht mogelijk bij 0 ligt (het *pericentrum*). Anders gezegd: we zorgen ervoor dat u maximaal is voor $\varphi = 0$. Beschouw:

$$\frac{du}{d\varphi} = -k \sin(\varphi - \varphi_0) .$$

Deze afgeleide moet nul zijn voor $\varphi = 0$ als dan een uiterste waarde wordt aangenomen, waaruit volgt:

$$\sin \varphi_0 = 0 .$$

Deze uiterste waarde is een maximum als voor $\varphi = 0$ geldt

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} < 0 ;$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -k \cos(\varphi - \varphi_0) ;$$

voor $\varphi = 0$:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -k \cos \varphi_0, \; k > 0 .$$

Voor φ_0 moet dus tevens gelden: $\cos \varphi_0 > 0$. Alleen $\varphi_0 = 0$ voldoet aan de gestelde voorwaarden. Voor u vinden we dan:

$$u = \frac{\mu^2}{h^2} + k \cos \varphi ,$$

waarin $k \geq 0$. Stel nu $h^2\mu^{-2} = p > 0$ en $kp = \varepsilon$ dan is $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ de poolvergelijking van de baan. Het punt beschrijft dus: een ellips als $0 < \varepsilon < 1$, een parabolische baan als $\varepsilon = 1$ en een tak van een hyperbool als $\varepsilon > 1$. Het centrum is steeds een brandpunt.

Hoofdstuk 2. Opgaven

1. Een punt $\underline{x}$ beweegt zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ met de constante snelheid $\underline{v}_0$. Wat valt er van de baan te zeggen?

2. Een punt $\underline{x}$ beweegt zich ten opzichte van $Ox_1x_2x_3$ met een constante versnelling $\underline{c}$ en bevindt zich op het tijdstip $t = 0$ in het punt $\underline{p}$ en heeft dan de snelheid $\underline{v}_0$. Wat is de baan?
Aanw. $\underline{\ddot{x}} = \underline{c}$ voert tot $\underline{\dot{x}} = \underline{c}t + \underline{v}_0$. Voor $\underline{c} = \underline{0}$ hebben we de vorige opgave. We veronderstellen daarom $\underline{c} \neq \underline{0}$. Als $\underline{v}_0$ lineair afhankelijk is van $\underline{c}$ is $\underline{\dot{x}} \times \underline{v}_0 = \underline{0}$ en dus $\underline{x} \times \underline{x}_0 = \underline{p} \times \underline{v}_0$ zodat $\underline{x} = \underline{p} + \lambda\underline{v}_0$ (rechte lijn). Hierbij is $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$ verondersteld. Hoe is het als $\underline{v}_0 = \underline{0}$? Zijn $\underline{c}$ en $\underline{v}_0$ lineair onafhankelijk dan is $(\underline{v}_0 \times \underline{c}, \underline{\dot{x}}) = 0$ en dus $(\underline{v}_0 \times \underline{c}, \underline{x}) = (\underline{v}_0 \times \underline{c}, \underline{p})$. Dit betekent: de baan ligt in het vlak door $\underline{p}$ evenwijdig met $\underline{c}$ en $\underline{v}_0$. Hoe kunt ge nu van deze wetenschap gebruik maken om de baan te vinden?

3. C is een vast punt. Een punt P beweegt zich zo dat de versnellingsvector op elk tijdstip lineair afhankelijk is van CP (*centrale beweging met centrum* C). Bewijs dat de baan een vlakke kromme is.
Aanw. Kies C als oorsprong, dan is identiek in t: $\underline{x} \times \underline{\ddot{x}} = \underline{0}$. Uit welk vectorproduct kan $\underline{x} \times \underline{\ddot{x}}$ door differentiatie naar t ontstaan?

4. Bepaal de baan van het punt $\underline{x}$ als $\underline{\ddot{x}} = -k^2\underline{x}$, ($k > 0$ en constant) terwijl gegeven is dat $\underline{x}$ zich op het tijdstip $t = 0$ met snelheid $\underline{v}_0$ bevindt in het punt $\underline{p}$.

5. In een plat vlak waarin OXY een orthonormaal assenstelsel is, beweegt een punt P(x,y), zodanig dat de versnelling van P op elk tijdstip gegeven is door de vector $(-\mu^2x, -9\mu^2y)$. Hierin is μ een positieve constante. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich met snelheid $(\mu p, 3\mu p)$ in de oorsprong ($p > 0$). Bepaal de baan van P. Schets deze voor $p = 4$ en geef nauwkeurig aan hoe de baan bij toenemende t wordt doorlopen.

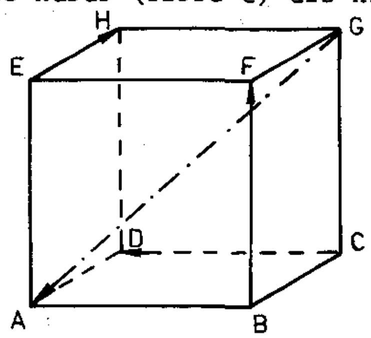
6. In een plat vlak waarin OXY een orthonormaal assenstelsel is, beweegt zich een punt P(x,y), zodanig dat op elk tijdstip de versnellingsvector van P gegeven door $(4\mu^2(x + 2p), \mu^2y)$ waarin μ en p positieve constanten zijn. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich met snelheid $(0, 2\mu p)$ in de oorsprong. Bepaal de baan van P.

7. Van een orthonormaal rechts assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ wordt de positieve zin op de x_k-as aangewezen door de eenheidsvector $\underline{e}_k$ $(k = 1,2,3)$. Een punt P met positievector $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$ beweegt ten opzichte van dit assenstelsel. De versnellingsvector van P is op elk tijdstip gelijk aan $-\mu^2(4\underline{x} - 3x_2\underline{e}_2 - 4c\underline{e}_3)$, waarin μ en c positieve constanten zijn. Op het tijdstip $t = 0$ is P met snelheid $\underline{v}_0 = (0,\mu c,0)$ in het punt $C(c,0,0)$. Bepaal de baan van P en schets deze in een duidelijke figuur.
<u>Aanw.</u> $\ddot{x}_1 = -4\mu^2x_1$; $\ddot{x}_2 = -\mu^2x_2$; $\ddot{x}_3 = -4\mu^2(x_3 - c)$. Dus $x_1 = c\cos 2\mu t$; $x_2 = c\sin \mu t$; $x_3 = 3(1 - \cos 2\mu t)$. Hieruit $x_1 + x_3 = c$ en $2x_2^2 = cx_3$. Baan is een deel van een parabool gelegen in het vlak $x_1 + x_3 = c$.

8. Bij een beweging van de ruimte V_2 ten opzichte van de ruimte V_1 beschouwt men een positie van V_2 waarbij de punten A, B en C van V_2 in deze volgorde ten opzichte van een in V_1 aangenomen orthonormaal assenstelsel $OX_1X_2X_3$ gegeven zijn door de coördinaten $(2,3,1)$, $(-1,0,2)$ en $(5,4,2)$. De snelheden van A, B en C zijn, ten opzichte van genoemd assenstelsel, $\underline{v}_A = (1,1,4)$, $\underline{v}_B = (5,-3,4)$ en $\underline{v}_C = (1,3,2)$. Bepaal voor de beschouwde positie de hoeksnelheid en de translatiesnelheid van de beweging en leid de vergelijking van de momentele schroefas af.

9. Van een star viervlak DABC staan de in D samenkomende ribben loodrecht op elkaar en hebben dezelfde lengte p. De eenheidsvectoren met dezelfde zin als $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ en $\overrightarrow{DC}$ worden $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ genoemd; zij vormen in deze volgorde een rechts driebeen. Het viervlak beweegt ten opzichte van een vast assenstelsel $Ox_1x_2x_3$, zodanig dat identiek in t de betrekkingen $(\underline{v}_A,\underline{b}) = 2\lambda p$, $(\underline{v}_A,\underline{c}) = -\lambda p$; $(\underline{v}_B,\underline{a}) = \lambda p$, $(\underline{v}_B,\underline{c}) = 0$; $(\underline{v}_C,\underline{a}) = (\underline{v}_C,\underline{b}) = \lambda p$ (p en λ constant) vervuld zijn. Onderzoek de beweging.
<u>Aanw.</u> Zij $\underline{\omega} = \omega_1\underline{a} + \omega_2\underline{b} + \omega_3\underline{c}$ de hoeksnelheid. Dan is: $(\underline{v}_A - \underline{v}_B,\underline{c}) =$ $= (\underline{\omega} \times (p\underline{a} - p\underline{b}),\underline{c}) = (p\underline{\omega}, \underline{a} \times \underline{c} - \underline{b} \times \underline{c}) = -p(\underline{\omega}, \underline{a} + \underline{b})$. Analoog $(\underline{v}_B - \underline{v}_C,\underline{a}) =$ $= -p(\underline{\omega}, \underline{b} + \underline{c})$ en $(\underline{v}_C - \underline{v}_A,\underline{b}) = -p(\underline{\omega}, \underline{c} + \underline{a})$. Dus: $\omega_1 + \omega_2 = \lambda$, $\omega_2 + \omega_3 = 0$, $\omega_3 + \omega_1 = \lambda$, zodat $\underline{\omega} = \lambda\underline{a}$. Men vindt nu verder: $\underline{v}_A = \lambda p(\underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c})$; $\underline{v}_B = \lambda p(\underline{a} + 2\underline{b})$; $\underline{v}_C = \lambda p(\underline{a} + \underline{b} - \underline{c})$; $\underline{v}_D = \underline{v}_A$. De momentele schroefas is $[\underline{a},p(2\underline{b} - \underline{c})]$; zij is dus vast verbonden met het viervlak; d.w.z. vast in de bewegende ruimte. Is zij ook vast in de rustende ruimte?

10. De kubus (ribbe c) die hier is getekend, beweegt door de ruimte. In de weergegeven stand hebben de snelheidsvectoren $\underline{v}_H$, $\underline{v}_B$ en $\underline{v}_G$ van de punten H, B en G dezelfde lengte μc ($\mu > 0$); $\underline{v}_H$ heeft dezelfde zin als $\overrightarrow{EH}$, $\underline{v}_B$ heeft dezelfde zin als $\overrightarrow{BC}$ en de hoeksnelheid van de kubus is in deze stand niet nul. Welke zin heeft $\underline{v}_G$? Bepaal de hoeksnelheid $\underline{\omega}$, de translatiesnelheid $\underline{\tau}$ en de ligging van de momentele schroefas in de kubus.

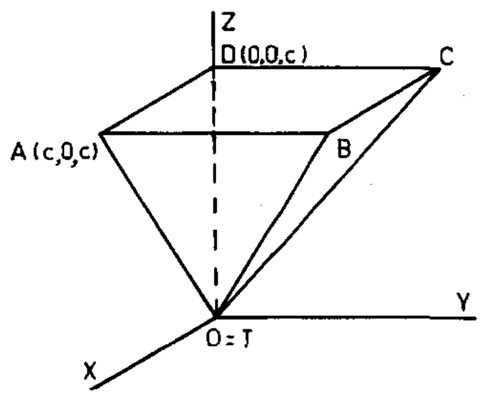


11. Bij een beweging van de ruimte V_2 ten opzichte van de ruimte V_1 beschouwt men de positie van V_2 waarbij de punten A, B en C van V_2 in deze volgorde ten opzichte van een in V_1 aangenomen orthonormaal assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ gegeven zijn door hun positievectoren (2,5,1), (1,1,1) en (3,0,2). De snelheden van A, B en C zijn ten opzichte van genoemd assenstelsel: $\underline{v}_A = (0,5,-2)$; $\underline{v}_B = (4,4,-8)$ en $\underline{v}_C = (3,5,-5)$. Bereken voor de beschouwde positie de hoeksnelheid $\underline{\omega}$, de translatiesnelheid $\underline{\tau}$ en stel een vergelijking op voor de *msa*.

12. Vaan een piramide (top T, hoogte c) is het grondvlak ABCD een vierkant met zijde c; de ribbe TD staat loodrecht op het grondvlak. Deze piramide neemt deel aan de volgende bewegingen.

I. Een *rotatie* met as TA en een hoeksnelheid groot $\rho\sqrt{2}$ voorgesteld door een vector die de zin heeft van $\overrightarrow{TA}$; ρ is een (positieve) constante. (*sleepbeweging.*)

II. Een schroefbeweging met schroefas DC, hoeksnelheid 2ρ (voorgesteld door een vector die de zin heeft van $\overrightarrow{DC}$) en translatiesnelheid $2\rho c$ in de zin van $\overrightarrow{CD}$ (*relatieve beweging*).



a) Bewijs dat ten opzichte van het vaste assenstelsel OXYZ van bijgaande figuur de hoeksnelheid van de absolute beweging wordt voorgesteld door de vector $\underline{\omega}_a = (\rho, 2\rho, \rho)$.

b) Bepaal van het punt B de sleepsnelheid, de relatieve snelheid en de absolute snelheid.

c) Bepaal met behulp van de in a en b gevonden resultaten de schroefas en de translatiesnelheid van de sleepbeweging. Teken deze schroefas in de figuur.

