TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

# MATRIXTHEORIE

**Syllabus naar het college van**

**Prof. Dr. G.W. Veltkamp**

**Vervaardigd door**

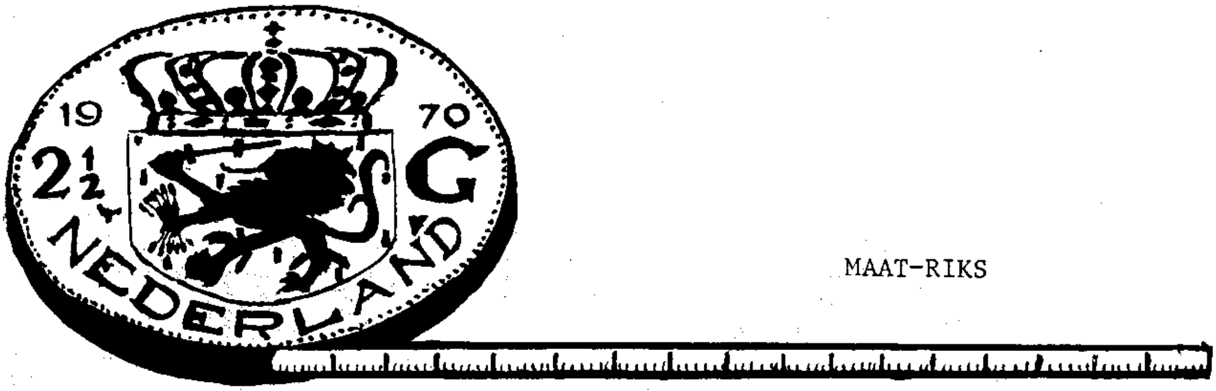
**Jo Bollen**
**Willem Haemers**
**Frans Vervoordeldonk**

**1972**

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der wiskunde

# MATRIXTHEORIE



MAAT-RIKS

Syllabus naar het college van prof. dr. G.W.Veltkamp

Vervaardigd door Jo Bollen
Willem Haemers
Frans Vervoordeldonk

1972

Inhoud

Inhoud (vervolg)

Inhoud (vervolg)

# 0. Studiehulp

## 0.1 Notaties

Matrices geven we aan met gedrukte hoofdletters, de elementen worden aangegeven door corresponderende kleine letters. Geschreven hoofdletters worden gebruikt voor lineaire afbeeldingen.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{M}_{m,m}(V)$ | Verzameling van alle m×n-matrices over een verzameling V | (1.1) |
| $\mathcal{M}^{r}_{m,n}(V)$ | Verzameling van alle m×n-matrices over V met rang r | (3.4) |
| $\mathcal{M}_{m,n}$ | Idem als boven als uit de context duidelijk is wat V moet zijn | (1.1) |
| $\mathcal{M}^{r}_{m,n}$ | | (3.4) |
| $(A)_{ij}$ | Het element van A in rij i en kolom j | (1.1) |
| $A_{ij}$ | Het ij-de blok van een gepartitioneerde matrix A | (1.2) |
| $(\alpha_{ij})$ | De matrix met elementen $\alpha_{ij}$, waarbij i loopt van 1 tot m, en j van 1 tot n | (1.1) |
| $A^{T}$ | De getransponeerde matrix van A | (1.3) |
| $A^{H}$ | De hermitisch geconjungeerde matrix van A | (1.3) |
| $A^{-1}$ | De inverse matrix van A | (1.4) |
| $A^{+}$ | Een gegeneraliseerde inverse van A | (4.3) |
| $P_A$ | $AA^{+}$ | (4.3) |
| $P'_A$ | $A^{+}A$ | (4.3) |
| I | Een eenheidsmatrix, d.w.z. $I = (\delta_{ij})$ | (1.1) |
| $I_n$ | De n×n-eenheidsmatrix | (1.4) |
| 0 | De nulmatrix, of het getal nul. Daar waar verwarring mogelijk is hebben we voor het getal nul o gebruikt | (1.1) |
| r(A) | De rang van de matrix A | (3.4) |
| det(A) | De determinant van de matrix A | (15.5) |
| $\sigma(A)$ | Het spectrum van A, aftewel de verzameling der eigenwaarden van A | (12.2) |
| $\lVert A \rVert$ | De norm van A | (9.3) |

