TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMENOPGAVEN

voor het Diploma

WETENSCHAPPELIJK REKENEN

A

1959-1968

Inhoudsbeschrijving

EXAMENOPGAVEN

WETENSCHAPPELIJK REKENEN A

1959-1968

JdG, 13 December 2005

1959

<u>Analyse</u>, 5 januari, 9-12 uur

1. Bereken de integralen

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ $(a > 0)$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.

2. Bewijs, dat voor reële $x < 0$ geldt

$$\frac{-1 + e^{-x}}{-1 + x} < \ln \frac{1}{1 - x} < x + \tfrac{1}{2} x^2.$$

3. Onderzoek voor welke reële waarden van x de volgende reeksen convergeren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{x}{n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^{nx}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{n})^{n^2}$.

4. Bepaal:

a) $\lim_{n \to \infty} \{\sqrt{n^2 + 4n + 5} - n - 2\}$;

b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^2 2\sqrt{x}}{\ln |1-x|}$.

Lineaire Algebra, 5 januari, 14-16 uur

1. Bepaal voor alle reële waarden van a en b de oplossing(en) van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ 2x + ay + 8z &= 0 \\ bx + y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

2. In de 3-dimensionale ruimte met rechthoekig cartesisch coördinatenstelsel OXYZ is gegeven het vlak V :

$$x + 2y + 2z = 9.$$

a) Geef een parametervoorstelling van het vlak V.

b) Bepaal de coördinaten van het voetpunt van de loodlijn l uit O op V neergelaten.

c) Bepaal de rechten door O, die liggen in het vlak $x = 0$ en die met de onder b) genoemde loodlijn l een hoek insluiten, waarvan de sinus gelijk is aan $\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Numerieke Analyse, 6 januari, 9-12 uur

1. Op het interval $0 \leq x \leq 1$ is gegeven de functie

$$f(x) = e^{ax} + x^2 - 2,$$

waarin a een parameter is.

a) Bereken het op het interval $0 \leq x \leq 1$ gelegen nulpunt ξ van $f(x)$ in vier decimalen nauwkeurig voor de parameterwaarden

$$a = 0(0,2)1.$$

b) Maak een differentietabel van ξ als functie van a.

c) Interpoleer in deze tabel de waarde $\xi(a)$ voor

$$a = 0,6584$$

en geef hiervan de fout aan.

d) Bereken de afgeleide

$$\frac{d\xi(a)}{da}$$

voor $a = 0{,}5$.

e) Bepaal

$$\int_0^1 \xi(a)da$$

in vier decimalen nauwkeurig.

Gebruikte formules en namen van de gebruikte methoden dienen bij de berekeningen te worden vermeld.

1960

Analyse, 20 juni, 9-12 uur

1. Bereken

a) $\displaystyle\int_0^p \frac{x^4}{\sqrt{p^2 - x^2}}\,dx \qquad (p > 0)$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1 + x)}{x\sqrt{x}}\,dx.$

2. Bereken

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2^{2n+1}}{n + 3^n - 4^n}.$

b) Bepaal het getal p zodanig, dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin px}{x^2}$$

bestaat.

3. Onderzoek voor welke reële waarden van x de volgende reeksen convergeren :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{x^2}{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1+\frac{x}{n})$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\frac{x}{n^2}})$.

4. Schets de grafiek van de functie

$$f(x) = x - \ln(1 + |x|).$$

Lineaire Algebra, 20 juni, 14-16 uur

1. In de drie-dimensionale ruimte met rechthoekig cartesisch coördinatenstelsel OXYZ zijn de volgende vijf punten gegeven:

   A(0,0,10), B($7\frac{1}{2}$,5,0), P(18,0,0), Q(0,12,0) en R(0,0,6).

   a) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak V dat door P, Q en R gaat.

   b) Bepaal een parametervoorstelling van de rechte l die door A en B gaat.

   c) Bereken de coördinaten van het snijpunt S van V en l.

2. In de drie-dimensionale ruimte met rechthoekig cartesisch coördinatenstelsel OXYZ zijn de volgende twee rechten gegeven :

   l : $x + 2y - z = 0, \quad 2x - y + z = 0;$

   m : $x - 3y + 5z = 0, \quad 4x - 12y + 5z = p.$

   a) Onderzoek voor welke waarde(n) van p de rechten l en m elkaar snijden.

   b) Bepaal voor de onder a) bedoelde waarde(n) van p één der hoeken, die door l en m worden ingesloten.

Numerieke Analyse I, 21 juni 1960, 9 - 12 uur.

Gegeven zijn in het vlak XOY de punten A(- 1, 0) en B(1,0).

1) Bepaal in het eerste quadrant het punt P(x, y), waarvan de coördinaten voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$y + \frac{1}{x} = 1 \qquad \text{en} \qquad \overline{PA} \,.\, \overline{PB} = c^2$$

en wel voor de waarden c = 3(0, 2) 4. (nauwkeurigheid zes significante cijfers)

2) Maak een differentietabel voor y als functie van c.

3) Interpoleer in deze tabel y(c) voor de waarde c = 3.6472.

4) Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dc}$ voor c = 3.5.

5) Bereken $\int_3^4 y(c)dc$.

6) Geef een schatting van de gemaakte fout in de bij 3) berekende waarde. Vermeld ook de gebruikte formules.

1960

Numerieke Analyse II, 21 juni, 14-17 uur.

Zij gegeven de differentiaal vergelijking

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \sin\,(t - f)$$

met de beginvoorwaarden

$$t = 0; \qquad f = \frac{df}{dt} = 0.$$

Bereken door numerieke integratie de waarde van f en $\frac{df}{dt}$ voor t = 1 in zes decimalen.

1961

Analyse, 8 mei 1961, 9 - 12 uur.

Zij x een reëel getal.

1. a) Bewijs, dat $|e^x - 1| \leqq e^{|x|} - 1$.

   b) Voor welke waarden van x geldt

$$|e^x - 1| < e^{|x|} - 1?$$

2. a) Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{nx^2 + 2} - \sqrt{nx^2 + 1})$.

   b) Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$.

3. Men beschouwt voor positieve x de functie

$$y = f(x) = e^{-x} x^x.$$

   Bepaal $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$.

   Bepaal van f(x) (eventuele) extrema en asymptoten.

   Bewijs, dat de grafiek van f(x) geen buigpunten bezit.

   Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+1)}{(x+1)f(x)}$.

4. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{x^2 + x - 3}$.

Lineaire Algebra, 8 mei, 14 - 16 uur, 1961.

