TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

OPGAVEN

NUMERIEKE WISKUNDE I

Voorjaar 1970-1973

Oefeningen Numerieke Wiskunde I voorjaar 1970

4. Oefeningen programmeren in ALGOL 60.

1. De Fourierreeks voor de functie $f(x) = |x|$ op het interval $[-1,1]$ is

$$f(x) = \frac{1}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2\pi^2}$$

Zij $$S_n(x) = \frac{1}{2} - 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2\pi^2} .$$

Zij bij gegeven $\varepsilon > 0$ het getal N zodanig dat voor alle $x \in [0,1]$ geldt

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon .$$

Bepaal een formule voor N, met behulp van een eenvoudige schatting voor de rest van de reeks.

Schrijf een programma dat

a) $S_{20}(x)$, $S_{50}(x)$ en $S_{100}(x)$ berekent voor $x := 0(0.1)1$ en deze getallen als volgt print

$$x \qquad S_{20}(x) \qquad S_{50}(x) \qquad S_{100}(x) .$$

b) de waarde van ε van een getalband leest, de bijbehorende waarde van N bepaalt, vervolgens $S_N(x)$ berekent voor $x := 0(0.1)1$ en tenslotte de volgende getallen print

$$\varepsilon \qquad N$$

$$x \qquad S_N(x) .$$

Opmerking: $\pi \doteq 3.14159265359$.

2. Van de functie $y = f(x)$ is een tabel (x_i, y_i) voor $i = 1,2,\ldots,n$ gegeven, waarbij verondersteld wordt dat $x_i < x_{i+1}$.

Schrijf een functie procedure die bij gegeven a als waarde krijgt:

als $a < x_1$ de waarde van y_1,

als $x_1 \leq a \leq x_n$ de benadering van f(a) verkregen door lineaire interpolatie in de tabel,

als $a > x_n$ de waarde van y_n.

Gebruik de volgende procedure heading

```
real procedure f(n,x,y,a);
     value n, a;
     integer n; real array x, y; real a;
```

Schrijf een programma om te testen of de procedure correct is. Dit programma moet de waarden van n, x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, a_{min}, a_{max} en Δa in deze volgorde van de getallenband lezen, en vervolgens voor $a := a_{min}(\Delta a)\, a_{max}$ de waarde van f berekenen en printen.

3. Schrijf een programma om een gegeven matrix A door verwisseling van rijen en door verwisseling van kolommen te transformeren in een matrix B met de eigenschap

$$|B_{kk}| = \max_{\substack{i \geq k \\ j \geq k}} |B_{ij}| \, .$$

Schrijf procedures voor

a) het bepalen van het in absolute waarde maximale element van een matrix;

b) het verwisselen van twee getallen;

c) het verwisselen van twee rijen van een matrix;

d) het verwisselen van twee kolommen van een matrix.

Maak bij c) en d) gebruik van de onder b) genoemde procedure.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I voorjaar 1970

4. Rekenen met onnauwkeurige getallen

A. Berekeningen met een tafelrekenmachine.

Zij $x = \dfrac{a * b - c * d}{p * (q + r)}$, waarbij

$a = 0.728$, $b = 1.0372916$, $c = 3.15297$, $d = 0.2395279016$,

$p = 0.231$, $q = 0.108 * 10^{-3}$, $r = 0.1841762 * 10^{-3}$.

Bereken x in 8 decimalen. Schrijf alle tussenresultaten op.
Veronderstel dat de getallen a t/m r correcte afrondingen zijn van de reële getallen $\bar{a}$ t/m $\bar{r}$; dat wil zeggen dat bijvoorbeeld $\bar{a}$ ligt in het onzekerheidsinterval $[0.7275 , 0.7285]$.

Zij $\bar{x} = \dfrac{\bar{a} * \bar{b} - \bar{c} * \bar{d}}{\bar{p} * (\bar{q} + \bar{r})}$.

Bepaal het onzekerheidsinterval waarin $\bar{x}$ ligt. Doe dit door achtereenvolgens na te gaan in welk interval $\bar{a} * \bar{b}$, $\bar{c} * \bar{d}$, $\bar{a} * \bar{b} - \bar{c} * \bar{d}$, enz. ligt. Noteer alle resultaten.

Omschrijving van de begrippen
"het getal a heeft k significante cijfers"
"het getal a heeft k significante decimalen".

Zij m de mantisse van a en zij $\bar{m}$ de mantisse van $\bar{a}$.
We zeggen: a als benadering van $\bar{a}$ heeft k significante cijfers als $m - \bar{m} \sim 10^{-k}$. *en gelijke exponenten!*
We zeggen: a als benadering van $\bar{a}$ heeft k significante decimalen als $a - \bar{a} \sim 10^{-k}$.
($\sim$ betekent hier: is ongeveer gelijk aan.)

1) Voor de vermenigvuldiging gelden de volgende vuistregels:
Als het getal a n significante cijfers heeft en het getal b heeft m significante cijfers, dan heeft a * b een aantal significante cijfers dat ongeveer gelijk is aan min(m,n).
Als het getal a een relatieve fout δa heeft en b een relatieve fout δb heeft, dan heeft a * b een relatieve fout die ongeveer gelijk is aan $\delta a + \delta b$, en als $\delta a \gg \delta b$ een relatieve fout die ongeveer gelijk is aan δa. Verifieer deze uitspraken aan de hand van Uw berekeningen.
Formuleer aan de hand van de berekeningen soortgelijke uitspraken voor de bewerkingen: optellen, aftrekken en delen.

2) Hoeveel significante cijfers heeft x aangenomen dat alle getallen a t/m r correct zijn afgerond?
3) Neem aan dat de waarde van a (= 0.728) exact is. Bepaal dan met behulp van de vuistregels het aantal significante cijfers van x. Bereken ook het onzekerheidsinterval van $\bar{x}$ en vergelijk deze twee resultaten.
4) Geef, aangenomen dat de waarde van a exact is, bij ieder van de overige getallen aan op hoeveel cijfers het getal afgerond kan worden, zonder dat het resultaat significant verandert. Bereken bij deze opnieuw afgeronde getallen weer het onzekerheidsinterval van $\bar{x}$.

B. De grootheden x en y hangen samen volgens de formule

$$y = x(1 + \alpha x)$$

waarin α een gegeven parameter is.
Bekend is dat de term αx in absolute waarde klein is ten opzichte van 1.
Schrijf een programma voor het berekenen van x voor de volgende combinaties van α en y.

α	y	α	y	α	y
10^{-2}	10^{2}	10^{-2}	10^{-2}	1	10^{-6}
10^{-2}	10	10^{-4}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-4}
10^{-2}	1	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
10^{-2}	10^{-1}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	1

Doe dit
a) met de "gewone" formule voor het oplossen van een vierkantsvergelijking (noem het resultaat x_i);
b) met een numerieke stabiele formule voor het oplossen van een vierkantsvergelijking (resultaat x_s).

Bepaal voor de gevonden waarden van x_i en x_s ook de grootheden

$$r = (y - x) - \alpha x^2 \quad \text{en} \quad \delta x = - r/(1 + 2\alpha x) \,. \tag{1}$$

Maak een tabel op de hieronder aangegeven wijze van de volgende grootheden.

$$\begin{array}{lllll} \alpha & y & & & \\ x_i & r_i & \delta x_i & \delta x_i/x_i & x_i - \delta x_i \\ x_s & r_s & \delta x_s & \delta x_s/x_s & x_s - \delta x_s \,. \end{array}$$

Vragen

1) Laat zien dat voor een x_0 in de buurt van x geldt $x_0 - x \approx \delta x_0$.
2) Waarom is het beter om r te berekenen met de gegeven formule (1) en niet met bijvoorbeeld $r = y - x(1+\alpha x)$?
3) Verklaar het verschil tussen x_i en x_s.
   Ga na dat

$$\frac{x_i - x}{x_i} \sim \frac{10^{-12}}{2\alpha y} \quad \text{en} \quad \frac{x_s - x}{x_s} \sim 10^{-12} .$$

   (~ betekent hier: is in orde van grootte gelijk aan.)
   Neem hierbij aan dat de machine bij de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken een relatieve fout van ten hoogste 10^{-12} maakt.
4) Bij de derde serie zou de mantisse van x steeds dezelfde moeten zijn. Waardoor is dit niet het geval?

