

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

INLEIDING in de MECHANICA

Syllabus van het College van

Prof. Dr. Ir. J. de Graaf

Gegeven in het Voorjaarssemester 1984

De opgaven zijn van

Dr.Ir. A.A.F. van de Ven



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.334
Prijs f. 11,00

JdP

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Inleiding mechanica 2C010

voor Wiskundestudenten naar het college van
Prof.dr.ir. J. de Graaf

De vraagstukkenverzameling is verzorgd door
Dr.ir. A.A.F. van de Ven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

INLEIDING MECHANICA 2C010

voor Wiskundestudenten

naar het college van

Prof.Dr.Ir. J. de Graaf

De vraagstukkenverzameling is verzorgd door

Dr.Ir. A.A.F. van de Ven

lentetrimester 1984

INHOUDSOPGAVE

	blz.
<u>HOOFDSTUK 1. Manipulaties met vectoren</u>	1
<u>HOOFDSTUK 2. Kinematica van het materiële punt</u>	8
§2.1. Positie, snelheid en afgelegde weg	8
§2.2. Versnelling	15
§2.3. Algemene cirkelbeweging	19
§2.4. Graden van vrijheid. Poolcoördinaten	21
§2.5. Tangentiële en Normale versnelling. Kromtestraal	23
<u>HOOFDSTUK 3. Dynamica van een deeltje</u>	27
§3.1. De bewegingsvergelijking	27
§3.2. De constante kracht	30
§3.3. De lineaire veer	31
§3.4. Coulombse of droge wrijving	32
§3.5. Visceuze of natte wrijving	35
§3.6. De centrale kracht	36
§3.7. Krachten die optreden bij meetkundige restricties (Reactiekrachten, gedwongen beweging, vrijmaken)	38
§3.8. Axiale krachten	45
§3.9. Krachten die meerdere deeltjes, die via koorden en staven aan elkaar verbonden zijn, op elkaar uitoefenen	47

	blz.
<u>HOOFDSTUK 4. Relatieve beweging</u>	49
§4.1. Afleiding van de transformatieformules	49
§4.2. Stilzetten. Schijnkrachten	57
<u>HOOFDSTUK 5. Fundamentele beschouwingen over Inertiaalstelsels, <u>Massa, Impuls en Kracht</u></u>	64
<u>HOOFDSTUK 6. Dynamica van een deeltje. Behoudswetten</u>	70
§6.1. Impulsmoment	70
§6.2. Arbeid en Energie	73
§6.3. Energiebeschouwingen bij de eendimensionale beweging	83
§6.4. Beweging onder invloed van conservatieve centrale krachten	86
§6.5. De planetenbeweging	87
<u>HOOFDSTUK 7. Botsingen</u>	91
§7.1. Eendimensionale botsingsproblemen (Centrale botsingen)	91
§7.2. Botsingen in het platte vlak en in de ruimte (Niet- centrale botsingen)	93
<u>HOOFDSTUK 8. De mechanica van stelsels bestaande uit meer- <u>dere deeltjes</u></u>	98
§8.1. Stelsels van N deeltjes	98
§8.2. Stelsels van 2 deeltjes	102
§8.3. Starre stelsels van N deeltjes	104

VRAAGSTUKKEN + antwoorden

blz.

V.1 - V.103

TENTAMENOPGAVEN + antwoorden

T.1 - T.35

Aanvullende Inhoudsbeschrijving

Inleiding Mechanica 1976-1990

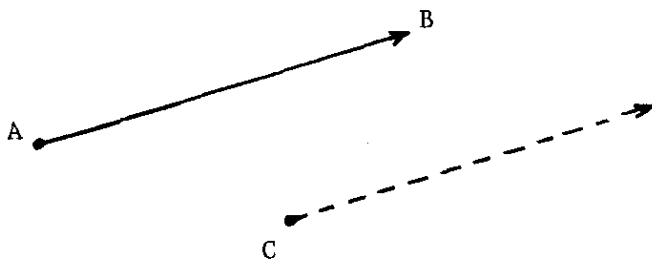
	Bladzijde
VRAAGSTUKKEN + ANTWOORDEN	
1. VECTOREN	V.1
2. KINEMATICA	V.12
3. RELATIEVE BEWEGING	V.20
4. DYNAMICA VAN ÉÉN DEELTJE	V.26
4.1 Vrij massapunt	V.26
4.2 Gedwongen beweging. Vrijmaken. Eenzijdige verbindingen	V.34
4.3 Impulsmoment. Momentenstelling	V.47
4.4 Methode van stilzetten	V.50
4.5 Vrijmaken van stelsels van meerdere deeltjes	V.56
5. ARBEID EN ENERGIE	V.64
6. DYNAMICA VAN EEN STELSEL VAN DEELTJES	V.81
7. BOTSINGEN	V.92
TENTAMENS/EXAMENS 1981-1983	T.1 - T.28
ANTWOORDEN TENTAMENS	T.29 - T.35

HOOFDSTUK 1. Manipulaties met vectoren

Van een aantal fysische grootheden zoals massa, temperatuur, volume, lengte, elektrische lading, kan men de "grootte" of "hoeveelheid" aangeven met één reëel getal. Zulke fysische grootheden heten scalaire grootheden. Het genoemde reële getal hangt natuurlijk af van het gekozen eenhedenstelsel.

Een aantal andere fysische grootheden zoals verplaatsing, snelheid, hoeksnelheid, versnelling, kracht, veldsterkte, zijn wat gecompliceerder van aard. Deze hebben behalve een grootte ook een richting (in de "fysische ruimte" om ons heen). Zulke fysische grootheden heten vectoriële grootheden. Een vectoriële grootheid stellen we grafisch voor door een gericht lijnstuk (pijl of vector) in de ruimte.

Heel platvloers stellen we ons nu een vector voor als een stok AB met een punt eraan. Als een willekeurig punt C in de ruimte gegeven is kunnen we de



stok evenwijdig aan zichzelf verplaatsen, zodanig dat het nieuwe aangrijpingspunt C is. Dit "evenwijdig verplaatsen" is hier niet wiskundig bedoeld, maar als een ambachtelijke bezig-

heid. Met goed timmermans- of landmetersgereedschap kun je zo'n evenwijdige verplaatsing "heel precies" uitvoeren.

In de ruimte om ons heen kiezen we nu een vast punt O uit en we beschouwen de verzameling V van alle vectoren die in O aangrijpen. Elementen uit de verzameling V geven we aan met onderstreepte letters: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{x}, \dots, \underline{A}, \underline{B}$ etc. (In de fysische literatuur staan vectoren vaak vet gedrukt of gebruikt men de notatie \vec{a} of \vec{a} .)

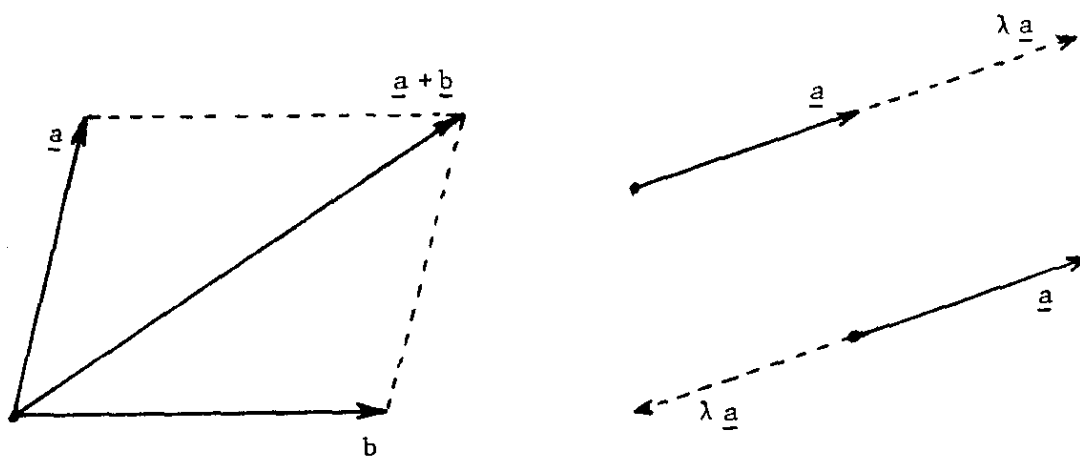
Met behulp van ons timmermansgereedschap voeren we nu in V een viertal operaties in.

I. Optelling $\underline{a} + \underline{b}$ (uitkomst is een vector)

Recept: Verschuif \underline{b} evenwijdig aan zichzelf totdat zijn staart samenvalt met de punt van \underline{a} . Het gerichte lijnstuk \underline{c} van O naar de punt van \underline{b} is dan per definitie $\underline{a} + \underline{b}$. Zie figuur.

II. Scalaire vermenigvuldiging $\lambda \underline{a}$ (uitkomst is een vector)

Recept: Maak \underline{a} $|\lambda|$ maal zo lang. Als $\lambda > 0$ dan wijst $\lambda \underline{a}$ in dezelfde richting. Als $\lambda < 0$ dan wijst $\lambda \underline{a}$ in tegengestelde richting. Als $\lambda = 0$ dan is $\lambda \underline{a} = \underline{0}$, de nulvector. Zie figuur.



Eigenschappen van optelling en scalaire vermenigvuldiging: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$,
 $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$, $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$, voor iedere \underline{a} is er een \underline{b} zodat
 $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$, $\underline{1} \cdot \underline{a} = \underline{a}$, $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda \mu) \underline{a}$, $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$, $(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$.
 Bij gegeven \underline{a} , \underline{b} , etc. kunnen deze eigenschappen m.b.v. ons timmermansge-
 reedschap experimenteel geverifiëerd worden. Het zal de aandachtige lezer
 niet ontgaan dat bovenstaande eigenschappen precies de Axioma's zijn waar
 een "Vectorruimte" aan voldoet. Blijkbaar is het wiskundige begrip vector-
 ruimte erg geschikt om fysische eigenschappen van de ruimte om ons heen te
 beschrijven. We hebben hier een eenvoudig voorbeeld van een mathematisch-
 fysische theorie. In een mathematisch-fysische theorie is er de volgende
 correspondentie:

<u>wiskunde</u>		<u>experimentele natuurkunde</u>
Axioma's	↔	Operationele definities, recepten
Stellingen	↔	Waarnemingen

Naarmate meer stellingen "kloppen" met waarnemingen is men meer geneigd
 te geloven dat de axioma's "waarheid" bevatten.

III. Inwendig product $\underline{a} \cdot \underline{b}$ (uitkomst is een getal)

Recept: Bepaal de hoek ϑ tussen \underline{a} en \underline{b} met een gradenboog. Bepaal de
 lengten $|\underline{a}|$ en $|\underline{b}|$ van \underline{a} en \underline{b} met een meetlat. Per definitie
 is $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \vartheta$.

Eigenschappen van de inwendige vermenigvuldiging: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$,
 $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$, $\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \lambda \underline{a} \cdot \underline{b}$, $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$. Cosinus-
 regel: $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2|\underline{a}| |\underline{b}| \cos \vartheta$.

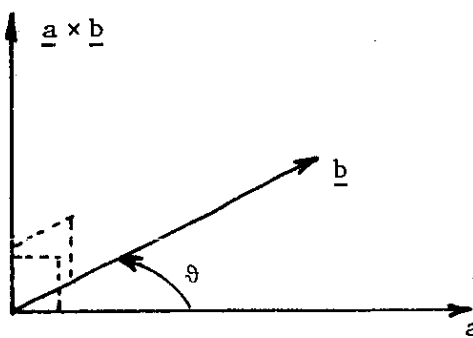
IV. Uitwendig product $\underline{a} \times \underline{b}$ (uitkomst is een vector)

Recept: Bepaal weer ϑ , $|\underline{a}|$ en $|\underline{b}|$ als bij het inwendige product.

De lengte van $\underline{a} \times \underline{b}$ wordt gedefinieerd door $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \vartheta$.

De richting van $\underline{a} \times \underline{b}$ is loodrecht op het vlak opgespannen door \underline{a} en \underline{b} en passend bij \underline{a} en \underline{b} als een rechtse schroef.

Zie figuur.



Eigenschappen van de uitwendige vermenigvuldiging $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$,

$\underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$, $\underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{c} \times \underline{a}) + (\underline{c} \times \underline{b})$. Er geldt i.h.a. niet

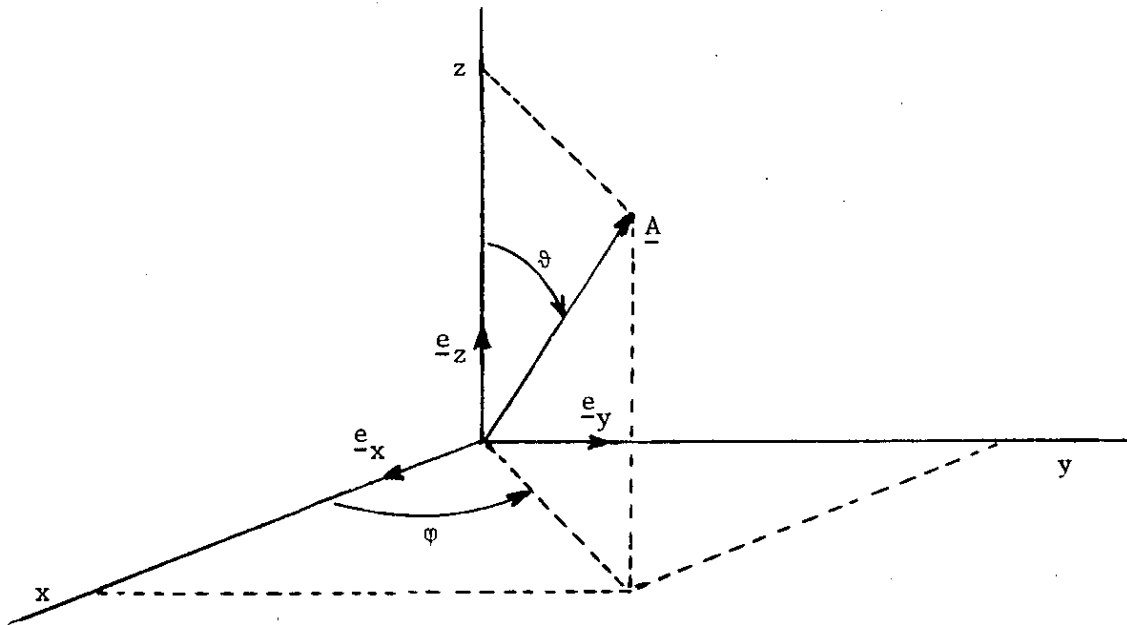
$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$. Neem maar $\underline{b} = \underline{a}$ dan staat in het linkerlid altijd $\underline{0}$, terwijl het rechterlid niet $\underline{0}$ hoeft te zijn.

De genoemde eigenschappen van de inwendige en uitwendige vermenigvuldiging kunnen m.b.v. timmermansgereedschap weer experimenteel geverifieerd worden.

Om met de ingevoerde operaties gemakkelijk te kunnen rekenen, voeren we in V een orthonormale rechtsdraaiende basis $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ in. D.w.z.

$$(*) \quad \begin{cases} \underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = \underline{e}_y \cdot \underline{e}_y = \underline{e}_z \cdot \underline{e}_z = 1 \\ \underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = 0, \text{ etc.} \\ \underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z, \quad \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x, \quad \underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y. \end{cases}$$

Vaak worden de vectoren \underline{e}_x , \underline{e}_y , \underline{e}_z "verlengd" tot coördinaatassen. Je krijgt dan een rechtsdraaiend Cartesisch coördinaatstelsel. Zie figuur.



Een willekeurige vector \underline{A} kan worden ontbonden door te projecteren langs de assen:

$$\underline{A} = A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z .$$

Er geldt

$$A_x = |\underline{A}| \sin \vartheta \cos \varphi , \quad A_y = |\underline{A}| \sin \vartheta \sin \varphi , \quad A_z = |\underline{A}| \cos \vartheta .$$

De getallen A_x , A_y , A_z heten wel de kentallen of componenten van \underline{A} . Deze kentallen worden vaak in een rijtje achter elkaar geschreven (A_x, A_y, A_z) . Een veelgebruikte slordige notatie is $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\underline{e}_x = (1, 0, 0)$, etc. Deze notatie is slordig, omdat je niet ziet welke basis er gebruikt is. Als je van tevoren één vaste basis afspreekt en je daar verder aan houdt kan het geen kwaad.

De componenten van een positievector \underline{r} zullen we schrijven op de bekende manier $\underline{r} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$. Stel nu dat we de kentallen van een aantal vectoren $\underline{A}, \underline{B}, \dots$ weten, dan kunnen we met de boven gevonden rekenregels en met (*) de som $\underline{A} + \underline{B}$, het scalaire product $\lambda \underline{A}$, het inwendige product $\underline{A} \cdot \underline{B}$ en het uitwendige product $\underline{A} \times \underline{B}$ uitdrukken in de kentallen

$$\begin{aligned} \text{I. } \underline{A} + \underline{B} &= (A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z) + (B_x \underline{e}_x + B_y \underline{e}_y + B_z \underline{e}_z) = \\ &= (A_x + B_x) \underline{e}_x + (A_y + B_y) \underline{e}_y + (A_z + B_z) \underline{e}_z \end{aligned}$$

de componenten van $\underline{A} + \underline{B}$ zijn dus $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$.

$$\text{II. } \lambda \underline{A} = \lambda (A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z) = (\lambda A_x) \underline{e}_x + (\lambda A_y) \underline{e}_y + (\lambda A_z) \underline{e}_z$$

de componenten van $\lambda \underline{A}$ zijn dus $(\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z)$.

$$\begin{aligned} \text{III. } \underline{A} \cdot \underline{B} &= (A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z) \cdot (B_x \underline{e}_x + B_y \underline{e}_y + B_z \underline{e}_z) = \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{m.b.v. } (*)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \underline{A} \times \underline{B} &= (A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z) \times (B_x \underline{e}_x + B_y \underline{e}_y + B_z \underline{e}_z) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \underline{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{e}_z \quad (\text{m.b.v. } (*)) . \end{aligned}$$

Om deze formule te onthouden wordt ze vaak geschreven als een formele determinant

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Toepassing

Stel op een materiëel object werken een aantal krachten $\underline{F}_1, \dots, \underline{F}_N$ met

aangrijpingspunten

resp. $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N$. De

totale kracht \underline{F} wordt

gedefinieerd door

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_N.$$

Voordat de krachten op-

geteld kunnen worden

moeten ze evenwijdig

worden verplaatst zodat

ze allemaal in de oor-

sprong O aangrijpen. Het totale moment \underline{M} wordt gedefinieerd door

$$\underline{M} = (\underline{r}_1 \times \underline{F}_1) + (\underline{r}_2 \times \underline{F}_2) + \dots + (\underline{r}_N \times \underline{F}_N).$$

We zeggen dat het materiëel object in statisch evenwicht is als $\underline{F} = \underline{0}$ en $\underline{M} = \underline{0}$.

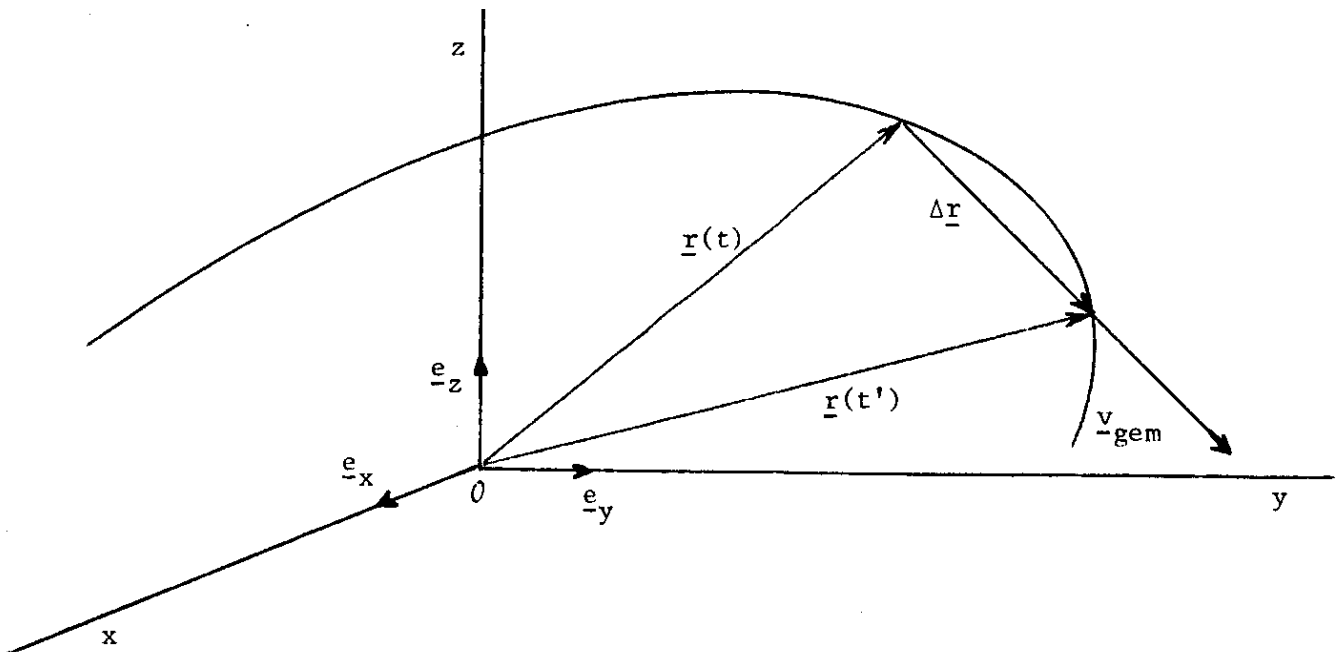
Opgave: Ga na dat het er bij onderzoek naar statisch evenwicht niet toe doet waar je de oorsprong kiest.

Behalve fysische grootheden van het scalaire en vectoriële type komen er nog gecompliceerdere fysische grootheden voor: de zgn. tensoriële grootheden van de 2^e, 3^e en 4^e soort. We gaan daar in dit college niet verder op in.

HOOFDSTUK 2. Kinematica van het materiële punt

In dit hoofdstuk geven we aan hoe de beweging beschreven kan worden van een materiële object dat zo klein is dat het tot één enkel punt geïdealiseerd kan worden. In deze beschrijving spelen de zgn. kinematische grootheden (positie, snelheid, versnelling, etc.) een belangrijke rol. In de kinematica beperken we ons tot het beschrijven van bewegingen, we houden ons niet bezig met de "oorzaak" van een beweging. Teneinde de beweging van een punt te beschrijven, kiezen we een vast coördinatenstelsel $Oxyz$. We vragen ons niet af of dit coördinatenstelsel in rust is. (Wat is trouwens "in rust", ten opzichte van wat?). De oorsprong van ons vast gekozen coördinatenstelsel kan zich dus bijv. in de collegezaal bevinden, op een draaimolen of aan boord van een straaljager.

§2.1. Positie, snelheid en afgelegde weg



De positie ten tijde t van het materiële punt wordt in het $Oxyz$ -stelsel gegeven door de positievector

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z .$$

De verplaatsingsvector tussen de tijdstippen t en t' wordt gegeven door

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t') - \underline{r}(t) = \Delta x \underline{e}_x + \Delta y \underline{e}_y + \Delta z \underline{e}_z .$$

Hierin is

$$\Delta x = x(t') - x(t) , \text{ etc.}$$

De gemiddelde snelheid tussen de tijdstippen t en t' is de vector

$$\underline{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \underline{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t} \underline{e}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t} \underline{e}_z , \text{ met } \Delta t = t' - t .$$

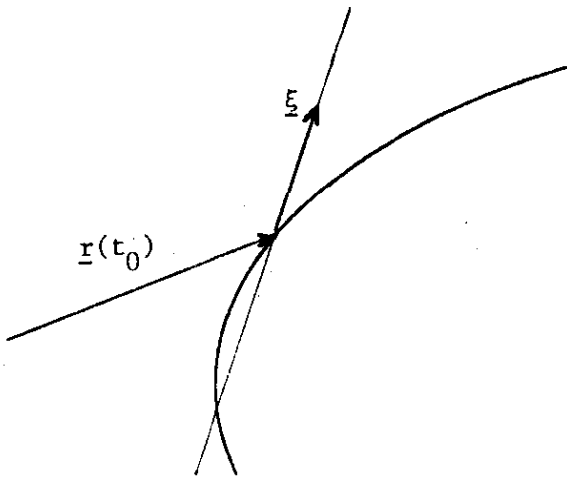
De snelheid ten tijde t is de vector

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underline{v}_{\text{gem}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \underline{e}_x + \frac{dy}{dt} \underline{e}_y + \frac{dz}{dt} \underline{e}_z .$$

Deze limiet bestaat als de functies $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ differentieerbaar zijn. In de mechanica bestaat de handige gewoonte om een afgeleide naar de tijd te noteren met een puntje boven het functiesymbool. Dus

$$\underline{v} = v_{x-x} \underline{e}_x + v_{y-y} \underline{e}_y + v_{z-z} \underline{e}_z = \dot{x} \underline{e}_x + \dot{y} \underline{e}_y + \dot{z} \underline{e}_z .$$

De snelheid $\underline{v}(t_0)$ ten tijde t_0 is een raakvector aan de baankromme in $\underline{r}(t_0)$. Aanschouwelijk is dit duidelijk. Wiskundig kan dit als volgt worden toegelicht:



In de buurt van $\underline{r}(t_0)$ benaderen we de beweging "zo goed mogelijk" door een eenparige beweging langs een rechte lijn:

$$\underline{\ell}(t) = \underline{r}(t_0) + (t - t_0)\underline{\xi} .$$

Deze benadering heet "goed" als voor $t - t_0$ klein geldt $\underline{\ell}(t) \approx \underline{r}(t)$.

We kunnen schrijven

$$\underline{r}(t) = \underline{\ell}(t) + \underline{rest}(t - t_0)$$

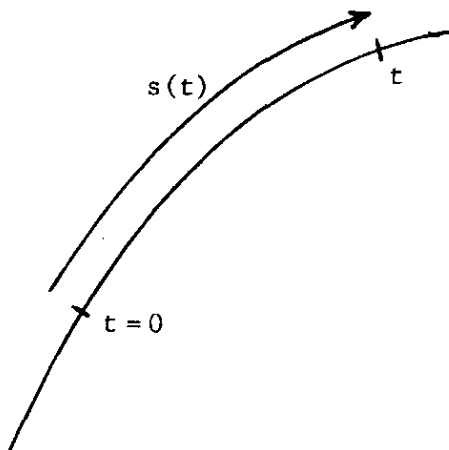
$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t_0) + (t - t_0)\underline{\xi} + \underline{rest}(t - t_0)$$

waarbij de rest harder naar 0 gaat dan $t - t_0$. D.w.z. zelfs als je de rest deelt door $t - t_0$ gaat dit nog naar 0 als $t \rightarrow t_0$. Als dit het geval is, dan moet blijkbaar gelden dat $\underline{\xi} = \dot{\underline{r}}(t_0)$.

De grootte van de snelheid $|\underline{v}(t)|$ wordt gedefinieerd door

$$|\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} .$$

We zullen vaak spreken over de afgelegde weg $s(t)$ langs de baankromme op



tijdstip t . We nemen meestal $s(0) = 0$.

De scalaire snelheid $v(t)$ wordt gedefinieerd door $v(t) = \frac{ds}{dt}$. Veronderstel dat $s(t)$ monotoon niet-dalend is, dan geldt

$$|\underline{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} \right| =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v .$$

Opmerking: In het algemeen geldt $|\underline{v}(t)| = \pm v(t)$. Als $s(t)$ monotoon niet-dalend is, vind je door te integreren

$$\begin{aligned} s(t) - s(0) &= \int_0^t \dot{s}(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t |\underline{v}(\tau)| d\tau = \\ &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\tau = \text{afgelegde weg sedert } t = 0 . \end{aligned}$$

Al naar gelang het ons uitkomt zullen we met $s(t)$ de "werkelijk afgelegde weg" dan wel "de afstand langs de baankromme" bedoelen.

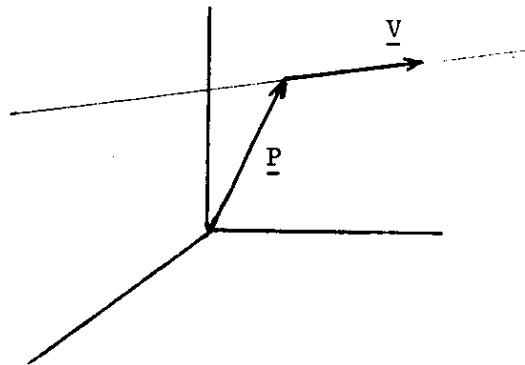
Voorbeeld 2.1. Algemene eenparige beweging

$$\underline{r}(t) = \underline{P} + t \underline{V} , \quad \underline{P}, \underline{V} \text{ constant}$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{V} = \text{constant}$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = |\underline{V}| = \text{constant}$$

$$s(t) - s(0) = \int_0^t |\underline{V}| d\tau = t |\underline{V}| .$$



Voorbeeld 2.2. Algemene eenparig versnelde beweging

$$\underline{r}(t) = \underline{P} + t \underline{V} + \frac{1}{2} t^2 \underline{a} , \quad \underline{P}, \underline{V}, \underline{a} \text{ constant}$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{V} + t \underline{a}$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{\underline{V} \cdot \underline{V} + 2t \underline{a} \cdot \underline{V} + t^2 \underline{a} \cdot \underline{a}}$$

$$s(t) - s(0) = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(\tau)| d\tau = \text{uit te rekenen}$$

$$v(t) = |\dot{\underline{r}}(t)| .$$

Opmerking: De baankromme is een parabool gelegen in een vlak met \underline{p} als steunvector en \underline{v} en \underline{a} als richtingsvectoren.

Voorbeeld 2.3. Harmonische trilling langs een rechte

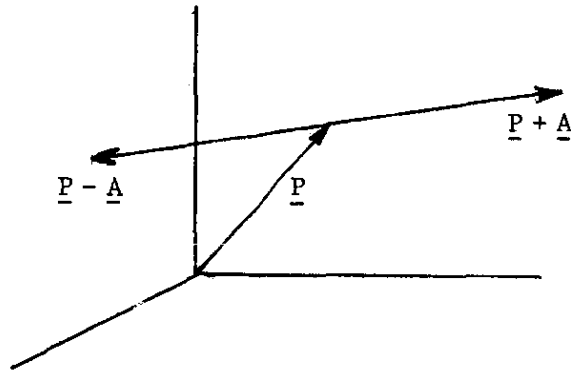
$$\underline{r}(t) = \underline{p} + \sin \omega t \underline{A} , \quad \underline{A} = \text{constant}, \omega \text{ constant}, \omega > 0$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \omega \cos \omega t \underline{A}$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \omega |\cos \omega t| |\underline{A}|$$

$$s(t) - s(0) = \sin \omega t |\underline{A}|$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \omega \cos \omega t |\underline{A}| .$$



Voorbeeld 2.4. Eenparige cirkelbeweging

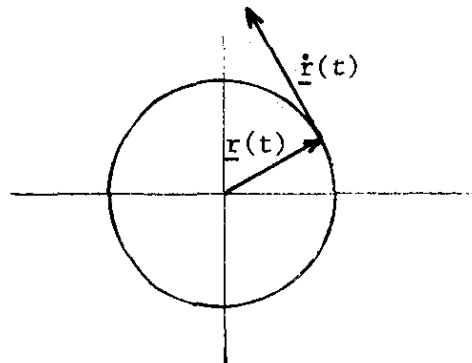
$$\underline{r}(t) = R \cos \omega t \underline{e}_x + R \sin \omega t \underline{e}_y , \quad R, \omega \text{ constant}, R > 0, \omega > 0$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\omega R \sin \omega t \underline{e}_x + \omega R \cos \omega t \underline{e}_y$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \omega R$$

$$s(t) - s(0) = \omega R t$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \omega R .$$



Opmerking: $\dot{\underline{r}}(t) \perp \underline{r}(t)$, dus $\dot{\underline{r}}(t)$ raakvector aan de baankromme in $\underline{r}(t)$.

Voorbeeld 2.5. Eenparig versnelde cirkelbeweging

$$\underline{r}(t) = R \cos \frac{1}{2}\alpha t^2 \underline{e}_x + R \sin \frac{1}{2}\alpha t^2 \underline{e}_y, \quad R, \alpha \text{ constant, } R > 0, \alpha > 0$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\alpha t R \sin \frac{1}{2}\alpha t^2 \underline{e}_x + \alpha t R \cos \frac{1}{2}\alpha t^2 \underline{e}_y$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = v(t) = \alpha t R$$

$$s(t) - s(0) = \int_0^t \alpha t R dt = \frac{1}{2} \alpha R t^2.$$

Ook hier geldt dat steeds $\dot{\underline{r}}(t) \perp \underline{r}(t)$.

De eenheidsraakvector \underline{e}_T is een meetkundig begrip en heeft alleen te maken met de vorm van de baankromme. Als in het punt $\underline{r}(t)$ van de baankromme geldt $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t) \neq \underline{0}$, dan definiëren we

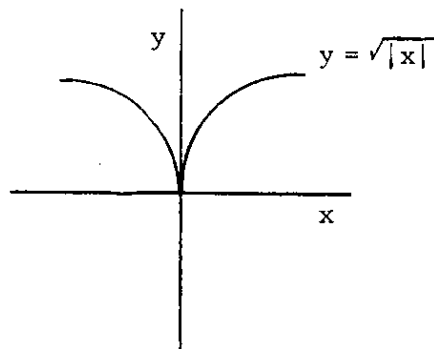
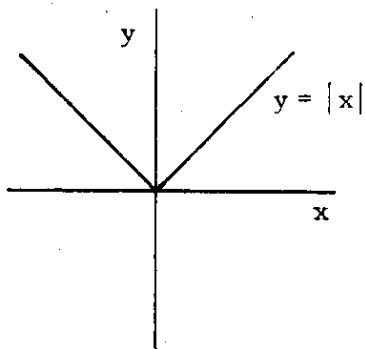
$$\underline{e}_T(t) = \frac{\underline{v}(t)}{|\underline{v}(t)|} = \frac{\dot{\underline{x}}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}} \underline{e}_x + \dots$$

Als $s(t)$ monotoon is, dan geldt triviale wijze

$$\underline{v} = |\underline{v}| \underline{e}_T = \frac{ds}{dt} \underline{e}_T = v \underline{e}_T.$$

Opmerking: Als je een punt $\underline{r}(t)$ van de baan toevallig doorloopt met $\underline{v}(t) = \underline{0}$, kun je proberen dat punt met een snelheid $\neq \underline{0}$ te doorlopen. Je kunt proberen de hele baan te doorlopen met een snelheid, die constant in grootte is.

Soms echter heeft een baan punten waar dat niet lukt. In de volgende plaatjes is de oorsprong zo'n punt.



Bepaling van $\underline{r}(t)$ uit $\underline{r}(0)$ en $\underline{v}(t)$

Als de beginpositie $\underline{r}(0)$ en de vectoriële snelheid $\underline{v}(t)$ als functie van de tijd t gegeven is, kan de positie (= verplaatsingsvector sedert $t = 0$) door integratie berekend worden.

$$\underline{r}(t) - \underline{r}(0) = \int_0^t \dot{\underline{r}}(\tau) d\tau = \int_0^t \underline{v}(\tau) d\tau .$$

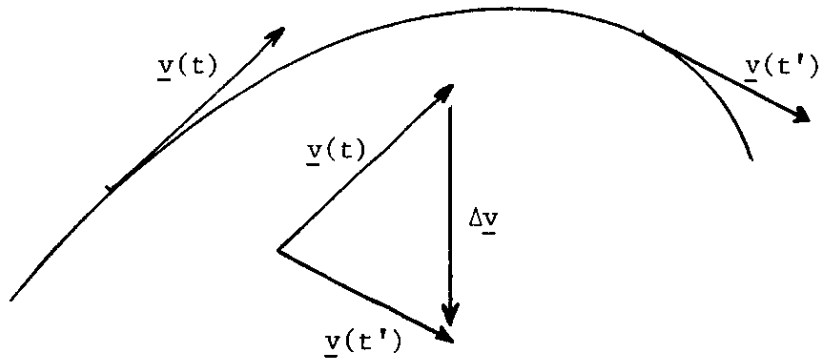
Het berekenen van de integraal gaat hier componentsgewijs, dus

$$\begin{aligned} & x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z - x(0)\underline{e}_x - y(0)\underline{e}_y - z(0)\underline{e}_z = \\ & = \left\{ \int_0^t v_x(\tau) d\tau \right\} \underline{e}_x + \left\{ \int_0^t v_y(\tau) d\tau \right\} \underline{e}_y + \left\{ \int_0^t v_z(\tau) d\tau \right\} \underline{e}_z . \end{aligned}$$

Aan het slot van deze paragraaf nog een algemeen resultaat: Veronderstel dat op ieder tijdstip t geldt dat $\underline{v}(t) \perp \underline{r}(t)$, dan blijft gedurende de hele beweging de afstand $|\underline{r}(t)|$ tot de oorsprong constant.

Bewijs: $\frac{d}{dt} |\underline{r}(t)| = \frac{d}{dt} (\underline{r}(t) \cdot \underline{r}(t))^{\frac{1}{2}} = (\underline{r}(t) \cdot \underline{r}(t))^{-\frac{1}{2}} (\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{r}(t)) = 0 .$

§2.2. Versnelling



De gemiddelde versnelling tussen de tijdstippen t en t' is de vector

$$\underline{a}_{\text{gem}} = \frac{\underline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\underline{v}(t') - \underline{v}(t)}{t' - t} .$$

De versnelling ten tijde t is de vector

$$\begin{aligned} \underline{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underline{a}_{\text{gem}} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \\ &= \dot{v}_x(t)\underline{e}_x + \dot{v}_y(t)\underline{e}_y + \dot{v}_z(t)\underline{e}_z = \\ &= \ddot{x}(t)\underline{e}_x + \ddot{y}(t)\underline{e}_y + \ddot{z}(t)\underline{e}_z = \\ &= a_x(t)\underline{e}_x + a_y(t)\underline{e}_y + a_z(t)\underline{e}_z . \end{aligned}$$

De grootte van de versnelling $|\underline{a}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Vervolg Voorbeeld 2.1.

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{0} .$$

Vervolg Voorbeeld 2.2.

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a} = \text{constant} .$$

Vervolg Voorbeeld 2.3.

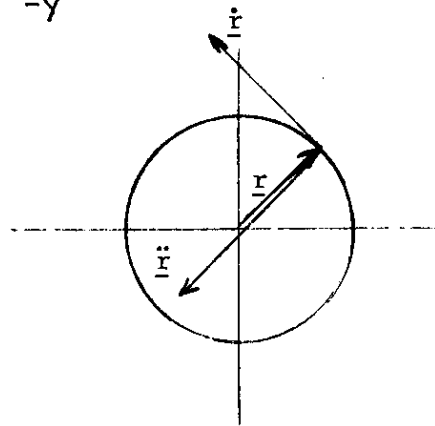
$$\ddot{\underline{r}}(t) = -\omega^2 \sin \omega t \underline{A} = -\omega^2 (\underline{r}(t) - \underline{P}) .$$

De versnelling is blijkbaar evenredig met de verplaatsingsvector vanuit het "evenwichtspunt" \underline{P} . De evenredigheidsconstante is $-\omega^2$.

Vervolg Voorbeeld 2.4.

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{r}}(t) &= -\omega^2 R \cos \omega t \underline{e}_x - \omega^2 R \sin \omega t \underline{e}_y = \\ &= -\omega^2 \underline{r}(t) . \end{aligned}$$

$$|\ddot{\underline{r}}(t)| = \omega^2 R .$$



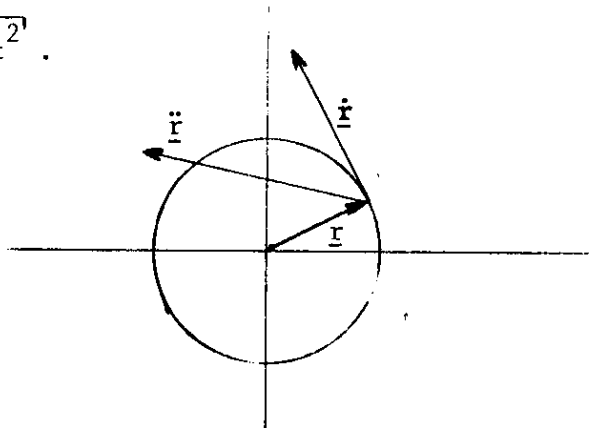
De versnelling is blijkbaar constant in grootte en wijst steeds naar de oorsprong. Ook geldt $\ddot{\underline{r}}(t) \perp \dot{\underline{r}}(t)$.

Vervolg Voorbeeld 2.5.

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{r}}(t) &= -\alpha R \sin \frac{1}{2} \alpha t^2 \underline{e}_x + \alpha R \cos \frac{1}{2} \alpha t^2 \underline{e}_y + \\ &\quad -\alpha^2 t^2 R \cos \frac{1}{2} \alpha t^2 \underline{e}_x - \alpha^2 t^2 R \sin \frac{1}{2} \alpha t^2 \underline{e}_y = \\ &= -\alpha^2 t^2 \underline{r}(t) + \frac{1}{t} \dot{\underline{r}}(t) = -\alpha^2 t^2 \underline{r}(t) + \alpha R \underline{e}_T(t) . \end{aligned}$$

Omdat $\underline{r}(t) \perp \dot{\underline{r}}(t)$ geldt hier

$$\begin{aligned} |\ddot{\underline{r}}(t)| &= \sqrt{\alpha^4 t^4 |\underline{r}(t)|^2 + \frac{1}{t^2} |\dot{\underline{r}}(t)|^2} = \sqrt{\alpha^4 t^4 R^2 + \alpha^2 R^2} = \\ &= \alpha R \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} . \end{aligned}$$



Soms is de versnelling als functie $\underline{a}(t)$ van de tijd gegeven. Als dan ook nog de beginsnelheid $\underline{v}(0)$ gegeven is, dan kun je de snelheid $\underline{v}(t)$ op ieder ogenblik vinden door te integreren

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(0) + \int_0^t \underline{a}(\tau) d\tau .$$

(De integratie moet weer componentsgewijs net als in §2.1.) Als verder ook nog $\underline{r}(0)$ gegeven is, dan kun je $\underline{r}(t)$ vinden door nogmaals te integreren. Cf. §2.1.

Voorbeeld 2.6.

Gegeven

$$\underline{r}(0) = \alpha \underline{e}_z, \quad \underline{v}(0) = \beta \underline{e}_x, \quad \underline{a}(t) = \gamma t \underline{e}_y$$

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(0) + \int_0^t \underline{a}(\tau) d\tau = \beta \underline{e}_x + \int_0^t \gamma \tau \underline{e}_y = \beta \underline{e}_x + \frac{1}{2} \gamma t^2 \underline{e}_y$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \int_0^t \underline{v}(\tau) d\tau = \alpha \underline{e}_z + \int_0^t \{ \beta \underline{e}_x + \frac{1}{2} \gamma \tau^2 \underline{e}_y \} d\tau =$$

$$= \alpha \underline{e}_z + \beta t \underline{e}_x + \frac{1}{6} \gamma t^3 \underline{e}_y .$$

Voorbeeld 2.7.

Gegeven

$$\underline{r}(0) = \underline{r}_0, \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0, \quad \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a} = \text{constant}.$$

Dan

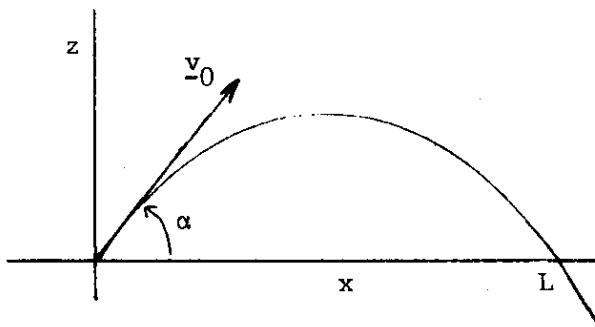
$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}_0 + t \underline{a}$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t \underline{v}_0 + \frac{1}{2} t^2 \underline{a}.$$

Dit is precies de beweging beschreven in Voorbeeld 2.2. Een bijzonder geval hiervan is de klassieke kogelbaan. Dan

$$\underline{r}_0 = \underline{0}, \quad \underline{v}(0) = v_0 \cos \alpha \underline{e}_x + v_0 \sin \alpha \underline{e}_z$$

$$\underline{a} = -g \underline{e}_z, \quad g > 0.$$



$$\underline{r}(t) = t v_0 \cos \alpha \underline{e}_x + t v_0 \sin \alpha \underline{e}_z + \frac{1}{2} t^2 g \underline{e}_z.$$

$$\text{Oftewel } x(t) = t v_0 \cos \alpha$$

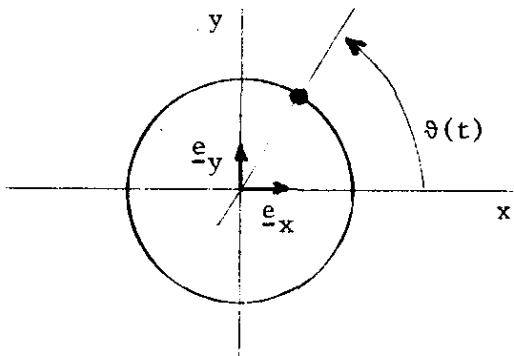
$$z(t) = t v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} t^2 g.$$

t elimineren levert $z = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$. De horizontaal afgelegde weg $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Aan het slot van deze paragraaf nog een algemeen resultaat: Veronderstel dat op ieder tijdstip de versnelling $\underline{a}(t)$ loodrecht op de snelheid $\underline{v}(t)$ staat. Dan blijft gedurende de hele beweging de grootte $|\underline{v}(t)|$ van de snelheid constant. Bewijs: $\frac{d}{dt} (\underline{v} \cdot \underline{v}) = 2(\underline{a} \cdot \underline{v}) = 0$.

§2.3. Algemene cirkelbeweging

We beschouwen de beweging van een punt op een cirkel met straal R rond



de oorsprong in het xy-vlak.

Als we op ieder ogenblik t de hoek $\vartheta(t)$ tussen de voerstraal en de positieve x-as geven, dan ligt de beweging van het punt op de cirkel volkomen vast. (In

Voorbeeld 2.4 was $\vartheta(t) = \omega t$. In Voorbeeld 2.5 was $\vartheta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$.) De positie in Cartesische coördinaten wordt gegeven door

$$x(t) = R \cos \vartheta(t) \quad , \quad y(t) = R \sin \vartheta(t) \quad .$$

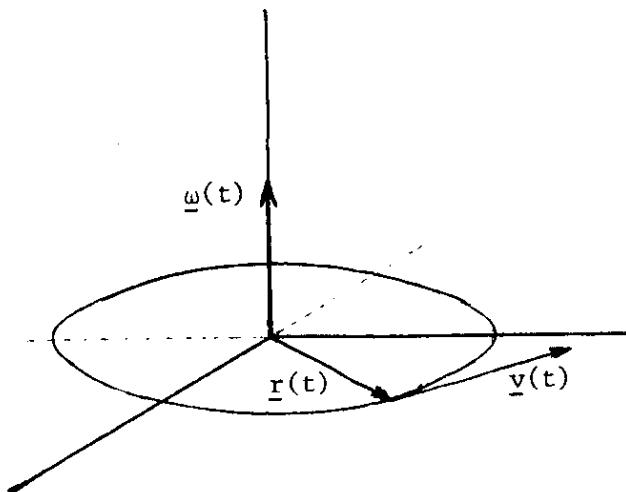
Voor de afgelegde weg $s(t)$ hebben we

$$s(t) = R \vartheta(t) \quad .$$

En voor de scalaire snelheid

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R \dot{\vartheta}(t) \quad .$$

$\dot{\vartheta}(t)$ heet wel de momentane hoeksnelheid.



We voeren de vectoriële hoeksnelheid $\underline{\omega}$ in volgens

$$\underline{\omega}(t) = \dot{\vartheta}(t) \underline{e}_z \quad .$$

Blijkbaar geldt de relatie

$$\underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}(t) \quad .$$

We differentiëren ϑ nogmaals:

$$\alpha(t) = \ddot{\vartheta}(t)$$

en voeren de vectoriële hoekversnelling $\underline{\alpha}$ in volgens

$$\underline{\alpha}(t) = \ddot{\vartheta}(t) \underline{e}_z .$$

Omdat de beweging zich in het xy-vlak afspeelt geldt

$$\underline{\alpha} = \dot{\underline{\omega}} .$$

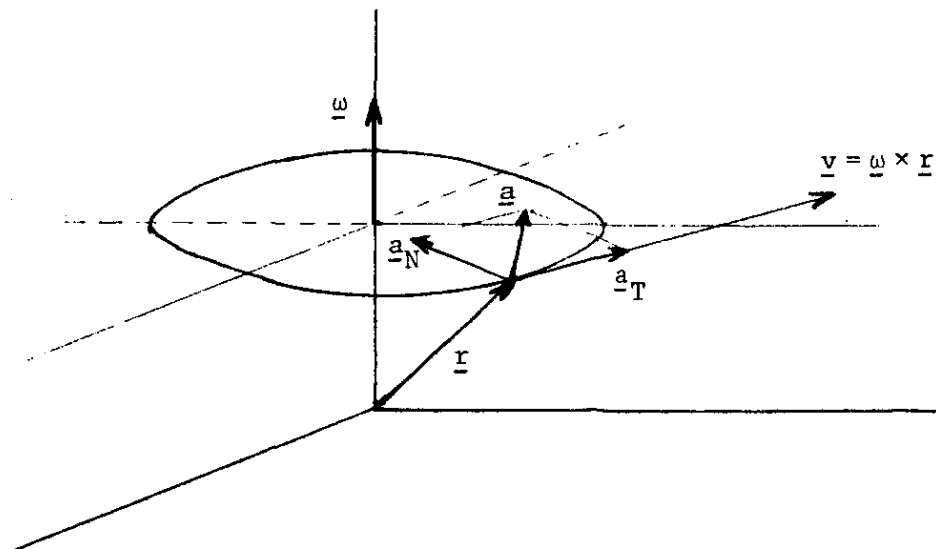
Teneinde de vectoriële versnelling $\ddot{\underline{r}}$ te bepalen differentiëren we (2.1)

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{r}} &= \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} && \text{(nu (*) toepassen)} \\ &= \underline{\alpha} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \\ &= \underline{a}_T + \underline{a}_N . \end{aligned}$$

De zgn. tangentiële versnelling $\underline{a}_T = \underline{\alpha} \times \underline{r} = \dot{v} \underline{e}_T = \ddot{\vartheta} R \underline{e}_T$ raakt aan de cirkel. De zgn. normale versnelling $\underline{a}_N = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -\omega^2 \underline{r} = -\frac{v^2}{R^2} \underline{r} = -\frac{v^2}{R} \frac{\underline{r}}{R}$ staat loodrecht op de cirkel. Anders gezegd \underline{a}_N wijst naar het middelpunt.

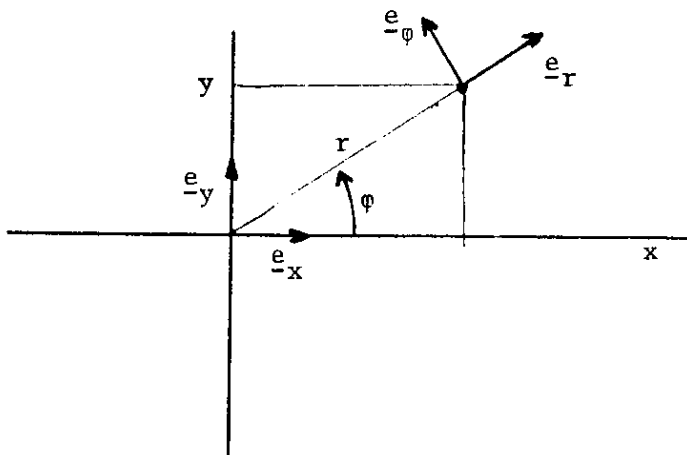
In Voorbeeld 2.5 was $\underline{\alpha}$ een constante vector. Ga zelf na dat alle resultaten van deze paragraaf geldig blijven als de cirkel zich op een hoogte h boven het xy-vlak bevindt:

$$\underline{r}(t) = R \cos \vartheta(t) \underline{e}_x + R \sin \vartheta(t) \underline{e}_y + h \underline{e}_z .$$



§2.4. Graden van vrijheid, poolcoördinaten

Het aantal getallen dat nodig is om de positie van een deeltje vast te leggen, noemt men het aantal graden van vrijheid. Zo heeft een punt dat vrij in de ruimte kan bewegen 3 graden van vrijheid en een punt dat gedwongen wordt op een cirkel te bewegen 1 graad van vrijheid. Om de positie te beschrijven van een punt dat vrij in het platte vlak kan bewegen, zijn 2 getallen nodig, bijvoorbeeld de Cartesische coördinaten x en y . In het platte vlak worden ook vaak poolcoördinaten gebruikt. Men geeft dan de afstand r van het deeltje tot de oorsprong en de hoek φ die de voerstraal maakt met de positieve x -as. Zie figuur.



In deze paragraaf drukken we een aantal kinematische grootheden uit in poolcoördinaten. De positie als functie van de tijd wordt beschreven door $r(t)$ en $\varphi(t)$. Het is duide-

lijk dat

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t) .$$

We voeren twee vectoren \underline{e}_r en \underline{e}_φ met lengte 1 in

$$\underline{e}_r = \cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y .$$

Deze vectoren veranderen i.h.a. als de positie van het deeltje verandert.

Zie figuur.

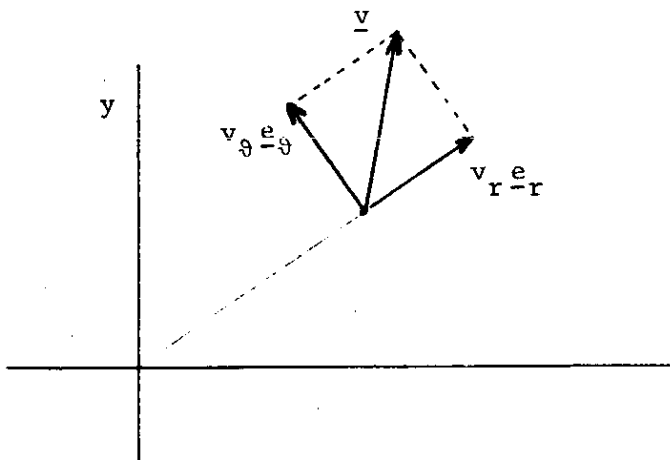
Differentiëren naar de tijd levert

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \underline{e}_r$$

We drukken nu positie, snelheid en versnelling uit in poolcoördinaten.

De positievector $\underline{r}(t) = r(t) \underline{e}_r(t)$ differentiëren levert



$$\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r = \\ &= \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi = \\ &= v_r \underline{e}_r + v_\varphi \underline{e}_\varphi. \end{aligned}$$

We noemen $v_r = \dot{r}$ de radiële snelheid en $v_\varphi = r \dot{\varphi}$ de transversale snelheid.

Bij een willekeurige beweging

op een cirkel om de oorsprong geldt steeds $v_r = 0$. Bij een willekeurige beweging op een rechte door de oorsprong geldt steeds $v_\varphi = 0$. Verder differentiëren levert

$$\ddot{\underline{r}} = \{\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2\} \underline{e}_r + \{2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}\} \underline{e}_\varphi = a_r \underline{e}_r + a_\varphi \underline{e}_\varphi.$$

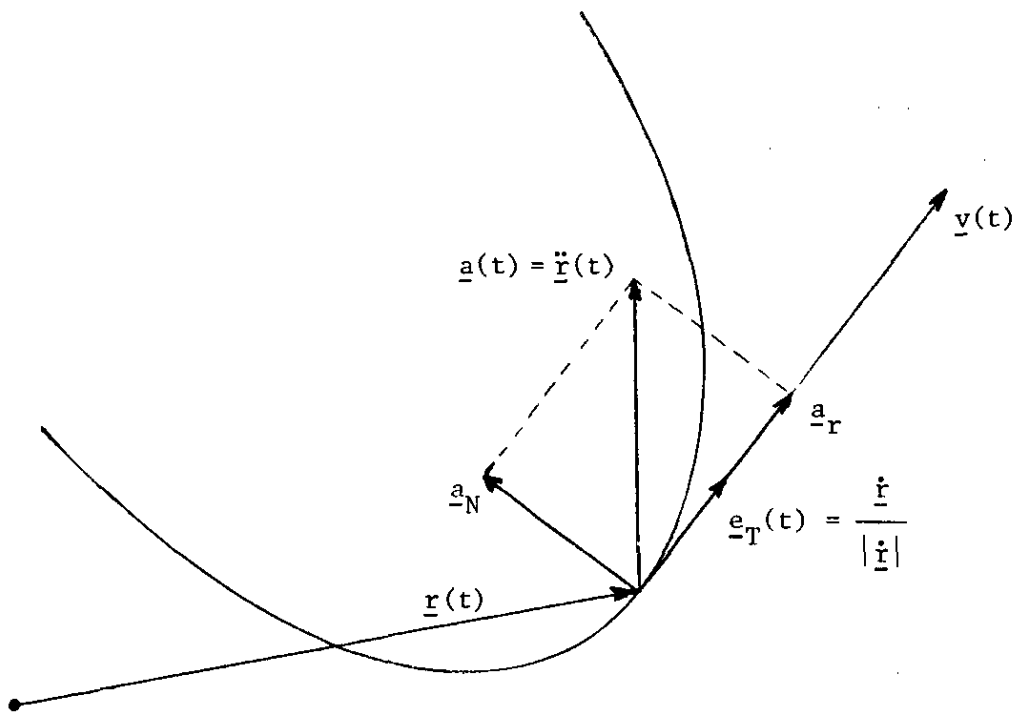
We noemen $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$ de radiële versnelling en $a_\varphi = 2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}$ de transversale versnelling. Bij een willekeurige cirkelbeweging om de oorsprong geldt $r(t) = R = \text{constant}$ en $\varphi(t) = \vartheta(t)$. Dan komt er

$$\ddot{\underline{r}} = -R \dot{\vartheta}^2 \underline{e}_r + R \ddot{\vartheta} \underline{e}_\varphi,$$

conform §2.3.

Tenslotte merken we nog op dat de ontbinding van kinematische grootheden in radiële en transversale componenten uitsluitend van de positie in het vlak afhangt en NIET van de richting van de baankromme die door het beschouwde punt gaat.

§2.5. Tangentiële en Normale Versnelling. Kromtestraal



Als bij de beweging van een punt de versnelling steeds loodrecht op de snelheid staat, dan blijft de grootte van de snelheid constant. Zie slot §2.2. In een positie $\underline{r}(t)$ ontbinden we $\ddot{\underline{r}}(t)$ in een component \underline{a}_N langs \underline{v} (of \underline{e}_T) en een component \underline{a}_T loodrecht daarop. Zie figuur. Je hebt dan het gevoel dat \underline{a}_T verantwoordelijk is voor veranderingen in de grootte van de snelheid en dat \underline{a}_N verantwoordelijk is voor richtingsveranderingen (baan-kromming). We zullen dit precies maken.

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} (v \underline{e}_T) = \frac{dv}{dt} \underline{e}_T + v \dot{\underline{e}}_T .$$

Dit is een loodrechte opsplitsing, want

$$\dot{\underline{e}}_T \cdot \underline{e}_T = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underline{e}_T \cdot \underline{e}_T = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} = 0 .$$

Verder schrijven we

$$v \frac{d}{dt} \underline{e}_T = v \frac{ds}{dt} \frac{d \underline{e}_T}{ds} = v^2 \frac{d \underline{e}_T}{ds} .$$

Er geldt $\frac{d \underline{e}_T}{ds} \perp \underline{e}_T$.

Definiëer de eenheidsvector \underline{e}_N door

$$\underline{e}_N = \left| \frac{d \underline{e}_T}{ds} \right|^{-1} \frac{d \underline{e}_T}{ds}$$

en stel

$$\left| \frac{d \underline{e}_T}{ds} \right| = \rho = \frac{1}{R} .$$

ρ heet de kromming en R heet de kromtestraal. Beide variëren i.h.a. van punt tot punt.

De opsplitsing van $\ddot{\underline{r}}$ kan dan tenslotte geschreven worden als

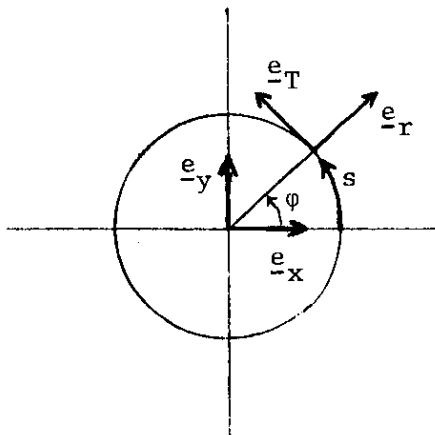
$$\ddot{\underline{r}} = \frac{dv}{dt} \underline{e}_T + \frac{v^2}{R} \underline{e}_N .$$

Omdat $\underline{e}_T \perp \underline{e}_N$ geldt volgens Pythagoras

$$|\ddot{\underline{r}}|^2 = \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 + \frac{v^4}{R^2} \quad (2.2)$$

op ieder tijdstip.

Om te laten zien dat onze definitie van kromming een zinvolle generalisatie is, zullen we nu eerst laten zien dat de kromming van een cirkel met straal R , als we bovenstaande definitie toepassen, in ieder punt gelijk blijkt te zijn aan $\frac{1}{R}$:



$$\underline{e}_T = \underline{e}_\varphi = -\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y$$

$$\frac{d \underline{e}_T}{ds} = -\frac{d\varphi}{ds} \underline{e}_r$$

en omdat $\varphi = \frac{s}{R}$ geldt

$$\frac{d \underline{e}_T}{ds} = -\frac{1}{R} \underline{e}_r .$$

We zien hier ook nog dat \underline{e}_N de kant uit wijst waar de kromme

heen buigt.

We hebben gevonden

$$\ddot{\underline{r}} = a_T \underline{e}_T + a_N \underline{e}_N$$

met $a_T = \frac{dv}{dt}$ en $a_N = \frac{v^2}{R}$.

a_T heet de tangentiële versnelling en a_N heet de normale versnelling.

Bij een beweging langs een rechte lijn heb je

$$\dot{e}_T = 0 \quad \text{dus } \rho = 0 \text{ of } R = \infty \text{ en } \underline{a}_N = 0 .$$

Pas de resultaten van deze paragraaf toe op de algemene cirkelbeweging van §2.3.

Voorbeeld 2.8. Berekening van een kromtestraal

$$\underline{r}(t) = \alpha t \underline{e}_x + \beta t^2 \underline{e}_y \quad \alpha \text{ en } \beta \text{ constant .}$$

De baankromme is een parabool van de vorm $y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2$. Van de uitdrukking (2.2) zijn alle grootheden gemakkelijk te berekenen, behalve R .

$$\dot{\underline{r}}(t) = \alpha \underline{e}_x + 2\beta t \underline{e}_y$$

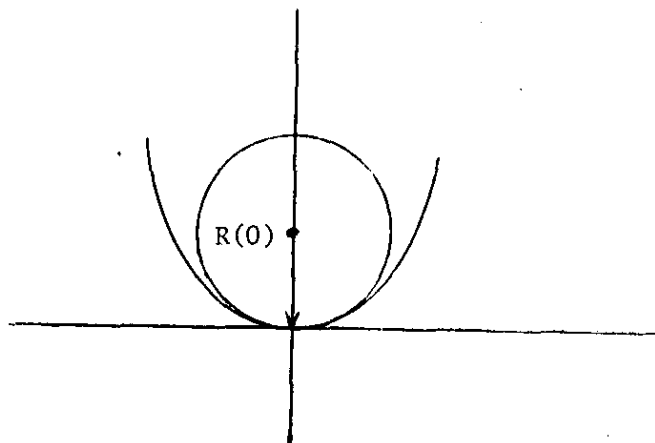
$$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\beta \underline{e}_y$$

$$|\dot{\underline{r}}(t)|^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 t^2 \quad v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$$

$$|\ddot{\underline{r}}(t)|^2 = 4\beta^2 \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 4\beta^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} 8\beta^2 t .$$

Voor de kromtestraal op $t = 0$ vinden we dan

$$R^2(0) = \frac{\alpha^4}{4\beta^2} .$$



HOOFDSTUK 3. Dynamica van één deeltje

In §2.2 hebben we gezien dat de positie en de snelheid van een deeltje in principe berekend kan worden als gegeven is

- a) de beginpositie \underline{r}_0
- b) de beginsnelheid \underline{v}_0
- c) de versnelling $a(t)$ als functie van de tijd.

De berekening bestond uit twee opeenvolgende integraties van $\underline{a}(t)$.

Bij de meeste problemen echter is de versnelling niet voorgeschreven als functie van de tijd (alleen), maar hangt ook nog af van de positie en/of de snelheid van het deeltje. Dan geldt dus

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) .$$

Dit is een differentiaalvergelijking voor $\underline{r}(t)$. Als \underline{a} alleen van t afhangt, kan de differentiaalvergelijking opgelost worden door \underline{a} twee maal te integreren naar t , zie §2.2. Echter als \underline{a} (ook) van \underline{r} en/of $\dot{\underline{r}}$ afhangt, gaat dit oplossen veel moeilijker.

§3.1. De bewegingsvergelijking

De precieze functionele vorm van de voorgeschreven versnelling $\underline{a}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ wordt door experimentele fysici en ingenieurs vastgesteld. In de opgaven wordt $\underline{a}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ vaak gegeven. Verder wordt \underline{a} altijd geschreven in de vorm

$$\underline{a}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \frac{\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)}{m} .$$

Hierin heet $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ de uitgeoefende kracht en m heet de massa van het

deeltje. m is een constante die hoort bij het beschouwde deeltje. Fundamentele beschouwingen over massa en kracht zullen gegeven worden in Hoofdstuk 5. De positie als functie van de tijd voldoet dus aan de differentiaalvergelijking(en)

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) . \quad (3.1)$$

We noemen deze de bewegingsvergelijking(en). De bewegingsvergelijking speelt in onze verdere beschouwingen een centrale rol. Al onze kunstjes met impuls, impulsmoment, arbeid, energie etc. zijn slechts methoden om wat te kunnen zeggen over de oplossingen van de bewegingsvergelijkingen.

Het superpositieprincipe zegt: Als op een (bewegend) massapunt meerdere krachten werken, dan mogen deze krachten vervangen worden door één kracht die de vectorsom is van de werkende krachten.

In het algemeen staan in (3.1) drie gekoppelde differentiaalvergelijkingen. We bespreken nu een drietal ontbindingen.

- De bewegingsvergelijkingen in de 3-dimensionale ruimte uitgeschreven in Cartesische coördinaten

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = m \ddot{x} \underline{e}_x + m \ddot{y} \underline{e}_y + m \ddot{z} \underline{e}_z .$$

Dus

$$m \ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m \ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m \ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) .$$

Soms is de krachtfunctie \underline{F} zodanig, dat de vergelijkingen gedeeltelijk ontkoppeld zijn.

- De bewegingsvergelijkingen in het platte vlak uitgeschreven in poolcoördinaten.