1. Onderzoek voor alle reële waarden van a en b de oplosbaarheid van het stelsel vergelijkingen.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4x + y - az = 1 \\ x - 3y + 7z = b \end{cases}$$

en geef de eventueel aanwezige oplossing(en) aan.

2. Geef de karakteristieke vergelijking van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

aan en bepaal met behulp hiervan een eigenwaarde van de matrix.

Numerieke Analyse, 27 maart 1961, 9.00 - 12.00 uur.

1. Gegeven zijn de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$$

en de beginwaarde $y = 1$ voor $x = 0$.

Bepaal met behulp van numerieke integratie het minimum van y in vier decimalen nauwkeurig.

Numerieke Analyse, 14.00 - 17.00 uur.

2. Bepaal met behulp van een iteratieproces een eigenwaarde in vier cijfers nauwkeurig met bijbehorende eigenvector van de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

3. Bepaal van de functie

$$f(x) = x^2 - 6x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + 10$$

de reële nulpunten in zes decimalen nauwkeurig.

1962

Analyse, 27 maart, 14.00 - 17.00 uur.

1. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{3}\pi n}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2 - x - 5)^n}{n+1}$.

In b) is x reëel.

2. Bepaal het getal a zo, dat de functie f(x), die voor alle reële waarden van x gedefiniëerd is door

$$f(x) = 2 + \sin x \qquad (x \leqslant 0)$$
$$f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{x} \qquad (x > 0),$$

continu is in $x = 0$.
Is f(x) differentieerbaar in $x = 0$?
Bepaal verder de extrema van f(x) en schets de grafiek van deze functie.

3. a) Bepaal het getal c zo, dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - cxe^{x} - cxe^{-x}}{(e^{2x} - e^{-2x}) \sin^2 x}$$

bestaat en eindig is.

b) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4\, dx}{1 + x^6}$$

Lineaire Algebra, 27 maart, 10.00 - 12.00 uur

1. Laat zien, dat het stelsel

$$\begin{cases} x - 3y - 4z + 7t = 0 \\ x - 6y - z - 5t = 0 \\ 6x + 4y - 3z + t = 0 \\ 2x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

een oplossing bezit, die niet de nul-oplossing is.

Bepaal verder de waarden van p, waarvoor het stelsel

$$\begin{cases} x - 3y - 4z = -7 \\ x - 6y - z = 5 \\ 6x + 4y - 3z = -1 \\ 2x + 7y + z = 0 \\ p^3x + p^2y - 2pz = 3 \end{cases}$$

een oplossing bezit.

2. Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 4 & c \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Leid een voorwaarde voor de elementen a, b en c af, die nodig en voldoende is, opdat de matrix M een eigenwaarde 2 bezit.

b) Laat M een eigenwaarde 2 bezitten. Bewijs, dat dan de vector (2, -1, 0) een eigenvector van M behorende bij de eigenwaarde 2 is, indien geldt

$$2a - b - 4 = 0$$

c) Bereken a, b en c als M een eigenwaarde 2 bezit en bovendien gegeven is, dat de vector (1, 0, -1) een eigenvector van M is behorende bij een eigenwaarde $\neq 2$.

<u>Numerieke Analyse</u>, 26 maart 1962, 9.30 - 12.30 uur.

1. Een punt A doorloopt de kromme $y = f(x)$.
Een punt B (ξ, η) is gelegen op OA, tussen O en A, op een afstand 1 van A.
Van de functie $y = f(x)$ is de volgende tabel gegeven:

x	y
1.0	0.998988
1.1	0.989506
1.2	0.970137
1.3	0.941075
1.4	0.902611
1.5	0.855127
1.6	0.799100
1.7	0.735088
1.8	0.663731
1.9	0.585743
2.0	0.501902

a) Bereken y voor $x = 1.567890$

b) Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor dezelfde waarde van x.

c) Bepaal α zodanig, dat $\int_{1.3}^{\alpha} y\,dx = 0.25.$

d) Bereken ξ en η indien $OB = BA$.

e) Bepaal het maximum van η voor $1.0 \leq x \leq 2.0$

f) Bereken $\int_{0.4}^{0.6} \eta\, d\xi$.

Geef de nauwkeurigheid aan van de gevonden resultaten en vermeld de gebruikte formules.

<u>Numerieke Analyse</u>, 26 maart 1962, 14.00 - 17.00 uur

2. Er is een aantal meetwaarden y gegeven als functie van x;

x	y
0.01	0.05000
0.03	0.08500
0.05	0.10500
0.1	0.14400
0.2	0.17750
0.4	0.18950
0.7	0.12600

y wordt volgens "de methode der kleinste kwadraten" benaderd door

$$y^* = a(1 - x)\sqrt{x};$$

hierin is a een constante.

Gevraagd:

1. Bepaal a in 4 decimalen nauwkeurig.
2. Bereken $y^*(x)$ voor de genoemde waarden van x (4 decimalen).
3. Bepaal (in 4 decimalen) de tussen 0,03 en 0.05 gelegen waarde van x waarvoor y^* gelijk wordt aan 0.10000.

3. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 1$$

Bepaal de oplossing van deze vergelijking, die zowel voor x = 0 als voor x = 1 de waarde nul aanneemt in vier decimalen nauwkeurig.

<u>Analyse</u>, 18 september 1962, 9.30 - 12.30 uur.

1. Bewijs dat voor $0 \leqq x \leqq 1$ geldt

$$\cos^2 x + x^2 \geqq 1.$$

2. Bewijs dat voor $x > 0$ geldt

$$\ln x \leqq \frac{x}{e}.$$

3. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx.$$

4. Bereken

$$\int (e^{2x} + e^x) \operatorname{arc\,tg} e^x \, dx.$$

5. Bepaal de constanten a en b zo, dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1 - b \sin x}{x^2} = -\frac{1}{8}$$

6. Bepaal

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x.$$

7. Bereken de hoofdwaarde van

$$\operatorname{arc\,cos}\,(1 - 2x^2)$$

als gegeven is dat $\operatorname{arc\,sin} x = -\frac{\pi}{3}$.

8. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n + (-1)^n}.$$

Lineaire Algebra, 18 september, 14.00 - 16.00 uur.

1. Van een symmetrische matrix A met drie rijen is het volgende gegeven:

a) 0, 1 en -1 zijn eigenwaarden van A;

b) de vectoren (2, 0, -1) en (0, 1, 0) zijn eigenvectoren van A, behorende bij respectievelijk de eigenwaarden 1 en -1.