| | | |
|---|---|---|
| $R(A)$ | De rang van de matrix A | (4.3) |
| $N(A)$ | De nulruimte van de matrix A | (4.3) |
| $R(\mathcal{A})$ | De rang van de afbeelding $\mathcal{A}$ | (5.2) |
| $N(\mathcal{A})$ | De nulruimte van de afbeelding $\mathcal{A}$ | (5.2) |
| $\mathcal{V}$ | Een vectorruimte | (5.1) |
| $\mathcal{L}$ | Een lichaam | (5.1) |
| $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ | Het cartesisch produkt van $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ | (5.1) |
| $\mathcal{A}: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ | Een lineaire afbeelding van $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ | (5.1) |
| $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ | $\{x \mid \exists x_1 \in \mathcal{V}_1 \ \exists x_2 \in \mathcal{V}_2 : x = x_1 + x_2\}$ | (15.1) |
| $A\mathcal{V}$ | $\{x \mid \exists y \in \mathcal{V}: Ay = x\}$ | (13.1) |
| $\mathcal{V}_A$ | Het lineair opspansel van de kolommen van de matrix A | (5.3) |
| $\dim(\mathcal{V})$ | De dimensie van $\mathcal{V}$ | (5.3) |
| $\mathcal{V}^{\perp}$ | Het orthogonale complement van $\mathcal{V}$ | (7.1) |
| $[\mathcal{V}_1 \ldots \mathcal{V}_n]$ | $\mathcal{V}_1 + \ldots + \mathcal{V}_n$ | (14.3) |
| $[\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_n]$ | Het lineaire opspansel van de vectoren $\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_n$ | (5.1) |
| $\underline{u} \perp \underline{v}$ | $\underline{u}$ en $\underline{v}$ zijn orthogonaal | (7.1) |
| $(\underline{u},\underline{v})$ | Een inwendig produkt van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ | (7.1) |
| $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ | idem | (7.3) |
| $\underline{e}_k$ | Eenheidsvector met de 1 op de $k^e$ plaats | (5.3) |
| $\mathcal{A}^*$ | De geadjungeerde van de afbeelding $\mathcal{A}$ | (7.2) |
| $\mathcal{P}$ | Een orthogonale projector | (7.2) |
| $\phi(\underline{x},\underline{y})$ | Hermitische bilineaire vorm | (10.4) |
| $F(\underline{x})$ | Hermitische kwadratische vorm | (10.4) |
| $p_o$ | Minimaal polynoom | (12.2) |
| $\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ | De $n \times n$-matrix met op de diagonaal $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ en de rest nul | (10.3) |
| $\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_n)$ | De gepartitioneerde matrix, waarvan de blokken op de diagonaal $A_1,\ldots,A_n$ zijn, en alle overige blokken nul zijn | (13.1) |

| | | |
|---|---|---|
| $e^{tA}$ | $\sum_{\ell=o}^{\infty} \frac{t^{\ell}}{\ell!} A^{\ell}$ | (16.2) |
| LR | Linksregulier | (1.4) |
| RR | Rechtsregulier | (1.4) |
| RI | Rechtsinverteerbaar | (1.4) |
| LI | Linksinverteerbaar | (1.4) |
| pd | Positief definiet | (10.2) |
| psd | Positief semi definiet | (10.2) |
| $\mathbb{N}$ | De verzameling der natuurlijke getallen | |
| $\mathbb{Z}$ | De verzameling der gehele getallen | |
| $\mathbb{Q}$ | De verzameling der rationele getallen | |
| $\mathbb{R}$ | De verzameling der reële getallen | |
| $\mathbb{C}$ | De verzameling der complexe getallen | |
| $\delta_{ij}$ | $\begin{cases} o \text{ als } i \neq j \\ 1 \text{ als } i = j \end{cases}$ | |
| min(m,n) | minimum van m en n. | |

## 0.2 Literatuurlijst


1. Bellman, R. — Introduction to matrix analysis, New York 1960
   New York, McGraw-Hill, 1960

2. Faddeev, D.K.
   Faddeeva, V.N. — Computational methods of linear algebra, vertaald uit het Russisch,
   San Francisco, Freemann, 1963

3. Gantmacher, F.R. — Matrizenrechnung, 2 delen, vertaald uit het Russisch,
   Berlin, Deutscher Verlag der Wissensch., 1958