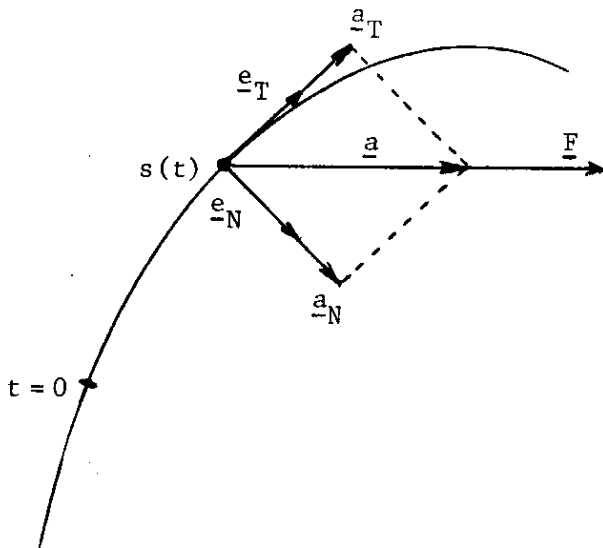
$$\underline{F} = F_r \underline{e}_r + F_\varphi \underline{e}_\varphi = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi .$$

Dus

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t)$$

$$mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = F_\varphi(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) .$$

- De bewegingsvergelijking ontbonden bij beweging langs een voorgeschreven kromme



$$\underline{F} = F_T \underline{e}_T + F_N \underline{e}_N =$$

$$= m(\ddot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_T)\underline{e}_T + m(\ddot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_N)\underline{e}_N .$$

Dus

$$m \frac{dv}{dt} = m\ddot{s} = F_T(s, \dot{s}, t)$$

$$m \frac{v^2}{R(s)} = m \frac{\dot{s}^2}{R(s)} = F_N(s, \dot{s}, t) . \quad (3.2)$$

In dit stelsel is s altijd een onbekende functie. Soms is F_T gegeven en moet F_N bepaald worden. Soms is een verband tussen F_T en F_N gegeven.

Nog twee bijzondere gevallen: Voor de beweging langs een rechte lijn (neem voor het gemak de x -as) is de bewegingsvergelijking

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) .$$

Voor de beweging langs een cirkel met straal R volgt met gebruik van poolcoördinaten

$$mR\ddot{\varphi} = F_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

$$-mR\dot{\varphi}^2 = F_r(\varphi, \dot{\varphi}, t) .$$

(3.3)

Omdat dit twee vergelijkingen zijn en $\varphi(t)$ de onbekende functie is, kunnen F_φ en F_r niet onafhankelijk van elkaar worden voorgeschreven. Als bijv. F_φ gegeven is, dan ligt F_r vast.

Opmerking: Het stelsel (3.3) volgt ook uit (3.2) door $s = R\varphi$ te nemen.

We bespreken nu een aantal krachten (of krachtvelden), de daarbij behorende differentiaalvergelijkingen en de oplossingsmethoden.

§3.2. De constante kracht

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = \text{constant}$$

$$m \ddot{x} = F_x$$

$$m \ddot{y} = F_y$$

$$m \ddot{z} = F_z .$$

De vergelijkingen zijn ontkoppeld. De algemene oplossingen zijn

$$x(t) = A_1 + B_1 t + \frac{1}{2m} F_x t^2$$

$$y(t) = A_2 + B_2 t + \frac{1}{2m} F_y t^2$$

$$z(t) = A_3 + B_3 t + \frac{1}{2m} F_z t^2$$

A_i en B_i zijn willekeurig te kiezen constanten. Deze worden vastgelegd door begincondities en beginsnelheden aan te geven. Zij

$$\underline{r}(0) = \underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) .$$

Dan volgt

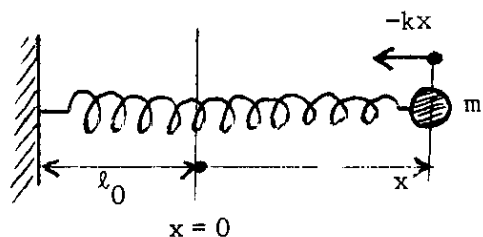
$$\begin{aligned} A_1 &= x_0 & A_2 &= y_0 & A_3 &= z_0 \\ B_1 &= v_{0x} & B_2 &= v_{0y} & B_3 &= v_{0z} . \end{aligned}$$

In vectornotatie is dan de oplossing

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t \underline{v}_0 + \frac{t^2}{2m} \underline{F} .$$

Vergelijk dit met Voorbeeld 2.2 en 2.7 van Hoofdstuk 2.

§3.3. De lineaire veer (= de eendimensionale harmonische oscillator)



Een massapunt kan langs de x -as bewegen en zit vast aan een veer, die eveneens langs de x -as ligt. l_0 is de ongespannen veerlengte. l is de gespannen veerlengte.

$x = l - l_0$ is de uitrekking. k is de veerstijfheid, $k > 0$. We kiezen eerst de oorsprong, $x = 0$, in de ruststand. De uitgeoefende kracht hangt alleen van de plaats x af. Dus $m\ddot{x} = F(x)$. $F(x) = -kx$ dus

$$m\ddot{x} = -kx .$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

met A en B willekeurige constanten.

Als de begincondities gegeven zijn: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, dan volgt

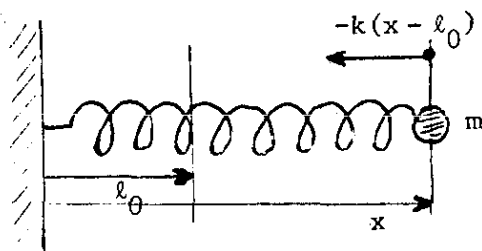
$$\dot{x}(0) = B \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 .$$

En

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t .$$

Vergelijk dit met Voorbeeld 2.3.

Als we de oorsprong niet in de evenwichtsstand maar bij het bevestigings-



punt van de veer kiezen, komt er

$$m \ddot{x} = -kx + k l_0 .$$

Een oplossing is $x = l_0$ (= constant!).

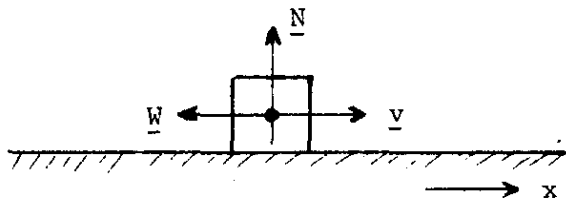
De algemene oplossing is

$$x(t) = l_0 + A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

met willekeurige constanten A en B, die weer vastgelegd kunnen worden door begincondities te kiezen.

§3.4. Coulombse of droge wrijving

Dit is een voorbeeld van een kracht die van de snelheid afhangt. Veronderstel dat een massapunt langs de x-as beweegt. De x-as oefent een normaal-



kracht uit, die loodrecht op de

bewegingsrichting staat. Er kan

dan een wrijvingskracht \underline{W} zijn, die

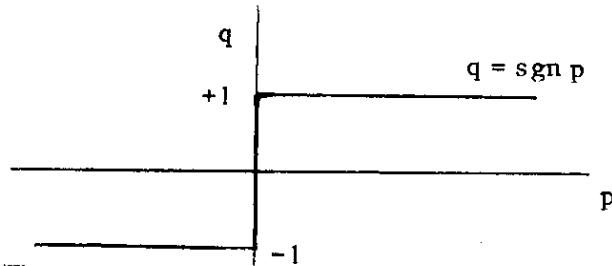
de snelheid "tegenwerkt". $|\underline{W}|$ wordt

evenredig met $|\underline{N}|$ verondersteld, de evenredigheidsconstante heet f, de

wrijvingscoëfficiënt en hangt af van de ruwheid van het oppervlak. Dan geldt de bewegingsvergelijking

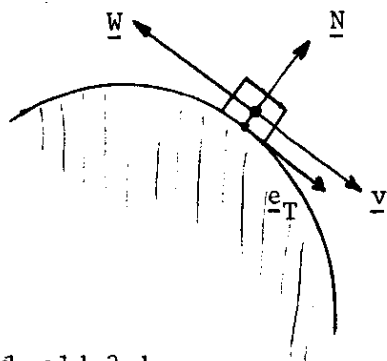
$$m \ddot{x} = -f |\underline{N}| \operatorname{sgn} \dot{x} .$$

De "functie" sgn heeft de volgende grafiek

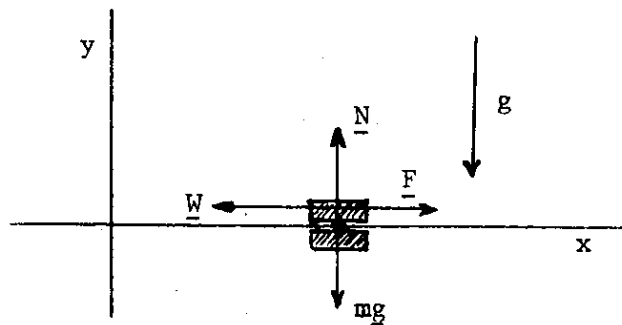


Dus de kracht $W = \begin{cases} -f |\underline{N}| & \text{als } \dot{x} > 0 \\ f |\underline{N}| & \text{als } \dot{x} < 0 \\ \leq f |\underline{N}| & \text{als } \dot{x} = 0 . \end{cases}$

Bij beweging langs een kromme geldt eveneens



met $\underline{W} = -f |\underline{N}| \operatorname{sgn} v \underline{e}_T$ $v = \underline{v} \cdot \underline{e}_T$.



Voorbeeld 3.1.

Op een horizontale starre draad zit een kraal met massa m . Op de kraal werken: de (verticale) zwaartekracht $-mg \underline{e}_y$, $g > 0$, een wrijvingskracht \underline{W} en een constante horizontale kracht $\underline{F} = F \underline{e}_x$.

- (i) Hoe groot mag F zijn opdat de kraal in rust blijft? $|F| \leq fmg$
- (ii) Als de kraal op $t = 0$ in rust is, wat is dan de versnelling als F groter is dan de onder (i) gevonden waarde? $\ddot{x} = \frac{1}{m} (F - fmg)$
- (iii) Als de kraal op $t = 0$ een snelheid $v_0 < 0$ heeft en $F > 0$, wat is dan de versnelling en hoe lang blijft dat zo?

Oplossing

De bewegingsvergelijkingen zijn

$$m\ddot{x} = F + W$$

$$m\ddot{y} = N - mg .$$

Omdat in de y richting geen beweging mogelijk is, geldt $\ddot{y} = 0$ en dus

$$N = mg .$$

(i) Als $\ddot{x} = 0$, dan $F = -W$

$$|F| = |W| \leq f|N| = fmg .$$

Dus als $|F| \leq fmg$, dan blijft de kraal in rust.

(ii) Als $F > fmg$, dan treedt beweging naar rechts op, dus

$$m\ddot{x} = F + W = F - fmg$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(F - fmg) .$$

(iii) Als $\dot{x} < 0$, dan

$$m\ddot{x} = F + W = F + fmg$$

$$\dot{x}(t) = v_0 + t\left(\frac{F}{m} + fg\right)$$

$$t = t_r = \frac{-v_0}{\frac{F}{m} + fg} \quad \text{dan } \dot{x}(t) = 0 .$$

Als $0 \leq F \leq fmg$, dan verder rust.

Als $F > fmg$, dan is voor $t > t_r$ de versnelling gelijk aan $\frac{F}{m} - fg$.

Voorbeeld 3.2/ Lorentz kracht $m\ddot{\underline{r}} = e\mathbf{B} \times \dot{\underline{r}}$. Schrijf $\ddot{\underline{r}} = \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}$, met $\underline{\omega} = \frac{e}{m} \underline{B}$, de Larmorfrequentie. Neem $\underline{B} = B \underline{e}_z$.

Oplossingen: (i) $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t\omega_0 \underline{e}_z$, (ii) $\underline{r}(t) = R \cos \omega t \underline{e}_x + R \sin \omega t \underline{e}_y$.

De straal van de spiraal bepaal je uit

$$|\underline{v}_0| = |\underline{\omega}| R \quad \text{als } (\underline{v}_0, \underline{e}_z) = 0$$

Algemene oplossing

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \omega t \underline{e}_z + R \cos\left(\frac{eB}{m}t + \varphi\right) \underline{e}_x + R \sin\left(\frac{eB}{m}t + \varphi\right) \underline{e}_y$$

§3.5. Visceuze of natte wrijving

In dit geval werkt de wrijving ook tegengesteld aan de snelheid, maar is evenredig met de grootte van de snelheid. In formule

$$\underline{W} = -\kappa \underline{v} , \quad \kappa > 0 .$$

Bij vallende regendruppels of bewegende knikkers in stroop, schrijft men vaak $\kappa = K \eta$. Hierin is η de viscositeit van de vloeistof. K hangt af van de geometrie van het bewegende object. Als dit laatste een bol is, dan geldt volgens Stokes $K = 6\pi R$, R de straal van de bol.

Voorbeeld 3.2.

Een deeltje met massa m kan langs de x -as bewegen. Op het deeltje werken visceuze wrijving en een constante uitwendige kracht F . De bewegingsvergelijking is

$$m \ddot{x} = -\kappa \dot{x} + F .$$

x zelf komt niet voor. Stel $\dot{x} = v$ en pas scheiding van veranderlijken toe.

De vergelijking

$$m \dot{v} = -\kappa v + F$$

heeft als algemene oplossing

$$v(t) = C e^{-\frac{\kappa}{m} t} + \frac{F}{\kappa} , \quad C \text{ willekeurige constante .}$$

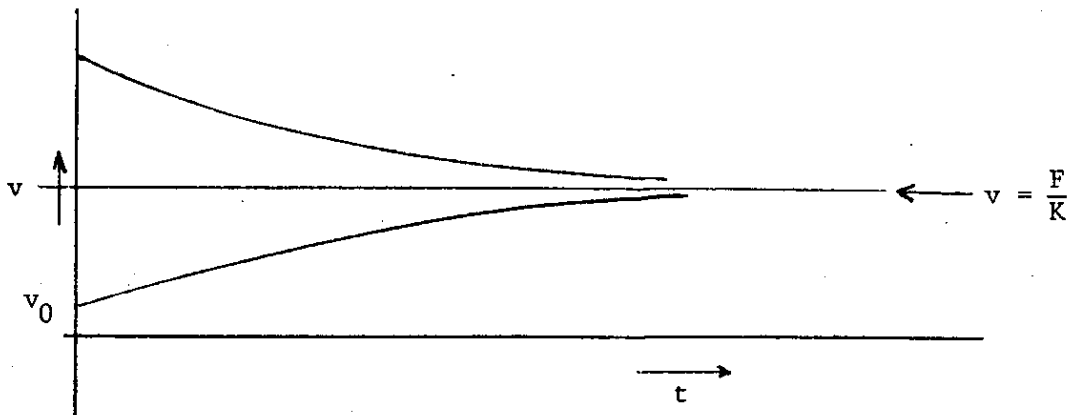
$x(t)$ vinden we door $v(t)$ te integreren

$$x(t) = A e^{-\frac{\kappa}{m} t} + B + \frac{F}{\kappa} t , \quad A \text{ en } B \text{ willekeurige constanten .}$$

Neem $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = v_0$, dan

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{F}{\kappa}\right) e^{-\frac{\kappa}{m} t} + \frac{F}{\kappa} .$$

De limietsnelheid is altijd $\frac{F}{\kappa}$.



Tenslotte

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \left(\frac{F}{\kappa} - v_0 \right) \left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1 \right) + \frac{F}{\kappa} t .$$

Opmerking: Eperimenteel moet worden vastgesteld of de "wrijvingsmodellen" van §3.4 en §3.5 correct zijn. Er worden ook wel andere wrijvingsfuncties dan $-f|\underline{N}|\text{sgn}\dot{x}$ en $-\kappa\dot{x}$ gebruikt.

§3.6. De centrale kracht

Een centrale kracht in het platte vlak of in de ruimte is een kracht die steeds naar de oorsprong toe of van de oorsprong af is gericht. De algemene gedaante is

$$\underline{F} = F_r(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)\underline{e}_r \quad \text{met } \underline{e}_r = \frac{1}{|\underline{r}|} \underline{r} .$$

Hierin is F_r een willekeurige scalaire functie van de aangegeven variabelen.

1e Bijzondere Geval

De Newtonse centrale kracht $F(\underline{r}) = -\frac{c}{|\underline{r}|^2}$.

Als $c > 0$, dan aantrekking en als $c < 0$, dan afstoting.

2e Bijzondere Geval

De Harmonische oscillator $\underline{F}(\underline{r}) = -k \underline{r} = -k |\underline{r}| \underline{e}_r$.

Als $k > 0$, dan aantrekking en als $k < 0$, dan afstoting.

In het platte vlak luiden de algemene bewegingsvergelijkingen in poolcoördinaten

$$\begin{cases} m \ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 = F_r(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, t) \\ m r \ddot{\phi} + 2m \dot{r} \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

In de twee bovengenoemde bijzondere gevallen vinden we een speciale oplossing (zeker niet de meest algemene beweging!) door $r(t) = R = \text{constant}$ te nemen. De onderste vergelijking wordt bevredigd door ook $\dot{\phi} = \text{constant}$ te nemen. De waarde van deze constante wordt door de bovenste vergelijking bepaald:

$$1\text{e geval: } -m R \dot{\phi}^2 = -\frac{c}{R^2}$$

$$2\text{e geval: } -m R \dot{\phi}^2 = -k R$$

Alleen als $c > 0$ c.q. $k > 0$ zijn er oplossingen mogelijk

$$1\text{e geval: } \dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{c}{m R^3}}$$

$$2\text{e geval: } \dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

In beide gevallen wordt dan de cirkel eenparig doorlopen. Heuristisch gesproken: de centripetale kracht wordt geleverd door \underline{F} .

Voor de harmonische oscillator geldt de bewegingsvergelijking

$$m \ddot{\underline{r}} = -k \underline{r} .$$

Ga na dat de algemene oplossing in Cartesische coördinaten gegeven wordt door

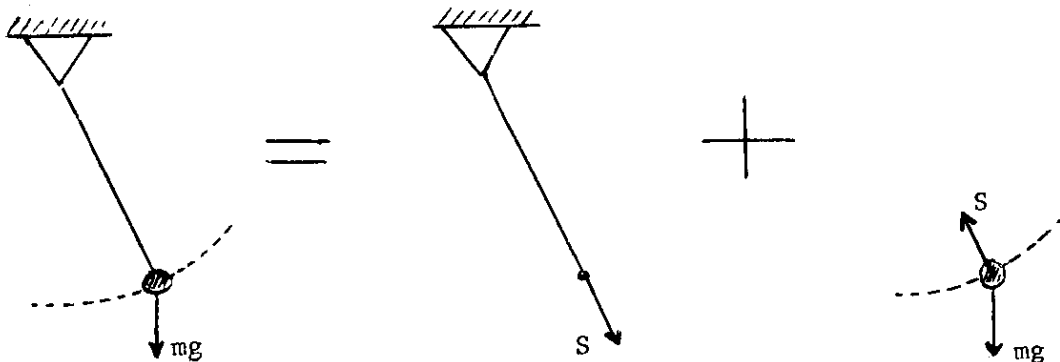
$$\underline{r}(t) = \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \underline{A} + \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \underline{B}$$

met A en B willekeurig te kiezen constante vectoren. Ga na dat de baankromme zich in één vlak bevindt en de vorm heeft van een ellips.

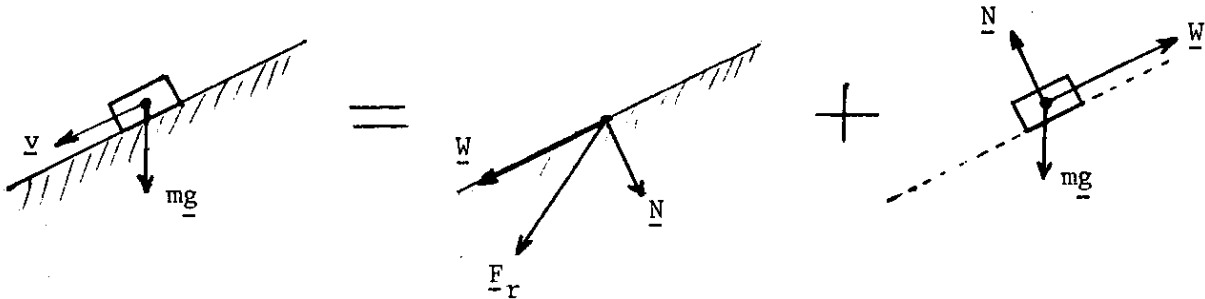
§3.7. Krachten die optreden bij meetkundige restricties (Reactiekrachten, gedwongen beweging, vrijmaken)

Stel dat een massapunt m vast zit aan een touw of staaf. Of stel dat m gedwongen wordt langs een voorgeschreven kromme of in een voorgeschreven (opper)vlak te bewegen. Om de bewegingsvergelijkingen te kunnen opstellen moeten we het massapunt m dan vrijmaken van zijn verbindingen: d.w.z. in gedachten maken we m los en brengen de invloed die m ondervindt van zijn omgeving in rekening door (eventueel onbekende) krachten in te voeren. Een fundamenteel principe in de mechanica (Actie = -Reactie) zegt dan dat de omgeving dan even grote maar tegengestelde krachten ondervindt van m .

Voorbeeld 3.3. Slinger: Vrijmaken van een massapunt aan een koord.



Voorbeeld 3.4. Vrijmaken van een massapunt op een hellend vlak.



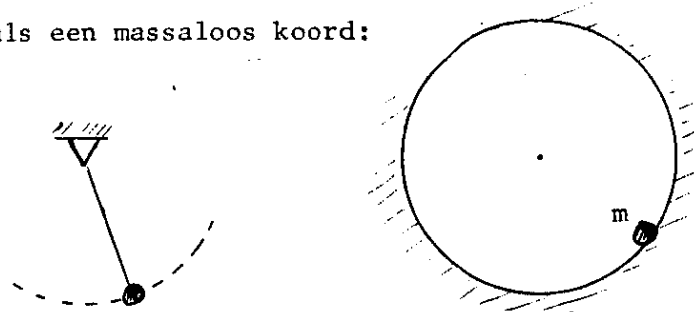
Het aantal onbekende componenten van de reactiekracht is gelijk aan het aantal graden van vrijheid dat de gedwongen beweging minder heeft dan de vrije beweging.

Wat betreft de bij gedwongen beweging optredende krachten zullen wij in dit college steeds de volgende aannamen maken:

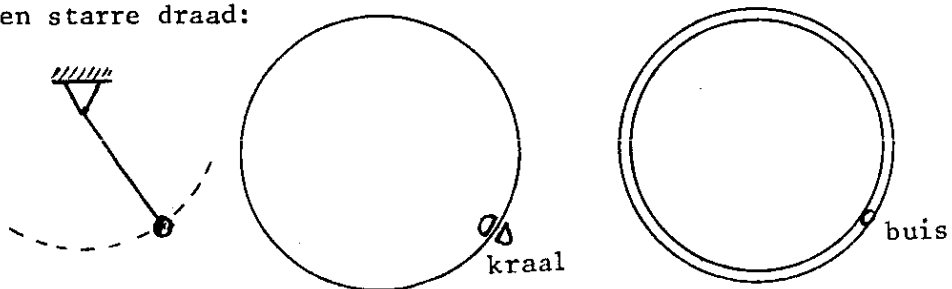
- De kracht die een massapunt ondervindt van een slap massaloos koord is gericht langs het koord, met dien verstande dat alleen een trekkracht kan optreden. In ons model is de kracht overal in een koord hetzelfde. Ook als het koord over een (massaloze) katrol of "gladde pen" geslagen is.
- De kracht die een massapunt ondervindt van een massaloze staaf is gericht langs de staafas.
- De kracht die een massapunt ondervindt van een ondoordringbaar vlak bestaat uit een normaalkracht loodrecht op het vlak en een wrijvingskracht die aan het ondoordringbare vlak raakt.

Zo'n ondoordringbaar vlak is een eenzijdige restrictie (kan alleen duwen en niet trekken). Zodra de normaalkracht nul is, kan het massapunt vrijkomen van het vlak en neemt het aantal graden van vrijheid met 1 toe. De onbekende reactiekracht verdwijnt dan.

Soms levert een ondoordringbaar oppervlak zonder wrijving dezelfde restricties op als een massaloos koord:

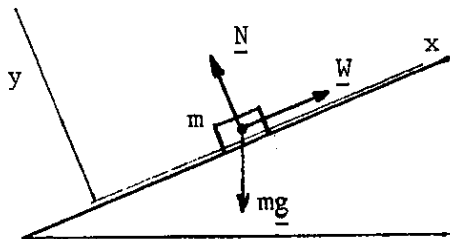


Een gladde buis kan eenzelfde restrictie opleveren als een massaloze staaf of een starre draad:



Vanwege de restricties weet je al iets van de beweging. Het aantal onbekenden blijft echter hetzelfde, omdat een onbekende normaalkracht optreedt.

Voorbeeld 3.5. Hellend vlak met wrijving.



De bewegingsvergelijkingen zijn

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + W$$

$$m \ddot{y} = N - mg \cos \alpha$$

$$W = -f N \operatorname{sgn} v .$$

Het hellend vlak is een eenzijdige restrictie. Zolang m langs het hellend vlak beweegt, geldt $y = 0$. Dus $N = mg \cos \alpha > 0$. Dat kan dus. Er blijft over

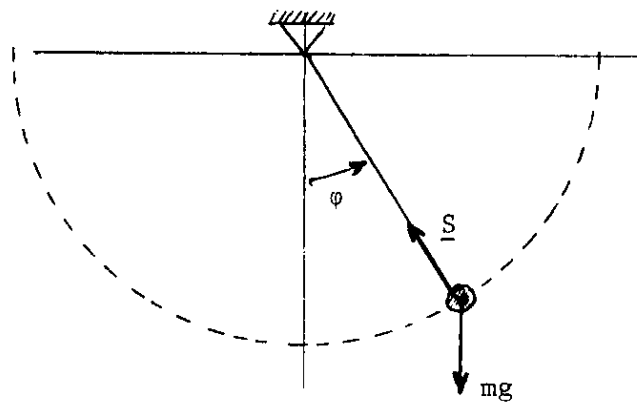
de bewegingsvergelijking

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha \operatorname{sgn} \dot{x}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) & \text{als } \dot{x} > 0 \\ m \ddot{x} = -mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) & \text{als } \dot{x} < 0 . \end{cases}$$

Als $\dot{x} = 0$, rust, dan $|mg \sin \alpha| \leq |f mg \cos \alpha|$, dus $\tan \alpha \leq f$.

Voorbeeld 3.6. Berekening van de kracht in het koord van een vlakke slinger.



De onbekende functies zijn $\varphi(t)$ en $S(t)$. Samen 2 = aantal graden van vrijheid van een punt in het platte vlak.

We voeren poolcoördinaten in

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r, \varphi)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi(r, \varphi)$$

In ons geval $r(t) = R = \text{constant}$. De bewegingsvergelijkingen worden

$$\left. \begin{aligned} m R \ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi \\ -m R \dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi - S \end{aligned} \right\}$$

De vergelijkingen zijn ontkoppeld. Als we $\varphi(t)$ uit de eerste vergelijking oplossen kunnen we door $\varphi(t)$ in de tweede vergelijking in te vullen, de spankracht $S(t)$ berekenen. We zien dat i.h.a. $S > mg \cos \varphi$. (Anders zou er geen kracht overblijven voor de normale versnelling!!)

Helaas is de eerste vergelijking niet exact op te lossen, wel de gelineariseerde versie voor kleine uitwijkingen

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g}{R} \varphi .$$

Dit is de harmonische oscillator

$$\varphi(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t .$$

We kunnen dus $S(t)$ niet exact uitrekenen. Echter met een truc kunnen we wel de spankracht $S(\varphi)$ als functie van φ uitrekenen. Dat gaat als volgt:

Vermenigvuldig de eerste bewegingsvergelijking met $\dot{\varphi}$.

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \frac{g}{R} \sin \varphi \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R} \cos \varphi \right\} = 0 .$$

Neem aan $\varphi(0) = 0$ en $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, dan

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(t) - \frac{g}{R} \cos \varphi(t) = \text{constant} = \frac{1}{2} \omega_0^2 - \frac{g}{R} .$$

$$\dot{\varphi}^2(t) = \omega_0^2 + \frac{2g}{R} (\cos \varphi - 1) = \omega_0^2 - \frac{4g}{R} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi .$$

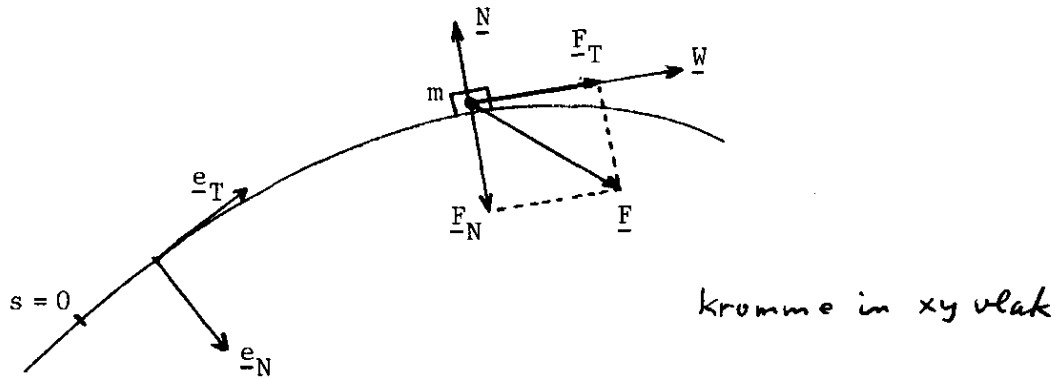
En dan

$$S(\varphi) = mg \cos \varphi + mR \dot{\varphi}^2 = mg(3 \cos \varphi - 2) + mR \omega_0^2 .$$

Bij het omkeerpunt geldt $\dot{\varphi} = 0$ en dus $S(\varphi) = mg \cos \varphi$. Als $\omega_0^2 = \frac{4g}{R}$ gekozen wordt kan $\varphi > \frac{\pi}{2}$ worden, ga na, en dus kan $S(\varphi)$ negatief worden.

Als een massapunt aan een staaf is opgehangen, blijft het keurig een slingerbeweging uitvoeren. Als het massapunt echter aan een koord is opgehangen, zal het voorbij de hoek φ_1 van $S(\varphi_1) = 0$ een vrije parabolbaan gaan beschrijven. Ga na dat $\cos \varphi_1 = -\frac{2}{3}$.

Voorbeeld 3.7. Algemene gedwongen beweging van een deeltje m langs een vlakke kromme ("Kraal op een starre draad").



Veronderstel dat op m de uitwendige kracht $\underline{F}(s, \dot{s}, t)$ werkt. We hebben 2 onbekenden $s(t)$ en $N(t)$. De bewegingsvergelijking is

$$m \underline{\ddot{r}} = \underline{F} + \underline{N} + \underline{W} .$$

We schrijven $\underline{N} = N \underline{e}_N$, $\underline{W} = W \underline{e}_T$, $\underline{F} = F_T \underline{e}_T + F_N \underline{e}_N$.

In ieder punt van de kromme ontbinden we de bewegingsvergelijking als volgt

$$\begin{cases} m \underline{\ddot{r}} \cdot \underline{e}_T = F_T + W \\ m \underline{\ddot{r}} \cdot \underline{e}_N = F_N + N . \end{cases}$$

Dit wordt

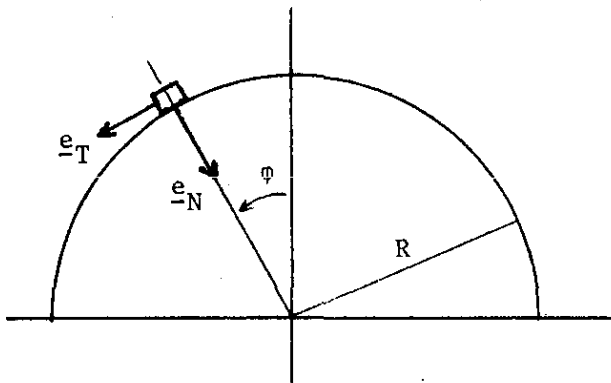
$$\begin{cases} m \ddot{s} = F_T(s, \dot{s}, t) - f N(t) \operatorname{sgn} \dot{s} \\ \frac{m}{R} \dot{s}^2 = F_N(s, \dot{s}, t) + N(t) . \end{cases}$$

Dit zijn gekoppelde vergelijkingen. Als $f = 0$, zijn ze ontkoppeld. Je kunt dan (in principe) $N(t)$ vinden door eerst uit de eerste vergelijking $s(t)$ op te lossen en dan de gevonden $s(t)$ in de tweede vergelijking in te vullen. Het hellend vlak met wrijving is hiervan een bijzonder geval. De vector \underline{e}_N is daar omhoog wijzend gekozen, $s = x$ en $R = \infty$.

Als het geen kraal betreft, maar een blokje dat "los" op de draad ligt, dan kan het loskomen als $N = 0$ wordt.

Voorbeeld 3.8. Loskomen.

Op de top van een gladde cirkelvormige ijsberg bevindt zich een massa m met een zeer kleine snelheid ϵ . Op welk punt van de berg zal de naar beneden glijdende massa vrijkomen van de "helling"?



$$f = 0, \quad s = R\varphi$$

$$F_T = mg \sin \varphi$$

$$F_N = mg \cos \varphi$$

$$\underline{N} = N \underline{e}_N$$

$$\begin{cases} m R \ddot{\varphi} = mg \sin \varphi \\ \frac{m}{R} R^2 \dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi + N \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \epsilon \approx 0 \end{cases}$$

De eerste bewegingsvergelijking met $\dot{\varphi}$ vermenigvuldigen levert

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \varphi \right) = 0.$$

$$\text{Dus } \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \varphi = \frac{1}{2} \epsilon^2 + \frac{g}{R} \approx \frac{g}{R}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \varphi).$$

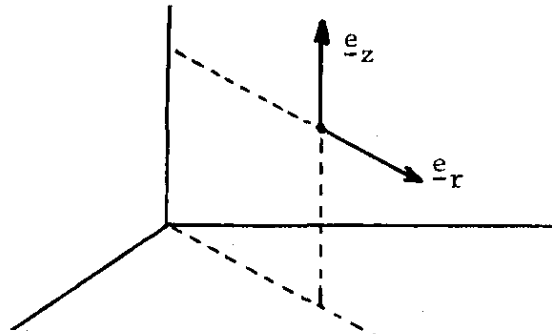
Dit in de tweede bewegingsvergelijking invullen, levert $N = mg(2 - 3 \cos \varphi)$.

Aanvankelijk is $N \leq 0$ zodat m op de berg blijft liggen. Echter als $\cos \varphi = \frac{2}{3}$ wordt, dan komt m vrij.

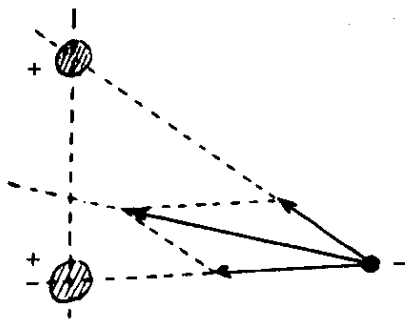
§3.8. Axiale krachten

Een axiale kracht is een kracht, die in elk punt van de ruimte naar een vaste rechte (de z-as bijv.) gericht is. Als we de z-as als richt-as nemen is de algemene gedaante

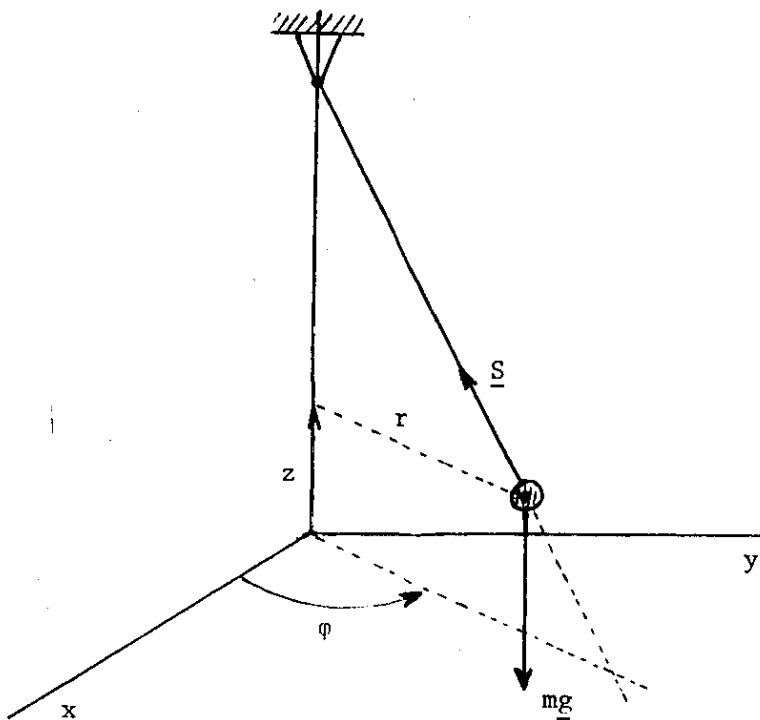
$$\underline{F} = F_r \underline{e}_r + F_z \underline{e}_z.$$



Hierin zijn F_r en F_z willekeurige scalaire functies. Het electron in een H_2^+ molecuul ondervindt een axiale kracht.



Voorbeeld 3.9. De kegelslinger.



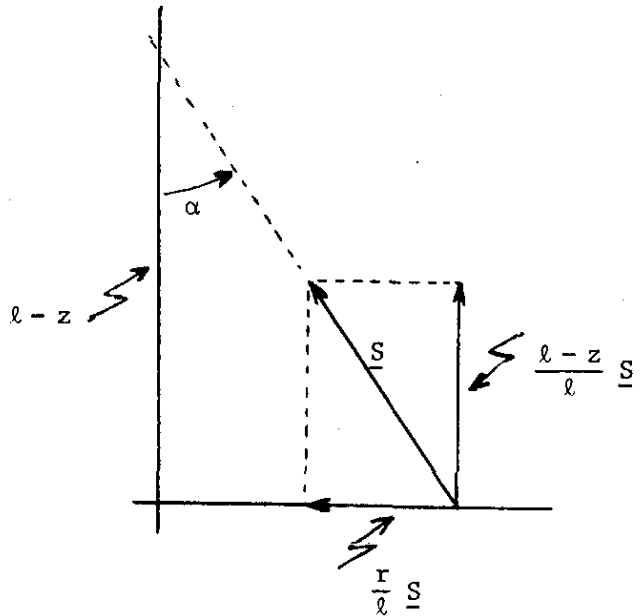
Een slinger met lengte l heeft zijn ophangpunt op een hoogte l loodrecht boven de oorsprong van het horizontale xy -vlak. We stellen de bewegingsvergelijkingen op en geven twee speciale oplossingen daarvan. Van de Cartesische coördinaten x, y, z handhaven we de z -coördinaat en vervangen x en y door poolcoördinaten. Je krijgt dan zgn. cylindercoördinaten.

De algemene bewegingsvergelijkingen als er een axiale kracht werkt, zijn in cylindercoördinaten

$$\begin{cases} m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = F_r \\ m r \ddot{\varphi} + 2m \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

Voor de kegelslinger wordt dit

$$\begin{cases} m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = -\frac{r}{\ell} S \\ \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = 0 \\ m\ddot{z} = -mg + S - \frac{z}{\ell} S \end{cases}$$



De onbekenden hierin zijn $r(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, $S(t)$. Er geldt de relatie

$$(\ell - z)^2 + r^2 = \ell^2$$

We proberen een oplossing te vinden met $z(t) = h = \text{constant}$ en $r(t) = R = \text{constant}$. Dan volgt uit de 3e bewegingsvergelijking $S = \frac{mg \ell}{\ell - h} = \frac{mg}{\cos \alpha}$.

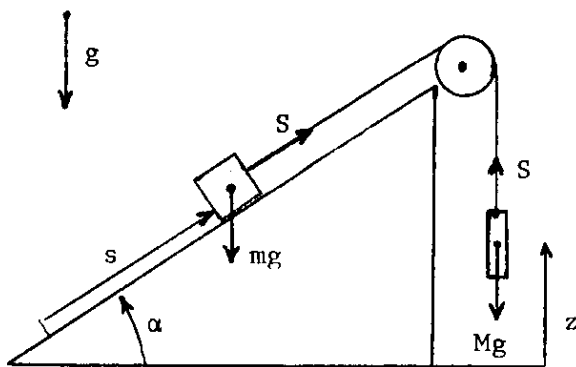
Uit de tweede vergelijking vinden we dan $\dot{\varphi} = \omega = \text{constant}$. Uit de eerste vergelijking volgt dan $\omega = \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{g}{\ell - h}}$.

Dus, hoe groter h is, hoe harder de kegelslinger moet ronddraaien om in zijn horizontale baan te blijven. We vinden ook nog $F_r = -\frac{r}{\ell} S = -mg \tan \alpha$. Een andere speciale oplossing vinden we door $\varphi = \text{constant}$ te nemen. Je krijgt dan de "gewone" vlakke slinger.

§3.9. Krachten, die meerdere deeltjes die via koorden en staven aan elkaar verbonden zijn op elkaar uitoefenen

We bekijken alleen een tweetal voorbeelden.

Voorbeeld 3.10.



In nevenstaande contraptie berekenen we de optredende versnelingen en de kracht in het koord. Er is geen wrijving. De onbekenden zijn $s(t)$, $z(t)$ en $S(t)$. Er geldt $s + z = \text{constant}$. De bewegingsvergelijkingen die we met

vrijmaken vinden zijn

$$\begin{cases} m \ddot{s} = -mg \sin \alpha + S \\ M \ddot{z} = -Mg + S \end{cases}$$

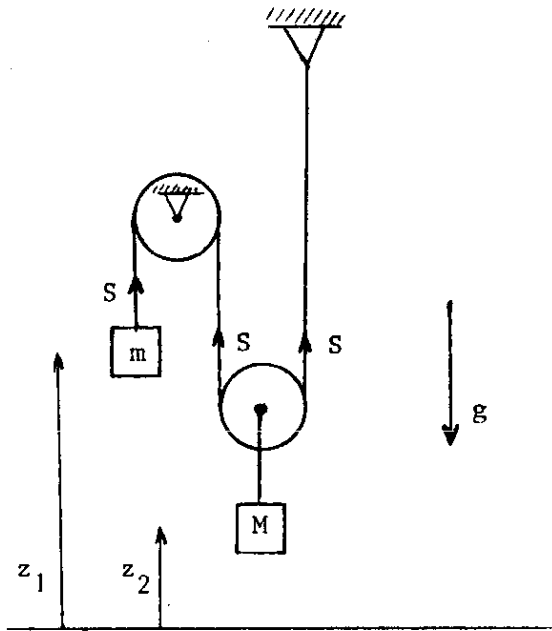
De oplossing is

$$\ddot{z} = \frac{m \sin \alpha - M}{M + m} g$$

$$\ddot{s} = -\ddot{z}$$

$$S = \frac{mMg}{M+m} (1 + \sin \alpha) .$$

Voorbeeld 3.11. Katrollensommetje.



Vrijmaken levert

$$m \ddot{z}_1 = -mg + S$$

$$M \ddot{z}_2 = -Mg + 2S .$$

Er geldt

$$z_1 + 2z_2 = \text{constant} .$$

Dus

$$\ddot{z}_1 + 2\ddot{z}_2 = 0 .$$

De versnellingen zijn

$$\ddot{z}_1 = -2 \frac{2m - M}{4m + M} g$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{2m - M}{4m + M} g .$$

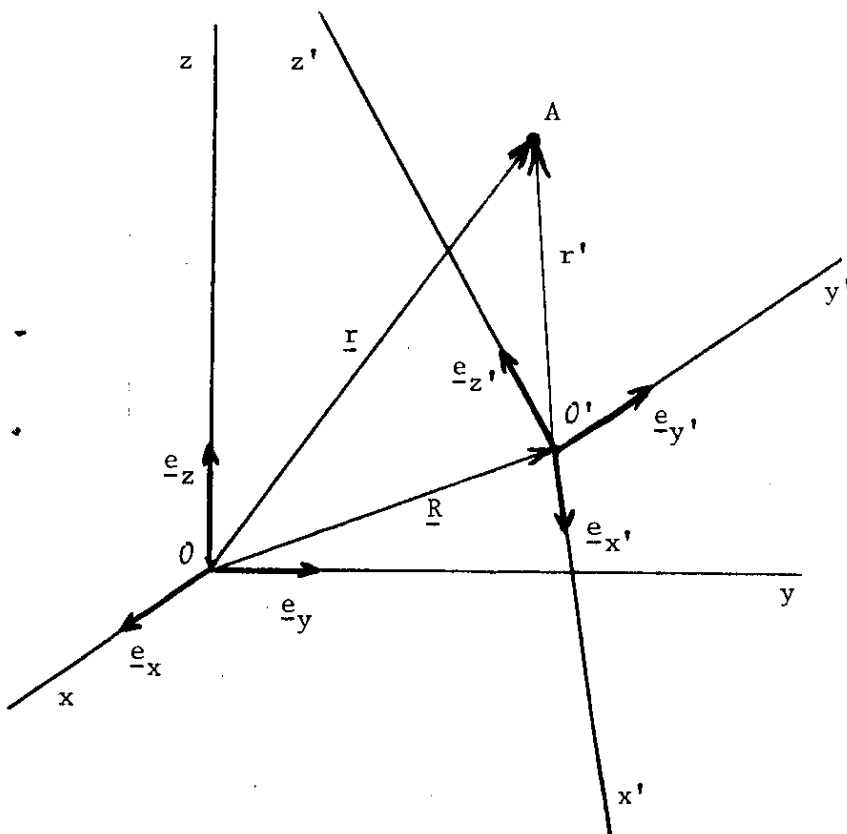
De kracht in het koord $S = \frac{3mM}{4m + M} g$.

HOOFDSTUK 4. Relatieve beweging

§4.1. Afleiding van de transformatieformules

We keren terug tot de kinematica. Als de kinematische grootheden van een bewegend massapunt bekend zijn t.o.v. een coördinatenstelsel $Oxyz$, willen we berekenen wat deze kinematische grootheden zijn t.o.v. een ander coördinatenstelsel $O'x'y'z'$, dat t.o.v. $Oxyz$ een willekeurige beweging uitvoert. We kunnen op ieder tijdstip een vector van $O'x'y'z'$ naar $Oxyz$ "overbrengen" door zijn kop en zijn staart als punten van $Oxyz$ op te vatten. Echter een aldus overgebrachte snelheidsvector zal dan niet altijd de snelheid van het beschouwde massapunt in het $O'x'y'z'$ -stelsel voorstellen. Er moet nog wat bij! We zullen het vertalen van de kinematische grootheden positie, snelheid en versnelling in drie speciale gevallen bestuderen.

Geval I. $O'x'y'z'$ in rust t.o.v. $Oxyz$



Voor de positie van het punt A geldt op ieder tijdstip

$$\underline{r} = \underline{R} + \underline{r}' \quad (4.1)$$

Hierin is \underline{R} de positievector van O' in $Oxyz$. De vector \underline{r}' is "overgebracht" naar $Oxyz$ zodat \underline{r}' bij \underline{R} opgeteld kan worden. Zij nu \underline{v} de snelheid van A in $Oxyz$ en \underline{v}' de snelheid van A in $O'x'y'z'$.

Er geldt

$$\underline{v} = \dot{x} \underline{e}_x + \dot{y} \underline{e}_y + \dot{z} \underline{e}_z \quad (4.2)$$

$$\underline{v}' = \dot{x}' \underline{e}_{x'} + \dot{y}' \underline{e}_{y'} + \dot{z}' \underline{e}_{z'} \quad (4.3)$$

Differentieer nu (4.1)

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{R}}{dt} + (\dot{x}' \underline{e}_{x'} + \dot{y}' \underline{e}_{y'} + \dot{z}' \underline{e}_{z'}) + (x' \dot{\underline{e}}_{x'} + y' \dot{\underline{e}}_{y'} + z' \dot{\underline{e}}_{z'}) \quad (4.4)$$

Hierin zijn de 1e en de 3e term nul, zodat

$$\underline{v} = \underline{v}' \quad .$$

Op dezelfde manier vinden we dat de versnellingspijlen in beide stelsels hetzelfde zijn

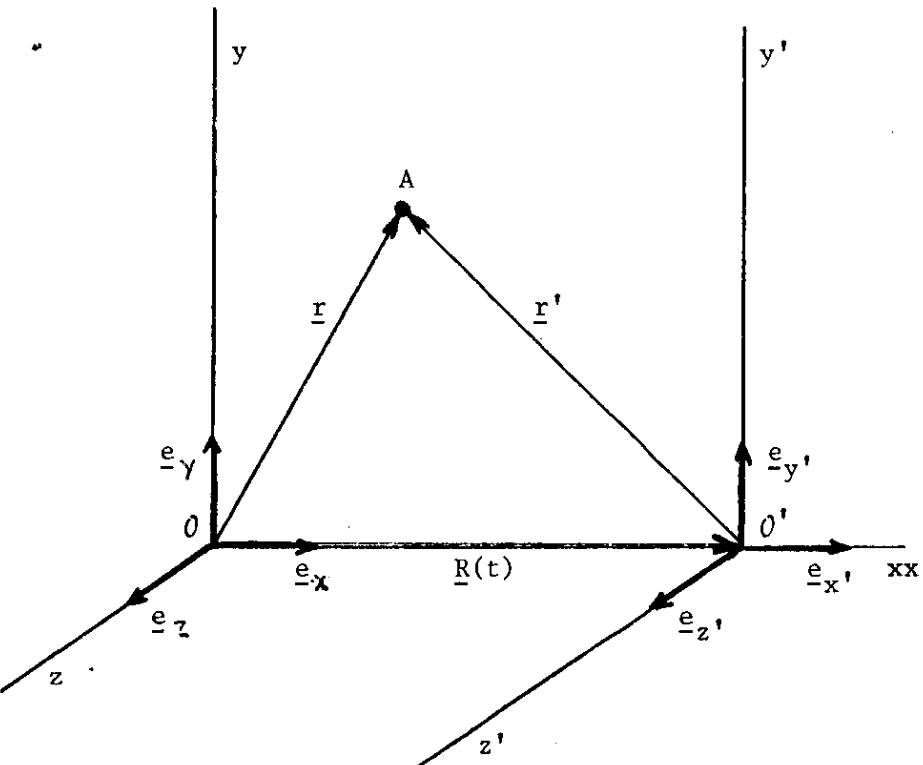
$$\underline{a} = \underline{a}' \quad .$$

De componenten van \underline{a} en \underline{v} zijn i.h.a. in beide stelsels verschillend omdat de bases scheef t.o.v. elkaar staan.

Geval II. $0'x'y'z'$ transleert t.o.v. $0xyz$

Verschuif op ieder tijdstip t de basisvectoren $\underline{e}_{x'}$, $\underline{e}_{y'}$, $\underline{e}_{z'}$ van $0'x'y'z'$ evenwijdig aan zichzelf naar de oorsprong 0 van $0xyz$. Als blijkt dat de aldus overgebrachte vectoren als functie van de tijd constant blijven, dan zeggen we dat het stelsel $0'x'y'z'$ een translatie uitvoert t.o.v. $0xyz$.

We beschouwen nu de translatie, die in de figuur geschetst is. We nemen



aan dat op $t = 0$ O en O' samenvallen, dus

$$\underline{R}(0) = \underline{0} .$$

Bij eenparige translatie geldt

$$\underline{R}(t) = t\underline{V} = tV\underline{e}_x$$

met V constant. Voor de positievectoren geldt weer het verband

$$\underline{r} = \underline{R} + \underline{r}' .$$

De snelheid van A kan weer geschreven worden als (4.2) c.q. (4.3). Als we \underline{r} differentiëren, krijgen we weer (4.4). In het onderhavige geval blijft daar van over

$$\underline{v} = \dot{\underline{R}} + \underline{v}' . \tag{4.5}$$

De term $\dot{\underline{R}}$ heet wel de sleepsnelheid. Het is de snelheid, die A t.o.v. $Oxyz$ heeft als A t.o.v. $O'x'y'z'$ in rust verkeert.

De term \underline{v}' heet wel de relatieve snelheid en v heet wel de absolute snelheid. Vooralsnog is er echter aan $Oxyz$ niets absoluuts.

Als $O'x'y'z'$ eenparig transleert, krijgt (4.5) de gedaante

$$\underline{v} = \underline{V} + \underline{v}' . \tag{4.6}$$

Nogmaals differentiëren levert met een analoge beschouwing

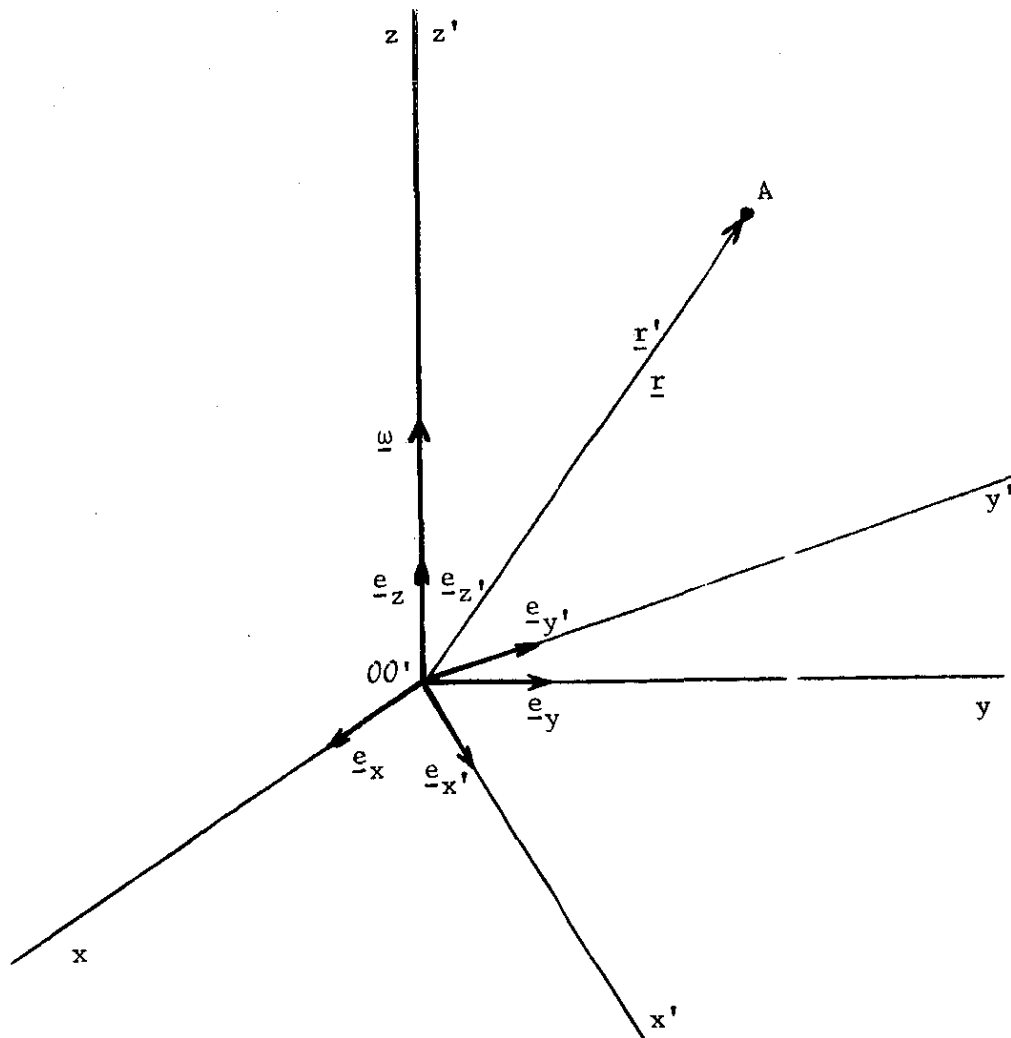
$$\underline{a} = \ddot{\underline{R}} + \underline{a}' . \tag{4.7}$$

Hierin heet \underline{a} de absolute versnelling, \underline{a}' de relatieve versnelling en $\ddot{\underline{R}}$ de sleepversnelling. $\ddot{\underline{R}}$ is de versnelling die A heeft t.o.v. O_{xyz} als A t.o.v. $O'x'y'z'$ in rust verkeert.

Als $O'x'y'z'$ eenparig transleert, krijgt (4.7) de gedaante

$$\underline{a} = \underline{a}' . \quad (4.8)$$

Geval III. $O'x'y'z'$ roteert eenparig t.o.v. O_{xyz}



O en O' vallen samen. De z -as en de z' -as vallen samen. De rotatie van $O'x'y'z'$ t.o.v. O_{xyz} wordt beschreven door de hoeksnelheidsvector

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z .$$

Er geldt dan t.o.v. $Oxyz$

$$\dot{\underline{e}}_{x'} = \underline{\omega} \times \underline{e}_{x'} , \quad \dot{\underline{e}}_{y'} = \underline{\omega} \times \underline{e}_{y'} , \quad \dot{\underline{e}}_{z'} = \underline{\omega} \times \underline{e}_{z'} = \underline{0} . \quad (4.9)$$

Hier is $\underline{R} = \underline{0}$. Dus

$$\underline{r} = \underline{r}' .$$

Verder geldt, gezien vanuit $Oxyz$ de relatie (4.4). Hier is $\dot{\underline{R}} = \underline{0}$. De derde term herschrijven we met (4.9). Er komt

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r}' . \quad (4.10)$$

Hierin is $\underline{\omega} \times \underline{r}'$ de sleepsnelheid.

Differentiëren van (4.10) levert

$$\underline{a} = (\ddot{x}' \underline{e}_{x'} + \ddot{y}' \underline{e}_{y'} + \ddot{z}' \underline{e}_{z'}) + (\dot{x}' \dot{\underline{e}}_{x'} + \dot{y}' \dot{\underline{e}}_{y'} + \dot{z}' \dot{\underline{e}}_{z'}) + \\ + \underline{\omega} \times \{ (\dot{x}' \underline{e}_{x'} + \dot{y}' \underline{e}_{y'} + \dot{z}' \underline{e}_{z'}) + (x' \dot{\underline{e}}_{x'} + y' \dot{\underline{e}}_{y'} + z' \dot{\underline{e}}_{z'}) \} .$$

Met (4.9) volgt

$$\underline{a} = \underline{a}' + 2(\underline{\omega} \times \underline{v}') + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') . \quad (4.11)$$

De term $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$ is de sleepversnelling. De term $2(\underline{\omega} \times \underline{v}')$ is een rest-term en heet de Coriolisversnelling.

Ga na dat de formules (4.9), (4.10) en (4.11) geldig blijven als je de stelsels $Oxyz$ en $O'x'y'z'$ van rol laat verwisselen.

Als de drie behandelde gevallen in combinatie optreden, dus als het $O'x'y'z'$ een willekeurige translatie en een rotatie met constante hoeksnelheid t.o.v. $Oxyz$ uitvoert, hebben we de formules

$$\underline{r}(t) = \underline{R}(t) + \underline{r}'(t) \quad (4.12)$$

$$\underline{v}(t) = \underline{\dot{R}}(t) + \underline{v}'(t) + \underline{\omega} \times \underline{r}'(t) \quad (4.13)$$

$$\underline{a}(t) = \underline{\ddot{R}}(t) + \underline{a}'(t) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'(t)) + 2\underline{\omega} \times \underline{v}'(t) . \quad (4.14)$$

Voorbeeld 4.1. Correcties op de vrije val als gevolg van de rotatie van de aarde.

We voeren 3 coördinatenstelsels in. $Oxyz$ is het stelsel van de buitenaardse waarnemer die ziet dat vrij vallende voorwerpen een versnelling gericht naar het middelpunt van de aarde ondervinden. $O'x'y'z'$ is een coördinatenstelsel, dat aan de aardbol vastzit. O en O' vallen samen in het middelpunt van de aarde. De z -as en de z' -as vallen samen langs de draaiingsas van de aarde. Zie de figuur bij Geval III. Tenslotte is $O''x''y''z''$ een geographisch coördinatenstelsel. O'' ligt in Eindhoven, het $x''y''$ -vlak raakt aan het aardoppervlak, de x'' -as wijst naar het Oosten, de y'' -as wijst naar het Noorden, de negatieve z'' -as gaat door het middelpunt van de aarde.

Enkele getallen: de aardstraal $R = \frac{40 \cdot 10^6}{2\pi}$ m,

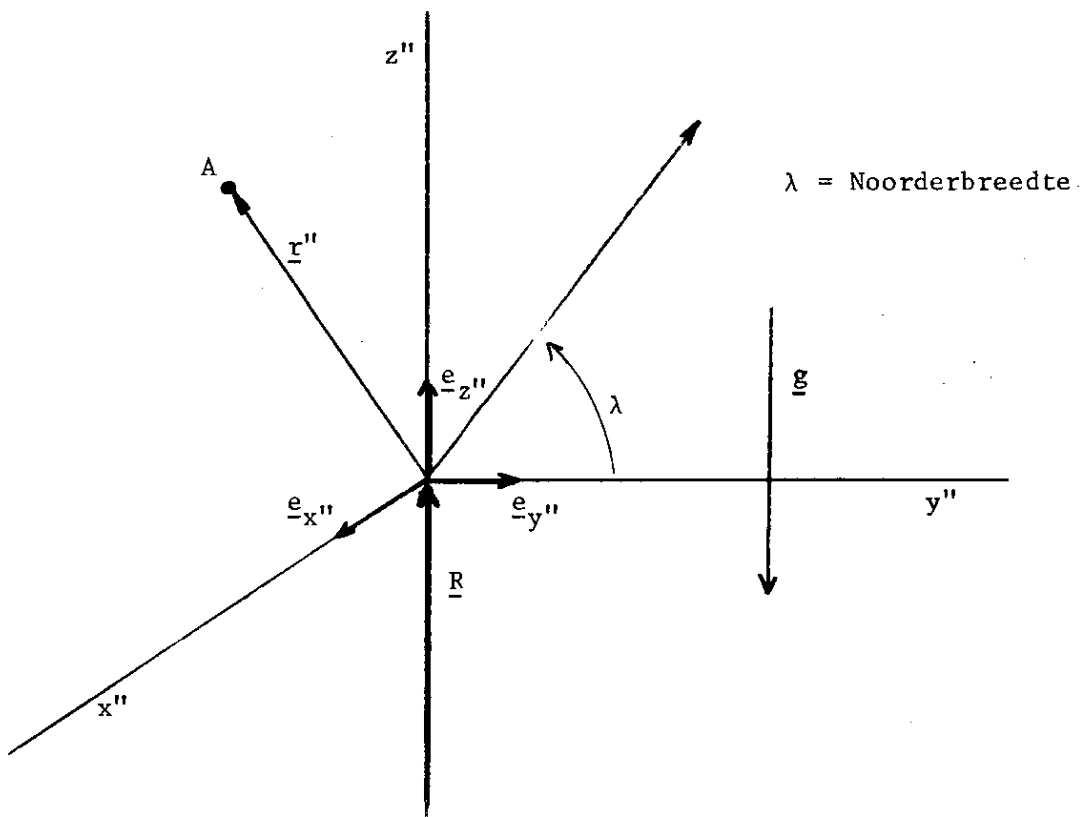
$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}, \quad \omega R \approx 470 \text{ msec}^{-1},$$

$$\omega^2 R \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ msec}^{-2}. \quad (4.15)$$

Stel dat een vrij vallend voorwerp in $Oxyz$ een versnelling \underline{g} heeft. In $O'x'y'z'$ is de versnelling dan $\underline{g}' = \underline{g} - 2(\underline{\omega} \times \underline{v}') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$.

In het geographische coördinatensysteem $0''x''y''z''$ is de versnelling van dat vrij vallende voorwerp dan

$$\underline{g}'' = \underline{g} - 2(\underline{\omega} \times \underline{v}'') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) . \quad (4.16)$$



Hierin is \underline{R} de positievector van $0''$ in $0'x'y'z'$. Deze vector is overgezet naar $0''x''y''z''$. De positievector $\underline{r}''(t)$ van een vrij vallend voorwerp voldoet dus aan de differentiaalvergelijking

$$\ddot{\underline{r}}'' = \underline{g}(\underline{r}'') - 2(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) . \quad (4.17)$$

We beperken ons tot een gebied met een diameter van zo'n 25 km rondom O'' . Dan mogen we \underline{g} wel als constant beschouwen. Verder verwaarlozen we de 3e term in het rechterlid van (4.17) t.o.v. de 4e term, want $|\underline{r}''|$ is veel kleiner dan $|R|$, de aardstraal. Er blijft over

$$\ddot{\underline{r}}'' = \underline{g} - 2(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'') - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) . \quad (4.18)$$

Deze vergelijking (of liever: dit stelsel vergelijkingen) kan met 2e jaars wiskunde worden opgelost.

We schrijven het stelsel (4.18) uit, laten de dubbele accenten weg en gebruiken $\underline{g} = -\gamma \underline{e}_z$,

$$\underline{\omega} = \omega \cos \lambda \underline{e}_y + \omega \sin \lambda \underline{e}_z .$$

Er komt

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \lambda - \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda \\ \ddot{z} = -\gamma + 2\omega \dot{x} \cos \lambda + \omega^2 R \cos^2 \lambda . \end{cases} \quad (4.19)$$

als $\dot{x} \ll 470 \text{ m/sec}$

We laten nu een massapunt van hoogte h vallen

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 & z(0) = h \\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 . \end{cases}$$

Gezien (4.15) en $\gamma \approx 10$ is het verwaarlozen van de doorgestreepte termen in (4.19) zeker verantwoord zolang \dot{x} en \dot{y} kleiner zijn dan 10^4 m/sec . De oplossing is nu

$$\begin{aligned} z(t) &= h - \frac{1}{2} \gamma t^2 \\ y(t) &= -\frac{1}{2} \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda t^2 \\ x(t) &= \frac{1}{3} t^3 \omega \gamma \cos \lambda . \end{aligned}$$

We berekenen de coördinaten waar het punt de grond raakt. Dan moet

$z(t) = 0$ dus $t^2 = \frac{2h}{\gamma}$. Het inslagpunt heeft dan coördinaten

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3} \sqrt{2} h \sqrt{\frac{\omega^2 h}{\gamma}} \cos \lambda \\y &= - \frac{\omega^2 h^2}{\gamma} \cos \lambda \sin \lambda .\end{aligned}\tag{4.20}$$

Dit zijn resp. de oostelijke en zuidelijke afwijkingen van het inslagpunt die bij vrije val optreden.

Opgave: Bereken deze afwijkingen als $h = 10^2$ m, $h = 10^4$ m. Neem $\lambda = 53^\circ$,

$$\gamma = 10.$$

§4.2. Stilzetten. Schijnkrachten

In het $Oxyz$ -stelsel beschouwen we de bewegingsvergelijking

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}\tag{4.21}$$

zoals ingevoerd in §3.1.

Met behulp van (4.14) schrijven we dit in $O'x'y'z'$

$$m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F} - m \{ \ddot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + 2(\underline{\omega} \times \underline{v}') \} .\tag{4.22}$$

De tweede term in het rechterlid noemen we de schijnkracht \underline{F}_s . Dus

$$m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F} + \underline{F}_s .$$

We kunnen dus ook in $O'x'y'z'$ met een bewegingsvergelijking werken als we de oorspronkelijke kracht \underline{F} maar corrigeren door er de schijnkracht \underline{F}_s bij op te tellen.

Men schrijft wel

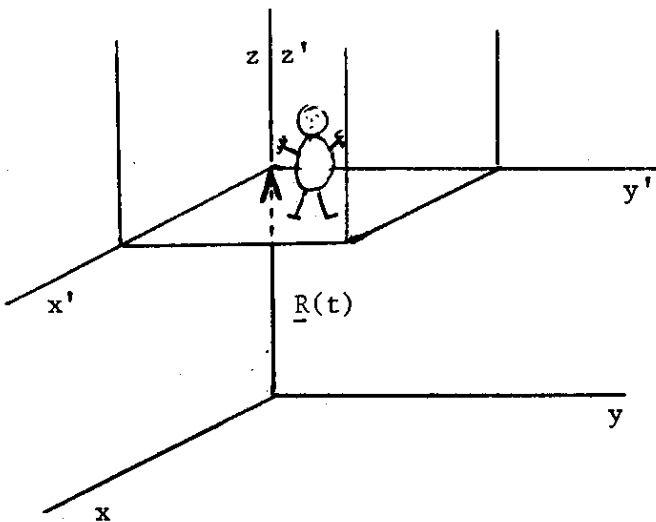
$$\underline{F}_s = -m\ddot{\underline{R}} + \underline{F}_c + \underline{F}_{cor} \quad (4.24)$$

Hierin is $\underline{F}_c = -m\omega \times (\omega \times \underline{r}')$ de zgn. centrifugaalkracht en $\underline{F}_{cor} = -2m\omega \times \underline{v}'$ is de corioliskracht.