Bepaal A.

2. Gegeven is dat het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + 2y + az + 2 = 0 \\ 5x + by - 3z + c = 0 \\ x + 3y + 2z + d = 0 \end{cases}$$

twee lineair onafhankelijke oplossingen bezit.
Bereken a, b, c en d en geef alle oplossingen van het stelsel voor de gevonden waarden van deze grootheden.

Numerieke Analyse, 17 september 1962, 9.30 - 12.30 uur.

1. Van de functie $y = f(x)$ is de volgende tabel gegeven:

x	y
0	0.403646
0.1	0.432738
0.2	0.453066
0.3	0.465509
0.4	0.470779
0.5	0.469447
0.6	0.461968
0.7	0.448690
0.8	0.429863
0.9	0.405654
1.0	0.376149

a) Bereken y voor $x = 0.6789$

b) Bereken $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor $x = 0,55$

c) Bereken de grootste waarde van y in het interval $0 \leqq x \leqq 1$.

Geef de nauwkeurigheid aan van de gevonden resultaten en vermeld de gebruikte formules.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + (1 + xy)\,P(x) = 0$$

Waarin P(x) gegeven is in de volgende tabel:

x	P(x)	x	P(x)
-0.5	-0.854273	0.5	0.333214
-0.4	-0.616582	0.6	0.377636
-0.3	-0.414242	0.7	0.419579
-0.2	-0.247105	0.8	0.460622
-0.1	-0.110864	0.9	0.502310
0.0	0.000000	1.0	0.546302
0.1	0.090799	1.1	0.594552
0.2	0.166110	1.2	0.649582
0.3	0.229691	1.3	0.714939
0.4	0.284574	1.4	0.796031

Bepaal voor $x = 1$ de waarde van y in vier decimalen nauwkeurig als gegeven is, dat voor $x = 0$ geldt $y = 1$.

Numerieke Analyse, 17 september 1962, 14 -17 uur

3. Bepaal de wortels van de vergelijking

$$x^5 + 3x^3 - 14x^2 + 26x - 17 = 0$$

in vier decimalen nauwkeurig.

1963

Analyse, 28 maart, 9.30 - 12.30 uur.

1. Bepaal op het interval $-\infty < x < \infty$ de maxima en minima van de functie

$$y = (x^2)^x.$$

2. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{6x}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}\, dx.$$

3. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\sinh x - \sin x)}{\cosh x^2 - 1}.$$

4. Van een reeks is voor alle gehele positieve waarden van n de som S_n der eerste n termen gegeven door

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{5n - 4}\right)^n.$$

Onderzoek of de reeks convergeert.
Bepaal voorts de eerste drie termen van de reeks.

5. Door de vergelijking

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$$

wordt z gedefinieerd als functie van x en y.
Bereken alle partiële afgeleiden van de tweede orde van z naar x en y.

6. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n

$$5(3^{4n+1}) - 2^{2n}$$

deelbaar is door 7.

1963

Lineaire algebra, 28 maart, 14.00 - 16.00 uur.

1. Bepaal alle oplossingen van het systeem

$$(1) \qquad \begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ y + 3z + w = 0. \end{cases}$$

Zij

$$x = x_1 \,,\; y = y_1 \,,\; z = z_1 \,,\; w = w_1$$

een willekeurig gekozen oplossing van (1).
Laat zien dat de drie vectoren

$$\begin{aligned} p &= (-2,\ -1,\ \ 0,\ \ 1) \\ q &= (\ 1,\ -3,\ \ 1,\ \ 0) \\ r &= (x_1,\ y_1,\ z_1,\ w_1) \end{aligned}$$

lineair afhankelijk zijn.
Welke oplossingen $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$, $w = w_2$ van (1) geven in de vier-dimensionale ruimte vectoren (x_2, y_2, z_2, w_2) die loodrecht staan op de vector $(1, 0, 2, 1)$?

2. Het eindpunt (x_1, x_2) van een vector x doorloopt de cirkel

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Men beeldt de vector x door middel van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

af op de vector $y = Ax$.

a) Bepaal de vergelijking van de kromme, die het eindpunt (y_1, y_2) van de vector y doorloopt.
b) Bereken de extremale waarden die aangenomen worden door de afstand van het punt (y_1, y_2) tot het punt $(0, 0)$ als het punt (x_1, x_2) de cirkel (2) doorloopt.
c) Voor welke vectoren x heeft de vector y de eigenschap, dat $3y_1 = y_2$.

1963

Numerieke Analyse, 27 maart, 9.30 - 12.30 uur.

1. Van de functie $y = f(x)$ is de volgende tabel gegeven:

x	y
0,00	0,00000
0,01	0,06253
0,04	0,13350
0,09	0,21472
0,16	0,30860
0,25	0,41835
0,36	0,54836
0,49	0,70482
0,64	0,89669
0,81	1,13756
1,00	1,44892

Bereken op verantwoorde wijze

a) de waarde van y voor $x = 0,29$,

b) de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 0,16$,

c) de integraal $\int_0^1 y\,dx$.

2. Tabuleer in vier decimalen de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y^2}{y}$$

over het gebied $x = 1,5(0,1)1,7$ als de volgende waarden van y en $\frac{dy}{dx}$ gegeven zijn:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
y	1,1038	1,3115	1,5347	1,7757	2,0371
$\frac{dy}{dx}$	2.0098	2,1502	2,3166	2,5078	2,7244

1963

Numerieke Analyse, 27 maart, 14.00 - 17.00 uur.

3. Bereken van het stelsel

$$\begin{aligned}
3{,}7821\,x + 1{,}9635\,y - 0{,}4867\,z &= 4{,}2366\\
6{,}0543\,x - 3{,}1081\,y + 1{,}7429\,z &= 6{,}1121\\
-2{,}4708\,x + 0{,}0431\,y + 3{,}8297\,z &= -1{,}8345\\
1{,}5134\,x + 7{,}0346\,y - 2{,}7130\,z &= 2{,}3607\\
-1{,}3611\,x - 2{,}9787\,y + 13{,}2364\,z &= 0{,}6126
\end{aligned}$$

de beste oplossing in de zin van de kleinste kwadraten.

4. Bereken in vier decimalen alle wortels van de vergelijking

$$x^3 + 2{,}7216\,x^2 - 4{,}2173\,x - 3{,}0719 = 0.$$

De coëfficiënten zijn exact.

1963

<u>Analyse</u>, 4 september, 9.30 - 12.30.