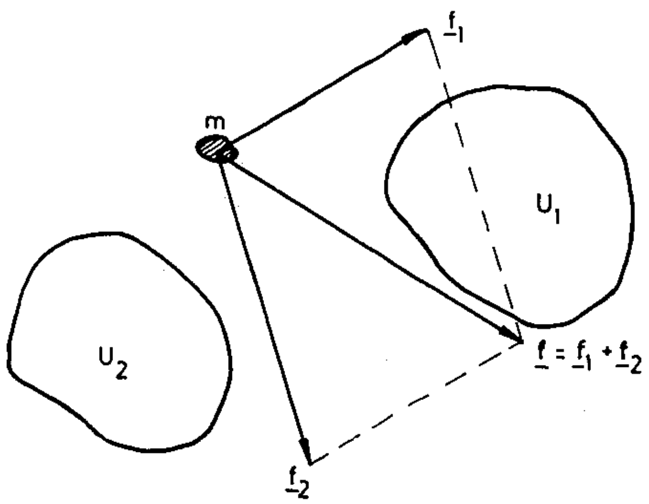
3. Inleiding tot de dynamica

3.1. De ervaring leert dat bewegende voorwerpen elkaar wederzijds kunnen beïnvloeden wat betreft het verloop van de beweging van elk van deze voorwerpen afzonderlijk. In de kinematica wordt hierover niet gerept. Zij maakt uitsluitend gebruik van twee grondbegrippen lengte en tijd en daaruit afgeleide begrippen zoals oppervlakte, snelheid, versnelling. Slechts met veel vallen en opstaan is men er in geslaagd enkele *fundamentele regels* op te stellen die het mogelijk maken voor een stelsel bewegende en elkaar beïnvloedende voorwerpen uit de bewegingstoestand op een bepaald ogenblik het verdere verloop van de beweging langs wiskundige weg af te leiden. Men kan zich verdiepen in de vraag of deze regels juist zijn, eventueel met allerlei nuances van wat in dit verband met "juist zijn" is bedoeld. Wij zullen dit niet doen, doch wel willen we vaststellen dat de fundamentele regels die we hier bedoelen, en die in de volgende paragraaf zullen worden genoemd, hun bruikbaarheid in hoge mate hebben bewezen. Het blijkt namelijk dat de bewegingen die zij voorspellen inderdaad bij waarneming worden geconstateerd.

3.2. Voor het formuleren van de meergenoemde regels wordt naast de grondbegrippen lengte en tijd het begrip *massapunt* ingevoerd. Een massapunt is een meetkundig punt voorzien van een *constante positieve* coëfficiënt m die de in het punt geconcentreerde *massa* wordt genoemd. Wat betreft de invloed die de omgeving op de beweging van het massapunt P uitoefent, wordt aangenomen dat deze voorgesteld kan worden door een vector met P als beginpunt. Deze vector $\underline{f}$ heet de *kracht* die op P werkt. Zijn U_1 en U_2 disjuncte delen van de omgeving van P en stellen $\underline{f}_1$ en $\underline{f}_2$ de invloeden voor die ze op de beweging van P hebben, dan wordt de invloed van hun vereniging $U_1 \cup U_2$ op de beweging weergegeven door de vector $\underline{f} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ (*parallelogram* van krachten). We nemen verder aan dat de beide volgende regels gelden:

I. Als op een punt P met massa m op zeker tijdstip de kracht $\underline{f}$ werkt, voldoet de versnelling $\underline{a}$ van P op dit tijdstip aan de betrekking $\underline{f} = m\underline{a}$.

II. Als de invloed van een massapunt P_2 op de beweging van een massapunt P_1 op zeker tijdstip wordt gerepresenteerd door de vector $\underline{f}_{21}$ dan wordt de invloed van P_1 op de beweging van P_2 op dit tijdstip voorgesteld door de vector $\underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}$; beide vectoren hebben P_1P_2 als drager (actie = reactie).



De mechanica die aan de bovenstaande fundamentele regels gehoorzaamt wordt de *klassieke mechanica* genoemd. Zij is door Newton (1643-1727) voor het eerst systematisch opgebouwd. Zijn werk vormt een afsluiting van een ontwikkeling die reeds 20 eeuwen voor hem is aangevangen. En op hun beurt is ook de mechanica van Newton weer het begin van een periode waarin steeds nieuwe problemen om een oplossing vragen. Aangename lectuur over de geschiedenis van de mechanica tot en met het optreden van Newton biedt:

> M. Fierz, Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik (Lecture Notes in Physics no. 15), Springer-Verlag, Berlin etc. 1972,

een boekje van 97 bladzijden, waarvan 2 blz. met literatuuropgaven.

3.3. Kepler formuleerde als resultaat van een grondige studie van waarnemingsmateriaal afkomstig van Tycho Brahe voor de beweging van de planeten de volgende beroemd geworden wetten:

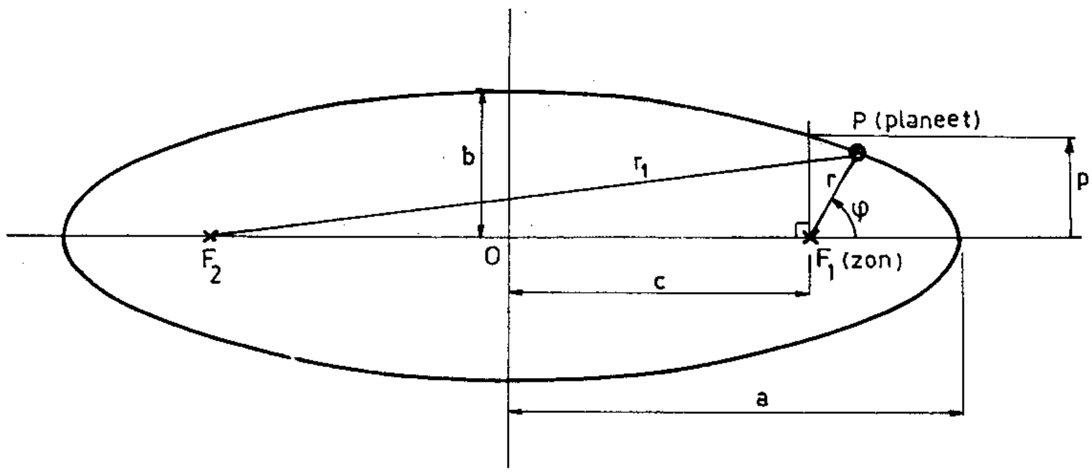
I. Elke planeet beschrijft een ellips waarvan één van de brandpunten in de zon valt.

II. De perksnelheid is hierbij constant.

III. Van twee verschillende planeten verhouden zich de kwadraten van de omloopstijden als de derde machten van de lange assen van hun banen.

De diepere betekenis van deze wetten is door Newton gevonden. Kort samengevat en vergaand gemoderniseerd (waardoor de geniale prestatie van Newton nauwelijks aan het licht komt), kan het onderzoek van Newton als volgt worden weergegeven.

We beschouwen de zon en een van de planeten beide als massapunt die elkaar in hun beweging beïnvloeden. De zon wordt geacht zich niet te bewegen en bevindt zich in een van de brandpunten van de baan van de planeet, een ellips volgens de eerste wet van Kepler.



Met a en b geven we de lengte van de halve lange en de halve korte as aan en met c de halve brandpuntsafstand. Bevindt de zon zich in F_1 dan noemen we $|F_1P|$ r en $|F_2P|$ noemen we r_1, terwijl φ de hoek is tussen F_1F_2 en F_1P. Voor een ellips geldt $r + r_1 = 2a$ terwijl

$$r_1^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi$$

waaruit:

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi$$

$$a^2 - ar = c^2 + cr \cos \varphi \, .$$

Voorts geldt $c^2 = a^2 - b^2$, zodat de laatste regel kan worden geschreven als:

$$b^2 = ar + cr \cos \varphi \, ,$$

waaruit:

$$r = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi} = \frac{b^2/a}{1 + c/a \cos \varphi} \, .$$

Noemen we $p = b^2/a$ de *parameter* of, de halve dikte van de ellips, en $\varepsilon = c/a$, $0 \leq \varepsilon < 1$, de *excentriciteit* van de ellips, dan geldt dus:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} .$$

Uit de tweede wet van Kepler volgt:

$$r^2\dot{\varphi} = h \text{ (constant)} .$$

Dus:

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 .$$

Dit betekent dat de versnelling van P steeds langs F_1P valt. Deze versnelling is:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} .$$

Uit $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p$ volgt:

$$\dot{r}(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon r\dot{\varphi} \sin \varphi$$

of: $p\dot{r} = \varepsilon h \sin \varphi$ en dus:

$$p\ddot{r} = \varepsilon \frac{h^2}{r^2} \cos \varphi = \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{p}{r} - 1\right) = \frac{ph^2}{r^3} - \frac{h^2}{r^2} .$$

Derhalve is:

$$a_r = -\frac{h^2}{pr^2} .$$

De versnelling is dus naar F_1 *gericht en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand van P tot* F_1*, waar de zon zich bevindt.*

De evenredigheidsfactor $\frac{h^2}{p}$ schijnt nog af te hangen van de beschouwde planeet. Volgens de tweede wet, de perksnelheid $\frac{1}{2}h$ is constant, geldt voor de omloopstijd T:

$$\tfrac{1}{2}hT = \pi ab \text{ (het oppervlak van de ellips)} .$$

Dus:

$$hT = 2\pi ab = 2\pi a\sqrt{pa} ,$$

waaruit:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{p}{h^2} .$$

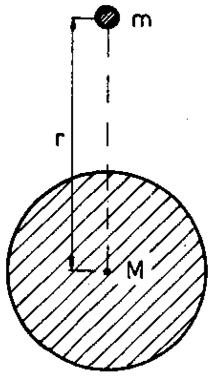
Volgens de derde wet van Kepler is de waarde van $\frac{T^2}{a^3}$ voor alle planetenbanen gelijk, zodat dit ook geldt voor de grootheid:

$$\mu^2 = \frac{h^2}{p} , \mu > 0 .$$

De versnellingswet luidt dus:

$$a_r = - \frac{\mu^2}{r^2} ,$$

waarbij μ *voor alle planeten van het stelsel dezelfde is.*
Kepler formuleerde zijn wetten voor het planetenstelsel. Latere waarnemingen toonden dat ze ook gelden voor het stelsel gevormd door Jupiter en zijn manen. Ook hier geldt dus eenzelfde versnellingswet doch met een andere waarde van de constante μ. De gevolgtrekking die Newton maakte, was dan ook dat μ bepaald wordt door de massa in het centrum. Hij stelde $\mu^2 = fm_c$ waarin m_c deze massa is en f een constante voorstelt. Is m de massa van de planeet (of maan) dan is dus de kracht die op de planeet wordt uitgeoefend $f \frac{m_c m}{r^2}$. De grote stap die Newton deed, was dat hij deze wet algemene geldigheid toekende: *twee massapunten met massa's* m_1 *en* m_2 *op een afstand* r *van elkaar, trekken elkaar aan met een kracht* $f \frac{m_1 m_2}{r^2}$ *(gravitatiewet;* f heet de *gravitatieconstante* en is een universele constante). Deze wet beheerst dus ook de beweging van de maan om de aarde en de beweging van vallende voorwerpen.



Een vallend voorwerp op aarde beweegt onder invloed van een kracht die gericht is naar het middelpunt van de aarde; de grootte van de kracht bedraagt:

$$K = f \frac{Mm}{r^2} .$$

De bijbehorende versnelling is $g = -f \frac{M}{r^2}$, gemeten vanuit het middelpunt van de aarde.
In de buurt van het aardoppervlak heeft g de waarde:

$$g \sim 9{,}81 \text{ m/sec}^2 .$$

3.4. In de natuur is de massa niet geconcentreerd in meetkundige punten. Veeleer is het zo dat we ons ruimtedelen moeten voorstellen die geheel met massa zijn gevuld (of met massa zijn belegd). Zo'n ruimtedeel wordt een *materieel* of *stoffelijk lichaam* genoemd. Zij L een stoffelijk lichaam, G het ruimtedeel dat door L wordt ingenomen, P een punt van G en U een deel van G dat P bevat. De massa waarmee U is gevuld, noemen we $m(U)$ en de meetkundige maat van U geven we met $\mu(U)$ aan. Het quotiënt $m(U)/\mu(U)$ kan dan de *gemiddelde massa* in U worden genoemd. We veronderstellen dat dit quotiënt een limiet heeft als $\mu(U) \to 0$, zodanig dat P steeds tot U blijft behoren (dus als U zich samentrekt op P). Deze limiet heet de *massadichtheid van* L in het punt P. We geven deze met $\sigma(P)$ aan; uiteraard is $\sigma(P) \geq 0$. Het kan voorkomen dat $\sigma(P)$ niet afhangt van de keuze van P in G. In dit geval heet L *homogeen*. De massa van L is dan $M = \sigma\mu(G)$ waarin σ de constante massadichtheid is. Is $\sigma(P)$ niet constant dan wordt de massa van L voorgesteld door de integraal

$$(3.4.1) \qquad M = \int_G \sigma(P)\,d\mu ,$$

die enkelvoudig, tweevoudig of drievoudig is al naar gelang L lijnvormig, plaatvormig of driedimensionaal is. Men noemt $\sigma(P)d\mu = dm$ het *massaelement* in P.
Let er op dat een stoffelijk lichaam niet een verzameling is van oneindig veel massapunten P_i met massa's m_i. Immers dan zou elk stoffelijk lichaam een oneindig grote massa hebben. Wel kunnen we aan elk punt P_i een massaelement $(dm)_i$ toewijzen. We gaan nu een slordige notatie invoeren. Dit massaelement geven we met m_i aan; met op de achtergrond de gedachte dat een integraal een limiet is van een som, schrijven we voor (3.4.1) brutaalweg: $M = \Sigma m_i$. Het lijkt onvergeeflijk slordig, doch het bespaart heel wat geschrijf en gepraat.

Dit blijkt al direct zeer duidelijk wanneer een *materieel* (of *mechanisch*) *stelsel* ter sprake komt. Dit is een stelsel waarin naast een aantal stoffelijke lichamen ook nog massapunten kunnen voorkomen. De totale massa van dit stelsel kunnen we nu noteren als $M = \Sigma m_i$ waarbij de "som" moet worden uitgestrekt over alle punten die met massa behept zijn. In werkelijkheid is deze "som" de echte som van een aantal integralen (te danken aan de stoffelijke lichamen) vermeerderd met de echte som van een aantal massa's (afkomstig van de massapunten, die uiteraard eindig in aantal zijn). Wiskundig kan de zaak onberispelijk worden gemaakt zodra we de beschikking hebben over een integraalbegrip dat ietwat ruimer is dan de Riemann-integraal, de enige die we in dit stadium bekend mogen veronderstellen.