De centrifugaalkracht staat loodrecht op de draaiingsas, is van de draaiingsas af gericht en is in grootte gelijk aan $m\omega^2$ maal de loodrechte afstand van m tot de draaiingsas. De corioliskracht staat loodrecht op het vlak gaande door de draaiingsas en de relatieve snelheid.

Het overgaan op het $0'x'y'z'$ -stelsel wordt ook wel de methode van stilzetten genoemd.

Voorbeeld 4.2. Lift.



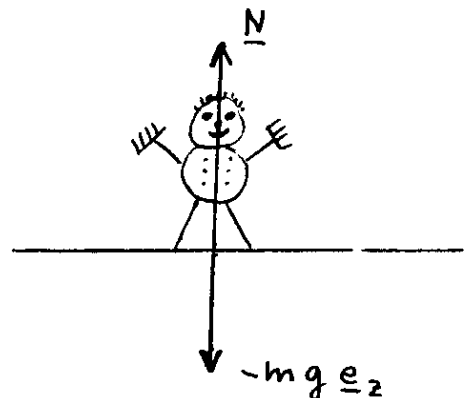
$$\underline{F}_s = -m\ddot{\underline{R}}, \quad \underline{R} = z \underline{e}_z$$

Het mannetje op de bodem van de lift maken we vrij.

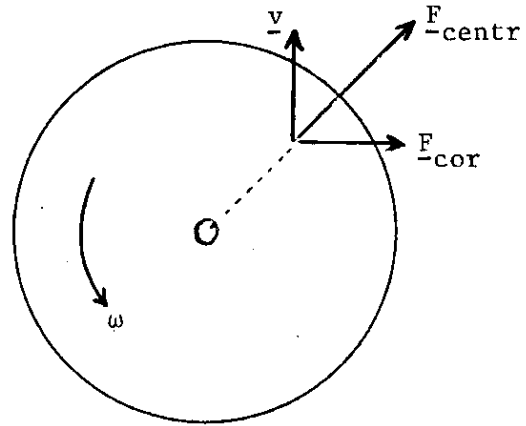
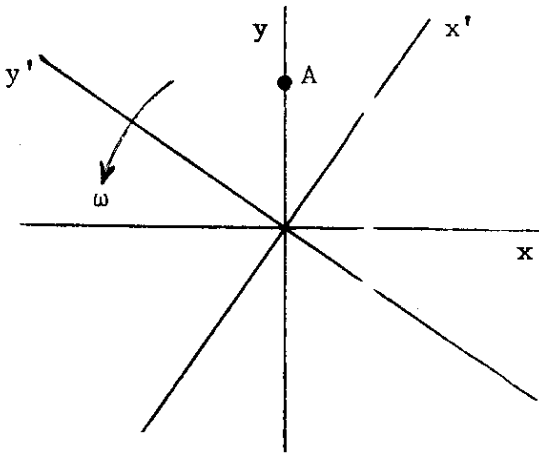
$$\underline{N} - mg \underline{e}_z - m\ddot{\underline{R}} = 0$$

$$N = m\ddot{z} + mg$$

Als $\ddot{z} < -mg$, dan loslating.



Voorbeeld 4.3. Draaimolen.



Neem

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z, \quad \omega > 0$$

$$\underline{F}_{\text{centr}} = -m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

$$\underline{F}_{\text{cor}} = -2m \underline{\omega} \times \underline{v}'$$

Beschouw een stilstaand punt A in Oxy . Gezien vanuit $O'x'y'$ heeft dit punt een hoeksnelheid $-\omega$. We berekenen de schijnkracht op A.

$$\underline{F}_{\text{centr}} = -m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

$$\underline{F}_{\text{cor}} = -2m \underline{\omega} \times \underline{v}' = -2m \underline{\omega} \times (-\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

De totale schijnkracht is dus $m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$ en die is naar O' gericht.

Conclusie: Schijnkrachten zijn soms wel en soms niet 'voelbaar'

Voorbeeld 4.4. De coriolisversnelling op het aardoppervlak.

De Foucaultslinger.

In de buurt van het aardoppervlak bevindt zich een massapunt m . Stel dat er behalve de zwaartekracht $m\underline{g} = -\gamma m \underline{e}_z$ nog een kracht \underline{F} op m werkt. De bewegingsvergelijkingen in geographische coördinaten moeten ook de schijn-

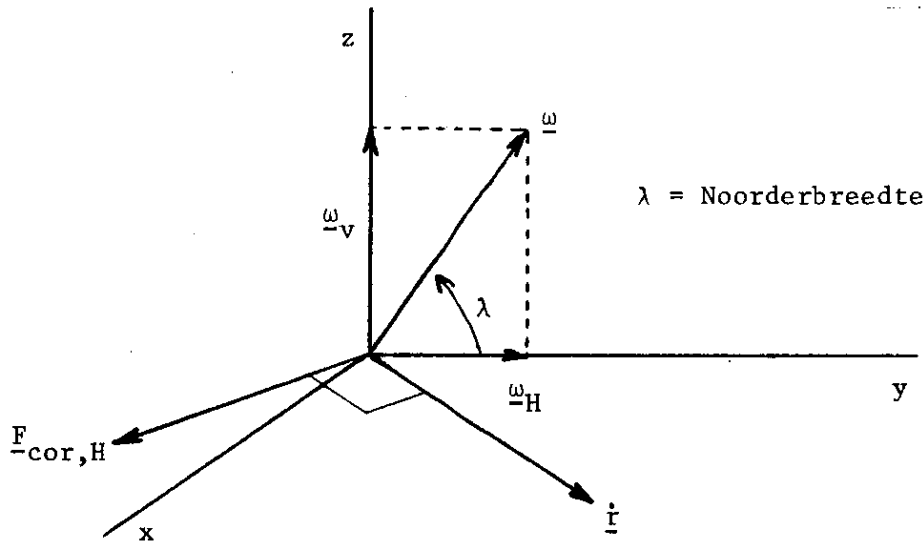
kracht als gevolg van de aardrotatie bevatten. Deze bewegingsvergelijkingen zijn, cf. (4.17),

$$m \ddot{\underline{r}}'' = m \underline{g} + \underline{F} - 2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}'') - m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'') - m \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}). \quad (4.25)$$

Als we de z''-as een klein beetje draaien (in de richting van het schietlood zetten!) kan de laatste (constante) term in (4.25) worden opgenomen in \underline{g} . Als we verder $|\underline{r}''|$ weer klein veronderstellen, houden we, na weglating van de accenten, over

$$m \ddot{\underline{r}} = m \underline{g} + \underline{F} - 2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}). \quad (4.26)$$

We kijken nu naar horizontale bewegingen. De corioliskracht $-2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}})$ heeft dan een horizontale component ter grootte $2m|\underline{\omega}| |\dot{\underline{r}}| \sin \lambda$, λ is de Noorderbreedte (in ons geval). De verticale component is veel kleiner dan



de zwaartekracht en die verwaarlozen we. De horizontale component van de corioliskracht $\underline{F}_{\text{cor,H}} = -2m(\underline{\omega}_v \times \dot{\underline{r}})$ staat steeds loodrecht op $\dot{\underline{r}}$ en "veroorzaakt een afwijking naar rechts". Dit heeft belangrijke gevolgen in de Meteorologie: de wet van Buys Ballot, en in de geologie: rechteroevers

van rivieren slijten (op het noordelijk halfrond) meer uit dan linker-
oevers (zeggen ze).

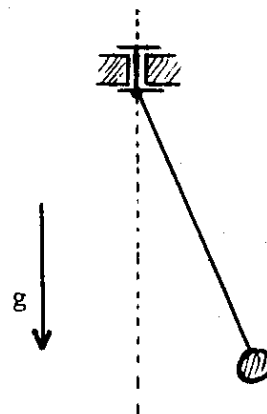
We bespreken nu de Foucaultslinger. Dit is een slinger, die aan
de bovenkant vrij draaiend is opgehangen. De uitwijkingen worden
klein gehouden, zodat de terugdrijvende kracht op de massa als
een horizontale kracht gezien mag worden.

Aldus nemen we in (4.26) $\underline{F} = -\alpha \underline{r}$ en we schrijven alleen de x en
y componenten op

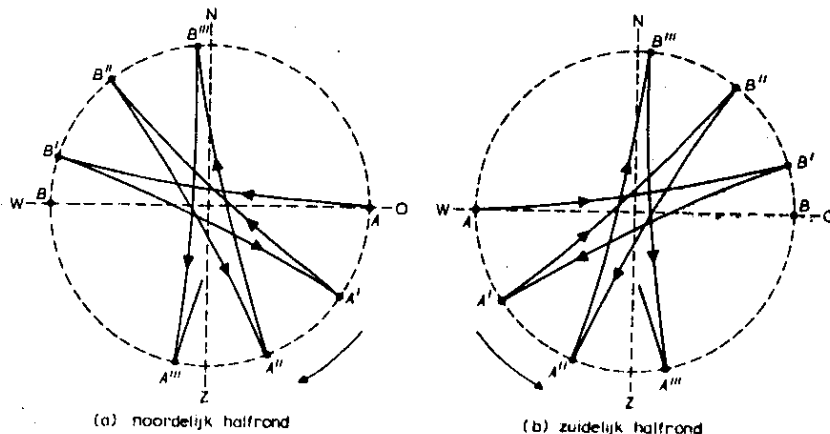
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\alpha x + 2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\alpha y - 2\omega \sin \lambda \dot{x} .\end{aligned}$$

Een oplossing is

$$\begin{cases} x(t) = \cos \tilde{\omega} t \cos \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \alpha} t \\ y(t) = \sin \tilde{\omega} t \cos \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \alpha} t . \end{cases}$$



Hierin is $\tilde{\omega} = \omega \sin \lambda$ een lage frequentie en $\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \alpha}$ een hoge frequentie.
Als $\lambda = 0$, op de evenaar, zal het verticale vlak van de Foucaultslinger
op zijn plaats blijven. Als $\lambda = \frac{\pi}{2}$, op de noordpool, zal het genoemde ver-
ticale vlak precies eens per etmaal ronddraaien. De aardbol draait a.h.w.
onder de slinger door. Op breedte λ zal het genoemde verticale vlak per
etmaal een hoek $2\pi \sin \lambda$ draaien.



Rotatie van het slingervlak als gevolg van de coriolisversnelling. (De
rotatie op het zuidelijk halfrond geschiedt in de tegengestelde richting met die op het
noordelijk halfrond.)

Met de Foncaultslinger werd "aangetoond" dat de aarde draait.

Opmerking: (4.27) kan heel gemakkelijk opgelost worden door $x + iy = z$ te stellen. Dan

$$\ddot{z} + \alpha z + 2i\tilde{\omega}\dot{z} = 0$$

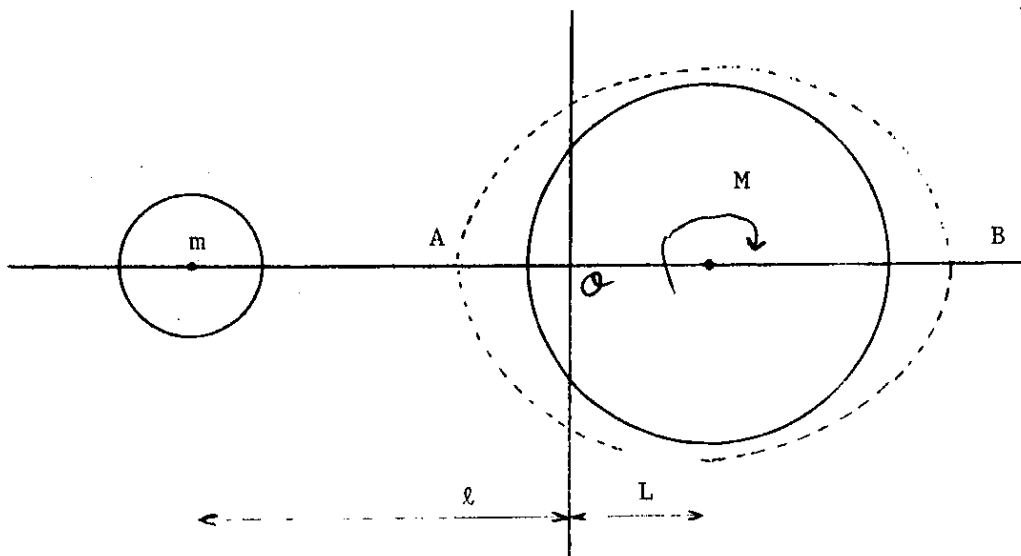
met als algemene oplossing

$$z(t) = A e^{-i\omega t + i\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \alpha}} + B e^{-i\omega t - i\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \alpha}}$$

Voorbeeld 4.5. Stelsel Aarde-Maan. De Getijden.

Van de aarde uit gezien draait de maan in (iets minder dan) een etmaal om de aarde. Er zijn echter twee eb-vloed perioden per etmaal. We zullen aan de hand van een sterk vereenvoudigd model zien hoe dat komt.

Stel de maanmassa m , de aardmassa M . Aarde en maan trekken elkaar aan met een kracht $\frac{a M m}{d^2}$ als d de afstand tussen maanmiddelpunt en aardmiddelpunt is. Er bestaat een eenparig roterend coördinatenstelsel, zie figuur,



ten opzichte waarvan m en M in rust blijven. Dan geldt

$$F = \frac{a M m}{(L + \ell)^2} = M \omega^2 R = m \omega^2 r .$$

Dan moet blijkbaar gelden $ML = m\ell$. Dus de oorsprong O van dat coördinatenstelsel ligt in het massamiddelpunt. Verder moet gelden

$$\omega^2 = \frac{a m}{L(L + \ell)^2} = \frac{a M}{\ell(L + \ell)^2} .$$

Enkele getallen: $M = 81 m$, $L + \ell = 3 \cdot 10^8 m$,

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \times 30} \text{ sec}^{-1}, \quad L \approx \frac{3}{80} 10^8 m = 3750 \text{ km} .$$

$$\omega \approx 2,42 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$$

Dus O ligt binnen de aardbol.

Op een massapunt in A werken de aantrekkingskracht van de maan en de centrifugaalkracht naar links. Op een massapunt in B werken een kleine aantrekkingskracht van de maan naar links en een grotere centrifugaalkracht naar rechts.

Als de hele aarde met een oceaan bedekt was, zou het waterniveau zich op de stippellijn bevinden. Op iedere plaats op aarde komt dus twee maal per etmaal een waterbult voorbij.

HOOFDSTUK 5. Fundamentele beschouwingen over Inertiaalstelsels, Massa,
Impuls en Kracht

Een vrij deeltje is een materiedeeltje, dat geen wisselwerking heeft met andere deeltjes of met zijn omgeving. Een deeltje kan vrij zijn als het "heel ver" verwijderd is van andere deeltjes en als er geen velden zijn, die op het deeltje werken.

Een inertiaalstelsel is een rechthoekig coördinatenstelsel, zodanig dat ieder vrij deeltje, waar het zich ook bevindt, zich met constante snelheid y beweegt.

In het bijzonder geldt dus, dat een vrij deeltje, op een willekeurig punt neergezet, daar rustig blijft zitten. Het is duidelijk dat een coördinatenstelsel dat t.o.v. een inertiaalstelsel eenparig translateert, eveneens een inertiaalstelsel is.

De begrippen "vrij deeltje" en "inertiaalstelsel" zijn idealiseringen. Ze kunnen alleen lokaal en tijdelijk gerealiseerd worden door voldoende ver van sterren en planeten te gaan zitten of door volledig aan de zwaartekracht toe te geven (vrij bewegend ruimteschip). Soms is een coördinatenstelsel in bepaalde richtingen inertiaal, bijvoorbeeld een niet te groot glad horizontaal vlak op aarde.

Een direct gevolg van bovenstaande definities is:

Traagheidswet (1e versie)

In een inertiaalstelsel beweegt een vrij deeltje zich met constante snelheid. Veronderstel dat het beschouwde vrije deeltje bij nader inzien uit twee wisselwerkende stukken bestaat. Het is een ervaringsfeit dat dan een zeker gewogen gemiddelde van de snelheden constant is: Beschouw 2 materie-deeltjes in het (verder lege) universum met posities $\underline{r}_1(t)$ resp. $\underline{r}_2(t)$ in een inertiaalsysteem. Dan zijn er constanten $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1$, zodanig dat

$$\alpha \dot{\underline{r}}_1(t) + \beta \dot{\underline{r}}_2(t) = \underline{c} = \text{constante vector} \quad (5.1)$$

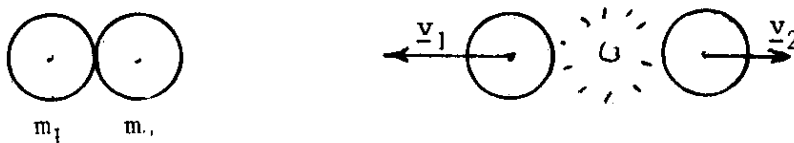
$$\alpha(\dot{\underline{r}}_1(t) - \underline{c}) + \beta(\dot{\underline{r}}_2(t) - \underline{c}) = \underline{0} . \quad (5.2)$$

Als $\dot{\underline{r}}_1 - \underline{c} \neq \underline{0}$, dan liggen α en β vast.

$\frac{\beta}{\alpha}$ heet de massaverhouding van de deeltjes. Door nu voor het eerste materie-deeltje de standaard kg te nemen, kan aan het andere deeltje een getal worden toegekend dat de massa m van het deeltje heet. In principe kan zo aan ieder deeltje, door het met de standaard kg te laten wisselwerken, een massa-getal worden toegekend. Herschrijven van (5.1) levert (als de ruimte verder leeg is)

$$m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 = \underline{\text{constant}} . \quad (5.3)$$

Hiervan wordt gebruik gemaakt bij de dynamische methode om 2 massa's te vergelijken. Voor $t = 0$ zijn 2 massa's in rust. Op $t = 0$ vindt een explosie plaats. Als de snelheden dan \underline{v}_1 resp. \underline{v}_2 zijn, dan geldt $\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\underline{v}_1|}{|\underline{v}_2|}$.



De impuls \underline{p} van een materiedeeltje definiëren we nu door $\underline{p} = m \underline{v}$. Aldus krijgen we

Traagheidswet (2e versie). 1e wet van Newton

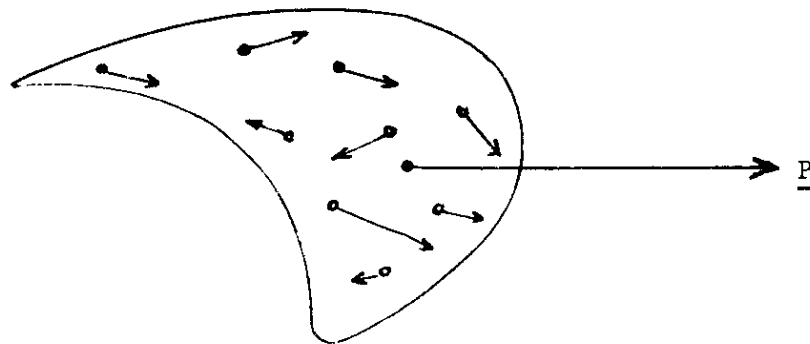
In een inertiaalstelsel beweegt een vrij deeltje zich met constante impuls.

We komen nu toe aan de algemene impulsbehoudwet. Deze is, wiskundig geformuleerd, een generalisatie van de 1e wet van Newton. De impulsbehoudwet geeft aan, dat niet alle denkbare wisselwerkingen tussen deeltjes ook mogelijk zijn. Bijvoorbeeld bij twee deeltjes met eindige massa die beide stilstaan, kan niet plotseling het ene gaan bewegen en het andere stil blijven staan. De impulsbehoudwet geeft geen informatie over de precieze aard van wisselwerkingen.

Wet van behoud van impuls

De totale impuls van een geïsoleerd stelsel van N deeltjes in een inertiaalstelsel is constant.

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \dots + \underline{p}_N = m_1 \underline{v}_1 + \dots + m_N \underline{v}_N = \underline{\text{constant}} .$$



We benadrukken dat $\underline{p} = \text{constant}$ alleen geldt als er alleen onderling wisselwerkingen zijn en geen wisselwerkingen met de buitenwereld. De impuls van één deeltje uit een geïsoleerd stelsel kan wel veranderen, er kan impulsoverdracht naar andere deeltjes plaatsvinden.

Het superpositie-beginsel zegt, dat bij N geïsoleerde wisselwerkende deeltjes de wisselwerking van het 1e deeltje met de overige deeltjes gezien kan worden als de som van de wisselwerkingen met de afzonderlijke deeltjes:

$$\dot{\underline{p}}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \dot{\underline{p}}_{ij}(t)$$

Hierin is, op zeker ogenblik t , $\dot{\underline{p}}_{ij}(t)$ de impulsverandering (massa \times versnelling) van het i^e deeltje als alle overige deeltjes, behalve het j^e , worden weggelaten.

Vaak wordt slechts op de beweging van één deeltje gelet, omdat de deeltjes waarmee het wisselwerkt niet, of moeilijk, in de beschouwing betrokken kunnen worden. Vaak ook wordt de beweging van de overige deeltjes niet interessant gevonden. De wet van impulsbehoud mag voor het ene beschouwde deeltje niet gebruikt worden. Een praktische aanpak is dan het vrijmaken van het deeltje door het invoeren van het begrip kracht.

De totale kracht \underline{F} , die op een deeltje werkt, is per definitie gelijk aan de impulsverandering $\dot{\underline{p}}$. Dus

$$\underline{F} = \dot{\underline{p}} = m \dot{\underline{v}} = m \underline{a} \quad (2e \text{ wet van Newton}) \quad (5.4)$$

In het geval van 2 wisselwerkende deeltjes geldt $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{constant}$. Dus $\dot{\underline{p}}_1 = -\dot{\underline{p}}_2$, dus

$$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2 \quad (\text{3e wet van Newton}) \quad (5.5)$$

Bij 2 wisselwerkende deeltjes is de kracht op het ene deeltje even groot als en tegengesteld aan de kracht op het andere deeltje: Actie = -Reactie. Volgens het superpositie-beginsel geldt dit ook voor meerdere deeltjes.

Als een deeltje met massa m met meerdere deeltjes wisselwerkt, dan veroorzaakt het i^e deeltje een impulsverandering van m gekarakteriseerd door \underline{F}_i . Dus geldt volgens het superpositie-principe:

$$\frac{d m \underline{v}}{dt} = \dot{\underline{p}} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots = \underline{F} \quad (5.6)$$

Het door ons ingevoerde begrip kracht is voornamelijk een leeg mathematisch concept. Echter, het krachtbegrip maakt het mogelijk de wisselwerking tussen deeltjes kwantitief te beschrijven.

Bijvoorbeeld bij 2 geïsoleerde wisselwerkende deeltjes heeft men de relatie

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}_1 &= m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_1(\underline{r}_1, \dot{\underline{r}}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_2) \\ \dot{\underline{p}}_2 &= m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_2(\underline{r}_1, \dot{\underline{r}}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_2) = -\underline{F}_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

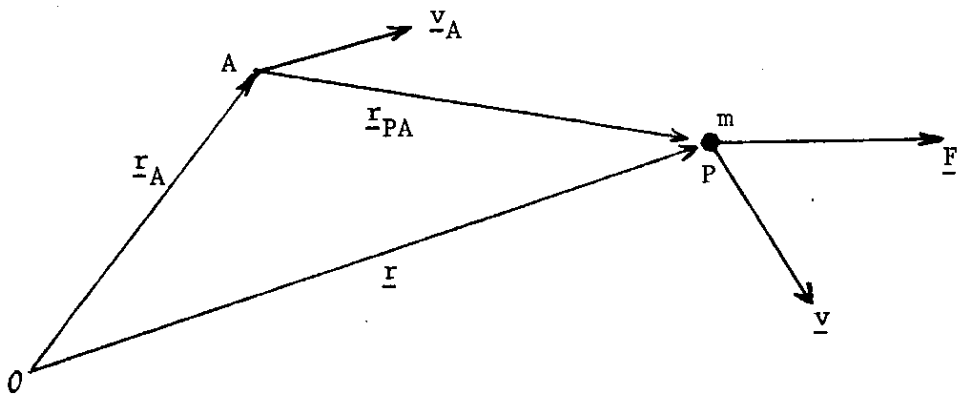
De uitgeoefende krachten \underline{F}_1 , \underline{F}_2 hangen af van alle optredende posities en snelheden en beschrijven de wisselwerking. Dikwijls hangt \underline{F} alleen maar af van $\underline{r}_1 - \underline{r}_2$.

HOOFDSTUK 6. Dynamica van een deeltje. Behoudswetten

Een behoudswet is een functie H van \underline{r} en $\dot{\underline{r}}$, zodanig dat voor iedere oplossing $\underline{r}(t)$ van de bewegingsvergelijking geldt, dat de functie van de tijd t gegeven door $H(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t))$ een constante is. H heet een behouden grootheid. We zijn zo iets al tegengekomen bij Voorbeeld 3.6: De "vermenigvuldiging-met- $\dot{\phi}$ "-truc.

Een ander voorbeeld van een behouden grootheid is de impuls van een vrij deeltje in een inertiaalstelsel. Natuurlijk is de fysische grootheid "impuls" niet in ieder probleem een behouden grootheid. Dat is evenmin het geval met de, in dit hoofdstuk te behandelen, grootheden impulsmoment en energie. Vaak kun je als de bewegingsvergelijking niet op te lossen is, wel behoudswetten vinden.

§6.1. Impulsmoment



Het impulsmoment van een massapunt m t.o.v. een referentiepunt A wordt in een coördinatenstelsel $Oxyz$ gedefinieerd door

$$\underline{L}_A = \underline{r}_{PA} \times \underline{p} . \quad (6.1)$$

Het moment (of koppel) t.o.v. A van de kracht \underline{F} wordt gedefinieerd door

$$\underline{\tau}_A = \underline{r}_{PA} \times \underline{F} . \quad (6.2)$$

De impulsmomentstelling. Zij \underline{v}_A de snelheid van het referentiepunt A . Als $\underline{v}_A = \lambda \underline{p}$, λ een willekeurig getal, dan geldt

$$\dot{\underline{L}}_A = \underline{\tau}_A . \quad (6.3)$$

Dit bewijzen we als volgt: Differentieer de relatie $\underline{L}_A = \underline{r}_{PA} \times \underline{p}$ naar t .

Dan komt er

$$\begin{aligned} \dot{\underline{L}}_A &= (\dot{\underline{r}} - \dot{\underline{r}}_A) \times \underline{p} + (\underline{r} - \underline{r}_A) \times \dot{\underline{p}} = (\underline{v} - \underline{v}_A) \times \underline{p} + \underline{r}_{PA} \times \dot{\underline{p}} = \\ &= \underline{r}_{PA} \times \underline{F} - \underline{v}_A \times \underline{p} . \end{aligned}$$

In de laatste stap is gebruikt dat $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$ en $\underline{v} \times \underline{p} = m \underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$. Met de Definitie (6.2) concluderen we dat $\dot{\underline{L}}_A = \underline{\tau}_A$ dan en slechts dan als $\underline{v}_A = \lambda \underline{p}$. λ mag van t afhangen. In het bijzonder geldt dit als $\lambda = 0$. Dan staat A stil. Vaak nemen we de oorsprong als referentiepunt. We schrijven dan

$$\underline{L}_O = \underline{L} .$$

Voorbeeld 6.1.

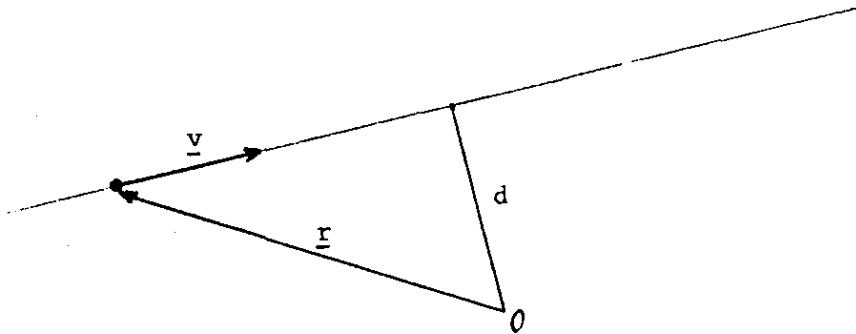
Bij de algemene cirkelbeweging (2.3) geldt

$$\underline{r} \perp \underline{v} , \quad L = m r v = m r^2 \dot{\varphi} , \quad \underline{L} = m r^2 \underline{\omega} .$$

Bij de algemene vlakke beweging geldt in poolcoördinaten $\underline{L} =$

$$\begin{aligned} &= m \underline{r} \times (\underline{v}_r \underline{e}_r + v_\varphi \underline{e}_\varphi) = m \underline{r} \times v_\varphi \underline{e}_\varphi . \quad \text{Omdat } \underline{r} \perp \underline{e}_\varphi \text{ en } v_\varphi = r \dot{\varphi} \text{ geldt} \\ \underline{L} &= m r^2 \dot{\varphi} \underline{e}_z . \end{aligned}$$

Het impulsmoment \underline{L} is een behouden grootte als $\dot{\underline{L}} = 0$, d.w.z. als $\underline{\tau} = 0$. Dit is zo in het triviale geval dat $\underline{F} = \underline{0}$. Het deeltje beweegt dan met een eenparige snelheid en $\underline{L} = m \underline{r} \times \underline{v} = \text{constant}$. Er geldt $|\underline{L}| = m d |\underline{v}|$. Zie



figuur. Veel interessanter is het geval, dat \underline{F} een centrale kracht is (§3.6). Dan geldt

$$\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times F_r(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \underline{e}_r = \underline{0}$$

en $\underline{L} = \text{constant}$.

Een gevolg hiervan is de klassieke perkenwet. Stel een massapunt beweegt in het Oxy -vlak onder invloed van een centrale kracht. Zij $A(t)$ het ten

tijde t door de radiusvector \underline{r} doorveegde oppervlak. Er geldt

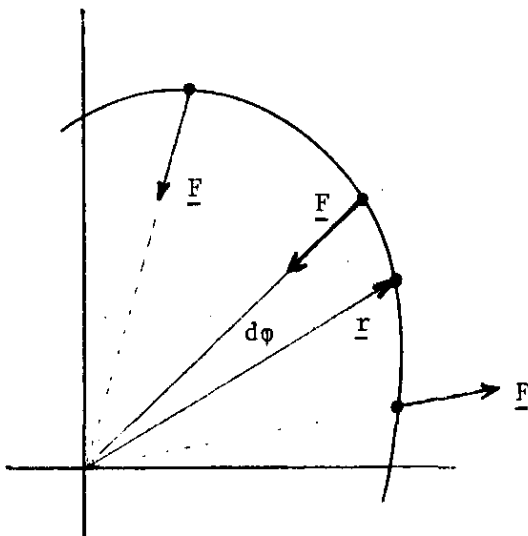
$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

dus

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

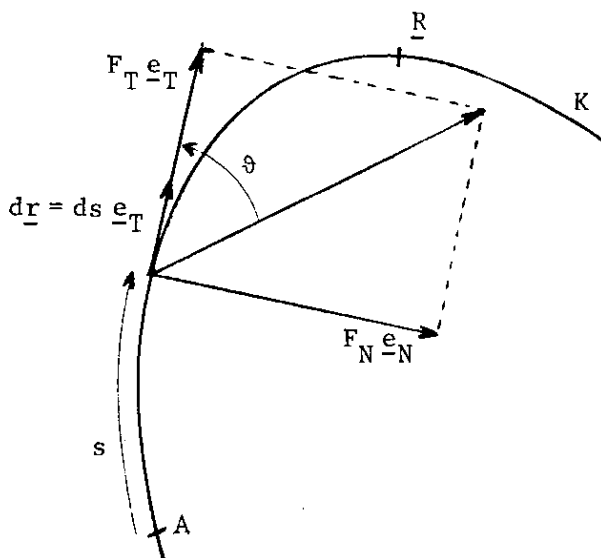
Met Voorbeeld 6.1 volgt dan $\frac{dA}{dt} = \text{constant}$.

Dus $A(t) = c_1 + c_2 t$, c_1 en c_2 zijn constanten.



In woorden: De voerstraal bestrijkt in gelijke tijden gelijke oppervlakken. Deze perkenwet werd door Kepler geobserveerd bij de planetenbeweging. Soms is $\underline{\tau} \neq \underline{0}$, maar is een der componenten van $\underline{\tau}$ gelijk aan nul. Dan is de corresponderende component van L een behouden grootheid. Bijvoorbeeld als op een massapunt een axiale kracht (§3.8) werkt, die steeds naar de z -as gericht is, dan is de z -component van het impulsmoment L_z een behouden grootheid. Dat is het geval bij de kegelslinger. Zie Voorbeeld 3.9.

§6.2. Arbeid en Energie

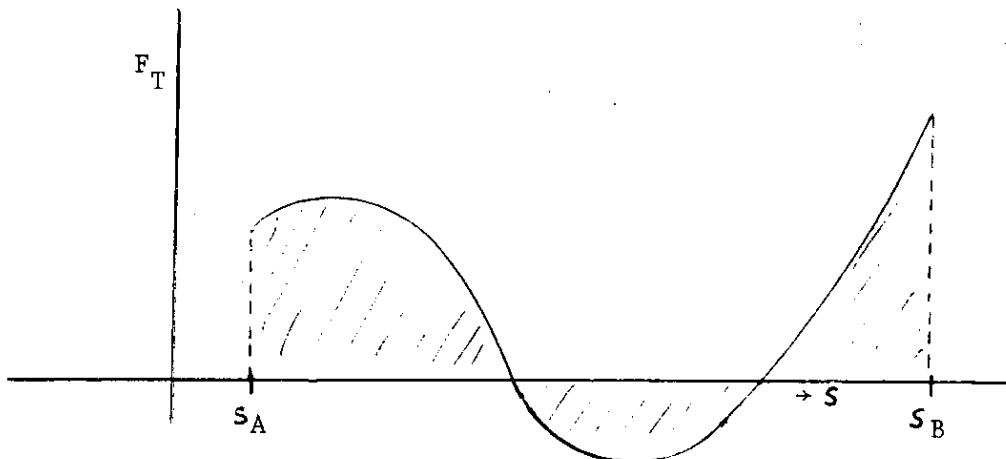


Stel op een massapunt m werkt een kracht \underline{F} . Als m zich verplaatst langs een kromme K over $d\underline{r} = ds \underline{e}_T$, dan is de door \underline{F} op m verrichte arbeid dA gedurende deze verplaatsing per definitie

$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r} = |\underline{F}| \cos \vartheta ds = F_T ds .$$

Als m langs de kromme loopt van A naar B , dan berekenen we de op m verrichte arbeid A

als volgt. Bereken de tangentiële component $F_T(s)$ als functie van de afgelegde weg s langs de kromme.

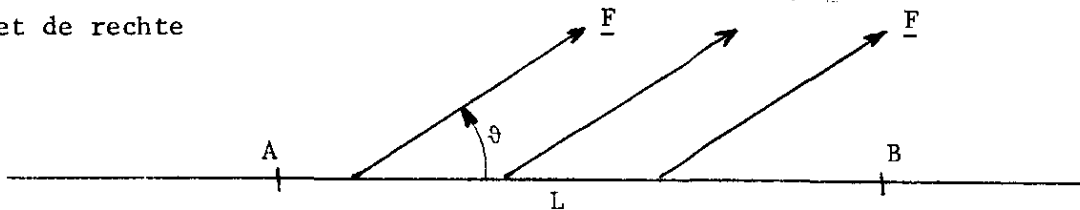


Er geldt dan

$$A = \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{S_A}^{S_B} F_T ds . \quad (6.4)$$

Voorbeeld 6.2.

Veronderstel K is een rechte. $\underline{F} = \text{constant}$ en maakt een constante hoek ϑ met de rechte



$$A = \int_{S_A}^{S_B} F_T ds = \int_{S_A}^{S_B} |\underline{F}| \cos \vartheta ds = |\underline{F}| \cos \vartheta \int_{S_A}^{S_B} ds = |\underline{F}| \cos \vartheta \cdot L .$$

Voorbeeld 6.3.

Bij een eenparige cirkelbeweging is de arbeid verricht door de centripetale kracht gelijk aan nul omdat steeds $\underline{F} \perp d\underline{r}$.

We geven nog enkele voorstellingen van de arbeidsintegraal (6.4). Als het massapunt de kromme K doorloopt met een zekere snelheid, dan geldt

$$A = \int_{S_A}^{S_B} F_T ds = \int_{t_A}^{t_B} F_T \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} F_T v dt = \int_{t_A}^{t_B} \underline{F} \cdot \underline{v} dt . \quad (6.5)$$

Als het beschouwde stuk kromme zowel met x, als met y, als met z kan worden geparametriseerd, dan geldt

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{t_A}^{t_B} F_x \frac{dx}{dt} dt + \int_{t_A}^{t_B} F_y \frac{dy}{dt} dt + \int_{t_A}^{t_B} F_z \frac{dz}{dt} dt = \\
 &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz .
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

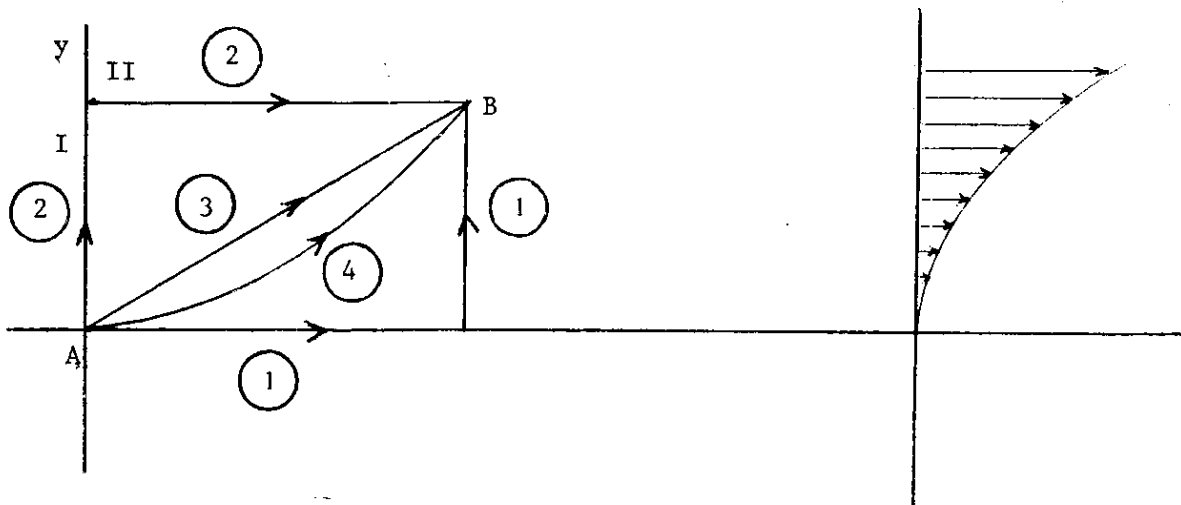
In fysicaboeken vind je vaak de (symbolische) notatie

$$A = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Dat staat erg grappig, maar je kunt er niet veel mee doen. Om de arbeid te berekenen moet je dus weten: (i) de baan, (ii) $\underline{F}(x,y,z)$.

Voorbeeld 6.4.

In het Oxy is gegeven het krachtveld $\underline{F} = ay^2 \underline{e}_x$. Gevraagd wordt de verrichte arbeid als je van $\underline{0}$ naar $2\underline{e}_x + 4\underline{e}_y$ loopt voor vier verschillende wegen als aangegeven in de figuur.



$$1. \quad A = \int_0^2 F_x dx + \int_0^4 F_y dy = \int_0^2 F_x(x,0) dx + \int_0^4 F_y(2,y) dy = 0 .$$

$$2. \quad A = \int_{S_A}^{S_B} F_T ds = I + II$$

$$I : \int_0^4 0 \cdot ds = 0 \quad II : \int_0^2 a s^2 ds = \frac{8}{3} a .$$

Totaal $\frac{8}{3} a$.

3. Langs $y = 2x$

$$A = \int_A^B F_x dx + F_y dy = \int_0^2 4a x^2 dx + \int_0^4 0 \cdot dy = \frac{32}{3} a .$$

4. Langs $y = x^2$

$$A = \int_0^2 a x^4 dx + \int_0^4 0 \cdot dx = \frac{32}{5} a .$$

Anders: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 2, \dot{x} = 1, \dot{y} = 2t$.

$$A = \int_0^2 (F_x \dot{x} + F_y \dot{y}) dt = \int_0^2 a t^4 dt = \frac{32}{5} a .$$

Blijkbaar hangt de verrichte arbeid van de gekozen weg af.

Het vermogen P is het tempo waarmee arbeid verricht wordt. Stel de tot tijdstip t verrichte arbeid is

$$A(t) = \int_0^t \underline{F} \cdot \underline{v} dt .$$

Er geldt

$$P = \frac{dA}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v} = F_T v . \quad (6.7)$$

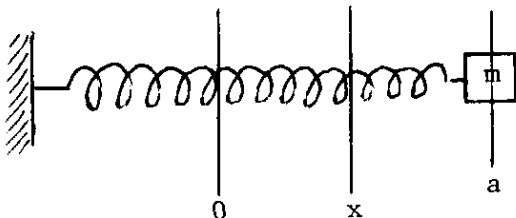
We drukken nu de verrichte arbeid A uit in de snelheden van het massapunt.

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_A}^{t_B} \underline{F} \cdot \underline{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} m \dot{\underline{v}} \cdot \underline{v} dt = \left. \frac{1}{2} m \underline{v} \cdot \underline{v} \right|_{t_A}^{t_B} = \\ &= \frac{1}{2} m v^2(t_B) - \frac{1}{2} m v^2(t_A) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

De grootheid $T = \frac{1}{2} m v^2$ noemen we de kinetische energie. Er geldt volgens

(6.8) $A = T_B - T_A$, dus de verrichte arbeid is gelijk aan de toename van de kinetische energie.

Voorbeeld 6.5.



Gegeven een lineaire veer

(§3.3). Vanuit de uitgerekte

toestand $x = a$ laten we m los.

Dus $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Wat is

de snelheid als m in een punt

x , $0 \leq x \leq a$, aangekomen is?

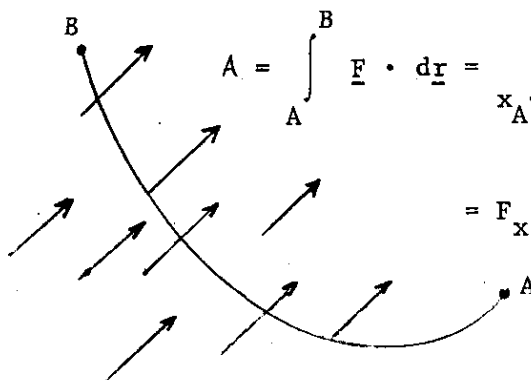
Antwoord:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx = \int_a^x -k\xi d\xi = \frac{1}{2} k (a^2 - x^2)$$

anders:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int_0^{a-x} F_T ds = \int_0^{a-x} k(a-s) ds = \frac{1}{2} k (a^2 - x^2) .$$

De arbeid, die verricht wordt op een massapunt, dat zich in een constant krachtveld \underline{F} beweegt, wordt gegeven door


$$\begin{aligned} A &= \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz = \\ &= F_x (x_B - x_A) + F_y (y_B - y_A) + F_z (z_B - z_A) = \underline{F} \cdot (\underline{r}_B - \underline{r}_A) . \end{aligned}$$

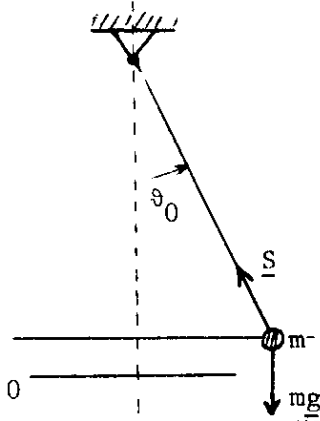
Blijkbaar hangt de verrichte arbeid hier (anders dan in Voorbeeld 4) alleen af van begin- en eindpunt van de gekozen weg.

Definieer de functie $U(\underline{r}) = U(x, y, z) = -\underline{F} \cdot \underline{r}$. Dan geldt $A = U(\underline{r}_A) - U(\underline{r}_B)$.

$U(\underline{r})$ heet de potentiële energie en de verrichte arbeid is blijkbaar gelijk aan de afname van de potentiële energie.

Voorbeeld 6.6.

Het zwaartekrachtveld wordt gegeven door $\underline{F} = -mg \underline{e}_z$. Dan geldt $U = mgz + C$. C is een willekeurig te kiezen constante. Beschouw een slinger met lengte ℓ . We laten m los terwijl het koord een hoek ϑ_0 maakt met de verticaal.



Wat is de snelheid van m als de hoek, die het koord met de verticaal maakt, gelijk is aan ϑ , $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$.

Antwoord: Op m werkt de spankracht in het koord.

Die verricht geen arbeid. Verder werkt de zwaartekracht en die heeft een potentiële energie $U = mgz$.

Dus

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg \ell (1 - \cos \vartheta_0) - mg \ell (1 - \cos \vartheta) = mg \ell (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) .$$

Aldus hebben we de snelheid berekend zonder de bewegingsvergelijking op te lossen!

Een kracht (krachtveld) heet conservatief als er een functie $U(\underline{r})$ bestaat zodanig dat voor alle punten $\underline{r}_A, \underline{r}_B$ geldt

$$A = \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(\underline{r}_A) - U(\underline{r}_B) . \quad (6.9)$$

De functie $U(\underline{r})$ heet de potentiële energie. We merken op

- (i) A is onafhankelijk van de gekozen weg.
- (ii) Afname van U = verrichte arbeid tussen de eindpunten.
- (iii) U is slechts bepaald op een constante na.

Een constant krachtveld is een conservatief krachtveld. Een voorbeeld van een niet-conservatief krachtveld is gegeven in Voorbeeld 4. Je kunt daar niet van energie spreken!! (Behalve als je journalist bent.)

We zoeken nu een eenvoudige relatie tussen U en \underline{F} .

$$U(x,y,z) - U(x+h,y,z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)} \underline{F} \cdot d\underline{r} .$$

Omdat de integraal niet afhangt van de gekozen weg, integreren we voor het gemak maar langs de rechte verbindingslijn. Er komt

$$U(x,y,z) - U(x+h,y,z) = \int_x^{x+h} F_x(\xi,y,z) d\xi .$$

Door h delen en $h \rightarrow 0$ levert

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = -F_x(x,y,z) .$$

Analoog kan men vinden

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = -F_y(x,y,z)$$

(6.10)

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = -F_z(x,y,z) .$$

Omgekeerd levert iedere functie $U(x,y,z)$ via de formules (6.10) een conservatief krachtveld.

Voorbeeld 6.7.

Het krachtveld $F(x)\underline{e}_x$ is conservatief. De potentiaal $U(x)$ wordt gegeven door

$$U(x) = - \int_0^x F(\xi) d\xi .$$

Voorbeeld 6.8.

De centrale krachtvelden

$$\underline{F}(\underline{r}) = - \frac{c}{|\underline{r}|^2} \underline{e}_r \quad \text{en} \quad \underline{F}(\underline{r}) = -k \underline{r}$$

uit §3.6 zijn conservatief. De potentialen zijn respectievelijk

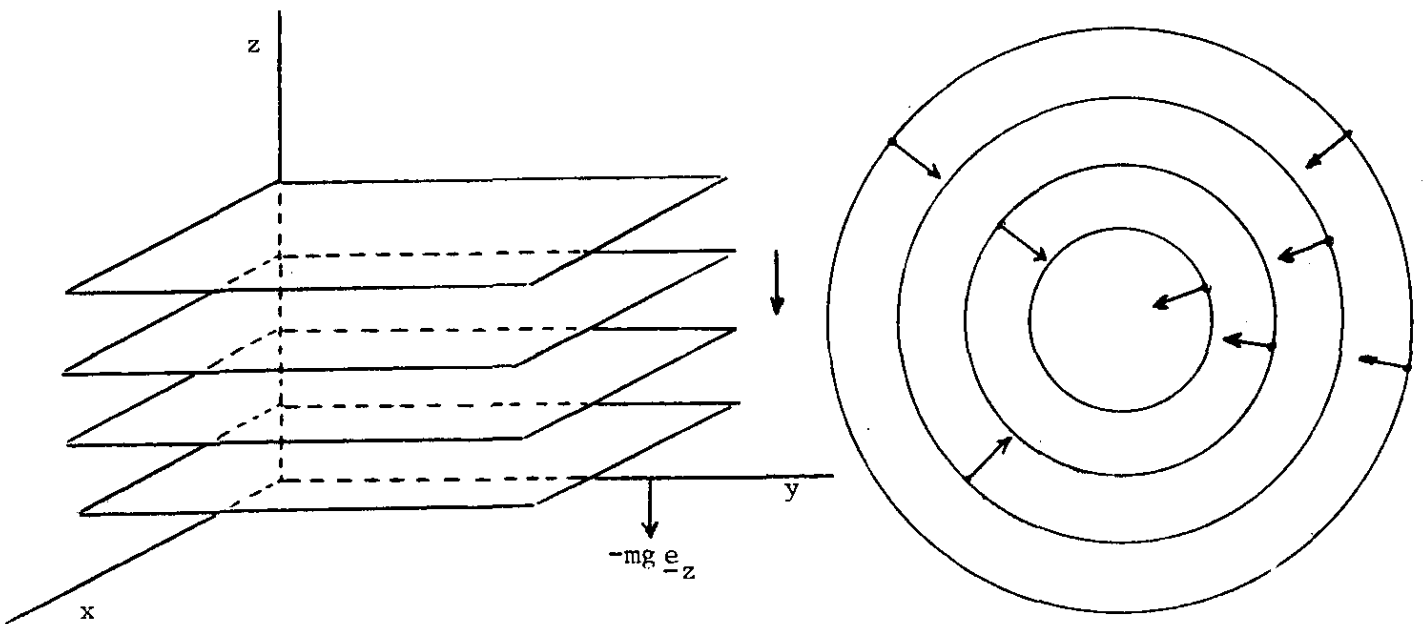
$$U(x,y,z) = \frac{-c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{en} \quad U(x,y,z) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) .$$

De oppervlakken op U constant heten equipotentiaalvlakken. In ieder punt staat de kracht loodrecht op een equipotentiaalvlak.

Voorbeeld 6.9.

Bij het zwaartekrachtveld zijn de equipotentiaalvlakken horizontale vlakken.

Bij de krachtvelden van Voorbeeld 8 zijn de equipotentiaalvlakken concentrische bollen om de oorsprong.



We kunnen nu de wet van behoud van energie voor een deeltje in een conservatief krachtveld formuleren: Verrichte arbeid = toename kinetische energie = afname potentiële energie.

$$T_B - T_A = U(\underline{r}_A) - U(\underline{r}_B) .$$

Dus

$$U(\underline{r}_A) + T_A = U(\underline{r}_B) + T_B .$$

We noemen

$$W = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + U(\underline{r}) \quad (6.11)$$

de (totale) energie van het deeltje. W is de som van de potentiële en de kinetische energie. Er geldt

$$W = \text{constant} .$$

Een heel korte afleiding van de energiebehoudswet voor conservatieve krachtvelden kan met de kettingregel voor partiële afgeleiden verkregen worden. Dat gaat als volgt

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r})$$

$$m \dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = -\dot{\underline{r}} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \underline{e}_z \right) =$$

$$= - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + U(x, y, z) \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + U(x, y, z) = \text{constant} .$$

§6.3. Energiebeschouwingen bij de eendimensionale beweging

Voor de eendimensionale bewegingsvergelijking

$$m \ddot{x} = F(x) \tag{6.12}$$

geldt de energiebehoudswet

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = W = \text{constant} .$$

Hierin is $U(x)$ zodanig dat $F(x) = - \frac{dU}{dx}$. Stel dat het beschouwde deeltje op $t = 0$ in x_0 zit en een snelheid v_0 heeft. Dan geldt

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = W = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0) . \tag{6.13}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \left\{ \frac{2}{m} [W - U(x)] \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{6.14}$$

Als $v_0 > 0$, dan geldt in (6.12) voor voldoende kleine t het + teken. (6.13) is een 1e orde vergelijking, terwijl de oorspronkelijke vergelijking (6.12) van de 2e orde is. (6.13) kan gesepareerd worden

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [W - U(\xi)]}} = \int_0^t d\tau = t . \tag{6.15}$$

Dit levert t als functie $x : t(x)$. De inverse functie $x(t)$ is dan de gezochte oplossing (6.12). Helaas is de integraal (6.15) meestal niet in elementaire functies uit te drukken.

Voorbeeld 6.10. De harmonische oscillator.

Bewegingsvergelijking $m\ddot{x} = -\alpha x$.

Begincondities $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$.

Potentiële energie $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$.

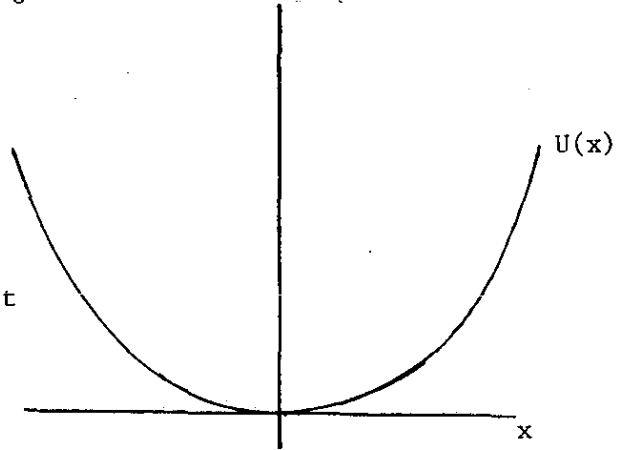
Totale energie $W = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 = \frac{1}{2}\alpha x_0^2$.

$$-\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}[W - \frac{1}{2}\alpha \xi^2]}} = t$$

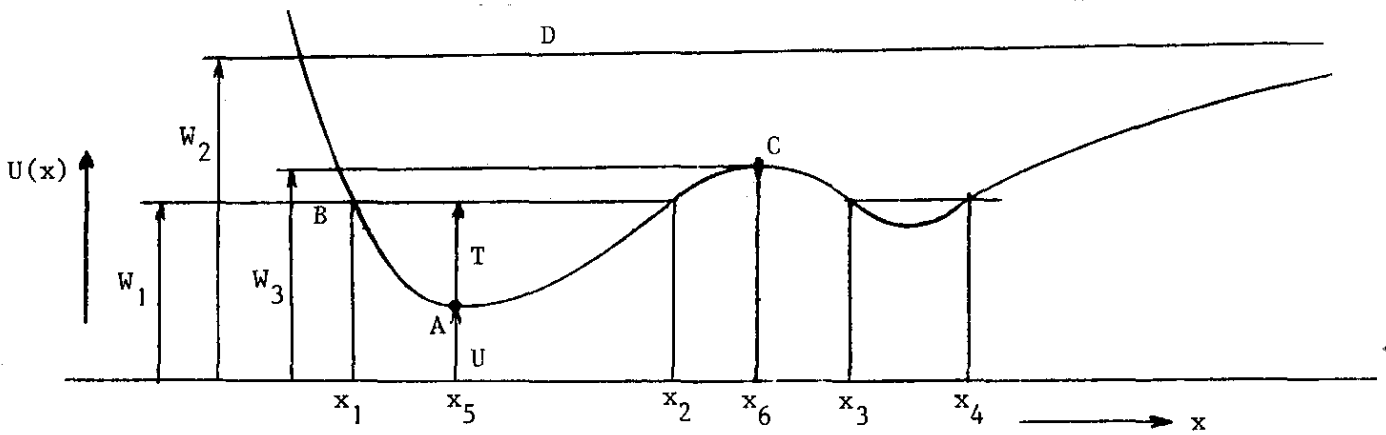
$$-\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \arcsin \sqrt{\frac{\alpha}{2W}} x + \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \arcsin 1 = t$$

met $x_0 = \left(\frac{2W}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$. Inverteren levert

$$x(t) = \sqrt{\frac{2W}{\alpha}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{m}} t \right\}.$$



We zetten nu $U(x)$ uit in een grafiek. Dat levert de potentiaalkromme



- In het punt x_5 heeft U een absoluut minimum. Bewegingstoestanden met energie W kleiner dan $U(x_5)$ zijn niet mogelijk. Er geldt $F(x_5) = -U'(x_5) = 0$. Dus als we in x_5 een massapunt met beginsnelheid 0 neerzetten, dan blijft het in x_5 stilzitten.
- Als we zorgen dat de energie $W = U(x_0) + \frac{1}{2}mv_0^2 > U(x_5)$, dan kan het gebeuren dat het deeltje een periodieke beweging gaat uitvoeren tussen x_1 en x_2 of tussen x_3 en x_4 (als $W = W_1$). De punten x_1, x_2, x_3, x_4 heten keerpunten. Het kan ook gebeuren, dat het deeltje oneindig ver weg raakt (als $W = W_2$).
- In het punt x_6 heeft U een lokaal maximum. Daar geldt $F(x_6) = -U'(x_6) = 0$. Dat is dus een evenwichtspunt net als x_5 . Het punt x_6 is een labiel evenwichtspunt. D.w.z. als je het massapunt, in x_6 gesitueerd, een willekeurig kleine aanvangssnelheid geeft, dan raakt het ver verwijderd van x_6 ($W = W_3$). Het punt x_5 daarentegen is een stabiel evenwichtspunt. Hoe kleiner de aanvangssnelheid is die je geeft vanuit x_5 , hoe dichter het bewegende punt in de buurt van x_5 blijft.
- Het deeltje bevindt zich in een vrije toestand als het zich in een onbegrensd deel van de ruimte kan bewegen ($W = W_2$). Het deeltje bevindt zich in een gebonden toestand als het zich slechts in een begrensd deel van de ruimte kan bewegen. Bij $W = W_1$ zijn 2 gebonden toestanden: Beweging in de intervallen $[x_1, x_2]$ resp. $[x_3, x_4]$. Beide toestanden zijn gescheiden door een potentiaalbarriëre (= het stuk van de potentiaal-kromme op het interval $[x_2, x_3]$). In de klassieke mechanica kan een deeltje niet door een potentiaalbarriëre (ook wel verboden zone geheten) heenkomen.

§6.4. Beweging onder invloed van conservatieve centrale krachten

In het Oxy -vlak beschouwen we de bewegingsvergelijking

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}) \quad (6.16)$$

Met $\underline{F}(\underline{r})$ een conservatief centraal krachtveld. Dat wil zeggen dat $\underline{F}(\underline{r})$ een potentiaal heeft van de vorm $U(r)$. We gebruiken poolcoördinaten. Er zijn twee behoudswetten in dit geval. Behoud van energie

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(r) = W = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(r_0) \quad (6.17)$$

en behoud van impulsmoment

$$m r^2 \frac{d\phi}{dt} = L = m r_0^2 \dot{\phi}(0) . \quad (6.18)$$

Zoals aangegeven zijn de constanten W en L uit de begincondities te berekenen.

Omdat $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$ kan voor (6.17) geschreven worden

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = W = \text{constant} \quad (6.19)$$

met $U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$. De term $\frac{L^2}{2mr^2}$ heet centrifugaalpotentiaal. (6.19) is eenzelfde vergelijking als (6.13),

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (W - U_{\text{eff}}(r))} \quad (6.20)$$

met de methode van §6.3 kunnen we hieruit in principe $t(r)$ en $r(t)$ vinden.

Vervolgens kunnen we $\varphi(t)$ bepalen met (6.18)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{L}{m r^2(\tau)} d\tau . \quad (6.21)$$

Als $L > 0$, dan is $\varphi(t)$ een monotoon stijgende functie. Als $L < 0$, dan is $\varphi(t)$ monotoon dalend. Het deeltje loopt dus altijd in eenzelfde draairichting om het centrum. Daarbij geldt de perkenwet.

Nu we $r(t)$ en $\varphi(t)$ in principe berekend hebben, is de vergelijking (6.16) in principe opgelost. Uit (6.18) en (6.29) kunnen we nog de baanvergelijking in poolcoördinaten bepalen:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \bigg/ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{m r^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} (W - U_{\text{eff}}(r))} . \quad (6.22)$$

Na integratie vinden we $\varphi(r)$

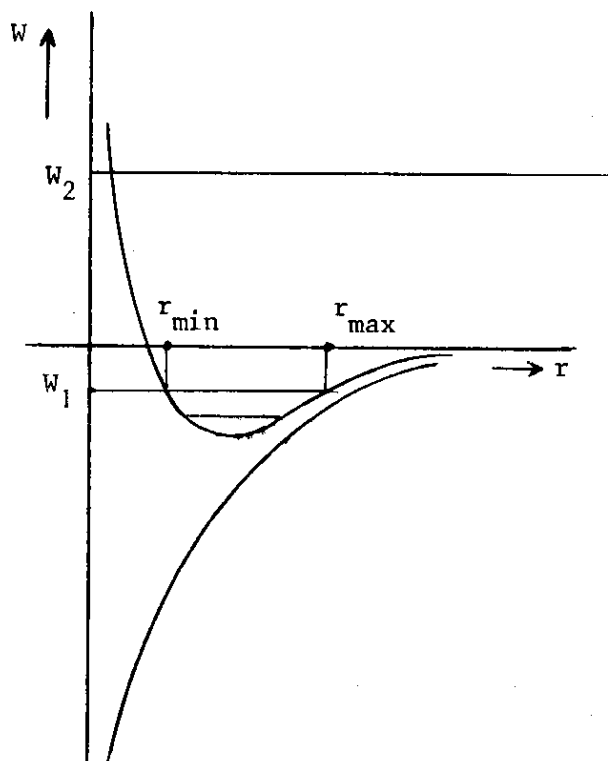
$$\varphi(r) - \varphi(0) = \int_{r(0)}^r \frac{L d\rho}{m \rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} (W - U_{\text{eff}}(\rho))}} .$$

§6.5. De planetenbeweging

$$U = -\frac{c}{r} \quad (\text{cf. Voorbeeld 6.8}).$$

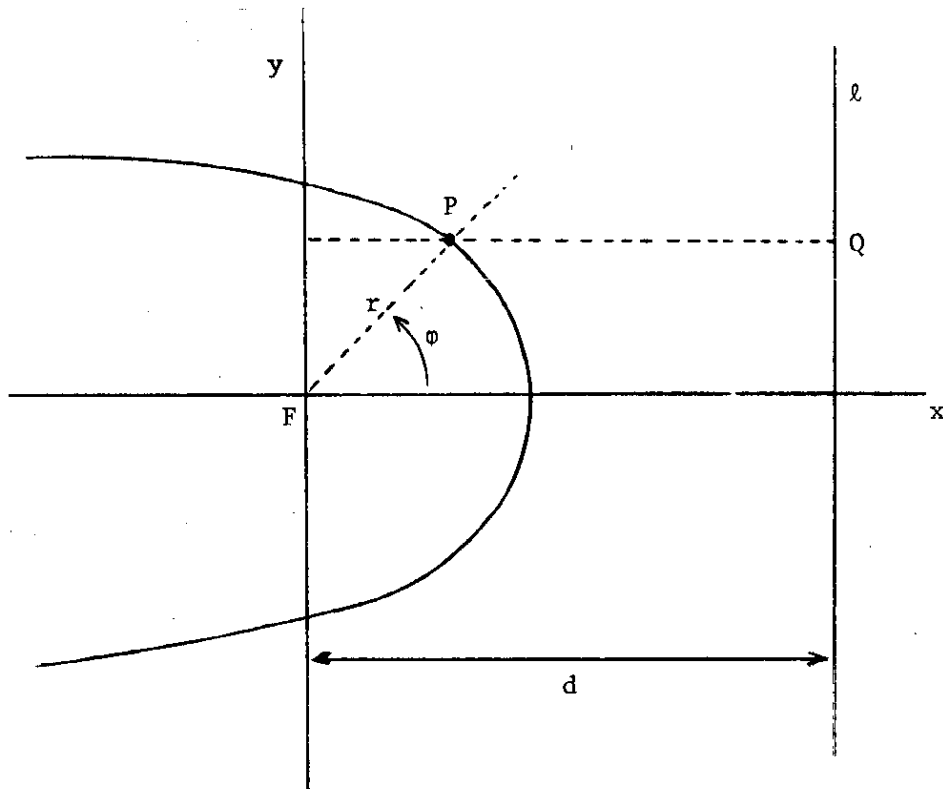
$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2m r^2} - \frac{c}{r} \quad (\text{zie figuur}).$$

Voor $W < 0$ is de oplossing $r(t)$ periodiek. Het massapunt bevindt zich dan in een gebonden toestand, de baan is een rosetvormige baan binnen een begrensd gebied rondom de oorsprong.



Voor $W > 0$ wordt $r(t)$ willekeurig groot. In feite zijn voor $W < 0$ de banen ellipsen en voor $W > 0$ hyperbolen, beide met O als brandpunt. We zullen dat gaan bewijzen.

Intermezzo over kegelsneden



Een kegelsnede K met richtlijn l en brandpunt F is per definitie de verzameling van alle punten P in het platte vlak, waarvoor de verhouding

$$\epsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{|r|}{|d-x|} = \frac{r}{d-r \cos \varphi} \quad (6.23)$$

een vast getal is.

Uit (6.23) vinden we door kwadrateren de vergelijking van K in Cartesische coördinaten

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2\epsilon^2 dx + y^2 = \epsilon^2 d^2 .$$

Voor $0 < \epsilon < 1$ is K een ellips, voor $\epsilon = 1$ een parabool en voor $\epsilon > 1$ een hyperbool.

Eveneens uit (6.23) vinden we de vergelijking voor K in poolcoördinaten

$$r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \varphi} . \quad (6.24)$$

Hiervan berekenen we de afgeleide

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\epsilon^2 d \sin \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = \frac{r^2 \sin \varphi}{d} \\ \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{r^4}{d^2} (1 - \cos^2 \varphi) = \frac{r^4}{d^2} \left\{ 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon}\right)^2 \right\} = \frac{r^4}{d^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) + \frac{2r^3}{\epsilon d} - r^2 . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Einde intermezzo

We kwadrateren nu (6.22), vullen voor het linkerlid (6.25) in en delen door r^4 . Er komt

$$\frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) + \frac{2}{\epsilon d r} - \frac{1}{r^2} = \frac{2m}{L^2} \left\{ W - \frac{L^2}{2m r^2} - U(r) \right\} .$$

Onder de aanname $U(r) \rightarrow 0$ als $r \rightarrow \infty$ vinden we hieruit

$$W = \frac{L^2}{2d^2 m} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) \quad (6.26)$$

$$U(r) = - \frac{L^2}{m \epsilon d} \frac{1}{r} . \quad (6.27)$$

Een belangrijke conclusie is de volgende: Als de bewegingsvergelijking (6.16) met een conservatief centraal krachtveld *banen* oplevert die een kegelsnede zijn met het centrum als brandpunt, dan is de potentiële energie $U(r)$ van de vorm $U(r) = \frac{-c}{r}$. Newton kwam op deze manier aan zijn gravitatie-wet! Hij kende de vorm van de planetenbaan via de waarnemingen van Kepler en diens voorgangers.

Uit (6.26) volgt dat de baan een ellips is als $W < 0$, een parabool als $W = 0$ en een hyperbool als $W > 0$. De parameters ϵ en d , die de gedaante van de kegelsnede bepalen, kunnen berekend worden uit (6.26) en (6.27) en de begincondities. De begincondities bepalen immers W en L .

HOOFDSTUK 7. Botsingen

§7.1. Eendimensionale botsingsproblemen (Centrale botsingen)

A. Volkomen elastische botsingen

We laten langs een rechte lijn (in een gladde buis bijvoorbeeld) twee massapunten m_1 en m_2 tegen elkaar botsen. Gegeven zijn de snelheden v_1 en v_2 vóór de botsing. We willen weten wat de snelheden V_1 en V_2 na de botsing zijn



Uitgangspunt: 1. Impulsbehoud.