1. Gevraagd wordt die oplossing $y = y(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-2x}$$

te bepalen waarvoor $y(0) = 1$.

2. De parabool $y = -x^2 + 2x$ snijdt de X-as in $O(0,0)$ en in $A(2,0)$. De rechte $y = mx$ snijdt de boog OA van de parabool in O en in B. De oppervlakte van het gebied, ingesloten door de boog OA van de parabool en de X-as noemt men I_1. De oppervlakte van het gebied, ingesloten door de boog OB van de parabool en de rechte $y = mx$ noemt men I_2.
Gevraagd wordt m zo te bepalen dat $I_1 = 8\, I_2$.

3. Bewijs, dat de functie

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{4y}}$$

een oplossing is van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

4. Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}.$$

5. Bewijs, dat voor elk natuurlijk getal n en $x \neq 0$ geldt

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-\frac{1}{x^2}},$$

waarbij $P_n(x)$ een veelterm in x is van de graad $2n - 2$. Bewijs voorts, dat

$$P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)\, P_n(x) + x^3 P_n'(x).$$

1963

Lineaire Algebra, 4 september, 14.00 - 16.00 uur.

1. Gegeven zijn de vectoren a = (8, -7, 2), b = (2, -3, 6) en c = (10, -5, -14).

   a) Bewijs, dat de vectorruimte U opgespannen door de vectoren a, b en c de dimensie 2 heeft.

   b) Bepaal de vectoren, die loodrecht staan op de vectorruimte U.

2. Van de lineaire transformatie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

   is de vector (-2, 6, 1) een eigenvector. De vector (1, 1, 1) wordt door de transformatie A afgebeeld op vector (3, -5, 6).

   a) Bij welke eigenwaarde behoort de eigenvector (-2, 6, 1)?

   b) Bepaal a en b.

   c) Bepaal de overige eigenwaarden met de bijbehorende eigenvectoren.

3. Bepaal de waarden van a waarvoor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + (1-a)x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + (a+2)x_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + (a+5)x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   een andere dan de nuloplossing heeft.

   Geef voor de gevonden waarden van a de volledige oplossing.

   Bepaal voorts een lineair onafhankelijke basis voor de oplossingsruimte voor elk dezer waarden van a.

1963

Numerieke Analyse, 3 september, 9.30 - 12.30 uur.

1. Van de functie $f(x)$ en $g(x)$ zijn de volgende tabellen gegeven

x	f(x)	g(x)
0	0,00000	0,18868
0,1	0,07444	0,15873
0,2	0,14552	0,13699
0,3	0,20997	0,12048
0,4	0,26464	0,10753
0,5	0,30664	0,09709
0,6	0,33333	0,08850
0,7	0,34242	0,08130
0,8	0,33204	0,07519
0,9	0,30072	0,06993
1,0	0,24750	0,06536

a) Bereken het verschil van beide functies voor $x = 0,63284$

b) Voor welke waarde van x is $f(x) = g(x)$?

c) Voor welke waarde van x, gelegen tussen 0 en 1, is het verschil van beide functies zo groot mogelijk?

d) Bepaal α zodanig dat

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} g(x)dx.$$

De gevraagde grootheden dienen zo nauwkeurig mogelijk te worden berekend. Geef een schatting van de gemaakte fouten.

2. De functie $y = y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2\, g(x)\ ,$$

waarbij van $g(x)$ de tabel in vraagstuk 1 gegeven is.

Voorts is gegeven dat $y(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$.

Bereken $y(\frac{4}{5})$ in vijf decimalen nauwkeurig.

1963

Numerieke Analyse, 3 september, 14.00 - 17.00 uur.

3. Zij A de matrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}356 & 0{,}344 & 0{,}337 \\ 0{,}344 & 0{,}375 & 0{,}318 \\ 0{,}337 & 0{,}318 & 0{,}382 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal de eigenwaarden van deze matrix in drie decimalen nauwkeurig.

b) Bepaal in drie decimalen nauwkeurig de oplossingen van de stelsels

$$AX = y_1 \quad \text{en } AX = y_2 \ ,$$

waarin

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1{,}005 \\ 0{,}997 \\ 0{,}998 \end{pmatrix}$$

4. Men stelt

$$\sqrt{0{,}4527 + 0{,}7681i} = a + bi \qquad (a > 0).$$

Bereken a en b in vier decimalen nauwkeurig.

1964

Analyse, 2 september, 14.00 - 17.00 uur.

1. Bepaal de som van

a) $1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx$,

b) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$.

2. Bereken

$$\iint_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

waarbij S de driehoek is met hoekpunten (0,0), (1,0) en (1,1).

3. Bepaal de algemene oplossing van elk der differentiaalvergelijkingen

$$y' - y = 2x + 1,$$

$$xy' - y = -1.$$

Bepaal voorts de functie $u(x)$, die voor $x < 0$ voldoet aan de eerste differentiaalvergelijking, voor $x > 0$ aan de tweede differentiaalvergelijking en waarvan $u(x)$ en $u'(x)$ in het punt $x = 0$ beide continu zijn.

4. Bewijs dat voor elke $x > 0$ geldt

$$e^x > 1 + (1 + x)\log(1 + x).$$

5. Gegeven is, dat de functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ voldoen aan de relaties

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bewijs:

a) $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Phi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Phi} = -\frac{\partial v}{\partial r};$$

b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} = 0,$$

waarbij $x = r\cos\Phi$, $y = r\sin\Phi$.

1964

Lineaire Algebra, 3 september, 14.00 - 16.00 uur.

1. Van een matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

is het volgende gegeven:

1) A is symmetrisch,

2) de vectoren (1, 1, 1) en (1, -2, 1) zijn eigenvectoren van A,

3) de som der eigenwaarden van A is gelijk aan 1,

4) $a_{22} = 0$,

5) de determinant van A is gelijk aan $-\frac{3}{32}$,

a) Bepaal A.

b) Men beeldt de drie-dimensionale vectorruimte R met behulp van A in zichzelf af.
Is x een willekeurige vector in R en is y = Ax, bewijs dan, dat de lengte van y kleiner is dan de lengte van x, indien x een positieve lengte heeft.

Aanwijzing: Men gebruike - zonodig - de voor ieder paar reële getallen a en b geldige ongelijkheid

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

2. Men beschouwt in de drie-dimensionale ruimte met rechthoekig cartesiaans coördinatenstelsel OXYZ de verzameling der punten P(x,y,z), waarbij tussen x, y en z de drie betrekkingen

$$\begin{aligned} 3x - 6y - 4z &= 0 \\ 4x - 7y - 5z &= 0 \\ 5x - 11y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

bestaan.