3.5. Van een mechanisch stelsel zij P_i (positievector $\underline{x}_i$) een punt behept met massa m_i. We voeren in de vector $\underline{z}$ bepaald door

$$(3.5.1) \qquad m\underline{z} = \Sigma m_i \underline{x}_i ,$$

waarin $m = \Sigma m_i$ de totale massa van het stelsel is. Zij Z het punt met positievector $\underline{z}$. *Dit punt hangt niet van de keuze van het assenstelsel af.* If namelijk O' (met $\overrightarrow{OO'} = \underline{d}$) oorsprong van een ander assenstelsel en $\underline{x}_i'$ de positievector van P_i ten opzichte van dit stelsel, dan zou in plaats van $\underline{z}$ komen de vector $\underline{z}'$ bepaald door $m\underline{z}' = \Sigma m_i \underline{x}_i'$. Wegens $\underline{x}_i = \underline{x}_i' + \underline{d}$ is nu:

$$m\underline{z} = \Sigma m_i(\underline{x}_i' + \underline{d}) = \Sigma m_i \underline{x}_i' + m\underline{d} = m\underline{z}' + m\underline{d} .$$

Bijgevolg: $\underline{z} = \underline{z}' + \underline{d}$. Dit betekent dat $\underline{z}'$ ten opzichte van het tweede assenstelsel de positievector is van het bovengenoemde punt Z. Dit punt is derhalve ondubbelzinnig bepaald door het stelsel en heet het *massamiddelpunt* hiervan.
Van de massapunten $P_1,\ldots,P_n$ met positievectoren $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$, massa's $m_1,\ldots,m_n$ en gezamenlijke massa m is de positievector $\underline{z}$ van het massamiddelpunt Z bepaald door

$$(3.5.2) \qquad m\underline{z} = \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{x}_k .$$

Zij S een mechanisch stelsel bestaande uit de lichamen L_k $(k = 1,\ldots,n)$, M_k de massa van L_k, $\underline{z}_k$ de positievector van het massamiddelpunt Z_k van L_k en M de totale massa van S. Dan is $M_k \underline{z}_k = \Sigma m_i x_i$, het tweede lid uit te strekken over het gehele lichaam L_k. Voor de positievector $\underline{z}$ van het massamiddelpunt

Z van S vindt men dus:

$$M\underline{z} = \sum_{k=1}^{n} M_k \underline{z}_k \ .$$

Bijgevolg is Z het massamiddelpunt van n massapunten met massa's M_k geplaatst in de massamiddelpunten Z_k $(k = 1,\ldots,n)$. Het is nu natuurlijk verleidelijk (en misschien verwacht de lezer het ook) een lange serie vraagstukken op te geven waarin van allerlei lichamen het massamiddelpunt moet worden bepaald. Dat is echter meer een oefening (en een goede!) in integreren dan een toetsing van mechanisch inzicht. We laten dit daarom achterwege en noemen slechts een tweetal algemene stellingen waarvan men bij het oplossen van zulke vraagstukken profijt kan hebben. Een mechanisch stelsel heeft een *middelpunt* C als met elk punt X_i van het stelsel ook het punt X_i' bepaald door $CX_i' = -CX_i$ tot het stelsel behoort. Zijn X_i en X_i' behept met dezelfde massa m_i dan zegt men dat de massaverdeling symmetrisch is ten opzichte van C. De volgende stelling is nu gemakkelijk te bewijzen.
Is van een mechanisch stelsel met middelpunt de massaverdeling symmetrisch ten opzichte van dit middelpunt, dan valt het massamiddelpunt van het stelsel samen met genoemd middelpunt.
Een vlak π heet een *symmetrievlak* van een mechanisch stelsel S als aan elk punt X_i van S een punt X_i' van S kan worden toegevoegd, zodanig dat X_iX_i' een vaste richting (de symmetrierichting) heeft en het midden van X_iX_i' in π ligt. Zijn X_i en X_i' ook nog steeds met dezelfde massa behept dan is π ook een symmetrievlak voor de massaverdeling.

De volgende stelling is nu eenvoudig in te zien: *Hebben een stoffelijk stelsel en zijn massaverdeling hetzelfde symmetrievlak π, dan ligt het massamiddelpunt in π.*

3.6. Bij de invoering van het begrip stoffelijk lichaam is gebruik gemaakt van begrippen uit de analyse zoals volume-, oppervlakte-, lijnelement en naderhand ook van het begrip massaelement. Een voor de hand liggende stap is de invoering van *krachtelementen*. We doen dit door de volgende modificatie van de fundamentele regels I en II van 3.2.

I*. Als op een punt P van een mechanisch stelsel waar zich het massaelement $dm = \sigma(P)d\mu = \sigma d\mu$ bevindt, op het tijdstip t het krachtelement $d\underline{f}$ aangrijpt, wordt de versnelling op dit tijdstip bepaald door:

$$d\underline{f} = (dm)\underline{a} = (\sigma d\mu)\underline{a} \ .$$

Dit is een differentiële regel een regel in "het kleine". Een integratieproces is nodig om uit te maken wat er aan beweging resulteert, want alleen de uitkomst hiervan kan door waarneming en experiment worden getoetst. We volstaan in dit stadium met de vermelding dat de uitslag van de toets de stap die we hebben ondernomen, rechtvaardigt.

II*. Als de invloed die een punt P_2 van een lichaam uitoefent op een punt P_1 van hetzelfde of van een ander lichaam door het krachtelement $(d\underline{f})_{21}$ wordt voorgesteld dan representeert $(d\underline{f})_{12} = -(d\underline{f})_{21}$ te zelfder tijd de invloed van P_1 op P_2; beide krachtelementen hebben dezelfde drager P_1P_2.

3.7. Zij P_i een punt van een mechanisch stelsel en m_i de massa waarmee P_i behept is; m_i kan dus een massaelement zijn. De totale op P_i werkende kracht zij $\underline{f}_i$, zodat $\underline{f}_i$ ook een krachtelement kan zijn. De som van alle door vectoren gerepresenteerde invloeden op de beweging van P_i is dus $\underline{f}_i$. Onder deze invloeden zijn er die afkomstig zijn van punten die tot het gegeven stelsel S behoren. De kracht die het punt $P_j \in S$ op het punt $P_i \in S$ uitoefent noemen we $\underline{f}_{ji}$, een *inwendige kracht*. De som van alle overige krachten die op P_i worden uitgeoefend noemen we $\underline{f}_{iu}$, de *uitwendige kracht*.
De totale op P_i uitgeoefende kracht $\underline{f}_i$, kan dus worden voorgesteld door:

$$\underline{f}_i = \underline{f}_{iu} + \sum_j \underline{f}_{ji} \ ,$$

waarbij de "som" moet worden gerekend over alle van P_i verschillende punten van S. Volgens onze fundamentele regels geldt:

$$\underline{f}_{ji} = -\underline{f}_{ij} \ ,$$

met als gevolg dat *voor elk mechanisch stelsel op elk tijdstip de vectorsom van alle inwendige krachten de nulvector is.*

Voor de totale kracht die op een mechanisch stelsel wordt uitgeoefend en die kan worden voorgesteld door

$$\sum_i \underline{f}_i \ ,$$

waarbij "de som" gerekend wordt over alle punten van S, kan dan de volgende stelling worden opgesteld:

De vectorsom van alle op een mechanisch stelsel werkende krachten is gelijk aan de vectorsom van alle uitwendige krachten die op het stelsel werken.

3.8. Zij S een mechanisch stelsel met totale massa m, X_i een punt van S met positievector $\underline{x}_i$ en behept met de massa m_i. De kracht die op X_i werkt, noemen we $\underline{f}_i$. Dan is $\underline{f}_i = m_i\ddot{\underline{x}}_i$. Zij $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z van S, zodat dus $m\underline{z} = \Sigma m_i\underline{x}_i$. Dan is $m\ddot{\underline{z}} = \Sigma m_i\ddot{\underline{x}}_i = \Sigma \underline{f}_i$. Het laatste lid is gelijk aan de vectorsom $\underline{f}_u$ van alle uitwendige krachten die op S werken. Bijgevolg is $\underline{f}_u = m\ddot{\underline{z}}$. Derhalve: *de beweging van het massamiddelpunt van een mechanisch stelsel met massa* m *stemt overeen met die van een massapunt met massa* m *geplaatst in het massamiddelpunt van het stelsel onder invloed van een kracht gelijk aan de vectorsom van alle uitwendige krachten die op het stelsel werken.*

3.9. Onder de *impuls* van een massapunt met massa m en snelheid $\underline{v}$ verstaat men de vector $\underline{p} = m\underline{v}$. Onder de *impuls van een stelsel* S verstaan we de vector:

$$\underline{p} = \sum_i m_i\underline{v}_i \ ,$$

waarbij de som genomen wordt over de punten $P_i \in S$ met massa(element) m_i en snelheid $\underline{v}_i$.

Zij P een massapunt met impuls $\underline{p}$ en Q een willekeurig punt. Onder het *impulsmoment van* P *ten opzichte van* Q verstaat men de momentvector in Q van de speer met speervector $\underline{p}$ waarvan de drager door P gaat.

We beschouwen nu een mechanisch stelsel S bestaande uit punten P_i met positievectoren $\underline{x}_i$ en massa's m_i. Het impulsmoment van P_i ten opzichte van $\underline{q}$ is dan $(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\dot{\underline{x}}_i$. We definiëren: het impulsmoment van S ten opzichte van $\underline{q}$ is de vector

(3.9.1) $\quad \underline{D} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\dot{\underline{x}}_i \ .$

Hieruit volgt:

(3.9.2) $\quad \underline{\dot{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times m_i\underline{\ddot{x}}_i - \underline{\dot{q}} \times \Sigma m_i\underline{\dot{x}}_i$.

Nu is $m_i\underline{\ddot{x}}_i = \underline{f}_i$ de kracht die op P_i werkt. Twee inwendige krachten $\underline{f}_{ij}$ en $\underline{f}_{ji} = -\underline{f}_{ij}$ hebben dezelfde drager. De som van hun momenten ten opzichte van Q is dus een nulvector. Voor (3.9.2) kan dus worden geschreven:

(3.9.3) $\quad \underline{\dot{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times \underline{f}_{iu} - \underline{\dot{q}} \times \Sigma m_i\underline{\dot{x}}_i$

waarin $\underline{f}_{iu}$ de uitwendige kracht op P_i is. Is $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z van S dan is $\Sigma m_i\underline{\dot{x}}_i = m\underline{\dot{z}}$ waarin m de totale massa van S is. Hierdoor gaat (3.9.3) over in

(3.9.4) $\quad \underline{\dot{D}} = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{q}) \times \underline{f}_{iu} - m\underline{\dot{q}} \times \underline{\dot{z}}$.

Wanneer $\underline{q}$ een vast punt is en ook wanneer $\underline{q}$ het massamiddelpunt is van het stelsel, is $\underline{\dot{q}} \times \underline{\dot{z}} = \underline{0}$. Hiermee is aangetoond: *de fluxie van het impulsmoment van een mechanisch stelsel ten opzichte van een vast punt is gelijk aan de som van de momenten van de uitwendige krachten die op het stelsel werken ten opzichte van dit punt.* In de stelling mag in plaats van *vast punt* ook *massamiddelpunt* worden gelezen.

Deze stelling en die van de vorige paragraaf gelden voor elk mechanisch stelsel star of niet star. We zullen ze aanhalen onder de naam *algemene theorema's*. Omdat noch de vectorsom van een krachtenstelsel, noch de som van de momenten van de krachten van het stelsel ten opzichte van eenzelfde punt verandert als elke kracht willekeurig langs zijn drager wordt verschoven, kunnen bij het toepassen van de algemene theorema's de krachten als speren worden beschouwd.

4. Statica of evenwichtsleer

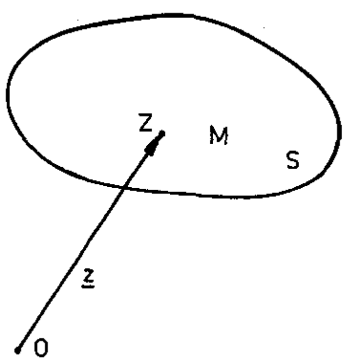
4.1. Een mechanisch stelsel heet in *evenwicht* wanneer het *blijvend* in rust is; hierin betekent *blijvend*: *gedurende een eindig tijdsinterval.*
We beschouwen een mechanisch stelsel S dat in evenwicht is. De verzameling van de uitwendige krachten die op S werken, noemen we $\underset{\sim}{K}$. Volgens de algemene theorema's van 3.8 en 3.9 voldoet $\underset{\sim}{K}$ aan de volgende twee voorwaarden:

V1. De som van de vectoren van de krachten waaruit $\underset{\sim}{K}$ bestaat, is nul.

V2. De som van de momenten van deze krachten ten opzichte van een vast punt is nul.

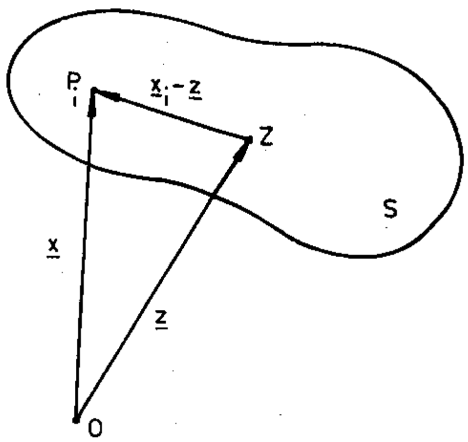
In het vervolg zullen we elke verzameling krachten die aan de voorwaarden V1 en V2 voldoet een *neutraal krachtenstelsel* noemen. Dan geldt dus: *als een mechanisch stelsel in evenwicht is, vormen de uitwendige krachten die er op werken een neutraal stelsel.* Anders gezegd: *noodzakelijk* voor het evenwicht van een mechanisch stelsel is dat de uitwendige krachten die er op werken een neutraal stelsel vormen.
Is deze voorwaarde ook voldoende? We gaan uit van een mechanisch stelsel S dat uitwendige krachten ondervindt die samen een neutraal stelsel vormen. De algemene theorema's garanderen dan:

1. de versnelling van het massamiddelpunt Z van S is blijvend nul;
2. de fluxie van het impulsmoment $\underline{D}$ van S ten opzichte van een vast punt 0 dat we als oorsprong kiezen, is blijvend nul.