C. Simulatie van een rekenmachine met vaste woordlengte.
Voer de volgende berekeningen uit, waarbij na iedere arithmetische bewerking (+, -, ×, /) het verkregen resultaat wordt afgerond op m cijfers (mantisse van m cijfers).

1) Bereken de waarde van x uit opgave A met m = 5. Bij welke van de arithmetische bewerkingen wordt geen afrondingsfout gemaakt?
2) Zij $x = \dfrac{2y}{1+\sqrt{1+4\alpha y}}$ een wortel van de vergelijking $y = x + \alpha x^2$.
   Bereken x voor $y = 0.125$ en $\alpha = 0.03$ met m = 5.
   Bereken vervolgens met de gevonden x de waarde van $r = y - x - \alpha x^2$ in zo hoog mogelijke precisie.
   Bereken ook $r_1 = y - (x+\alpha x^2)$ en $r_2 = (y-x) - \alpha x^2$ met m = 5.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I. Voorjaar 1970

5. Beschouw het iteratieproces

$$x_{n+1} = x_n^2 - \lambda x_n\ , \quad n = 0,1,2,\dots\ . \tag{1}$$

Schrijf een programma, dat de rij $\{x_n\}$ berekent voor de volgende waarden van λ en x_0.

λ	x_0	λ	x_0	λ	x_0
0	.5	.5	2	-1	10^{-7}
0	-1	-1.63	-.1	-1	10^{-5}
0	-1.001	-1.63	-.8	1	1.999
0	-.999	-2	-.001	2	2.9
.5	.25	-2	.001	0.639	1.639

Maak voor iedere combinatie een tabel als volgt

$$\begin{array}{lllll}
\lambda & & & & \\
x_0 & & & & \\
x_1 & \Delta x_0 & & & \\
x_2 & \Delta x_1 & \Delta x_1/\Delta x_0 & y_0 := x_0 + \dfrac{\Delta x_0}{1 - \Delta x_1/\Delta x_0} & \\
x_3 & \Delta x_2 & \Delta x_2/\Delta x_1 & y_1 := x_1 + \dfrac{\Delta x_1}{1 - \Delta x_2/\Delta x_1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
x_{n+2} & \Delta x_{n+1} & \Delta x_{n+1}/\Delta x_n & y_n := x_n + \dfrac{\Delta x_n}{1 - \Delta x_{n+1}/\Delta x_n}\ . & (2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Beëindig het proces als

$$n \geq nmax \vee \left|\frac{\Delta x_n}{1 - \Delta x_{n+1}/\Delta x_n}\right| \leq \varepsilon\ .$$

Kies met overleg de waarden voor nmax en ε.

Vragen

1. Bepaal de mogelijke limietwaarden van de rij $\{x_n\}$.

2. Bewijs dat als $-1 < \lambda < 1$ het proces naar 0 convergeert voor alle x_0 met $-1 < x_0 < 1 + \lambda$ en divergeert voor alle x_0 met $x_0 < -1$ of $x_0 > 1 + \lambda$.
   Onderscheid daartoe de volgende gevallen:
   1e geval: $-1 < \lambda \leq 0$
   - a) $0 \leq x_0 < 1 + \lambda$
   - b) $-1 < x_0 < \lambda$
   - c) $\lambda \leq x_0 < 0$
   - d) $x_0 < -1$ of $x_0 > 1 + \lambda$.

   2e geval: $0 < \lambda < 1$
   - a) $-\frac{\lambda^2}{4} \leq x_0 \leq \lambda$, beschouw afzonderlijk de rij $\{x_{2n}\}$ en de rij $\{x_{2n+1}\}$
   - b) $\lambda < x_0 < 1 + \lambda$
   - c) $-1 < x_0 < -\frac{\lambda^2}{4}$
   - d) $x_0 > 1 + \lambda$ of $x_0 < -1$.

   Licht elk van beide gevallen toe met een grafiek.

3. Voor welke waarden van λ is het proces locaal convergent naar de wortel $\alpha = 0$, resp. $\alpha = 1 + \lambda$.

4. Bepaal $\lim_{n\to\infty} \Delta x_{n+1}/\Delta x_n$ in het geval dat de rij $\{x_n\}$ convergeert naar $\alpha = 0$, resp. naar $\alpha = 1 + \lambda$.

5. Zij gegeven het iteratieproces $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Bewijs: Als $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ dan geldt:

$$y_n - \alpha = \frac{f'(\alpha)\, f''(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)} (x_n - \alpha)^2 + 0(|x_n - \alpha|^3) \,. \qquad (3)$$

Aanwijzing: Ontwikkel in (2) eerst $\Delta x_{n+1}/\Delta x_n$ in een Taylorreeks rond x_n en ontwikkel daarna $x_n + \dfrac{\Delta x_n}{1 - \Delta x_{n+1}/\Delta x_n}$ in een Taylorreeks rond het punt α.

   a) Hoe is de convergentie van de rij $\{y_n\}$ in het geval dat de rij $\{x_n\}$ lineair convergeert? Heeft het toepassen van het Δ^2-proces van Aitken in dit geval zin?

b) Als de rij $\{x_n\}$ kwadratisch convergeert dan is $f'(\alpha) = 0$ en $f''(\alpha) \neq 0$ en er geldt

$$y_n - \alpha = -\tfrac{1}{4}\,(f''(\alpha))^2\,(x_n - \alpha)^3 + O(|x_n - \alpha|^4) \tag{4}$$

Ga dit na.
Laat met behulp van formule (4) zien dat in dit geval het Δ^2-proces van Aitken, d.i. de laatste kolom van (2), slechtere resultaten geeft dan de eerste kolom van (2) .

6. Waarom wordt het voorbeeld niet algemener als we nog een factor $\beta \neq 0$ voor de term x_n^2 toevoegen?

7. Verifieer de numerieke resultaten aan de hand van de antwoorden op de vragen 1 t/m 5. De getallen in de derde kolom van (2) naderen theoretisch naar de asymptotische convergentiefactor. Verklaar het hiervan afwijkende gedrag van deze kolom in sommige gevallen.

8. Geef Uw interpretatie van de resultaten van de laatste kolom in de gevallen $\lambda = \pm 1$, en verder in de langzaam divergente gevallen. Licht een en ander toe met een grafiek.

9. Modificeer het proces als volgt.
Kies een beginschatting x_0.
Bepaal x_1 en x_2 met de iteratieformule (1) en vervolgens y_0 met behulp van (2).
Algemeen in de n-de slag $(n \geq 1)$.
Neem $x_n := y_{n-1}$. Bepaal x_{n+1} en x_{n+2} met (1) en vervolgens y_n met (2) .
Hoe snel convergeert de aldus verkregen rij $\{y_n\}$.
Constateer experimenteel dat dit proces ook convergeert, in gevallen waarin het oorspronkelijke proces divergeert, mits x_0 voldoende dicht bij een stationair punt ligt.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I voorjaar 1970

6. De bijgaande procedure NULPUNT is een implementatie van de variant van het regula falsi proces die beschreven is in de college syllabus op pag. 28 en 29.

A. Bestudeer de procedure, lees het betreffende gedeelte van de syllabus en beantwoord aan de hand daarvan de volgende vragen.

1. Wat doet de procedure in het geval dat bij binnenkomst $F(x_0) \times F(y_0) > 0$? Betekent dit dat er geen nulpunt van F ligt in (x_0, y_0) ?

2. De conditie van regel 7 is gelijkwaardig met de conditie "fxo × fyo > 0". Wat is dan het voordeel van de gebruikte conditie boven de laatstgenoemde?

3.a. Hoe is het mogelijk dat x_{n+1}, berekend met regel 11, gelijk wordt aan x_n of y_n? Teken een plaatje.

b. Wat is de consequentie als we in regel 12 "≥ 0" vervangen door "= 1", in het geval dat x_{n+1} gelijk is aan x_n en in het geval dat x_{n+1} gelijk is aan y_n.

4. Is het mogelijk dat x_{n+1}, berekend met regel 13, buiten het open interval (x_n, y_n) komt (m.a.w. is de toevoeging van de conditional statement, regel 15 e.v., nodig)?

5. Is het mogelijk dat x_{n+1}, berekend met regel 16, buiten het open intervan (x_n, y_n) komt, in het geval van een binaire machine en in het geval van een decimale machine?