2. Behoud van kinetische energie.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \tag{7.1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Na enig rekenwerk

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

De andere oplossing $V_1 = v_1$ en $V_2 = v_2$ is niet interessant.

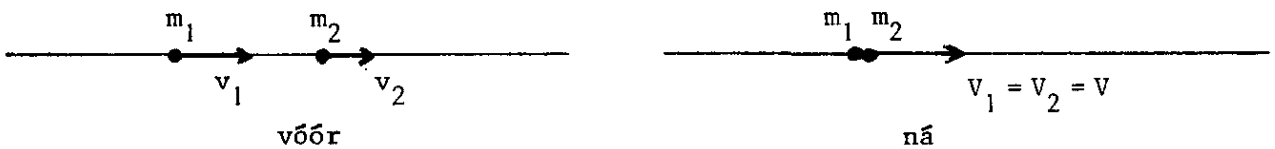
Er blijkt te gelden

$$V_2 - V_1 = -1 \cdot (v_2 - v_1) . \quad (7.3)$$

(7.2) kan worden teruggevonden uit (7.1) en (7.2).

Als uitwendige krachten een rol spelen, moeten in (7.1) de impulsen vlak vóór en vlak na de botsing genomen worden. De uitwendige krachten hebben dan "geen kans gekregen" de impulsen "veel" te veranderen.

B. Volkomen inelastische botsingen



Uitgangspunt: 1. Impulsbehoud.

$$2. V_1 = V_2 = V.$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V . \quad (7.4)$$

$$V_1 = V_2 = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (7.5)$$

Er geldt blijkbaar

$$V_2 - V_1 = -0 \cdot (v_2 - v_1) . \quad (7.6)$$

C. Onvolkomen elastische (realistische) botsingen

Uitgangspunt: 1. Impulsbehoud.

2. De botsingsvergelijking:

$$V_2 - V_1 = -e \cdot (v_2 - v_1) , \quad 0 \leq e \leq 1 . \quad (7.7)$$

e heet de restitutiecoëfficiënt. We zitten nu tussen geval A en geval B in.

Oplossing

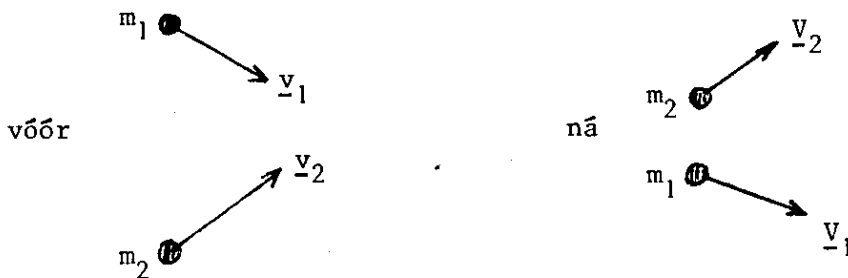
$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Verdere berekening leert

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2 .$$

We zien dat er energieverlies optreedt als $|e| < 1$. Er komt energie bij als $|e| > 1$. Dan vindt een "explosie" plaats. Als $e < 0$, dan gaat m_1 dwars door m_2 heen.

§7.2. Botsingen in het platte vlak en in de ruimte (Niet-centrale botsingen)



Ons algemeen uitgangspunt is, dat vlak na de botsing de totale impuls hetzelfde is als vlak voor de botsing

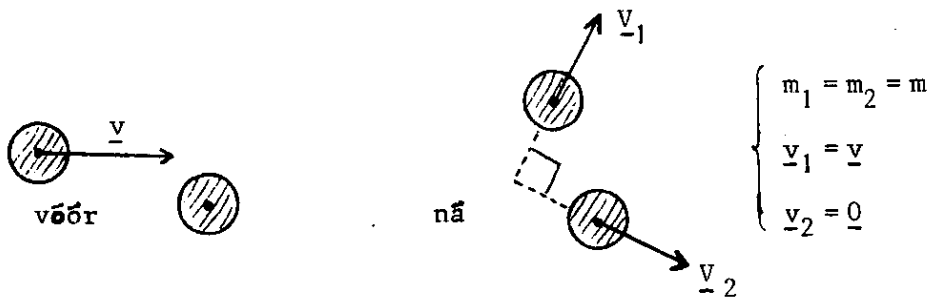
$$m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 = m_1 \underline{V}_1 + m_2 \underline{V}_2 \quad (7.9)$$

In het platte vlak (ruimte) staan hier 2 (3) vergelijkingen met 4 (6) onbekenden. Om bij gegeven \underline{v}_1 en \underline{v}_2 de snelheden \underline{V}_1 en \underline{V}_2 te berekenen (d.i. het botsingsprobleem op te lossen) moeten er 2 (3) vergelijkingen bijkomen. Soms is er behoud van kinetische energie

$$\frac{1}{2} m_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \frac{1}{2} m_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_1 + \frac{1}{2} m_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{V}_2 \quad (7.10)$$

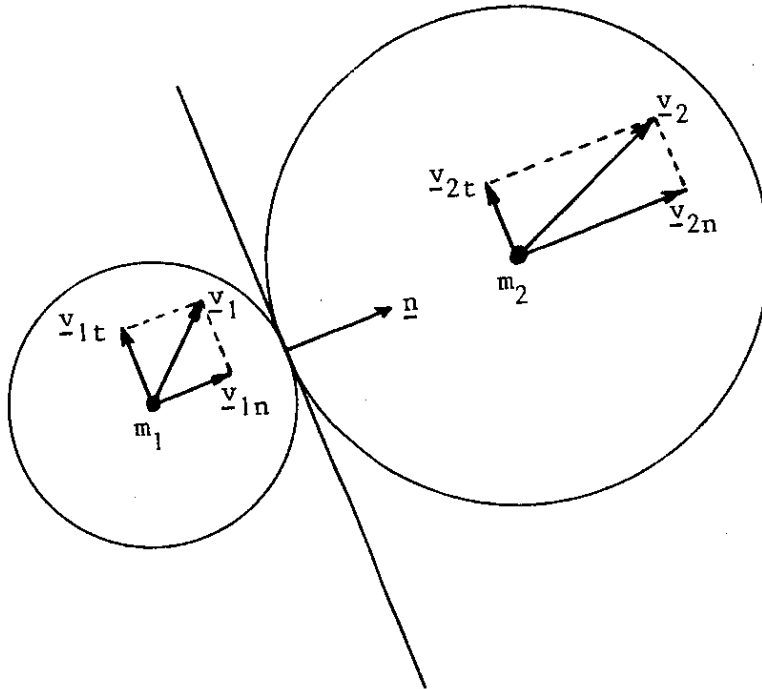
Doch dit levert maar 1 vergelijking extra.

Opgave: Laat zien dat bij een niet-centrale volkomen elastische botsing (d.w.z. 7.10 geldt) tussen 2 gelijke massa's, waarvan er aanvankelijk een in rust is, de snelheden na de botsing loodrecht op elkaar staan.



Om het botsingsprobleem op te lossen, moeten we meer informatie hebben over de precieze wisselwerking tussen de deeltjes. Wij zullen botsingen bespreken tussen gladde bollen, waarvan de massa in het middelpunt geconcentreerd zit. Dat betekent dat we rotaties van de bollen buiten beschouwing mogen laten.

Vlak voor het ogenblik dat de bollen tegen elkaar botsen, ontbinden we de snelheden in de richting van de normaalvector \underline{n} van het raakpunt van de bollen en de richting loodrecht daarop. Zie figuur.



Stel

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= v_{1n} \underline{n} + \underline{v}_{1t} & \text{met} & & v_{1n} &= \underline{v}_1 \cdot \underline{n} \\ \underline{v}_2 &= v_{2n} \underline{n} + \underline{v}_{2t} & & & v_{2n} &= \underline{v}_2 \cdot \underline{n} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Vlak na het ogenblik van de botsing doen we hetzelfde. Dus stel

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= V_{1n} \underline{n} + \underline{V}_{1t} & \text{met} & & V_{1n} &= \underline{V}_1 \cdot \underline{n} \\ \underline{V}_2 &= V_{2n} \underline{n} + \underline{V}_{2t} & & & V_{2n} &= \underline{V}_2 \cdot \underline{n} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Omdat de bollen glad verondersteld worden, vinden in de tangentiële richting geen veranderingen plaats. Dus

$$\underline{v}_{1t} = \underline{v}_{1t} \quad \text{en} \quad \underline{v}_{2t} = \underline{v}_{2t} \quad (7.13)$$

In de normale richting geldt impulsbehoud

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \quad (7.14)$$

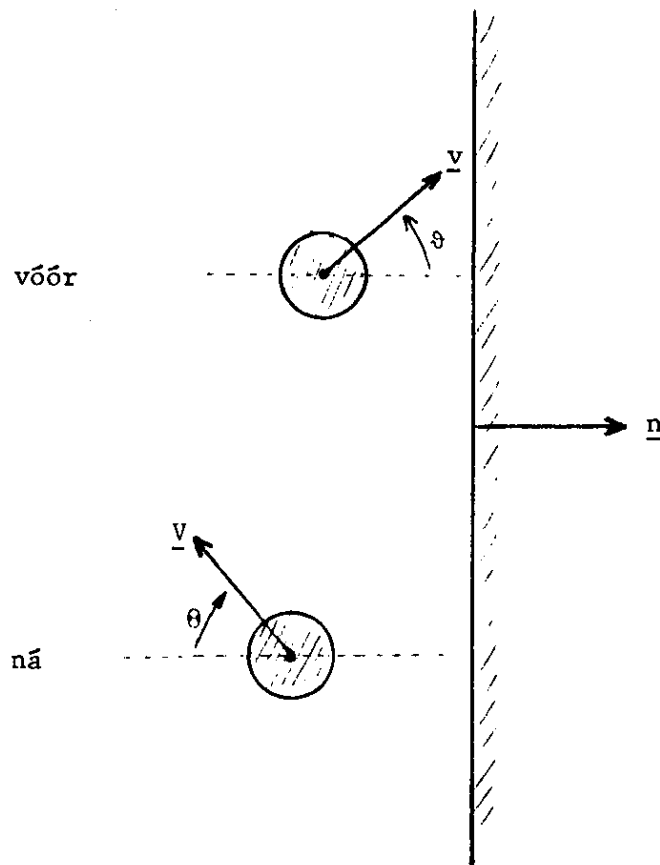
en we nemen aan, dat de botsingsvergelijking geldt

$$v_{1n} - v_{2n} = -e(v_{1n} - v_{2n}) \quad (7.15)$$

In totaal hebben we dan 4 (6) vergelijkingen. Genoeg om het botsingsprobleem op te lossen.

(7.14) en (7.15) worden door (7.8) opgelost.

We bespreken tenslotte nog het geval van een botsing tegen een vaste gladde wand



We nemen $v_2 = 0$ en $m_2 = \infty$. Deel eerst (7.14) door m_2 . Dan volgt $V_{2n} = v_{2n} = 0$. De muur blijft dus stil staan. Uit (7.15) volgt dan $V_{1n} = -e v_{1n}$.

Als het bolletje m_1 de wand onder een hoek ϑ treft, dan geldt

$$V_t = v_t = v \sin \vartheta$$

$$V_n = -e v_n = -e v \cos \vartheta$$

zodat

$$\tan \theta = - \frac{V_t}{V_n} = \frac{1}{e} \tan \vartheta .$$

Dus $\tan \theta = \tan \vartheta$ alleen als $e = 1$. Als $0 < e < 1$, is de hoek van terugkaatsing θ dus groter dan de hoek van inval ϑ .

HOOFDSTUK 8. De mechanica van stelsels bestaande uit meerdere deeltjes

De bedoeling van dit hoofdstuk is o.m. te laten zien dat $\underline{F} = m \underline{a}$ en $\dot{\underline{L}} = \underline{\tau}$ ook op uitgebreide lichamen (zwermen van deeltjes) toegepast mogen worden.

§8.1. Stelsels van N deeltjes

Beschouw een zwerm van N deeltjes met massa m_i en positievectoren \underline{r}_i , $1 \leq i \leq N$. Stel $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, de totale massa. Het massamiddelpunt \underline{r}_M wordt gedefinieerd door

$$\underline{r}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i . \quad (8.1)$$

We voeren een met de zwerm mee translarend coördinatensysteem in, waarvan we de oorsprong in \underline{r}_M leggen. Dit coördinatensysteem heet het massamiddelpuntsysteem of M -systeem. De vector $\underline{r}'_i = \underline{r}_i - \underline{r}_M$ is de positievector van het i^e deeltje in het M -systeem. Er geldt

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \underline{r}'_i = \underline{0} .$$

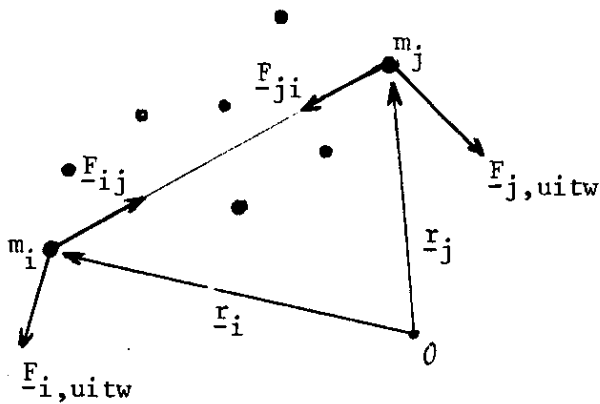
? $m_i \underline{r}'_i$

De snelheid \underline{v}_M van het massamiddelpunt is

$$\underline{v}_M = \dot{\underline{r}}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i . \quad (8.2)$$

De totale impuls \underline{P} wordt gegeven door

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N \underline{P}_i = M \underline{v}_M . \quad (8.3)$$



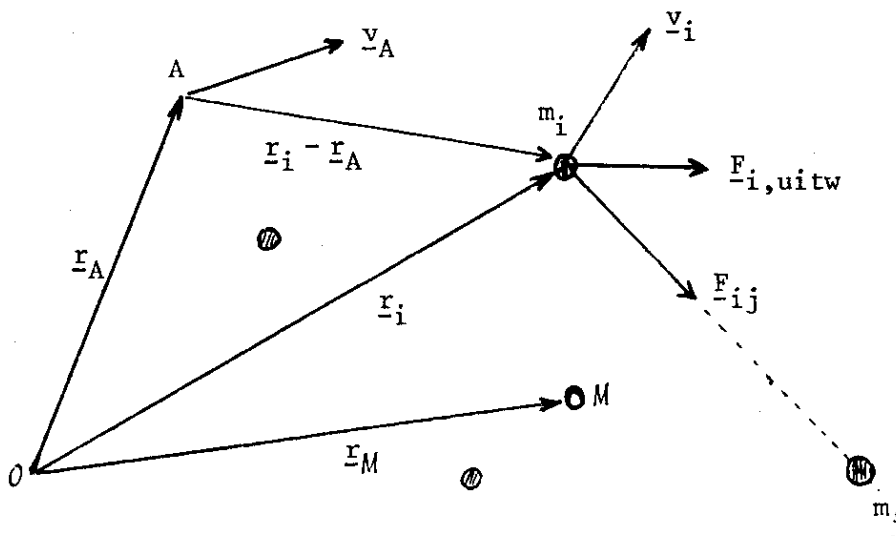
Op elk deeltje m_i werken $N-1$ inwendige krachten \underline{F}_{ij} uitgeoefend door de overige deeltjes en een uitwendige kracht $\underline{F}_{i,uitw}$. We berekenen de afgeleide van de totale impuls \underline{P} .

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\underline{P}}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_{i,uitw} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{F}_{ij} .$$

Volgens Actie = -Reactie is de tweede term in het rechterlid 0. Voor de eerste term schrijven we \underline{F}_{uitw} . Dan geldt dus

$$\dot{\underline{P}} = M \underline{a}_M = \underline{F}_{uitw} . \quad (8.4)$$

De conclusie is dat we op het massamiddelpunt $\underline{F} = m \underline{a}$ mogen toepassen en dat de inwendige krachten daarbij geen rol spelen.



Het impulsmoment van een zwerm deeltjes t.o.v. een referentiepunt A wordt gedefinieerd door

$$\underline{L}_A = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times \underline{P}_i \quad (8.5)$$

Dit schrijven we als volgt

$$\underline{L}_A = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_M + \underline{r}'_i - \underline{r}_A) \times \underline{P}_i = (\underline{r}_M - \underline{r}_A) \times \underline{P} + \sum_{i=1}^N \underline{r}'_i \times \underline{P}_i \quad (8.6)$$

De term $(\underline{r}_M - \underline{r}_A) \times \underline{P}$ heet het impulsmoment VAN het massamiddelpunt. De term $\sum_{i=1}^N \underline{r}'_i \times \underline{P}_i$ heet het impulsmoment OM het massamiddelpunt. We noemen deze term ook wel het inwendig impulsmoment \underline{L}_{inw} en er geldt

$$\underline{L}_{inw} = \sum_{i=1}^N \underline{r}'_i \times m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_M) = \sum_{i=1}^N \underline{r}'_i \times \underline{P}'_i$$

Dit is dus gelijk aan het impulsmoment in het M-systeem.

Vervolgens voeren we in het totale moment t.o.v. A van de krachten dit op de deeltjes werken.

$$\underline{\tau}_A = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times (\underline{F}_{i,inw} + \underline{F}_{i,uitw}) \quad (8.7)$$

met

$$\underline{F}_{i,inw} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{F}_{ij}$$

$j \neq i$

Als de krachten \underline{F}_{ij} , die de deeltjes op elkaar uitoefenen langs de verbindingsrechten tussen het i^e en j^e deeltje werken, dan mogen we in (8.7) de

term met $\underline{F}_{i,\text{inw}}$ weglaten. Immers

$$\sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times \underline{F}_{i,\text{inw}} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_{i,\text{inw}} - \underline{r}_A \times \left[\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{F}_{ij} \right].$$

Volgens Actie = -Reactie is de laatste term 0. De andere term kunnen we, met indices verwisselen, schrijven als

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} + \underline{r}_j \times \underline{F}_{ji}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Conclusie

$$\underline{\tau}_A = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times \underline{F}_{i,\text{uitw}}. \quad (8.8)$$

De impulsmomentstelling voor een zwerm deeltjes. Zij \underline{v}_A de snelheid van het referentiepunt A. Als $\underline{v}_A = \lambda \underline{v}_M$, λ een willekeurig getal, dan geldt

$$\dot{\underline{L}}_A = \underline{\tau}_A. \quad (8.9)$$

Net als in §6.1 bewijzen we dit door differentiëren.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{L}}_A &= \sum_{i=1}^N (\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_A) \times \underline{p}_i + \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times \dot{\underline{p}}_i = \\ &= -\underline{v}_A \times \underline{P} + \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_A) \times \underline{F}_i = -M \underline{v}_A \times \underline{v}_M + \underline{\tau}_A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bewering.

Er zijn twee belangrijke gevallen:

- 1) A is vast punt, bijvoorbeeld O , dan $\lambda = 0$.
- 2) A is het massamiddelpunt \underline{r}_M , dan $\lambda = 1$.

Conclusie: $\underline{r}_A = \dot{\underline{L}}_A$ geldt t.o.v. een vast punt en t.o.v. het (eventueel) bewegende) massamiddelpunt.

Met (8.6) is in te zien dat $\dot{\underline{L}}_{inw} = \underline{r}$ t.o.v. de oorsprong in het M -systeem.

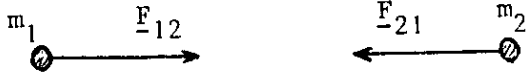
De kinetische energie van een zwerm deeltjes wordt gegeven door

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\underline{v}_M + \underline{v}'_i|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\underline{v}_M|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\underline{v}'_i|^2 + \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_M \cdot \underline{v}'_i . \end{aligned} \tag{8.10}$$

De laatste term is nul. De eerste term heet de kinetische energie VAN het massamiddelpunt. De tweede term is de inwendige kinetische energie en is gelijk aan de kinetische energie in het M -systeem.

§8.2. Stelsels van 2 deeltjes

De beweging van het massamiddelpunt van een stelsel van 2 deeltjes is een bijzonder geval van wat in §8.1 besproken is. Hier bestuderen we de interne beweging van een stelsel van 2 deeltjes. We laten zien dat de interne beweging uiteindelijk bestudeerd kan worden met de theorie van Hoofdstukken 3 en 6.



Beschouw een geïsoleerd stelsel van 2 deeltjes. Er geldt

$$\dot{\underline{v}}_1 = \frac{1}{m_1} \underline{F}_{12} \qquad \dot{\underline{v}}_2 = \frac{1}{m_2} \underline{F}_{21} = -\frac{1}{m_2} \underline{F}_{12} .$$

Dus

$$\frac{d}{dt} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \frac{d}{dt} \underline{v}_{12} = \underline{a}_{12} = \frac{1}{\mu} \underline{F}_{12} . \qquad (8.11)$$

met $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. μ heet gereduceerde massa. De positie \underline{r}_{12} van m_1 t.o.v. m_2 voldoet dus aan de bekende bewegingsvergelijking

$$\mu \ddot{\underline{r}}_{12} = \underline{F}_{12} . \qquad (8.12)$$

Als $m_1 \ll m_2$, dan $\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \approx m_1$. (Stelsel Aarde-Zon, H-
atoom, kunstmaan-aarde, etc.) Aan (8.12) zie je, dat je mag doen alsof m_2
stilstaat als je m_1 maar vervangt door de gereduceerde massa.

We laten nu zien dat de gereduceerde impuls $\mu \underline{v}_{12}$ precies gelijk is aan
de impuls in het M -systeem:

$$\underline{p}'_1 = m_1 \underline{v}'_1 = m_1 (\underline{v}_1 - \underline{v}_M) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \mu \underline{v}_{12} \qquad (8.13)$$

$$\underline{p}'_2 = -\mu \underline{v}_{12}$$

Verder is

$$\begin{aligned} \underline{L}_{\text{inw}} &= \underline{r}'_1 \times \underline{p}'_1 + \underline{r}'_2 \times \underline{p}'_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\underline{r}_{12} \times \mu \underline{v}_{12}) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\underline{r}_{12} \times -\mu \underline{v}_{12}) = \\ &= \underline{r}_{12} \times \mu \underline{v}_{12} . \end{aligned}$$

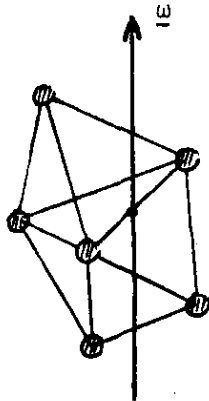
Tenslotte geldt voor de inwendige kinetische energie

$$\begin{aligned} T_{\text{inw}} &= \frac{1}{2} m_1 |\underline{v}'_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\underline{v}'_2|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left| \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{v}_{12} \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{v}_{12} \right|^2 = \frac{1}{2} \mu |\underline{v}_{12}|^2 . \end{aligned}$$

Alle genoemde fysische grootheden die je vindt als je m_2 als vast beschouwt en de gereduceerde massa μ invoert, hebben dus dezelfde waarde als de corresponderende fysische grootheden in het M -systeem.

§8.3. Starre stelsels van N deeltjes

We veronderstellen, dat N massapunten m_1, \dots, m_N door massalooze staven zodanig onderling verbonden zijn, dat het een onwrikbaar geheel is. Dit kan



als een eenvoudig model gezien worden voor een stuk vaste stof, waarvan de atomen onderling niet van plaats veranderen. We laten het verkregen lichaam nu eenparig om een as rondwentelen. We nemen aan dat de as door de oorsprong gaat en dat hoeksnelheidsvector $\underline{\omega}$ is. Als op zeker ogenblik de positievectoren \underline{r}_i zijn, dan is op datzelfde ogenblik het impulsmoment

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) . \quad (8.14)$$

Als functie van $\underline{\omega}$ is \underline{L} een lineaire afbeelding. We kunnen dus schrijven

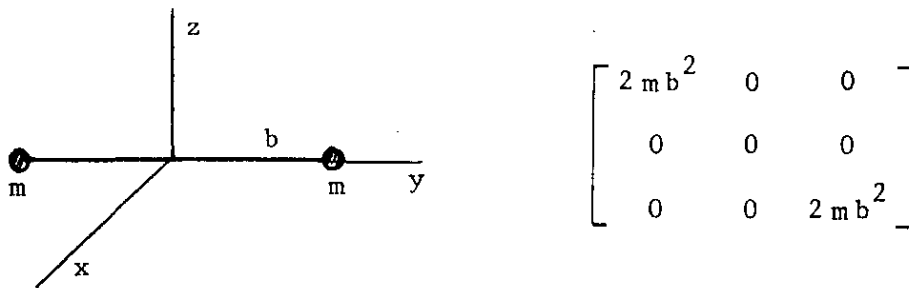
$$\underline{L} = \underline{J} \underline{\omega} . \quad (8.15)$$

Hierin is \underline{J} een lineaire afbeelding. De matrix van \underline{J} , die we ook \underline{J} noemen, kan met (8.14) berekend worden:

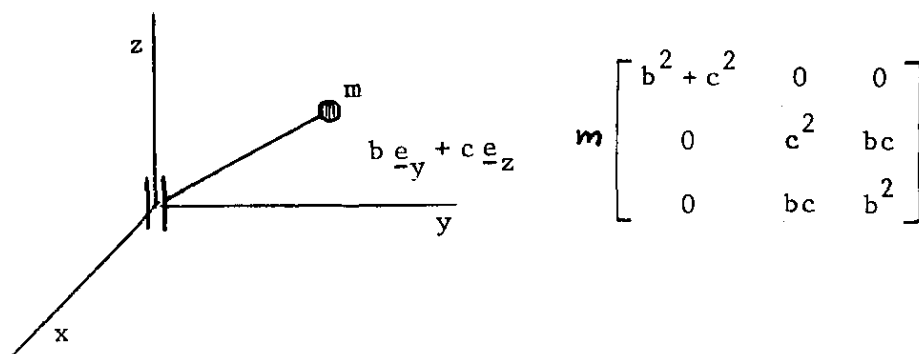
$$(8.16) \quad \underline{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} .$$

Deze 3×3 -matrix noemt men ook wel de traagheidstensor. Bij continue lichamen worden de sommen vervangen door integralen.

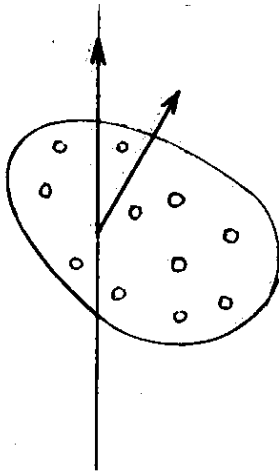
Voorbeeld 8.1. Traagheidstensor van een halter.



Voorbeeld 8.2. Traagheidstensor van een vliegenmepper.



In het algemeen is \underline{L} niet een scalair veelvoud van $\underline{\omega}$ (in Voorbeeld 6.1



was dat wèl het geval). Teneinde het koppel $\underline{\tau}$ op het starre stelsel te bepalen, berekenen we $\dot{\underline{L}}$ uitgaande van (8.14)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{L}} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)). \end{aligned}$$

De eerste term is nul. De tweede term herleiden we met behulp van

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{0}$$

tot

$$\dot{\underline{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{\omega} \times (\underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)) = \underline{\omega} \times \underline{L}. \quad (8.17)$$

We hebben dus

$$\underline{\tau} = \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{\omega} \times (\underline{J} \underline{\omega}). \quad (8.18)$$

Het koppel is ongelijk nul als \underline{L} geen scalair veelvoud is van $\underline{\omega}$. In Voorbeeld (8.2) is dat het geval als je $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_2$ neemt.

Tenslotte drukken we de kinetische energie uit in de traagheidstensor \underline{J} en $\underline{\omega}$.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\underline{v}_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\underline{\omega} \cdot (\underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i))) = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{J} \underline{\omega}. \end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de rekenregel

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}).$$

Practici aan de 2600jaan
hoek $23\frac{1}{2}^\circ$

1. Vectoren

1. Bewijs dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan als de grootte van hun som gelijk is aan de grootte van hun verschil.
2. Bewijs dat twee vectoren dezelfde grootte hebben als hun som en hun verschil loodrecht op elkaar staan.
3. Laat zien dat de grootte van de som S en het verschil V van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} als volgt kan worden uitgedrukt:

$$S = [(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$V = [(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Hierin zijn a_x , b_x enz. de componenten van \underline{a} en \underline{b} t.o.v. een rechthoekig assenstelsel OXYZ.

4. Gegeven zijn de vectoren:

$$\underline{a} = 2\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 5,5\underline{e}_z ,$$
$$\underline{b} = 2\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - 2,5\underline{e}_z .$$

Bepaal:

- i) de grootte en de richting van de som van \underline{a} en \underline{b} ;
- ii) de grootte en de richting van het verschil van \underline{a} en \underline{b} ;
- iii) de hoek tussen \underline{a} en \underline{b} .

5. Gegeven zijn de rechten:

$$\underline{v}_1 = 5\underline{e}_x - 2\underline{e}_y + \underline{e}_z ,$$
$$\underline{v}_2 = -3\underline{e}_x + \underline{e}_y - 7\underline{e}_z ,$$
$$\underline{v}_3 = 4\underline{e}_x + 7\underline{e}_y + 6\underline{e}_z .$$

Zij $\underline{s} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$.

Bepaal \underline{s} en bereken de hoeken die \underline{s} maakt met de positieve X-, Y- en Z-as.

Beantwoord de volgende vragen:

i) Ga, door rechtstreeks uitschrijven, na of

$$\underline{v}_1 \times (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3) \text{ en } (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) \times \underline{v}_3$$

een verschillend resultaat leveren.

ii) Bereken $(\underline{v}_1, (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3))$ en $((\underline{v}_1 \times \underline{v}_2), \underline{v}_3)$.

iii) Bereken $((\underline{v}_3 \times \underline{v}_1), \underline{v}_2)$ en vergelijk dit resultaat met de in ii) gevonden antwoorden.

6. Bewijs de volgende cyclische relaties

$$(\underline{v}_1, (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3)) = (\underline{v}_3, (\underline{v}_1 \times \underline{v}_2)) = (\underline{v}_2, (\underline{v}_3 \times \underline{v}_1)) .$$

Bewijs dat de absolute waarde van dit tripelproduct gelijk is aan de inhoud van het (scheve) blok opgespannen door \underline{v}_1 , \underline{v}_2 en \underline{v}_3 .

7. Bewijs dat:

$$\underline{v}_1 \times (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3) = (\underline{v}_1, \underline{v}_3) \underline{v}_2 - (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \underline{v}_3 .$$

8. Gegeven de vectoren:

$$\underline{a} = 2\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z ,$$

$$\underline{b} = -\underline{e}_x + 4\underline{e}_y + b\underline{e}_z ,$$

waarin b een nog onbekend reëel getal is.

i) Voor welke waarde(n) van b heeft de vergelijking

$$\underline{a} \times \underline{x} = \underline{b}$$

een oplossing?

ii) Zijn er voor de onder i) gevonden waarde(n) van b meerdere oplossingen?

iii) Geef een meetkundige interpretatie.

9. Gegeven de vector

$$\underline{a} = 3\underline{e}_x + 2\underline{e}_y - \underline{e}_z .$$

i) Bepaal de oplossing(en) van de vergelijking

$$(\underline{a}, \underline{x}) = 14 .$$

ii) Geef een meetkundige interpretatie.

10. Bepaal de afstand tussen de punten $P(4,5,7)$ en $Q(-3,6,12)$. Geef een parametervoorstelling van de rechte lijn door P en Q .
11. Bepaal de afstand van het punt $P(4,5,-7)$ tot de rechte lijn door $Q(-3,6,11)$ die evenwijdig loopt aan de vector $\underline{v} = 2\underline{e}_x - \underline{e}_y + 2\underline{e}_z$. Bepaal de afstand van P tot het platte vlak door Q en loodrecht op \underline{v} .

12. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (1,2,-1)$ en $\underline{b} = (3,9,-9)$.
Bepaal de vector \underline{p} en de scalar λ zodanig dat

$$\begin{aligned}(\underline{p}, \underline{a}) &= 0 \\ \underline{b} &= \underline{p} + \lambda \underline{a} .\end{aligned}$$

13. Gegeven zijn de vectoren \underline{a} en \underline{b} .
Bewijs de relatie:

$$|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 - (\underline{a}, \underline{b})^2 .$$

14. Bewijs dat voor elk drietal vectoren geldt:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0} .$$

15. Gegeven zijn de vectoren \underline{a} en \underline{b} zodanig dat $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{0}$.

Bewijs dat voor de vectoren \underline{x} en \underline{y} , die voldoen aan de relatie:

$$\underline{x} \times \underline{a} = \underline{y} \times \underline{b} ,$$

geldt:

$$(\underline{x}, \underline{a} \times \underline{b}) = 0 \quad \text{en} \quad (\underline{y}, \underline{a} \times \underline{b}) = 0 .$$

16. Bewijs dat voor elk drietal vectoren \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} , die voldoen aan de relatie:

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0} ,$$

geldt:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{b} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a} .$$

17. Gegeven zijn de vectoren \underline{a} en \underline{b} , beide met lengte ℓ .

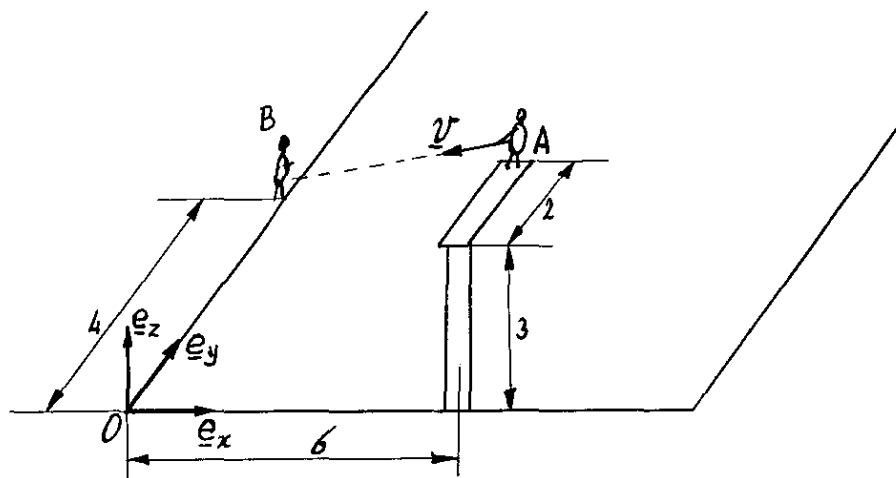
Zij φ de hoek tussen beide vectoren ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Bewijs

i) $|\underline{a} + \underline{b}| = 2\ell \cos \frac{1}{2}\varphi ,$

ii) $|\underline{a} - \underline{b}| = 2\ell \sin \frac{1}{2}\varphi .$

18.



Een jongetje A staat op de 3-meter-plank van een zwembad (voor de afmetingen zie de figuur).

- i) Geef, in componenten t.o.v. het in de figuur getekende $Oe_xe_ye_z$ -stelsel, de positievector van A t.o.v. 0.

Een vriendje B van A staat langs de kant van het zwembad op een afstand van 4 meter van 0 (zie figuur).

- ii) Geef de positievector van B en bereken de afstand van A tot B.
iii) A duikt met een snelheid van 3,5 m/sec in de richting van B. Geef de componenten van de snelheidsvector \underline{v} .

19. Van een punt P, met positievector \underline{r} t.o.v. 0, dat in een cirkel beweegt, is de snelheidsvector \underline{v} gegeven door

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}.$$

- i) Bepaal \underline{v} als:

$$\underline{\omega} = e_x + e_y, \quad \underline{r} = 2e_x + 4e_z.$$

- ii) Bewijs dat alle punten op de lijn $\underline{r} + \alpha \underline{\omega}$ (α willekeurig) dezelfde \underline{v} hebben.

Als gegeven is dat P beweegt in een vlak door het eindpunt van \underline{r} en loodrecht op $\underline{\omega}$, geef dan

- iii) de afstand van de oorsprong 0 tot dit vlak;
iv) een parametervoorstelling van dit vlak.

20. De centripetale versnelling van een punt P is gegeven door

$$\underline{a}_c = (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})) .$$

i) Bewijs dat

$$\underline{a}_c = -\omega^2 \underline{d}, \quad (\omega = |\underline{\omega}|)$$

waarin

$$\underline{d} = \underline{r} - \frac{(\underline{\omega}, \underline{r})}{(\underline{\omega}, \underline{\omega})} \underline{\omega} .$$

(Hint: gebruik opgave 7.)

ii) Bewijs dat $|\underline{d}|$ de afstand van P tot de werklijn van $\underline{\omega}$ is. Geef een meetkundige interpretatie van de vector \underline{d} .

iii) Bewijs dat alle punten op de lijn $\underline{r} + \alpha \underline{\omega}$ dezelfde \underline{a}_c hebben.

iv) Bereken \underline{a}_c voor $\underline{\omega}$ en \underline{r} volgens 19.

21. Zij $\underline{F}^{(1)}, \underline{F}^{(2)}, \dots, \underline{F}^{(n)}$ een stelsel krachten (= vectoren). De resultante \underline{R} is gedefinieerd als de som van de krachten.

i) Stel

$$\underline{F}^{(1)} = 2\underline{e}_x + 3\underline{e}_y - 2\underline{e}_z; \underline{F}^{(2)} = 4\underline{e}_x - \underline{e}_y + 5\underline{e}_z; \underline{F}^{(3)} = -\underline{e}_x - 7\underline{e}_y - 3\underline{e}_z .$$

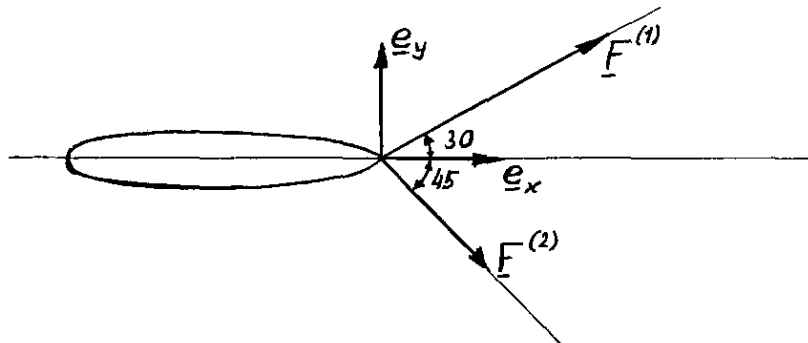
Bepaal de componenten van \underline{R} , de grootte van \underline{R} en de richting van \underline{R} t.o.v. Oxyz-stelsel.

ii) Van een stelsel van 4 krachten $\underline{F}^{(1)}, \dots, \underline{F}^{(4)}$ zijn $\underline{F}^{(1)}, \underline{F}^{(2)}$ en $\underline{F}^{(3)}$ gegeven door

$$\underline{F}^{(1)} = 6\underline{e}_x - 3\underline{e}_y, \underline{F}^{(2)} = 2\underline{e}_x + 2\underline{e}_y - 2\underline{e}_z, \underline{F}^{(3)} = 4\underline{e}_y + 7\underline{e}_z .$$

Bepaal $\underline{F}^{(4)}$, opdat de resultante van het stelsel nul is.

22.



Een boot wordt voortgetrokken door twee koorden, waarin de krachten $\underline{F}^{(1)}$ en $\underline{F}^{(2)}$ werken volgens bovenstaande figuur.

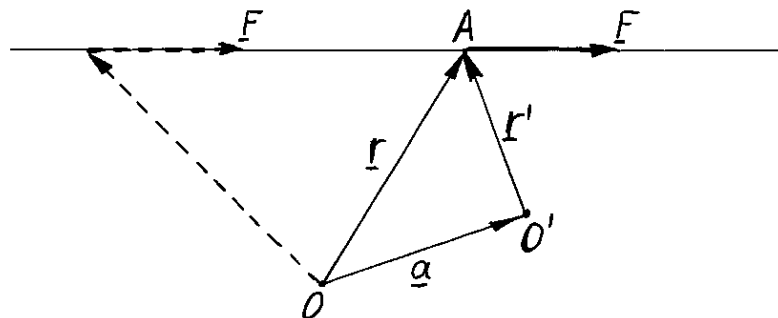
- i) Stel $|\underline{F}^{(1)}| = 4$ en $|\underline{F}^{(2)}| = \sqrt{2}$.

Bepaal de resultante \underline{R} , de grootte van \underline{R} en de hoek die \underline{R} maakt met de lengte-as van de boot ($= \underline{e}_x$).

- ii) Stel $|\underline{F}^{(1)}| = 4$.

Bepaal $|\underline{F}^{(2)}|$, opdat \underline{R} langs de lengte-as van de boot valt.

23.



Het moment van een kracht \underline{F} t.o.v. een punt O : \underline{I}_O is een vector gedefinieerd door

$$\underline{I}_O = \underline{r} \times \underline{F} ,$$

waarin \underline{r} de positievector van het aangrijpingspunt A van \underline{F} t.o.v. O is.

- i) Bewijs dat het moment niet verandert als \underline{F} langs zijn werklijn verschuift.

- ii) Bewijs de volgende relatie voor het moment t.o.v. het punt O' op afstand \underline{a} van O :

$$\underline{I}_{O'} = \underline{I}_O - \underline{a} \times \underline{F} .$$

Toon hiermee aan dat het moment niet verandert als O evenwijdig aan \underline{F} verschuift.

Beschouw een stelsel krachten $\underline{F}^{(1)}, \underline{F}^{(2)}, \dots, \underline{F}^{(n)}$ met aangrijppunten t.o.v. O : $\underline{r}^{(1)}, \underline{r}^{(2)}, \dots, \underline{r}^{(n)}$ resp. Het resulterende moment t.o.v. O : \underline{M}_O is gedefinieerd door:

$$\underline{M}_O = \sum_{i=1}^n \underline{r}^{(i)} \times \underline{F}^{(i)} .$$

- iii) Gegeven

$$\begin{aligned} \underline{F}^{(1)} &= \underline{e}_x + 2\underline{e}_y, & \underline{r}^{(1)} &= 3\underline{e}_y - 2\underline{e}_z, \\ \underline{F}^{(2)} &= 2\underline{e}_x - 2\underline{e}_z, & \underline{r}^{(2)} &= 4\underline{e}_y. \end{aligned}$$

Bepaal de resultante \underline{R} en het resulterende moment \underline{M}_O .

24. We zeggen dat een krachtenstelsel in evenwicht is als

$$\underline{R} = \underline{0} \text{ èn } \underline{M}_0 = \underline{0} .$$

i) Bewijs dat als $\underline{R} = \underline{0}$ èn $\underline{M}_0 = \underline{0}$, dat dan ook

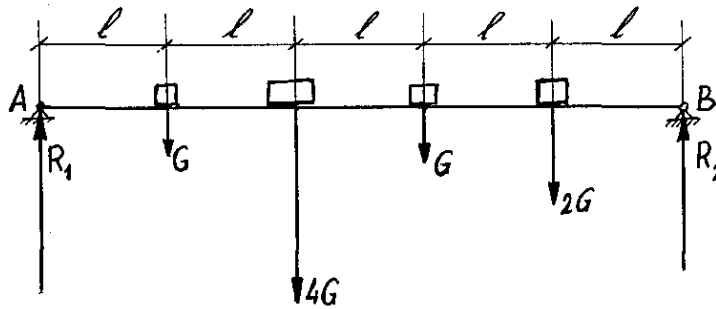
$$\underline{M}_0' = \underline{0}, \quad \forall_0' .$$

ii) Beschouw

$$\begin{aligned} \underline{F}^{(1)} &= X_1 \underline{e}_{-x} + X_2 \underline{e}_{-y} + X_3 \underline{e}_{-z}; & \underline{r}^{(1)} &= \underline{0} , \\ \underline{F}^{(2)} &= 2 \underline{e}_{-x} - 3 \underline{e}_{-y} + 6 \underline{e}_{-z}; & \underline{r}^{(2)} &= \underline{e}_{-x} , \\ \underline{F}^{(3)} &= X_4 \underline{e}_{-x} + 4 \underline{e}_{-y} - 3 \underline{e}_{-z}; & \underline{r}^{(3)} &= \underline{e}_{-y} , \\ \underline{F}^{(4)} &= X_5 \underline{e}_{-x} + X_6 \underline{e}_{-y} + 2 \underline{e}_{-z}; & \underline{r}^{(4)} &= \underline{e}_{-z} . \end{aligned}$$

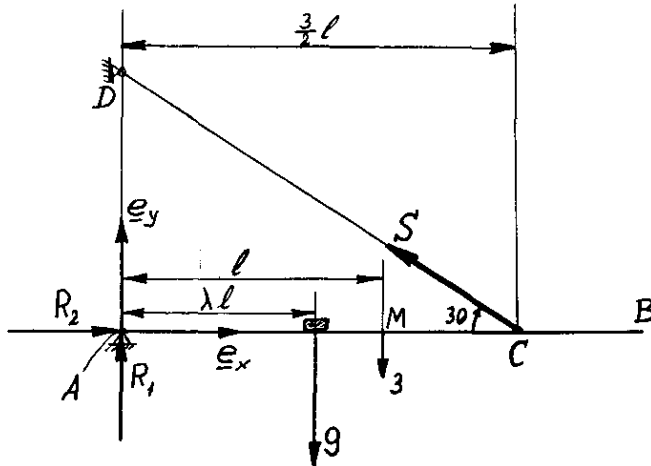
Bepaal X_1 t/m X_6 opdat dit stelsel in evenwicht is.

25.



Op een, massalozе, balk AB liggen vier gewichten volgens bovenstaande figuur. Bepaal de oplegkrachten in A en B, R_1 resp. R_2 , uit de eis dat de staaf AB in evenwicht moet zijn.

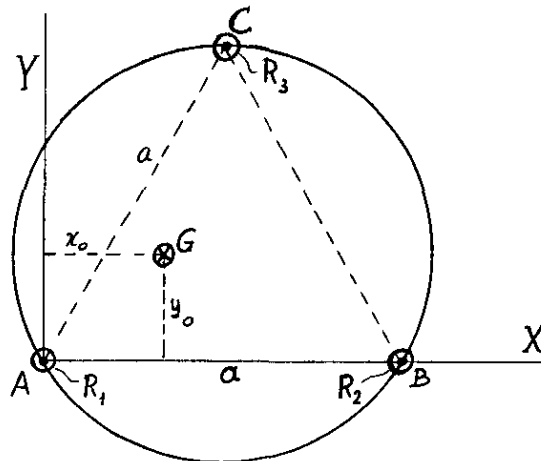
26.



Een balk AB, lengte $2l$, is in A scharnierend ondersteund en in C, $AC = 3/2l$, via een koord verbonden met een vast punt D. De hoek ACD is 30° . Op AB, op een afstand λl ($0 \leq \lambda \leq 2$) ligt een blok met een gewicht van 9 N. Het gewicht van de balk zelf is 3 N en grijpt aan in het midden van de balk.

- i) Geef, in componenten t.o.v. het in de figuur getekende $AXYZ$ -stelsel, de vectorvoorstelling van alle op AB werkende krachten (volgens figuur) met hun aangrijpingspunten.
- ii) Bepaal van elke kracht het moment om A.
- iii) Bepaal de scharnierkrachten in A, R_1 en R_2 , en de spankracht S in het koord CD uit de eis dat AB in evenwicht moet zijn.
- iv) Kan R_1 kleiner dan nul worden (voor $\lambda \in [0,2]$)?

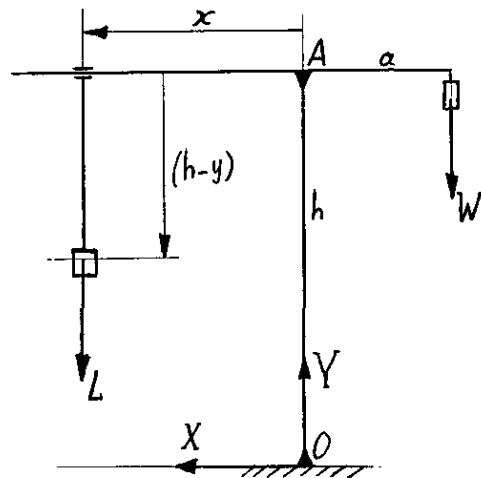
27.



Een ronde tafel (in bovenstaande figuur in bovenaanzicht getekend) wordt ondersteund door drie poten A, B en C, welke tezamen een gelijkzijdige driehoek met zijde a vormen. Op de tafel ligt een blok met een gewicht G en met positie $x_0 e_x + y_0 e_y$ t.o.v. het in de figuur getekende $AXYZ$ -stelsel. Het blok ligt binnen de driehoek ABC. De krachten in de poten A, B en C geven we aan met R_1 , R_2 en R_3 resp.

- i) Geef de vectorvoorstelling van de vier op de tafel werkende krachten tezamen met hun aangrijpingspunten.
- ii) Bepaal van elke kracht het moment om A.
- iii) Bereken, uit de conditie dat de tafel in evenwicht moet zijn, de ondersteuningskrachten R_1 , R_2 en R_3 als functie van x_0 en y_0 .
- iv) Bewijs dat als G binnen ABC ligt dat R_1 , R_2 en R_3 positief zijn.
- v) Bepaal de waarde(n) van (x_0, y_0) waarvoor het maximum (R_1, R_2, R_3) zo klein mogelijk is.

28. Nevenstaande figuur stelt schematisch een hijskraan voor. De hoogte van de kraan is h . Een contragewicht W hangt op een afstand a van de verticale as OA van de kraan. De arm van de kraan draagt op een afstand r van A een last met een gewicht L . De last hangt een afstand $(h - y)$ onder de arm (x en y zijn instelbaar.)

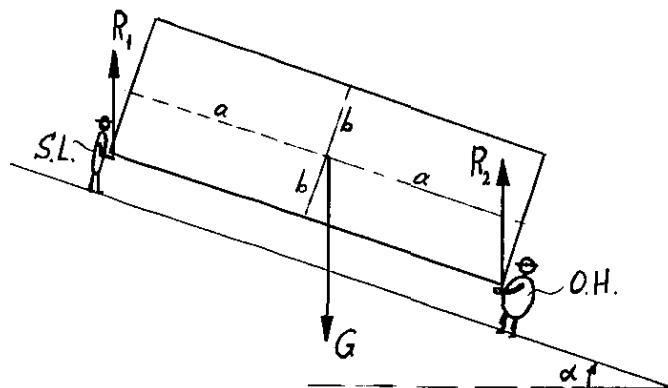


- i) Bepaal het totale moment om 0 van L en W samen (τ_0).
- ii) Is de waarde van τ_0 afhankelijk van x ? En van y ?
- iii) Stel: τ_0 ($\equiv |\tau_0|$) moet kleiner blijven dan een kritische waarde $\tau_{cr} = aW$. Bepaal dan de maximale last L_{max} die de kraan kan dragen op

$$x = a, x = 2a, x = 3a \text{ en } x = 4a .$$

(Het gewicht van de kraan-armen mag worden verwaarloosd.)

29.



De twee vrienden door dik en dun: O.H. en S.L. moeten een piano langs een steil oplopende trap naar boven dragen. De vooroplopende S.L. draagt met een verticale kracht R_1 en de achterste (O.H.) met een verticale kracht R_2 .

Neem voor de hellingshoek $\alpha = 30^\circ$, voor de afmetingen van de piano (zie figuur) $a = 1\text{m}$, $b = 0,5\text{m}$ en voor het gewicht van de piano $G = 150\text{ kg}$.

Neem verder aan dat de snelheid waarmee O.H. en S.L. de piano sjouwen zo klein is dat gesteld mag worden dat de piano voortdurend in evenwicht is. Vergelijk de inspanningen, gemeten naar de krachten R_1 van S.L. en R_2 van O.H., van beide vrienden.

Antwoorden (H.1.)

4. i) $|\underline{s}| = 5$, \underline{s} in x-z-vlak,
 θ : hoek met positieve x-as: $\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.
ii) $|\underline{v}| = 10$, \underline{v} in y-z-vlak,
 θ : hoek met positieve y-as: $\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.
iii) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 130,5^\circ$.
5. $\underline{s} = 6\underline{e}_x + 6\underline{e}_y$, en ligt in XY-vlak en maakt hoek van 45° met positieve X- en Y-as.
 $(\underline{v}_1, (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3)) = ((\underline{v}_1 \times \underline{v}_2), \underline{v}_3) = ((\underline{v}_3 \times \underline{v}_1), \underline{v}_2) = 270$.
8. i) $b = -5$, ii) Ja.
9. i) $\underline{x} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$, met $3x + 2y - z = 14$.
10. $PQ = 5\sqrt{3}$.
 ℓ door P en Q; $\ell: \underline{x} = (4, 5, 7) + \alpha(7, -1, -5)$.
11. Afstand tot lijn 18;
afstand tot vlak 7.
12. $\underline{p} = (1, 0, 1) + \underline{q} \times (1, 2, -1)$, $(\underline{v}_{\underline{q}})$; $\lambda = 5$.
18. i) $\underline{r}_A = (6, 2, 3)$.
ii) $\underline{r}_B = (0, 4, 0)$; $AB = 7$.
iii) $\underline{v} = (-3, 1, -1, 5)$.
19. i) $\underline{v} = (4, -4, -2)$; iii) $a = \sqrt{2}$;
iv) $\mathcal{V}: \underline{x} = (1, 1, 0) + \alpha_1(1, -1, 4) + \alpha_2(2, -2, -1)$.

20. iv) $\underline{a}_c = (-2, 2, -8)$.

21. i) $\underline{R} = (5, -5, 0)$, $|\underline{R}| = 5\sqrt{2}$, \underline{R} in x-y-vlak en maakt hoeken van 45° met positieve x-as en negatieve y-as.

ii) $\underline{F}^{(4)} = (-8, -3, -5)$.

22. i) $\underline{R} = (1 + 2\sqrt{3})\underline{e}_x + \underline{e}_y$; $|\underline{R}| = 4,57$;
hoek = $\arctan\left(\frac{1}{1 + 2\sqrt{3}}\right) \approx 13^\circ$.

ii) $|\underline{F}^{(2)}| = 2\sqrt{2}$.

23. iii) $\underline{R} = (3, 2, -2)$; $\underline{M}_0 = (-4, -2, -11)$.

24. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$, $x_4 = -3$, $x_5 = 6$, $x_6 = -3$.

25. $R_1 = 4G$; $R_2 = 4G$.

26. iii) $R_1 = 10 - 6\lambda$; $R_2 = 2(1 + 3\lambda)\sqrt{3}$; $S = 4(1 + 3\lambda)$.

iv) Ja, voor $\lambda \in \left(\frac{5}{3}, 2\right]$.

27. iii) $R_1 = (a - x_0 - \frac{1}{3}y_0\sqrt{3})\frac{G}{a}$; $R_2 = (x_0 - \frac{1}{3}y_0\sqrt{3})\frac{G}{a}$; $R_3 = \frac{2}{3}y_0\sqrt{3}\frac{G}{a}$.

v) $x_0 = \frac{1}{2}a$, $y_0 = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$, $(R_1 = R_2 = R_3 = \frac{G}{3})$.

28. i) $\underline{r}_0 = (aW - xL)\underline{e}_z$; iii) $L_{\max} = 2W$; W ; $\frac{2}{3}W$; $\frac{1}{2}W$.

29. $R_1 = 53,4 \text{ kg}$; $R_2 = 96,6 \text{ kg}$.

2. Kinematica

Theorievragen

1. Een punt P beweegt langs een rechte.

a) Bepaal de snelheid en de positie van P als functie van de tijd als P in rust is op $t = 0$ en de versnelling a van P gegeven is door: (c en ω : constant)

i) $a = 0$, ii) $a = c$, iii) $a = ct$, iv) $a = c \cos \omega t$.

Beschrijf de beweging.

b) Bepaal de snelheid en de versnelling van P als de positie $x(t)$ gegeven is door:

i) $x(t) = c$, ii) $x(t) = ct$, iii) $x(t) = ct^2$, iv) $x(t) = c \cos \omega t$.

Beschrijf de beweging.

c) P heeft beginsnelheid v_0 en een constante versnelling a . Bewijs dat

$$v^2 = v_0^2 + 2ax ,$$

waarin v de snelheid van P is en x de door P afgelegde weg.

d) Beschouw de grafiek van de snelheid van P tegen de tijd (snelheids-tijd-diagram). Bewijs dat bij een rechtlijnige beweging met $v \geq 0$ het oppervlak onder de grafiek gelijk is aan de door P afgelegde weg.

2. Een punt P beweegt langs een cirkel met straal R en middelpunt M . Noem de hoek tussen een vaste middellijn en de lijn MP : θ .

a) Bepaal de radiale versnelling van P, de radiale en tangentiële snelheid van P en de hoek $\theta(t)$ als P op $t = 0$ een snelheid v_0 heeft en de tangentiële versnelling a_θ van P gegeven is door (neem $\theta(0) = 0$)

i) $a_\theta = 0$, ii) $a_\theta = c$, iii) $a_\theta = ct$, iv) $a_\theta = c \cos \omega t$.

b) Bepaal de radiale en tangentiële snelheid en versnelling van P als

i) $\theta(t) = c$, ii) $\theta(t) = ct$, iii) $\theta(t) = ct^2$, iv) $\theta(t) = c \cos \omega t$.

c) Is de snelheid van P, indien P met constante "hoeksnelheid" (d.w.z. $\dot{\theta}$) langs de cirkel beweegt, constant?

3. Bewijs de relaties:

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta, \quad \dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r .$$

4. Leidt af de relaties:

$$v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta},$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

5. Hoeveel graden van vrijheid heeft een punt dat:

- i) vrij beweegt in \mathbb{R}^3 ,
- ii) beweegt in een vlak,
- iii) beweegt langs een rechte,
- iv) over het oppervlak van een bol beweegt,
- v) beweegt langs een cirkel,
- vi) slingert in \mathbb{R}^3 (konische slinger),
- vii) slingert in een verticaal vlak,
- viii) met voorgeschreven snelheid langs een kromme beweegt,
- ix) beweegt langs een cirkel die vrij kan draaien om een middellijn,
- x) beweegt langs een cirkel die met voorgeschreven hoeksnelheid roteert om een middellijn.

6. Een trein kan een maximale snelheid bereiken van 144 km/uur en heeft een maximale versnelling van $0,25 \text{ m/sec}^2$ en een maximale afremming van $0,50 \text{ m/sec}^2$. Bepaal de kortste tijd die de trein nodig heeft om van een station naar een 30 km verder gelegen station te rijden, indien de trein op beide stations stopt. Teken het snelheids-tijd-diagram.

7. Een punt beweegt met een constante versnelling van 4 m/sec^2 . De aanvangssnelheid van het punt was 3 m/sec , in dezelfde richting als de versnelling. Wat is de snelheid van het punt na 7 sec en hoe groot is de door het punt afgelegde weg in die tijd?

Beantwoord dezelfde vragen als de versnelling de tegengestelde richting van de beginsnelheid heeft. Schrijf voor beide bewegingen de afgelegde weg als functie van de tijd.

8. Een auto start vanuit rust en beweegt gedurende 1 sec met een versnelling van 1 m/sec^2 . De motor wordt daarna ontkoppeld en tengevolge van wrijving vermindert de snelheid gedurende 10 sec met een vertraging van $0,05 \text{ m/sec}^2$. Daarna wordt gedurende 5 sec geremd en de auto komt tot stilstand.

Bereken de afgelegde weg gedurende de beweging. Maak een grafiek van de afgelegde weg x , de snelheid v en de versnelling a als functie van de tijd t .

9. Twee auto's, A en B, rijden in dezelfde richting met snelheden v_A resp. v_B . Als auto A zich op een afstand d achter B bevindt, begint B te remmen, waarbij een constante vertraging a optreedt. De reactietijd van de chauffeur van A (dit is de tijd die de chauffeur nodig heeft om de remmen in werking te stellen, nadat hij de remlichten van B heeft waargenomen) bedraagt τ sec. De remvertraging van A is eveneens a .

Bewijs dat er geen botsing plaatsvindt indien

$$d > \frac{v_A^2 - v_B^2}{2a} + v_A \tau .$$

10. Een auto trekt op tot 90 km/uur volgens de volgende tabel:

1^e versnelling: 0-15 km/uur in 2 sec,

2^e versnelling: 15-30 km/uur in 3 sec,

3^e versnelling: 30-45 km/uur in 4 sec,

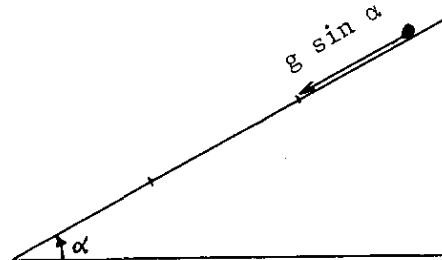
4^e versnelling: 45-90 km/uur in 15 sec.

Aangenomen mag worden dat in elke stand de versnelling constant is.

Teken het snelheids-tijd-diagram. Bepaal de door de auto afgelegde weg tot het bereiken van de snelheid van 90 km/uur.

11. Van GALILEO (1564-1642) is het volgende experiment bekend. Galileo liet een knikker langs een hellend vlak naar beneden rollen en hij tekende op dit hellend vlak een stel horizontale strepen, welke op een zodanige afstand van elkaar stonden, dat alle trajecten tussen twee strepen in gelijke tijdsintervallen werden afgelegd.

Indien wij U geven dat de versnelling van een punt langs een hellend vlak gelijk is aan $g \sin \alpha$ (α is de hellingshoek), bepaal dan de verdeling van de strepen opdat aan bovenstaande voorwaarde voldaan is.

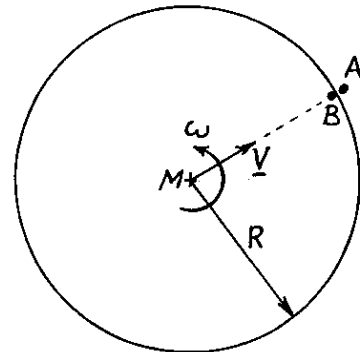


12. Veronderstel dat de aarde in een cirkelvormige baan om de zon beweegt, waarbij de grootte van de snelheid van de aarde constant is. De straal van de cirkel is $1,49 \cdot 10^{11}$ m en voor de omlooptijd mag $3,16 \cdot 10^7$ sec. genomen worden.

Bereken de grootte van de snelheid en van de centripetale versnelling van de aarde tijdens haar beweging om de zon.

13. Veronderstel dat de zon in een cirkelvormige baan in de melkweg beweegt, waarbij de grootte van de snelheid van de zon constant is. De straal van de cirkel is $2,4 \cdot 10^{20}$ m en de omlooptijd is $6,3 \cdot 10^{15}$ sec. Bereken de grootte van de snelheid en van de centripetale versnelling van de zon tijdens haar beweging in de melkweg.
14. Een electron beweegt onder invloed van een magnetisch veld langs een cirkel met een snelheid die constant van grootte is. De straal van de cirkel is 3 m en de snelheid van het electron bedraagt $4 \cdot 10^5$ m/sec. Bereken de centripetale versnelling van het electron.
15. Een punt beweegt in een cirkelvormige baan, straal van de cirkel 2 m. De hoek die de voerstraal maakt met een zekere vaste halfrechte vanuit het middelpunt noemen we φ .
Gegeven is: $\varphi = 2t^2 + 6t$, waarin t de tijd.
Bereken de tangentiale en de radiale snelheid en versnelling van het punt als functie van de tijd.

16. Een jongetje staat in het middelpunt M van een met constante hoeksnelheid ω roterende schijf met straal R . Op zeker tijdstip t_0 ziet het jongetje in een punt A buiten de schijf zijn moeder staan. Het jongetje begint met constante snelheid V te lopen langs een vaste straal MB van de cirkel (op $t = t_0$ is \underline{V} naar A gericht).



- Bepaal de radiale en tangentiale snelheid en versnelling van het jongetje, als functies van V , ω en t . Hoe groot moet V zijn opdat het jongetje als hij de rand van de schijf bereikt heeft, precies bij A is aangekomen?
17. Een punt P beweegt langs een vlakke spiraal, welke in poolcoördinaten wordt voorgesteld door: $r(\theta) = Re^{-\theta}$. Gegeven is: $\theta = \omega t$ (ω : constant). Bereken v_r , v_θ , a_r en a_θ van P .
18. Een punt P beweegt langs een cirkel waarvan de straal in de loop van de tijd verandert volgens $r = r_0 + Vt$ (r_0 en V : constant), waarbij $\dot{\theta} = \omega$ is constant. Bereken de radiale en tangentiale snelheid en versnelling van P .

19. Een massapunt beweegt aanvankelijk aan het einde van een touwtje in een vlak langs een cirkel, waarbij de grootte van de snelheid constant is. Op $t = 0$ is $r = r_0$ en $\dot{\theta} = \omega$. Daarna wordt het touwtje ingetrokken, zodanig dat de lengte van het touwtje verandert volgens: $r = r_0 - Vt$. Bij de nu volgende beweging mag worden aangenomen dat het product van de straal r en de tangentiële snelheid van het massapunt constant blijft.

Formuleer bovenstaande eis in termen van r , $\dot{\theta}$, r_0 en ω .

Bepaal de radiale en tangentiële snelheid en versnelling van het punt als functies van r_0 , ω , V en t .

20. In een plat vlak waarin Oxy een rechthoekig assenstelsel is, zijn de coördinaten van een punt P gegeven door:

$$x(t) = a \sin \omega t ,$$

$$y(t) = b \cos \omega t ,$$

waarin a , b en ω positieve constanten zijn.

Bepaal:

- i) een coördinaatvoorstelling van de baan;
- ii) de componenten en de grootte van de snelheid van P ;
- iii) de componenten van de versnelling van P ;
- iv) wat voor soort kromme P doorloopt.

21. Een auto rijdt met een snelheid van 24 m/sec in noordelijke richting. Een 5 seconden durende windvlaag geeft de auto een versnelling van 1 m/sec^2 in oostelijke richting.

Bereken:

- i) de grootte en de richting van de uiteindelijke snelheid van de auto;
- ii) de baan door de auto beschreven tijdens de windvlaag.

22. Een auto beschrijft een vlakke baan. De coördinaten van de auto ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel worden voorgesteld door de volgende betrekkingen:

$$x = 2t^3 - 3t^2$$

$$y = t^2 - 2t + 1 .$$

De coördinaten x en y worden gemeten in meters en de tijd t in seconden.

Bereken:

- i) de positie van de auto op het tijdstip $t = 1$ sec;
- ii) de componenten en de grootte van de snelheid van de auto;
- iii) het tijdstip waarop de snelheid van de auto nul is;
- iv) de componenten van de versnelling van de auto;
- v) het tijdstip waarop de versnelling van de auto evenwijdig is aan de y -as.

23. Een massapunt beweegt langs de parabool $y = x^2$. De snelheid in x -richting, voorgesteld door v_x , is constant en bedraagt 4,5 m/sec.

Bereken de grootte en de richting van de snelheid en de versnelling op het moment dat $x = 1$ m.

24. De coördinaten van een bewegend punt ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel zijn:

$$x = at$$

$$y = b \sin at .$$

Teken een grafiek van de baan (in het xy -vlak).

Bewijs dat de grootte van de versnelling evenredig is met de afstand van het punt tot de x -as.

Antwoorden (H.2.)

1. a) i) $v(t) = x(t) = 0$.
- ii) $v(t) = ct, x(t) = \frac{1}{2} ct^2$.
- iii) $v(t) = \frac{1}{2} ct^2, x(t) = \frac{1}{6} ct^3$.
- iv) $v(t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t, x(t) = \frac{c}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$.
- b) i) $v(t) = a(t) = 0$.
- ii) $v(t) = c, a(t) = 0$.
- iii) $v(t) = 2ct, a(t) = 2c$.
- iv) $v(t) = -\omega c \sin \omega t, a(t) = -\omega^2 c \cos \omega t$.