Uit 1 kunnen we slechts de conclusie trekken dat de snelheid van Z constant is. Hieruit volgt dat S niet blijvend in rust behoeft te zijn. We zullen daarom aan onze veronderstellingen nog toevoegen *dat op zeker tijdstip* t_0 *alle punten van* S *de snelheid nul hebben.* Dan is de snelheid van Z blijvend nul: Z is een vast punt.

Uit 2 volgt dat $\underline{D}$ constant is. Dus geldt blijvend: $\underline{D} = \underline{0}$. Hieruit kunnen we nog steeds niet besluiten dat het stelsel blijvend in rust is. Om dit in te zien, veronderstellen we dat S bestaat uit twee massapunten P_1 en P_2 beide met massa m en dat op S geen uitwendige krachten werken. De enige krachten zijn dan die waarmee de punten elkaar volgens de gravitatiewet aantrekken en dit zijn inwendige krachten. Stel nu dat de punten op een afstand r van elkaar zonder beginsnelheid worden losgelaten. Ze bewegen zich dan naar elkaar toe. Het massamiddelpunt is hierbij blijvend in rust en $\underline{D}$ is blijvend nul. De oorzaak dat dit stelsel niet blijvend in rust is, schuilt natuurlijk daarin dat het niet star is. We voegen daarom aan onze veronderstellingen nog toe dat het aanvankelijk beschouwde stelsel *star* is en vatten de draad weer op bij het punt waar we constateerden dat $\underline{D}$ blijvend nul is. Zij $\underline{z}$ de positievector van het massamiddelpunt Z waarvan we al weten dat het een vast punt is. Laat S bestaan uit punten $\underline{x}_i$ behept met massa's m_i; de totale massa van het stelsel noemen we m. Het impulsmoment ten opzichte van Z is



$$\underline{D}_z = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{z}) \times (m_i\dot{\underline{x}}_i) = \Sigma\underline{x}_i \times (m_i\dot{\underline{x}}_i) - \underline{z} \times \Sigma m_i\dot{\underline{x}}_i =$$

$$= \underline{D} - \underline{z} \times (m\dot{\underline{z}}) = \underline{0} ,$$

immers $\underline{D} = \dot{\underline{z}} = \underline{0}$.

We stellen $\overrightarrow{ZX_i} = \underline{x}_i - \underline{z} = \underline{z}_i$. Dan is $\dot{\underline{x}}_i = \dot{\underline{z}}_i$ en $\underline{D}_z = \Sigma\underline{z}_i \times (m_i\dot{\underline{z}}_i)$. Is $\underline{\omega}$ de hoeksnelheid dan is $\dot{\underline{z}}_i = \underline{\omega} \times \underline{z}_i$ en dus

$$\Sigma\underline{z}_i \times (m_i\dot{\underline{z}}_i) = \Sigma\underline{z}_i \times (m_i\underline{\omega} \times \underline{z}_i) = \underline{D}_z = \underline{0} .$$

Hieruit volgt

$$(\underline{\omega},\underline{D}_z) = \Sigma(\underline{\omega},\underline{z}_i \times (m_i\underline{\omega} \times \underline{z}_i)) = 0$$

zodat

$$\Sigma m_i(\underline{\omega} \times \underline{z}_i, \underline{\omega} \times \underline{z}_i) = \Sigma m_i(\dot{\underline{z}}_i,\dot{\underline{z}}_i) = 0$$

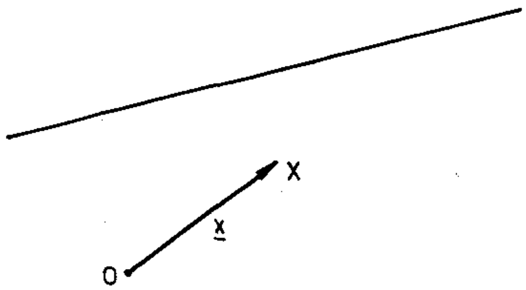
op elk tijdstip t. Wegens $m_i > 0$ en $(\dot{\underline{z}}_i,\dot{\underline{z}}_i) \geq 0$ (waarbij gelijkheid alleen optreedt voor $\dot{\underline{z}}_i = \underline{0}$) volgt uit het bovenstaande dat $\dot{\underline{z}}_i$ blijvend nul is voor elk punt X_i. Dus S is in evenwicht. Hiermee is bewezen: *opdat een star mechanisch stelsel in evenwicht verkeert, is nodig en voldoende dat de uitwendige krachten die er op werken blijvend een neutraal stelsel vormen en dat er één tijdstip is waarop alle punten van het stelsel de snelheid nul hebben.*

4.2. Bij het beoordelen of een krachtenstelsel al dan niet neutraal is, kunnen de krachten als speren, glijdende vectoren, worden opgevat. We zullen dan ook een kracht voorstellen door $\underline{F} = [\underline{f},\underline{f}^*]$. Hierin is $\underline{f}$ de krachtvector en $\underline{f}^*$ de momentvector in de oorsprong 0 ($\underline{f} \neq \underline{0}$; $(\underline{f},\underline{f}^*) = 0$). De drager van de kracht is

$$\underline{x} = \frac{\underline{f} \times \underline{f}^*}{(\underline{f},\underline{f})} + \lambda\underline{f} .$$

4.3. Zij $\underset{\sim}{K}$ een krachtenstelsel (dat ook krachtelementen mag bevatten en dus uit oneindig veel exemplaren kan bestaan). We geven de exemplaren van $\underset{\sim}{K}$ met $\underline{F}_i = [\underline{f}_i,\underline{f}_i^*]$ aan; $\underline{f}_i \neq \underline{0}$, $(\underline{f}_i,\underline{f}_i^*) = 0$. Voorwaarde is dat de vectorsom $\underline{r} = \Sigma\underline{f}_i$ en de som $\underline{m}_0 = \Sigma\underline{f}_i^*$ van de momentvectoren in 0 *beide eindig* zijn. Onder de *momentvector* van $\underset{\sim}{K}$ in een punt verstaat men de som van de momentvectoren van de exemplaren van $\underset{\sim}{K}$ in dit punt. Zo is $\underline{m}_0$ dus de momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in 0.

De momentvector van $\underline{F}_i$ in het punt $\underline{x}$ is $\underline{f}_i^* - \underline{x} \times \underline{f}_i$.

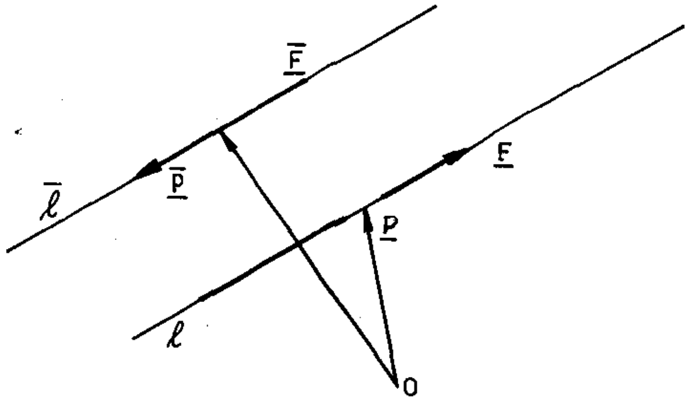


De momentvector van $\underset{\sim}{K}$ in $\underline{x}$ is dus

(4.3.1) $\quad \underline{m}_X = \underline{m}_0 - \underline{x} \times \underline{r}$.

Door deze formule is een afbeelding gedefinieerd; bij elk punt X behoort een vector $\underline{m}_X$. Het vectorpaar dat het vectorveld $\underline{m}_X$ voortbrengt is $\{\underline{r},\underline{m}_0\}$. Naar analogie van de snelheidsschroef noemen we $\{\underline{r},\underline{m}_0\}$ *een krachtschroef.*
Het momentenveld dat wordt voortgebracht door deze krachtschroef heet het *momentenveld van het krachtenstelsel.*
Twee krachtenstelsels met hetzelfde momentenveld heten *statisch equivalent.*
Eenvoudig is in te zien dat:
Twee krachtenstelsel $\underline{K}_1$ *en* $\underline{K}_2$ *zijn dan en slechts dan statisch equivalent als ze dezelfde vectorsom en in éénzelfde punt dezelfde momentvector hebben.*
Een andere stelling is:
Nodig en voldoende voor statische equivalentie van twee krachtenstelsels is, dat hun momentvectoren in drie niet op één lijn gelegen punten gelijk zijn.
(Bewijs beide stellingen!)

4.4. Volgens (4.3.1) is het momentenveld van een krachtenstelsel dan en alleen dan homogeen als de vectorsom van het stelsel nul is. De bijbehorende krachtschroef is dan van de vorm $\{\underline{0},\underline{m}\}$ en kan dus worden opgevat als een kracht nul met $[\underline{0},\underline{m}]$ als oneigenlijke drager. Zulk een kracht zullen we een *oneigenlijke kracht* noemen (*kracht* zonder meer betekent steeds *eigenlijke kracht*). Het eenvoudigste krachtenstelsel met vectorsom nul bestaat uit twee tegengesteld gerichte krachten met dezelfde norm en verschillende dragers (zie de figuur).



Zo'n stelsel heet een *koppel* en kan worden voorgesteld door $\{F,\bar{F}\}$ waarbij $F = [f,f]$ en $\bar{F} = [-f,\bar{f}]$. Is p een punt op de drager van F en $\bar{p}$ een punt op de drager van $\bar{F}$ dan heeft het koppel in elk punt de momentvector $m = (p - \bar{p}) \times f$. Deze vector, die ook het *moment van het koppel* of de *koppelvector* wordt genoemd, staat blijkbaar loodrecht op het vlak door de dragers ℓ en $\bar{\ell}$ van de *koppelkrachten* F en $\bar{F}$. Dit vlak heet het *koppelvlak*. Een en ander is in overeenstemming met de opvatting van het koppel als een kracht nul met drager $[0,m]$, de oneigenlijke rechte van het koppelvlak.

Hoewel volgens de definitie het moment van een koppel geen nulvector kan zijn, is het om sommige uitspraken over krachtenstelsels algemene geldigheid te geven, doelmatig ook koppels met moment nul toe te laten (*nulkoppels*). Onder een nulkoppel heeft men dan te verstaan een koppel waarvan de beide koppelkrachten nulsperen zijn. Het vlak van een nulkoppel blijft onbepaald. Gemakkelijk is in te zien: elk krachtenstelsel met vectorsom nul is statisch equivalent met een koppel waarvan de koppelvector gelijk is aan de momentvector van het stelsel. Een bijzonder geval hiervan is: een verzameling koppels is statisch equivalent met één koppel waarvan de koppelvector gelijk is aan de som van de koppelvectoren van de gegeven koppels.

4.5. We beschouwen nog eens het krachtenstelsel K van 4.3 waarvan het momentenveld gegeven is door (4.3.1). Dit stelsel is statisch equivalent met het stelsel bestaande uit de kracht $R_\sigma = [r,0]$ waarvan de drager door 0 gaat en het koppel K_σ met koppelvector m. De overgang van K naar het statisch equivalente stelsel $\{R_\sigma,K_\sigma\}$ heet de *reductie van* K *op het punt* 0. Om K te reduceren op het punt C (positievector c), kan men als volgt te werk gaan. De momentvector van K in C is $m_c = m - c \times r$. Stel nu $c \times r = r^*$ en beschouw het stelsel $\{R_c,K_c\}$ gevormd door de kracht $R_c = [r,r^*]$ waarvan de drager door C gaat, en het koppel K_c met koppelvector m_c. Bij dit stelsel behoort

$\{\underline{r},\underline{r}^* + \underline{m}_c\} = \{\underline{r},\underline{m}\}$ als krachtschroef. Het is dus statisch equivalent met $\underset{\sim}{K}$. Bij deze reductie op C pleegt men $\underline{R}_c$ de *resulterende kracht* en $\underline{K}_c$ het *resulterend koppel* te noemen; samen vormen ze de *resultante*.
Het moment van de krachtschroef $\underset{\sim}{K} = \{\underline{r},\underline{m}\}$ in een punt X met plaatsvector $\underline{x}$, wordt voorgesteld door:

$$\underline{m}_x = \underline{m} - \underline{x} \times \underline{r} .$$

Van de krachtschroef is $\underline{r}$ onafhankelijk van de keuze van de oorsprong. Hetzelfde geldt voor het inproduct:

$$(\underline{r},\underline{m}_x) = (\underline{r},\underline{m}) \qquad \text{voor alle X} .$$