6. Bewijs dat bij de (n+1)ste passage van de label iteration het dan geldende interval $[x_n, y_n]$ echt bevat is in het vorige interval $[x_{n-1}, y_{n-1}]$, en dat $F(x_n) \times F(y_n) < 0$.

7. Bewijs dat het proces, uitgevoerd met een rekenmachine, eindig is, ongeacht de meegegeven waarden van de parameters xo, yo, ae, re, aangenomen dat het bepalen van fx eindig is.

8. Ga na dat, als ae en re positief en niet extreem klein zijn, voor de afgeleverde waarde x een van de volgende twee uitspraken geldt.

a. $x \in [x_0, y_0]$ en $F(x) = 0$.

b. Er bestaan x_n en y_n zodanig dat

$$[x_n, y_n] \subset [x_0, y_0]$$

$$F(x_n) \times F(y_n) < 0$$

$$x \in [x_n, y_n]$$

$$|x_n - y_n| \leq ae + re \times |x| \;.$$

B. Schrijf een programma dat met de gegeven procedure een nulpunt bepaalt in de volgende gevallen.

1. $f(x) = (x + \alpha)(2x - 1)$

   met $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

   en $\alpha = 5, 10^{-2}, 0, -0.5, -1, -2$.

2. $f(x) = 1 - 2e^{-\alpha x}$

   met $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

   en $\alpha = 1, 10, 100$.

3. $f(x) = (x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{4})$

   met $x_0 = 0$, $y_0 = 0.9$

   $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

   $x_0 = 0$, $y_0 = 1.1$.

<u>Vragen</u>.

1. Wat is de betekenis van de beëindigingstest abs(xo - yo) ≤ ae + re × abs(x); zie regel 24 van de procedure?

2. Ga na dat de procedure in de n-de slag het volgende print:

$$\text{(inter) (half)} \quad x_{n-1} \quad x_n \quad y_n \quad x_{n+1} \quad \left(\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p}\right)^p \quad f(x_{n+1}) \;;$$

   de woorden tussen haakjes worden niet altijd geprint.
   Wat betekent het als in de n-de slag "inter", resp. "half", wordt geprint?

3. Ga aan de hand van de output na wanneer x_{n+1}, berekend met x_{n-1} en x_n, niet geaccepteerd wordt en waarom niet.

4. Ga in een geval van "slechte convergentie" na of de convergentie lineair is, en of het toepassen van het Δ^2-proces van Aitken dan zinvol is.

5. Merk op dat in de gevallen van "goede convergentie" per drie slagen tweemaal x_{n-1} en y_n samenvallen (dus interpolatie), terwijl in de derde slag x_{n-1} buiten het interval $[x_n, y_n]$ ligt (dus extrapolatie).
   Laat zien dat dit volgt uit formule (2) op pag. 27 van de college syllabus.
   Illustreer dit verschijnsel ook met een plaatje.

6. Ga met behulp van formule (3) op pag. 27 van de college syllabus na wat de limietwaarde is van de op één na laatste kolom van Uw output.
   In hoeverre zijn de numerieke resultaten hiermee in overeenstemming?
   Bepaal in enkele gevallen, waarin de overeenstemming niet erg bevredigend is, het aantal significante cijfers van de berekende getallen.

C. Los met behulp van de procedure NULPUNT het volgende stelsel vergelijkingen op.

$$f(x,y) := 3x^4 + x^3y^3 + y^2 - 2 = 0$$

$$g(x,y) := (1 + x^3)e^{-y} - x^2y - y^3 = 0 \; .$$

Maak daarbij gebruik van de volgende gegevens.

a. Voor elke x in $[0,1]$ is $g(x,y)$ voor $0 \le y \le 1$ een monotoon dalende functie van y.

b. $f(x,y) < 0$ als $x = 0$ en $0 \le y \le 1$

   $f(x,y) > 0$ als $x = 1$ en $0 \le y \le 1$.

Ga dit na.

Onbevredigend resultaat niet (alleen) t.g.v. onnauwkeurig rekenen.
Aan formule (2) pag 27 is waarschijnlijk wel redelijk voldaan.
Overgang van (2) → (3) impliceert nog een limiet proces.

```
real procedure NULPUNT(x, fx, xo, yo, ae, re, output, alarm);
value xo, yo, ae, re, output;
real x, fx, xo, yo, ae, re; Boolean output; label alarm;
begin real fxo, fyo, xmin1, fxmin1, p;
      x := xo; fxo := fx; if fxo = 0 then goto assign;
      x := yo; fyo := fx; if fyo = 0 then goto assign;
      if sign(fxo) × sign(fyo) = 1 then goto alarm;
      xmin1 := yo; fxmin1 := fyo;
      p := 0.5 × (1 + sqrt(5));
 iteration:  if output then NLCR;
      x := (xo × fxmin1 - xmin1 × fxo) / (fxmin1 - fxo);
      if sign(x - xo) × sign(x - yo) ≥ 0
      then begin x := (xo × fyo - yo × fxo) / (fyo - fxo);
                 if output then PRINTTEXT(≮inter≯);
                 if sign(x - xo) × sign(x - yo) ≥ 0
                 then begin x := (xo + yo) / 2; if output then PRINTTEXT(≮ half ≯) end
                 else if output then SPACE(6)
           end
      else if output then SPACE(11);
      if output then begin FLOT(12, 2, xmin1); FLOT(12, 2, xo);
                           FLOT(12, 2, yo); FLOT(12, 2, x);
                           FLOT(6, 2, (abs(x - xo) / (abs(xo - xmin1)) ↑ p) ↑ p)
                     end;
      if sign(x - xo) × sign(x - yo) ≥ 0 ∨ abs(xo - yo) < ae + re × abs(x) then goto assign;
      xmin1 := xo; fxmin1 := fxo;
      xo := x; fxo := fx; if fxo = 0 then goto assign;
      if output then FLOT(12, 2, fxo);
      if sign(fxo) × sign(fxmin1) = - 1 then begin yo := xmin1; fyo := fxmin1 end;
      goto iteration;
assign:  NULPUNT := x
 end NULPUNT;
```

Oefeningen Numerieke Wiskunde   Voorjaar 1970

7. Schrijf een programma om bij een gegeven beginschatting x_0 een wortel van de vergelijking $f(x) = 0$ te bepalen, met de iteratiemethode van Newton-Raphson:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) , \qquad k \geq 0 .$$

De functie f is een polynoom van de graad n,

$$f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n .$$

Maak een procedure voor de berekening van $f(x)$ en $f'(x)$ met het Horner schema.

Print per iteratieslag de volgende grootheden

$$x_k , f(x_k) , f'(x_k) , \Delta x_k , \Delta x_k/\Delta x_{k-1} , \Delta x_k/(\Delta x_{k-1})^2 .$$

Het iteratieproces moet worden beëindigd als aan een van de volgende voorwaarden is voldaan

$$|\Delta x_k| < \varepsilon \times |x_{k+1}| ,$$

$$|f(x_k)| < 10^{-12} \times |a_n| ,$$

$$k > max .$$

Draai het programma met enkele van de volgende voorbeelden:

$$f(x) = x^2 - 1 ;$$

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$
$$= x^3 - 4x^2 + x + 6 ;$$

$$f(x) = ((x - 1)^2 + a)(x + 1)$$

$$= x^3 - x^2 - (1 - a)x + (1 + a) ;$$

$$f(x) = ((x - 1)^2 + a)(x - 1)(x + 1)$$

$$= x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x - (1 + a) .$$

Neem voor a achtereenvolgens nul, een klein positief getal, een klein negatief getal.

Teken in elk van de gevallen een plaatje.

Vragen

1. Bewijs: Als α een p-voudige wortel is van $f(x) = 0$ met $p \geq 2$ en $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ dan is de convergentie lineair met asymptotische convergentiefactor $1 - 1/p$. Zie opgave 2 op pag. 25 van de syllabus.

2. Zij α_j voor $1 \leq j \leq n$ de wortels van een n-de graads vergelijking $f(x) = 0$. Dan geldt voor iedere x

$$\underset{1\leq j\leq n}{\min\,\cancel{\max}} |x - \alpha_j| \leq n \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| .$$

Bewijs dit.
Aanwijzing: Gebruik de formule $f(x) = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$.