2. a) i) $a_r = -v_0^2/R$, $v_r = 0$, $v_\theta = v_0$, $\theta = \frac{v_0}{R} t$.
 ii) $a_r = -\frac{1}{R}(ct + v_0)^2$, $v_r = 0$, $v_\theta = ct + v_0$, $\theta = \frac{1}{R}(\frac{1}{2} ct^2 + v_0 t)$.
 iii) $a_r = -\frac{1}{R}(\frac{1}{2} ct^2 + v_0)^2$, $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{1}{2} ct^2 + v_0$, $\theta = \frac{1}{R}(\frac{1}{6} ct^3 + v_0 t)$.
 iv) $a_r = -\frac{1}{R}(\frac{c}{\omega} \sin \omega t + v_0)^2$, $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{c}{\omega} \sin \omega t + v_0$,
 $\theta = \frac{1}{R}(-\frac{c}{\omega^2} \cos \omega t + v_0 t + \frac{c}{\omega^2})$.
- b) i) $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $a_r = 0$, $a_\theta = 0$.
 ii) $v_r = 0$, $v_\theta = cR$, $a_r = -c^2 R$, $a_\theta = 0$.
 iii) $v_r = 0$, $v_\theta = 2cRt$, $a_r = -4c^2 R t^2$, $a_\theta = 2cR$.
 iv) $v_r = 0$, $v_\theta = -cR\omega \sin \omega t$, $a_r = -c^2 \omega^2 R \sin^2 \omega t$, $a_\theta = -cR\omega^2 \cos \omega t$.

5. i) 3; ii) 2; iii) 1; iv) 2; v) 1; vi) 2; vii) 1; viii) 0;
 ix) 2; x) 1.

6. 870 sec.

7. 31 m/sec; 119 m.
 25 m/sec; 77 m.

8. 9,25 m.

10. 346 m.

11. Verhouding tussen eerste en n-de interval is $(2n-1)$

12. $10,66 \times 10^4$ km/uur; $5,89 \times 10^{-3}$ m/sec².

13. $2,4 \times 10^5$ m/sec; $2,4 \times 10^{-10}$ m/sec².

14. $5,33 \times 10^{10}$ m/sec².

15. $v_\theta = 8t + 12$ (m/sec); $v_r = 0$; $a_\theta = 8$ m/sec²,
 $a_r = 32t^2 + 96t + 72$ (m/sec²).

16. $v_r = V$, $v_\theta = \omega V t$, $a_r = -\omega^2 V t$, $a_\theta = 2\omega V$.
 $V = \frac{\omega R}{2\pi}$.

17. $v_r = -\omega R e^{-\omega t}$, $v_\theta = \omega R e^{-\omega t}$, $a_r = 0$, $a_\theta = -2\omega^2 R e^{-\omega t}$.

18. $v_r = V$, $v_\theta = \omega(r_0 + Vt)$, $a_r = \omega^2(r_0 + Vt)$, $a_\theta = 2\omega V$.

19. $r^2 \dot{\theta} = \text{constant} = r_0^2 \omega$.

$$v_r = -V, v_\theta = \frac{\omega r_0^2}{(r_0 - Vt)}, a_r = -\frac{\omega^2 r_0^4}{(r_0 - Vt)^3}, a_\theta = 0.$$

20. i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

ii) $v_x = a\omega \cos \omega t$, $v_y = -b\omega \sin \omega t$.

$$v = \omega p, p = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}.$$

iii) $a_x = -a\omega^2 \sin \omega t$, $a_y = -b\omega^2 \cos \omega t$.

iv) Ellips.

21. i) $\underline{v} = 24\underline{e}_x + 5\underline{e}_y$.

ii) Baan (coördinaatvoorstelling): $y = \frac{a}{2v_0^2} x^2$.

22. i) $\underline{r}(1) = -\underline{e}_x$ (m).

ii) $v_x = 6t(t-1)$, $v_y = 2(t-1)$, $v = 2(t-1)\sqrt{9t^2+1}$ (m/sec).

iii) $t = 1$ (sec).

iv) $a_x = 12t - 6$, $a_y = 2$ (m/sec²).

v) $t = 0,5$ (sec).

23. i) $\underline{v} = 4,5\underline{e}_x + 9\underline{e}_y$ (m/sec).

ii) $\underline{a} = 40,5\underline{e}_x$ (m/sec).

3. Relatieve beweging

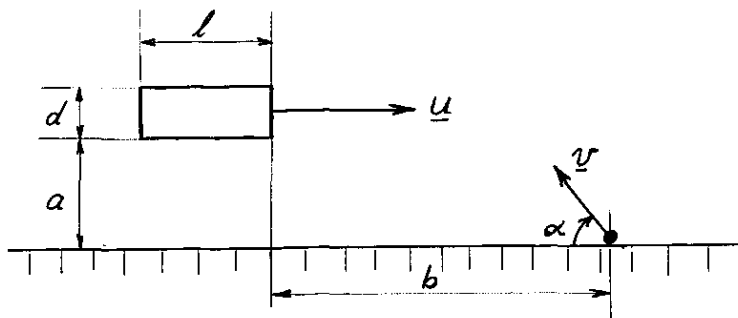
Theorievragen

1. Een eenheidsvector \underline{e} roteert met constante hoeksnelheid $\underline{\omega}$ om een vaste as.
Bewijs dat:

$$\dot{\underline{e}} = \underline{\omega} \times \underline{e} .$$

2. Beschouw de beweging van een punt P t.o.v. twee waarnemers 0 en 0', waarvan de laatste transleert en roteert (met constante hoeksnelheid) t.o.v. de eerste. Toon aan, uitgaande van de algemene relaties voor de snelheden en versnellingen van P t.o.v. 0 en 0', dat:
- i) de sleepsnelheid de snelheid van P t.o.v. 0 is als P niet beweegt t.o.v. 0';
 - ii) de relatieve snelheid de snelheid van P t.o.v. 0 is als 0' niet beweegt t.o.v. 0;
 - iii) de sleepversnelling de versnelling van P t.o.v. 0 is als P niet beweegt t.o.v. 0';
 - iv) de relatieve versnelling de versnelling van P t.o.v. 0 is als 0' niet beweegt t.o.v. 0;
 - v) de versnelling van P t.o.v. 0 een term bevat die zowel voor iii) als voor iv) nul is; hoe heet deze term?
3. Wat kunt U in het algemeen zeggen van de richting van de centripetale en de coriolisversnelling? Geef een aantal gevallen waarin deze versnellingen nul zijn.

4.



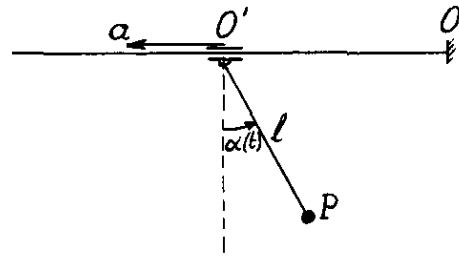
Een auto, breedte d en lengte l , rijdt met constante snelheid \underline{u} door een rechte straat op een afstand a van de straatkant (zie figuur). Een voetganger begint met een constante snelheid \underline{v} onder een hoek α en op een afstand b voor de auto de straat over te steken.

Bewijs, door de relatieve beweging van de voetganger t.o.v. de auto te bekijken, dat de voetganger door de auto zal worden geraakt als:

$$\frac{b \sin \alpha - (a + d) \cos \alpha}{(a + d)} \leq \frac{u}{v} \leq \frac{(b + l) \sin \alpha - a \cos \alpha}{a}$$

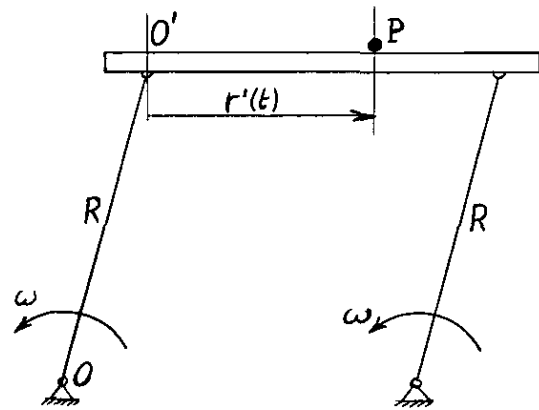
5. Twee treinen A en B rijden resp. 70 en 90 km per uur. De rails maken een hoek van 60° met elkaar.
Bepaal de relatieve snelheid van B t.o.v. A. Hangt deze relatieve snelheid van de plaats van de treinen af?
6. Twee plaatsen A en B liggen op afstand van 1 km aan een rechte rivier. Iemand gaat van A naar B en terug naar A in een roeiboot die zich met een snelheid van 4 km/uur t.o.v. de rivier voortbeweegt. Iemand anders loopt langs de oever deze route met een snelheid van 4 km/uur. Als de stroomsnelheid 2 km/uur bedraagt hoe lang doen beide mensen dan over deze tocht?
7. Een man die met 80 km/uur door een regenbui rijdt ziet op de zijramen dat de sporen van de druppels een hoek van 80° met de verticaal maken. Als hij stopt, constateert hij dat de regen in werkelijkheid verticaal valt.
Bereken de relatieve snelheid van de regen t.o.v. de auto
 - i) als deze stilstaat,
 - ii) als hij rijdt met voornoemde snelheid.
8. Een rivier stroomt noordwaarts met een snelheid van 3 km/uur. Een boot vaart t.o.v. het water loodrecht op de stroomrichting met een relatieve snelheid t.o.v. het water van 4 km/uur.
 - i) Bereken de snelheid van de boot t.o.v. de aarde.
 - ii) Hoe lang doet de boot er over om de rivier, die 1 km breed is, over te steken?
 - iii) Hoever is de boot bij deze oversteek afgedreven?
9. Een man fietst met 12 km/uur in oostelijke richting en voelt daarbij de wind uit het noorden. Als hij zijn snelheid verdubbelt voelt hij een wind uit het noordoosten.
Bepaal de werkelijke snelheid van de wind.

10. Het ophangpunt O' van een slinger, bestaande uit een punt P aan een staaf ter lengte l , beweegt met constante versnelling a t.o.v. O langs een horizontale rechte. De hoek die $O'P$ met de verticaal maakt is $\alpha(t)$ (= gegeven).



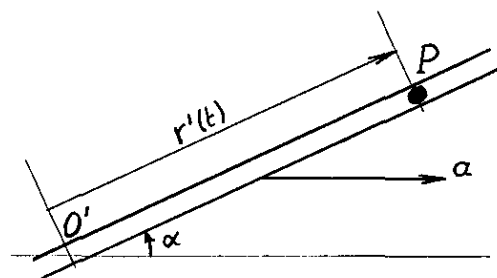
Bepaal, voor een met O' meetranslerend stelsel, de relatieve en sleep-snelheid en relatieve en sleepversnelling van P .

11. De hier naast getekende tafel transleert zodanig dat elk punt van de tafel een cirkel met straal R doorloopt. De hoeksnelheid van de stangen (bijv. OO') is constant en gelijk aan ω . Over de tafel beweegt zich rechtlijnig een punt P , waarvan de afstand tot een punt van de tafel O' wordt aangegeven door $r'(t)$.



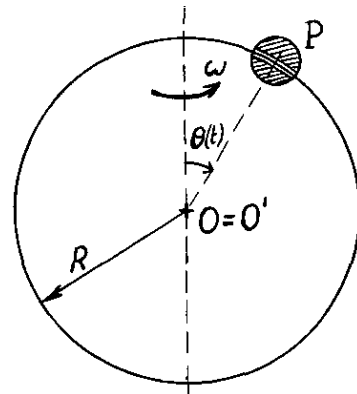
Bepaal, voor een waarnemer O' welke met de tafel meetransleert, de relatieve en sleep-snelheid en relatieve en sleepversnelling van P .

12. Een buisje, dat een hoek α met de horizontaal maakt, transleert met een constante horizontale versnelling a . In de buis beweegt een punt P . De positie van P t.o.v. een punt O' van de buis wordt aangegeven door $r'(t)$.



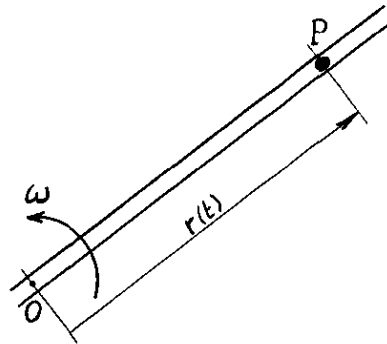
Bepaal, voor een met O' meetranslerend stelsel, de relatieve en sleep-snelheid en de relatieve en sleepversnelling.

13. Een punt P beweegt langs een cirkel, welke met constante hoeksnelheid ω om een middellijn roteert. De positie van P t.o.v. de draaiingsas wordt aangegeven met $\theta(t)$. Voer in een met de cirkel meeroterend stelsel, met oorsprong in middelpunt van de cirkel.



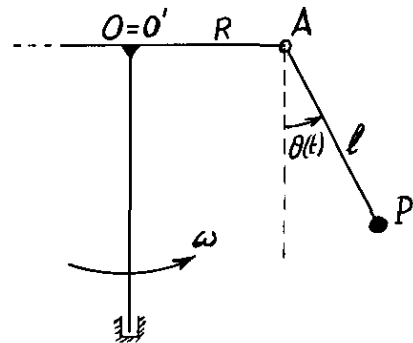
- i) Bepaal de relatieve en sleep-snelheid en de relatieve, sleep- en coriolis versnelling.
- ii) Laat zien dat als θ is constant de relatieve snelheid en versnelling en de coriolisversnelling nul zijn.
- iii) Laat zien dat als $\omega = 0$, de sleep-snelheid en -versnelling en de coriolisversnelling nul zijn.
- iv) Hoe groot is de centripetale versnelling t.g.v. ω en hoe is die gericht?

14. Een buis roteert met constante hoeksnelheid ω om een vaste as door O loodrecht op de buis. In de buis beweegt een punt P . De positie van P t.o.v. O is gegeven door $r(t)$. Voer een met de buis meeroterend stelsel door O in en bepaal de relatieve en sleep-snelheid en de relatieve, sleep- en coriolisversnelling.



Wanneer zijn deze grootheden nul?

15. Beschouw het hiernaast getekende schema van een zweefmolen, welke met een constante hoeksnelheid ω draait. De stand van een stoeltje wordt gegeven door $\theta(t)$ (er vindt alleen beweging plaats in het met de molenas meedraaiende verticale vlak \equiv vlak van beweging). Bepaal, t.o.v. een met de zweefmolen meeroterend stelsel met oorsprong op de molenas, de relatieve en sleep-snelheid en de relatieve, sleep- en coriolisversnelling.



16. Een deeltje beweegt in zuidelijke richting met relatieve snelheid van 500 m/sec t.o.v. de aarde op een breedte van 40°N . ($R_{\text{aarde}} = 6,37 \times 10^6 \text{m}$).
- i) Bereken de centripetale versnelling van het deeltje.
ii) Bereken de coriolisversnelling.
17. Een rivier stroomt in zuidelijke richting met een snelheid van 9 km/uur t.o.v. de aarde op een breedte van 45°N .
Bepaal voor een met de rivier meebewegende deeltje de coriolisversnelling.

Antwoorden (H.3.)

5. $\underline{v}_{\text{BA}} = -25\underline{e}_{\text{x}} + 45\sqrt{2}\underline{e}_{\text{y}}$ ($\underline{e}_{\text{x}} // \underline{v}_{\text{A}}$).
6. Boot: 40 min. Voetganger: 30 min.
7. i) $14\underline{e}_{\text{y}}$ (x: horizontaal, y verticaal).
ii) $80\underline{e}_{\text{x}} + 14\underline{e}_{\text{y}}$
8. i) $3\underline{e}_{\text{x}} + 4\underline{e}_{\text{y}}$ (m/sec) (x-as in stroomrichting).
ii) 15 min.
iii) 750 m.
9. 12 km/uur, noordwest.
10. $\underline{v}_{\text{rel}} = -l\dot{\alpha} \cos \alpha \underline{e}_{\text{x}} - l\dot{\alpha} \sin \alpha \underline{e}_{\text{y}}$ ($\underline{e}_{\text{x}} // \text{OO}'$),
 $\underline{v}_{\text{s}l} = a t \underline{e}_{\text{x}}$,
 $\underline{a}_{\text{rel}} = (-l\ddot{\alpha} \cos \alpha + l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \underline{e}_{\text{x}} + (-l\ddot{\alpha} \sin \alpha - l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \underline{e}_{\text{y}}$,
 $\underline{a}_{\text{s}l} = a \underline{e}_{\text{x}}$.
11. $\underline{v}_{\text{rel}} = \dot{r}'(t) \underline{e}_{\text{x}}$ ($\underline{e}_{\text{x}} // \text{tafel}$),
 $\underline{v}_{\text{s}l} = (-\omega R \sin \omega t) \underline{e}_{\text{x}} + (\omega R \cos \omega t) \underline{e}_{\text{y}}$,
 $\underline{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}'(t) \underline{e}_{\text{x}}$,
 $\underline{a}_{\text{s}l} = (-\omega^2 R \cos \omega t) \underline{e}_{\text{x}} + (-\omega^2 R \sin \omega t) \underline{e}_{\text{y}}$.

12. $\underline{v}_{rel} = \dot{r}'(t)\underline{e}_x$, (\underline{e}_x , langs buis)

$$\underline{v}_{sl} = at \cos \alpha \underline{e}_x, - at \sin \alpha \underline{e}_y,$$

$$\underline{a}_{rel} = \ddot{r}'(t)\underline{e}_x,$$

$$\underline{a}_{sl} = a \cos \alpha \underline{e}_x, - a \sin \alpha \underline{e}_y.$$

13. Neem: \underline{e}_x , \perp vlak van cirkel, \underline{e}_y , in vlak van cirkel en $\perp \underline{\omega}$, \underline{e}_z , langs ω -as.

i) $\underline{v}_{rel} = R\dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_y, - R\dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_z,$

$$\underline{v}_{sl} = -\omega R \sin \theta \underline{e}_x,$$

$$\underline{a}_{rel} = (R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) \underline{e}_y, + (-R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta) \underline{e}_z,$$

$$\underline{a}_{sl} = -\omega^2 R \sin \theta \underline{e}_x,$$

$$\underline{a}_{cor} = -2\omega R\dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_x,$$

iv) $\underline{a}_{centr} = -\omega^2 R \sin \theta \underline{e}_y.$

14. Neem: \underline{e}_x , langs buis, \underline{e}_z , in ω -richting.

$$\underline{v}_{rel} = \dot{r} \underline{e}_x, \underline{v}_{sl} = \omega r \underline{e}_y,$$

$$\underline{a}_{rel} = \ddot{r} \underline{e}_x, \underline{a}_{sl} = -\omega^2 r \underline{e}_x, \underline{a}_{cor} = 2\omega \dot{r} \underline{e}_y.$$

15. Neem: \underline{e}_x , langs as naar beneden gericht, \underline{e}_y , richting O'A, \underline{e}_z , \perp vlak.

$$\underline{v}_{rel} = -l\dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_x, + l\dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_y,$$

$$\underline{v}_{sl} = -\omega(R + l \sin \theta) \underline{e}_z,$$

$$\underline{a}_{rel} = (-l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta) \underline{e}_x, + (l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) \underline{e}_y,$$

$$\underline{a}_{sl} = -\omega^2(R + l \sin \theta) \underline{e}_z,$$

$$\underline{a}_{cor} = -2\omega l\dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_x.$$

16. i) $2,58 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2.$

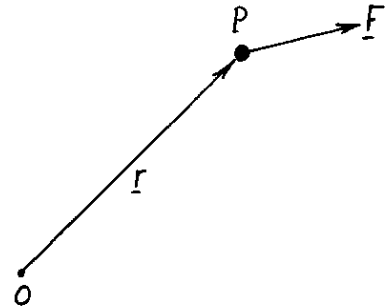
ii) $4,68 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$ (in oostelijke richting).

17. $2,58 \times 10^{-4} \text{ m/sec}^2$ (in oostelijke richting).

4. Dynamica van een deeltje

4.1. Vrij massapunt

De volgende vragen handelen over een vrij massapunt P met massa m onder invloed van een kracht \underline{F} met positievector t.o.v. O gelijk aan \underline{r} . De versnelling van de zwaartekracht g mag voor numerieke uitwerkingen, tenzij anders vermeld, gelijk genomen worden aan 10 m/sec^2 .



Theorievragen

1. Wat moet voor O gelden opdat:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} .$$

Is het hiervoor noodzakelijk dat O in rust is?

2. Geef de conditie(s) voor \underline{F} , opdat P in evenwicht is.

3. Beschouw een rechtlijnige beweging ($\underline{r} = x\underline{e}_x$, $\underline{F} = F\underline{e}_x$) met:

$$m\ddot{x} = F ,$$

en met beginvoorwaarden

$$x(t = 0) = x_0, \dot{x}(t = 0) = v_0 .$$

Laat F alleen een functie van de tijd zijn:

$$F = F(t)$$

en bepaal uitdrukkingen voor:

$$\dot{x}(t) \text{ en } x(t) .$$

Pas dit toe op (c, ω : constant)

$$F(t) = c, F(t) = ct, F(t) = ct^2, F(t) = \cos \omega t .$$

4. Als 3, maar nu met $F = F(x)$, dus

$$m\ddot{x} = F(x), \text{ met } x(0) = x_0 \text{ en } \dot{x}(0) = v_0 .$$

i) Bewijs dat

$$\dot{x}^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi .$$

ii) Pas dit toe, voor de bepaling van \dot{x} als functie van x , op

$$F(x) = c, F(x) = cx, F(x) = \frac{c}{x^2}, F(x) = \cos x .$$

5. Beschouw weer rechtlijnige bewegingen met bewegingsvergelijkingen (ω, λ, k, c : constant)

a) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$

b) $\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$ en

c) $\ddot{x} + k\dot{x} = c.$

en met $x(0) = x_0$ en $\dot{x}(0) = v_0.$

i) Bewijs dat de oplossingen hiervan luiden:

a) $x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t ,$

b) $x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0}{\lambda})e^{\lambda t} + \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0}{\lambda})e^{-\lambda t} ,$

c) $x(t) = x_0 + \frac{1}{k}(\frac{c}{k} - v_0)(e^{-kt} - 1) + \frac{c}{k} t .$

ii) Bewijs dat, voor willekeurige x_0 en v_0 , de oplossing a) voor alle t begrensd is en dat de oplossing b) voor $t \rightarrow \infty$ onbegrensd toeneemt.

iii) Bewijs dat als $k > 0$ de snelheid voor geval c) voor $t \rightarrow \infty$ nadert naar de constante waarde c/k .

6. Beschouw een vlakke beweging. Schrijf:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

uit in poolcoördinaten r en θ .

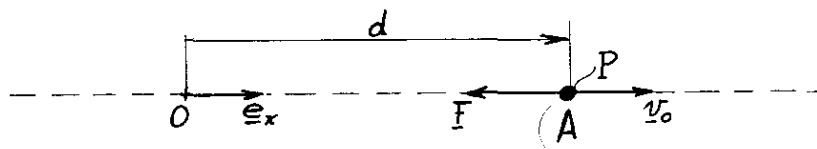
Bewijs dat als de kracht in θ -richting nul is, de term:

$$mr^2\dot{\theta} ,$$

constant is.

7. Een ballon waarvan de totale massa (inclusief die van de mand, uitrusting e.d.) M bedraagt, daalt met een versnelling f .
Hoeveel massa moet worden afgeworpen om de ballon te laten stijgen met versnelling f ?
8. Een man die in de dakgoot van een gebouw staat gooit een steen omhoog met een snelheid van 10 m/sec . Na 5 sec valt de steen op de grond. Wat is de hoogte die de steen bereikt, hoe ver is de goot boven de grond en met welke snelheid valt de steen op de grond? (De versnelling van de zwaartekracht g mag gelijk worden genomen aan 10 m/sec^2 .)
9. Een auto heeft een massa van 1500 kg en een snelheid van 72 km/uur . Als geremd wordt met een constante vertraging staat de auto in $0,2 \text{ min}$ stil.
Bepaal de kracht die de auto ondervindt.
10. Twee muildieren trekken een schuit met massa m door middel van touwen die aan de boeg zijn bevestigd door een kanaal. De hoek tussen de touwen is 45° en de kracht in de touwen is resp. $K(\sqrt{3}-1)$ en $K\sqrt{2}$.
- i) Hoe groot zou de versnelling van de schuit zijn indien er geen weerstand van het water was?
- ii) Als de schuit eenparig beweegt, hoe groot is dan de weerstand van het water?
11. Een man met een massa van 90 kg staat in een lift. Welke kracht oefent de vloer op hem uit als de lift:
- i) eenparig omhoog of omlaag beweegt;
- ii) met een versnelling van 3 m/sec^2 omhoog of omlaag beweegt;
- iii) als de kabel breekt en de lift vrij valt?

12.

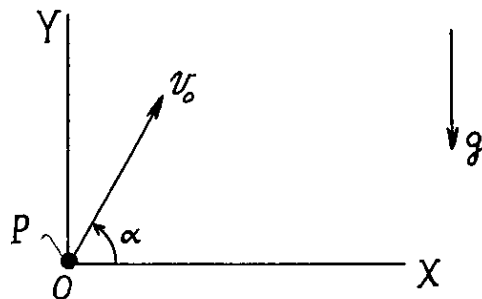


Een materieel punt P , massa m , wordt door een punt O aangetrokken met een kracht $m\mu^2|x|\dot{x}$ ($\mu > 0$), waarin $|x|$ de afstand tot O is. In een punt A , waar $x = d$ ($d > 0$), wordt P met een snelheid v_0 in de richting OA weggeschoten.

- i) Geef de dimensie van μ .
 - ii) Stel de bewegingsvergelijking en de beginvoorwaarden op. Laat zien dat deze bewegingsvergelijking niet afhangt van het feit of P zich links dan wel rechts van 0 bevindt en of P naar 0 toe dan wel van 0 af beweegt.
 - iii) Bepaal de snelheid en de positie van P als functie van de tijd. (Hint: gebruik opgave 5.)
 - iv) Bepaal de snelheid van P als functie van x . (Hint: gebruik opgave 4.)
 - v) Bewijs dat P voor elke waarde van v_0 in 0 terugkeert. Bepaal de maximale waarde van x .
 - vi) Bepaal de snelheid waarmee P de oorsprong 0 passeert.
 - vii) Beschrijf de beweging van P.
13. Een materieel punt P, massa m , wordt door een vast punt 0 aangetrokken met een kracht $m\mu/r^2$ ($\mu > 0$) waarin r de afstand tot 0 is. In een punt A, waar $r = d$ ($d > 0$), wordt P zonder snelheid losgelaten.
- i) Geef de dimensie van μ .
 - ii) Bewijs dat P naar 0 gaat bewegen, en geef de bewegingsvergelijking voor de fase dat P naar 0 toe beweegt. Geef de beginvoorwaarden.
 - iii) Met welke snelheid komt P in 0 aan? (Hint: gebruik opgave 4)
14. Een raket, massa m , wordt loodrecht van de aarde, straal R , weggeschoten met een snelheid v_0 . De raket wordt door de aarde aangetrokken met een kracht $m\mu/r^2$, gericht naar het middelpunt 0 van de aarde, waarin r de afstand van de raket tot 0 is. De luchtweerstand wordt verwaarloosd.
- i) Bepaal de ontsnappingsnelheid van de raket (dit is de minimale waarde van v_0 waarvoor de raket uit het aantrekkingsveld van de aarde ontsnapt, dus niet meer op de aarde terugkeert).
 - ii) Bedenk dat de aantrekkingskracht op de aarde gelijk is aan mg en druk hiermee μ uit in g en R .
 - iii) Bepaal de numerieke waarde van de ontsnappingsnelheid voor $R = 6.36 \times 10^6$ m en $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$.
15. Een punt P, massa m , wordt vanaf een hoogte h met een snelheid v_0 verticaal omhoog geschoten. Het punt beweegt onder invloed van de zwaartekracht en ondervindt een luchtweerstand evenredig aan de snelheid, evenredigheidsconstante mk .

- i) Geef de dimensie van k .
- ii) Stel de bewegingsvergelijking en de beginvoorwaarden op. Laat zien dat de bewegingsvergelijking niet afhangt van het feit of m naar boven dan wel naar beneden beweegt.
- iii) Bepaal de snelheid en positie van P als functie van de tijd.
- iv) Bepaal de maximale hoogte die P bereikt.
- v) Laat zien dat de snelheid waarmee P op de grond komt, voor voldoende grote h , nagenoeg onafhankelijk is van v_0 en h .

16.



Een massapunt P , massa m , wordt vanuit de oorsprong O van een vast assenstelsel OXY , met de Y -as verticaal, afgeschoten onder een hoek α met de X -as. P beweegt onder invloed van de zwaartekracht en ondervindt luchtweerstand evenredig met de snelheid, evenredigheidsconstante mk ($k > 0$).

- i) Bepaal de bewegingsvergelijkingen en de beginvoorwaarden.
- ii) Bepaal de snelheid en de positie van P als functie van de tijd.
- iii) Bewijs dat de snelheid in X -richting voor grote t naar nul gaat.

17. Als 16. maar zonder luchtweerstand.

- i) Bepaal de bewegingsvergelijkingen en de beginvoorwaarden.
- ii) Bepaal de snelheid en de positie van P als functie van de tijd.
- iii) Bepaal de grootste hoogte die P bereikt.
- iv) Bepaal de horizontale afstand die P heeft afgelegd als P weer de X -as heeft bereikt. Voor welke waarde van α is deze afstand maximaal?

18. Een geladen deeltje, massa m , lading q , beweegt in een constant, uniform elektrisch veld \underline{E} . Op $t = 0$ heeft het deeltje een snelheid \underline{v}_0 loodrecht op het \underline{E} -veld. Het deeltje ondervindt van het \underline{E} -veld een kracht $q\underline{E}$.

- i) Bewijs dat het deeltje in het vlak door \underline{v}_0 en \underline{E} blijft bewegen.

- ii) Bepaal de bewegingsvergelijkingen en de beginvoorwaarden.
 iii) Bepaal de snelheid en de positie van het deeltje als functie van de tijd.
 iv) Hoe ver is het deeltje van de \underline{v}_0 -richting afgeweken op het moment dat het deeltje in de \underline{v}_0 -richting een afstand L heeft afgelegd.
19. Een massapunt P, massa m, beweegt in een vast OXY-stelsel en ondervindt daarbij van de X-as een aantrekkingskracht $m\mu^2 y$, waarin y de afstand van P tot de X-as is. Op $t = 0$ bevindt P zich op de Y-as op een afstand a van 0 en heeft het een snelheid \underline{v}_0 gericht in de positieve X-as.
 Welke baan beschrijft P?

Antwoorden (§4.1.)

1. 0: inertiaal; $\underline{a}_0 = \underline{0}$, $\underline{v}_0 = \text{constant}$, hoeft niet nul te zijn.
2. $\underline{F} = \underline{0}$.
3. i) $\dot{x}(t) = \frac{c}{m} t + v_0$, $x(t) = \frac{c}{2m} t^2 + v_0 t + x_0$,
 ii) $\dot{x}(t) = \frac{c}{2m} t^2 + v_0$, $x(t) = \frac{c}{6m} t^3 + v_0 t + x_0$,
 iii) $\dot{x}(t) = \frac{c}{3m} t^3 + v_0$, $x(t) = \frac{c}{12m} t^4 + v_0 t + x_0$,
 iv) $\dot{x}(t) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega t + v_0$, $x(t) = \frac{1}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_0 t + x_0$.
4. ii) $\dot{x}^2(x) = v_0^2 + \frac{2c}{m}(x - x_0)$, $\dot{x}^2(x) = v_0^2 + \frac{c}{m}(x^2 - x_0^2)$,
 $\dot{x}^2(x) = v_0^2 + \frac{c}{m}(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x})$, $\dot{x}^2(x) = v_0^2 + \frac{1}{m}(\sin x - \sin x_0)$.
6. $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$, $m r\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_\theta$.
7. $\frac{2Mf}{(f + g)}$.
8. 80 m, 75 m, 40 m/sec.
9. 2500 N.

10. i) $\frac{2K}{m}$; ii) $2K$.

11. i) 900 N; ii) 1170 N, 630 N; iii) 0.

12. i) $[\mu] = T^{-1}$.

ii) $\ddot{x} + \mu^2 x = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $x(0) = d$.

iii) $\dot{x}(t) = -d\mu \sin \mu t + v_0 \cos \mu t$,
 $x(t) = d \cos \mu t + \frac{v_0}{\mu} \sin \mu t$.

iv) $\dot{x}(x) = \pm \sqrt{v_0^2 + \mu^2(d^2 - x^2)}$.

vi) $\pm \sqrt{v_0^2 + \mu^2 d^2}$.

13. i) $[\mu] = L^3 T^{-2}$.

ii) $\ddot{r} + \frac{\mu}{r^2} = 0$, $r(0) = d$, $\dot{r}(0) = 0$.

iii) ∞ .

14. i) $\sqrt{\frac{2\mu}{R}}$; ii) $\mu = gR^2$; iii) $1,12 \times 10^4$ m/sec (≈ 40.000 km/uur).

15. i) $[k] = T^{-1}$.

ii) $\ddot{x} + k\dot{x} = -g$, $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0$.

iii) $\dot{x}(t) = -\frac{g}{k} + (v_0 + \frac{g}{k})e^{-kt}$,

$x(t) = h - \frac{g}{k}t + \frac{1}{k}(v_0 + \frac{g}{k})(1 - e^{-kt})$.

iv) $h + \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{kv_0}{g})$.

16. i) $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$,

$\ddot{y} + k\dot{y} = -g$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$.

ii) $\underline{v}(t) = v_0 \cos \alpha e^{-kt} \underline{e}_x + [-\frac{g}{k} + (v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k})e^{-kt}] \underline{e}_y$,

$\underline{r}(t) = \frac{v_0}{k} \cos \alpha (1 - e^{-kt}) \underline{e}_x + [-\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k})(1 - e^{-kt})] \underline{e}_y$.

17. i) $\ddot{x} = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha .$

$$\ddot{y} = -g, y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha .$$

ii) $\underline{v}(t) = v_0 \cos \alpha \underline{e}_x + [-gt + v_0 \sin \alpha] \underline{e}_y ,$

$$\underline{r}(t) = v_0 t \cos \alpha \underline{e}_x + [-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha] \underline{e}_y .$$

iii) $\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha .$

iv) $\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha; \alpha = \pi/4 .$

18. ii) $\ddot{x} = 0, \dot{x}(0) = v_0, x(0) = 0$ (x: richting \underline{v}_0) ,

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m}, \dot{y}(0) = 0, y(0) = 0$$
 (y: richting \underline{E}) .

iii) $\underline{v}(t) = v_0 \underline{e}_x + \frac{qE}{m} t \underline{e}_y ,$

$$\underline{r}(t) = v_0 t \underline{e}_x + \frac{qE}{2m} t^2 \underline{e}_y .$$

iv) $\frac{qEL^2}{2mv_0^2} .$

19. $y(x) = a \cos\left(\frac{\mu x}{v_0}\right) .$

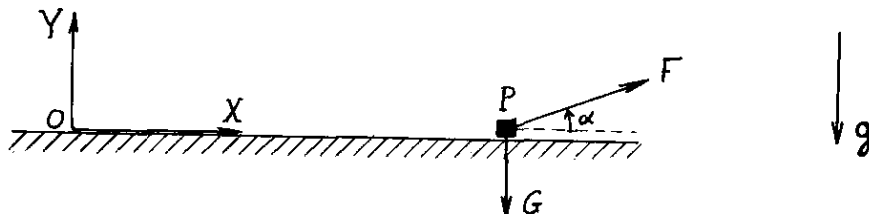
4.2. Gedwongen beweging. Vrijmaken. Eenzijdige verbindingen

Theorievragen

1. Wat verstaat U onder een gedwongen beweging en wat onder een eenzijdige verbinding?
2. Bij de nu volgende bewegingen treedt nergens wrijving op. Een punt P wordt gedwongen te bewegen:
 - i) in een plat vlak,
 - ii) over een boloppervlak,
 - iii) langs een rechte lijn,
 - iv) langs een cirkel,
 - v) aan het eind van een gespannen koord, waarvan het andere einde aan een vast punt is opgehangen (drie-dimensionale of konische slinger).

Hoeveel onbekende reactiekrachten moet U invoeren bij het vrijmaken? Hoe groot is het totaal aantal onbekenden en welke zijn dat?

3.



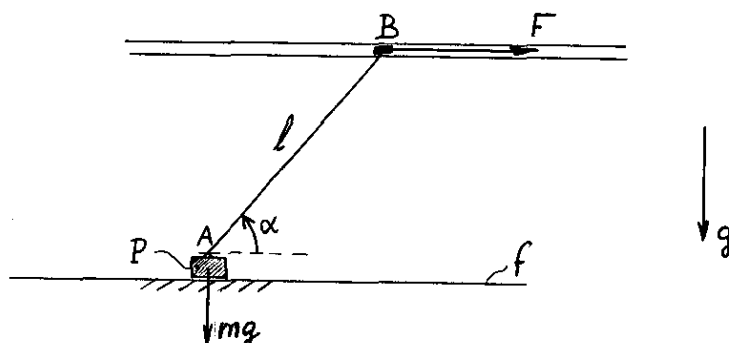
Een stelsel OXY is vast verbonden aan een horizontaal vlak (zie figuur). Een punt P, dat alleen kan bewegen in het verticale OXY-vlak, wordt behalve door zijn gewicht G nog door een willekeurige kracht F belast. De wrijvingscoëfficiënt tussen P en het horizontale vlak is f ($f_k = f_s = f$) en de verbinding tussen P en dit vlak is eenzijdig.

- i) Aan welke ongelijkheidsrelatie moet de Y-coördinaat van P voldoen?
- ii) Welke reactiekrachten kunnen er door het vlak op P worden uitgeoefend? Aan welke ongelijkheidsrelatie moeten deze reactiekrachten voldoen? Welke vereenvoudiging krijgt U als $f = 0$?

Onderscheid de volgende gevallen:

- iii) P beweegt over het horizontale vlak (dwz. langs de X-as). Geef de condities voor de positie en snelheid van P. Hoeveel graden van vrijheid heeft P? Welke reactiekrachten treden op en aan welke condities moeten deze voldoen? Hoeveel onbekenden heeft dit probleem en welke vergelijkingen heeft U tot Uw beschikking?
- iv) P is in rust op het horizontale vlak.
Zelfde vragen als bij iii).
- v) P is los van het horizontale vlak.
Zelfde vragen als bij iii).
- vi) Geef de condities voor \underline{G} en \underline{F} opdat de situaties iii), iv) of v) optreden, aangenomen dat P in rust is op $t = 0$.

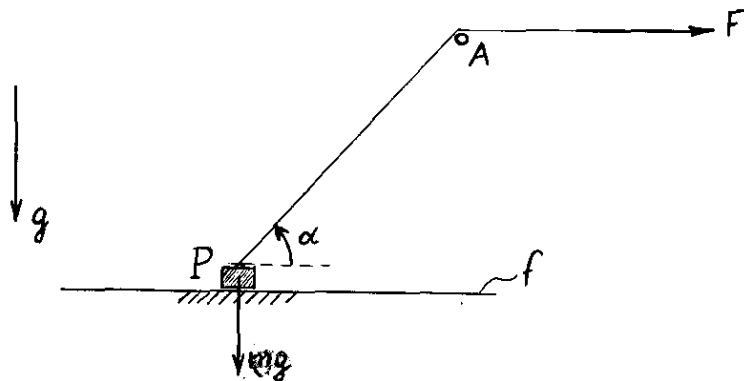
4.



In bovenstaande figuur stelt P een massapunt, massa m , voor dat ligt op een horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f , en AB een massaloze staaf, welke in A met P is verbonden, onder een hoek α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) met de horizontaal, en waarvan B alleen langs een gladde horizontale rail kan bewegen. Op $t = 0$, P is dan in rust, wordt het stelsel in B belast door een horizontale kracht F.

- i) Wat is de kracht door AB op P uitgeoefend?
- ii) Aan welke relatie(s) moet(en) F en α voldoen, opdat P in rust blijft?
- iii) Idem, opdat P langs het horizontale vlak gaat glijden? Geef dan de bewegingsvergelijking voor P tezamen met de beginvoorwaarden. Bepaal de snelheid van P als functie van de afgelegde weg.
- iv) Idem, opdat P los komt van de grond? Hoeveel graden van vrijheid heeft P nu?

5.

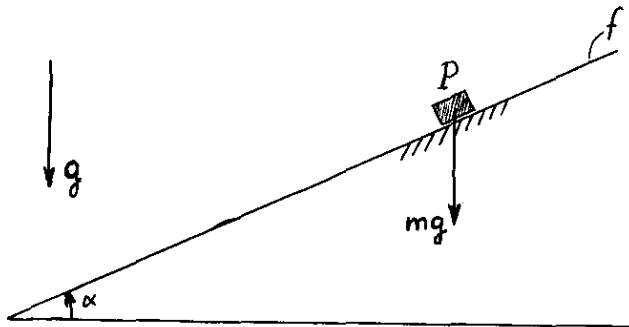


In bovenstaande figuur stelt P een massapunt, massa m , voor dat ligt op een horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f , en dat is verbonden aan een koord dat een hoek α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) met de horizontaal maakt en waaraan via een vaste gladde pen A wordt getrokken met een kracht F ($F > 0$).

Geef in een F - α -vlak de gebieden aan waarvoor (Hint: normeer F op (F/mg) en neem zelf een waarde voor f):

- i) P in rust blijft,
- ii) P langs het horizontale vlak gaat glijden,
- iii) P los komt van het vlak.

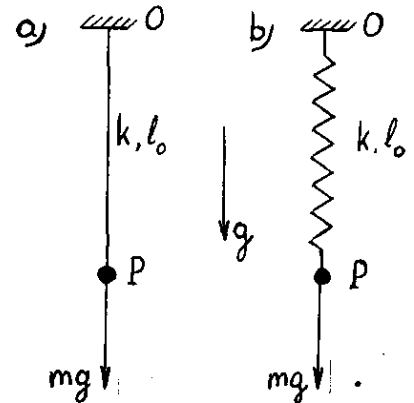
6.



Een massapunt P, massa m , ligt op een hellend vlak, hellingshoek α . De wrijvingscoëfficiënt tussen P en het hellend vlak is f .

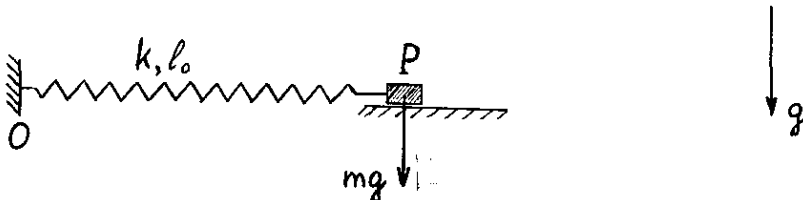
- i) Geef de conditie voor f opdat het blok gaat glijden.
- ii) Indien aan deze conditie voldaan is, bepaal dan de positie en de snelheid van P als functie van de tijd.

7. Twee gelijke massapunten, massa m , hangen onder een vast punt O en zijn met O verbonden door middel van een elastiekje (geval a) resp. een veer (geval b), beide met veerstijfheid k en een ongespannen veerlengte l_0 . Bedenk echter dat het elastiekje, in tegenstelling tot de veer, alleen een stijfheid heeft tegen uitrekken maar niet tegen indrukken (eenzijdige verbinding). Beantwoord de volgende vragen voor beide systemen:



- Wat is de evenwichtsstand van P ? (De bij deze stand horende uitrekking wordt de statische uitwijking genoemd.)
- Rek het elastiekje/veer nog een afstand a vanuit de evenwichtsstand uit en laat hem zonder beginsnelheid los. Stel de bewegingsvergelijkingen voor P met de beginvoorwaarde op.
- Wat is de maximale hoogte die P zal bereiken?

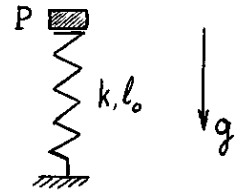
8.



Een massapunt P , massa m , kan glijden over een glad horizontaal vlak en is verbonden met een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 . Stel de bewegingsvergelijkingen voor P op en laat zien dat deze onafhankelijk zijn van het feit of de veer ingedrukt dan wel uitgerekt is en of P naar links dan wel naar rechts beweegt.

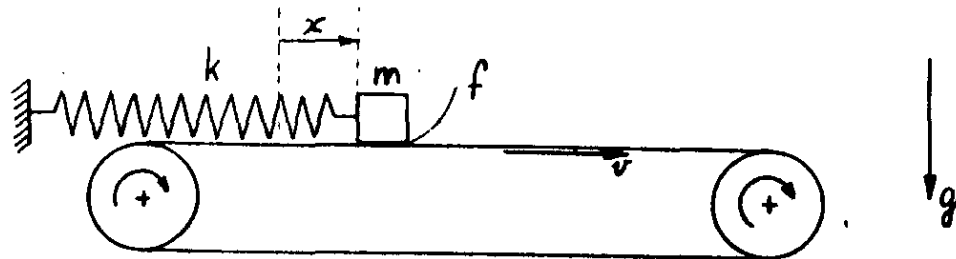
9. Als 8, maar nu met wrijving f tussen P en het vlak. Stel weer de bewegingsvergelijkingen op en laat zien dat deze nu wel essentieel verschillen als P naar links en als P naar rechts beweegt.

10. Een massapunt P, massa m , ligt los op een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 . Vanuit de evenwichtsstand wordt de veer nog een extra afstand a ingedrukt.



Bewijs dat P los komt van de veer op het moment dat de veer zijn ongespannen veerlengte bereikt. Bepaal de maximale hoogte die P bereikt.

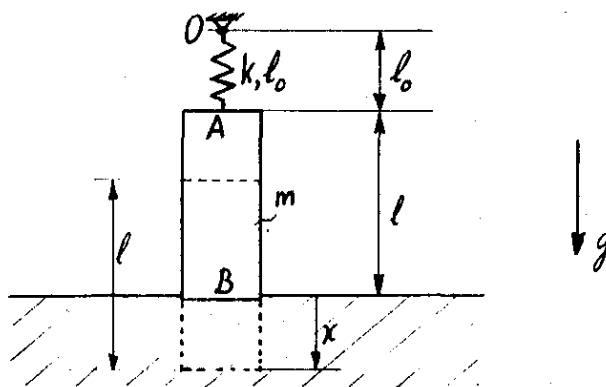
11.



Een blokje, massa m , zit bevestigd aan een veer, veerconstante k , en ligt op een horizontale, lopende band die met snelheid v in de aangegeven richting beweegt. Zie figuur. Tussen het blokje en de lopende band heerst wrijving met wrijvingscoëfficiënt f . Kies de oorsprong van de x -as zodanig dat bij ongespannen veer het blokje zich in $x = 0$ bevindt. De versnelling van de zwaartekracht is g . Tot aan $t = 0$ bevindt het blokje zich in rust in $x = a$ en wordt daar vastgehouden.

- Voor welke waarden van a zal het blokje direct na loslating op $t = 0$ naar rechts gaan bewegen? Bereken de positie x als functie van t , zolang \dot{x} nog kleiner dan v is.
- Voor welke waarden van de snelheid v van de lopende band bereikt het blokje eveneens de snelheid v ? En welke afstand heeft het blokje dan afgelegd?
- Kan het blokje een snelheid groter dan v krijgen? Motiveer Uw antwoord!
- Stel dat v zodanig is dat het blokje de snelheid v niet bereikt. Bereken dan de afstand die het blokje aflegt alvorens momentaan tot stilstand te komen.

12.



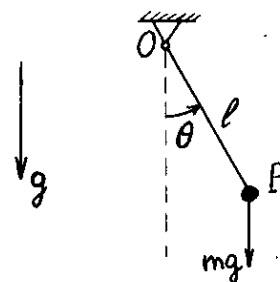
Een cilindrische staaf AB, massa m , lengte l , doorsnede-oppervlak S , hangt verticaal onder een vast punt O . Het bovenste punt A is met O verbonden door een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 . Onder O bevindt zich een zeer groot bassin gevuld met water. De soortelijke massa (= massa per volume-eenheid) van het water geven we aan met ρ . Op $t = 0$ is het systeem in rust, is de veer ongespannen en bevindt B zich juist in het water. De staaf wordt vanuit deze stand losgelaten. De afstand die B zich onder het niveau van het water, dat constant mag worden genomen, bevindt, geven we aan met x . De opwaartse kracht die de staaf AB van het water ondervindt wordt gegeven door de wet van Archimedes:

"de opwaartse kracht is gelijk aan het gewicht van de verplaatste hoeveelheid water."

De lengte l is zo groot dat de staaf niet volledig onder water verdwijnt. De versnelling van de zwaartekracht is g .

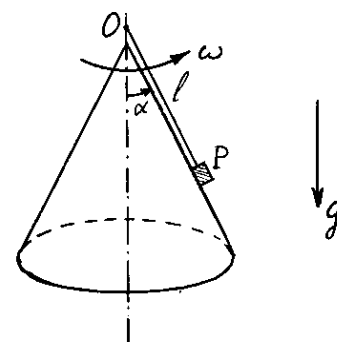
- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Geef de bewegingsvergelijking met de bijbehorende beginvoorwaarden.
- iii) Bepaal hieruit de snelheid en de verplaatsing van de staaf als functie van de tijd t .
- iv) Bereken het diepste punt dat B bereikt.
- v) Wat verandert er in de bewegingsvergelijking, indien de staaf behalve de opwaartse kracht ook nog een visceuze dempingskracht ondervindt evenredig met de snelheid van AB, evenredigheidsconstante c . Geef (in woorden) aan wat de invloed hiervan op de beweging van AB is. Komt de staaf nu tot rust? Zo ja, in welke stand?

13. Een massapunt P , massa m , is via een massaloos koord, lengte l , verbonden met een vast punt O . P beweegt in een verticaal vlak (vlakke slinger).



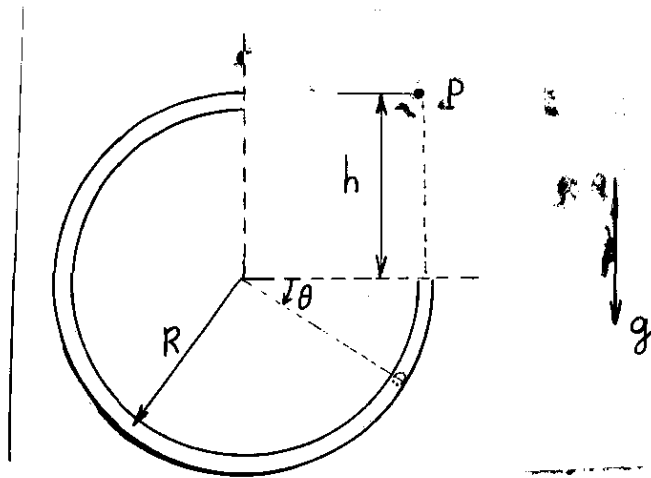
- i) Geef de slinger een beginuitwijking θ_0 ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$) en laat hem zonder beginsnelheid los. Stel de bewegingsvergelijking voor P op met de beginvoorwaarden. Bepaal $\dot{\theta}$ als functie van θ . Bewijs dat θ nooit groter kan worden dan θ_0 . Bereken de kracht in het koord als functie van θ . Waarom is deze kracht voor $\theta = 0$ groter dan mg ? Neem $\theta_0 \ll 1$. Hoe kunt u in dit geval de bewegingsvergelijking vereenvoudigen en kunt u uit deze vereenvoudigde vergelijking de snelheid van P als functie van de tijd bepalen?
- ii) Geef P op het moment dat hij verticaal onder O hangt een horizontale snelheid v_0 . Neem aan dat P een volledige cirkel doorloopt. Geef de condities waaraan $\dot{\theta}$ en de kracht in het koord moeten voldoen opdat aan deze aanname voldaan is. Hoe groot moet v_0 minstens zijn opdat dit het geval is? Hoe groot is dan de snelheid van P in zijn hoogste punt?

14. Een puntmassa P , massa m , bevindt zich op een gladde kegelmantel, met een verticale as en een halve tophoek α , en is via een massaloos koord, lengte l , verbonden met de top O van de kegel. De lijn OP roteert met constante hoeksnelheid ω om de verticaal door O .



- i) Bereken de snelheid van P .
- ii) Bepaal de kracht in het koord.
- iii) Bepaal de reactiekracht van de kegelmantel op P . Hoe is deze gericht? Voor welke waarde van ω wordt deze reactiekracht nul? Wat gebeurt er als ω groter wordt dan deze waarde?

15.



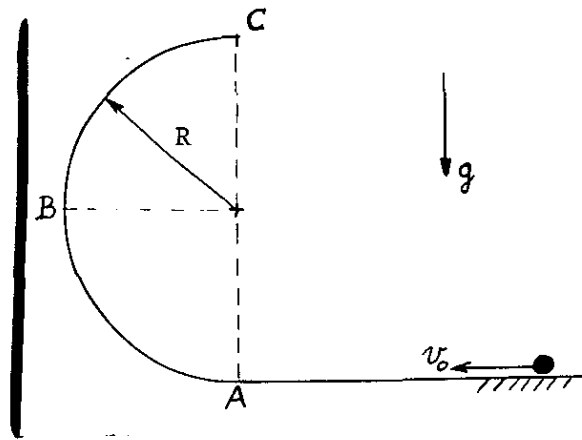
De hierboven getekende gladde, cirkelvormige buis AB ligt in een verticaal vlak. Een massapunt P, massa m , wordt zonder beginsnelheid losgelaten in een punt dat op een hoogte h verticaal boven A ligt.

- i) Met welke snelheid komt P bij A in de buis?
- ii) Bepaal, als P in de buis beweegt, de snelheid van P als functie van de afgelegde hoek θ .
- iii) Bepaal de reactiekracht van de buis op P.
- iv) Hoe groot moet h minstens zijn opdat P weer bij B de buis verlaat?
- v) Bereken de waarde van h , waarvoor P na de buis bij B verlaten te hebben, weer bij A in de buis terecht komt.

16. Een electron, massa m , lading $(-e)$, beweegt onder invloed van een constant, uniform magnetisch veld \underline{B} in een cirkel, straal R , met een snelheid \underline{v} die constant van grootte is. Het \underline{B} -veld staat loodrecht op het vlak van de cirkel en het electron ondervindt een kracht: $-e(\underline{v} \times \underline{B})$ van dit veld.

- i) Bepaal de richting van bovengenoemde kracht.
- ii) Geef de relatie tussen \underline{B} , v en R , welke moet gelden opdat bovenbeschreven beweging mogelijk is.

17.

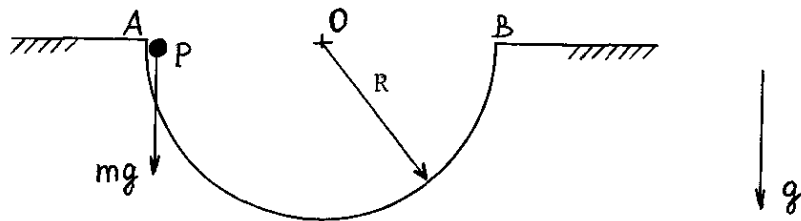


Een massapunt P, massa m , wordt met snelheid v_0 vanaf een horizontaal vlak in een verticale, cirkelvormige, gladde goot ABC geschoten.

Bepaal de waarden van v_0^2/gR , waarvoor:

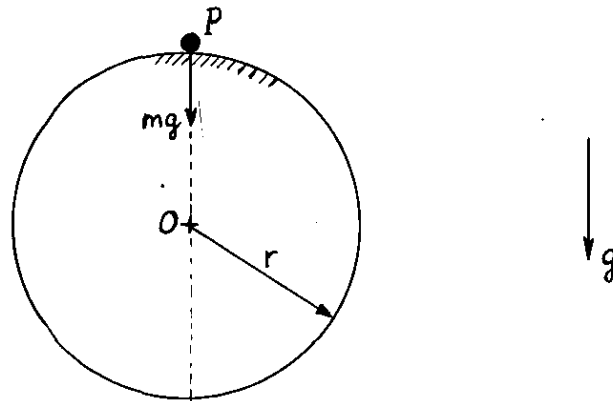
- i) P volledig in contact blijft met de goot, maar weer in A terugkeert.
- ii) P voordat C bereikt is los komt van de goot.
- iii) P volledig in contact blijft met de goot en deze bij C weer verlaat.

18.



Een massapunt P, massa m , wordt zonder snelheid losgelaten in het punt A van de hierboven getekende verticale, cirkelvormige, gladde goot AB. Bepaal de door de goot op P uitgeoefende kracht en de snelheid van P als functie van de afgelegde hoek. Waarom is deze kracht in het onderste punt groter dan mg ?

19.



Een massapunt P, massa m, kan bewegen langs een verticale, cirkelvormige, gladde goot.

- i) P wordt met te verwaarlozen beginsnelheid in het bovenste punt van de goot losgelaten. Waar verlaat het punt de goot?
- ii) P wordt met een zodanige horizontale snelheid v_0 vanuit het hoogste punt weggeschoten dat het onmiddellijk de goot verlaat. Hoe groot moet v_0 minstens zijn?
- iii) P wordt via een veer, veerstijfheid k, ongespannen veerlengte $l_0 = 0$, verbonden met het middelpunt O van de cirkel. Hoe groot moet k zijn opdat P nergens loskomt van de goot, als P zonder beginsnelheid in hoogste punt wordt losgelaten?

Antwoorden (§4.2.)

2. i) Een reactiekracht (\perp vlak); 2 graden van vrijheid.
 ii) Als i).
 iii) Twee reactiekrachten (\perp rechte); 1 graad van vrijheid.
 iv) Als iii).
 v) Een reactiekracht (in richting koord); 2 graden van vrijheid.
 Steeds in totaal drie onbekenden.

3. i) $y \geq 0$.
 ii) $\underline{N} = N \underline{e}_y$, $N \geq 0$,
 $\underline{W} = W \underline{e}_x$, $|\underline{W}| \leq fN$,
 $f = 0 \rightarrow \underline{W} = \underline{0}$.
 iii) $y = \dot{y} = 0$, $\dot{x} \neq 0$; 1 graad van vrijheid;
 $N > 0$ en $W = -fN \text{ sign } \dot{x}$. 3 onbekenden: x, N, W.
 vergelijkingen: $m\ddot{x} = F \cos \alpha - W$, $0 = N + F \sin \alpha - mg$, $W = -fN \text{ sign } \dot{x}$.

iv) $\dot{x} = \dot{y} = y = 0$, nul graden van vrijheid.

$$N > 0 \text{ en } |W| \leq fN.$$

2 onbekenden: N, W.

$$\text{vergelijkingen: } 0 = F \cos \alpha - W, \quad 0 = N + F \sin \alpha - mg.$$

v) $y > 0$, 2 graden van vrijheid.

$$N = W = 0.$$

2 onbekenden: x, y.

$$\text{vergelijkingen: } m\ddot{x} = F \cos \alpha, \quad m\ddot{y} = F \sin \alpha - mg.$$

vi) geval iii): $F \cos \alpha > f(mg - F \sin \alpha)$,

$$F \sin \alpha < mg.$$

geval iv): $F \cos \alpha < f(mg - F \sin \alpha)$,

$$F \sin \alpha < mg.$$

geval v): $F \sin \alpha > mg.$

4. i) $\frac{F}{\cos \alpha}$, langs AB gericht.

$$\text{ii) } F \leq \frac{mgf}{(1 + f \tan \alpha)}.$$

$$\text{iii) } \frac{mgf}{(1 + f \tan \alpha)} < F \leq mg \cotan \alpha;$$

$$m\ddot{x} = F(1 + f \tan \alpha) - mgf, \quad (x \text{ langs vlak}), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0;$$

$$\underline{v}(x) = \sqrt{\left[\frac{2F}{m}(1 + f \tan \alpha) - 2gf\right]x - x^2}.$$

iv) $F > mg \cotan \alpha$; 2 graden van vrijheid.

$$5. \text{ i) } F \leq \frac{mgf}{\cos \alpha + f \sin \alpha}; \quad \text{ii) } \frac{mgf}{\cos \alpha + f \sin \alpha} < F \leq \frac{mg}{\sin \alpha}; \quad \text{iii) } F > \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

$$6. \text{ i) } f < \tan \alpha; \quad \text{ii) } v(t) = g(f \cos \alpha - \sin \alpha)t, \quad x(t) = \frac{g}{2}(f \cos \alpha - \sin \alpha)t^2.$$

$$7. \text{ i) } x_0 = \frac{mg}{k};$$

$$\text{ii) } m\ddot{x} + kx = mg, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = x_0 + a,$$

(x verticaal naar beneden van ongespannen lengte). Bewegingsvergelijking geldt voor a) alleen als $x > 0$; als $x < 0$ geldt: $m\ddot{x} = mg$.

iii) Maximale hoogte boven ongespannen lengte:

$$\text{a) als } a \leq \frac{mg}{k}; \quad \text{zie b)}$$

$$\text{a) } a > \frac{mg}{k} : \frac{1}{2} \left(\frac{ka^2}{mg} - \frac{mg}{k} \right).$$

$$\text{b) } a - \frac{mg}{k}.$$

8. $m\ddot{x} + kx = 0$ (x : uitrekking veer).

9. $\dot{x} > 0$: $m\ddot{x} + kx = -mgf$,

$\dot{x} < 0$: $m\ddot{x} + kx = mgf$.

10. $\frac{1}{2}(\frac{ka^2}{mg} + \frac{mg}{k})$ boven evenwichtsstand.

11. i) $a < \frac{mgf}{k}$; $x(t) = \frac{mgf}{k} + (a - \frac{mgf}{k})\cos \omega t$;

ii) $v \leq (\frac{mgf}{k} - a)\omega$, (mits $a < \frac{mgf}{k}$);

iii) $x = \frac{mgf}{k} + [(a - \frac{mgf}{k})^2 - (\frac{v}{\omega})^2]^{\frac{1}{2}}$;

iv) $x = \frac{2mgf}{k} - a$.

12. i) Een, x : uitrekking veer.

ii) $m\ddot{x} + (k + \rho gS)x = mg$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

iii) $x(t) = A(1 - \cos \omega t)$, $\dot{x}(t) = A\omega \sin \omega t$,
 $(A = mg/(k + \rho gS)$; $\omega = \sqrt{(k + \rho gS)/m}$).

iv) $x_{\max} = 2mg/(k + \rho gS)$.

v) $m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + \rho gS)x = mg$,

$x_{\text{rust}} = mg/(k + \rho gS)$.

13. i) $m\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$;

$$\dot{\theta}(\theta) = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Kracht in koord: $S = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0$.

$\theta_0 \ll 1$: $m\ddot{\theta} + mg\theta = 0$, $v = \sqrt{gl} \theta_0 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} t)$.

ii) $\dot{\theta} \geq 0$, $S \geq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$;

$v_0 \geq \sqrt{5gl}$; \sqrt{gl} .

14. i) $\omega l \sin \alpha$;

ii) $mg \cos \alpha + m\omega^2 l \sin^2 \alpha$;

iii) $N = mg \sin \alpha - m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha$ (i kegelmantel),

$N = 0$, voor $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$.

15. i) $\sqrt{2gh}$; ii) $\sqrt{2gh + 2gR \sin \theta}$; iii) $3mg \sin \theta + \frac{2mgh}{R}$; iv) R ; v) $\frac{5}{4} R$.

16. ii) $eBR = mv$.

17. i) $\frac{v_0^2}{gR} \leq 2$; ii) $2 < \frac{v_0^2}{gR} < 5$; iii) $\frac{v_0^2}{gR} \geq 5$.

18. $3mg \sin \theta$; $\sqrt{2gR \sin \theta}$.

19. i) $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ (θ is hoek OP met verticaal);

ii) \sqrt{gR} ; iii) $k > \frac{5mg}{R}$.

4.3. Impulsmoment. Momentenstelling

Theorievragen

1. Geef de definities van het impulsmoment \underline{L}_A en het moment $\underline{\tau}_A$. Aan welke conditie(s) moet A voldoen opdat geldt:

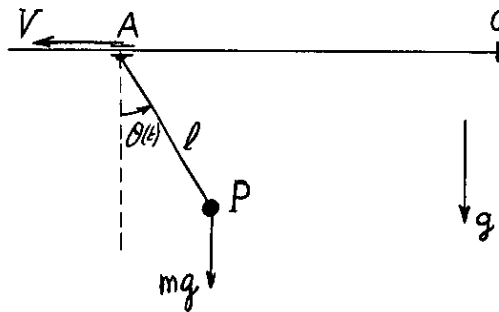
$$\dot{\underline{L}}_A = \underline{\tau}_A \cdot$$

Geef enkele voorbeelden.

Is, voor een massapunt, de momentenstelling afhankelijk of onafhankelijk van de tweede wet van Newton?

2. Een massapunt P wordt aangetrokken door een punt A door een naar A gerichte kracht. Bewijs dat, onder bepaalde condities voor A (specificeer deze), het impulsmoment van P om A constant is.

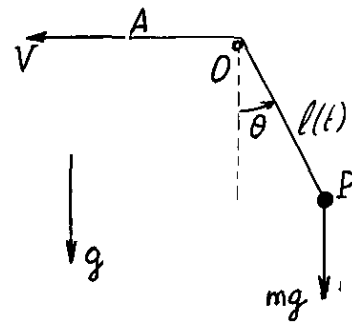
3.



Het ophangpunt A van een slinger beweegt met constante snelheid V langs een horizontale rechte. De hoek $\theta(t)$ is niet constant, dus $\dot{\theta}(t) \neq 0$.

- i) Bepaal het impulsmoment van P t.o.v. A.
 - ii) Bewijs dat $\dot{\underline{L}}_A \neq \underline{\tau}_A$, als $V \neq 0$, en dat $\dot{\underline{L}}_A = \underline{\tau}_A$, als $V = 0$.
4. Bereken het impulsmoment van:
 - i) de aarde t.o.v. de zon, volgens de gegevens van vraagstuk 12 van hoofdstuk 2, en met de massa van de aarde $= 5.98 \times 10^{24}$ kg;
 - ii) een vlakke slinger t.o.v. zijn ophangpunt;
 - iii) van P om O (en O') van 13 en 14 van hoofdstuk 3.
 5. Leid m.b.v. de momentenstelling de bewegingsvergelijkingen af van de vraagstukken: uit 4.2: 13 en 18.
Toon aan dat deze vergelijkingen afhankelijk zijn van de eerder m.b.v. de tweede wet van Newton verkregen vergelijkingen.

6. Een massapunt, massa P , is verbonden aan het einde van een koord, lengte L , dat over een vaste, gladde pen is geslagen en waarvan het beginpunt A met een constante horizontale snelheid V beweegt. Op $t = 0$ bevindt A zich boven O en maakt OP een hoek θ_0 met de verticaal door O .



- Geef een uitdrukking voor de lengte $l(t)$ van OP .
 - Bepaal het impulsmoment van P om O .
 - Leid met behulp van de momentenstelling om O een differentiaalvergelijking voor θ af.
 - Laat de zwaartekracht buiten beschouwing (dwz. laat P bewegen in een horizontaal vlak) en stel $\dot{\theta} = \omega$ op $t = 0$. Bewijs dat nu L_0 constant is en leidt hieruit een uitdrukking voor $\dot{\theta}$ als functie van t af.
7. De positievector van een massapunt van 1 kg wordt gegeven door

$$\underline{r} = (3t^2 - 6t)\underline{e}_x - 4t^3\underline{e}_y + (3t + 2)\underline{e}_z \text{ m.}$$

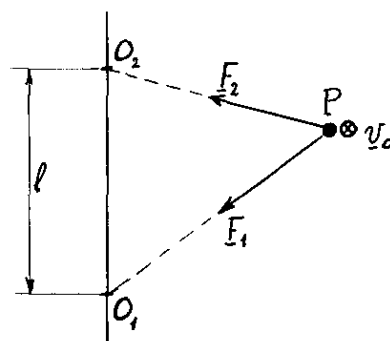
Bepaal

- de kracht op het deeltje,
 - het moment t.o.v. de oorsprong uitgeoefend op het deeltje,
 - impuls en impulsmoment t.o.v. de oorsprong.
 - verifieer $\underline{\tau} = \dot{\underline{L}}$, om de oorsprong.
8. Op $t = 0$ bevindt zich een massa van 3 kg in $\underline{r} = 5\underline{e}_x$ m met snelheid $10\underline{e}_y$ m/sec. Er werken geen krachten. Bepaal het impulsmoment van de massa t.o.v. de oorsprong ten tijde $t = 0$ en $t = 12$ sec. Beantwoord dezelfde vraag als op de massa een steeds naar de oorsprong gerichte kracht werkt.
9. Bepaal voor het geladen deeltje uit vraagstuk 18 van § 4.1 het impulsmoment t.o.v. de beginpositie van het deeltje. Welke vergelijking levert het toepassen van de momentenstelling hier op? Hoe groot is de verandering van het impulsmoment na t sec.