Veronderstellen we $\underline{r} \neq \underline{0}$, dan kunnen we $\underline{m}$ op de volgende wijze ontbinden:

$$\underline{m} = \sigma\underline{r} + \underline{r}^* ,$$

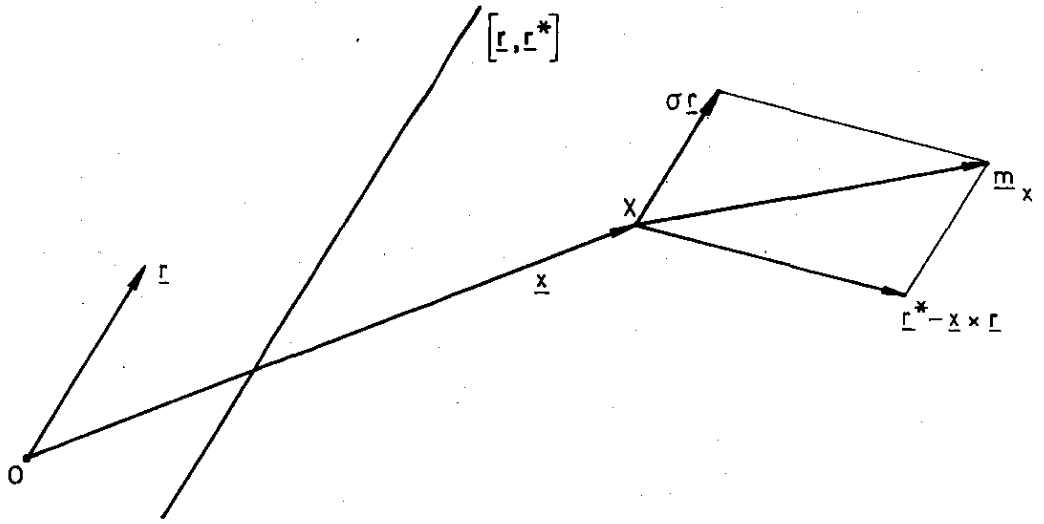
waarbij $(\underline{r}^*,\underline{r}) = 0$,

$$(\underline{r},\underline{m}) = \sigma(\underline{r},\underline{r}) , \quad \sigma = \frac{(\underline{r},\underline{m})}{(\underline{r},\underline{r})} .$$

Het getal σ is dus ook onafhankelijk van de keuze van de oorsprong en heet de *spoed van de krachtschroef* (of van het krachtenstelsel).
Substitueren we de uitdrukking voor $\underline{m}$ in die voor $\underline{m}_x$, dan vinden we:

$$\underline{m}_x = \sigma\underline{r} + \underline{r}^* - \underline{x} \times \underline{r} .$$

Het moment $\underline{m}_x$ van de krachtschroef $\underset{\sim}{K}$ in het punt X is daarmede ontbonden in een component langs en loodrecht op $\underline{r}$.



We kunnen direct afleiden:

$$(\underline{m}_x,\underline{m}_x) = \sigma^2(\underline{r},\underline{r}) + (\underline{r}^* - \underline{x}\times\underline{r},\ \underline{r}^* - \underline{x}\times\underline{r}) ,$$

dus

$$(\underline{m}_x,\underline{m}_x) \geq \sigma^2(\underline{r},\underline{r});\ |\underline{m}_x| \geq |\sigma\underline{r}| .$$

Het gelijkteken geldt alleen als $\underline{r}^* - \underline{x}\times\underline{r} = 0$, dat wil zeggen wanneer X ligt op de rechte $[\underline{r},\underline{r}^*]$, die de *centrale as* van de krachtschroef (of van het krachtenstelsel) wordt genoemd.
Nemen we een punt op de centrale as, dan is het moment in dat punt $\sigma\underline{r}$. Reduceren we nu het krachtenstelsel op een punt van de centrale as, dan bestaat het uit de kracht $[\underline{r},\underline{r}^*]$ en het koppel $[\underline{0},\sigma\underline{r}]$.

Een samenstel van een kracht en een koppel, waarvan de momentvector van het koppel lineair afhankelijk is van de speervector van de kracht heet een *dyname*. Zowel een kracht als een koppel zijn zelf speciale voorbeelden van een dyname. De as van de krachtschroef wordt ook wel de *as van de dyname* genoemd. We kunnen de volgende stelling uitspreken: *elk krachtenstelsel is statisch equivalent met één ondubbelzinnig door het stelsel bepaalde dyname.*

4.6. Enige voorbeelden van krachtenstelsels zijn de volgende:

4.6.1. We beschouwen een krachtenstelsel $\underset{\sim}{K}$ bestaande uit krachten $\underline{F}_i$ (waaronder mogelijk krachtelementen) met onderling evenwijdige dragers ℓ_i waarvan de richting wordt aangewezen door de eenheidsvector $\underline{u}$. We stellen $\underline{F}_i = [\underline{f}_i,\underline{f}_i^*]$ waarin $\underline{f}_i = f_i\underline{u}$. De vectorsom van het stelsel is $\underline{r} = (\Sigma f_i)\underline{u} = f\underline{u}$. Is $\underline{x}_i$ een punt van ℓ_i dan is $\underline{f}_i^* = \underline{f}_i\underline{x}_i \times \underline{u}$. Bijgevolg is de momentvector van het stelsel in 0 bepaald door $\underline{m} = (\Sigma f_i\underline{x}_i)\times\underline{u}$. Hieruit volgt $(\underline{r},\underline{m}) = 0$. Het stelsel is dus statisch equivalent met een koppel of met een kracht al naar gelang de vectorsom al dan niet nul is, dat wil zeggen al naar gelang f al dan niet nul is. We veronderstellen $f \neq 0$. De resultante van het stelsel is dan de kracht

(4.6.1.1) $\underline{F} = [f\underline{u},\ (\Sigma f_i\underline{x}_i)\times\underline{u}]$.

De drager c van $\underline{F}$ gaat door het punt C aangewezen door de positievector

(4.6.1.2) $\underline{c} = f^{-1}\Sigma f_i\underline{x}_i$.

Op dezelfde manier waarop we dit voor het massamiddelpunt van een mechanisch stelsel hebben gedaan, kunnen we laten zien dat C niet afhangt van de keuze van het assenstelsel. Uit (4.6.2.2) blijkt bovendien dat C niet afhangt van de keuze van $\underline{u}$ dus van de richting van de krachten. Beschouwen we de punten $\underline{x}_i$ als punten van een mechanisch stelsel waar de krachten $\underline{F}_i$ aangrijpen dan kunnen we het bovenstaande als volgt interpreteren. Draait men alle krachten van een gegeven krachtenstelsel met evenwijdige dragers en van nul verschillende vectorsom om de punten waarin zij op een mechanisch stelsel S aangrijpen over dezelfde hoek, zodanig dat de dragers weer evenwijdig zijn, dan draait de drager van de resultante over dezelfde hoek in dezelfde zin om een punt C waarvan de ligging ondubbelzinnig bepaald is door de scalaire waarden van de krachten en de configuratie van hun aangrijpingspunten. Het punt C heet het *astatisch middelpunt* van het krachtenstelsel. Elk krachtenstelsel waarvoor een astatisch middelpunt bestaat wordt astatisch genoemd. Let er op dat beide begrippen alleen zin hebben voor krachtenstelsels waarvan de krachten als gebonden vectoren worden opgevat.

Beschouwen we het zwaarteveld van de aarde als homogeen (richting van de zwaartekracht aangewezen door de eenheidsvector $\underline{e}$) dan oefent de aarde op een punt P_i (positievector $\underline{x}_i$) behept met de massa m_i van een mechanisch stelsel $\underset{\sim}{S}$ (totale massa m) de kracht

$$\underline{F}_i = [m_i g\underline{e},\ \underline{x}_i \times (m_i g\underline{e})]$$

uit. Op het gehele stelsel werkt dan het gewicht:

$$\underline{G} = [mg\underline{e},\ \Sigma\underline{x}_i \times m_i g\underline{e}]\ .$$

Deze resultante gaat door het punt aangewezen door de positievector

$$(mg)^{-1}\Sigma m_i g\underline{x}_i = m^{-1}\Sigma m_i\underline{x}_i = \underline{z}\ ,$$

dus door het massamiddelpunt van $\underset{\sim}{S}$. Het massamiddelpunt is dus het astatisch middelpunt van het stelsel gevormd door de krachten $\underline{F}_i$. Het wordt dan ook wel het *zwaartepunt* van $\underset{\sim}{S}$ genoemd.

Let op het volgende. *Definieert* men het zwaartepunt als astatisch middelpunt van het stelsel bestaande uit de krachtelementen die door de aarde op de massaelementen van het stelsel worden uitgeoefend dan is in een homogeen zwaarteveld zwaartepunt hetzelfde als massamiddelpunt. Is het noodzakelijk om, terwijl men eraan vasthoudt dat g een vaste richting heeft, in rekening te brengen dat g afhangr van de afstand tot het middelpunt van de aarde dan vallen de genoemde punten niet meer samen. Enig idee van de afwijking geeft het volgende voorbeeld, waarin gebruik gemaakt is van het feit dat op een hoogte z boven het aardoppervlak $g = k(R + z)^{-2}$, waarin R de straal van de aarde voorstelt en k een constante is. We beschouwen een massieve homogene omwentelingscylinder $\underline{K}$ (straal r, massadichtheid σ en lengte h). Hij staat met een van zijn platte grensvlakken op het horizontaal gedachte aardoppervlak. Het massamiddelpunt ligt op de cylinderas op een hoogte h/2 boven de aarde. We wensen het zwaartepunt als astatisch middelpunt (zie boven) te bepalen en voeren hiertoe een rechthoekig assenstelsel in waarvan de z-as langs de hartlijn ligt en het x,y-vlak samenvalt met het grondvlak van de cylinder. Men ziet nu gemakkelijk dat het gevraagde punt op de hartlijn ligt en tot het grondvlak de afstand c_2 heeft die volgens (4.6.1.2) kan worden gevonden uit $c_2 = f^{-1}\Sigma f_i z_i$. Hierbij is in dit geval (m is de totale massa van $\underline{K}$):

$$f = \sigma k \iiint_{K} \frac{1}{(R + z)^2}\, dxdydz = \sigma k \pi r^2 \int_0^h \frac{dz}{(R + z)^2} = \frac{km}{R(R + h)}$$

en

$$\Sigma f_i z_i = k\sigma\pi r^2 \int_0^h \frac{zdz}{(R + z)^2} = k\sigma\pi r^2 \{\log(1 + \frac{h}{R}) - \frac{h}{R + h}\} .$$

We veronderstellen $h < R$ en vinden door ontwikkeling in machtreeksen naar h/R:

$$\Sigma f_i z_i = km\{\frac{h}{2R^2} - \frac{2h^2}{3R^3} + \frac{3h^3}{4R^4} - \ldots\}$$

en dus

$$c_z = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6R} + \frac{h^3}{12R^2} - \frac{h^4}{20R^3} + \ldots .$$

Het gezochte punt ligt lager dan het massamiddelpunt (zoals te voorzien was) en zijn afstand tot dit punt is kleiner dan $h^2/6R$. Is h = 300 meter (een zeer hoge toren) en stellen we de omtrek van de aarde op 4.10^7 meter dan is $h^2/6R$ kleiner dan 2,4 mm. Voor aardse constructies maakt men dus een te verwaarlozen fout als men massamiddelpunt en zwaartepunt identificeert.

4.6.2. Zij $\underset{\sim}{K}$ een vlak krachtenstelsel bestaande uit krachten $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ met vectorsom $\underline{r} \neq \underline{0}$. Kiezen we de oorsprong 0 in het vlak van het stelsel dan staan alle vectoren $\underline{f}_i^*$ loodrecht op dit vlak. Hetzelfde geldt dus voor de momentvector $\underline{m}$ van het stelsel in 0. Bijgevolg: $(\underline{r},\underline{m}) = 0$. De resultante is dus een kracht $\underline{R}$ waarvan de drager ℓ wordt voorgesteld door $[\underline{r},\underline{m}]$. We bewijzen: *elk vlak krachtenstelsel met van nul verschillende vectorsom is astatisch.* Wijzen we aan $\underline{F}_i$ het aangrijpingspunt $\underline{x}_i$ toe dan is $\underline{f}_i^* = \underline{x}_i \times \underline{f}_i$ en $\underline{m} = \Sigma \underline{x}_i \times \underline{f}_i$. Zij $\underline{e}$ een eenheidsvector loodrecht op het vlak van het stelsel. De kracht

$$\bar{\underline{F}}_i = [\underline{e} \times \underline{f}_i,\ \underline{x}_i \times (\underline{e} \times \underline{f}_i)] = [\bar{\underline{f}}_i, \bar{\underline{f}}_i^*]$$

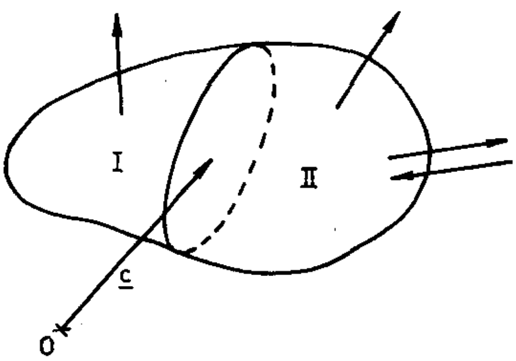
ontstaat uit $\underline{F}_i$ door draaiing over een hoek $\pi/2$ om $\underline{x}_i$ en in het vlak van K. De vectorsom van het stelsel $\bar{\underset{\sim}{K}}$ gevormd door de krachten $\bar{\underline{F}}_i$ is $\bar{\underline{r}} = \underline{e} \times \underline{r} \neq \underline{0}$. De resultante van $\bar{\underset{\sim}{K}}$ is dus een kracht $\bar{\underline{R}}$. Zij C het snijpunt van de dragers van $\underline{R}$ en $\bar{\underline{R}}$; C is een eigenlijk punt. We kiezen C nu verder als oorsprong. Dan hebben $\underset{\sim}{K}$ en $\bar{\underset{\sim}{K}}$ de momentvector nul in de oorsprong. Draaien we alle krachten van $\underset{\sim}{K}$ in het vlak van $\underset{\sim}{K}$ over een hoek φ om hun aangrijpingspunten dan ontstaat het stelsel gevormd door de krachten

$$[\underline{f}_i \cos\varphi + \bar{\underline{f}}_i \sin\varphi,\ \underline{f}_i^* \cos\varphi + \bar{\underline{f}}_i^* \sin\varphi] .$$

De resultante hiervan is de kracht $[\underline{r}\cos\varphi + \bar{\underline{r}}\sin\varphi, \underline{0}]$, waarvan de drager door C gaat en uit die van $\underline{R}$ ontstaat door draaiing over de hoek φ om C.
Opmerking. Stelt men de momentvectoren van $\underset{\sim}{K}$ en $\bar{\underset{\sim}{K}}$ in een willekeurig in het vlak van $\underset{\sim}{K}$ gekozen oorsprong voor door $\mu\underline{e}$ en $\bar{\mu}\underline{e}$ dan geldt voor de positievector $\underline{c}$ van het astatisch middelpunt: $\underline{c} = (\bar{\mu}\underline{r} - \mu\bar{\underline{r}})/(\underline{r},\underline{r})$. Toon dit aan.