3. Bewijs: Als $f''(x) \neq 0$ dan is de convergentie van het Newton proces lokaal monotoon. Licht dit toe met een plaatje.

4. Stel dat van een iteratieproces theoretisch bekend is dat de rij $\{x_n\}$ monotoon convergeert naar de limiet α.
Bedenk dan voor het iteratieproces een afbreekcriterium dat gebaseerd is op de monotonie.
Wat kan er in dit geval gezegd worden van de nauwkeurigheid van het resultaat?

5. Bepaal de convergentie-orde en de asymptotische convergentiefactor in elk van de berekende voorbeelden en ga na in hoeverre de numerieke resultaten hiermee in overeenstemming zijn.

6. Ga na dat als $|f(x_k)| < 10^{-12} \times |a_n|$ de waarde van $f(x_k)$, en dus de volgende Newton correctie zeker, niet meer significant is.
N.B. Het omgekeerde behoeft niet het geval te zijn.

7. Zij $\delta f(x)$ de afrondingsfout die bij de berekening van $f(x)$ gemaakt wordt.
Zij $\bar{f}(x)$ de berekende waarde van $f(x)$, dus $\bar{f}(x) = f(x) + \delta f(x)$.
Zij $|\delta f(x)| < d$ voor x in de buurt van de wortel α van de vergelijking $f(x) = 0$.
Zij $V := \{x \mid |f(x)| < d\}$.

Bij een nette functie is V een interval.
Dan is voor iedere $x \in V$ de berekende waarde $\bar{f}(x)$ niet significant van nul

verschillend. Voor het Newton proces betekent dit dat voor $x_k \in V$ de Newton correctie niet significant is.
We noemen V het onzekerheidsinterval van de wortel α.

Zij p de multipliciteit van de wortel α.
Dan geldt, als f een nette functie is, dat de lengte van het interval V ongeveer gelijk is aan

$$2 \times (p!\ d/|f^{(p)}(\alpha)|)^{1/p} .$$

Ga dit na.
Globaal kunnen we dus van $\delta\alpha$, d.i. de nauwkeurigheid waarmee de wortel α te bepalen is, zeggen

$$\delta\alpha \sim d^{1/p} .$$

Verifieer deze uitspraak met behulp van de numerieke resultaten. Ga daarvoor eerst na dat in alle gevallen geldt dat $d \sim 10^{-12}$.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I.   Voorjaar 1970

8. Rekenen met differenties.

A. Gegeven de volgende tabellen.

x	sin(x)	cos(x)
0.7	0.644 218	0.764 842
0.8	0.717 356	0.696 707
0.9	0.783 327	0.621 610
1.0	0.841 471	0.540 302
1.1	0.891 207	0.453 596
1.2	0.932 039	0.362 358
1.3	0.963 558	0.267 499
1.4	0.985 450	0.169 967
1.5	0.997 495	0.070 737
1.6	0.999 574	-0.029 200
1.7	0.991 665	-0.128 844
1.8	0.973 848	-0.227 202
1.9	0.946 300	-0.323 290
2.0	0.909 297	-0.416 147

Maak voor sin(x) een differentietabel tot en met de vierde differentie voor $x = 1(0.1)2$ en voor $x = 1(0.2)2$.
Ga na of Uw resultaten in overeenstemming zijn met formule (4) op pag. 50 van de college syllabus.
Bereken met behulp van de gemaakte differentietabel zo nauwkeurig mogelijk sin(1.04) met de formule van Lagrange en met de formule van Newton-Gregory.

Bereken sin(1.22) met de formules van Newton-Gregory, Stirling en Everett.
Kies in dit geval voor elke interpolatieformule $x_0 = 1.2$.

Geef in alle gevallen een schatting van de fout in Uw antwoord.

Ter controle: sin(1.04) = 0.862 404, sin(1.22) = 0.939 099.

Bepaal met inverse interpolatie de waarde van x waarvoor $\cos(x) = \frac{1}{2}$, en de waarde van x waarvoor $\sin(x) = 1$.
Geef in beide gevallen een schatting van de fout in Uw antwoord.

Ter controle: $\pi = 3.1415926536$.

B. Gegeven is dat de volgende tabel op één plaats een fout bevat en de doorwerking daarvan in de er op volgende differenties

x	e^x	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
0.0	1.000000					
		105171				
0.1	1.105171		11061			
		116232		1163		
0.2	1.221403		12224		123	
		128456		1286		101
0.3	1.349859		13510		224	
		141966		1510		-342
0.4	1.491825		15020		-118	
		156986		1392		550
0.5	1.648721		16412		432	
		173398		1824		-338
0.6	1.822119		18236		94	
		191634		1918		108
0.7	2.013753		20154		202	
		211788		2120		21
0.8	2.225541		22274		223	
		234062		2343		
0.9	2.459603		24617			
		258679				
1.0	2.718282					

Wat kunt U concluderen uit het verloop van de differenties t.a.v. plaats en grootte van de fout?

Spoor de fout op en breng noodzakelijke correcties aan. Controleer nu of voldaan is aan formule (4) op pag. 50 van de syllabus.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I   Voorjaar 1970

9. De trapeziumregel voor $\int_a^b f(x)dx$ op n+1 punten is

$$\int_a^b f(x)dx = T_n + R_n$$

met

$$T_n := h[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n] , \qquad (1)$$

waarin

$$h := \frac{b-a}{n} , \quad x_j := a + jh , \quad f_j := f(x_j) .$$

Als f tweemaal continu differentieerbaar is, dan geldt

$$R_n = -\frac{1}{12} h^2 \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f''(\xi_j) \quad \text{met } x_j < \xi_j < x_{j+1} . \qquad (2a)$$

Ook geldt

$$R_n = -\frac{1}{12} h^2 (b-a) f''(\xi) \quad \text{met } a < \xi < b . \qquad (2b)$$

Schrijf een programma dat bij een aantal gegeven waarden van n berekent en print:

$$n \quad T_n \quad T_{2n} \quad \tfrac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \quad T_{2n} + \tfrac{1}{3}(T_{2n} - T_n) .$$

Voorbeelden:

1) $f(x) = e^x$ $\quad a = 0,\ b = 1,\ n = 2,3,4,6,8$;

2) $f(x) = x^\alpha$ $\quad a = 0,\ b = 1,\ n = 4,8,16,32$;

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$ $\quad a = 0,\ b = 2,\ n = 4,6,8,12,16$.

Vragen

1. Bewijs: Als f" continu is dan geldt

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_n}{h^2} = -\frac{1}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

(zie college syllabus, pag. 65, opmerking 8).

2. Bewijs in het geval dat $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^1 f(x)dx = T_n + C_n h^{3/2} ,$$

waarbij

$$C_n = \frac{1}{8} \int_0^n t^{-3/2}(t - [t])([t] + 1 - t)dt ,$$

zodat in dit geval geldt

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n}{h^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} C_n = C_\infty .$$

(Hint: gebruik formule (6) op pag. 63 van de college syllabus.)

3. Bereken in elk van de gevallen de exacte waarde van R_n.
Bereken ook een schatting voor R_n met behulp van (2a) of (2b).
Vergelijk deze waarden met die uit de voorlaatste kolom van Uw output.

4. Neem aan dat voor de restterm R_n geldt

$$R_n = Ch^p + \dots .$$

Bepaal dan C en p door in een grafiek log R_n tegen log h uit te zetten.
Gebruik dubbel-logarithmisch grafiekenpapier.
Ga na dat U in plaats van R_n (die in het algemeen niet bekend is) ook $T_{2n} - T_n$ kunt nemen.
Teken in dezelfde grafiek log r_n als functie van log h, waarbij r_n de fout is in de laatste kolom, dus

$$r_n := \int_a^b f(x)dx - T_{2n} - \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) .$$

5. Verifieer aan de hand van Uw output de resultaten van de vragen 1 en 2.

6. Leid een formule af voor de extrapolatie van Richardson in voorbeeld 2, $f(x) = x^\alpha$.
Voer vervolgens deze extrapolatie uit.

Oefeningen Numerieke Wiskunde I. Voorjaar 19~~69~~70

11 Berekening van de baan van een satelliet rond aarde en maan.

We nemen het volgende vereenvoudigde model.

De aarde en de maan zijn stilstaande lichamen in de ruimte.

De straal van de aarde is Ra, de massa is 1; de straal van de maan is Rm, de massa is γ.