10. Een massapunt P, massa m, wordt door twee vaste punten O_1 en O_2 aangetrokken door de krachten \underline{F}_1 resp. \underline{F}_2 , waarbij (μ : constant)

$$\underline{F}_1 = -\mu r \underline{r}_1 \quad (\underline{r}_1 = \overrightarrow{O_1 P}),$$

$$\underline{F}_2 = -\mu r \underline{r}_2 \quad (\underline{r}_2 = \overrightarrow{O_2 P}).$$



Op $t = 0$ heeft P een snelheid \underline{v}_0 loodrecht op het vlak door O_1 , O_2 en P.

- i) Bewijs dat, indien \underline{F}_1 en \underline{F}_2 de enige op P werkende krachten zijn, de component langs $O_1 O_2$ van het impulsmoment om O_1 , of om O_2 , constant is. Schrijf deze relatie uit.
- ii) Bewijs dat als de positie van P t.o.v. het vlak door O_1 , O_2 en P constant is, dat dan ook de snelheid loodrecht op de vlak constant moet zijn.

Antwoorden (§4.3.)

3. i) $L_A = m l^2 \dot{\theta} - m l V \cos \theta$ (\perp vlak).

4. i) $2,64 \times 10^{40} \text{ kg m}^2/\text{sec};$

ii) $m l^2 \dot{\theta}$ (\perp vlak);

iii) $-m R^2 \dot{\theta} \underline{e}_x, -m \omega R^2 \sin \theta \cos \theta \underline{e}_y, + m \omega R^2 \sin^2 \theta \underline{e}_z,$ en $m \omega r^2 \underline{e}_z,$

6. i) $l(t) = L - Vt;$

ii) $m(L - Vt)^2 \dot{\theta};$

iii) $m(L - Vt) \ddot{\theta} - 2mV \dot{\theta} = -mg \sin \theta;$

iv) $\dot{\theta} = \frac{\omega L^2}{(L - Vt)^2}.$

7. i) $6 \underline{e}_x - 24t \underline{e}_y;$

ii) $(72t^2 + 48t) \underline{e}_x + (18t + 12) \underline{e}_y + (-48t^3 + 144t^2) \underline{e}_z;$

iii) $6(t-1) \underline{e}_x - 12t^2 \underline{e}_y + 3 \underline{e}_z; (24t^3 + 24t^2) \underline{e}_x + (9t^2 + 12t - 12) \underline{e}_y + (-12t^4 + 48t^3) \underline{e}_z.$

8. $150 \text{ kg m}^2/\text{sec}.$

9. $\frac{1}{2} q E v_0 t^2.$

4.4. Methode van het stilzetten

Theorievragen

1. Een waarnemer O' transleert met versnelling \underline{a}' t.o.v. een inertiaal waarnemer O . De positie van een punt P , massa m , t.o.v. O en O' wordt aangegeven met \underline{r} resp. \underline{r}' . Op P werkt een kracht \underline{F} . Formuleer de tweede wet van Newton t.o.v. O en t.o.v. O' .
2. Als bij 1, maar nu met een waarnemer O' welke met constante hoeksnelheid $\underline{\omega}$ roteert t.o.v. O .
3. O' transleert resp. roteert eenparig t.o.v. O . Geldt dan:

$$m\ddot{\underline{r}} = m\ddot{\underline{r}}' ?$$

4. Wat is een centrifugaalkracht? Wanneer moet deze worden ingevoerd. Hoe is hij gericht?

Wat is een corioliskracht? Wat kunt U zeggen van zijn richting?

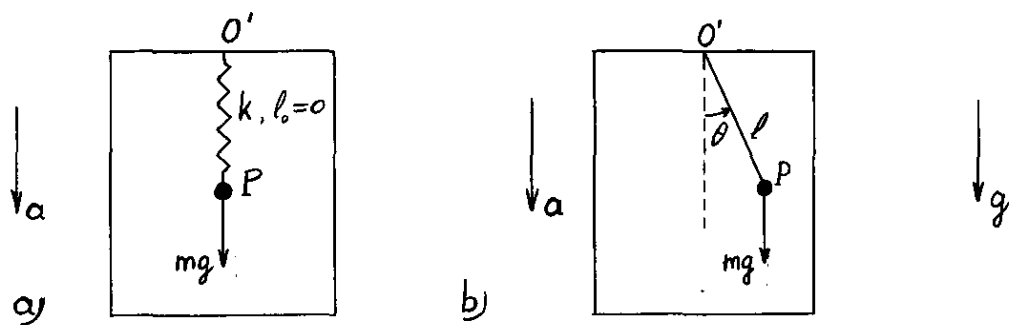
5. Maak de opgaven:

§ 4.1: 11 (translatie) ,

§ 4.2: 15 (rotatie) ,

met de methode van het stilzetten.

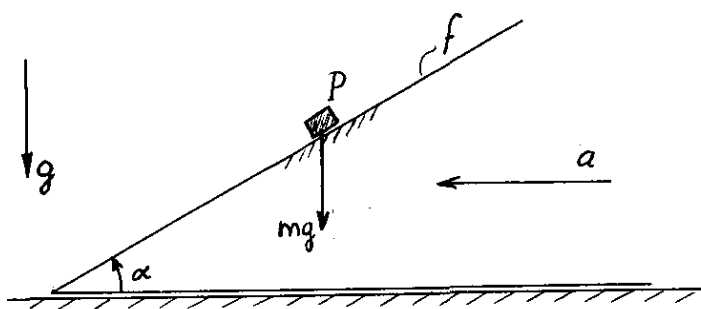
6.



Beschouw twee liften, welke beide met een versnelling a verticaal naar beneden bewegen. In beide liften bevindt zich een massapunt P , massa m , dat in geval a) met een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte $l_0 = 0$, aan een punt O' van de lift is opgehangen, terwijl in geval b) P met een koord, lengte l , met O' is verbonden. Op $t = 0$ is P in rust t.o.v. de lift en is, voor a), de veer een afstand u uitgerekt en, voor b), maakt $O'P$ een hoek θ_0 met de verticaal, $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

- i) Zet het met O' meetranslerend stelsel stil en bepaal t.o.v. dit stelsel de bewegingsvergelijkingen voor P , onder de aanname dat in geval b) het koord gespannen blijft.
- ii) Voor welke waarden van u resp. θ_0 blijft P in rust t.o.v. de lift?
- iii) Neem $a = g$. Wat kunt u dan zeggen van de beweging?
- iv) Waaraan moet a voldoen, opdat het koord $O'P$ in b) inderdaad gespannen blijft. Wat gebeurt er met P indien a groter is dan deze waarde?
- v) Geldt, na stilzetten, t.o.v. O' de momentenstelling?

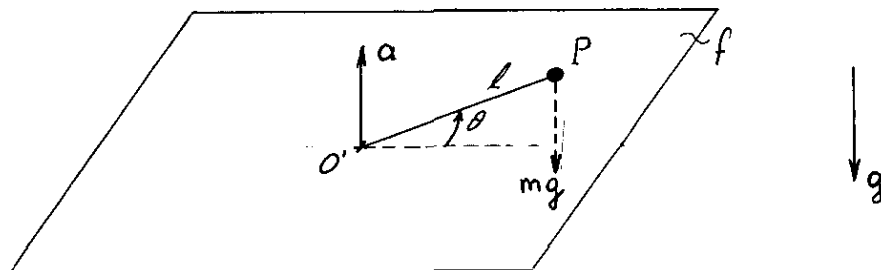
7.



Een massapunt P , massa m , ligt op een hellend vlak, hellingshoek $\alpha = \pi/6$ wrijvingscoëfficiënt $f = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Het hellend vlak heeft een horizontale versnelling a . Geef, voor a uit het gebied $(-\infty, \infty)$, aan voor welke waarden van (a/g) het punt P :

- i) langs het vlak naar beneden gaat glijden,
- ii) langs het vlak naar boven gaat glijden,
- iii) in rust blijft t.o.v. het vlak,
- iv) los komt van het vlak.
- v) Geef voor de gevallen i) en ii) de versnelling van P t.o.v. het vlak.

8.

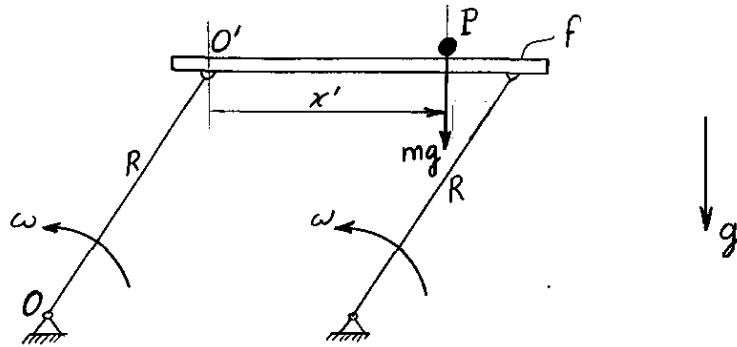


Een massapunt P , massa m , ligt op een horizontaal vlak en is met een koord, lengte l , verbonden met een punt O' van dat vlak. De wrijvingscoëfficiënt tussen P en het vlak is f . Het vlak stijgt met een verticale versnelling a ($a > 0$). Op $t = 0$ heeft P t.o.v. het vlak een horizontale snelheid v_0 loodrecht op $O'P$.

- i) Bepaal de normaalkracht die P ondervindt van het vlak.
Waarom is deze groter dan mg ?
- ii) Bepaal de snelheid van P als functie van de afgelegde hoek θ .
- iii) Wat is de door P afgelegde weg op het moment dat hij tot rust komt t.o.v. het vlak?

9. In een lift van 260 kg staan drie personen met massa's 60, 80 en 100 kg. De kracht van de liftmotor is 5500 N. Hoe groot is de versnelling van de lift bij het stijgen? Veronderstel dat de man van 100 kg op een weegschaal staat. Hoeveel "weegt" hij dan als de lift stijgt?

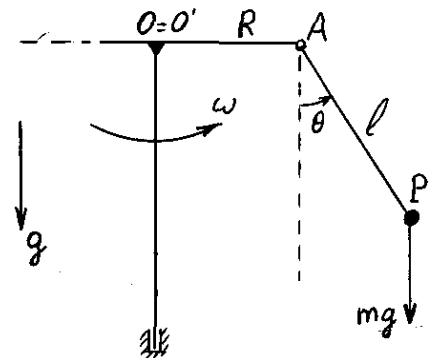
10.



Beschouw de in opgave 11, hoofdstuk 2 beschreven translaterende tafel met daarop een massapunt P, massa m . De wrijvingscoëfficiënt tussen P en de tafel is f .

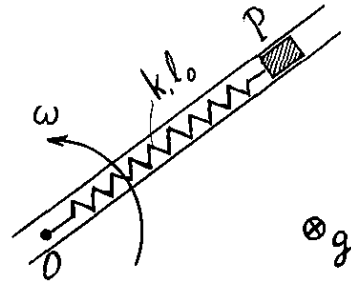
- i) Bepaal de schijnkracht werkend op P, na stilzetten van een met O' meetranslenderend stelsel.
- ii) Bepaal de normaalkracht die P ondervindt van de tafel.
- iii) Bepaal de maximale waarde van ω waarvoor P nog in rust blijft t.o.v. de tafel.

11. Beschouw een met constante hoeksnelheid roterende zweefmolen (zie ook opgave 15, H.2). De massa van de stang AP mag worden verwaarloosd en P kan alleen bewegen in het met O' , A en P meeroterende verticale vlak. Zet het met de, aan de molenas verbonden, waarnemer O' meeroterende stelsel stil.



- i) Bepaal de op P werkende centrifugaal- en corioliskracht (in grootte en richting).
 - ii) Stel de bewegingsvergelijking voor P op.
 - iii) Bepaal de door de stang op P uitgeoefende reactiekrachten.
 - iv) Bepaal ω , als functie van θ , opdat P in rust blijft t.o.v. de molen. Hoe groot zijn dan de reactiekrachten in de stang?
 - v) Geldt na stilzetten om A de momentenstelling? Zo ja, wat levert deze dan op?
12. Een andere, buiten gebruik geraakte kermisattractie, is de zogenaamde "steile wand". Deze bestaat uit een cilindervormige ton met verticale as, die met een constante hoeksnelheid ω om deze as roteert. Deze hoeksnelheid is zo groot dat personen die tegen de binnenwand van de ton komen aan deze wand blijven "plakken", dus met de ton meebewegen. Neem de binnenstraal van de ton $R = 2,5$ m en de wrijvingscoëfficiënt $f = 1$.
- i) Hoe groot is de normaalkracht die de man van de wand ondervindt?
 - ii) Hoe groot moet ω minstens zijn, opdat een man van 80 kg blijft "plakken". Is deze waarde afhankelijk van het gewicht van de man?
 - iii) Welke extra schijnkracht ondervindt de man indien hij met een horizontale snelheid V t.o.v. de ton langs de wand gaat kruipen?
 - iv) Bewijs dat de normaalkracht op de man groter wordt indien hij in de draairichting kruipt en kleiner indien hij in tegenovergestelde richting kruipt.
13. Een motorrijder rijdt met een constante tangentiale snelheid v_0 langs de binnenkant van een verticale cirkel met straal r . Hoe groot moet v_0 zijn opdat de motorrijder niet naar beneden valt?
14. Een rivier stroomt op het noordelijk halfrond in zuidelijke richting. Laat zien dat het water door de op de waterdeeltjes werkende corioliskracht tegen de rechter (rechts voor een met de stroom meebewegende waarnemer) oever opstuwt.

15. Een gladde buis roteert met constante hoeksnelheid ω in een horizontaal vlak om een vast punt 0. In de buis bevindt zich een massapunt P, massa m , dat via een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 , verbonden is met 0.



Bepaal, door de buis stil te zetten,

- de bewegingsvergelijking van P,
 - de reactiekrachten door de buis op P uitgeoefend,
 - de afstand OP, als functie van ω , waarvoor P in rust blijft t.o.v. de buis.
16. Beschouw het in opgave 13, hoofdstuk 3, beschreven systeem. Neem aan dat er geen wrijving is en neem de draaiingsas verticaal. Bepaal, door de rotatie van de ring stil te zetten,
- de bewegingsvergelijking van P,
 - de reactiekrachten door de ring op P uitgeoefend,
 - de waarden van θ , als functie van ω , waarvoor P in rust blijft t.o.v. de ring.

Antwoorden (§4.4.)

6. a) i) $m\ddot{x}' + kx' = m(g - a)$ (x' : uitrekking veer);

ii) $x_0 = \frac{m(g - a)}{k}$;

b) i) $m\ell\ddot{\theta} + m(g - a)\sin\theta = 0$;

ii) als $a \leq g$: $\theta_0 = 0$, als $a \geq g$: $\theta_0 = \pi$;

iv) $a \leq g$.

7. i) $-g\sqrt{3} \leq a < 0$; ii) $a > g\sqrt{3}$; iii) $0 \leq a \leq g\sqrt{3}$; iv) $a < -g\sqrt{3}$;
v) geval i): $\frac{2}{3} a\sqrt{3}$, geval ii): $\frac{1}{3} a\sqrt{3} - g$.

8. i) $m(g + a)$; ii) $v = \sqrt{v_0^2 - 2(g + a)f\ell\theta}$; iii) $\frac{v_0^2}{2(g + a)f}$.

9. 1 m/sec^2 ; 1100 N .

10. i) $\underline{F}_s = m\omega^2 R \cos \theta \underline{e}_x + m\omega^2 R \sin \theta \underline{e}_y$, (\underline{e}_x , langs tafel, θ : hoek tussen $00'$ en horizontaal door 0);

ii) $N = mg - m\omega^2 R \sin \theta$;

iii) $\sqrt{\frac{gf}{R\sqrt{1+f^2}}}$.

11. Eenheidsvectoren volgens 15, hoofdstuk 2.

i) $\underline{K}_c = m\omega^2 (R + \ell \sin \theta) \underline{e}_y$, $\underline{K}_{cor} = 2m\omega \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_z$;

ii) $m\ell \ddot{\theta} + mg \sin \theta - m\omega^2 (R + \ell \sin \theta) \cos \theta = 0$;

iii) $S_1 = mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2 + m\omega^2 (R + \ell \sin \theta) \sin \theta$ (richting PA),

$S_2 = -2m\omega \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_z$, (\perp stang).

iv) $\omega^2 = \frac{g \sin \theta}{(R + \ell \sin \theta) \cos \theta}$, $S_1 = \frac{mg}{\cos \theta}$, $S_2 = 0$.

12. i) $N = m\omega^2 R$;

ii) $\omega \geq 2 \text{ rad/sec}$; is onafhankelijk van gewicht;

iii) $\underline{K}_{cor} = 2m\omega v \underline{e}_x$, (\underline{e}_x , : radiaal).

13. $v_0 \geq \sqrt{gR/f}$.

15. Neem: \underline{e}_x , langs buis en \underline{e}_z , langs $\underline{\omega}$ ($\underline{x}' = r \underline{e}_x$).

i) $m\ddot{r} + (k - m\omega^2)r = k\ell_0$,

ii) $\underline{N}_1 = 2m\omega^2 r \underline{e}_y$, $\underline{N}_2 = -mg \underline{e}_z$,

iii) $r = \frac{k\ell_0}{(k - m\omega^2)}$.

16. i) $mR\ddot{\theta} - mg \sin \theta - m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta = 0$.

ii) $N_1 = m\omega^2 R \sin \theta - mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2$ (richting PO),

$N_2 = 2m\omega R \dot{\theta} \cos \theta$ (loodrecht vlak van de ring).

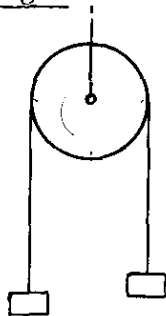
iii) $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pm \arccos\left(-\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ (mits $\frac{g}{\omega^2 R} < 1$).

4.5. Vrijmaken van stelsels van meerdere deeltjes

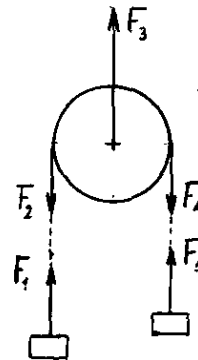
In deze paragraaf beschouwen we stelsels van een beperkt aantal (dwz. 2 à 3) deeltjes. We zullen hier niet de totale beweging van het stelsel bekijken (dit gebeurt in hoofdstuk 5) maar de beweging van de vrijgemaakte deeltjes afzonderlijk.

Theorievragen

1.

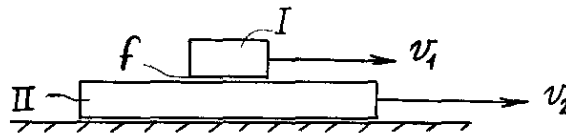


vrijmaken:



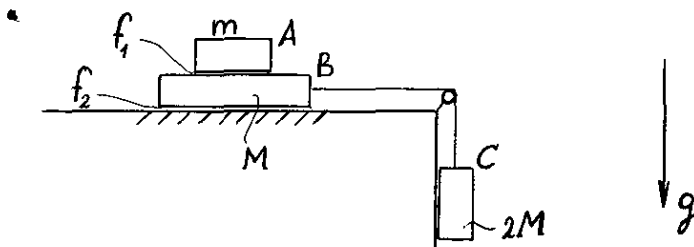
Beschouw een, eventueel bewegend, massaloos katrol met twee massapunten. Welke onderlinge relaties moeten er gelden tussen de in de figuur getekende reactiekrachten F_1 t/m F_5 ?

2.



Een blok I ligt op een ander blok II. Beide blokken bewegen rechtlijnig met snelheden v_1 resp. v_2 . De wrijvingscoëfficiënt tussen de blokken is f . Waar hangt de grootte en de richting van de wrijving door II op I uitgeoefend vanaf en hoe is het verband tussen deze wrijving en de normaalkracht van II op I?

3.



Een blok A, massa m , ligt op een blok B, massa M , dat op een horizontaal vlak ligt. De wrijvingscoëfficiënt tussen A en B is f_1 en die tussen B en het horizontale vlak is f_2 . Het blok B is via een koord, dat over een gladde pen is geslagen, verbonden met een blok C, massa $2M$, dat verticaal onder de pen hangt.

i) Neem eerst $m = 0$. Hoe groot moet f_2 minstens zijn opdat B niet in beweging komt? Hoe groot is dan de kracht in het koord? Indien f_2 kleiner is dan de hiervoor gevonden waarden, hoe groot zijn dan de versnellingen van B en C? Waarom is de kracht in het koord nu kleiner dan $2Mg$?

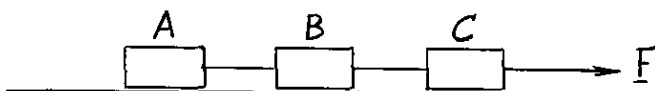
Neem verder $m \neq 0$.

ii) Hoe groot moet f_2 nu minstens zijn opdat B niet in beweging komt? Hoe groot zijn dan de kracht in het koord en de op A en B uitgeoefende wrijvingskrachten?

iii) Stel f_2 kleiner dan de bij ii) gevonden waarde. Bepaal de waarden van f_1 opdat A in rust blijft t.o.v. B. Bepaal dan de versnellingen van A, B en C.

iv) Neem nu de wrijving tussen B en het horizontale vlak gelijk aan nul ($f_2 = 0$). Aan welke conditie moet f_1 voldoen opdat A gaat bewegen t.o.v. B? Bepaal in dit geval de versnellingen van A, B en C.

4.

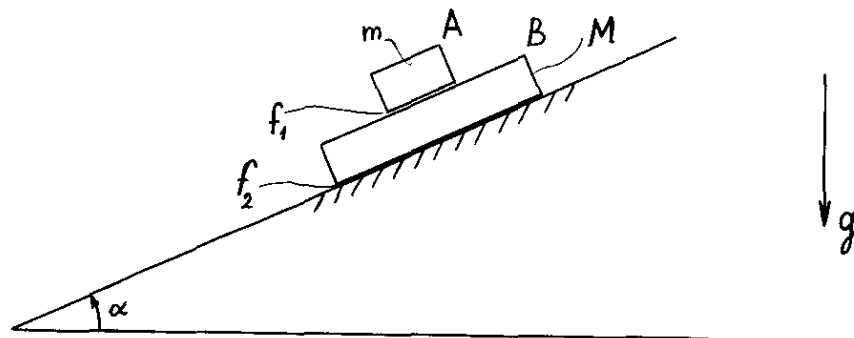


De massapunten A, B en C, massa's resp. 10 kg, 15 kg en 20 kg bewegen langs een gladde horizontale rechte. De punten A en B en de punten B en C zijn verbonden door een koord, terwijl op C een horizontale kracht $F = 50\text{N}$ werkt.

i) Bepaal de versnelling van de punten en de krachten in de koorden.

ii) Herhaal het vraagstuk indien het stelsel verticaal in plaats van horizontaal beweegt.

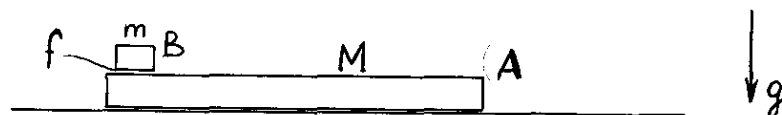
5.



Een blok A, massa m , ligt op een blok B, massa M , dat weer ligt op een hellend vlak, hellingshoek α . De wrijvingscoëfficiënt tussen A en B bedraagt f_1 en die tussen B en het vlak f_2 . Zowel A als B is aanvankelijk in rust. Geef de relaties voor f_1 en f_2 , als functies van m en M , opdat:

- i) A en B in rust blijven,
- ii) A daalt maar B in rust blijft,
- iii) A en B met dezelfde snelheid dalen.
- iv) Geef in het f_1 - f_2 -vlak aan in welke gebieden de bewegingen i), ii) en iii) optreden. Welke beweging zal in het opengebleven gebied plaatsvinden?

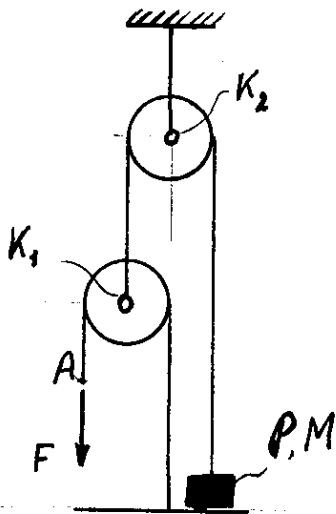
6.



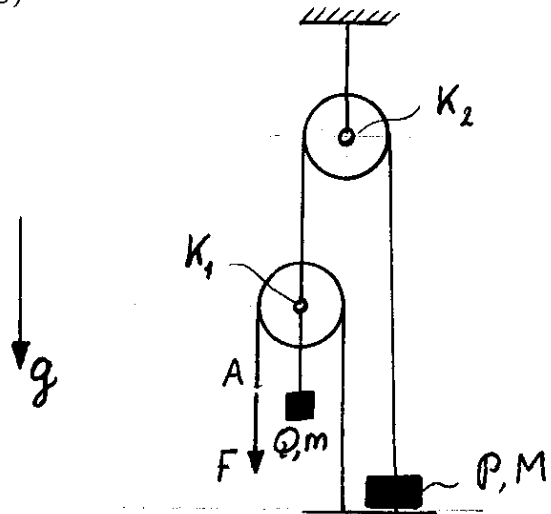
Een massapunt B, massa m , ligt op een lange rechte balk A, massa M , die op een glad horizontaal vlak ligt. De wrijvingscoëfficiënt tussen B en A is f . Op $t = 0$ is B in rust en krijgt A plotseling een snelheid v_0 . Daarna beweegt het systeem verder vrij.

- i) Beschrijf de beweging van A en B zolang B t.o.v. A beweegt.
- ii) Welke weg heeft B t.o.v. de balk afgelegd op het moment dat B tot rust komt t.o.v. de balk? Hoe groot is dan de snelheid van het stelsel?

7. a)



b)

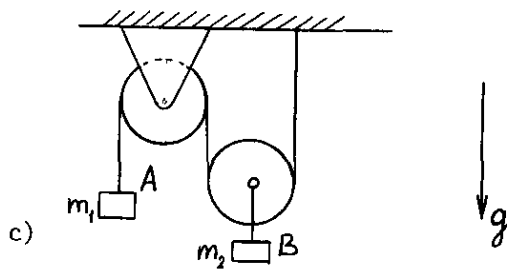
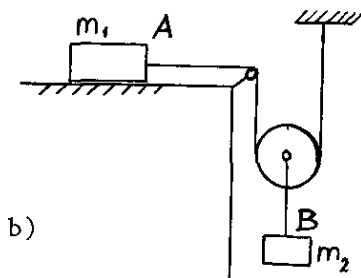
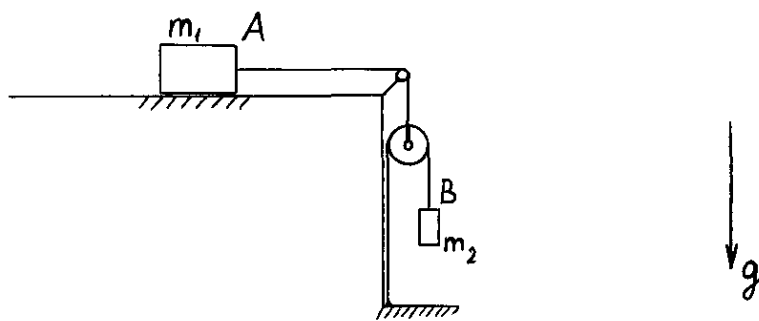


In bovenstaande constructies is nergens wrijving en de katrollen zijn massa-loos. Aan het systeem wordt getrokken met een constante kracht F , op de in de figuur aangegeven wijze.

- i) Hoe groot moet F zijn, opdat het massapunt P , massa M , naar boven gaat bewegen? Geef in dit geval de bewegingsvergelijking van P . Hoeveel is A gezakt, als P een hoogte h is gestegen?
- ii) Het linkerkatrol K_1 wordt verzwaard met een massapunt Q , massa m . Beantwoord dezelfde vragen als bij i); hoeveel draagt de contramassa Q bij tot de verlaging van F .

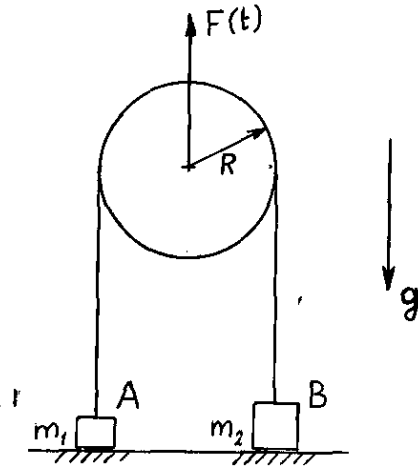
8.

a)



Bepaal voor de hierboven getekende katrolsystemen de versnellingen van de massapunten en de krachten in de koorden. Alle katrollen zijn massa-loos en er is nergens wrijving. Hoe groot moet voor c) m_1 zijn opdat A naar beneden beweegt?

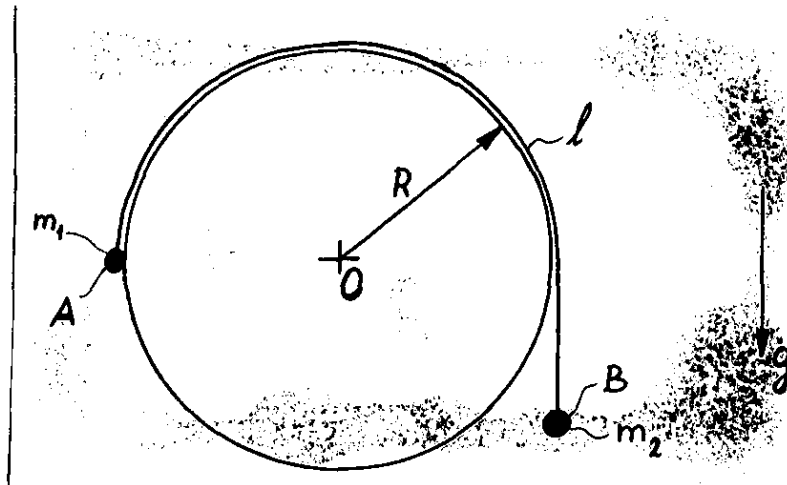
9.



Twee massapunten A en B, massa's resp. m_1 en m_2 , rusten op een horizontaal vlak en zijn verbonden met een massaloos katrol, straal van de schijf R , lengte van het koord ℓ . Op $t = 0$ begint op het katrol een kracht $F(t)$ te werken welke van de tijd afhangt volgens $F(t) = 2\alpha t$.

- i) Bewijs dat A en B aanvankelijk in contact blijven met het horizontale vlak.
- ii) Neem $m_1 < m_2$. Welk massapunt komt dan het eerst los en op welk tijdstip?
- iii) Bepaal de versnelling van het stijgende massapunt gedurende de fase dat één massapunt los is en het andere nog op het horizontale vlak rust.
- iv) Bereken het tijdstip waarop ook het andere massapunt loskomt.
- v) Geef de versnellingen van A en B indien beide los zijn van de vloer.

10.



Een massapunt A, massa m_1 , kan bewegen langs een vaste, verticale, cirkelvormige, gladde goot, middelpunt O, straal R. Het massapunt A is via een in de goot liggend massaloos koord, lengte l , $l > \pi R$, verbonden met een ander massapunt B, massa m_2 , $m_2 > m_1$. Op het begintijdstip $t = 0$ is het systeem in rust, bevindt A zich op dezelfde hoogte als O links van O en hangt B verticaal onder het tegenover A liggende punt van de goot. Het systeem gaat bewegen onder invloed van de zwaartekracht, versnelling g . Bepaal, als functie van de door A afgelegde hoek θ en zolang A nog in contact is met de goot:

- i) de bewegingsvergelijking met beginvoorwaarden;
- ii) de spankracht in het koord;
- iii) de op A werkende normaalkracht.
- iv) Geef de conditie waaruit het punt waarop A loskomt van de goot kan worden bepaald. Hoe moet de verhouding m_2/m_1 worden gekozen, opdat A precies verticaal boven O loskomt?

Antwoorden (§4.5.)

1. $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F$, $F_3 = 2F$.

3. i) 2 ; $2Mg$; $\frac{1}{3}(2 - f_2)g$.

ii) $\frac{2M}{(M+m)}$; $2Mg$; 0 ; $2Mg$.

iii) $f_1 \geq \frac{2M - (M+m)f_2}{(3M+m)}$; $\frac{2Mg - (M+m)gf_2}{(3M+m)}$.

iv) $f_1 < \frac{2M}{(3M+m)}$; $a_A = gf_1$; $a_B = a_C = \frac{2Mg - mgf_1}{3M}$.

4. i) $a = \frac{10}{9} \text{ m/sec}^2$; $S_1 = \frac{250}{9} \text{ N}$ (tussen B en C); $S_2 = \frac{100}{9} \text{ N}$ (tussen A en B).

ii) $a = \frac{80}{9} \text{ m/sec}^2$ (naar beneden); $S_1 = \frac{250}{9} \text{ N}$; $S_2 = \frac{100}{9} \text{ N}$.

5. i) $f_1 > \tan \alpha$, $f_2 > \tan \alpha$;

ii) $f_1 < \tan \alpha$, $f_2 > \frac{mf_1 + M \tan \alpha}{(m + M)}$;

iii) $f_1 > f_2$, $f_2 < \tan \alpha$.

6. i) $v_A = \frac{fmg}{M} t$, $v_B = v_0 - fgt$.

ii) $\frac{Mv_0^2}{2(M+m)fg}$, $\frac{mv_0}{(M+m)}$.

7. i) $F \geq \frac{1}{2}Mg$; $My = 2F - Mg$; $2h$.

ii) $F \geq \frac{1}{2}(M-m)g$;

$$(M+m)\ddot{y} = 2F - (M-m)g.$$

8. a) $a_A = \frac{2m_2g}{(m_1 + 4m_2)}$, $a_B = \frac{4m_2g}{(m_1 + 4m_2)}$;

$$S_A = 2S, S_B = S = \frac{m_1m_2g}{(m_1 + 4m_2)}.$$

b) $a_A = \frac{2m_2g}{(4m_1 + m_2)}$, $a_B = \frac{m_2g}{(4m_1 + m_2)}$,

$$S_A = S = \frac{2m_1m_2g}{(4m_1 + m_2)}, S_B = 2S.$$

c) $a_A = \frac{2(m_2 - 2m_1)}{(4m_1 + m_2)}$ (naar boven), $a_B = \frac{(m_2 - 2m_1)}{(4m_1 + m_2)}$ (naar beneden),

$$S_A = S = \frac{3m_1m_2}{(4m_1 + m_2)} ; m_1 > \frac{1}{2}m_2.$$

9. ii) A los op $t = \frac{m_1 g}{\alpha}$;

iii) $\frac{\alpha t}{m_1} - g$;

iv) $\frac{m_2 g}{\alpha}$;

v) $a_A = \frac{\alpha t}{m_1} - g$, $a_B = \frac{\alpha t}{m_2} - g$.

10. i) $(m_1 + m_2)R\ddot{\theta} = m_2 g - m_1 g \cos \theta$,
 $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

ii) $S = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \cos \theta)$.

iii) $N = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} [(3m_1 + m_2) \sin \theta - 2m_2 \theta]$.

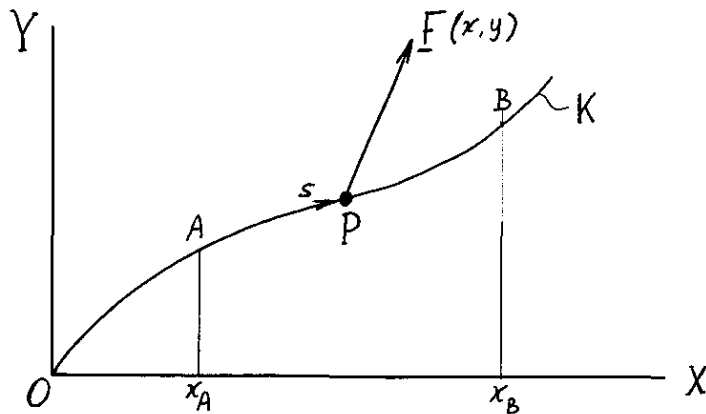
iv) Los voor $\theta = \theta_1$: $\theta_1 = \frac{(3m_1 + m_2)}{2m_2} \sin \theta_1$;

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, als $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi - 1}{3}$.

5. Arbeid en energie

Theorievragen

1.



Een punt P beweegt onder invloed van een kracht $\underline{F}(x,y)$ langs een vlakke kromme K van een positie A naar een positie B. De hierbij door \underline{F} verrichte arbeid kan worden geschreven als:

$$A = \int_A^B (\underline{F}, d\underline{r}) .$$

i) Laat K gegeven zijn door de coördinaatvoorstelling:

$$y = f(x) .$$

Bewijs dat

$$A = \int_{x_A}^{x_B} [\bar{F}_x(x) + f'(x)\bar{F}_y(x)] dx ,$$

waarin:

$$\bar{F}_x(x) = F_x(x, f(x)), \bar{F}_y(x) = F_y(x, f(x)) \text{ en } f'(x) = \frac{df(x)}{dx} .$$

ii) Laat K gegeven zijn door de parametervoorstelling:

$$x = f_1(\tau), y = f_2(\tau) ,$$

en bewijs dan dat

$$A = \int_{\tau_A}^{\tau_B} [\tilde{F}_x(\tau)f'_1(\tau) + \tilde{F}_y(\tau)f'_2(\tau)] d\tau ,$$

waarin:

$$\tilde{F}(\tau) = F(f_1(\tau), f_2(\tau)) \text{ en } f'(\tau) = \frac{df(\tau)}{d\tau} .$$

iii) Neem voor de parameter τ de tijd t en bewijs dat:

$$A = \int_{t_A}^{t_B} (\underline{F}, \underline{v}) dt .$$

iv) Neem voor τ de booglengte s en bewijs dat

$$A = \int_{s_A}^{s_B} F_T ds .$$

2. i) Geef de definitie van de kinetische energie T van een massapunt.
ii) Bepaal de kinetische energie van de massapunten uit de vraagstukken:
Hoofdstuk 2: 12, 14 (uitdrukken in eV), 18 en 20.
Hoofdstuk 3: 11, 13, 14 en 15.
iii) Bewijs dat voor de arbeid A als P gaat van A naar B geldt:

$$A = T_B - T_A .$$

3. Beschouw een op een punt P werkende kracht \underline{F} , welke alleen een functie is van de positie \underline{r} van P :

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}) .$$

- i) Wanneer is $\underline{F}(\underline{r})$ conservatief?
Neem voor de nu volgende vragen aan dat $\underline{F}(\underline{r})$ conservatief is.
ii) Geef een definitie van de potentiële energie $U(\underline{r})$.
Is bij gegeven $\underline{F}(\underline{r})$ de potentiële energie volledig te bepalen?
iii) Hoe luidt het verband tussen F_x, F_y, F_z enerzijds en $U(x, y, z)$ anderzijds en tussen F_r, F_θ en $U(r, \theta)$.
iv) Bepaal de potentiële energie van de volgende krachten:
a) $\underline{F} = c \underline{e}_x$, (bijvoorbeeld: zwaartekracht).
b) $\underline{F} = cx \underline{e}_x$, (bijvoorbeeld: veer).
c) $\underline{F} = \frac{c}{r} \underline{e}_r$, (bijvoorbeeld: Newtons aantrekkingskracht).
v) Bepaal \underline{F} als de potentiële energie gegeven is door:
a) $U(x) = cx$ of $U(x) = cx + d$.

Bewijs dat beide dezelfde kracht geven.

b) $U(x, y) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

c) $U(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$,

d) $U(x,y) = x + y + \frac{1}{2}(x + y)^2$,

e) $U(r,\theta) = r \cos \theta + r \sin \theta + \frac{1}{2}r^2$.

Laat zien dat de bij d) en e) gevonden krachten gelijk zijn.

4. Geef voor een conservatief systeem met één graad van vrijheid en potentiële energie $U = U(x)$ de voorwaarden voor:

i) evenwicht,

ii) stabiliteit van dat evenwicht.

iii) Stel:

$$U = U(x) = ax^2 - bx .$$

Bepaal de evenwichtsstand(en) en onderzoek hun stabiliteit.

iv) Idem, als

$$U = U(\theta) = a \cos \theta, \quad (a > 0), \quad (0 \leq \theta < 2\pi) .$$

5. i) Laat zien dat de resultaten van de vraagstukken

§ 4.1: 4i),

§ 4.2: 15ii),

overeenkomen met $T + U = \text{constant}$.

ii) Bewijs dat voor een punt met één graad van vrijheid (zeg: x): $T + U = \text{constant}$, gelijkwaardig is met de tweede wet van Newton:

$$F_x(x) = m\ddot{x} .$$

6. Een punt P, massa $m = 1$, beweegt onder invloed van de kracht:

a) $\underline{F} = 5t\underline{e}_x + (3t^2 - 1)\underline{e}_y$,

b) $\underline{F} = x\underline{e}_x + (1 - 3y^2)\underline{e}_y$.

Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich zonder beginsnelheid in de oorsprong. Bepaal, voor a) als functie van de tijd t en voor b) als functie van de positie (x,y) van P,

- i) de impuls van P,
- ii) de kinetische energie van P en
- iii) de door de kracht verrichte arbeid.
- iv) Vergelijk de antwoorden van ii) en iii).
- v) Zijn deze krachten conservatief? Zo neen, waarom niet?
Zo ja, geef dan de bijbehorende potentiële energie.

7. Beschouw een kracht van de volgende vorm

$$\underline{F} = m\omega^2 y \underline{e}_y.$$

- i) Bereken de bij \underline{F} behorende potentiële energie ($= U_c$).
- ii) Laat zien dat \underline{F} overeenkomt met de centrifugaalkracht, werkend in het stilgezette systeem, op een massapunt P, massa m , indien P roteert met hoeksnelheid $\underline{\omega}$ ($= \omega \underline{e}_x$) om de \underline{x} -as, waarbij P zich op een afstand y van de draaiingsas bevindt.
- iii) Verklaar nu waarom de bij i) berekende U_c de centrifugaalpotentiaal wordt genoemd. Laat zien dat deze U_c gelijk maar tegengesteld is aan de kinetische energie van P (bij de beweging volgens ii)) tgv. alléén de rotatie $\underline{\omega}$ (dus tgv. de sleebeweging; daarom heet deze $T: T_{sl(eep)}$); dus toon aan dat

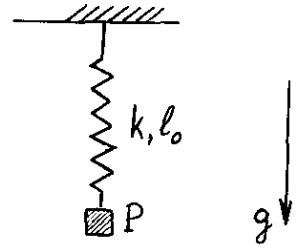
$$U_c = -T_{sl} (\equiv T(\underline{v}_{rel} = \underline{0})).$$

- iv) Geef aan op welke manier(en) U van een systeem met een voorgeschreven beweging de kinetische evenwichtsstanden kunt bepalen. Wat verstaat U hiërbij onder kinetische evenwichtsstanden?
 - v) Welke "energie-behoudwet" kan er in een systeem met voorgeschreven beweging gelden; formuleer de hiërbij behorende condities.
-

8. Een massapunt P , massa m , kan bewegen langs een glad hellend vlak, hellingshoek α . Op $t = 0$ heeft P een naar boven gerichte snelheid v_0 . Bereken, als functie van de door P afgelegde weg x :
- de door de zwaartekracht verrichte arbeid,
 - de verandering van de kinetische energie van P ,
 - de verandering van de potentiële energie van P . Is de keuze van het nulniveau hierbij van belang?
 - Vergelijk de antwoorden op i), ii) en iii).
 - Bepaal het hoogste punt dat P bereikt en de snelheid waarmee P weer in zijn uitgangspunt terugkomt.
 - Beantwoord dezelfde vragen indien het hellend vlak niet glad is, maar een wrijvingscoëfficiënt f heeft. (ad v) Waaraan moet f voldoen, opdat P inderdaad terugkomt).
9. Een massapunt P , massa m , beweegt zonder wrijving langs een verticale cirkel met straal R . Het punt P begint te bewegen vanuit het hoogste punt van de cirkel. Bereken de door de zwaartekracht verrichte arbeid als functie van:
- de afgelegde hoek,
 - de verticale zakking van P .
10. Bepaal, door middel van een energiebeschouwing, de toename van de kinetische energie van het geladen deeltje uit opgave 18 van § 4.1, nadat het deeltje een afstand L loodrecht op de \underline{E} -richting heeft afgelegd.
11. Een massapunt P , massa m , valt onder invloed van de zwaartekracht vanuit rust over een afstand h naar beneden.
- Bereken:
- de door de zwaartekracht verrichte arbeid;
 - de toename van de kinetische energie van P ;
 - de afname van de potentiële energie van P . Is de keuze van het nulniveau hierbij van belang?
 - Vergelijk de antwoorden op i), ii) en iii).

12. Een massapunt P, massa m , hangt aan een veer, veerconstante k , ongespannen veerlengte l_0 .

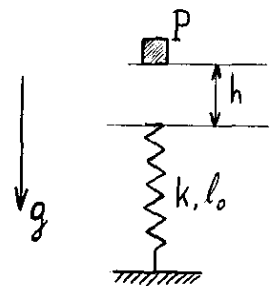
- i) Hoe groot is de totale potentiële energie behorende bij de statische uitwijking.
- ii) Hoe groot is de potentiële energie bij een verticale verplaatsing x van P. Neem hierbij x zowel vanuit de ongespannen toestand van de veer als vanuit de statische uitwijking. Maakt het verschil of P naar boven of naar beneden is verplaatst?
- iii) Bewijs, met het resultaat van iii), dat de statische uitwijking een stabiele evenwichtsstand is.
- iv) Geldt hier: $T + U = \text{constant}$? Zo ja, stel deze relatie dan op. Welke vergelijking verkrijgt U door deze relatie naar de tijd te differentiëren?



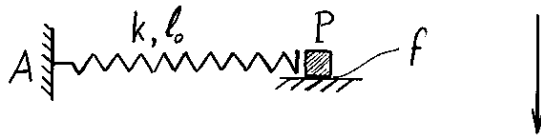
13. Geef de energie-betrekkingen behorende bij de opgaven 9 en 10 van § 3.2 en leidt uit deze betrekkingen de bewegingsvergelijkingen af.

14. Een massapunt P, massa m , bevindt zich op een hoogte h boven het vrije uiteinde van een verticale veer, veerconstante k , die op de vloer is bevestigd. Het punt wordt vanuit rust losgelaten.

- i) Bepaal de snelheid van P op het moment dat hij op de veer valt.
- ii) Bepaal de maximale indrukking van de veer.



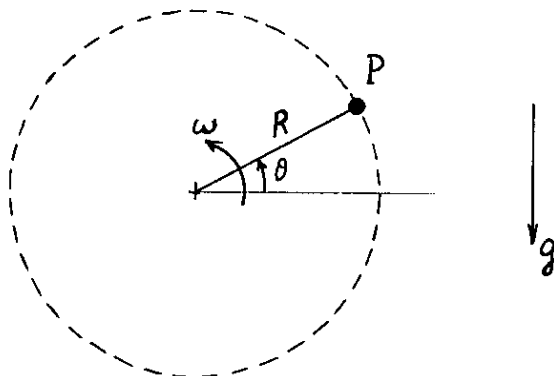
15.



Een massapunt P, massa m , ligt op een horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f , tegen het vrije einde van een horizontale veer die is verbonden met het vaste punt A. Het punt P wordt in de richting van A gedrukt, waarbij de veer een afstand x_0 ($x_0 > \frac{2fmg}{k}$) wordt ingedrukt, en vervolgens vanuit rust losgelaten.

- i) Bewijs dat het massapunt los komt van de veer op het moment dat de veer zijn ongespannen lengte heeft bereikt.
- ii) Bepaal de snelheid van P als functie van zijn positie.
- iii) Bepaal de plaats waar P tot rust komt.

16.



Een massapunt P, massa m , is door middel van een massaloze staaaf OP verbonden met een vast punt O en kan bewegen in een verticale cirkel.

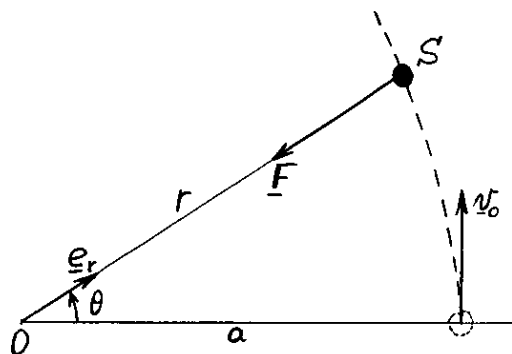
- a) De staaaf OP draait vrij om O.
 - i) Geldt nu $T + U = \text{constant}$? Zo ja, schrijf dan deze betrekking uit.
 - ii) Bereken de verandering in de kinetische energie van P en in de hoeksnelheid van OP tussen het onderste en het bovenste punt van de cirkel, als gegeven is dat de hoeksnelheid in het bovenste punt ω is.
 - iii) Bepaal de evenwichtsstanden van OP en onderzoek hun stabiliteit.
- b) De staaaf OP wordt gedwongen met constante hoeksnelheid ω om O te draaien.
 - i) Geldt nu $T + U = \text{constant}$? Waarom (niet)?
 - ii) Bepaal T en U van P. Bewijs uw antwoord op i).

17. Een satelliet S, massa m, wordt door het middelpunt van de aarde O aangetrokken door een kracht \underline{F} volgens

$$\underline{F} = - \frac{mk}{2} \frac{\underline{e}_r}{r},$$

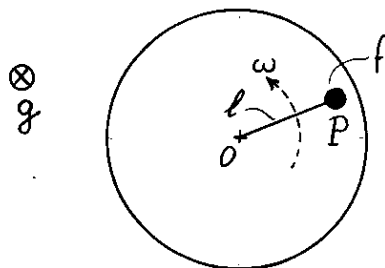
waarin k een constante is en $\underline{r} = r \underline{e}_r$ de positie van S t.o.v. O.

De satelliet wordt afgeschoten op een afstand a van O met een beginsnelheid \underline{v}_0 loodrecht op OS.



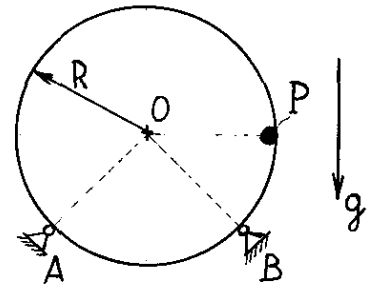
- i) Bepaal de kinetische en potentiële energie van S en formuleer de energiebehoudwet voor dit systeem.
- ii) Bewijs dat het impulsmoment om O van S behouden blijft en schrijf deze relatie uit. Bepaal hieruit $\dot{\theta}$ als functie van r.
- iii) Stel een vergelijking op voor \dot{r} als functie van r.
- iv) Hoe groot mag v_0 hoogstens zijn, opdat de afstand van S tot O begrensd blijft?
- v) Voor welke waarde v_0 gaat S in een cirkel om a bewegen?
- vi) Bewijs dat als v_0 groter (kleiner) is dan de bij v) gevonden waarde dat dan $r \geq a$ ($r \leq a$).

18. Een massapunt P, massa m, ligt op een horizontale schijf met wrijvingscoëfficiënt f. Het punt P is door een koord, lengte l, verbonden met het middelpunt O van de schijf. Op $t = 0$ is P in rust en begint de schijf plotseling om O te roteren met hoeksnelheid ω .



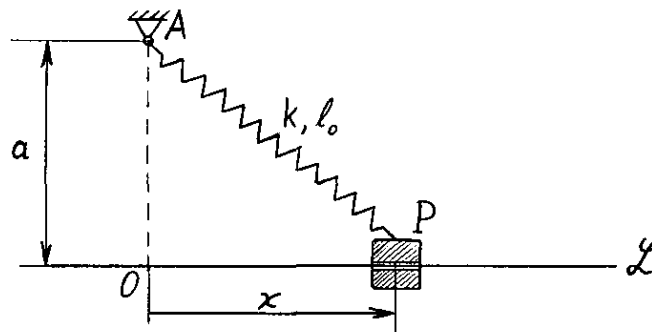
- i) Stel de energiebalans voor P op. Komt deze overeen met $T + U = \text{constant}$?
- ii) Bepaal de snelheid van P als functie van de afgelegde hoek.
- iii) Bewijs dat P na verloop van tijd met de schijf meebeweegt en bepaal de door P tot dit tijdstip afgelegde weg.

19. Een, in een verticaal vlak gelegen cirkelvormige, massaloze schijf, straal R , middelpunt O , rust op twee vaste gladde pennen A en B . A en B liggen op een horizontale lijn en de hoek BAO is α ($0 < \alpha < \pi/2$). Aan de rand van de schijf is een massapunt P , massa m , vast aan de schijf bevestigd. Op $t = 0$ is het stelsel in rust en bevindt P zich op dezelfde hoogte als O .



- i) Geef uitdrukkingen voor de kinetische en potentiële energie van P .
- ii) Bepaal de hoeksnelheid van de schijf als functie van de hoekverdraaiing.
- iii) Hoe groot is de snelheid van P in het laagste punt van zijn baan?
- iv) Wat is de maximale hoogte die P aan de andere kant van O bereikt?

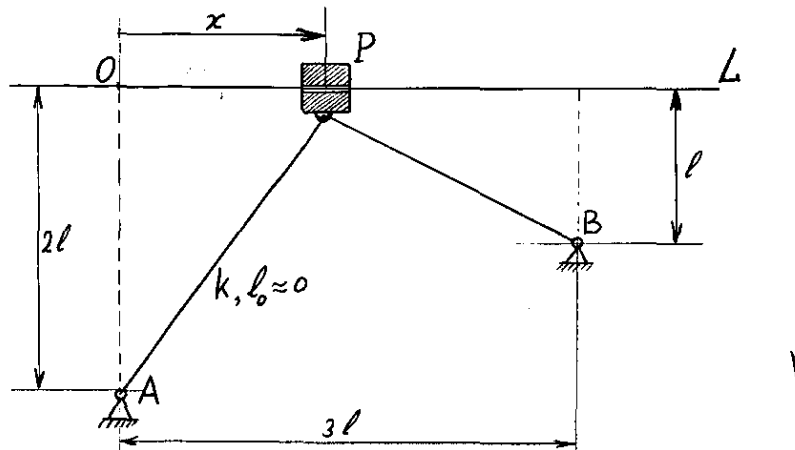
20.



Een massapunt P , massa m , kan zonder wrijving glijden langs een vaste, horizontale rechte L . Het punt P is via een veer, veerconstante k , ongespannen veerlengte l_0 , verbonden met een vast punt A dat een afstand a boven L ligt.

- i) Bepaal de kinetische en potentiële energie van P .
- ii) Bepaal de evenwichtsstanden van P . Toon aan dat P slechts één evenwichtsstand heeft als $l_0 \leq a$ en drie als $l_0 > a$.
- iii) Onderzoek de stabiliteit van de onder ii) gevonden evenwichtsstanden.

21.



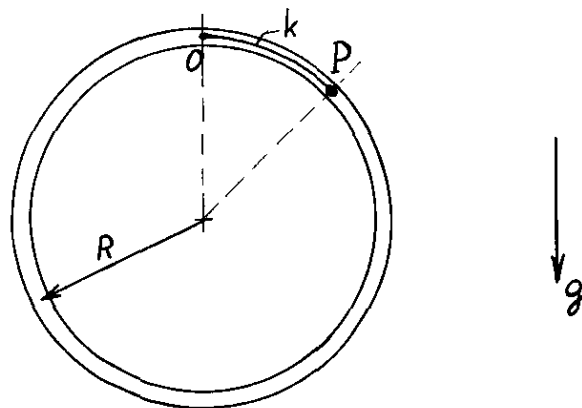
Een massapunt P , massa m , kan zonder wrijving bewegen langs een horizontale rechte L . Aan P zit een oog waardoor een elastisch koord loopt met veerconstante k en te verwaarlozen kleine ongespannen lengte. De beide eindpunten van dit koord zijn bevestigd in twee vaste punten A en B welke in het verticale vlak door L liggen op de in de figuur aangegeven wijze. We onderscheiden de twee gevallen:

- a) het koord kan zonder wrijving door het oog glijden;
- b) het midden van het koord is vast aan het oog bevestigd.

Beantwoord voor beide gevallen de volgende vragen.

- i) Hoe groot is de potentiële energie?
- ii) Welke zijn de evenwichtsstand(en) van P ?
- iii) Zijn deze stand(en) stabiel?

22.



Een massapunt P , massam, kan zonder wrijving bewegen in een, in een verticaal vlak gelegen cirkelvormige buis met straal R . P is via een elastiekje, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte nul, verbonden met het hoogste punt O van de buis.

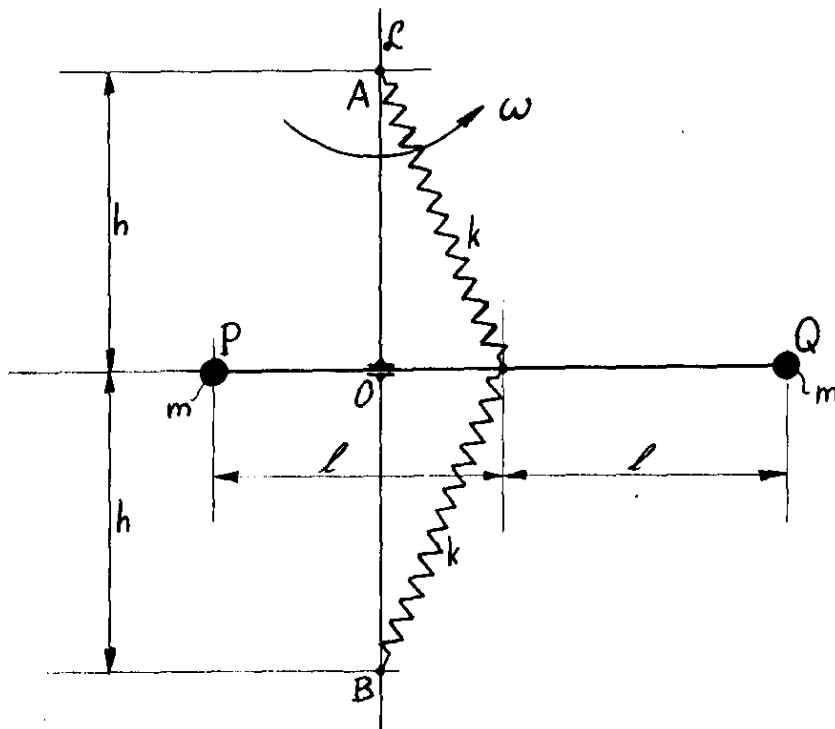
- i) Bepaal de totale potentiële energie.

- ii) Bepaal de evenwichtsstanden van P. Bewijs dat de stand $\theta = 0$ (P in O) de enige evenwichtsstand is als $(kR/mg) \geq 1$, en dat er meerdere evenwichtsstanden zijn als niet aan deze relatie voldaan is.
- iii) Bewijs dat de stand $\theta = 0$:
 - stabiel is als $(kR/mg) > 1$, en
 - instabiel is als $(kR/mg) < 1$.

23. Beschouw de opgaven 15 en 16 uit § 4.4. Zet de voorgeschreven rotatie stil.

- i) Bepaal de centrifugaalpotentiaal.
- ii) Welke "energie-behoudwet" geldt in het stilgezette stelsel? Leidt hieruit de bewegingsvergelijking af.
- iii) Bepaal de kinetische evenwichtsstanden; hoeveel zijn er en waar hangt dit aantal van af?
- vi) Onderzoek de stabiliteit van de bij iii) gevonden standen.

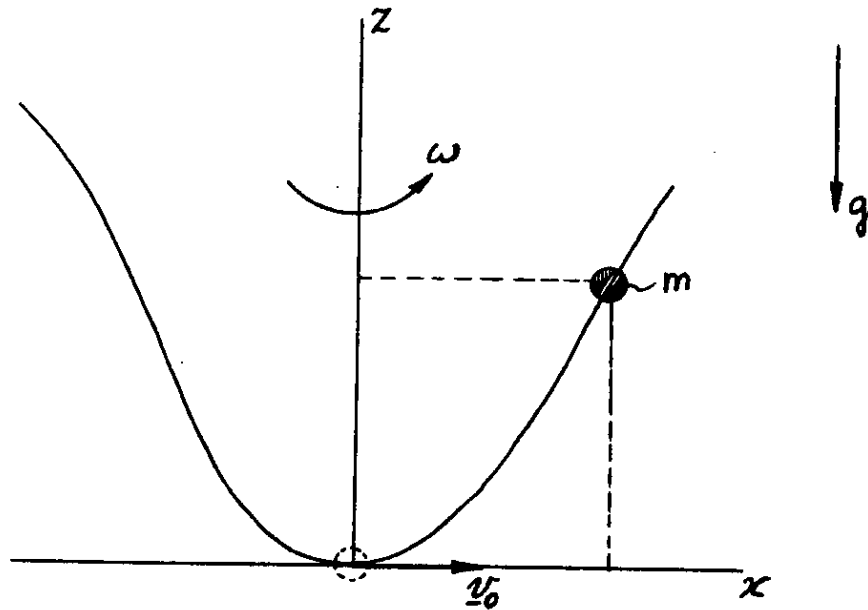
24.



Een staaf PQ kan zonder wrijving in horizontale richting glijden langs een vast punt O van een vaste verticale as l . PQ kan t.o.v. l alleen transleren en niet roteren. De staaf is massaloos, heeft een lengte $2l$ en in zijn eindpunten P en Q zijn twee massapunten, beide met massa m , bevestigd. Het midden van de staaf PQ is via twee identieke veren verbonden met twee vaste punten A en B op l op afstand h boven resp. onder PQ . De veren hebben veerstijfheid k en ongespannen veerlengte nul. Het verticale vlak door l en PQ roteert met voorgeschreven constante hoeksnelheid ω om de verticale as l .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit stelsel?
- ii) Bepaal de bewegingsvergelijking(en).
- iii) Bepaal die standen van PQ, waarvoor PQ in rust kan blijven t.o.v. het roterende verticale vlak (kinetische evenwichtsstanden).
- iv) Onderzoek de stabiliteit van de bij iii) gevonden kinetische evenwichtsstanden.

25.

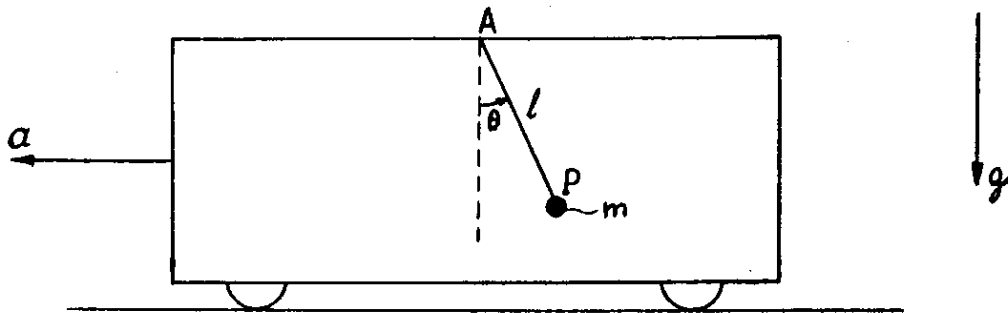


Een verticaal vlak (x-as horizontaal, z-as verticaal) roteert met constante hoeksnelheid ω om de z-as. In dit verticale vlak bevindt zich een starre draad waarlangs een kraal met massa m zonder wrijving kan bewegen. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g .

- (i) Bereken in het "stilgezette" x-z-vlak de schijnkracht die het massapunt, ter plaatse (x_0, z_0) en met snelheid (\dot{x}_0, \dot{z}_0) ondervindt.
- (ii) Bereken in het stilgezette vlak de potentiële energie $U(x, z)$, $U(0, 0) = 0$, voor de resultante van de schijnkracht uit (i) en de zwaartekracht.
- (iii) Neem aan dat de starre draad van de vorm $z = x^2$ is. Op $t = 0$ bevindt de kraal zich in $(0, 0)$ en heeft de snelheid $v_0 \mathbf{e}_{0-x}$. Bereken, als functie van ω en v_0 , de maximale hoogte die de kraal bereikt.

- (iv) Schrijf als $\omega = 0$ een integraaluitdrukking op voor de tijd die de kraal nodig heeft om in $(0,0)$ terug te keren.
- (v) Beantwoord vraag (iii) voor het geval dat de starre draad de vorm $z = x^4$ heeft.
- (vi) Bepaal in geval (v) een positie, anders dan $(0,0)$, op de draad waar de kraal zich in evenwicht kan bevinden.

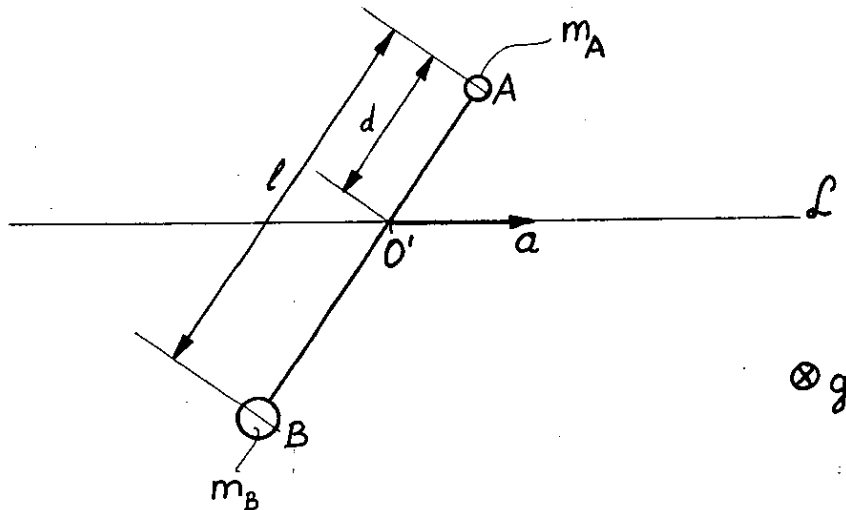
26.



Een wagon beweegt met constante versnelling a langs een rechte lijn. Aan een punt A van het plafond van de wagon is via een koord, lengte l , een massapunt P , massa m , bevestigd. Op zeker tijdstip t_0 maakt het koord een hoek θ_0 met de verticaal door A en is P in rust t.o.v. de wagon.

Bepaal θ_0 , opdat P in rust blijft t.o.v. de wagon. Hoe groot is dan de spankracht in het koord? Is deze stand (in)stabiel?

27.



Een halter bestaande uit een massalooze staaf, lengte l , en twee massapunten A, massa m_A , en B, massa m_B , beweegt in een horizontaal vlak. Een punt O' van de staaf op afstand d van A beweegt langs een rechte ℓ in het vlak met een voorgeschreven constante versnelling a .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft het systeem?
- ii) Hoe groot moet d worden genomen opdat iederestand een evenwichtsstand is?
- iii) Neem aan dat d niet gelijk is aan de onder ii) gevonden waarde, en bewijs dan dat er twee evenwichtsstanden bestaan.
- iv) Bewijs dat van de onder iii) gevonden evenwichtsstanden er een stabiel en een instabiel is.

Antwoorden (H.5.)