4.7. Snedegrootheden

Beschouw een materieel lichaam dat belast wordt door uitwendige krachten en koppels.



Verondersteld wordt dat het lichaam in rust is en het krachtenstelsel neutraal. In gedachten wordt het lichaam door een snijvlak in twee parten verdeeld. Evenals het lichaam zelf zijn de beide delen I en II in evenwicht. De delen van het krachtenstelsel die op de parten werken zijn in het algemeen niet neutraal. Via het snijvlak oefenen de delen in grootte gelijke maar tegengesteld gerichte invloeden op elkaar uit, welke beide kunnen worden voorgesteld door een krachtschroef. Als $\underset{\sim}{K} = \{\underline{r},\underline{m}\}$ de krachtschroef, op de oorsprong gereduceerd, van de uitwendige belasting voorstelt, dan noemen we

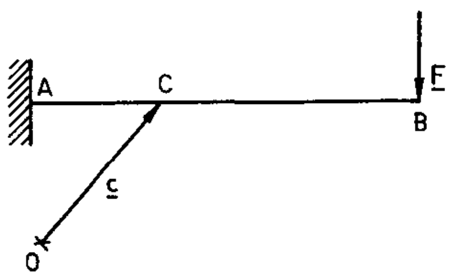
$\underset{\sim}{K}_1 = \{\underline{r}_1,\underline{m}_1\}$ dat deel van de krachtschroef dat werkt op deel I en
$\underset{\sim}{K}_2 = \{\underline{r}_2,\underline{m}_2\}$ dat deel van de krachtschroef dat werkt op deel II.

Gelden moet dat $\underset{\sim}{K}_1 + \underset{\sim}{K}_2 = \underset{\sim}{K}$, terwijl $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{0}$ omdat de belasting neutraal is, zodat

$$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = \underline{0}$$
$$\underline{m}_1 + \underline{m}_2 = \underline{0}\,.$$

Omdat beide delen van het materiële stelsel in rust zijn en blijven, is de invloed van deel II op deel I voor te stellen door $-\underset{\sim}{K}_1 = \underset{\sim}{K}_2$ en de invloed van deel I op deel II door $-\underset{\sim}{K}_2 = \underset{\sim}{K}_1$.

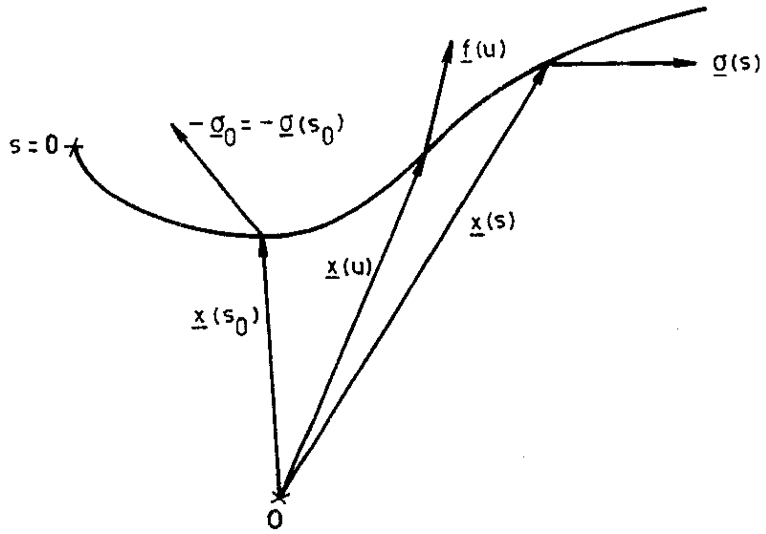
<u>Voorbeelden</u>. Ingeklemde balk.



De ingeklemde balk AB wordt op de in de figuur aangegeven wijze belast door de kracht $\underline{F} = [\underline{f},\underline{f}^*]$.
In C oefent het deel CB een kracht $\underline{F}_c$ en een koppel $\underline{K}_c$ op deel AC uit, waarvoor geldt $\{\underline{F}_c,\underline{K}_c\} = \{\underline{F}\}$.
Hieruit volgt:

$$\underline{F}_c = [\underline{f}_c,\underline{f}_c^*],\ \text{met}\ \underline{f}_c = \underline{f}\ \text{en}\ \underline{f}_c^* = \underline{c} \times \underline{f}\,,$$
$$\underline{K}_c = [\underline{0},\underline{k}_c]\,,\ \text{met}\ \underline{k}_c = \underline{f}^* - \underline{c} \times \underline{f}\,.$$

4.8. We passen het voorafgaande toe op een *volkomen buigzaam koord*, dat is *een lijnvormig lichaam waarbij onder elke belasting in alle doorsneden alleen een kracht als snedegrootheid* optreedt. We veronderstellen dat een continu verdeelde uitwendige belasting $\underline{f}$ werkzaam is en dat het koord in evenwicht is. De evenwichtsvorm is een kromme die met de booglengte als parameter wordt voorgesteld door $\underline{x} = \underline{x}(s)$. Het deel $(0,s_0)$ van het koord oefent op het deel (s_0,s) een kracht $-\underline{\sigma}_0$ uit. Het deel voorbij s oefent op het deel (s_0,s) de kracht $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(s)$ uit. Het koord en dus ook het deel (s_0,s) is in evenwicht. Bijgevolg (zie de figuur):



$$\underline{\sigma}(s) - \underline{\sigma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{f}(u)\,du = \underline{0}$$

(A)

$$\underline{x}(s) \times \underline{\sigma}(s) - \underline{x}(s_0) \times \underline{\sigma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{x}(u) \times \underline{f}(u)\,du = \underline{0}\ .$$

Door differentiatie (mag dat?) naar s:

$$\underline{\sigma}'(s) + \underline{f}(s) = \underline{0}$$

(B)

$$\underline{t}(s) \times \underline{\sigma}(s) + \underline{x}(s) \times \underline{\sigma}'(s) + \underline{x}(s) \times \underline{f}(s) = \underline{0}$$

Voegen we hier nog aan toe $\underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0$ dan krijgen we een stelsel differentiaalvergelijkingen gelijkwaardig met (A). Voor dit stelsel kan men ook schrijven:

$$\underline{\sigma}' + \underline{f} = \underline{0},\ \underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0$$

$$\underline{t} \times \underline{\sigma} = \underline{0}\ ,$$

waarbij het argument s niet wordt genoteerd.
Hieruit blijkt dat de *spankracht* $\underline{\sigma}$ valt langs $\underline{t}$. Stel daarom $\underline{\sigma} = \sigma\underline{t}$; dan is $\underline{\sigma}' = \sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n}$ waarin κ de kromming is. We vinden zo:

$$\underline{f} + \sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n} = \underline{0},\ \underline{\sigma}(s_0) = \underline{\sigma}_0\ .$$

In de evenwichtsstand is de vorm van het koord zodanig dat de uitwendige belasting in het osculatievlak ligt. Uiteraard is $\sigma \geq 0$. Heeft $\underline{f}(s)$ een vaste richting dan is $\underline{f}(s) = f(s)\underline{e}$ waarin $\underline{e}$ een vaste eenheidsvector is. Dus $\underline{\sigma}' + f(s)\underline{e} = \underline{0}$; hieruit $\underline{e} \times \underline{\sigma}' = \underline{0}$ en dus $\underline{e} \times \underline{\sigma} = \underline{c}$ = constant. Derhalve $(\underline{\sigma},\underline{c}) = 0$, waaruit volgt $(\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma$ = constant. *De vorm van het koord is een vlakke kromme.*

4.9. Als voorbeeld nemen we het geval dat de uitwendige belasting het eigen gewicht van het koord is. We nemen aan dat het koord homogeen is (massadichtheid μ) en niet elastisch. Het krachtelement is nu $\underline{f} = \mu\underline{g}$. Als assenstelsel nemen we Oxz in het vlak van het koord met Oz verticaal naar boven. Dan is $\underline{f} = (0,-g)$, $\underline{t} = (x',z')$, $\underline{\sigma} = (\sigma x',\sigma z')$. Uit $\underline{\sigma}' + \underline{f} = \underline{0}$ volgt dan:

$$(\sigma x')' = 0 \quad \text{en} \quad (\sigma z')' = \mu g\ .$$

Dus $\sigma x' = \gamma$ = constant, zodat $\gamma \frac{d}{ds}\frac{dz}{dx} = g$. Derhalve: $\frac{d^2x}{dx^2}\frac{dx}{ds} = \gamma^{-1}\mu g$. Nu is

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}}$$

en dus

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{\mu g}{\gamma}\sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}\ .$$

Als we deze differentiaalvergelijking kunnen oplossen hebben de vorm van het koord gevonden. Voer in de nieuwe veranderlijke φ door $\sinh \varphi = \frac{dz}{dx}$. Dan is $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \cosh \varphi$ en we krijgen $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\mu g}{\gamma}$. Met $\frac{\gamma}{\mu g} = a$ en x_0 als integratieconstante: $\varphi = a^{-1}(x - x_0)$. Bijgevolg: $\frac{dz}{dx} = \sinh \frac{x - x_0}{a}$, waaruit (integratieconstante z_0):

$$z - z_0 = a \cosh \frac{x - x_0}{a} .$$

Deze vergelijking stelt een kromme voor die in de wiskunde *kettinglijn* wordt genoemd. Men noemt a de *parameter* en $z = z_0$ de *basis* van de kettinglijn; de lijn $x = x_0$ is de symmetrie as en het punt $(x_0, z_0 + a)$ de *top*. De kromme keert haar convexe kant naar de aarde.

De spankracht in het punt (x,x) van het koord is volgens het bovenstaande

$$\gamma/x' = \gamma a \frac{d^2z}{dx^2} = \mu g(z - z_0) .$$

De spankracht in een punt P van het koord is dus gelijk aan het gewicht van een deel van het koord met een lengte gelijk aan de afstand van P tot de basis.

4.10. We veronderstellen dat het koord van de vorige paragraaf met de eindpunten aan twee vaste punten A en B is bevestigd. Kiezen we de basis en de symmetrie as als x- en z-as dan is $z = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ de vergelijking van de koordkromme k. Daar de ligging van het assenstelsel ten opzichte van de punten A en B niet bekend is, zijn a en de coördinaten (x_1, z_1) en (x_2, z_2) van A en B onbekend. De afstand d van de verticalen door A en B, het hoogteverschil h van A en B en de lengte ℓ van het koord kunnen worden gemeten. We zullen daarom d, h en ℓ als bekenden beschouwen. Voor ℓ moet gelden $\ell > \sqrt{h^2 + d^2}$. Zij $x_1 > x_2$ en $z_1 > z_2$. Dan is

$$x_1 - x_2 = d \qquad a(\cosh \frac{x_1}{a} - \cosh \frac{x_2}{a}) = h$$

en

$$\ell = \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + (\frac{dz}{dx})^2}\,dx = \int_{x_2}^{x_1} \cosh \frac{x}{a}\, dx = a(\sinh \frac{x_1}{a} - \sinh \frac{x_2}{a}) \ .$$

Dus

$$\ell + h = a(\exp \frac{x_1}{a} - \exp \frac{x_2}{a}),\ \ell - h = a(\exp(-\frac{x_2}{a}) - \exp(-\frac{x_1}{a})) \ .$$

Dit geeft

$$\ell^2 - h^2 = a^2\{\exp \frac{d}{a} + \exp(-\frac{d}{a}) - 2\} = 4a^2\sinh^2 \frac{d}{2a}$$

zodat

$$\sqrt{\ell^2 - h^2} = 2a \sinh \frac{d}{2a} \ .$$

Stel

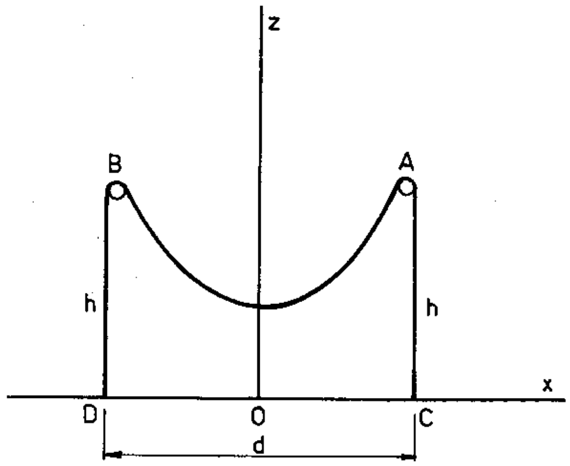
$$\frac{d}{2a} = u \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{d} = \lambda$$

dan is dus $\sinh u - \lambda u = 0$ waarin $\lambda > 1$ en $u > 0$. Om het aantal positieve wortels van de vergelijking $f(u) = \sinh u - \lambda u = 0$ te bepalen, merken we op dat $f'(u) = \cosh u - \lambda$. Er is juist één positieve u_1 met $\cosh u_1 = \lambda$. Voor $0 \le u < u_1$ is $f'(u) < 0$ en $f(u)$ monotoon afnemend; voor $u > u_1$ is $f'(u) > 0$ en $f(u)$ monotoon toenemend. Wegens $f(0) = 0$ is $f(u) < 0$ voor $0 < u \le u_1$ terwijl $f(u)$ voor $u \to \infty$ onbegrensd aan groeit. De vergelijking $\sinh u - \lambda u = 0$ heeft dus juist een positieve wortel $u_0 > u_1$. Er is dus juist één waarde van a, nl. $d/2u_0$ zodanig dat

$$\sqrt{\ell^2 - h^2} = 2a \sinh \frac{d}{2a} \ .$$

Met behulp hiervan kan men x_2, x_1, z_2 en z_1 vinden. Er is dus juist een kettinglijn die aan alle eisen voldoet. De wortel u_0 zal door een benaderingsmethode moeten worden bepaald. Een eerste benadering is $\sqrt{6(\lambda - 1)}$ verkregen door van de reeksontwikkeling voor sinh u de eerste twee termen in rekening te brengen.