4. Halmos, P.R. — Finite dimensional vector spaces,
   Princeton, Van Nostrand, 1958

5. Householder, A.S. — The theory of matrices in numerical analysis,
   New York, Blaisdell, a div of Ginn, 1964

6. Marcus, M.
   Minck, H. — A survey of matrix theory and matrix inequalities,
   Boston, Allyn and Bacon, 1964

7. Noble, B. — Applied linear algebra,
   Englewood Cliffs, Prentice-Hal, 1969

8. Wilkinson, J.H. — The algebraic eigenvalueproblem,
   Oxford, Clarendon, 1965

9. Zurmühl, R. — Matrizen und ihre technischen Anwendungen,
   4. Auflage,
   Berlin, Springer, 1964.

Hoofdstuk I. Algemene zaken (rang, inversie)

## 1. Inleiding

### 1.1. Definitie van een matrix

Zij V een verzameling en $m,n \in \mathbb{N}$, dan is een $m \times n$-matrix A over V een afbeelding van $\{1,\ldots,i,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,j,\ldots,n\}$ in V:

$$(i,j) \to \alpha_{ij} \in V \;, \quad 1 \le i \le m \quad \text{en} \quad 1 \le j \le n$$

genoteerd als

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}) \;.$$

We schrijven ook $\alpha_{ij} = (A)_{ij}$.

N.B. We nemen voor V steeds een commutatieve ring met eenheidselement (bv. $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{C}$, polynomen).
Vaak zal V zelfs een lichaam zijn (bv. Q, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Voorlopig is V een commutatieve ring met eenheidselement.

$\mathfrak{M}_{m,n}(V)$ is de verzameling van alle $m \times n$-matrices over V.

Definities.

1. Als $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ en $B \in \mathfrak{M}_{m,n}$ dan definiëren we $A + B \in \mathfrak{M}_{m,n}$ d.m.v.

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \;. \qquad (1.1.1)$$

Eigenschappen.

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$\forall_{A \in \mathfrak{M}_{m,n}} \exists_{(-A) \in \mathfrak{M}_{m,n}} [A + (-A) = 0] \;.$$

Hierin is 0 de nul-matrix, $(0)_{ij} = 0$.

Dus $\mathfrak{M}_{m,n}(V)$ vormt een commutatieve groep t.o.v. de optelling.

2. Als $\alpha \in V$ en $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(V)$ is $\alpha A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ gedefinieerd door:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij} \ . \tag{1.1.2}$$

Eigenschappen.

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$1.A = A$$

$$-1.A = -A$$

$$o.A = 0$$

$$\alpha.0 = 0 \ .$$

Dus $\mathfrak{M}_{m,n}(V)$ is een vectorruimte t.o.v. optelling en vermenigvuldiging met scalairen.

3. Als $A \in \mathfrak{M}_{m,k}$ en $B \in \mathfrak{M}_{k,n}$ is $AB \in \mathfrak{M}_{m,n}$ gedefinieerd door:

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} (A)_{i\ell}(B)_{\ell j} \ . \tag{1.1.3}$$

Eigenschappen.

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB)$$

$$0.A = A.0 = 0$$

$$A.I = I.A = A \quad \text{(als A vierkant is)}$$

i.h.a.

$$AB \neq BA \ .$$

Hierin is I de identieke matrix: $(I)_{ij} = \delta_{ij}$.

Dus $\mathfrak{M}_{m,n}(V)$ is een niet-commutatieve ring met eenheidselement t.o.v. optelling en vermenigvuldiging.

Opmerking. Ook als V een lichaam is, is $\mathfrak{M}_{m,n}(V)$ nog niet altijd een lichaam. Immers

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

terwijl een stelling uit A & A zegt: Als a en b elementen zijn uit een lichaam, $a \neq 0$ en $ab = 0$ dan $b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$.