Voor welk der punten P is de afstand van P tot de rechte met vergelijkingen x - 2 = y + 2 = z - 2 het kleinst?

1964

<u>Numerieke Analyse,</u> 3 september, 9.00 - 10.00 uur

4. Van de functie f(x) is de volgende tabel gegeven:

x	f(x)				
0	2.13750				
		- 29274			
0.1	1.84476		1552		
		- 27722		144	
0.2	1.56754		1696		3
		- 26026		147	
0.3	1.30728		1843		5
		- 24183		152	
0.4	1.06545		1995		9
		- 22188		161	
0.5	0.84357		2156		14
		- 20032		175	
0.6	0.64325		2331		21
		- 17701		196	
0.7	0.46624		2527		30
		- 15174		226	
0.8	0.31450		2753		29
		- 12421		255	
0.9	0.19029		3008		
		- 9413			
1.0	0.09616				

Stel $z = x^3 f(x)$ en bereken

a) de afgeleide $\frac{dz}{dx}$ voor $x = 0.65$,

b) de integraal $\int_0^1 z\,dx$,

c) de grootste waarde van z op het interval $0 \leq x \leq 1$.

1964

Programmeren, 3 september, 10.00 - 12.00 uur.

1. Op een band staan achtereenvolgens een positief geheel getal n en n reële getallen $a_1, \ldots, a_n$. Schrijf een programma dat het gemiddelde

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

en de standaardafwijking

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - m^2}$$

van $a_1, \ldots, a_n$ berekent en uitprint. Zuinig geheugengebruik wordt op prijs gesteld.

2. Op een band staan achtereenvolgens een positief geheel getal n en n^2 reële getallen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}$. De getallen a_{ij} worden opgevat als elementen van een $n \times n$-matrix A. Schrijf een programma dat het spoor

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

van A op een band ponst.
Zuinig geheugengebruik wordt op prijs gesteld.

3. Op een in de bandlezer liggende band bevinden zich achtereenvolgens de getallen 3, 1, 3, 4, 2, 1, 5, 3, 1, 2. Wat wordt door het volgende programma geponst?

```
begin   real procedure inprod (m,p,ap,bp);
        value m; integer m, p; real ap, bp;
        begin   real s; s := 0;
                for p := 1 step 1 until m do
                    s := s + ap × bp;
                inprod := s
        end inprod;
        integer n; n := read;
        begin   array A [1:n, 1:n], b [1:n];
                integer i, j;
```

```
                for i := 1 step 1 until n do
                for j := i step 1 until n do A[i,j] := read;
                for j := 1 step 1 until n do b [ j ] := read
                for i := 1 step 1 until n do
                punch (inprod(n,j,b[j], if j ≤ i then A[j,i] else A[i,j]))
        end
end;
```

1964

Numerieke Analyse, 2 september, 9 - 12 uur

1. Van een functie $y(x)$ is voor $x = 1, 2, 3$ en 4 de waarde als volgt gemeten:

   $x = 1, \quad y = 2.1$

   $x = 2, \quad y = 0.5$

   $x = 3, \quad y = 0.6$

   $x = 4, \quad y = 2.7.$

De waarden van x zijn exact, die van y niet.

Gevraagd wordt $y(x)$ te benaderen door middel van een kwadratische functie $z(x)$, zodanig dat de beste aanpassing in de zin van de kleinste kwadraten wordt verkregen.

2. De functie $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

   $$y'' + xy' + x^2y = 0,$$

   terwijl $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$.

   Gevraagd wordt met behulp van reeksontwikkeling de waarde van y in 4 decimalen nauwkeurig te bepalen voor $x = 0.5$. Bereken daarna met behulp van een andere methode de waarde van y voor $x = 0.6$.

3. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de beide reële wortels van de vergelijking

   $$x^4 - 0.9266x^3 - 1.0446x^2 - 0.6987x + 1.8752 = 0.$$

Examen voor het Diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen.

NUMERIEKE WISKUNDE

6 september 1965, 9.00 - 12.00 uur

---

1. Gevraagd wordt in 4 decimalen nauwkeurig te bepalen

$$\int_0^{0.8} f(x)dx$$

waarbij f(x) door de volgende tabel wordt gegeven

x	f(x)
0.1	2.13512
0.2	1.13316
0.3	0.65873
0.4	0.35918
0.5	0.14464
0.6	-0.02025
0.7	-0.15278
0.8	-0.26266

Voor $x \to 0$ nadert f(x) tot oneindig op zodanige wijze dat

$$\lim_{x \to 0} \{f(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\} = -0.93624.$$

2. Bereken in 4 decimalen nauwkeurig het nulpunt van de functie $y=y(x)$, die voldoet aan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 1}{xy - 1}, \quad y(0) = 1 .$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen.

ANALYSE

6 september 1965, 14.00 - 17.00 uur.

---

1. Bepaal de waarde van a waarvoor de functie

$$v = x^3 + axy^2$$

voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

2. a. Bewijs, dat de krommen, bepaald door de vergelijkingen

$$y = \frac{\ln x}{4x} \qquad (x > 0)$$

en

$$y = x \ln x \qquad (x > 0),$$

precies twee snijpunten hebben.

b. Bepaal de oppervlakte van de figuur, begrensd door de tussen deze twee snijpunten gelegen delen van de krommen.

3. Bepaal x uit de vergelijking

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12} .$$

4. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4}\right)$.

5. Bewijs, dat de functie $y(x)$, gedefinieerd door

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$x \frac{dy}{dx} = (x+1)y.$$

6. Men beschouwt van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 3y \end{cases}$$

die oplossing $x=x(t)$, $y=y(t)$, waarvoor $x(0)=1$, $y(0)=0$.

Bepaal deze oplossing.

Teken de grafiek van deze oplossing in het XOY vlak en geef het deel van deze grafiek aan dat behoort bij het interval $0 \leq t \leq 1$.

7. Gegeven is $x = \sin t$, $y = \sin kt$.

Bewijs

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen.

<u>PROGRAMMEREN</u>

7 september 1965, 9.00 - 12.00 uur

Maak vraagstuk 1,2 en hetzij 3 hetzij 4.

---

1. Schrijf een programma, dat de som van de natuurlijke getallen van 1 tot en met 100 uittypt. De procedure print (x) wordt verondersteld de waarde van x uit te typen.