4.11. Wanneer het koord met lengte ℓ over twee even hoog gelegen volkomen gladde



pennen A en B wordt geslagen reiken in de evenwichtsstand de uiteinden C en D van de verticaal neerhangende delen juist tot aan de basis. Er is nu een fraaie symmetrie: A en B zijn de punten $(\frac{1}{2}d,h)$ en $(-\frac{1}{2}d,h)$; hierin is $h = a \cosh \frac{d}{2a}$. Het deel van het koord tussen A en B heeft de lengte $2a \sinh \frac{d}{2a}$. De totale lengte van het koord is derhalve $\ell = 2a \exp \frac{d}{2a}$, waarin a de enige onbekende is. Stelt men $\frac{d}{2a} = u$ dan moet ter bepaling van a de vergelijking $g(u) = e^u - \lambda u = 0$ $(\lambda = \ell/d)$ wordt opgelost. Het blijkt dat deze vergelijking alleen voor $\lambda \geq e$ reële wortels heeft en wel:

1) voor $\lambda = e$ de tweevoudige wortel 1;

2) voor $\lambda > e$ de positieve wortels u_1 en u_2 met $u_1 < 1 < \log \lambda < u_2$.

Er zijn dus voor $\lambda > e$ twee evenwichtsstanden mogelijk.

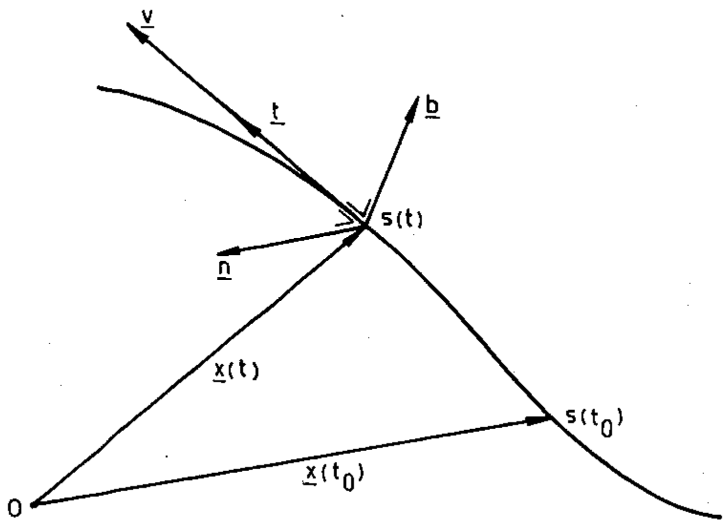
4.12. We beschouwen als laatste voorbeeld nog een koord van te verwaarlozen gewicht dat over een vaste, horizontaal opgestelde, ruwe cylinder is geslagen. Het koord ligt geheel in het vlak van een loodrechte doorsnede van de cylinder en is langs de boog P_1P_2 met het oppervlak in aanraking. Op het vrije deel van het koord dat in P_i aan de cylinder raakt, werkt in bovengenoemd vlak een kracht $\underline{F}_i = [\underline{f}_i, \underline{f}_i^*]$ $(i = 1,2)$. We veronderstellen dat het koord in evenwicht is, doch op het punt staat uit te glijden in de zin van P_1 naar P_2.

Voor de spankracht in de punten P_1 en P_2 vindt men opvolgend $-\underline{\underline{S}}_1 = -\underline{\underline{F}}_1$, $\underline{\underline{S}}_2 = \underline{\underline{F}}_2$. Is $\underline{f}$ ds het krachtelement in het punt $\underline{x}(s)$ van P_1P_2 dan is $\sigma'\underline{t} + \sigma\kappa\underline{n} + \underline{f} = \underline{0}$. Is N de grootte van de kracht die de cylinder in de richting van de oppervlaktenormaal op het koord uitoefent, dan is $\sigma\kappa = N$. Daar het koord op het punt staat uit te glijden is de tangentiële kracht op het koord dan N waarin k een constante is (de wrijvingscoëfficiënt). Dus $\sigma' = kN$. Hieruit volgt: $\sigma' = k\kappa\sigma$. Nu is $\underline{t} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ en $\underline{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ waarin φ de hoek is tussen $\underline{t}$ en de positieve x_1-as. Dus: $\kappa\underline{n} = \underline{t}' = \varphi'(\sin\varphi, \cos\varphi) = \varphi'\underline{n}$; hieruit volgt $\kappa = \varphi'$. Derhalve: $\sigma' = k\sigma\varphi'$ of $\frac{d\sigma}{d\varphi} = k\sigma$. Integratie over het deel van het koord dat met de cylinder in aanraking is, levert

$$\log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k(\varphi_2 - \varphi_1) = -k\alpha \ ,$$

zodat $|\underline{f}_2| = |\underline{f}_1|e^{-k\alpha}$ (formule van *Eytelwein*). Het koord kan meerdere slagen om de cylinder zijn gewikkeld, zodat α niet tot het interval $(0,2\pi)$ behoeft te zijn beperkt.

Appendix bij hoofdstuk 4. Ruimtekrommen



Met behulp van een reële parameter t die een interval J doorloopt, kunnen de positievectoren van de punten van een kromme k worden voorgesteld door $\underline{x} = \underline{x}(t)$. We veronderstellen dat $\underline{x}$ continu-differentieerbaar is op J met van nul verschillende afgeleide. Dan heet k een *gladde kromme* (of gladde boog). In het punt $\underline{x}(t)$ heeft de kromme een raaklijn met richtingsvector $\dot{\underline{x}}(t)$. De analyse leert dat de lengte s van het deel van de kromme tussen het punt $\underline{x}(t_0)$ en het punt $\underline{x}(t)$ gelijk is aan

$$s = \int_{t_0}^{t} (\dot{\underline{x}}(u),\dot{\underline{x}}(u))^{\frac{1}{2}}du \ ,$$

zodat $\dot{s} = (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}} > 0$. Men noemt s de *booglengte* op de kromme. Door $\dot{s} = (\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}}$ is s op een additieve constante na bepaald; dat is logisch want men kan het nulpunt van een meetlint bij elk punt van k leggen. Op het interval J is $\dot{s} > 0$. Bijgevolg is t een differentieerbare functie van s en $\underline{x} = \underline{x}(t(s))$. Geeft men differentiatie naar s met een accent aan dan is $\underline{x}' = \dot{\underline{x}}t' = \dot{\underline{x}}/|\dot{\underline{x}}|$ een eenheidsvector met dezelfde zin als $\dot{\underline{x}}$. Men noteert $\underline{x}' = \underline{t}$ en noemt $\underline{t}$ de *raaklijnvector*.

We zullen verder veronderstellen dat $\underline{x}$ zo dikwijls continu-differentieerbaar is als voor het volgende betoog nodig is. Uit $(\underline{t},\underline{t}) = 1$ volgt $(\underline{t},\underline{t}') = 0$. We veronderstellen dat $\underline{t}'$ niet identiek nul is, d.w.z. dat k geen rechte lijn is. Zij $\underline{n}$ de eenheidsvector met dezelfde zin als $\underline{t}'$. Dan is $\underline{t}' = \kappa\underline{n}$ waarin κ een niet-negatieve scalaire functie van s is. Men noemt $\underline{n}$ de *hoofdnormaalvector*. Tenslotte voeren we nog in de eenheidsvector $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ die de naam *binormaalvector* draagt. De vectoren $\underline{t}$, $\underline{n}$ en $\underline{b}$ vormen, uitgezet met $\underline{x}(s)$ als gemeenschappelijk beginpunt een orthonormaal rechts driebeen (*driebeen van Serret-Frenet*). Uit $(\underline{n},\underline{n}) = 1$ volgt $(\underline{n},\underline{n}') = 0$; bijgevolg is $\underline{n}' = \alpha\underline{t} + \tau\underline{b}$. Voor α vinden we $\alpha = (\underline{t},\underline{n}') = -(\underline{t}',\underline{n}) = -\kappa(\underline{n},\underline{n}) = -\kappa$. Dus $\underline{n}' = -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}$. Verder $\underline{b}' = \underline{t}' \times \underline{n} + \underline{t} \times \underline{n}' = \underline{t} \times (-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}) = \tau\underline{t} \times \underline{b} = -\tau\underline{n}$. Hiermee zijn afgeleid de drie vergelijkingen van *Serret-Frenet:*

$$\underline{t}' = \kappa\underline{n}, \quad \underline{n}' = -\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}, \quad \underline{b}' = -\tau\underline{n} \tag{1}$$

die grondslag zijn voor de differentiaalmeetkunde van de krommen. De scalaire functies κ en τ die hierin voorkomen, heten de *kromming* en de *torsie*. *De krommen met torsie nul zijn de vlakke krommen.* Immers uit $\tau = 0$ volgt $\underline{b}' = 0$, dus $\underline{b} = \underline{c}$ (= constant). Dan is $(\underline{c},\underline{x}') = (\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma$ (= constant). En terug: uit $(\underline{c},\underline{x}) = \gamma$ volgt $(\underline{c},\underline{t}) = 0$ en dus $(\underline{c},\kappa\underline{n}) = 0$ of $(\underline{c},\underline{n}) = 0$, zodat $(\underline{c},-\kappa\underline{t} + \tau\underline{b}) = 0$ of $\tau(\underline{c},\underline{b}) = 0$ en dus $\tau = 0$ (kunt ge elke stap verantwoorden?).
Het voorafgaande vestigt de indruk dat de torsie een maat is voor de afwijking die de kromme vertoont van een vlakke kromme.
Vlakke krommen met constante kromming zijn cirkels. Voor een vlakke kromme $(\tau = 0)$ blijft van (1) over $\underline{t}' = \kappa\underline{n}$, $\underline{n}' = -\kappa\underline{t}$. Is κ constant dan volgt hieruit: $\underline{t}'' + \kappa^2\underline{t} = \underline{0}$ en dus $\underline{t} = \underline{c}_1\cos\kappa s + \underline{c}_2\sin\kappa s$ ($\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ constant). Uit $(\underline{t},\underline{t}) = 1$ kan men afleiden dat $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ eenheidsvectoren zijn die loodrecht op elkaar staan (doe dit!). Stel $\underline{c}_1 \times \underline{c}_2 = \underline{c}_3$ en leid uit het bovenstaande af dat $\kappa(\underline{x} - \underline{m}) = \underline{c}_1\sin\kappa s - \underline{c}_2\cos\kappa s$ ($\underline{m}$ constant). Dus is nu: $(\underline{c}_3,\underline{x} - \underline{m}) = 0$ en $(\underline{x} - \underline{m}, \underline{x} - \underline{m}) = \kappa^{-2}$. Hieruit lezen we af: de kromme is een cirkel met middelpunt $\underline{m}$ en straal κ^{-1} (de naam kromming voor κ is aan dit bijzondere geval ontleend).

Als de baan van een bewegend punt de kromme $\underline{x} = \underline{x}(s)$ is, zal de waarde van s die de positie van het punt op de kromme aanwijst een functie zijn van de tijd t. We veronderstellen weer continue differentieerbaarheid zo vaak als nodig is. Voor de snelheid vinden we: $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = \dot{s}\underline{x}' = \dot{s}\underline{t}$ en voor de versnelling $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{s}\underline{t} + \dot{s}^2\underline{t}'$ of:

$$\underline{a} = \ddot{s}\underline{t} + \kappa\dot{s}^2\underline{n} .$$

De versnelling heeft de componenten $\underline{a}_t = \ddot{s}\underline{t}$ (*tangentiële versnelling*) en $\underline{a}_n = \kappa(\underline{v},\underline{v})\underline{n}$ (*normale versnelling*).
Noemen we $\rho = \frac{1}{\kappa}$, de kromtestraal, dan geldt $a_t = \frac{v^2}{\rho}$.
Het vlak door $\underline{t}$ en $\underline{n}$ opgespannen heet het osculatievlak.

Hoofdstuk 4. Opgaven

1. Opdat twee krachten $\underline{F}_1 = [\underline{f}_1,\underline{f}_1^*]$ en $\underline{F}_2 = [\underline{f}_2,\underline{f}_2^*]$ een neutraal stelsel vormen, is nodig en voldoende. $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \underline{0}$; $\underline{f}_1^* + \underline{f}_2^* = \underline{0}$. Dit is dan en alleen dan het geval als $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ dezelfde drager hebben en de krachtvectoren elkaars tegengestelden zijn.