De afstand aarde-maan is 1.

Een satelliet wordt van de oppervlakte van de aarde weggeschoten met snelheid v. De snelheidsvector $\vec{v}$ en de verbindingslijn van de middelpunten van de aarde en maan liggen in een vlak.

Hierdoor is het probleem tweedimensionaal.

Kies het assenstelsel zo dat het middelpunt van de aarde in de oorsprong ligt en het middelpunt van de maan in het punt $\vec{m} = (1,0)$ ligt.

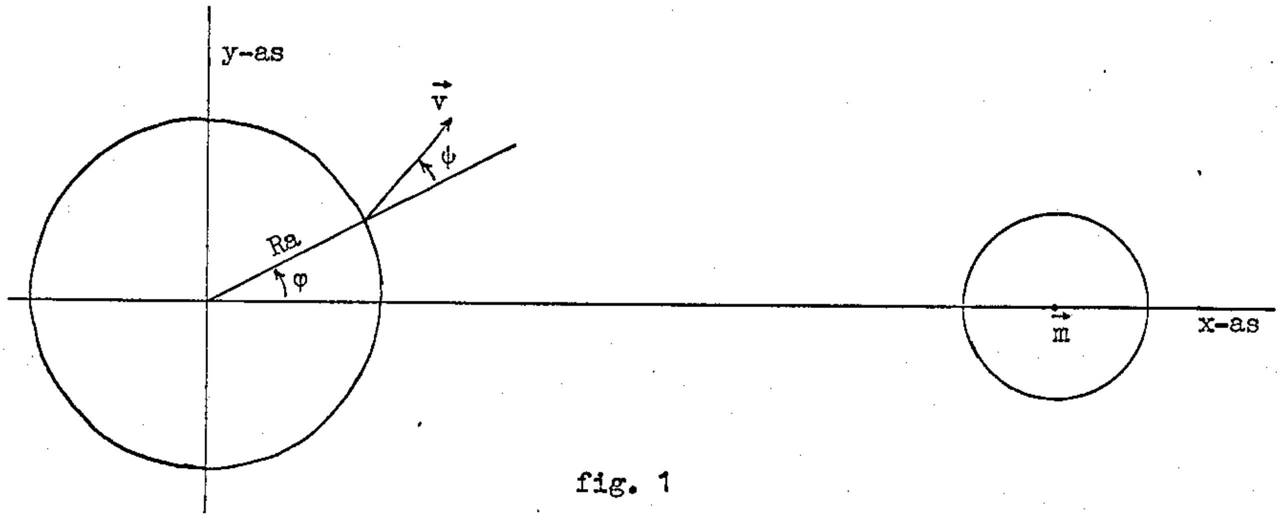


fig. 1

De bewegingsvergelijking van de satelliet is

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \gamma \frac{\vec{r} - \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{m}|^3}$$

ofwel in coördinaten uitgeschreven

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= - \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \; . \end{aligned} \qquad (1)$$

Als beginvoorwaarden moeten gegeven worden de waarden van x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ op het tijdstip $t = 0$. Deze worden gegeven door middel van de grootheden Ra, φ, ψ en v, zoals aangeduid in fig. 1.

Schrijf een programma om met behulp van de procedure RK3nPLOT de baan van een satelliet te berekenen en te plotten, bij gegeven waarden van de parameters γ, Ra, Rm, φ, ψ en v.

Gebruiksaanwijzing van RK3nPLOT

```
procedure RK3nPLOT(x,a,b,hsug,y,ya,z,za,fxyj,j,e,n);
value b,n; integer j,n; real x,a,b,fxyj,hsug;
array y,ya,z,za,e;
```

Formele parameters

real x	< variable > Is de onafhankelijke variable. Wordt als Jensen parameter gebruikt.
real a	< expression > Heeft als waarde de beginwaarde van x.
real b	< expression > Heeft als waarde de eindwaarde van x.
real hsug	< expression > Heeft als waarde de gesuggereerde integratie staplengte
array y	Array met grenzen [1 : n]. Het array element y[j] bevat de waarde van de j-de afhankelijke variable y_j. Wordt als Jensen parameter gebruikt.
array ya	Array met grenzen [1 : n]. ya[j] bevat de beginwaarde van y_j.
array z	Array met grenzen [1 : n]. z[j] bevat de waarde van de afgeleide $\frac{dy_j}{dx}$.
array za	Array met grenzen [1 : n]. za[j] bevat de beginwaarde van de afgeleide $\frac{dy_j}{dx}$.
real fxyj	< expression > Is de functie $f_j(x,y)$ die als rechterlid in de j-de vergelijking voorkomt. Hangt af van de Jensen parameters x, y, j.

integer j < variable >
Heeft als waarde de index van de vergelijking waarvan fxyj het rechterlid is.
Wordt als Jensen parameter gebruikt.

array e Array met grenzen [1 : 4 × n].
Het array element e[2 × j - 1] bevat de relatieve tolerantie en het array element e[2 × j] de absolute tolerantie behorende bij y_j
Het array element e[2 × (n + j) - 1] bevat de relatieve tolerantie en het array element e[2 × (n + j)] bevat de absolute tolerantie behorende bij $z_j = \frac{dy_j}{dx}$.

integer n < expression >
Heeft als waarde het aantal differentiaalvergelijkingen.

Globale parameters

real procedure MARKEDCURVE < function designator >
PLOTCURVE
De procedure veronderstelt dat gedeclareerd zijn MARKEDCURVE(X,Y,I) en PLOTCURVE(X,Y,I).

Toelichting

Met de procedure RK3nPLOT wordt de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2y_j}{dx^2} = f_j(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \qquad j = 1,2,\dots,n$$

met beginvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned} y_j(a) &= ya_j \\ z_j(a) &= \frac{dy_j(a)}{dx} = za_j \end{aligned}\right. \qquad j = 1,2,\dots,n$$

berekend en geplot voor $a \leqslant x \leqslant b$.
Bij aanroep van de procedure moet de actuele parameter voor fxyj de expressie zijn afhankelijk van x, y_1, y_2, ..., y_n en j, die de waarde van de functie $f_j(x,y\ ,y\ ,\dots,y_n)$ levert.

De gebruikte methode is een Runge Kutta methode met zelfzoekend interval. Veronderstel dat de integratie gevorderd is tot aan het punt x_0. Dan wordt een intervallengte h bepaald. Vervolgens worden de waarden $y_j(x_0+h)$, $z_j(x_0+h)$ berekend. Als de geschatte fout in de waarden van $y_j(x_0+h)$ en $z_j(x_0+h)$ kleiner zijn dan de in het array e opgegeven toleranties, dan worden de staplengte h en de berekende functiewaarden geaccepteerd, zo niet dan wordt de staplengte h verkleind.
Na iedere geaccepteerde stap wordt de baan geplot, de stapgrootte wordt gemarkeerd door een + teken in de grafiek.

In het programma moeten opgenomen zijn de declaraties van de library procedures PLOTTEN en MARKEDCURVE. Deze laatste procedure wordt door RK3nPLOT gebruikt om door de berekende punten een continue kromme met markeringen te trekken.

Opmerking. De declaratie van de procedure RK3nPLOT is op een band aanwezig bij het rekencentrum. In het programma kan volstaan worden met de aanduiding {RK3nPLOT} op de plaats van de declaratie. De declaratie van de plotprocedures dient als volgt te geschieden:

library PLOTTEN, MARKEDCURVE;

De aanroep van de procedures PLOTCURVE en MARKEDCURVE is respectievelijk:

PLOTCURVE(X,Y,I) en MARKEDCURVE(X,Y,I).

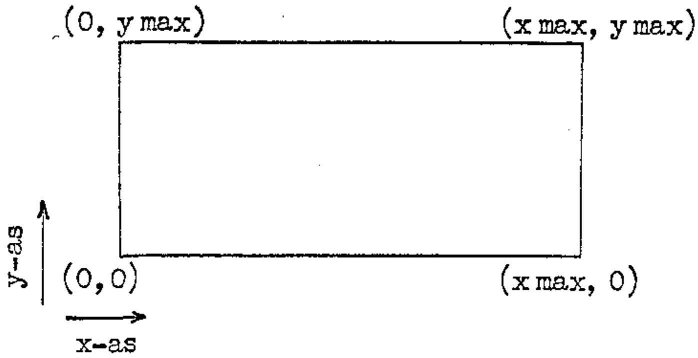
De betekenis der actuele parameters is de volgende:

< real > X, Y zijn de coördinaten van een punt van de te tekenen kromme.
< integer > I kan de volgende waarden aannemen:

I = 1 Initialisatie van de procedure. De waarden van X en Y zijn irrelevant.
I = 2 Het punt (X,Y) wordt toegevoegd aan de rij punten waardoor de kromme loopt. Het aantal punten op een kromme moet minstens 3 zijn.
I = 3 Beëindiging van de kromme. De waarden van X en Y zijn irrelevant.