2. a. Schrijf een procedure voor de benadering volgens de trapeziumregel van

$$\int_a^b f(x)dx$$

met n deelintervallen.

De heading van de procedure moet luiden:

<u>real</u> <u>procedure</u> trap(x,a,b,fx,n);
<u>value</u> a,b,n; <u>real</u> x,a,b,fx; <u>integer</u> n;

b. Welke waarde krijgt z na uitvoering van

z:=trap(x,0,1,trap(y,0,x,x+y,2),2)

3. Schrijf een procedure, welke de elementen van een integer array A [1:n] ordent in volgorde van niet afnemende grootte.

4. Schrijf een procedure, welke een stelsel van n lineaire algebraïsche vergelijkingen met n onbekenden oplost.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen.

LINEAIRE ALGEBRA

7 september 1965, 14.00-16.00 uur.

---

1. Met behulp van de transformatie

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

wordt de tweedimensionale vectorruimte R_2 in zichzelf afgebeeld.
Onder (x,y) verstaat men het inwendig product van de vectoren x en y.

a. Bewijs, dat elke vector in R_2 als beeld optreedt.
b. Bepaal de vector(en) x waarvoor geldt $(Ax,x) = 0$.
c. Bepaal bij gegeven vector x de vector(en) y waarvoor geldt $(Ax,y) = 0$.
d. Bepaal de vector(en) x waarvoor de vector Ax gelijke componenten heeft.
e. Indien a een reëel getal is, bepaal dan de vector(en) x waarvoor geldt

$$A^2x = ax.$$

2. De transformatie

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beeldt de driedimensionale vectorruimte R_3 in zichzelf af.
Een rechte p in R_3 heeft tot vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 . \end{cases}$$

a. Bepaal de vergelijkingen van het beeld q van p.
b. Bepaal de vergelijkingen van de figuur r, waarvan p het beeld is.
c. Bepaal de punten, die door B op zichzelf worden afgebeeld.
d. Bewijs, dat p,q en r elkaar snijden in één van de in c. gevonden punten.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen.
Numerieke Analyse,
6 september 1966 van 9.00 - 12.00 uur.

---

1. De functie $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + xy = \varphi(x),$$

waarbij $\varphi(x)$ door de volgende tabel is gegeven

x	$\varphi(x)$
0.0	1.00000
0.1	1.00499
0.2	1.01980
0.3	1.04399
0.4	1.07683
0.5	1.11730

x	$\varphi(x)$
0.6	1.16412
0.7	1.21579
0.8	1.27059
0.9	1.32660
1.0	1.38177

Voorts is gegeven $y(0.45)=1.33867$.
Bepaal $y(0.55)$ in vijf decimalen.

2. Van de functie $f(x)$ zijn de volgende waarden gegeven:

$$f(-2h),\ f(-h),\ f(0),\ f(h),\ f(2h).$$

Zij het tweedegraads polynoom $g(x)=ax^2+bx+c$ de beste benadering (in de zin der kleinste kwadraten) van $f(x)$ op de punten

$$x=-2h,\ x=-h,\ x=0,\ x=h,\ x=2h.$$

Druk de coëfficiënten a, b en c uit in de gegeven functiewaarden van $f(x)$.
Bepaal de benaderingsformule voor de afgeleide van $f(x)$ in het punt $x=0$, die ontstaat wanneer men $f(x)$ vervangt door de benadering $g(x)$.
Welke is de afwijking die deze benaderingsformule vertoont van $f'(0)$ indien $f(x)$ een polynoom is van de vierde graad?

3. Bereken in twee decimalen een reële oplossing (x,y) van het stelsel

$$\begin{cases} x = 2\ln(x+y) \\ y = \exp(y-x). \end{cases}$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

ANALYSE

6 september 1966, van 14.00 - 17.00 uur.

---

1. Bepaal de verhouding van de straal r en de hoogte h van een cylinder met gegeven volume, onder de voorwaarde, dat de totale oppervlakte van de cylinder minimaal is.

2. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$4\,\frac{d^2y}{dx^2} + 4\,\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

die voldoet aan de voorwaarde, dat in x=0 geldt

$$y=2, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

3. Bereken de dubbelintegraal over de rechthoek D

$$\iint\limits_D x^2 y e^{xy}\,dx\,dy$$

met D: $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$.

4. Bepaal, door gebruik te maken van reeksontwikkeling, de vijfde afgeleide van de functie

$$y = x^2(1+x)^{\frac{1}{4}}$$

in het punt x=0.

5. Transformeer

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\,\frac{dy}{dx} + y$$

door de onafhankelijk variabele x te vervangen door de nieuwe onafhankelijk variabele z, gedefinieerd door

$$x = e^z.$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

PROGRAMMEREN

7 september 1966, van 9.00 - 12.00 uur.

Maak de opgaven 1 en 2 en bovendien, naar keuze, 3 of 4.

1. Maak een procedure die op grond van een gegeven integer array A [1:m, 1:n] vijf integers h, i, j, k en ℓ aflevert, zodanig dat h, gedefinieerd door

$$h = A[i,j] - A[k,\ell],$$

maximaal is.

2. Schrijf een programma, dat een getal a van een band leest en daarna de reële wortel van de vergelijking

$$x^3 - x^2 + x - a = 0$$

in 6 decimalen nauwkeurig berekent en daarna uitponst. Geef eerst aan, welke methode U gebruikt.

3. Maak een procedure die een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

oplost.
Verondersteld mag worden dat Gauss-eliminatie zonder verwisselingen geen aanleiding geeft tot pivots die nul of klein zijn.

4. Maak een procedure die met behulp van de regel van Simpson de integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

berekent.
De procedure moet de te gebruiken stapgrootte h zodanig bepalen, dat het verschil tussen integratie met stap h en integratie met stap 2h in absolute waarde kleiner is dan een voorgeschreven tolerantie eps.
Gebruik bij voorkeur Jensen's device om een expressie voor de integrand als actuele parameter mee te kunnen geven.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

LINEAIRE ALGEBRA

7 september 1966, van 14.00 - 16.00 uur.

---

1. a) Bepaal de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

die de driedimensionale vectorruimte R_3 zodanig in zichzelf afbeeldt, dat de drie vectoren

$$u = (1,1,1), \quad v = (2,3,-2), \quad w = (4,0,-1)$$

allen worden afgebeeld op de vector (2,2,2).

b) De matrix A beeldt R_3 af op een verzameling V van vectoren. Bepaal V.

c) Bepaal de verzameling W der vectoren in R_3, die door A worden afgebeeld op de vector (0,0,0).

d) Hoe liggen de verzamelingen V en W tenopzichte van elkaar? Maak een schets.