2. We beschouwen een neutraal stelsel bestaande uit drie krachten $\underline{F}_i = [\underline{f}_i,\underline{f}_i^*]$ $(i = 1,2,3)$. Dan is $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 = \underline{0}$ en $\underline{f}_1^* + \underline{f}_2^* + \underline{f}_3^* = \underline{0}$. Hieruit volgt, indien i,j,k een permutatie van de getallen 1,2,3 betekent:

$$0 = (\underline{f}_k,\underline{f}_k^*) = (\underline{f}_i + \underline{f}_j,\ \underline{f}_i^* + \underline{f}_j^*) = (\underline{f}_i,\underline{f}_j^*) + (\underline{f}_i^*,\underline{f}_j) = \langle \underline{F}_i,\underline{F}_j \rangle .$$

De dragers van de krachten liggen dus bij tweeën in één vlak. Voor elke speer $\underline{S}$ waarvan de drager in het vlak α van $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ ligt, geldt $\langle \underline{S},\underline{F}_1 \rangle = \langle \underline{S},\underline{F}_2 \rangle = 0$. Hieruit volgt $\langle \underline{S},\underline{F}_3 \rangle = 0$. *De dragers van de drie krachten liggen dus in één vlak* α. Tussen hun richtingsvectoren bestaat het verband $\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \underline{f}_3 = \underline{0}$. Zijn dus twee van de dragers evenwijdig dan zijn de drie dragers onderling evenwijdig. Snijden de dragers van $\underline{F}_i$ en $\underline{F}_j$ elkaar dan is ten opzichte van het snijpunt als oorsprong $\underline{f}_i^* = \underline{f}_j^* = \underline{0}$ en dus ook $\underline{f}_k^* = \underline{0}$. De drager van $\underline{F}_k$ gaat dus door het snijpunt. Een *noodzakelijke* voorwaarde opdat drie krachten een neutraal stelsel vormen, is dus dat hun dragers in één vlak liggen en door één (eventueel oneigenlijk) punt gaan. Is het bedoelde punt eigenlijk. dan wordt deze voorwaarde na toevoeging van de eis dat de vectorsom nul is, tot een nodige en voldoende voorwaarde. Dit is evenwel niet het geval als de dragers evenwijdig zijn: dan moet bovendien nog een zekere relatie bestaan tussen de onderlinge afstanden van de dragers en de krachten (Ga dit maar eens zorgvuldig na.)

3. Gegeven is een sperenstelsel $\{\underline{R},\underline{K}\}$, $\underline{R} = [\underline{r},\underline{o}]$, $\underline{K} = [\underline{o},\underline{m}]$; $(\underline{r},\underline{m}) \neq \underline{o}$. Bepaal de speren $\underline{S}$ en $\underline{T}$ zodanig dat:

   i) het stelsel $\{\underline{S},\underline{T}\}$ is statisch equivalent met $\{\underline{R},\underline{K}\}$;

   ii) de drager van $\underline{S}$ gaat door een gegeven punt P;

   iii) de drager van $\underline{T}$ valt langs een gegeven rechte $\mathcal{L}$.

   Aan welke voorwaarde moet ℓ voldoen opdat $\underline{S}$ en $\underline{T}$ bestaan?

4. Gegeven is een sperenstelsel als bij opgave 3.
Bepaal de speren $\underline{S}$ en $\underline{T}$ zodanig dat:

i) de drager van $\underline{S}$ gaat door een gegeven punt P;

ii) de drager van $\underline{T}$ ligt in een vlak door P loodrecht op de drager van $\underline{S}$.

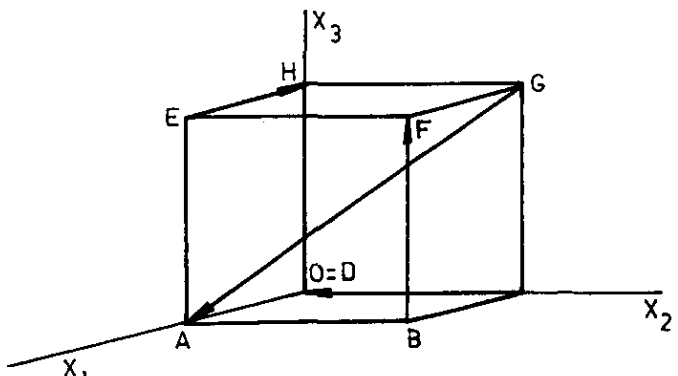
5. Gegeven is een sperenstelsel, niet gelijkwaardig met een speer of een koppel. Laat V de verzameling zijn van alle tweetallen speren die statisch equivalent zijn met het gegeven stelsel. Bewijs dat voor alle elementen van V de inhoud van het door de speervectoren opgespannen viervlak gelijk is.

6. Gegeven is een sperenstelsel bestaande uit speren waarvan de dragers alle in een plat vlak liggen. $\mathcal{L}$ is een rechte uit dat vlak. Om twee niet samenvallende punten van $\mathcal{L}$ is het moment van het sperenstelsel nul. Bewijs dat alle punten van $\mathcal{L}$ deze eigenschap bezitten.

7. Gegeven is een sperenstelsel bestaande uit speren waarvan de dragers alle in een plat vlak liggen. Om drie punten uit dat vlak welke niet op een rechte liggen, is het moment van het sperenstelsel nul. Bewijs dat het stelsel in evenwicht is.

8. Gegeven is een sperenstelsel waarvan de dragers alle in een plat vlak liggen. P is een punt en $\mathcal{L}$ een rechte uit V. $\underline{S}$ is een speer door P met drager in V en $\underline{T}$ is een speer langs $\mathcal{L}$. Bepaal $\underline{S}$ en $\underline{T}$ zodanig dat het stelsel $\{\underline{S},\underline{T}\}$ equivalent is met het gegeven stelsel.

9. ABCDEFGH is een kubus met ribbe 2c; BF, CO, EH en GA zijn dragers van speren met speervectoren $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{EH}$ en $\overrightarrow{GA}$. Ga na dat ten opzichte van het aangegeven assenstelsel $\{\underline{r},\underline{m}\}$ met $\underline{r} = (0,-4c,0)$, $\underline{m} = (4c^2,-4c^2,-4c^2)$ de krachtschroef



is. De spoed is $\sigma = c$. De resulterende dyname bestaat uit de kracht $\underline{R} = [\underline{r},\underline{r}^*]$ met $\underline{r}^* = (4c^2,0,-4c^2)$ en het koppel $\underline{K}$ met koppelvector $(0,-4c^2,0)$. De centrale as is $\underline{x} = (c,0,c) + \lambda(0,-c,0)$.

10. Van een regelmatige vierzijdige piramide TABCD (hoogte c) zijn alle ribben even lang. Langs de ribben AT, TB, BA, CT en DT werken krachten die alle de grootte k hebben en waarvan de zin overeenstemt met die van de vectoren $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CT}$ en $\overrightarrow{DT}$ (figuur 1). Kies een geschikt orthonormaal assenstelsel en bepaal de resulterende dyname; geef de drager van deze dyname aan in de figuur.

11. De ribben van een viervlak ABCD zijn dragers van een (niet neutraal) krachtenstelsel $\underset{\sim}{K}$. De krachtvectoren langs DA, DB en DC zijn in deze volgorde $\alpha.\overrightarrow{DA}$, $\beta.\overrightarrow{DB}$ en $\gamma.\overrightarrow{DC}$; die langs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{AB}$ zijn $\lambda.\overrightarrow{BC}$, $\mu.\overrightarrow{CA}$ en $\nu.\overrightarrow{AB}$. Gevraagd een betrekking (of betrekkingen) tussen getallen α, β, γ, λ, μ en ν af te leiden nodig en voldoende opdat $\underset{\sim}{K}$ statisch equivalent is met één enkele kracht.

<u>Antw.</u> $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$; $(\alpha + \mu - \nu)^2 + (\beta + \nu - \lambda)^2 + (\gamma + \lambda - \mu)^2 \neq 0$.

12. Ten opzichte van een rechts orthonormaal assenstelsel Oxyz zijn gegeven de lijnen

$$\ell_1 : z = c;\ y = x \tan\alpha \quad \text{en} \quad \ell_2 : z = -c;\ y = -x \tan\alpha ,$$

waarin $c > 0$ en $0 < \alpha < \pi/2$. De lijn ℓ_k is drager van een kracht $\underline{F}_k$ $(k = 1,2)$. Bepaal de verzameling van de centrale as van het stelsel $\{\underline{F}_1,\underline{F}_2\}$.

<u>Aanw.</u> De krachtvectoren van $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ kunnen worden voorgesteld door $\underline{f}_1 = (f_1\cos\alpha,\ f_1\sin\alpha,\ 0)$ en $\underline{f}_2 = (f_2\cos\alpha,\ -f_2\sin\alpha,\ 0)$. De momentvectoren in O zijn dus:

$$\underline{f}_1^* = (-cf_1\sin\alpha,\ cf_1\cos\alpha,\ 0)$$

en

$$\underline{f}_2^* = (-cf_2\sin\alpha,\ -cf_2\cos\alpha,\ 0) .$$

Centrale as:

$$x = \lambda(f_1 + f_2)\cos\alpha,\ y = \lambda(f_1 - f_2)\sin\alpha ,$$

$$z = \frac{c(f_2^2 - f_1^2)}{(f_1 + f_2)^2\cos^2\alpha + (f_1 - f_2)^2\sin^2\alpha} .$$

Eliminatie van f_1, f_2 en ℓ geeft $(x^2 + y^2)z \sin 2\alpha = 2cxy$ als vergelijking van de gevraagde verzameling. Regeloppervlak van de derde graad waarvan alle beschrijvenden de z-as snijden en evenwijdig zijn met het vlak $z = 0$. De niet op de z-as gelegen reële punten van het oppervlak *(cylindroïde van Cayley)* liggen tussen (of in) de vlakken $z = c/\sin 2\alpha$ en $z = -c/\sin 2\alpha$.

13. Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel $Ox_1x_2x_3$ zijn gegeven de punten $A(2,0,-1)$ en $B(2,-2,-1)$, alsmede de lijn ℓ voorgesteld door $\underline{x} = (2,-1,2) + \lambda(1,-2,4)$. Een dyname heeft $\overrightarrow{AB}$ als krachtvector, AB als as en als koppelbestanddeel het koppel met $(0,-6,0)$ als koppelvector. Gevraagd: twee krachten $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ die de gegeven dyname als resultante hebben en waarvan $\underline{F}_1$ de lijn ℓ als drager heeft.

14. Gegeven een krachtenstelsel met $\underline{r} = (1,-2,3)$ als vectorsom en $\underline{m} = (5,4,2)$ als momentvector in de oorsprong. Aan dit stelsel wordt een kracht $\underline{F}$ toegevoegd met $\underline{f} = (2,3,3)$ als krachtvector. Van het aldus uitgebreide stelsel gaat de centrale as door $(2,-1,1)$. Bepaal de resulterende dyname van genoemd stelsel en de drager van $\underline{F}$.

15. Gegeven zijn twee krachten $\underline{F}_1$ en $\underline{F}_2$ met kruisende dragers en een kracht $\underline{F}$ waarvan de drager door de oorsprong gaat en de krachtvector een gegeven lengte k heeft. Gevraagd: een nodige en voldoende voorwaarde opdat het stelsel $\{\underline{F}_1,\underline{F}_2,\underline{F}\}$ statisch equivalent is met één enkele kracht. Bewijs dat de drager van $\underline{F}$ dan op een omwentelingskegel ligt.

16. Een krachtenstelsel bestaat uit twee krachten $\underline{F}_k = [\underline{f}_k,\underline{f}_k^*]$ $(k = 1,2)$ waarvan $\underline{r}$ (de vectorsom) en $\underline{m}$ (de momentvector van het stelsel in de oorsprong) gegeven zijn. Verondersteld wordt: $(\underline{r},\underline{m}) \neq 0$. De drager van $\underline{F}_1$ gaat door een punt P waarvan de positievector $\underline{p}$ gegeven is. Verder is bekend dat $\underline{F}_2$ ligt in het vlak door P loodrecht op de drager van $\underline{F}_1$. Druk $\underline{f}_1$, $\underline{f}_1^*$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_2^*$ uit in $\underline{r}$, $\underline{m}$ en $\underline{p}$. Waar mag $\underline{p}$ niet worden gekozen, wil het vraagstuk oplosbaar zijn?

17. Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel $OX_1X_2X_3$ zijn gegeven de punten $A(-1,6,2)$; $B(-2,9,2)$; $C(1,1,1)$; $D(-1,0,7)$ en de vector $\underline{v} = (-10,-10,-10)$. De vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ stellen krachten voor, terwijl $\underline{v}$ de momentvector is van een koppel. Deze krachten en dit koppel werken op hetzelfde starre lichaam. Bepaal de resulterende dyname (in het bijzonder ook de as hiervan). Men breidt het stelsel uit met een koppel gelegen in het X_1X_2 vlak. Welk moment moet dit koppel hebben opdat de resultante van het uitgebreide stelsel een kracht is?

18. Gegeven zijn twee speren $\underline{S}_1$ en $\underline{S}_2$ waarvan de dragers ℓ_1 en ℓ_2 elkaar kruisen. De lijn die ℓ_1 en ℓ_2 loodrecht snijdt, wordt met n aangegeven. Bewijs dat de drager van de resulterende dyname van het stelsel $\{\underline{S}_1,\underline{S}_2\}$ de lijn n loodrecht snijdt.

19. Gegeven zijn twee verzamelingen speren V_1 en V_2 die geen van beide gelijk zijn aan een koppel. Het stelsel V_k is gelijk aan een dyname met as ℓ_k $(k = 1,2)$. Het sperenstelsel $V_1 \cup V_2$ is gelijk aan een dyname met as ℓ. Bewijs dat er een lijn bestaat die ℓ_1, ℓ_2 en ℓ loodrecht snijdt.

20. a) Van vier krachten die niet alle nul zijn, vormen de dragers een vierhoek waarvan niet alle hoekpunten in één vlak liggen. Bewijs dat dit krachtenstelsel niet neutraal kan zijn.

b) De dragers van vier krachten, die niet alle nul zijn, kruisen elkaar twee aan twee en zijn niet alle evenwijdig met een zelfde vlak. De vectorsom van de vier krachten is nul.
Bewijs dat dit krachtenstelsel dan en alleen dan neutraal is wanneer elke rechte die drie van de vier dragers snijdt ook de vierde drager snijdt. (Evenwijdig zijn moet als bijzonder geval van snijden worden opgevat.)