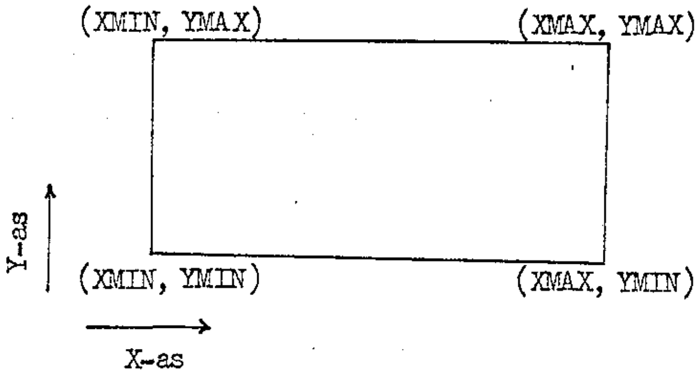
Gebruiksaanwijzing van de plotter.

Alvorens te kunnen plotten, is het noodzakelijk om een verband vast te leggen tussen de werkelijk berekende grootheden, de "data units", en de te plotten grootheden, de "plotter units".
Hierna zullen we hoofdletters gebruiken voor data units en kleine letters voor plotter units.
We denken ons een rechthoek op het papier in plotter units. Eén plotter unit komt overeen met 0.1 mm.



x max > 0, 0 < y max < 2750.

De overeenkomstige rechthoek vastgelegd in data units is:



Het verband tussen beide rechthoeken kunnen we bepalen met behulp van schaalfactoren in de x- en de y-richting.
Het verband tussen XMIN, YMIN, XMAX, YMAX en xmax, ymax moet worden opgegeven door middel van een aanroep van de procedure PLOTFRAME (XMIN,YMIN,XMAX, YMAX,xmax,ymax).
Voor het verkrijgen van uniforme grafieken wordt de aanroep

PLOTFRAME(-3,-1.375,4,1.375,7000,2750)

aanbevolen.

Om een complete grafiek te krijgen van aarde, maan en satellietbaan worden de omtrekken van de aarde en de maan geplot als cirkels met straal Ra respectievelijk Rm.
Hieronder volgt een voorbeeld om een cirkel met middelpunt (A,B) en straal R te plotten (A, B en R in data units).

```
PLOTCURVE(0,0,1);
for k := 0 step 1 until 8 do
PLOTCURVE(A+R × cos(k × 3.14159265359/4), B+R × sin(k × 3.14159265359/4), 2);
PLOTCURVE(0,0,3);
```

De satellietbaan moet voortijdig worden beëindigd als

óf het punt (x,y) buiten een bepaald gebied komt (bv. het gebied van het frame $-3 \leq x \leq 4$, $|y| \leq 1.375$).

óf het punt (x,y) binnen de aard- of maanschijf komt ($x^2 + y^2 < 0.999 \times Ra^2$ c.q. $(x-1)^2 + y^2 < Rm^2$).

Men kan de beëindiging het eenvoudigst realiseren door de expressie fxyj te schrijven als procedure, waarbinnen getest wordt of aan de beëindigingsvoorwaarden voldaan wordt (in welk geval naar een label ná de statement van RK3nPLOT gesprongen wordt).

Opmerking. De factor 0.999 is opgenomen om bij de start te voorkomen dat ten gevolge van afrondingsfouten de satelliet niet van de grond zou komen.

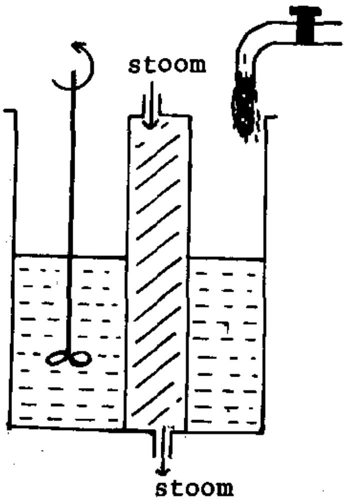
Invoergegevens

$Ra = 0.2$
$Rm = 0.05$
$\gamma = 0.25$
$hsug = 0.1$
$a = 0$
$b = 20$
$e[j] = 10^{-4}$ of 10^{-5}, $j = 1,2,\ldots,8$
$2.5 \leq v \leq 3.5$.
De waarden van φ en ψ dienen zelf gekozen te worden.

Opmerking. De computertijd voor het berekenen van één satellietbaan wordt geschat op 30 sec.

5. Het meten van een warmteoverdrachtscoëfficiënt

A. Probleemstelling.



In een cylindervormig vat bevindt zich een roerder en een verwarmingselement. Via een kraan laat men vanaf het tijdstip $t = 0$ water in het vat lopen. Door het verwarmingselement voert men oververhitte stoom. Hierdoor wordt het water verwarmd.
Met de roerder wordt het water in het vat overal op dezelfde temperatuur gehouden. Door de temperatuur van het water te meten als het vat vol is, kunnen we de warmteoverdrachtscoëfficiënt van het verwarmingselement berekenen.

Gebruikte symbolen	Eenheden
t := tijd	sec
A_0 := totale oppervlakte van het verwarmingselement	m^2
$A(t)$:= momentane oppervlakte van het verwarmingselement onder het wateroppervlak	m^2
V_0 := volume van het water in het volle vat	m^3
$V(t)$:= momentane volume van het water in het vat	m^3
T_w := temperatuur van het in het vat stromende water	^oC
$T(t)$:= momentane temperatuur van het water in het vat	^oC
T_e := temperatuur van het water als het vat vol is	^oC
T_s := temperatuur van de stoom	^oC
C := warmtecapaciteit van het water	Joule/(kg ^oC)
v := instroomsnelheid van het water	m^3/sec
ρ := dichtheid van het water	kg/m^3
U := warmteoverdrachtscoëfficiënt van het verwarmingselement	Joule/(m^2 sec ^oC)

B. Wiskundig model.

We maken de volgende vereenvoudigende veronderstellingen:

(i) T_s, C, v, ρ en U constant;

(ii) geen warmteuitwisseling met de omgeving via de wand van het vat en via het wateroppervlak;

(iii) ideale roering, d.w.z. de temperatuur van het water in het vat is overal dezelfde.

De temperatuur van het water wordt nu beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\left.\begin{array}{l} \rho Cv(T - T_w) + \rho Cvt \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{UvtA_0}{V_0}(T_s - T) \\ \text{met de beginvoorwaarde } T(0) = T_w . \end{array}\right\} \tag{1}$$

Door een eenvoudige transformatie is (1) te herleiden tot

$$\text{met} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{d\tau}(\tau\theta) = \tau(1 - \theta) \\ \\ \theta(0) \text{ begrensd} \\ \quad (\text{i.c. } \theta(0) = 0). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Vragen

1. Leid (1) af uit de behoudswet:

$$\left[\begin{array}{l}\text{de door het water opgeno-}\\ \text{men warmte in tijd } dt\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{de door het verwarmingselement}\\ \text{afgestane warmte in tijd } dt\end{array}\right].$$

2. Ga na door welke transformatie (1) overgaat in (2).
   Welke essentiële grootheden bevat het probleem dus en stellen deze fysisch iets voor?