2. Toon aan, dat als de matrix A gegeven is door

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix},$$

voor ieder natuurlijk getal n geldt

$$A^n = \begin{pmatrix} \cosh n\theta & \sinh n\theta \\ \sinh n\theta & \cosh n\theta \end{pmatrix}.$$

3. Voor welke waarde(n) van a is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a + \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & a \end{pmatrix}$$

orthogonaal?

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

ANALYSE

4 september 1967, van 9.00 - 12.00 uur

---

1. Bepaal $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die punten van de kromme

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4,$$

waarvoor $y = x$.

2. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^{n}$$

convergent is.

Bepaal de som van deze reeks.

3. Bepaal het aantal reële wortels van de vergelijking

$$x^3 - kx^2 + 1 = 0$$

als functie van k.

4. Bewijs dat voor gehele, niet negatieve n geldt,

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} n!$$

5. Bepaal de complexe getallen z die voldoen aan

$$\left| e^{\frac{6}{5}\pi i z - z^2} \right| = 1, \quad \arg e^{2z} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{3\pi}{2}.$$

6. Bepaal de functie $y(x)$ welke voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3\, e^{-2|x|},$$

welke voorts begrensd is voor $x \to +\infty$ en voor $x \to -\infty$, en waarvoor $y(x)$ en $y'(x)$ beide continu zijn in $x = 0$.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

PROGRAMMEREN

4 september 1967, van 14.00 - 17.00 uur.

---

1) Schrijf een procedure waarvan de heading is

<u>*real*</u> <u>*procedure*</u> *pol(k, n, x, ck)* ; <u>*value*</u> *n, x* ;
<u>*integer*</u> *k, n* ; <u>*real*</u> *x, ck* ;

en welke de waarde van $\sum_{k=0}^{n} ck \times x^k$ aflevert (in het algemeen hangt *ck* af van *k*).
Schrijf met behulp van deze procedure een uitdrukking waarvan de waarde is
$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\, x^i y^j$.

2) Zij gegeven dat de procedure statement

moc(xm, ym, x, y)

aan *xm* resp. *ym* de x- resp. y-coordinaat toekent van het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek met hoekpunten *(x[1], y[1]), (x[2], y[2])* en *(x[3], y[3])*.
Schrijf met behulp van dit gegeven een procedure die aan *xm* resp. *ym* de x- resp. y-coordinaat toekent van het middelpunt van de kleinste cirkel waar geen dier hoekpunten buiten ligt.

3) Op een band staan achtereenvolgens een geheel getal $n > 2$ en $n + 1$ reële getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
Schrijf een programma dat het reële en imaginaire gedeelte van twee reële of toegevoegd complexe nulpunten van het polynoom

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

uittypt.
Aangenomen mag worden dat toepassen van de methode van Bairstow met x^2 als beginschatting voor de af te splitsen kwadratische factor, aanleiding geeft tot convergentie.

N.B. Het formularium van de methode van Bairstow is als volgt.
Zij $x^2 + px + q$ een schatting voor een kwadratische factor van het polynoom.
Bepaal $b_0, \ldots, b_n$ en $c_0, \ldots, c_{n-1}$ uit

$$b_0 = a_0, \qquad c_0 = b_0,$$
$$b_1 = a_1 - pb_0, \qquad c_1 = b_1 - pc_0,$$
$$b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}, \quad (2 \le i \le n), \qquad c_i = b_i - pc_{i-1} - qc_{i-2}, \quad (2 \le i \le n-2),$$
$$c_{n-1} = -pc_{n-2} - qc_{n-3}.$$

Dan zijn

$$p + \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_nc_{n-3}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1}c_{n-3}}, \qquad q + \frac{b_nc_{n-2} - b_{n-1}c_{n-1}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1}c_{n-3}}$$

de verbeterde schattingen voor de coëfficiënten van een kwadratische factor.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

NUMERIEKE ANALYSE

5 september 1967, van 9.00 - 12.00 uur

---

1. Bepaal de coëfficiënten a, b en c in de integratie formule

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)dx = h(ay_0 + by_1 + cy_2) + R$$

met $x_i = x_0 + ih$, $y(x_i) = y_i$.
Bewijs dat (voor een voldoend vaak differentieerbare reële functie y van de reële variabele x) de afknotfout R de volgende vorm heeft:

$$R = ky^{(n)}(\xi)\ ,\ x_0 \leqq \xi \leqq x_2,$$

en bepaal k en n.

2. Van een kromme zijn de y-waarden in tabelvorm gegeven als functie van x:

$\sqrt{x}$	x	y(x)
0.1	0.01	0.0500
0.141421	0.02	0.0700
0.173205	0.03	0.0850
0.2	0.04	0.0960
0.223607	0.05	0.1050
0.316228	0.1	0.1440
0.547723	0.3	0.1900

De functie y(x) moet volgens de methode der kleinste kwadraten benaderd worden door $y^* \equiv a(1-x)\sqrt{x}$; hierbij is a een constante.
Gevraagd:
a) Bepaal a (in 4 decimalen nauwkeurig).
b) Bereken $y^*(x)$ in 4 decimalen nauwkeurig voor de opgegeven waarden van x.

3. Gegeven $y = y(x)$; $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 + 2$; $y(0) = 1$.
Gevraagd wordt te berekenen y(0.1) en y(0.2) in 4 decimalen nauwkeurig.

4. Bereken $13^{-1/3}$ in 4 decimalen nauwkeurig.
Gebruik hierbij een iteratieformule, waarin geen andere delingen voorkomen dan door het getal 3.

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

LINEAIRE ALGEBRA

5 september 1967, van 14.00 - 16.00 uur

---

1. De orthogonale matrix D beeldt de driedimensionale vectorruimte R_3 in zichzelf af.
   Gegeven is dat deze afbeelding een draaiing is om de as $\lambda(1,1,0)$, terwijl de vector $(0,1,0)$ wordt afgebeeld op de vector (α,α,β) met $\beta > 0$.
   a) Bepaal α, β en de matrix D.
   b) Bepaal de draaiingshoek behorend bij de afbeelding.
   c) Bereken D^4 en verklaar het antwoord.