## 1.2. Partitioneren van matrices

Definitie. Zij voor $p = 1,\dots,M$; $q = 1,\dots,N$, $A_{pq} \in \mathfrak{M}_{m_p,n_q}$ en zij $m = \sum_{p=1}^{M} m_p$ en $n = \sum_{q=1}^{N} n_q$ dan definiëren we $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ door $(A)_{ij} = (A_{pq})_{k\ell}$ als

$$\left.\begin{aligned} i &= \sum_{s=1}^{p-1} m_s + k\,, \quad 1 \le k \le m_p \\ j &= \sum_{s=1}^{q-1} n_s + \ell\,, \quad 1 \le \ell \le n_q \end{aligned}\right. \tag{1.2.1}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \hline \vdots & \boxed{A_{pq}} & \vdots \\ \hline A_{M1} & \cdots & A_{MN} \end{array}\right) = (A_{pq})\,.$$

Eigenschappen.

- Zij A gepartitioneerd in matrices $A_{pq}$ : $A = (A_{pq})$ dan geldt:

$$\alpha A = (\alpha A_{pq})\,. \tag{1.2.2}$$

- Als A en B dezelfde afmetingen hebben en gelijk gepartitioneerd zijn dan:

$$A = (A_{pq}) \text{ en } B = (B_{pq}) \Rightarrow A + B = (A_{pq} + B_{pq})\,. \tag{1.2.3}$$

- Laat

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1K} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{M1} & \cdots & A_{MK} \end{array}\right) \qquad \text{en} \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1N} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{K1} & \cdots & B_{KN} \end{array}\right)$$

met $A_{pq} : m_p \times k_q$ en $B_{qr} : k_q \times n_r$ en $C := AB$ dan

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline C_{M1} & \cdots & C_{MN} \end{array}\right)$$

met

$$C_{pq} = \sum_{r=1}^{K} \underbrace{A_{pr}}_{m_p \times k_r} \underbrace{B_{rq}}_{k_r \times n_q} \tag{1.2.4}$$

Bijzondere gevallen.

a) Alle blokken $1 \times 1$ : $A_{pq} = (\alpha_{pq})$

b) Alle blokken $m \times 1$ : $(A_1 | \;\; | \;\; | A_n)$

c) Alle blokken $1 \times n$ :

$$\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline A_m \end{array}\right)$$

d) Als $A = (A_1 | \quad \cdots \quad | A_k) \updownarrow m$ en

$$B = \underbrace{\left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline \cdot \\ \hline B_K \end{array}\right)}_{n}$$

AB gedefinieerd is en de blokafmetingen passen dan

$$AB = \sum_{r=1}^{K} A_r . B_r \; .$$

Als m = n dan

$$BA = \left(\begin{array}{c|c|c} B_1A_1 & \cdots & B_1A_K \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_KA_1 & \cdots & B_KA_K \end{array}\right) .$$

## 1.3a. Transponeren van een matrix

Definitie. Het transponeren van een matrix A is een afbeelding $A \to A^T$ van $\mathfrak{M}_{m,n}$ op $\mathfrak{M}_{n,m}$ waarbij

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} . \qquad (1.3.1)$$

Eigenschappen.

$$(A^T)^T = A$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

## 1.3b. Hermitisch conjugeren van een matrix

Definitie. Als $V = \mathbb{C}$ dan is de hermitisch geconjugeerde van een matrix A een afbeelding $A \to A^H$ van $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ op $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ zodat:

$$(A^H)_{i,j} = \overline{(A)_{j,i}} . \qquad (1.3.2)$$

Eigenschappen.

$$(A^H)^H = A$$

$$(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$$

$$(A + B)^H = A^H + B^H$$

$$(AB)^H = B^H A^H .$$

## 1.4. Regulariteit en inverteerbaarheid

Definities.

1. $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ heet rechts regulier (RR) als

$$\forall_{X \in \mathcal{M}_{m,k}} [AX = 0 \Rightarrow X = 0] . \tag{1.4.1}$$

Analoog links regulier (LR).

2. A heet links inverteerbaar (LI) als er een $Y \in \mathcal{M}_{n,m}$ bestaat z.d.d. $YA = I_{n \times n}$; Y heet linker inverse van A. (1.4.2)
Analoog rechts inverteerbaar (RI).
3. A heet regulier als A is RR en LR.
A heet inverteerbaar als A is RI en LI.
Z heet inverse van A als Z linker inverse en rechter inverse van A is. (1.4.3)

Stellingen.