3. Los de differentiaalvergelijking (2) op.
   Bewijs dat de warmteoverdrachtscoëfficiënt U volgt uit

$$U = \frac{\rho Cv}{A_0} \tau_e , \tag{3}$$

waarbij τ_e de van nul verschillende oplossing is van

$$e^{-x} + \lambda x - 1 = 0 , \quad \text{met } \lambda = \frac{T_s - T_e}{T_s - T_w} . \tag{4}$$

C. De methode der successieve substitutie.

Als een vergelijking geschreven is in de vorm

$$x = f(x),$$

dan wordt met de methode van de successieve substitutie een rij benaderingen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ voor een oplossing α als volgt verkregen.
Kies een beginschatting, noem deze x_0. Bereken achtereenvolgens $x_1, x_2, \ldots$ met de iteratieformule

$$x_n := f(x_{n-1}) \ . \tag{5}$$

Schrijf een procedure, die, bij gegeven x_0, de volgende tabel berekent en print:

$$\begin{array}{llll}
x_0 & & & \\
x_1 & \Delta x_0 & & \\
x_2 & \Delta x_1 & \Delta x_1/\Delta x_0 & y_2 := x_2 + \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_0/\Delta x_1 - 1} \\
x_3 & \Delta x_2 & \Delta x_2/\Delta x_1 & y_3 := x_3 + \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1/\Delta x_2 - 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_n & \Delta x_{n-1} & \Delta x_{n-1}/\Delta x_{n-2} & y_n := x_n + \dfrac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}/\Delta x_{n-1} - 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{6}$$

Beëindig het proces als

$$n \geq nmax \ \vee \ \left|\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}/\Delta x_{n-1} - 1}\right| < ae + re \times |x_n| \ . \tag{7}$$

Gebruik de volgende procedure heading:

```
procedure sucsub(x, fx, x0, ae, re, nmax);
value x0, ae, re, nmax; integer nmax;
real x, fx, x0, ae, re;
```

Vragen

1. Veronderstel dat de rij $\{x_n\}$ convergeert naar α. Wat is dan de limietwaarde van de rij $\{\Delta x_{n+1}/\Delta x_n\}$?

2. Als $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$, dan geldt de volgende formule

ook uitzoeken het geval $f'(\alpha)=1$

$$y_{n+2} - \alpha = \frac{f'(\alpha)\ \ f''(\alpha)}{2(f'(\alpha) - 1)} (x_n - \alpha)^2 + O(|x_n - \alpha|^3) . \tag{8}$$

(De afleiding van deze formule behoeft niet te worden gegeven.)

a) Als de rij $\{x_n\}$ lineair convergeert met convergentiefactor A, wat is dan de convergentieorde en de convergentiefactor van de rij $\{y_n\}$.
Waarom heeft het toepassen van het Δ^2-proces van Aitken in dit geval zin.

b) Als de rij $\{x_n\}$ kwadratisch convergeert dan is $f'(\alpha) = 0$ en $f''(\alpha) \neq 0$ en dan geldt de formule

$$y_{n+2} - \alpha = -\frac{1}{4}(f''(\alpha))^2 (x_n - \alpha)^3 + O(|x_n-\alpha|^4). \tag{9}$$

Laat met behulp van formule (9) zien dat in dit geval het Δ^2-proces van Aitken, d.i. de laatste kolom van (6), slechtere resultaten geeft dan de eerste kolom van (6).

3. Bewijs dat y_n kan worden opgevat als het snijpunt van de rechte $y = x$ met de rechte door de punten $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ en $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.
Laat met behulp van een plaatje zien dat het toepassen van het Δ^2-proces van Aitken gevaarlijk is als geldt $f'(x) \approx 1$, voor x in de buurt van α.
Ga na dat dit eveneens volgt uit formule (8).

4. Geef een interpretatie van de beëindigingstest (7).

D. Numerieke verwerking; analyse van het verkregen getallenmateriaal.

Er zijn twee voor de hand liggende manieren om (4) in de vorm $x = f(x)$ te schrijven:

(i) $$x = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-x}) ,$$

dit leidt tot de iteratieformule

$$x_{n+1} := \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-x_n}) ; \tag{10}$$

(ii) uit $e^{-x} = 1 - \lambda x$ volgt

$$x = -\log(1 - \lambda x) ,$$

dit leidt tot de iteratieformule

$$x_{n+1} := -\log(1 - \lambda x_n) . \qquad (11)$$

Zij nu het volgende gegeven:

$A_0 = 0.4501\ m^2$, $V_0 = 0.638\ m^3$, $T_w = 20^oC$, $T_e = 41^oC$, $T_s = 105^oC$,

$C = 4180$ Joule/(kg ^oC), $v = 0.107_{10}{-3}\ m^3/sec$, $\rho = 1000\ kg/m^3$.

Schrijf een programma voor de berekening van U.
Maak hierbij gebruik van de procedure sucsub voor het oplossen van (4).
Gebruik de iteratieformules (10) en (11).
Kies in beide gevallen ca 4 waarden voor x_0.
Bedenk ook in beide gevallen geschikte waarden voor nmax, ae en re.

Vragen.

1. Bewijs de volgende uitspraken.
   a) Vergelijking (4) heeft voor iedere $\lambda > 0$ precies twee wortels. Noem deze wortels α_1 en α_2.
   b) $\alpha_1 = 0$.
   c) $\alpha_2 > 0$ als $0 < \lambda < 1$,
      $\alpha_2 = 0$ als $\lambda = 1$,
      $\alpha_2 < 0$ als $\lambda > 1$.
2. Bewijs dat voor de gegeven waarde van λ het volgende geldt.
   a) In geval van de iteratieformule (10)
      - voor alle $x_0 > 0$ convergeert de rij $\{x_n\}$ naar de gezochte(positieve) wortel α_2 van (4)
      - voor alle $x_0 < 0$ divergeert de rij $\{x_n\}$.
   b) In geval van de iteratieformule (11) convergeert de rij $\{x_n\}$ voor geen enkele waarde van $x_0 \neq \alpha_2$ naar α_2.

   Wat is de samenhang tussen de rijen $\{x_n\}$ verkregen met (10) en de rijen $\{x_n\}$ verkregen met (11).

3. Verifieer de numerieke resultaten aan de hand van de antwoorden op bovenstaande vraag D2 en vraag C1.

4. Ga met behulp van de output na hoe de rij $\{y_n\}$ convergeert en vergelijk Uw antwoord met het antwoord op vraag C2.
   Bedenk een methode om de convergentie van de rij $\{y_n\}$ te versnellen en voer deze uit in een enkel geval.

5. Ga na wat de maximaal haalbare nauwkeurigheid is voor U, als we aannemen dat alle gegevens in het opgegeven aantal cijfers nauwkeurig zijn.
   Gebruik daarbij het volgende.

   Zij x oplossing van $g(x,a) = 0$, dan is $x = f(a)$.
   Als a met een bedrag δa verandert, dan verandert x met δx en er geldt bij benadering

   $$\delta x = f'(a)\ \delta a$$

   ofwel

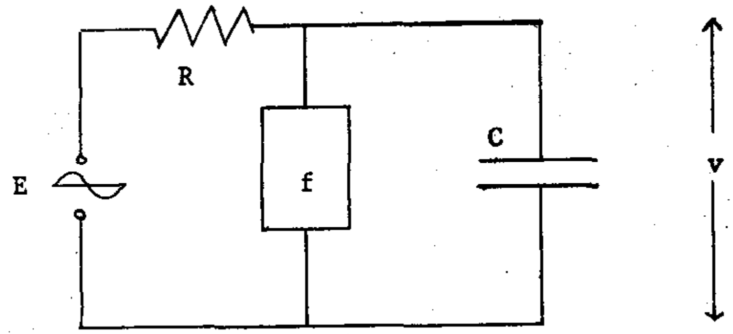
   $$\delta x = -\left(\frac{\partial g}{\partial a}\Big/\frac{\partial g}{\partial x}\right)\ \delta a.$$

   Wat zijn op grond hiervan geschikte waarden voor ae en re?

6*. Neem het geval $\lambda = 1$.
   Draai Uw programma met een positieve en een negatieve x_0.
   Geef een interpretatie van Uw resultaten aan de hand van de antwoorden op vraag C3 en vraag D1.

7*. Modificeer het successieve substitutieproces als volgt.
   In de eerste slag.
   Kies een beginschatting x_0.
   Bepaal x_1 en x_2 met de iteratieformule (5) en vervolgens y_2 met behulp van (6).
   Algemeen in de n-de slag, $n \geq 2$.
   Neem $x_{n-1} := y_n$. Bepaal x_n en x_{n+1} met (5) en vervolgens y_{n+1} met (6).
   Ga experimenteel na hoe snel de aldus verkregen rij $\{y_n\}$ convergeert.