2. Bepaal de waarden van a waarvoor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}
2x_1 + ax_2 + x_4 &= 0,\\
x_1 + x_3 + (a+2)x_4 &= 0,\\
ax_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\
x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0,
\end{aligned}$$

   een andere dan de nuloplossing heeft.
   Bepaal voor elk dezer waarden van a een lineair onafhankelijke basis voor de oplossingsruimte.

3. Bepaal de afstand van de rechten

$$\ell : \quad x = 0, \quad y + z = 1;$$
$$m : \quad x = z, \quad y = 0.$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

ANALYSE

2 september 1968, van 9.00 - 12.00 uur

---

1. Bepaal de maxima en minima van de functie

$$y = \cos^3 x + \sin^3 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Schets de grafiek van deze functie.

2. Bepaal a zodanig dat de integraal

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \frac{a}{t}\right) dt$$

convergent is.
Bereken de integraal voor deze waarde van a.

3. Zij gegeven de kwadratische vergelijking in z,

$$z^2 - 2az + 1 = 0.$$

Bepaal de banen in het complexe vlak welke de beeldpunten van de wortels van deze vergelijking beschrijven, indien a het interval $a \geq 0$ doorloopt.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 2 \log x, \quad x > 0.$$

Aanwijzing: Substitueer $x = e^t$ en beschouw t als nieuwe onafhankelijke variabele.

5. Bewijs dat

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \tfrac{1}{2}(\pi + 1),$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} > \tfrac{1}{2}(\pi + \tfrac{1}{2}).$$

Aanwijzing ad b): Maak gebruik van de trapeziumregel.

Examen Wetenschappelijk Rekenen A 1968

Programmeren

Maandag 2 September 14 - 17 uur

1. Op een band staan:

1. een geheel getal n; gegeven is dat $n \geq 2$;

2. n onderling verschillende gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Schrijf een programma dat de getallen van de band leest en, zonder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in een array te bewaren, het verschil van het op één na grootste en het op één na kleinste der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ berekent en print.

2. Zij $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{1 - x - x^2}$.

Voor $|x| < \frac{1}{2}$ is $f(x)$ te schrijven als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, waarin de a_n's constante coëfficiënten zijn.

Schrijf een procedure *coeff*(n) welke als waarde krijgt de waarde van a_n.

Aanwijzing: de coëfficiënten a_n zijn te berekenen uit:

$$1 + 2x = (1 - x - x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

3. Zij $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{(n!)^2}$.

a) Schrijf een procedure $F(x, eps)$ die voor $0 \leq x \leq 1$ een benadering voor $f(x)$ bepaalt met een absolute fout kleiner dan een gegeven grootheid *eps*.

N.B. Voor de discussie van de afbreekfout kan de schatting:

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2} \right| \leq \frac{x^N}{(N!)^2}$$

gebruikt worden.

b) Schrijf een programma dat, gebruik makend van de onder a) gevraagde procedure F, een benadering voor de in het interval $(0, 1)$ liggende wortel van de vergelijking:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}$$

berekent met een absolute fout kleiner dan 10^{-6} en deze benadering print.

N.B. Bij het kiezen van een geschikte waarde van *eps* kan men gebruik maken van het feit dat

$$f'(x) < -\tfrac{1}{2} \text{ voor } 0 \leq x \leq 1.$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

NUMERIEKE ANALYSE

3 september 1968, van 9.00 - 12.00 uur

1. Bereken $17^{1/3}$ in 3 decimalen nauwkeurig.

2. De functie $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$y'' = xy + 4$$

en aan de randvoorwaarden

$$y(0) = y(0.5) = 0 .$$

Bereken $y'(0)$ en $y(0.3)$ in 3 decimalen nauwkeurig.

3. De functie $f(x)$ is gegeven door de volgende tabel

$x^{-\frac{1}{2}}$	x	$f(x)$
3.1623	0.1	3.1465
2.2361	0.2	2.1915
1.8257	0.3	1.7442
1.5811	0.4	1.4563
1.4142	0.5	1.2411
1.2910	0.6	1.0655

terwijl voorts geldt

$$\lim_{x \to 0} [f(x) - x^{-\frac{1}{2}}] = 0 .$$

Bereken een benadering van $\int_0^{0.6} f(x)dx$ en geef een schatting van de nauwkeurigheid hiervan.

4. Voor de afbreekfout $R(h)$ in de driepunts differentiatieformule

$$(1) \qquad y'(x_0) = \frac{y(x_0 + h) - y(x_0 - h)}{2h} + R(h)$$

geldt, indien $y(x)$ voldoende vaak differentieerbaar is,

$$R(h) = Ah^2 + O(h^4)$$

waarin A niet van h afhangt.

a) Bewijs dit en bepaal de coëfficiënt A.

b) Laat zien hoe men met behulp van h^2-extrapolatie uit (1) een vijfpunts differentiatieformule kan afleiden.

5. Gegeven is de LU decompositie

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -16 & 8 & 28 \\ 1 & 3 & 11 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 13 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 1 & 5 & & \bigcirc & \\ 2 & 1 & 9 & & \\ 0 & 3 & 4 & 7 & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 2 & 7 \\ & 1 & 3 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & \bigcirc & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal met behulp hiervan de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 16 & 5 & 5 & 19 \\ 1 & 3 & 11 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 13 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & 7 & -11 \\ 4 & -8 & -16 & 8 & 28 & 4 \end{pmatrix} .$$

Examen voor het diploma A voor Wetenschappelijk Rekenen

LINEAIRE ALGEBRA

3 september 1968, van 14.00 - 16.00 uur

---

1. Gegeven is een lineaire afbeelding A, waarvan de matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} .$$

   Bepaal een basis van de nulruimte van A.

2. Bewijs dat als de niet-singuliere matrix A symmetrisch is, ook A^{-1} symmetrisch is.

3. Een transformatiematrix T in R_3 is bepaald door de volgende gegevens:

   1° De beeldvector van (2,1,0) is (8,2,6)
   2° " " " (1,0,-1) is (2,-1,3)
   3° " " " (-1,1,1) is (0,1,-1).

   a) Bepaal T.
   b) Toon aan dat T singulier is.
   c) Bepaal de dimensie van de beeldruimte van T.
   d) Welke vectoren staan loodrecht op de beeldruimte?

4. Bepaal de waarde(n) van a waarvoor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2ax + 3y + az &= -2 \\ x - y + z &= -2 \\ 5x + ay + 3z &= -10 \\ 3x + 2ay + z &= 0 \end{aligned}$$

   een oplossing heeft en bereken die oplossing(en).