2. ii) $26,2 \times 10^{32} \text{ J}; 0,456 \text{ eV}; \frac{1}{2}m[V^2(1 + \omega^2 t^2) + 2\omega r_0 V + \omega^2 r_0^2];$
 $\frac{1}{2}m(a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t); \frac{1}{2}m[(\dot{r}')^2 - 2\omega R \dot{r}' \sin \omega t + \omega^2 R^2];$
 $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2);$
 $\frac{1}{2}mR^2(\omega^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2); \frac{1}{2}m[\omega^2 (R + l \sin \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2].$

3. iv) a) $-cx$; b) $-\frac{1}{2}cx^2$; c) $\frac{c}{r}$.

v) a) $-ce_{-x}$; b) $\frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (xe_{-x} + ye_{-y})$; c) $-(2ax + by)e_{-x} - (bx + 2cy)e_{-y}$;
d) $-(1 + x + y)e_{-x} - (1 + x + y)e_{-y}$; e) $-(r + \cos \theta + \sin \theta)e_{-r} + (\sin \theta - \cos \theta)e_{-\theta}$.

4. iii) $x_e = \frac{b}{2a}$, stabiel als $a > 0$.

iv) $\theta_{e1} = 0$, instabiel en $\theta_{e2} = \pi$, stabiel.

6. i) a) $\frac{5}{2} t^2 \underline{e}_x + \frac{(t^3 - t)}{y} \underline{e}_y$,

b) $x \underline{e}_x \pm \sqrt{2y(1-y^2)}$ (aanvankelijk: + teken).

ii) a) $\frac{1}{8} t^2 (4t^4 + 17t^2 + 4)$; b) $\frac{1}{2} x^2 + y(1-y^2)$.

iii) a) $\frac{1}{8} t^2 (4t^4 + 17t^2 + 4)$; b) $\frac{1}{2} x^2 + y(1-y^2)$.

v) a) Neen; b) Ja; $U = -\frac{1}{2}x^2 - y + y^3$.

8. i) $-mgx \sin \alpha$; ii) $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$; iii) $mgx \sin \alpha$;

v) $x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$; $\dot{x}(0) = -v_0$;

vi) $x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$; $\dot{x}(0) = -v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha}}$, mits $f < \tan \alpha$.

9. i) $mgR(1 - \cos \theta)$; ii) $mg y$ (y : zakking).

10. $\frac{q^2 E L^2}{2mv_0^2}$.

11. i) mgh ; ii) mgh ; iii) mgh .

12. i) $U(x_0) = \frac{m^2 g^2}{2k} - mgl_0$; ii) x vanuit l_0 : $U(x) = -mg(l_0 + x) + \frac{1}{2}kx^2$,

\bar{x} vanuit x_0 ($\bar{x} = x - x_0 = x - \frac{mg}{k}$): $U(\bar{x}) = \frac{1}{2}k\bar{x}^2 + (\frac{m^2 g^2}{2k} - mgl_0)$;

iv) Ja; $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \text{constant}$.

13. $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constant}$; $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = -fmgx + \text{constant}$.

14. i) $\sqrt{2gh}$; ii) $\frac{mg}{k} [1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}]$.

15. ii) $\dot{x}(x) = -\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2) - 2fg(x_0 - x)}$ ($x > 0$, x : indrukking veer);

$\dot{x}(x) = -\sqrt{\frac{k}{m}x_0^2 - 2fg(x_0 - x)}$ ($x < 0$).

iii) $x_{\text{rust}} = -\frac{k}{2mgf} x_0^2 + x_0$.

16. a) i) Ja; $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta = \text{constant}$.

ii) $2mgR; \sqrt{\omega^2 + \frac{4g}{R}} - \omega$.

iii) $\theta_{e1} = \frac{\pi}{2}$ (bovenste punt), instabiel en θ_{e2} (onderste punt) $= -\frac{\pi}{2}$, stabiel.

b) i) Neen. ii) $T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$, $U = mgR \sin \theta$ ($\theta = \omega t + \theta(0)$).

17. i) $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{mk}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mk}{a}$.

ii) $\dot{\theta} = \frac{av_0}{r^2}$.

iii) $\dot{r}^2 = (1 - \frac{a}{r})[(1 + \frac{a}{r})v_0^2 - \frac{2k}{a}]$.

iv) $\sqrt{\frac{2k}{a}}$; v) $\sqrt{\frac{k}{a}}$.

18. i) $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = mgf\ell\theta$, Neen; ii) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2fg}{\ell}} \theta$; iii) $\frac{\ell^2\omega^2}{2fg}$.

19. i) $T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$, $U = -mgR \sin \theta$; ii) $\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{R}} \sin \theta$; iii) $\sqrt{2gR}$;
iv) hoogte van 0.

20. i) $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2}kx^2 - k\ell_0\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2}k(a^2 + \ell_0^2)$.

ii) $x_{e1} = 0$, $x_{e2,3} = \pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$, mits $\ell_0 > a$.

iii) x_{e1} : stabiel als $\ell_0 < a$ en instabiel als $\ell_0 > 0$.

$x_{e2,3}$: stabiel als $\ell_0 > a$ (dus als ze bestaan).

21. i) a) $U = \frac{1}{2}c[\sqrt{x^2 + 4\ell^2} + \sqrt{(3\ell - x)^2 + \ell^2}]^2$,

b) $U = c[x^2 + (3\ell - x)^2 + 5\ell^2]$.

ii) a) $x_e = 2\ell$, b) $x_e = \frac{3}{2}\ell$,

iii) Beide stabiel.

22. i) $U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - mgR(1 - \cos \theta)$.

ii) $\theta_{e1} = 0$, plus eventuele (als $kR < mg$) andere oplossingen van

$kR\theta_e = mg \sin \theta_e$.

23. Opgave 15, § 4.4: (zie ook Opg. 14, H.3).

i) $U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$; ii) $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 = C$;

iii) $r = \frac{k \ell_0}{(k - m\omega^2)}$ (één);

iv) stabiel als $\omega^2 < k/m$.

Opgave 16, § 4.4: (zie ook Opg. 13, H.3)

i) $U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta$;

ii) $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta = C$;

iii) iv) $\theta_1 = 0$: instabiel,

$\theta_2 = \pi$: stabiel als $\omega^2 < g/R$,

$\theta_3 = \arccos\left(-\frac{g}{\omega^2 R}\right)$, bestaat alleen als $\omega^2 > g/R$ en is dan stabiel.

24. i) Een; ii) $m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = 0$;

iii) iv) $x = 0$, stabiel als $\omega < \sqrt{k/m}$.

25. i) $\underline{F}_s = m\omega^2 x_0 \underline{e}_x - 2m\omega \dot{x}_0 \underline{e}_y$; ii) $U = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$;

iii) $\omega^2 < 2g$: $z_m = \frac{v_0^2}{(2g - \omega^2)}$; $\omega^2 \geq 2g$: $z_m \rightarrow \infty$;

iv) $t = 2 \int_0^{x_1} \sqrt{(1+4x^2)/(v_0^2 - 2gx^2)} dx$, ($x_1 = v_0/\sqrt{2g}$);

v) $z_m = \left[\frac{\omega^2}{4g} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 8gv_0^2/\omega^4} \right\} \right]^2$;

vi) $(x, z) = (\pm\sqrt{\omega^2/4g}, \omega^4/16g^2)$.

26. $\tan \theta_0 = a/g$; $S = m\sqrt{a^2 + g^2}$.

27. i) Eén : φ (= hoek tussen L en $O'A$);

ii) $d = \frac{m_B \ell}{(m_A + m_B)}$.

6. Dynamica van een stelsel van deeltjes

Theorievragen

1. Geef voor een stelsel van N deeltjes de definities van:

$$\underline{r}_M, \underline{p}, \underline{L}_A \text{ en } T .$$

2. Bewijs dat

$$\sum_i \underline{p}_i = M \underline{v}_M .$$

3. Bewijs dat

$$\underline{L}_M = \underline{L}_{inw} ,$$

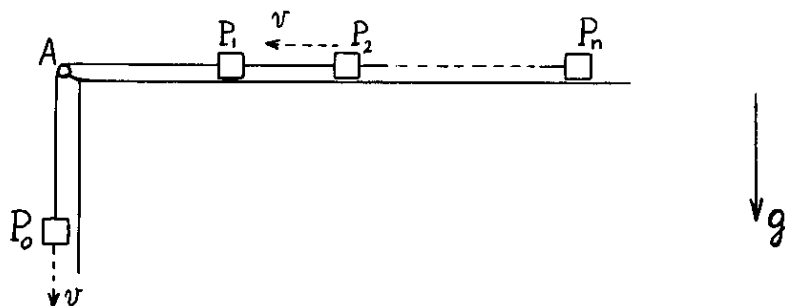
of te wel dat

$$\sum_i \underline{r}_i' \times \underline{p}_i = \sum_i \underline{r}_i' \times \underline{p}_i' .$$

4. Aan welke conditie(s) moet de positie A voldoen opdat:

$$\underline{\tau}_A = \dot{\underline{L}}_A .$$

Beschouw het volgende voorbeeld:



Een serie massapunten, P_1 t/m P_n , zijn verbonden door koorden en bewegen over een horizontale tafel. Een massapunt P_0 is via een koord, dat bij A over de tafel hangt, met P_1 verbonden en beweegt verticaal naar beneden. Geldt, voordat P_1 de rand bij A bereikt heeft, de momentenstelling $\underline{\tau} = \dot{\underline{L}}$ om:

$$P_0, A, P_1, M ,$$

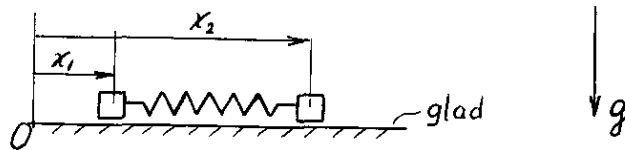
en waarom (niet)?

5. Wanneer blijft van een stelsel

$$\underline{P}, \underline{L}_A, \underline{L}_{inw}, T + U,$$

behouden?

6. Beschouw



Heeft de indrukking van de veer invloed op:

- i) de beweging van het massamiddelpunt,
- ii) de verandering van de impuls,
- iii) de verandering van de totale energie?

7. Twee massapunten P_1 en P_2 zijn verbonden door een starre staaf. Bewijs dat

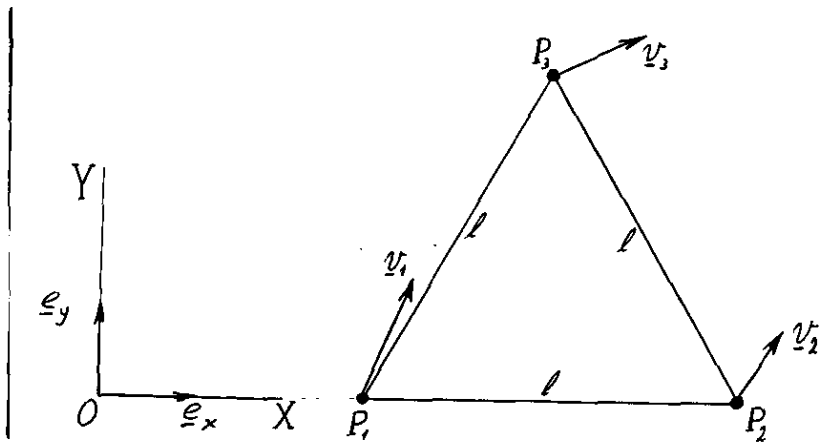
$$((\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot (\dot{\underline{r}}_1 - \dot{\underline{r}}_2)) = 0,$$

waarin \underline{r}_1 en \underline{r}_2 de posities van P_1 resp. P_2 zijn.

8. Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's $m_1 = 2$ kg resp. $m_2 = 3$ kg, bevinden zich t.o.v. een cartesisch assenstelsel $OXYZ$ in de punten $(0, 1, 1)$ resp. $(-1, 0, 2)$. P_1 heeft een snelheid van 10 m/sec in de X -richting en P_2 een van 8 m/sec onder een hoek van 60° met de X -as, evenwijdig aan het XY -vlak.

- i) Schrijf beide snelheden in vectorvorm.
- ii) Bereken de positie van het massamiddelpunt M .
- iii) Bereken de snelheid van M .
- iv) Bereken de totale impuls.
- v) Bereken de snelheid van P_1 en van P_2 t.o.v. M .
- vi) Bereken het totale impulsmoment t.o.v. M .
- vii) Bereken het totale impulsmoment t.o.v. O . Doe dit op twee manieren.
- viii) Bereken de totale kinetische energie.

9.



Drie gelijke massapunten P_1 , P_2 en P_3 zijn door drie massaloze staven, elk lengte l , zodanig met elkaar verbonden dat zij de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek vormen. De snelheden van P_1 , P_2 en P_3 t.o.v. het in de figuur getekende OXY-stelsel zijn gegeven door:

$$\underline{v}_1 = 2\underline{e}_x + 4\underline{e}_y,$$

$$\underline{v}_2 = \alpha\underline{e}_x + 2\underline{e}_y,$$

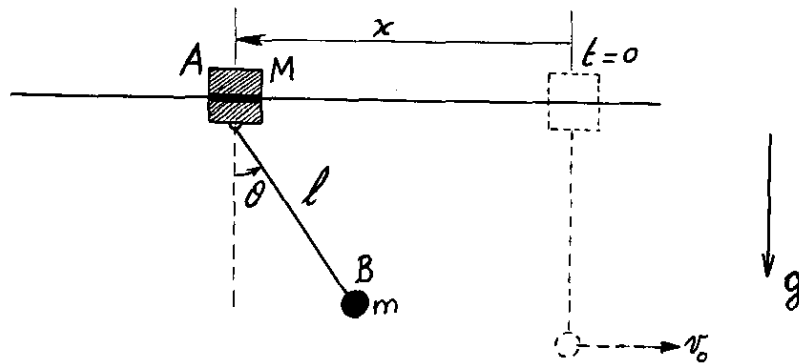
$$\underline{v}_3 = \beta\underline{e}_x + \gamma\underline{e}_y.$$

- i) Bepaal α , β en γ .
- ii) Bepaal de snelheid van het massamiddelpunt.

10. Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's m_1 en m_2 , verbonden door een koord met lengte l , kunnen zonder wrijving bewegen over een horizontale tafel. Op $t = 0$ draait het punt P_2 met snelheid v_0 om het in rust zijnde P_1 , dat op dat moment wordt losgelaten.

- i) Bepaal de versnelling en de snelheid van het massamiddelpunt.
- ii) Bepaal de hoekversnelling en de hoeksnelheid van de lijn P_1P_2 .
- iii) Bepaal de versnellingen van P_1 en P_2 .
- iv) Bepaal de trekkracht in het koord.
- v) Bepaal de totale kinetische energie. Is deze constant?
- vi) Beantwoord dezelfde vragen indien het stelsel niet in een horizontaal vlak maar in een verticaal vlak beweegt, en op $t = 0$: P_1P_2 horizontaal is.

11.



Een puntmassa A, massa M , kan zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte. Een tweede puntmassa B, massa m , is via een massaloze staaf, lengte l , verbonden met A. Op $t = 0$ is A in rust, bevindt B zich verticaal onder A en heeft B een naar rechts gerichte snelheid v_0 .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem? Geef coördinaten aan die de beweging beschrijven. Stel de beginvoorwaarden op.
- ii) Stel de bewegingsvergelijkingen op.
- iii) Laat zien dat hier de volgende behoudwetten gelden en interpreteer deze.

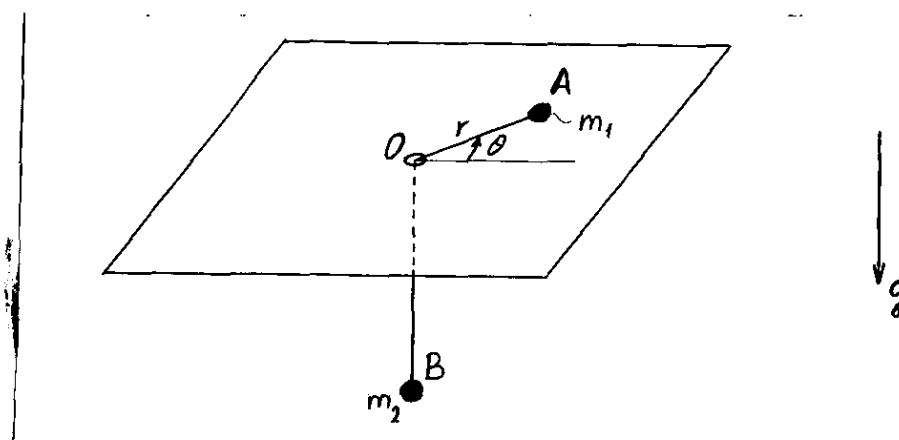
$$(M+m)\dot{x} - m\dot{\theta} \cos \theta = \text{constant} = c_1$$

$$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - m\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - mgl \cos \theta = \text{constant} = c_2$$

(zie verderop ook opgave 5i), H.4 en opgave 8, H.5).

- iv) Bepaal uit de beginvoorwaarden de twee constanten c_1 en c_2 van de bij iii) gegeven behoudwetten.
- v) Geldt t.o.v. het punt A de momentenstelling?
- vi) Voer een met A meetranslerend assenstelsel in en zet dit stil. Hoe groot is dan de op B werkende schijnkracht? Mag nu de momentenstelling om A worden toegepast? Zo ja, wat levert deze dan op en is deze relatie onafhankelijk van de reeds eerder gevonden vergelijkingen?

12.



Twee massapunten A en B, massa's m_1 resp. m_2 , zijn verbonden door een koord ter lengte l . Het punt A beweegt over een glad, horizontaal vlak en het koord gaat door een gat O in de tafel. Het punt B hangt verticaal onder O. Op $t = 0$ is B in rust en heeft A een horizontale snelheid v_0 loodrecht op OA en is $OA = r_0$.

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem? Kies coördinaten.
- ii) Stel de bewegingsvergelijkingen met de beginvoorwaarden op.
- iii) Bewijs met behulp van de beginvoorwaarden en de bewegingsvergelijkingen de behoudwetten: ($r = OA$)

$$m_1 r^2 \dot{\theta} = m_1 v_0 r_0,$$

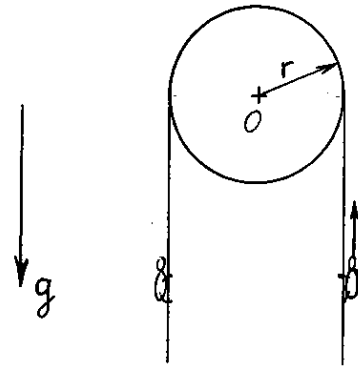
en

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g r = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_2 g r_0.$$

Interpreteer deze behoudwetten.

- iv) Bewijs, uit deze bewegingsvergelijkingen, dat de bewegingstoestand waarbij A een eenparige cirkelbeweging uitvoert, mogelijk is. Welk verband moet er dan bestaan tussen de afstand OA en de hoeksnelheid van OA?

13. Om een massaloze schijf, straal r , die vrij kan draaien om een horizontale as door zijn middelpunt O is een koord geslagen waaraan twee even zware aapjes, beide massa m , hangen. Het systeem is aanvankelijk in rust. Een aapje begint met een snelheid V t.o.v. het koord naar boven te klimmen.

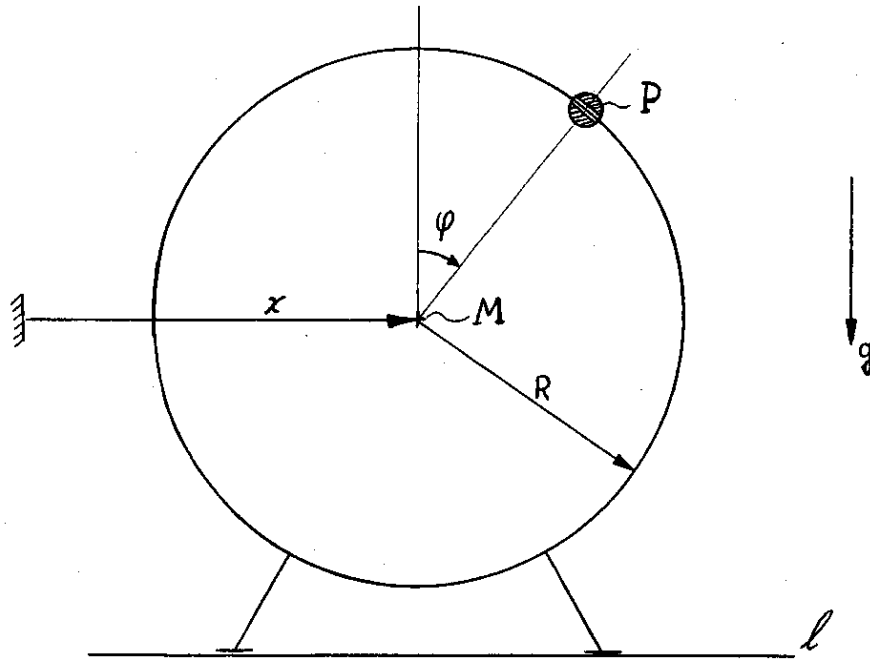


Bepaal de werkelijke snelheid van beide aapjes.

14. Op een platte kar, massa M , die zonder wrijving kan bewegen over een horizontaal vlak, staat een man, massa m . Op $t = 0$, het hele systeem is dan nog in rust, begint de man met snelheid V t.o.v. de kar te lopen.

- Bepaal de werkelijke snelheid van de man en van de kar.
- Bewijs dat als $M \ll m$ de man in werkelijkheid niet van zijn plaats komt.

15.

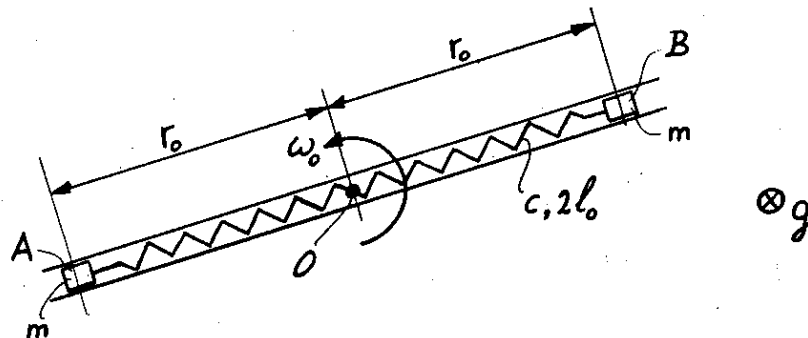


Een verticale homogene cirkelvormige ring met massa M en straal R kan zonder wrijving glijden langs een vaste horizontale rechte l . Een massapunt P met massa m kan zonder wrijving glijden langs de ring.

Ten tijde $t = 0$ is de ring in rust en bevindt P zich met te verwaarlozen snelheid in het hoogste punt van de ring. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g . We beschrijven de positie van P met behulp van de coördinaten x en φ (zie figuur). Druk de antwoorden op de vragen ii) t/m v) uit in x en φ en hun eerste afgeleiden naar de tijd.

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Bereken de kinetische energie van P en van de ring.
- iii) Bereken de potentiële energie van P en van de ring.
- iv) Bereken de impuls van het totale systeem.
- v) Welke twee behoudwetten gelden hier en waarom?
- vi) Hoe groot is de snelheid van P als P door het onderste punt van de ring gaat (uitgedrukt in M , m , g en R)? Verifieer Uw antwoord voor $m/M \ll 1$.
- vii) Wat voor kromme doorloopt het massamiddelpunt?

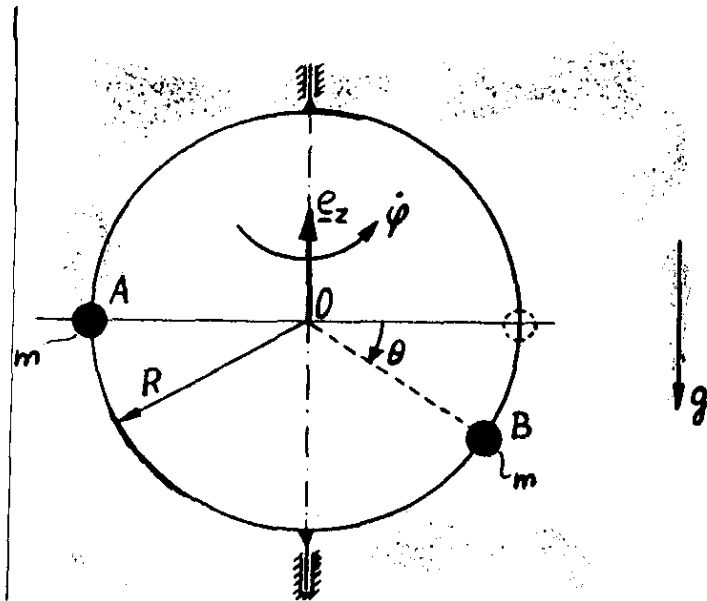
16.



Een massaloze gladde buis kan zonder wrijving vrij roteren om een vaste verticale as loodrecht op de buis. In de buis bevindt zich een veer, veerstijfheid c , ongespannen veerlengte $2l_0$, waarvan het midden O is vastgemaakt aan de verticale as. Aan de uiteinden van de veer bevinden zich twee gelijke massapunten A en B , beide massa m . Op het begintijdstip $t = 0$ bevinden A en B zich beide op afstand r_0 van O en zijn in rust t.o.v. de buis, welke dan roteert met een hoeksnelheid ω_0 .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem voor een algemene beweging en hoeveel houdt U er over indien U rekening houdt met de symmetrie van de beweging?
- ii) Bepaal de impuls en het impulsmoment om O van elke massa afzonderlijk en van het totale systeem.
- iii) Bepaal de kinetische en de potentiële energie van het totale systeem.
- iv) Welke grootheden blijven tijdens de beweging behouden en tot welke relaties leidt dit?
- v) Bepaal de hoeksnelheid van de buis als functie van OA .
- vi) Bepaal de componenten van de snelheid van A als functie van de afstand OA .
- vii) Geef de bewegingsvergelijking voor A met de bijbehorende beginvoorwaarden.
- viii) Voor welke waarde van r_0 , als functie van ω_0 , blijft de positie van A (en dus ook van B) ten opzichte van de buis gedurende de beweging constant?

17.



Een massaloze cirkelvormige ring, straal R , kan vrij draaien om een verticale as door een middellijn. Aan de ring is vast bevestigd een massapunt A , massa m , zodanig dat de lijn door A en het middelpunt O van de ring horizontaal is. Een tweede massapunt B , eveneens massa m , kan glijden langs de ring. We geven de hoeksnelheid van de ring om de verticale as aan met $\dot{\phi}$ en de hoek die OB maakt met de horizontaal AO met θ . Op het tijdstip $t = 0$ draait de ring met een hoeksnelheid ω en bevindt B zich diametraal tegenover A en is in rust t.o.v. de ring. Er is nergens wrijving. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Bepaal van het stelsel, uitgedrukt in θ , $\dot{\theta}$ en $\dot{\phi}$:
 - de impuls \underline{P} ,
 - het impulsmoment L_z om O langs de verticale as door O ,
 - de kinetische energie T en
 - de potentiële energie U .
- iii) Welke behoudswetten gelden hier? Schrijf deze uit.
Bepaal hieruit $\dot{\theta}$ en $\dot{\phi}$ als functie van θ .
- iv) Bereikt het punt B voor elke waarde van ω het onderste punt van de ring? Zo neen, geef dan de conditie voor ω opdat dit punt wel wordt bereikt. Als dit onderste punt wel wordt bereikt, hoe groot is daar dan de snelheid van B ?

Antwoorden (H.6.)

8. i) $\underline{v}_1 = 10\underline{e}_x$ (m/sec), $\underline{v}_2 = 4\underline{e}_x + 4\sqrt{3}\underline{e}_y$ (m/sec).
 ii) $\underline{r}_M = -0,6\underline{e}_x + 0,4\underline{e}_y + 1,6\underline{e}_z$ (m).
 iii) $\underline{v}_M = 6,4\underline{e}_x + 2,4\sqrt{3}\underline{e}_y$ (m/sec).
 iv) $\underline{P} = 32\underline{e}_x + 12\sqrt{3}\underline{e}_y$ (kg m/sec).
 v) $\underline{v}'_1 = 3,6\underline{e}_x - 2,4\sqrt{3}\underline{e}_y$ (m/sec); $\underline{v}'_2 = -2,4\underline{e}_x + 1,6\sqrt{3}\underline{e}_y$ (m/sec).
 vi) $\underline{L}_M = -4,8\sqrt{3}\underline{e}_x - 7,2\underline{e}_y - 2,4(2\sqrt{3} + 3)\underline{e}_z$ (kg m²/sec).
 vii) $\underline{L}_0 = -24\sqrt{3}\underline{e}_x + 44\underline{e}_y - (20 + 12\sqrt{3})\underline{e}_z$ (kg m²/sec).
 viii) 196J.
9. i) $\alpha = 2$, $\beta = 2 + \sqrt{3}$, $\gamma = 3\sqrt{3}$; ii) $(6 + \sqrt{3})\underline{e}_x + (6 + 3\sqrt{3})\underline{e}_y$.
10. i) 0, $\mu_2 v_0 \underline{e}_y$ ($\mu_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}$, $i = 1, 2$).
 ii) 0, v_0/l .
 iii) $\ddot{\underline{r}}_1 = \left(\frac{\mu_2 v_0^2}{l} \sin \theta\right)\underline{e}_x + \left(\frac{\mu_2 v_0^2}{l} \cos \theta\right)\underline{e}_y$,
 $\ddot{\underline{r}}_2 = \left(-\frac{\mu_1 v_0^2}{l} \sin \theta\right)\underline{e}_x + \left(-\frac{\mu_1 v_0^2}{l} \cos \theta\right)\underline{e}_y$.
 iv) $\frac{m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2)l}$; v) $\frac{1}{2}m_2 v_0^2$, Ja.
 vi) $\ddot{\underline{r}}_M = -g\underline{e}_y$, $\dot{\underline{r}}_M = (-gt + \mu_2 v_0)\underline{e}_y$; hoeksnelheid en hoekversnelling veranderen niet, evenals kracht in koord. Bij $\ddot{\underline{r}}_1$ en $\ddot{\underline{r}}_2$ moet $\ddot{\underline{r}}_M$ worden opgeteld en T verandert nu wel volgens:

$$T = T(t) = \frac{1}{2}m_2 v_0^2 - (m_1 + m_2)(\mu_2 v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)g.$$

11. i) 2; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = -v_0/l$.
- ii) $(M+m)\ddot{x} - m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0$,
 $m(\ddot{x} \cos \theta - \ell\ddot{\theta}) - mg \sin \theta = 0$.
- iv) $c_1 = -Mv_0$, $c_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell$.
- v) Neen.
- vi) $\underline{F}_s = -m\ddot{x}\underline{e}_x$; Ja; $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta + m\ell\ddot{x} \cos \theta$; niet onafhankelijk.
12. i) 2; θ en r (= OA).
- ii) $(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r \dot{\theta}^2 = -m_2 g$; $m_1 r \ddot{\theta} + 2m_1 \dot{r} \dot{\theta} = 0$,
 $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = v_0/R$.
- iii) $\dot{\theta}^2 = \frac{m_2 g}{m_1 r}$.
13. $\frac{1}{2}V$ (beide omhoog).
14. i) $MV/(M+m)$; $mV/(M+m)$.
15. i) 2.
- ii) $T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mR\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$.
- iii) $U = mgR \cos \varphi + \text{constante}$.
- iv) $\underline{p} = [(M+m)\dot{x} + mR\dot{\phi} \cos \varphi]\underline{e}_x - mR\dot{\phi} \sin \varphi \underline{e}_y$.
- v) $p_x = \text{constant}$; $T + U = \text{constant}$.
- vi) $-2\sqrt{\frac{M}{M+m}} gR \underline{e}_x$.
- vii) Lijnstuk: $x_M = \text{constant}$.

16. i) 3; 2.

$$\text{ii) } \underline{p}_A = m\dot{r}\underline{e}_r + mr\dot{\theta}\underline{e}_\theta, \underline{P} = \underline{0},$$

$$\underline{L}_{AO} = mr^2\dot{\theta}\underline{e}_z, \underline{L}_O = 2mr^2\dot{\theta}\underline{e}_z.$$

$$\text{iii) } T = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), U = 2c(r - \ell_0)^2.$$

$$\text{iv) } T + U = c_1 = mr_0^2\omega_0^2 + 2c(r - \ell_0)^2,$$

$$(\underline{L}_O)_z = c_2 = 2mr_0^2\omega_0.$$

$$\text{v) } \dot{\theta} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}.$$

$$\text{vi) } v_r = \pm \sqrt{r_0^2\omega_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{2c}{m}[(r - \ell_0)^2 - (r_0 - \ell_0)^2]}.$$

$$v_\theta = \frac{r_0^2\omega_0}{r}.$$

$$\text{vii) } m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -2c(r - \ell_0),$$

$$mr\dot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

$$\text{Op } t = 0; r = r_0, \dot{r} = 0, \dot{\theta} = \omega_0 (\theta = 0).$$

$$\text{viii) } r_0 = \frac{2c\ell_0}{2c - m\omega_0^2}.$$

$$\text{17. iii) } \dot{\theta} = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{R} \sin \theta - \frac{2\omega^2 \sin^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)} \right\}}, \quad (\{.\} \geq 0);$$

$$\dot{\phi} = \frac{2\omega}{(1 + \cos^2 \theta)}.$$

$$\text{iv) } \omega^2 < \frac{g}{R}; v_B = \sqrt{2(g - \omega^2 R)R}.$$

7. Botsingen

Theorievragen

1. Beschouw een botsing tussen twee starre ballen.

Wat volgt uit het gegeven:

- i) de ballen zijn vrij;
- ii) de ballen zijn glad;
- iii) de botsing is centraal;
- iv) de restitutiecoëfficiënt is e ;
- v) de botsing is onelastisch;
- vi) de botsing is elastisch.

2. Beschouw een centrale botsing tussen twee deeltjes.

- i) Bewijs dat, als $0 \leq e \leq 1$, het energieverlies ΔT :
nul is als $e = 1$,
maximaal is als $e = 0$.

ii) Bewijs dat

$$\Delta T > 0 ,$$

als $e > 1$.

- iii) Bewijs dat het ene deeltje door het andere deeltje heen is gegaan als $e < 0$.

3. Bewijs dat bij een centrale, elastische botsing tussen twee deeltjes de gegevens:

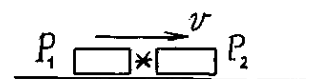
a) $V_1 - V_2 = -(v_1 - v_2)$, en

b) $\Delta T = 0$,

tot hetzelfde resultaat leiden.

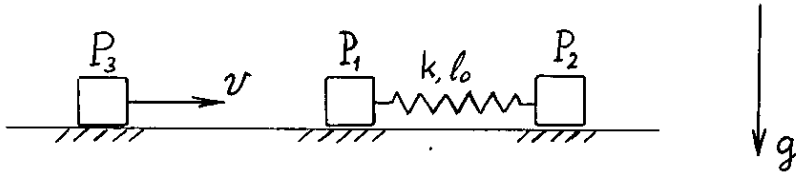
4. Bewijs dat bij een *ballistische slinger* (zie Opgave 13) de restitutiecoëfficiënt e gelijk aan nul is.

5. Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's m_1 en m_2 , bewegen tezamen met snelheid v langs een rechte lijn. Op zeker ogenblik vindt tussen beide punten een explosie plaats, waarbij een energie E vrij komt welke geheel wordt omgezet in bewegingsenergie voor de massapunten.



- i) Is de totale impuls vóór en ná de botsing gelijk?
- ii) Hoe groot is de Q-waarde?
- iii) Welke vergelijking volgt uit de energiebalans? Heeft U voldoende vergelijkingen om de snelheden van P_1 en P_2 na de explosie te bepalen?

6.

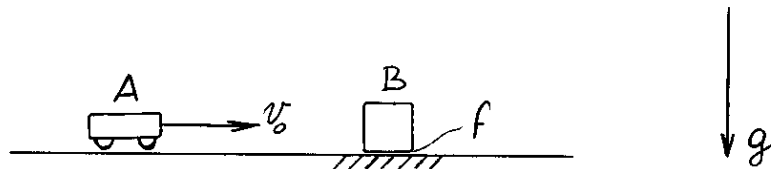


Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's m_1 en m_2 , zijn met elkaar verbonden door een veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 en rusten op een glad horizontaal vlak. Een derde massapunt P_3 , massa m_3 , beweegt met een snelheid v richting P_1 . De restitutiecoëfficiënt voor de botsing tussen P_1 en P_3 is e .

- i) Bepaal de snelheden van P_1 , P_2 en P_3 onmiddellijk na de botsing.
- ii) Wat verwacht U als $e = 0$? Is dit in overeenstemming met Uw antwoord op i)?
- iii) Laat zien dat als de botsing elastisch is er geen energieverlies optreedt.
- iv) Met welke snelheid gaat het massamiddelpunt van het systeem P_1P_2 bewegen? Is deze snelheid constant? *
- v) Welke relatie kunt U uit de energiebalans halen voor de beweging van P_1 en P_2 t.o.v. hun massamiddelpunt? Heeft U hiermee voldoende relaties om de beweging van P_1 en P_2 te kunnen beschrijven?

* Aangenomen mag worden dat P_1 en P_3 niet meer botsen.

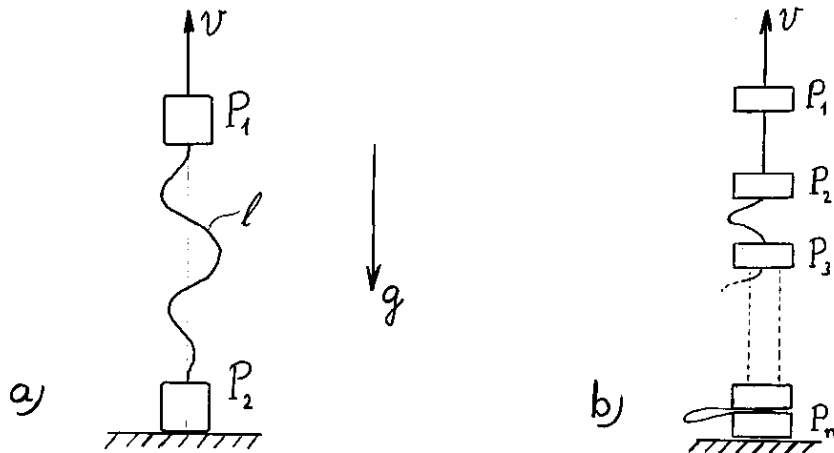
7.



Twee massapunten A en B, beide massa m , kunnen bewegen over een horizontaal vlak. Het punt A beweegt zonder wrijving terwijl de wrijvingscoëfficiënt tussen B en het vlak f is. Op een bepaald moment botst A met een snelheid v_0 tegen B. De restitutiecoëfficiënt $e = 1/3$.

Bepaal de weg die door de massapunten wordt afgelegd tot zij beide tot rust komen.

8.



- a) Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's m_1 en m_2 , zijn verbonden door een koord met lengte l . P_1 wordt vanaf de grond, waar P_2 aanvankelijk blijft liggen, met snelheid v omhooggeschoten.

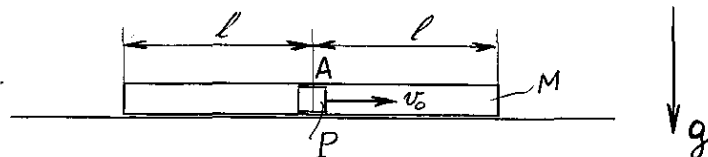
Wat is de maximale hoogte die P_1 zal bereiken? (Het koord is onelastisch; dit houdt in dat P_1 en P_2 nadat het koord gespannen is met gelijke snelheden verder bewegen.)

- b) Als bij a), maar nu hebben we in plaats van twee massapunten een keten van n massapunten, alle met massa m . Neem $v_0 = \sqrt{11gl}$ en bepaal:

- i) hoeveel massapunten in beweging komen,
- ii) welke maximaal hoogte P_1 bereikt,
- iii) het totale energieverlies door de botsingen.

Bereken de laatste grootte ook voor geval a).

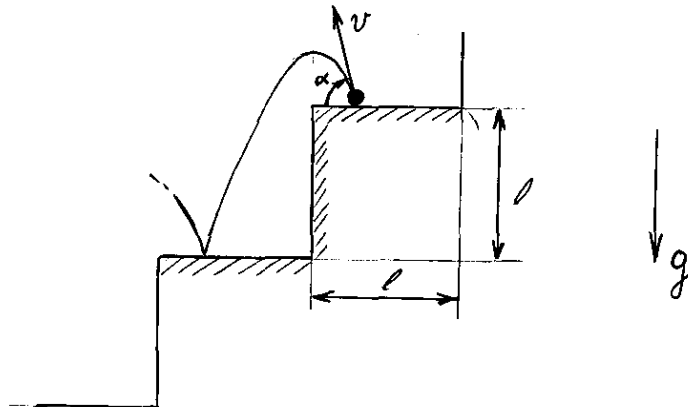
9.



Een massapunt P , massa m , bevindt zich op $t = 0$ in het midden A van een holle buis met lengte $2l$ en massa M . De buis die aan beide zijden dicht is, ligt op een gladde horizontale tafel. Op $t = 0$ ligt de buis stil en heeft P een snelheid v_0 . De restitutiecoëfficiënt is e . Bepaal:

- i) de snelheden van P en van de buis na de eerste botsing;
- ii) het energieverlies t.g.v. de eerste botsing;
- iii) de tijd die P er over doet om weer in A terug te keren in zijn oorspronkelijke bewegingsrichting.

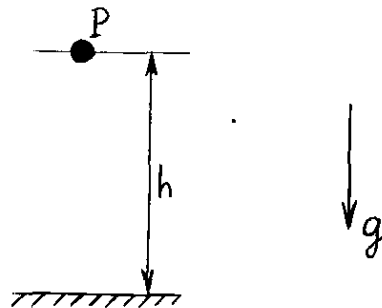
10.



Vanaf de bovenste trede van een trap, waarvan de hoogte en de breedte van de treden l is, wordt een massapunt P , massa m , onder een hoek α ($0 < \alpha < \pi/2$) met een snelheid v afgeschoten. Na verloop van tijd botst P op de volgende trede. De restitutiecoëfficiënt hierbij is e .

Hoe moeten v en α gekozen worden opdat de baan die P beschrijft voor alle treden identiek is?

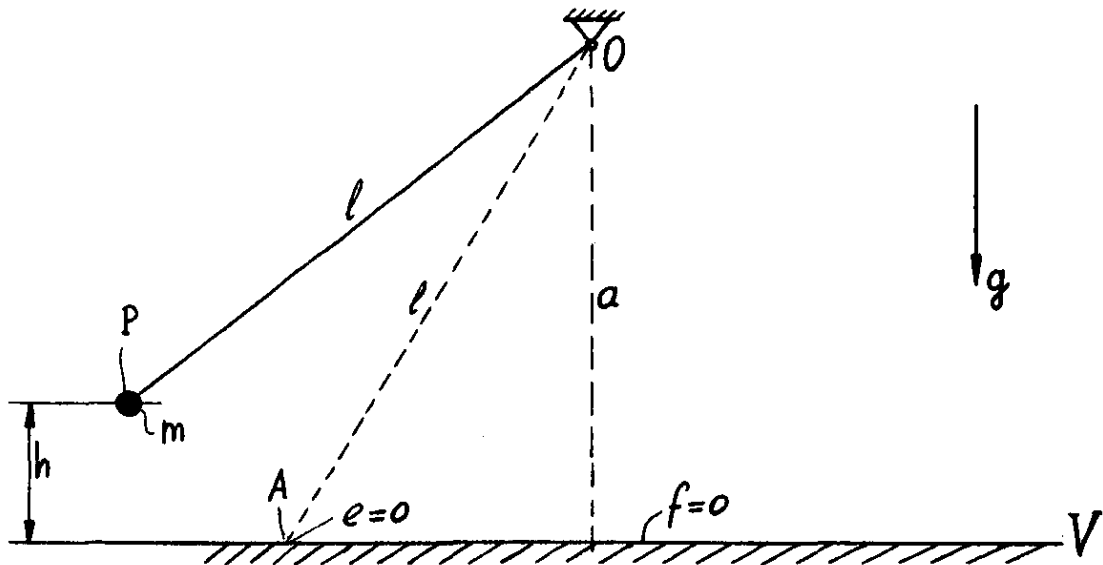
11.



Een massapunt P , massa m , wordt op een hoogte h boven een horizontaal vlak zonder beginsnelheid losgelaten. De restitutiecoëfficiënt tussen P en het vlak is e .

- i) Welke hoogte bereikt P na de eerste botsing?
- ii) Bereken de tijd die verloopt tussen het loslaten van het massapunt en het tot rust komen ervan. Controleer Uw antwoord voor de gevallen $e = 0$ en $e = 1$.
- iii) Bepaal de waarde van e , waarvoor de totale door P afgelegde weg gelijk aan $2h$ is.

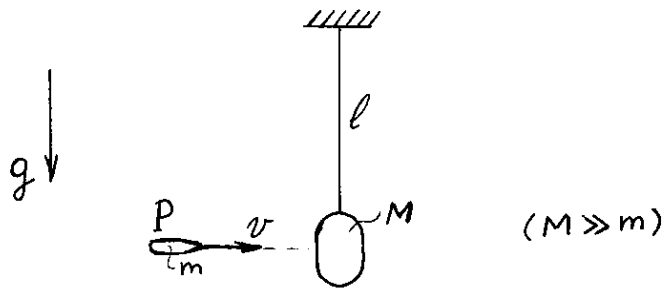
12.



Een massapunt P , massa m , is via een massaloos, volkomen onrekbaar koord, lengte l , verbonden met een vast punt O . Op een afstand a onder O ($a < l$) ligt een vast, glad horizontaal vlak V . Het punt P wordt op een hoogte h boven V ($h < a$) met gespannen koord en zonder beginsnelheid losgelaten, waarna P in het punt A tegen V botst. Deze botsing is volkomen onelastisch ($e = 0$). De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Bepaal de snelheid van P vlak voor en direct na de botsing met V .
- ii) Hoe beweegt P ná deze botsing?
- iii) Bereikt P bij deze beweging nog een punt waarop het koord weer gespannen wordt? zo ja, in welk punt gebeurt dit?
- iv) Bereken de snelheid van P direct na het strak worden van het koord.
- v) Wat is de maximale hoogte die P daarna nog boven V bereikt?
- vi) Indien de bij v) gevonden hoogte kleiner is dan h , verklaar dan dit hoogteverlies (ook de numerieke waarde ervan).

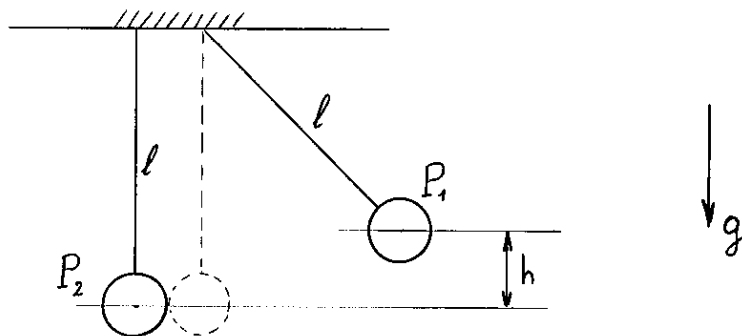
13.



Een kogel P, met massa m , wordt met een horizontale snelheid v in een zak zand, massa M , geschoten die aan een koord met lengte l hangt.

- i) Neem aan dat de kogel in de zak blijft zitten. Hoe groot is dan e ? Bepaal de hoogte h die de zak na het opnemen van de kogel bereikt als functie van v . (Dit apparaat wordt een *ballistische slinger* genoemd en, door het meten van h , gebruikt om de snelheid van een kogel te bepalen.)
- ii) Neem aan dat de kogel de zak met een snelheid $v/2$ verlaat. Hoe groot is nu e ? Hoe groot moet v minstens zijn opdat de slinger een volledige cirkel beschrijft?

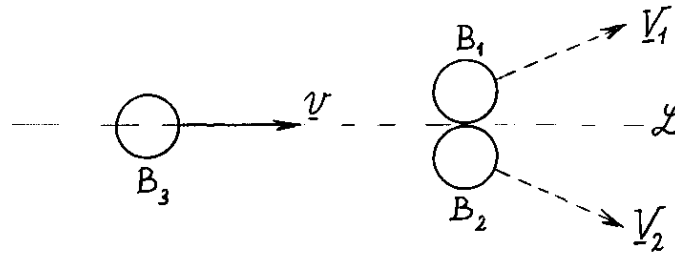
14.



Twee massapunten P_1 en P_2 , massa's m_1 en m_2 , hangen beide aan een koord met lengte l . Het punt P_1 bevindt zich, op de in de figuur getekende wijze, op een hoogte h boven P_2 en wordt vanuit deze stand zonder beginsnelheid losgelaten. De restitutiecoëfficiënt tussen P_1 en P_2 is e .

- i) Bereken de hoogte die elke bol na de botsing bereikt.
- ii) Bereken het energieverlies t.g.v. de botsing.

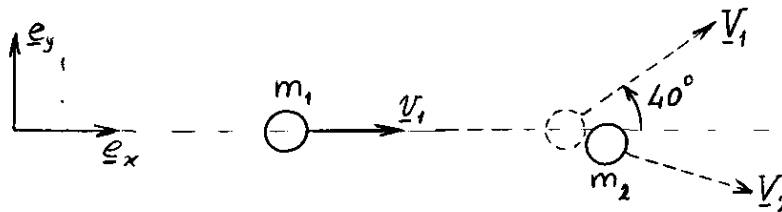
15.



Twee identieke biljartballen B_1 en B_2 , massa m , raken elkaar en liggen in rust op een glad biljart. Een derde biljartbal B_3 , identiek aan B_1 en B_2 , botst elastisch met een snelheid v gericht langs de horizontale raaklijn L tussen B_1 en B_2 tegen B_1 en B_2 . Noem de snelheden na de botsing van de drie ballen: \underline{v}_1 , \underline{v}_2 en \underline{v}_3 .

- i) Bewijs dat \underline{v}_1 en \underline{v}_2 gelijk in grootte zijn en gelijke hoeken maken met L , en dat \underline{v}_3 langs L gericht is.
- ii) Hoe zijn \underline{v}_1 en \underline{v}_2 gericht?
- iii) Bepaal \underline{v}_1 en \underline{v}_2 .

16.

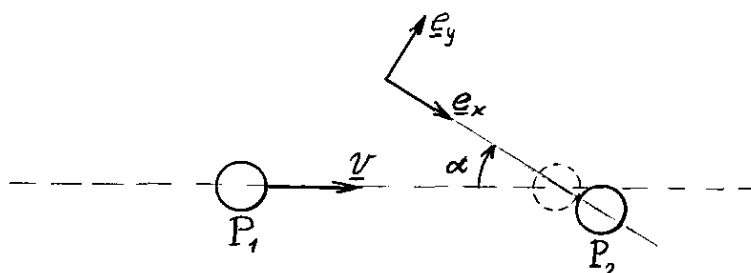


Een deeltje, massa $m_1 = 0,2$ kg, beweegt met een snelheid $v_1 = 0,4$ m/sec en botst tegen een ander deeltje, massa $m_2 = 0,3$ kg, dat in rust is. Na de botsing beweegt het eerste deeltje met een snelheid $V_1 = 0,2$ m/sec in een richting die een hoek van 40° maakt met de oorspronkelijke. Bepaal de snelheid van het tweede deeltje en het energieverlies tgv. de botsing. Is deze botsing elastisch?

17. Een massapunt, massa $m_1 = 5$ kg, beweegt met een snelheid $v_1 = 2$ m/sec en botst elastisch tegen een stilstaand massapunt, massa $m_2 = 8$ kg, waarna m_1 45° van zijn oorspronkelijke bewegingsrichting afwijkt. Bereken:

- i) de snelheden,
 - ii) de hoek tussen de bewegingsrichtingen,
- van de punten na de botsing.

18.



Een bolletje P_1 , massa m_1 , botst niet centraal met een snelheid v , tegen een tweede bolletje P_2 , massa m_2 . Op het moment van botsen maakt de lijn door de middelpunten van P_1 en P_2 een hoek α met de richting van \underline{v} . De restitutiecoëfficiënt is e .

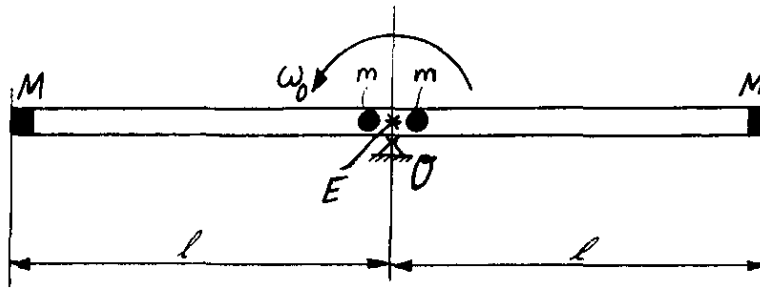
- i) Bepaal de snelheden van P_1 en P_2 na de botsing.
- ii) Bepaal, voor $m_1 = m_2 = m$, de hoek tussen de bewegingsrichtingen van P_1 en P_2 na de botsing. Klopt Uw uitkomst met het te verwachten antwoord voor $e = 1$?
- iii) Bereken het energieverlies t.g.v. de botsing. Klopt dit met het te verwachten antwoord voor $e = 1$?

19. Met een kanon, massa M , dat zonder wrijving over een horizontaal vlak kan bewegen en waarvan de loop een hoek α met de horizontaal maakt, wordt een projectiel met massa m afgeschoten. Als de loop van het kanon verticaal staat, kan het dit projectiel tot een hoogte h boven de grond schieten.

- i) Hoe groot is de Q -waarde bij het afschieten van het kanon?
- ii) Bepaal de snelheid, in grootte en richting, waarmee het projectiel het kanon verlaat.
- iii) Bepaal de "schootsverheid" van het kanon, dit is de maximale afstand (voor $0 \leq \alpha \leq \pi/2$) die de kogel kan bereiken voor hij de grond weer raakt. Op welke waarde moet α hiervoor worden ingesteld.

20. Een wagon W_1 , massa m , rijdt met een snelheid v tegen een stilstaande wagon W_2 met massa m . Op het moment dat de bumpers tegen elkaar botsen vindt een explosie plaats, waarbij een energie Q vrijkomt, welke wordt omgezet in bewegingsenergie voor de beide wagons. Bepaal de snelheden van W_1 en W_2 direct na de botsing.

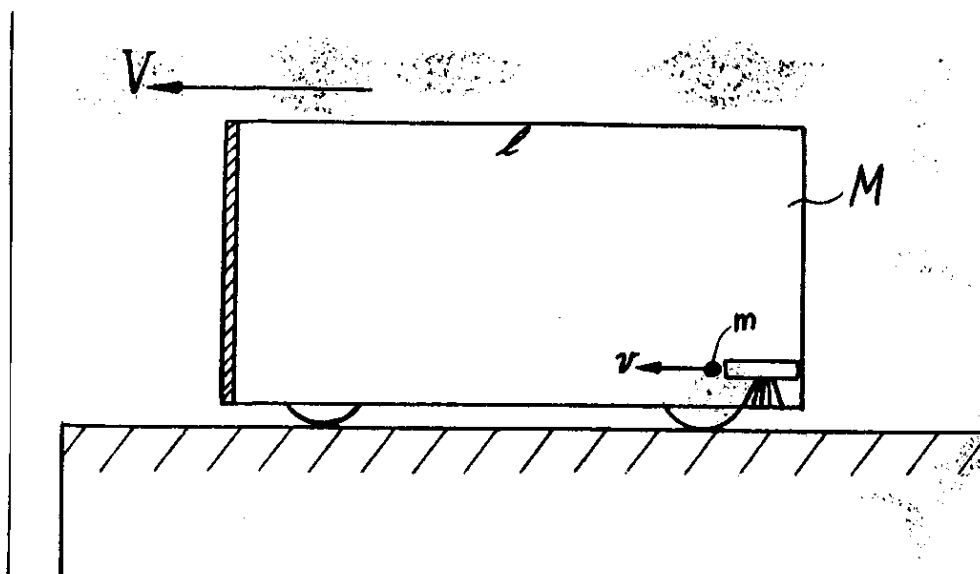
21.



Een massaloze buis, lengte $2l$, kan zonder wrijving in een horizontaal vlak draaien om zijn vaste middelpunt O . In de uiteinden van de buis zijn twee massapunten, beide massa M , bevestigd. In het midden van de buis bevinden zich twee massapunten, beide massa m , die zonder wrijving in de buis kunnen glijden. De buis roteert aanvankelijk met hoeksnelheid ω_0 . Op zeker ogenblik vindt een explosie tussen beide massapunten m plaats, waarbij een energie E vrijkomt, die geheel in bewegingsenergie van de beide massapunten wordt omgezet. De beide massapunten m gaan ten opzichte van de buis bewegen en botsen na verloop van tijd gelijktijdig tegen de massapunten M , botsingscoëfficiënt e , $0 < e \leq 1$. Na de botsing bewegen de beide massapunten m weer in de richting naar het midden O van de buis. Gevraagd wordt te bepalen:

- i) de hoeksnelheid van de buis en de snelheden van de massapunten m onmiddellijk na de explosie;
- ii) de bewegingsvergelijking(en) voor de buis en de massapunten na de explosie;
- iii) de snelheden van de massapunten m juist voor en juist na de botsingen met de massapunten M ;
- iv) de energie E die benodigd is opdat na de botsingen de beide massapunten m het midden O van de buis weer zullen bereiken.

22.



Onze held J.B. zit opgesloten in een vrij bewegende wagon (totale massa van wagon plus inhoud is M), welke met een snelheid V een afgrond nadert. Juist voordat de wagon de afgrond heeft bereikt, weet J.B. zich los te maken uit zijn boeien en een zich toevallig achter in de wagon bevindend kanon te bereiken. Het kanon is star verbonden aan de wagon. J.B. schiet een kogel, met massa m en snelheid v ten opzichte van de wagon, af. De kogel komt in de tegenoverliggende wand van de wagon tot rust.

- i) Beredeneer of J.B. zich met deze actie kan redden.
Zo ja, hoe groot moet v dan minstens zijn?
Teken in een grafiek het verloop van de snelheid van de wagon als functie van de tijd.
- ii) Beantwoord dezelfde vragen als bij i), indien de kogel d oor de wand heengaat, waarna hij nog een snelheid $v/2$ ten opzichte van de wagon overheeft.
- iii) Welke waarden heeft in geval i) en in geval ii) de botsingsco effici ent e ?

Antwoorden (H.7.)

$$6. \text{ i) } \underline{v}_1 = \frac{(1+e)m_3}{(m_1+m_3)} v, \quad v_2 = 0, \quad \underline{v}_3 = \frac{(m_3 - em_1)}{(m_1+m_3)} v.$$

$$\text{iv) } \dot{E}_M = \frac{(1+e)m_1 m_3}{(m_1+m_2)(m_1+m_3)} v = \text{constant.}$$

$$\text{v) } \frac{1}{2}m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}k(|\underline{r}_2 - \underline{r}_1| - l_0)^2 = \text{constant.}$$

7. $\frac{v_0^2}{4fg}$.

8. a) $[1 - (\frac{m_1}{m_1 + m_2})^2] \ell + (\frac{m_1}{m_1 + m_2})^2 \frac{v_0^2}{2g}$.

Energieverlies: $\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 - \frac{m_1^2 g \ell}{2(m_1 + m_2)}$.

b) i) 3; ii) $\frac{37}{18} \ell$; iii) $\frac{7}{3} mg\ell$.

9. i) $V_P = \frac{(m - eM)}{(m + M)} v_0$, $V_B = \frac{(1 + e)m}{(m + M)} v_0$.

ii) $\frac{mM}{2(m + M)} (1 - e^2) v_0^2$.

iii) $\frac{\ell}{v_0} (1 + \frac{1}{e})^2$.

10. $v = \sqrt{\frac{(1 - 2e + 5e^2) g \ell}{2(1 - e^2)}}$, $\alpha = \arctan(\frac{2e}{1 - e})$.

11. i) $e^2 h$; ii) $\frac{(1 + e)}{(1 - e)} \sqrt{\frac{2h}{g}}$; iii) $\frac{1}{3} \sqrt{3}$.

12. i) $v_1 = \sqrt{2gh}$, $V_1 = \frac{a}{\ell} \sqrt{2gh}$,

iv) $V_2 = \frac{a^2}{\ell^2} \sqrt{2gh}$.

v) $h_m = (\frac{a}{\ell})^4 h$.

13. i) $e = 0$; $h = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)^2 g}$.

ii) $e = -\frac{1}{2} (1 - \frac{m}{M})$ ($\approx -\frac{1}{2}$, want $m \ll M$), $v > \frac{4M}{m} \sqrt{g\ell}$.

14. i) $h_{1,na} = \frac{(m_1 - em_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} h$, $h_{2,na} = \frac{(1 + e)^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} h$.

ii) $(1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} gh$.

$$15. \quad v_{1x} = v_{2x} = \frac{3}{5} v;$$

$$v_{1y} = -2v_{2y} = \frac{1}{5} v\sqrt{3};$$

$$v_{3x} = -\frac{1}{5} v, \quad v_{3y} = 0.$$

$$16. \quad \underline{v}_2 = 0,0858\underline{e}_x - 0,165\underline{e}_y \quad (\text{m/sec}); \quad \Delta T = -6,8 \quad 10^{-3} \text{J}; \quad \text{Nee.}$$

$$17. \quad \text{i) } \underline{v}_1 = \underline{e}_x + \underline{e}_y, \quad \underline{v}_2 = 0,625(\underline{e}_x - \underline{e}_y) \quad (\text{m/sec}); \quad \text{ii) } \frac{\pi}{2}.$$

$$18. \quad \text{i) } \underline{v}_1 = \left[\frac{(m_1 - em_2)}{(m_1 + m_2)} v \cos \alpha \right] \underline{e}_x + (v \sin \alpha) \underline{e}_y,$$

$$\underline{v}_2 = \left[\frac{(1+e)m_1}{(m_1 + m_2)} v \cos \alpha \right] \underline{e}_x.$$

ii) Noem hoek tussen \underline{v}_1 en \underline{v}_2 : β , dan geldt:

$$\cos \beta = \frac{(1 - e^2)}{\sqrt{8(1 + e^2)}} \cotan \alpha.$$

$$\text{iii) } \frac{1}{2}(1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} v^2 \cos^2 \alpha.$$

19. i) mgh.

$$\text{ii) } \frac{M}{(M+m)} v_0 \cos \alpha \underline{e}_x + v_0 \sin \alpha \underline{e}_y \quad (\text{x-as horizontaal}), \quad v_0 = \sqrt{\frac{2(M+m)gh}{(M+m \sin^2 \alpha)}}$$

$$\text{iii) } \frac{2M(M+m)^2 h}{(2M^3 + 3mM^2 + m^2 M)}, \quad \text{voor } \tan \alpha = \frac{M}{M+m}.$$

$$20. \quad v_1 = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + \frac{4Q}{m}}, \quad v_2 = \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + \frac{4Q}{m}}.$$

$$21. \quad \text{i) } \Omega_{na} = \omega_0; \quad v = \sqrt{E/m}.$$

ii) Neem: $\dot{\phi}$ = hoeksnelheid van buis en r = afstand Om.

$$(M\ell^2 + mr^2) \ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = 0,$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = 0.$$

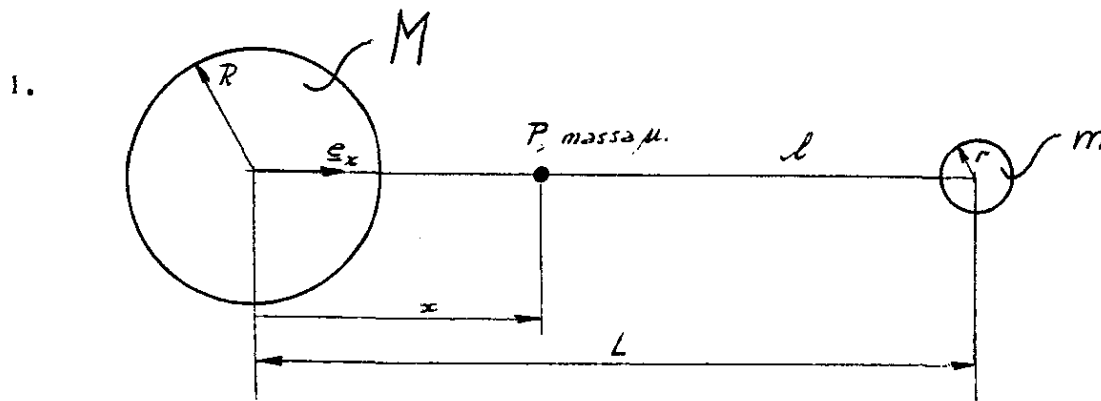
$$\text{iii) Voor: } \underline{v} = \sqrt{E + \frac{mM}{(M+m)}} \ell^2 \omega_0^2 \underline{e}_r \pm \frac{M\ell\omega_0}{(M+m)} \underline{e}_\theta.$$

$$\text{Na: } \underline{v} = -e \sqrt{E + \frac{mM}{(M+m)}} \ell^2 \omega_0^2 \underline{e}_r \pm \frac{M\ell\omega_0}{(M+m)} \underline{e}_\theta.$$

$$\text{iv) } E \geq \frac{(1 - e^2)}{e^2} \cdot \frac{mM}{(M+m)} \ell^2 \omega_0^2.$$

22. i) Nee; ii) Ja, mits $v \geq \frac{2M}{m} V$; iii) $e = 0$; $e = -\frac{1}{2}$.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK 1), dinsdag 13 januari 1981,
14.00 - 17.00 uur.



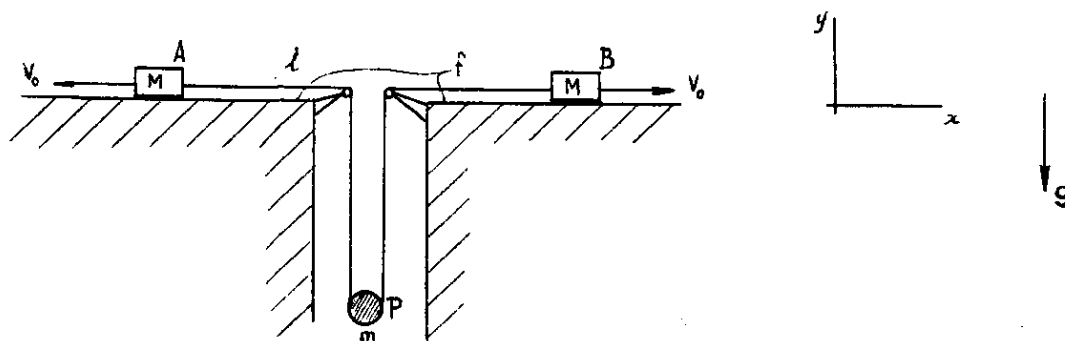
Beschouw het stelsel bestaande uit de aarde, massa M , straal R , de maan, massa m , straal r , en een puntmassa P met massa μ . Aangenomen mag worden dat aarde en maan in rust zijn en dat het massapunt P kan bewegen langs de verbindinglijn ℓ van de middelpunten van aarde en maan. De positie van P geven we aan met x , de afstand tot het middelpunt van de aarde. Zij L de afstand tussen de middelpunten van aarde en maan. Voor $R \leq x \leq L - r$ zijn de door aarde en maan op P uitgeoefende krachten dan resp.

$$\frac{F}{M} = -\frac{fM\mu}{x^2} e_x, \quad \frac{F}{m} = \frac{fm\mu}{(L-x)^2} e_x.$$

- i) Bereken de potentiële energie van P ter plaatse x , $R \leq x \leq L - r$.
Maak een schets van de potentiaalkromme.
- ii) De maten en massa's zijn zodanig dat er voor P op ℓ een evenwichtspunt bestaat.
Bepaal dit punt en onderzoek of het een stabiel of labiel evenwichtspunt betreft.
- iii) Op zeker ogenblik wordt P vanaf het aardoppervlak afgeschoten in de richting van de maan, met een snelheid v_0 .
Bepaal de waarden van v_0 waarvoor P de maan zal bereiken.
- iv) Kan v_0 zodanig gekozen worden dat P de maan met snelheid 0 bereikt?
Beredeneer Uw antwoord.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK 1), dinsdag 13 januari 1981.