20. We beschouwen het elektrische netwerk:



Hierin is E een spanningsbron, waarvan het verloop gegeven wordt door E(t), R een Ohmse weerstand, C een condensator en f een niet lineair element met (v,i)-karakteristiek $i = f(v)$, waarbij $f(0) = 0$.
Zij $v = v(t)$ de spanning over de condensator.
Als gegeven is dat v(t) ten tijde $t = 0$ gelijk is aan v_0, dan wordt gevraagd v(t) voor $t \geq 0$ te bepalen. (We nemen aan dat E(t), R, f(v) en C gegeven zijn.)
v(t) is de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} RC \frac{dv}{dt} &= E(t) - v - Rf(v) \ , \quad t > 0 \\ v(0) &= v_0 \qquad\qquad\qquad\quad , \quad t = 0 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

A. Als f een niet lineaire functie is, is het in het algemeen niet mogelijk om het beginwaardeprobleem (1) analytisch op te lossen. Het alternatief is dan om v(t) numeriek te benaderen op tijden $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$.
Stel dat $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 0,1,2,\ldots$.
Een eerste probleem is hoe groot Δt gekozen moet worden. Opdat de oplossing gedetailleerd genoeg wordt weergegeven, zal Δt een fractie moeten zijn van een tijdsinterval, waarin v "essentieel" verandert (een essentiële verandering van v noemen we bijv. een afname met 50%).
Om een waarde voor Δt te bepalen beschouwen we het gelineariseerde beginwaardeprobleem:

$$\begin{aligned} RC \frac{dv}{dt} &= E(t) - v - (v - v_0)Rf'(v_0) \ , \quad t > 0 \\ v(0) &= v_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \quad t = 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

We nemen aan dat een geschikte Δt voor het probleem (2) ook een geschikte Δt voor het probleem (1) is.

Vragen.

1. Leid de differentiaalvergelijking in (1) af door de wetten van Kirchhoff toe te passen.

2. Laat zien dat de oplossing van (2) gegeven wordt door

$$v(t) = \frac{1}{RC}\left[\int_0^t E(\tau)\exp\left(\frac{\tau - t}{t_s}\right)d\tau + v_0 t_s\left(Rf'(v_0) + \exp\left(\frac{-t}{t_s}\right)\right)\right] \tag{3}$$

met

$$t_s := \frac{RC}{1 + Rf'(v_0)} . \tag{4}$$

We definiëren t_s als de karakteristieke tijd van (1).

3. *Wat is de fysische betekenis van* t_s ?
   Ga daartoe na wat er met $v(t)$ uit (3) gebeurt in een tijdsinterval t_s, als vanaf $t = t_0$ geldt dat $E(t) = 0$.

4. Motiveer waarom Δt een fractie moet zijn van t_s.

De gemeten (v,i)-karakteristiek van f is aangepast aan de formule

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{w}{2r}\left(1 + \frac{v}{w} - e^{-\frac{v}{w}}\right), \quad v \geq 0 \\ f(v) &= -f(-v) \quad\quad\quad\quad\quad\;\;, \quad v < 0 . \end{aligned} \tag{5}$$

v en w hebben de dimensie van spanning, r de dimensie van een weerstand. Kleinste kwadraten aanpassing gaf $w = 1$ Volt en $r = 1000\ \Omega$.
Verder is gegeven dat

$$\begin{aligned} R &= 1000\ \Omega \\ C &= 2.10^{-6} F \\ v_0 &= 0\ V \\ E(t) &= E_0 \sin \omega t\ V \\ E_0 &= 1.8\ V \\ \omega &= 1000\,\pi \sec^{-1} . \end{aligned}$$

5. Ga na wat een geschikte Δt is als de frequentie van de wisselspanning 100 keer zo groot gemaakt wordt.

6. Transformeer (2) in een zo eenvoudig mogelijke dimensieloze gedaante met behulp van een transformatie

$$v = \alpha \cdot u \ , \quad t = \beta \cdot s \ . \tag{6}$$

Geef een fysische interpretatie van α en β.

7. Transformeer (1) in een zo eenvoudig mogelijke dimensieloze gedaante met behulp van een transformatie als (6). Wat betekenen α en β fysisch?

B. Voor het numeriek oplossen van het getransformeerde beginwaardeprobleem uit A7 kunnen we als volgt te werk gaan.
Beschouw

$$\begin{aligned} y' &= F(x,y) \ , \quad x > x_0 \\ y(x_0) &= y_0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

We willen y benaderen in punten $x_0, x_1, \ldots$ met $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0,1,2,\ldots$. Hiervoor kiezen we de volgende tweede orde Runge-Kutta methode (z_n is de benadering voor $y(x_n)$):

$$\begin{aligned} z_0 &:= y_0 \\ k_1 &:= hF(x_n, z_n) \\ k_2 &:= hF(x_{n+1}, z_n + k_1) \\ z_{n+1} &:= z_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \ , \quad n \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

<u>Vragen</u>.

1. Teken een plaatje waaruit blijkt hoe, uitgaande van z_n, de waarde van z_{n+1} wordt verkregen.

2. Schrijf een procedure

RUNGE KUTTA $(x,y,Fxy,h,x_0,y_0,xmax,k)$

die bij gegeven beginvoorwaarde (x_0, y_0) en gegeven stapgrootte h de waarden van $z_1, z_2, \ldots, z_m$ met

$$m := \text{entier}((xmax - x_0)/h + 0.5) \tag{9}$$

berekent en bij gegeven k de volgende tabel print

0	x_0	z_0
k	x_k	z_k
2k	x_{2k}	z_{2k}
.	.	.
.	.	.

3. Bewijs dat voor de m uit (9) geldt:

$$|(x_0 - x_{max}) - mh| \leq \tfrac{1}{2}h \;.$$

Hoe kunt U de waarde van m in algol op een eenvoudige manier laten berekenen?

4. Schrijf een programma voor het oplossen van het getransformeerde beginwaardeprobleem uit A7 met behulp van de procedure RUNGE KUTTA.
Bereken vervolgens benaderingen voor v op het interval $0 \leq t \leq 2t_s$ in de punten

$$n \times \frac{t_s}{4}\,, \quad n = 1,2,\ldots,8 \;.$$

Doe dit voor verschillende waarden van de stapgrootte Δt:

$$\Delta t = \frac{t_s}{N}\,, \quad N = 4,8,16,32,64 \;.$$

Voor de <u>globale afbreekfout</u> $e(x_n,h)$ in een <u>vast</u> punt $x_n = x_0 + nh$ geldt:

$$e(x_n,h) = h^2 w(x_n) + O(h^p)\,, \quad h \to 0 \tag{10}$$

(vgl. collegesyllabus opm. 4, pag. 79). waarbij p een geheel getal > 2 is.

5. Verifieer met behulp van de output van Uw programma dat $e(x_n,h)$ aan een formule van de gedaante (10) voldoet.
Bereken de waarde van p en bereken door middel van extrapolatie een zo nauwkeurig mogelijke benadering voor $y(x_n)$.
Wat kunt U over de fout in deze benadering zeggen?

6. Maak zelf een eenvoudige discretisatie van de differentiaalvergelijking en controleer daarmee de gevonden oplossing.

7. De differentiaalvergelijking

$$y' = F(x,y) \;, \quad -\infty < x < \infty$$

waarin F een periodieke functie is in x met periode p, heeft onder bepaalde condities voor F een eenduidig bepaalde periodieke oplossing $Y(x)$.
Formuleer het randwaardeprobleem dat de periodieke oplossing bepaalt.
Zij $Z(h,x_j,0,z_0)$ de met behulp van de procedure RUNGE KUTTA verkregen benadering voor de oplossing van

$$y' = F(x,y)$$
$$y(0) = z_0 \;.$$

Onder welke voorwaarde voor z_0 is $Z(h,x_j,0,z_0)$ een benadering voor $Y(x_j)$?
Beschrijf een algoritme om een benadering voor $Y(x)$ te berekenen.
Schrijf een programma om bij de gegevens van pag. 2 en 3 de periodieke oplossing te berekenen met een voorgeschreven nauwkeurigheid ε. Probeer de orde van de globale fout vast te stellen en eventueel te extrapoleren.
Draai Uw programma ook met $\omega = 10\pi$ en $\omega = 10^5\pi$ en beschrijf Uw bevindingen.