2.



Een stelsel bestaat uit de massapunten A, B, beide massa M en het massapunt P met massa m . De massapunten A en B zijn onderling verbonden door een massaloos koord ter lengte l en kunnen bewegen over een ruw vlak, wrijvingscoëfficiënt f . Het koord is geslagen over twee glade pennen en hangt af in een verticale sleuf. Het massapunt P hangt als een diabolo in het afhangende deel.

Op zeker ogenblik bevinden de massapunten A en B zich op een onderling te verwaarlozen afstand en krijgen beide een snelheid v_0 gericht loodrecht op de sleuf in onderling tegengestelde richting. Zie figuur.

Als het massapunt P de lijn AB passeert komt het los van het koord. De versnelling van de zwaartekracht is g .

i) Bepaal de waarden van f opdat het koord gespannen blijft.

Kies voor de volgende vragen f zodanig dat het koord gespannen blijft.

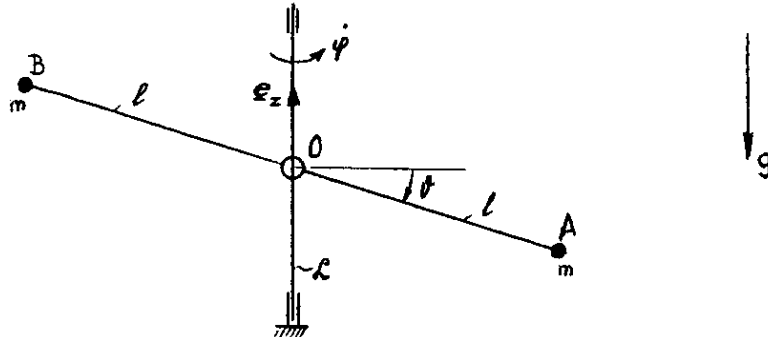
ii) Bepaal de waarden van v_0 waarvoor P de lijn AB zal passeren.

iii) Bepaal voor alle waarden van v_0 de hoogte die P bereikt.

iv) Controleer Uw antwoord op (iii) met een energiebeschouwing ingeval $f = 0$.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK 1), dinsdag 13 januari 1981.

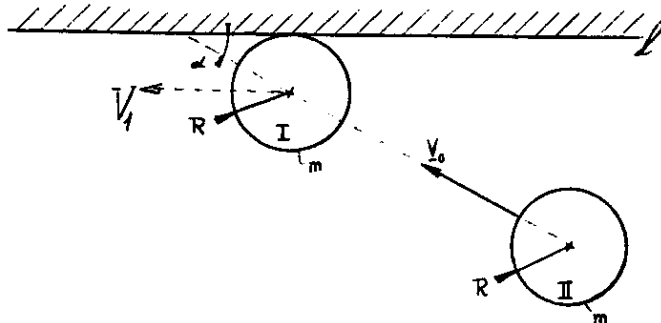
3.



Een halter AB, bestaande uit een massaloze staaf, lengte $2l$, en twee massapunten, beide met massa m , is in zijn midden O verbonden met een verticale as l . l kan vrij draaien om zijn eigen as (hoeksnelheid $\dot{\psi}$), waarbij de halter met l meedraait. De halter kan verder nog vrij draaien om O in het (met $\dot{\psi}$ roterende) vlak door l en AB (hoeksnelheid $\dot{\theta}$). Op $t = 0$ is AB in rust t.o.v. l ($\dot{\theta}(0) = 0$). l roteert dan met een hoeksnelheid ω_0 ($\dot{\psi}(0) = \omega_0$), en AB maakt een hoek θ_0 met de horizontaal door O ($\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/2$). Er is nergens wrijving. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Bepaal van het systeem, uitgedrukt in θ , $\dot{\theta}$ en $\dot{\psi}$,
de impuls \underline{P} ,
het impulsmoment om l (\underline{e}_z -as) t.o.v. O : L_{Oz} ,
de kinetische energie T en
de potentiële energie U .
- iii) Welke behoudwetten gelden hier? Schrijf deze uit.
Bepaal hieruit $\dot{\theta}$ en $\dot{\psi}$ als functie van θ .
- iv) Is de beweging van A in θ -richting begrensd? Zo ja, wat zijn dan de maximale waarden van θ ?
- v) Tussen welke grenzen ligt de hoeksnelheid $\dot{\psi}$ en voor welke waarden van θ treden deze grenzen op?

4.



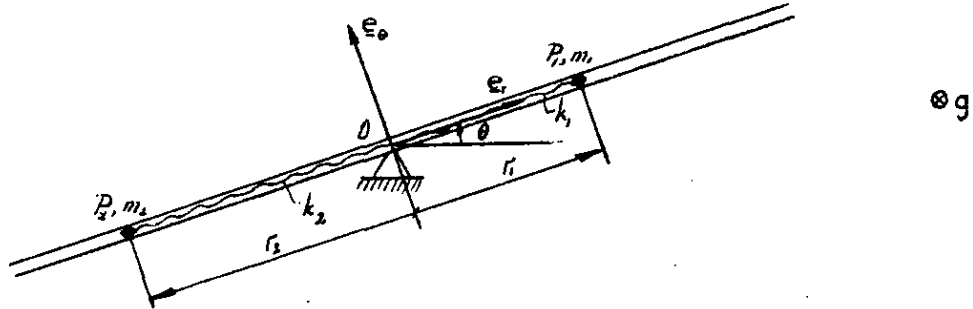
In een sjoelbak ligt een gladde schijf I, massa m , straal R , in rust tegen een zijkant ℓ . Tegen deze schijf botst centraal een tweede, identieke schijf II. Deze botsing is volkomen elastisch.

Vlak voor de botsing heeft II een snelheid \underline{v}_0 . De hoek tussen de richting van \underline{v}_0 en de zijkant ℓ is α . Na de botsing beweegt I langs de zijkant ℓ met snelheid \underline{v}_1 . De snelheid van II na de botsing is \underline{v}_2 .

- Bereken \underline{v}_1 en \underline{v}_2 .
- Controleer Uw antwoorden voor $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- Bereken de eventuele verandering in de totale kinetische energie en verklaar Uw antwoord.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I), vrijdag 27 maart 1981,
14.00 - 17.00 uur.

1.



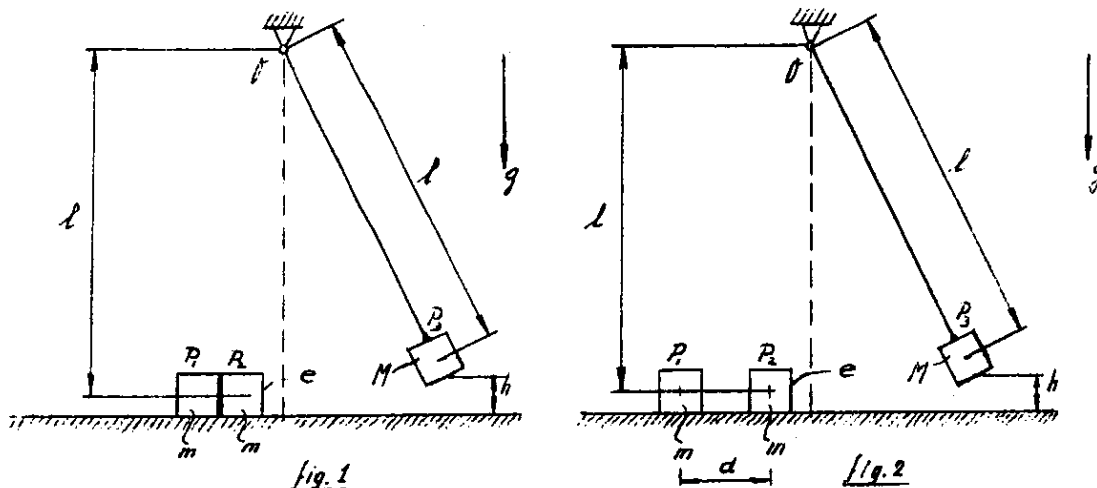
Een massaloze buis kan zonder wrijving roteren om een vaste verticale as, door het punt O, loodrecht op de buis. In de buis kunnen twee massapunten P_1 en P_2 , massa m_1 resp. m_2 , zonder wrijving bewegen. Tussen het midden O en de massapunten P_1 en P_2 zijn twee veren, veerstijfheid k_1 resp. k_2 , beide ongespannen veerlengte nul, aangebracht.

Op het tijdstip $t=0$ bevinden P_1 en P_2 zich beide op een afstand r_0 van O en hebben geen snelheid t.o.v. de buis. De buis roteert op $t=0$ met hoeksnelheid ω_0 .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft het systeem?
- ii) Bepaal de impuls en het impulsmoment om O van elke massa afzonderlijk en van het totale systeem;
- iii) Bepaal de kinetische en de potentiële energie van het totale systeem;
- iv) Bepaal de hoeksnelheid van de buis als functie van de afstanden OP_1 en OP_2 ;
- v) Aan welke bewegingsvergelijkingen voldoen de afstanden OP_1 en OP_2 ?

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I), vrijdag 27 maart 1981.

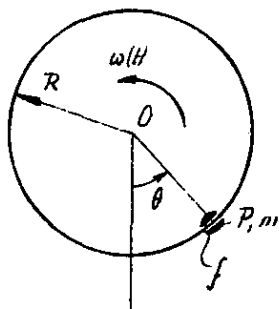
2.



- i) Een massapunt P_3 , massa M , is via een koord, lengte l , verbonden met een vast punt O . Op een afstand l onder O bevindt zich een glad, horizontaal vlak, waarop twee massapunten P_1 en P_2 , beide massa m , liggen. Op $t=0$ zijn alle massapunten in rust en liggen P_1 en P_2 tegen elkaar verticaal onder O (zie figuur 1). Het punt P_3 wordt rechts van P_2 op een hoogte h boven het horizontale vlak, en bij een gespannen koord, losgelaten. De botsingscoëfficiënt tussen P_3 en P_2 is e . De versneling van de zwaartekracht is g .
Gevraagd wordt de snelheid van P_1 na de botsing.
- ii) Beschouw weer hetzelfde systeem als bij i), maar nu ligt op $t=0$ nog wel P_2 onder O , maar P_1 ligt op een, kleine, afstand d links van P_2 (zie figuur 2). De botsing tussen P_1 en P_2 is volkomen onelastisch. Gevraagd wordt de uiteindelijke snelheid van P_1 .
- iii) Vergelijk de uitkomsten van i) en ii) Zijn deze gelijk? Zo neen, hoe kunt U dit verschil dan verklaren?
- iv) Neem $e = 1$. Bereken nu voor i) en ii) de totale energieverliezen. Verklaar Uw antwoorden.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I), vrijdag 27 maart 1981.

3.



Een massapunt P, massa m, kan glijden langs een cirkelvormige ring met straal R. Tussen P en de ring is wrijving, wrijvingscoëfficiënt f. Aanvankelijk draait de ring met hoeksnelheid ω_0 en is P in rust t.o.v. de ring. Vanaf zeker tijdstip ($t=0$) gaat de hoeksnelheid van de ring af-

nemen volgens

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t, \quad (\alpha > 0)$$

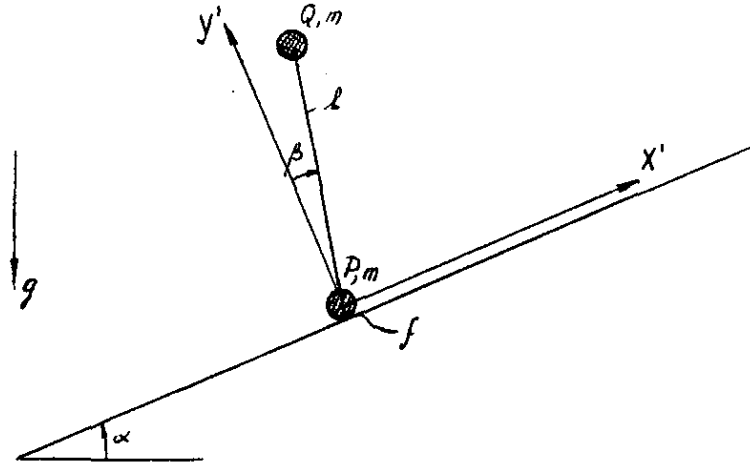
totdat de ring tot rust gekomen is (op $t = t_e = \frac{\omega_0}{\alpha}$). De zwaartekracht mag buiten beschouwing worden gelaten.

- i) Hoe groot moet f minstens zijn, opdat P niet meteen na $t=0$ gaat slippen t.o.v. de ring?
- ii) Bestaat er een eindige waarde voor f, waarvoor P op $t=t_e$ nog steeds in rust is t.o.v. de ring? Zo ja, hoe groot moet deze waarde dan minstens zijn?
- iii) Neem aan dat f zodanig is dat P gaat slippen t.o.v. de ring op een tijdstip t_1 zodanig dat $0 < t_1 < t_e$. Bepaal dan t_1 als functie van f, α en ω_0 .
- iv) Neem f nu zodanig dat P meteen gaat slippen op $t=0$. Hoeveel graden van vrijheid heeft het systeem nu? Geef de bewegingsvergelijking voor P met de beginvoorwaarde. Welke conclusie kunt U hieruit trekken omtrent het tijdstip waarop P absoluut tot rust komt? Is P in rust op

$$t = t_e = \frac{\omega_0}{\alpha} ?$$

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I), vrijdag 27 maart 1981.

4.



Een halter bestaat uit twee massapunten P en Q , beide massa m , onderling verbonden door een massaloze starre staaf, lengte l . Het punt P van de halter glijdt langs een ruw hellend vlak, hellingshoek α , wrijvingscoëfficiënt f , ($f < \tan \alpha$).

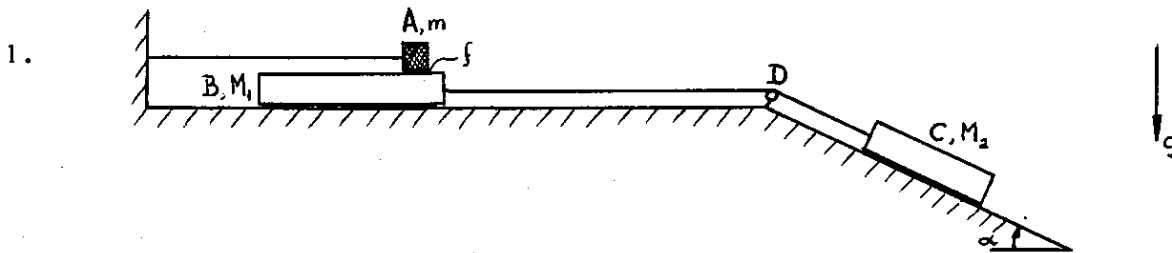
Op zeker ogenblik wordt de halter zonder beginsnelheid losgelaten. De hoek tussen de normaal op het vlak en de lijn PQ bedraagt op dat ogenblik β . De hoek β is zo gekozen dat de hoek tussen de normaal op het vlak en de lijn PQ gedurende de hele beweging constant ($=\beta$) is. De versnelling van de zwaartekracht is g .

Aanwijzing: Voer een coördinatensysteem $PX'Y'$ in dat met de halter meetransleert.

- i) Bereken de grootte en de richting van de versnelling waarmee het coördinatensysteem $PX'Y'$ transleert.
- ii) Bepaal in grootte en richting de kracht die in P door het hellend vlak op de halter wordt uitgeoefend.
- iii) Bepaal de hoek β .

Examen/tentamen Inleiding Mechanica voor WSK I op dinsdag 12 januari 1982,

14.00 - 17.00 uur.

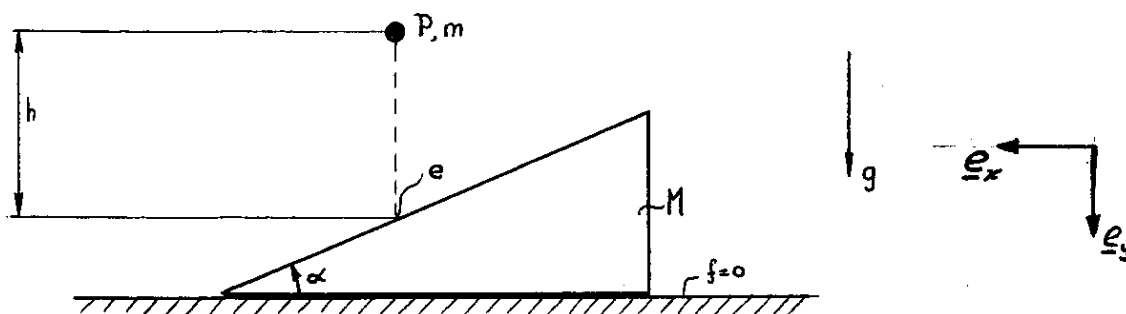


Een mechanisch stelsel bestaat uit een massapunt A, massa m , en twee platen B en C, beide op te vatten als massapunten, met massa M_1 resp. M_2 ($M_2 > M_1$). Het massapunt A ligt op de plaat B. De wrijvingscoëfficiënt tussen A en B is f . Het massapunt A is met een massaloos onrekbaar koord verbonden aan een vast punt. De plaat B kan zonder wrijving glijden over een horizontaal vlak, de plaat C kan zonder wrijving glijden over een hellend vlak, hellingshoek α . Tussen de beide platen is een massaloos, onrekbaar koord bevestigd, dat over een gladde pen D kan glijden. Het stelsel is aanvankelijk in rust in de getekende situatie, waarbij de beide koorden juist strak staan. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Voor welke waarden van f zal het stelsel gaan bewegen?
- ii) Bepaal voor die waarden van f de versnelling van C.
- iii) Bepaal de spankracht in de beide koorden voor alle waarden van f .

Examen/tentamen Inleiding Mechanica voor WSK I op dinsdag 12 januari 1982,
14.00 - 17.00 uur.

2.

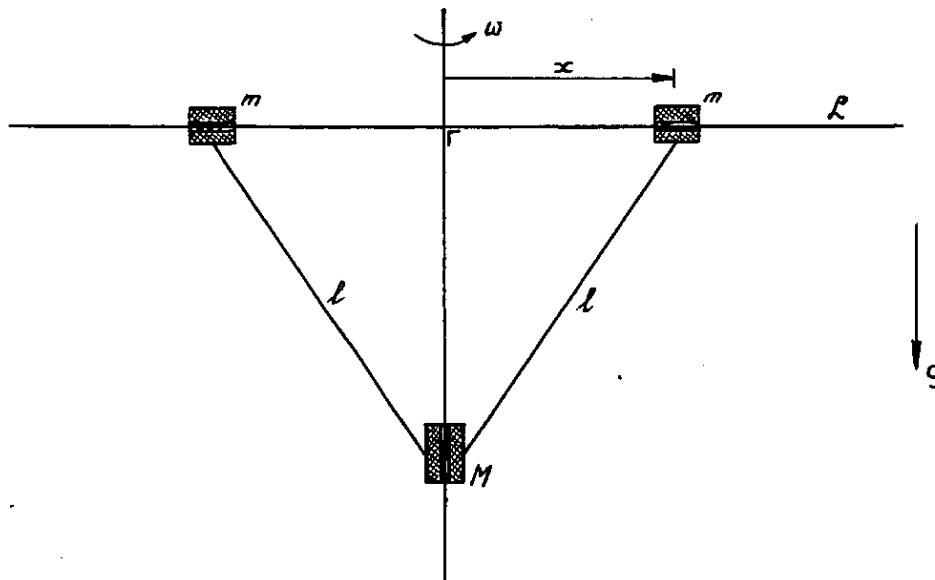


Een wigvormig blok, hellingshoek α , massa M , kan zonder wrijving glijden over een horizontaal vlak. Op een hoogte h boven het hellende vlak wordt een massapunt P , massa m , zonder beginsnelheid losgelaten. De botsingscoëfficiënt tussen het massapunt P en het blok is e . De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Bereken de snelheid van P juist voor de botsing met het blok.
- ii) Bereken de componenten van de snelheid van P en de snelheid van het blok direct na de botsing.
- iii) Controleer Uw antwoorden op ii) voor de twee limietgevallen:
 - a) $\alpha \rightarrow 0$,
 - b) $m/M \rightarrow 0$.

Examen/tentamen Inleiding Mechanica voor WSK I op dinsdag 12 januari 1982,
14.00 - 17.00 uur.

3.

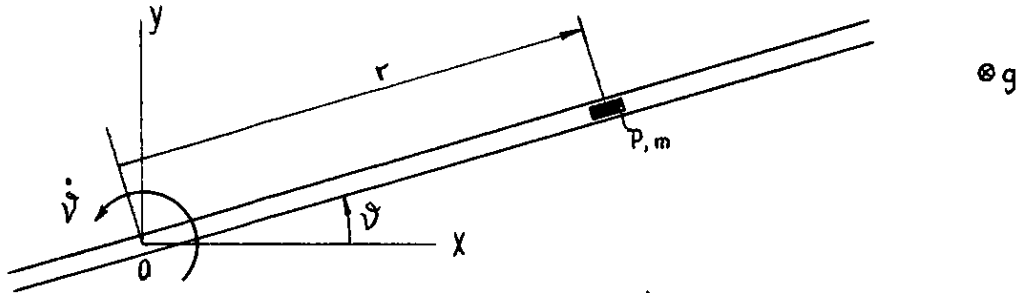


Een starre staaf L draait met constante hoeksnelheid ω om een vaste verticale as loodrecht op L . Langs de staaf kunnen twee massapunten, beide massa m , zonder wrijving glijden. De beide massapunten liggen steeds aan weerszijden op gelijke, veranderlijke afstand x van de draaiingsas. Een koord, massaloos en onrekbaar, lengte 2ℓ , is tussen de massapunten aangebracht. In het midden van het koord is een massapunt, massa M , bevestigd, dat zonder wrijving kan glijden langs de draaiingsas. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Bepaal, na stilzetten, de kinetische en de potentiële energie van het systeem.
- ii) Blijft de energie behouden? Verklaar Uw antwoord.
- iii) Bepaal de kinetische evenwichtsstanden.
- iv) Onderzoek de stabiliteit van de kinetische evenwichtsstanden.

Examen/tentamen Inleiding Mechanica voor WSK I op dinsdag 12 januari 1982,
14.00 - 17.00 uur.

4.

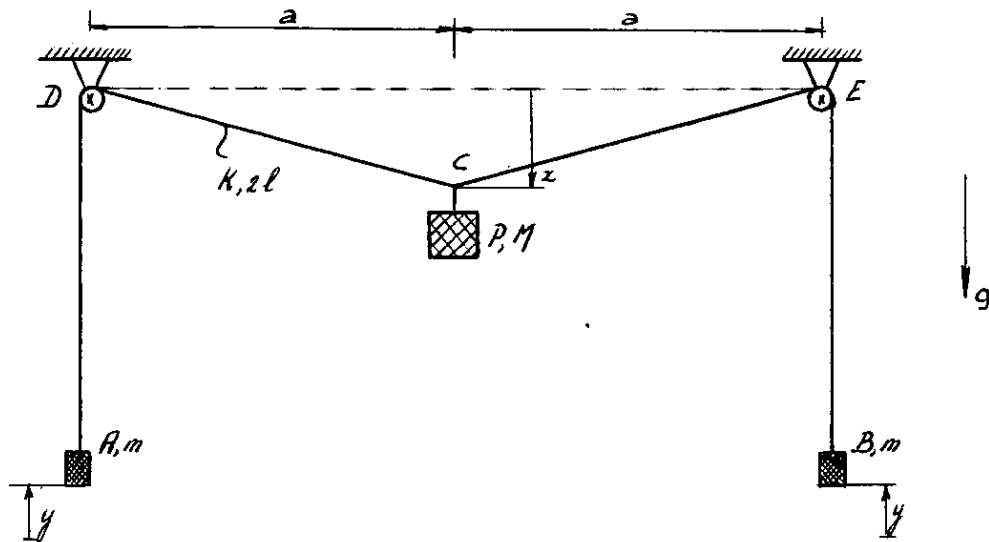


Een massaloze buis kan vrij draaien in een horizontaal vlak om een vast punt O. In de buis kan zonder wrijving een massapunt P, massa m, bewegen. Het punt P wordt aangetrokken door O door een kracht evenredig met $1/r^2$ ($r = OP$), evenredigheidsconstante mk . Op het tijdstip $t = 0$ heeft de buis een hoeksnelheid ω_0 en is P in rust t.o.v. de buis op een afstand r_0 van O.

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft P?
 - ii) Geeft uitdrukkingen (in r , \dot{r} , ϑ en $\dot{\vartheta}$) voor de impuls, het impulsmoment om O, de kinetische en de potentiële energie van P.
 - iii) Welke twee behoudwetten gelden hier? Schrijf deze behoudwetten uit.
 - iv) Bepaal de bewegingsvergelijkingen van P met de beginvoorwaarden.
 - v) Welke relatie moet er tussen r_0 en ω_0 bestaan, opdat P een eenparige cirkelbeweging gaat uitvoeren?
-

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK 1) op vrijdag 23 april 1982,
13.30 - 16.30 uur.

1.



Twee massapunten A en B , beide massa m , zijn bevestigd aan de einden van een massaloos, onrekbaar koord K , lengte $2l$. In het midden C van K is een massapunt P , massa M , bevestigd ($M < 2m$). Het koord is geslagen over twee gladde pennen D en E , die op één horizontale lijn liggen, onderlinge afstand $2a$, $2a < l$.

Het systeem wordt vanuit rust overgelaten aan de invloed van de zwaartekracht, versnelling g ; in de beginpositie valt C samen met het midden van DE . Aangenomen mag worden dat de beide massapunten A en B steeds dezelfde beweging uitvoeren.

De daling van C wordt aangeduid met x , de stijging van A en B met y .

i) Bewijs dat x en y voldoen aan de vergelijking: $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

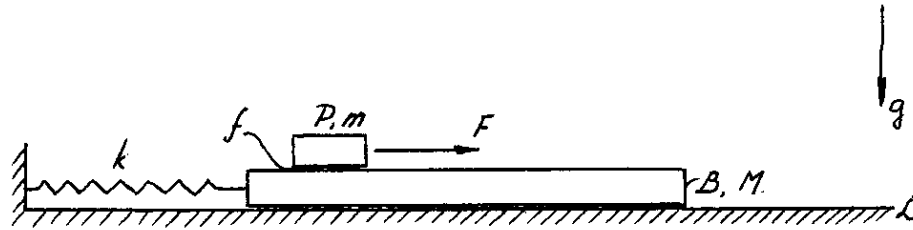
ii) Bepaal de kinetische energie T van het systeem als functie van x en \dot{x} .

iii) Bepaal de potentiële energie U van het systeem als functie van x .

iv) Bepaal de grootste en de kleinste waarde die x bereikt.

Tentamen/examen Inleiding in de Mechanica (WSK 1) op vrijdag 23 april 1982,
13.30 - 16.30 uur.

2.

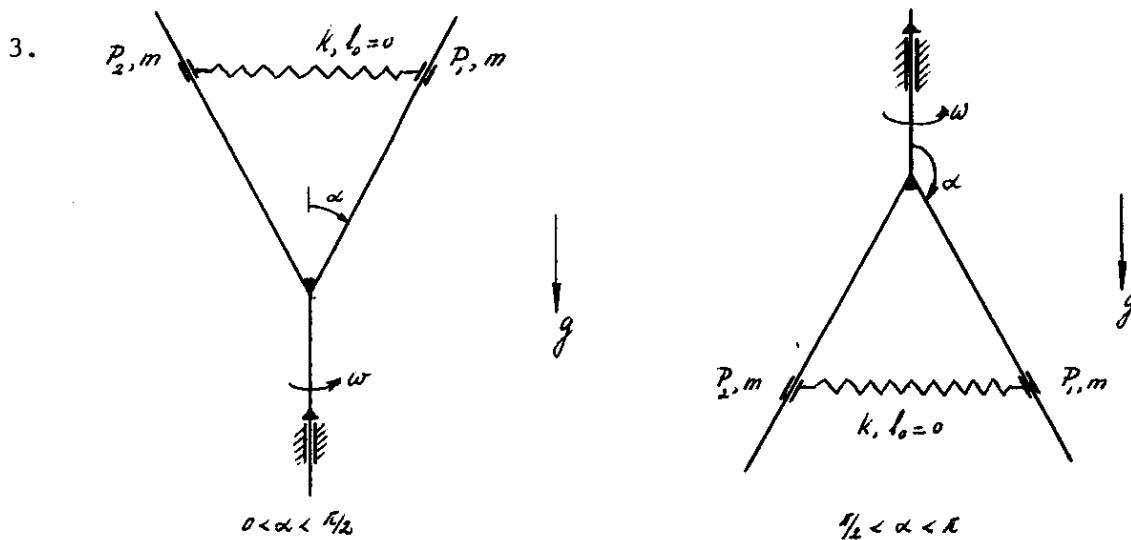


Een blok B, massa M , kan zonder wrijving glijden langs een horizontale rechte L . Tussen het blok en een vast punt A van L is een lineaire veer, veerconstante k , bevestigd. Op het blok ligt een massapunt P, massa m . De wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en het massapunt is f . De versnelling van de zwaartekracht is g .

Vanaf zeker ogenblik, beide massa's zijn op dat ogenblik in rust en de veer is ongespannen, gaat het systeem bewegen onder invloed van een constante kracht F op P in de richting van L .

- i) Voor welke waarden van F zal P onmiddellijk over B gaan glijden?
- ii) Voor welke waarden van F zal P nooit over B glijden?
- iii) Neem voor F een waarde tussen de in i) en ii) gevraagde grenswaarden. Hoe groot is dan de verplaatsing van B op het moment dat P over B begint te glijden?

Tentamen/examen Inleiding in de Mechanica (WSK 1) op vrijdag 23 april 1982,
13.30 - 16.30 uur.

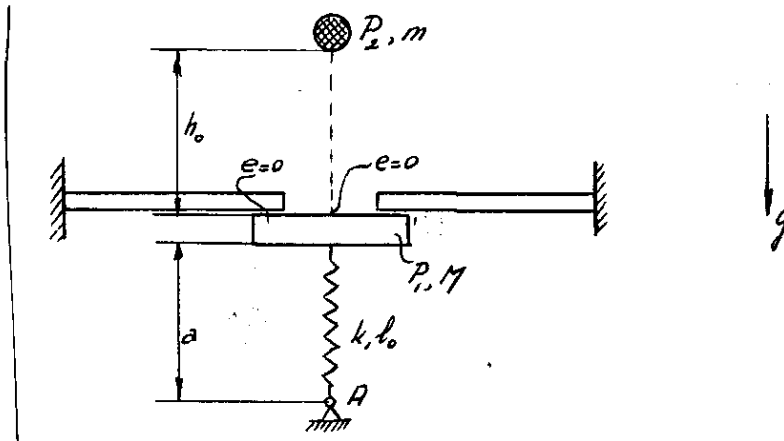


Drie staven zijn in de vorm van een symmetrische Y star aan elkaar gelast. De poot van de Y is verticaal en de halve openingshoek is α , met $\alpha \in (0, \pi)$ (zie figuur). Langs de staven kunnen twee identieke massapunten P_1 en P_2 , beide massa m , zonder wrijving bewegen, waarbij P_1 en P_2 steeds op dezelfde hoogte blijven. De punten P_1 en P_2 zijn met elkaar verbonden door een massaloze veer, stijfheid k , ongespannen veerlengte $l_0 = 0$. Het stelsel roteert met een constante hoeksnelheid ω om de verticale symmetrie-as. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Bepaal de kinetische evenwichtsstand(en) van P_1 en P_2 .
- iii) Onderzoek de stabiliteit van deze standen. Onderscheid hierbij $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ en $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK 1) op vrijdag 23 april 1982,
13.30 - 16.30 uur.

4.



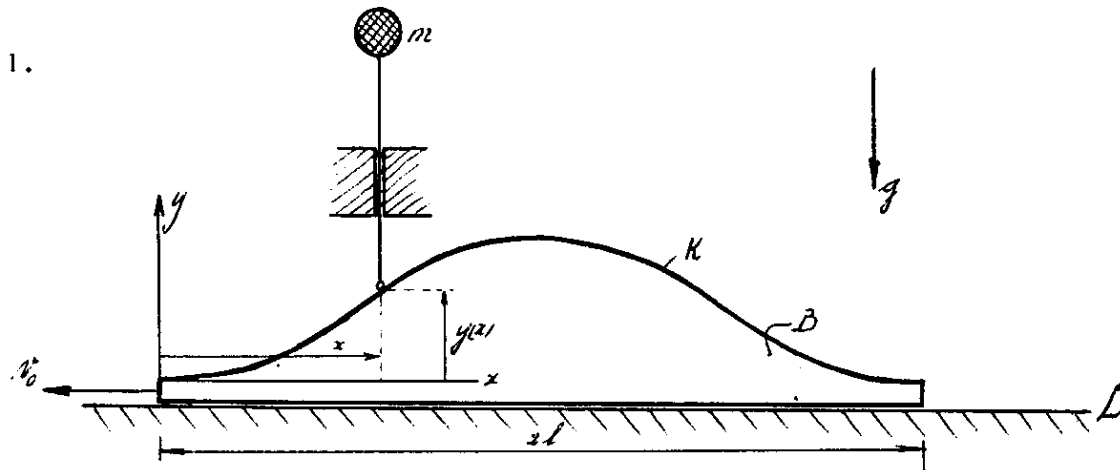
Verticaal boven een vast punt A bevindt zich een massapunt P_1 , massa M , dat via een massaloze veer, veerstijfheid k , ongespannen veerlengte l_0 , met A verbonden is. Het punt P_1 drukt tegen een vast horizontaal vlak, waarin boven P_1 een gat zit. Op een afstand h_0 verticaal boven P_1 bevindt zich een tweede massapunt P_2 , massa m . De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Hoe groot moet l_0 minstens zijn, opdat P_1 inderdaad tegen het horizontale vlak drukt? Neem verder: $l_0 = a + \frac{(M+m)g}{k}$.

Het massapunt P_2 wordt zonder beginsnelheid losgelaten. Alle botsingen zijn volkomen onelastisch.

- ii) Bereken de snelheid van P_2 vlak voor de botsing en die van P_1 en P_2 direct na de botsing.
- iii) Bereken de maximale indrukking van de veer.
- iv) Bereken de maximale hoogte (h_1) die P_2 bereikt.
- v) Na hoeveel botsingen komt P_2 tot stilstand? Bewijs dat toch de totale door P_2 afgelegde weg eindig is en bereken deze weg als functie van $\mu = (M+m)/m$.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I) op donderdag 17 juni
1982, 9.00 - 12.00 uur.



Een blok B beweegt met constante snelheid v_0 over een horizontaal vlak langs een rechte geleiding L . De bovenzijde van het blok wordt gevormd door een cilindrisch oppervlak K met parametervoorstelling:

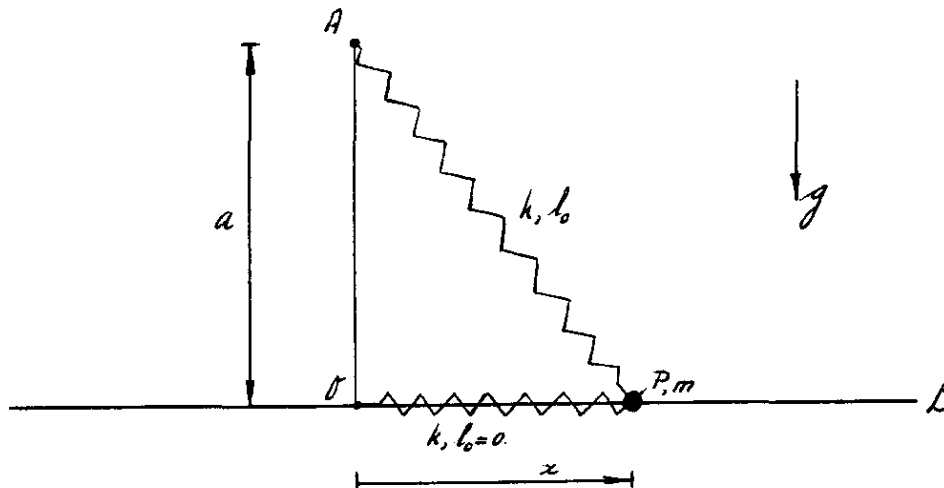
$$K: y = \frac{1}{2}h \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right).$$

Over het oppervlak kan zonder wrijving een taster, massa m , glijden. De taster beweegt zonder wrijving in een verticale geleiding. De versnelling van de zwaartekracht is g .

Voor welke waarden van v_0 blijft de taster in contact met het blok?

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I) op donderdag 17 juni
1982, 9.00 - 12.00 uur.

2.

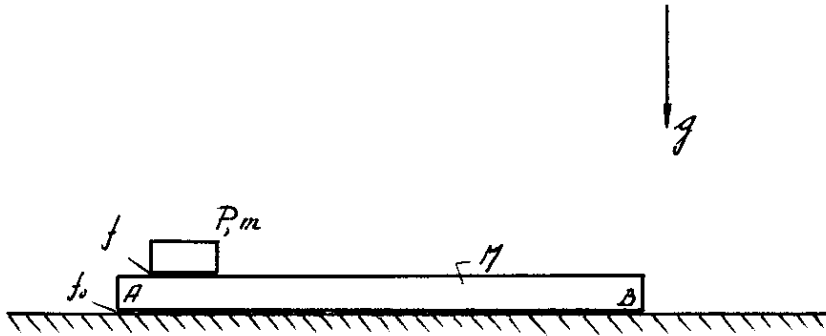


Een massapunt P , massa m , kan zonder wrijving glijden langs een vaste, horizontale rechte L . Het punt P is enerzijds verbonden met een vast punt O op L dmv. een veer met veerstijfheid k en ongespannen veerlengte nul en anderzijds met een vast punt A op een afstand a verticaal boven O dmv. een veer, eveneens met veerstijfheid k , maar met een eindige veerlengte l_0 .

- Bepaal de potentiële energie van P als functie van x (zie figuur).
- Bepaal de evenwichtsstanden van P . Hoeveel evenwichtsstanden heeft P en waar hangt dit aantal van af?
- Onderzoek de stabiliteit van de bij ii) gevraagde evenwichtsstanden.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I) op doncerdag 17 juni
1982, 9.00 - 12.00 uur.

3.



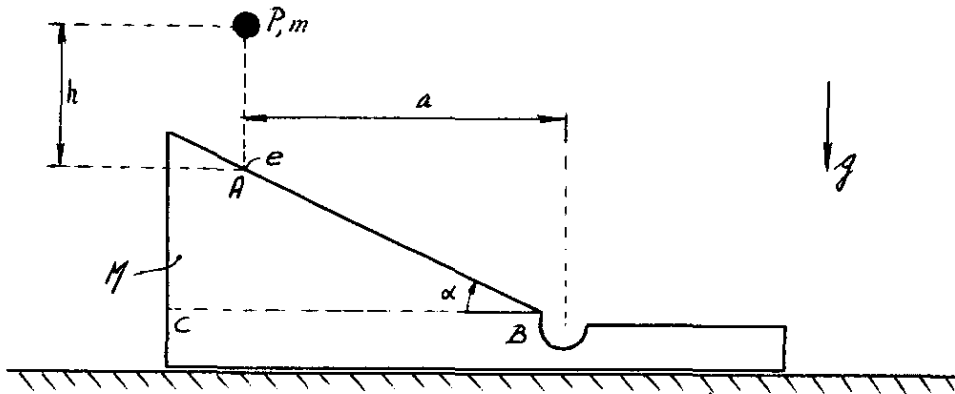
Een voldoende lange plaat AB, massa M, beweegt onder invloed van een kracht rechtlijnig met constante snelheid v_0 over een ruw horizontaal vlak, wrijvingscoëfficiënt f_0 . Op de plaat rust een massapunt P, massa m. De wrijvingscoëfficiënt tussen het punt P en de plaat A is f. De versnelling van de zwaartekracht is g.

Op $t = 0$ wordt de kracht weggenomen en de plaat en het massapunt bewegen onder invloed van de wrijving rechtlijnig verder.

- i) Stel de bewegingsvergelijkingen op.
- ii) Laat zien dat P nooit een kleinere snelheid in de richting AB kan hebben dan de plaat.
- iii) Bepaal de waarden van f waarvoor het punt P voor positieve t over de plaat glijdt.
- iv) Bewijs dat voor de onder iii) gevraagde waarden van f eerst de plaat en dan het massapunt tot rust komen.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK I) op donderdag 17 juni
1982, 9.00 - 12.00 uur.

4.



Een wigvormig blok ABC, hoek ABC is α , met massa M kan zonder wrijving glijden over een horizontaal vlak. Op een hoogte h boven het punt A van het blok wordt zonder beginsnelheid een massapunt P met massa m losgelaten. De botsingscoëfficiënt tussen m en M is e. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g.

- i) Hoe groot is de snelheid van P vlak voor de botsing in A met het blok?
- ii) Bepaal de snelheid van het blok en de snelheidscomponenten van P direct na de botsing.
- iii) Controleer Uw antwoord op ii) voor $\alpha = 0$ en voor $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

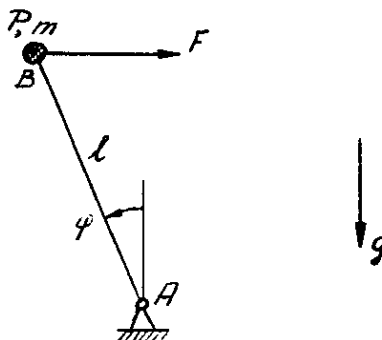
Neem voor de nu volgende vraag $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en $M = m$.

- iv) Hoe groot moet h, als functie van e, gekozen worden, opdat P na de botsing in A direct, dwz. zonder eerst nog het vlak AB te raken, in een zich bij B bevindend putje terechtkomt. De horizontale afstand tussen A en B is a.

Wat neemt U waar voor $e \rightarrow 0$? Verklaar dit verschijnsel.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK III) op maandag 20 juni 1983,
9.00 - 12.00 uur.

1.

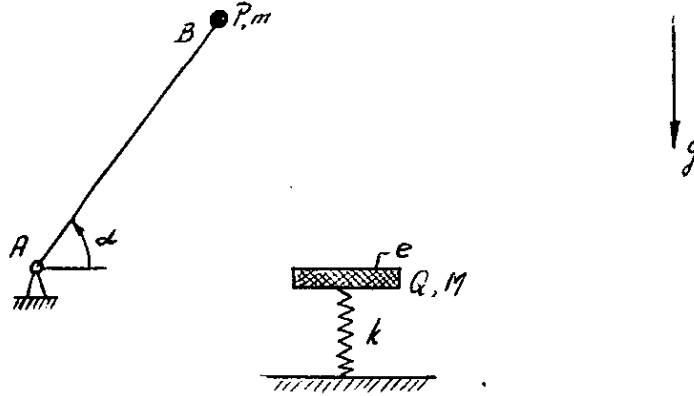


Een massaloze staaf AB, lengte l , kan vrij draaien om het vaste uiteinde A in een verticaal vlak V. In het uiteinde B van de staaf is een massapunt P, massa m , bevestigd. Op het punt P werkt een constante horizontale kracht F in het vlak V. De hoek tussen AB en de verticaal door A wordt aangeduid met φ . Aanvankelijk is de staaf in rust en heeft φ de waarde α . De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Voor welke waarde van F zal de staaf in rust blijven?
Bepaal in dat geval de staafkracht S in AB.
- ii) Bepaal voor F groter dan de onder i) berekende waarde de snelheid en de versnelling van P als functie van de hoek φ .
- iii) Bepaal voor het onder ii) bedoelde geval de staafkracht S als functie van de hoek φ .

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK III) op maandag 20 juni 1983,
9.00 - 12.00 uur.

2.



Een massaloze staaf AB, lengte l , kan vrij draaien om het vaste uiteinde A in een verticaal vlak V. In het uiteinde B van de staaf is een massapunt P, massa m , bevestigd. De staaf wordt losgelaten vanuit rust in een stand waarbij de hoek tussen AB en de horizontaal gelijk is aan α . Aanvankelijk beweegt de staaf uitsluitend onder invloed van de zwaartekracht, versnelling g . Op het moment dat P de horizontaal door A bereikt, botst het punt P op een punt Q, massa M . De botsingscoëfficiënt tussen P en Q is e , $0 < e < 1$. Het punt Q was voor de botsing in rust en is bevestigd aan een lineaire veer, veerconstante k . Bepaal:

- i) De snelheid van P op het moment dat AB de horizontale stand bereikt.
- ii) De snelheden van P en Q onmiddellijk na de botsing.

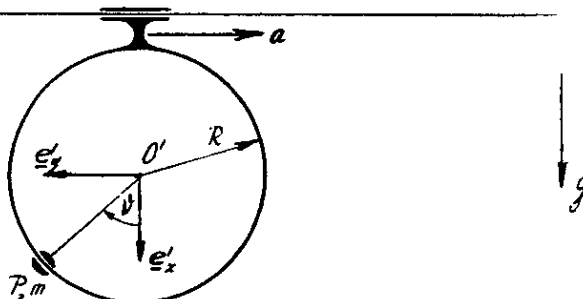
Aangenomen mag worden dat de punten P en Q elkaar na de botsing niet meer treffen.

Bepaal in dat geval

- iii) De grootste hoogte die P bereikt ná de botsing.
- iv) De grootste indrukking van de veer ná de botsing.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK III) op maandag 20 juni 1983,
9.00 - 12.00 uur.

3.



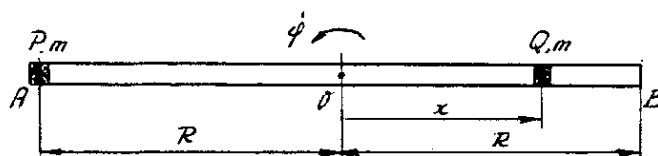
Een massapunt P , massa m , kan bewegen langs een, in een verticaal vlak V gelegen, gladde, cirkelvormige ring, straal R . De ring beweegt met een constante, horizontale versnelling a in V . De versnelling van de zwaartekracht is g .

Op het tijdstip $t = 0$ is P in rust ten opzichte van de ring en heeft ϑ (zie figuur) de waarde ϑ_0 .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Voer een met het middelpunt O' van de ring meebewegend assenstelsel $OX'Y'$ in (zie figuur). Zet de beweging van dit assenstelsel stil. Welke schijnkracht(en) moet U hierbij invoeren? Bepaal de totale potentiële energie van P (afkomstig van de zwaartekracht en van de schijnkracht) als functie van ϑ .
- iii) Bepaal de bewegingsvergelijking van P met de bijbehorende beginvoorwaarden.
- iv) Bepaal de waarden van ϑ_0 , waarvoor P voor alle $t > 0$ in rust blijft ten opzichte van de ring (kinetische evenwichtsstanden).
- v) Onderzoek de stabiliteit van deze kinetische evenwichtsstanden.
- vi) Stel $\vartheta_0 = 0$. Wat is nu de maximale waarde die ϑ_0 bereikt?

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica (WSK III) op maandag 20 juni 1983,
9.00 - 12.00 uur.

4.



Een massaloze buis AB , lengte $2R$, kan zonder wrijving draaien om zijn vaste middelpunt O in een horizontaal vlak. In de buis bevinden zich twee magneetjes P en Q , beide massa m . P zit vast aan de buis in het eindpunt A ; Q kan zonder wrijving bewegen in de buis. De magneetjes trekken elkaar aan met een kracht, welke omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand PQ , evenredigheidsconstante μ^2 . Noem de hoeksnelheid van de buis $\dot{\phi}$ en geef de afstand van O tot Q aan met x (zie figuur). Op $t = 0$ is $\dot{\phi} = \omega_0$, $\dot{x} = 0$ en $x = R$.

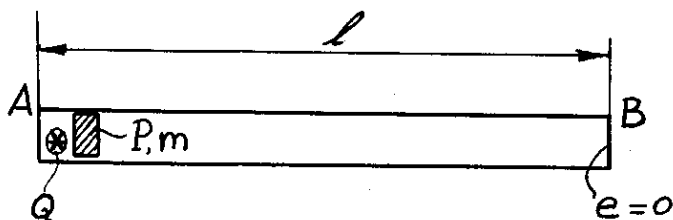
- Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- Bepaal de impuls, het impulsmoment om O en de kinetische energie van P en Q afzonderlijk en van het totale systeem en de potentiële energie van het totale systeem, alle uitgedrukt in x , \dot{x} en $\dot{\phi}$.
- Bepaal de bewegingsvergelijking in radiale richting (d.i. in x -richting) van Q , met de bijbehorende beginvoorwaarden. Bewijs hiermee dat Q voor $\omega_0 < \mu/2R$ naar A toe gaat bewegen.

Voor de volgende vragen mag worden aangenomen dat aan deze ongelijkheid is voldaan.

- Welke twee behoudswetten gelden voor dit systeem? Bepaal $\dot{\phi}$ en \dot{r} als functie van r .
 - Bepaal de snelheid waarmee Q het punt O passeert; hoe groot is op dat moment de hoeksnelheid $\dot{\phi}$ van de buis?
-

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica op woensdag 17 augustus 1983,
9.00 - 12.00 uur.

1.

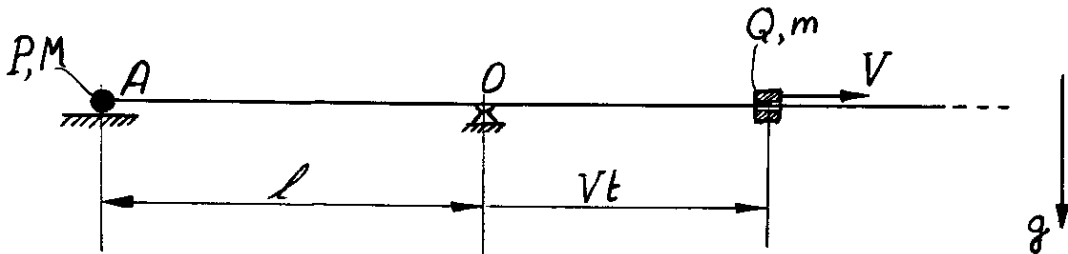


Een buis AB, massa M , kan zonder wrijving glijden over een horizontaal vlak. In de buis kan, eveneens zonder wrijving, een massapunt P , massa m , bewegen. Op $t = 0$, AB en P zijn dan in rust en P bevindt zich bij A, vindt tussen P en het linker uiteinde A van de buis een explosie plaats. Bij deze explosie komt een hoeveelheid energie Q vrij, welke geheel wordt omgezet in kinetische energie voor P en AB. Na verloop van tijd botst P tegen het andere uiteinde van de buis in B. Deze botsing is volkomen onelastisch ($e = 0$).

- i) Bereken de snelheid van P en van AB direct na de explosie.
- ii) Bereken de snelheid van P en van AB direct na de botsing bij B.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica op woensdag 17 augustus 1983,
9.00 - 12.00 uur.

2.

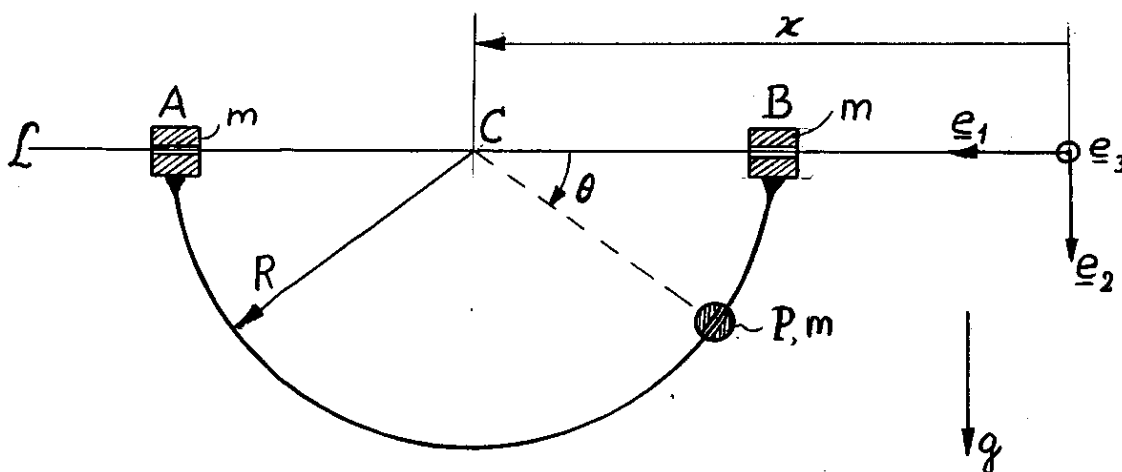


Een half-oneindige, massaloze staaf kan draaien om een horizontale as door het vaste punt O en loodrecht op de staaf. Aan het eindpunt van de staaf is, op een afstand l links van O , een massapunt P , massa M , bevestigd. Het punt P ligt aanvankelijk op een vast horizontaal vlak, op dezelfde hoogte als O . Een ander massapunt Q , massa m , beweegt met een constante, voorgeschreven snelheid V langs de staaf naar rechts. Op $t = 0$ is de staaf in rust en bevindt Q zich juist rechts van O . Er is nergens wrijving. De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Neem aan dat de staaf voor $0 \leq t \leq t_1$ horizontaal blijft.
Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem nu?
- ii) Bereken voor $0 \leq t \leq t_1$, en als functie van t , de normaalkracht door het horizontale vlak op P uitgeoefend.
Bepaal het tijdstip t_1 , waarop P loskomt van het horizontale vlak.
- iii) Hoeveel graden van vrijheid heeft het systeem voor $t > t_1$?
- iv) Bepaal, voor $t > t_1$, met behulp van de momentenstelling om O de bewegingsvergelijking voor het systeem met de beginvoorwaarden.

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica op woensdag 17 augustus 1983,
9.00 - 12.00 uur.

3.

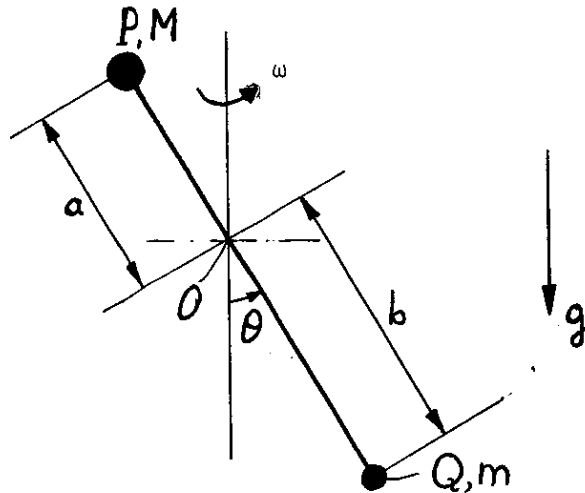


Twee massapunten A en B, beide massa m , kunnen zonder wrijving glijden langs een vaste, horizontale rechte L . De punten zijn star met elkaar verbonden door een massaloze ring, straal R , middelpunt C , gelegen in het verticale vlak door L . Langs de ring kan een massapunt P , ook massa m , zonder wrijving glijden. De versnelling van de zwaartekracht is g . Op $t = 0$ is het gehele systeem in rust en bevindt P zich juist onder B .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit systeem?
- ii) Geef uitdrukkingen in x , ϑ , \dot{x} en $\dot{\vartheta}$ (zie figuur) van de impuls \underline{p}_P , het impulsmoment \underline{L}_C om C , de kinetische energie T en de potentiële energie U van het totale systeem.
- iii) Welke twee behoudwetten gelden hier?
- iv) Bepaal \dot{x} , $\dot{\vartheta}$ en x als functie van ϑ .
- v) Hoe groot is de maximale verplaatsing van de ring?

Examen/tentamen Inleiding in de Mechanica op woensdag 17 augustus 1983,
9.00 - 12.00 uur.

4.



Een halter, bestaande uit een massaloze staaf met twee massapunten (P , massa M , en Q , massa m) kan vrij draaien in een verticaal vlak V om een vast punt O . Het vlak V draait met constante, voorgeschreven hoeksnelheid ω om een verticale as door O . De afstand OP is a en OQ is b . De versnelling van de zwaartekracht is g .

- i) Hoeveel graden van vrijheid heeft dit stelsel?
 - ii) Zet de rotatie van V stil. Welke schijnkrachten moet U hierbij invoeren? Bepaal, als functie van ϑ (zie figuur) de totale potentiële energie van het stilgezette stelsel (dus inclusief de centrifugaalpotentiaal).
 - iii) Bepaal de (kinetische) evenwichtsstanden. Hoeveel zijn er en waar hangt dit aantal van af?
 - iv) Onderzoek de stabiliteit van de stand, waarin Q zich verticaal onder O bevindt.
-

ANTWOORDEN TENTAMENS

13 - 1 - 1981

1. i) $U(x) = \frac{(M-m)x - ML}{(L-x)x} \mu f.$

ii) $x = L/(1 + \sqrt{m/M});$ instabiel.

iii) $v_0^2 = \frac{2Mf}{(L-R)RL} \left[L - R - R\sqrt{m/M} \right]^2.$

iv) Neen.

2. i) $f < 1.$ ii) $v_0 > \sqrt{\mu g l},$ $\left(\mu = \frac{2Mf + m}{2M + m} \right).$

iii) $v_0 \leq \sqrt{\mu g l} : y_{\max} = -\frac{1}{2\mu g} (v_0^2 - \mu g l);$

$v_0 > \sqrt{\mu g l} : y_{\max} = \frac{1}{2g} (v_0^2 - \mu g l).$

3. i) Twee: φ en $\vartheta.$

ii) $\underline{p} = \underline{0}; L_{OZ} = 2m\ell^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi;$

$T = m\ell^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta), U = 0.$

iii) $\dot{\varphi} = \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta} \omega_0; \dot{\vartheta} = \frac{\omega_0 \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta} \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - \cos^2 \vartheta}.$

iv) $-\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0.$

v) $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 \cos^2 \vartheta_0 \leq \dot{\varphi} \leq \omega_0 = \dot{\varphi}(\pm \vartheta_0).$

4. i) $V_1 = \frac{2v_0 \cos \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)}; V_2 = -\frac{v_0 \sin^2 \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)}.$

ii) $\Delta T = 0.$

27-3-1981

1. i) $3, (r_1, r_2, \dot{\vartheta})$.

ii) $\underline{P} = (m_1 \dot{r}_1 - m_2 \dot{r}_2) \underline{e}_r + (m_1 r_1 - m_2 r_2) \dot{\vartheta} \underline{e}_2;$
 $\underline{L}_0 = (m_1 r_1^2 \dot{\vartheta} + m_2 r_2^2 \dot{\vartheta}) \underline{e}_z.$

iii) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\vartheta}^2;$
 $U = \frac{1}{2} k_1 r_1^2 + \frac{1}{2} k_2 r_2^2$

iv) $\dot{\vartheta} = \frac{(m_1 + m_2) r_0^2}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} \omega_0.$

v) $P_1 : m_1 (\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\vartheta}^2) = -k_1 r_1; P_2 : m_2 (\ddot{r}_2 - r_2 \dot{\vartheta}^2) = -k_2 r_2.$

2. i) $v_1 = \frac{(1+e)M}{(M+2m)} \sqrt{2gh};$ ii) $v_1 = \frac{(1+e)M}{2(M+m)} \sqrt{2gh};$

iii) $(\Delta T)_i = 0; (\Delta T)_{ii} = -\frac{2mM^2}{(M+m)^2} gh.$

3. i) $f \geq \alpha/\omega_0^2.$ ii) Neen. iii) $t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha f}}.$

iv) $\ddot{\vartheta} + f \dot{\vartheta}^2 = 0, \dot{\vartheta}(0) = \omega_0; \text{rust: } t \rightarrow \infty.$
 (opl.: $\dot{\vartheta}(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0 f t}$)

4. i) $\underline{a} = -g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \underline{e}_x.$

ii) $\underline{R} = 2mgf \cos \alpha \cdot \underline{e}_x + 2mg \cos \alpha \cdot \underline{e}_y.$

iii) $\tan \beta = f.$

2-1-1982

1. i) $f < (M_2/m)\sin\alpha$.

ii) $\ddot{x} = (M_2 \sin\alpha - mf)g / (M_1 + M_2)$.

iii) $S = (M_1 \sin\alpha + mf)M_2g / (M_1 + M_2)$, voor $f < (M_2/m)\sin\alpha$;

$S = M_2g \sin\alpha$, voor $f > (M_2/m)\sin\alpha$.

2. i) $\underline{v}_1 = \sqrt{2gh} \underline{e}_y$.

ii) (P : 1 ; blok : 2)

$$\underline{v}_1 = \frac{v_1}{(M+m \sin^2 \alpha)} \left[M(1+e) \sin \alpha \cos \alpha \underline{e}_x + \{(M+m) \sin^2 \alpha - e M \cos^2 \alpha\} \underline{e}_y \right],$$

$$\underline{v}_2 = - \frac{m(1+e) \sin \alpha \cos \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)} \underline{e}_x.$$

3. i) $T = m\dot{x}^2 + \frac{Mx^2 \dot{x}^2}{2(\ell^2 - x^2)}$,

$$U = -Mg\sqrt{\ell^2 - x^2} - m\omega^2 x^2.$$

iii) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{Mg}{2m\omega^2}\right)^2}$, mits $\omega^2 > \frac{Mg}{2m\ell}$.

iv) x_1 : stabiel als $\omega^2 < \frac{Mg}{2m\ell}$; x_2 : stabiel (als hij bestaat).

4. i) 2 : r en ϑ .

ii) $\underline{p} = m\dot{r}\underline{e}_r + mr\dot{\vartheta}\underline{e}_\vartheta$, $\underline{L}_0 = mr^2\dot{\vartheta}\underline{e}_z$,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2, \quad U = -\frac{mk}{r}.$$

iii) $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{mk}{r} = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 - \frac{mk}{r_0}$,

$$mr^2\dot{\vartheta} = mr_0^2\omega_0.$$

iv) $m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + \frac{mk}{r^2} = 0$, $mr\ddot{\vartheta} + 2m\dot{r}\dot{\vartheta} = 0$,

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\vartheta}(0) = \omega_0.$$

v) $r_0^3\omega_0^2 = k$.

23 - 4 - 1982

1. ii) $T = \frac{Ma^2 + (M+m)x^2}{a^2 + x^2} \cdot 2$.

iii) $U = 2mg\sqrt{a^2 + x^2} - Mgx - 2mg\ell$.

iv) $0 \leq x \leq \frac{4Mma}{(4m^2 - M^2)}$.

2. i) $F \geq (M+m)mgf/M$.

ii) $F \leq (M+2m)mgf/(M+m)$.

iii) $x = (M+m)gf/k - MF/(mk)$.

3. i) Eén : y .

ii) $y = \frac{mg}{(m\omega^2 - 2k)\tan^2 \alpha}$, $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ mits } \omega^2 > 2k/m \\ \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ mits } \omega^2 < 2k/m \end{array} \right\}$.

iii) $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \wedge \omega^2 > 2k/m$: instabiel,

$\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \wedge \omega^2 < 2k/m$: stabiel.

4. i) $\ell_0 \geq a + Mg/k$.

ii) $v_1 = \sqrt{2gh_0}$, $V_1 = V_2 = \frac{m}{(M+m)} \sqrt{2gh_0}$.

iii) $x_m = \sqrt{\frac{2m^2 gh_0}{k(M+m)}}$. iv) $h_1 = (m/(M+m))^2 h_0$.

v) $s = \frac{(1+\mu^2)}{(1-\mu^2)} h_0 + \frac{2}{(1-\mu)} \cdot \sqrt{\frac{2m^2 gh_0}{k(M+m)}}$

17 - 6 - 1982

1. $v_0 \leq \frac{\ell}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{h}}$.

2. i) $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k \left[\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0 \right]^2$.

ii) iii) $a > \ell_0/2 : x_1 = 0$, stabiel;

$a < \ell_0/2 : x_1 = 0$, instabiel,

$x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}\ell_0^2 - a^2}$, stabiel.

3. iii) $f_0 > f$.

4. i) ii) zie tent. 12-1-1982, Opgave 2.

iv) $h = 3a/8e(1+e)$.

20 - 6 - 1983

1. i) $F = mg \tan \alpha$; $S = mg / \cos \alpha$.

iii) $S = -F(2 \sin \alpha - 3 \sin \varphi) - mg(2 \cos \alpha - 3 \cos \varphi)$.

2. i) $v_1 = \sqrt{2g\ell \sin \alpha}$.

ii) $V_1 = \frac{(m - eM)}{(M + m)} v_1$; $V_2 = \frac{(1 + e)m}{(M + m)} v_1$.

iii) $h_m = \frac{(m - eM)^2}{(M + m)^2} \cdot \ell \sin \alpha$. iv) $x_m = \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \frac{(1 + e)m}{(M + m)} v_1$.

3. ii) $U = -m\ell(g \cos \vartheta + a \sin \vartheta)$.

iii) $m\ell\ddot{\vartheta} = ma \cos \vartheta - mg \sin \vartheta$.

iv) v) $\vartheta_1 = \arctan(a/g)$: stabiel ;

$\vartheta_2 = \pi + \arctan(a/g)$: instabiel .

vi) $\vartheta_{\max} = \arcsin(2ag/(a^2 + g^2))$.

4. ii) $\underline{P} = m\dot{x}\underline{e}'_x - m(R - x)\dot{\varphi}\underline{e}'_y$; $\underline{L}_O = m(R^2 + x^2)\dot{\varphi}\underline{e}'_z$;

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(R^2 + x^2)\dot{\varphi}^2$; $U = -m\mu^2/(R + x)$.

iii) $m(\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2) = -m\mu^2/(R + x)^2$; $x(0) = R$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

iv) $T + U = c_1$; $L_{Oz} = c_2$.

v) $\dot{x}(x=0) = \sqrt{\mu^2/R - 2R^2\omega_0^2}$, $\dot{\varphi}(x=0) = 2\omega_0$.

17-8-1983

1. i) $V_1 = \sqrt{\frac{2mQ}{(M+m)M}}$; $V_2 = \sqrt{\frac{2MQ}{(M+m)m}}$, (AB : 1 , P : 2) .

ii) $V_1 = V_2 = 0$.

2. i) 0 . ii) $N = Mg - \frac{mgV}{\ell} t$. iii) 1 .

iv) $(M\ell + mVt)\ddot{\varphi} + mV\dot{\varphi} = (mVt - M\ell)g \cos \varphi$,

$t = t_1$: $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

3. i) 2 : x, ϑ .

ii) $\underline{P} = (3m\dot{x} + mR\dot{\vartheta} \sin \vartheta)\underline{e}_1 + (mR\dot{\vartheta} \cos \vartheta)\underline{e}_2$;

$\underline{L}_C = -m(R\dot{x} \sin \vartheta + R^2\dot{\vartheta})\underline{e}_3$;

$T = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 + mR\dot{x}\dot{\vartheta} \sin \vartheta$;

$U = -mgR \sin \vartheta$.

iii) $P_1 = (\underline{P}, \underline{e}_1) = c_1$; $T + U = c_2$.

iv) $\dot{\vartheta} = \pm \sqrt{\frac{6g \sin \vartheta}{R(3 - \sin^2 \vartheta)}}$; $\dot{x} = \mp \sqrt{\frac{6gR \sin^3 \vartheta}{(3 - \sin^2 \vartheta)}}$;

$x = \frac{1}{3} R(\cos \vartheta - 1)$.

v) $|x|_{\max} = \frac{2}{3} R$.

4. i) 1 : ϑ . ii) $U = (Ma - mb)g \cos \vartheta - \frac{1}{2}(Ma^2 + mb^2)\omega^2 \sin^2 \vartheta$.

iii) iv) $\omega^2 \leq \mu$ ($:= (mb - Ma)g / (Ma^2 + mb^2)$) :

$\vartheta_1 = 0$: stabil als $mb > Ma$,

$\vartheta_2 = \pi$: stabil als $mb < Ma$;

$\omega^2 > \mu$:

$\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \pi$: instabil ,

$\vartheta_3 = \arccos(\mu/\omega^2)$: stabil .