- A is RR $\Rightarrow$ AX = B heeft hoogstens één oplossing (1.4.4)

Bewijs. Stel $X_1$ en $X_2$ zijn oplossingen dan dus $A(X_1 - X_2) = 0$, $X_1 - X_2 = 0$, $X_1 - X_2$. q.e.d. (1.4.5)

- A is LI $\Rightarrow$ A is RR.

Bewijs. Laat YA = I en stel AX = 0 dan YAX = 0 en dus IX = 0, dus X = 0. q.e.d.

- A is RR en RI en X is rechter inverse van A $\Rightarrow$ X is de inverse van A. (1.4.6)

Bewijs. AX = I, dus AXA = A, dus A(XA - I) = 0, dus XA - I = 0, dus XA = I. X is dus ook linker inverse van A. Met (1.4.4) volgt nu dat X de inverse van A is. q.e.d.

Opmerking. Bovenstaande stellingen gelden ook in het gespiegelde geval.

Gevolg. Uit (1.4.5) volgt nu: A inverteerbaar $\Rightarrow$ A is regulier.

- X is rechter inverse van A en Y is linker inverse van A $\Rightarrow$ X = Y is de inverse. (1.4.7)

Bewijs. Zelf!

Opgaven

1) Als A is RR dan: AB is RR $\Rightarrow$ B is RR.

2) X is rechter inverse van A en Y is rechter inverse van B $\Rightarrow$ YX is rechter inverse van AB.

3) Laat $A = (A_1 \mid A_2)$ dan:

A is RR $\Rightarrow$ $A_1$ is RR en $A_2$ is RR
A is LI $\Rightarrow$ $A_1$ is LI en $A_2$ is LI en $A_1$ is niet LR en $A_2$ is niet LR
$A_1$ of $A_2$ is LR $\Rightarrow$ A is LR
$A_1$ of $A_2$ is RI $\Rightarrow$ A is RI en A is niet RR.

## 2. Hulpmiddelen

### 2.1. Driehoeksmatrices

Stelling. Als

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

met $A_{11}$ en $A_{22}$ inverteerbaar dan is A inverteerbaar en

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{array}\right) .$$

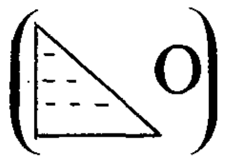
Bewijs. Vermenigvuldig uit (zowel $AA^{-1}$ als $A^{-1}A$!) (2.1.1)

Opgave.

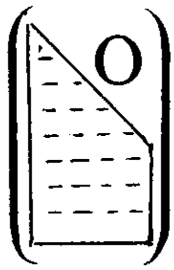
4) Als $A_{11}$ en $A_{22}$ (uit (2.1.1)) RI zijn dan is A ook RI.

Definitie. A heet linkerdriehoeksmatrix als

$$\forall_{j>i} \; [(A)_{ij} = o] . \qquad (2.1.2)$$



óf



Analoog rechterdriehoeksmatrix.

Opmerking. Van nu af aan zullen we, als we over matrices spreken, uitsluitend matrices over een lichaam bedoelen.

Stelling. Zij $A \in \mathfrak{M}_{n,n}$ een driehoeksmatrix en

$$\forall_{1 \le i \le n} \; (A)_{ii} \neq 0 \qquad (2.1.3)$$

dan is A inverteerbaar.

Bewijs. Met inductie: Voor $n = 1$ triviaal waar. Stel nu dat het waar is voor $n \in \mathbb{N}$ en laat A een $(n + 1) \times (n + 1)$ matrix zijn die aan de voorwaarden voldoet. Splits nu A z.d.d. $A_{22}$ een $1 \times 1$-matrix is en $A_{11}$ een $n \times n$-matrix.

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

$A_{11}$ is nu inverteerbaar volgens de inductieveronderstelling. $A_{22} \neq 0$ en dus is $A_{22}$ inverteerbaar. Met (2.1.1) volgt dat A inverteerbaar is. Met inductie volgt de bewering.

Opgave.

5) Zij A een linkerdriehoeksmatrix met $m \le n$ en

$$\forall_{1 \le i \le m} \; (A)_{ii} \neq 0$$

dan is A RI.

## 2.2. Matrices met reguliere kop

Definitie. $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ is een matrix met reguliere kop als $m > n$ en $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}$ met $A_1$ een inverteerbaar $n \times n$-matrix òf als $m < n$ en $A = (A_1 \mid A_2)$ met $A_1$ een inverteerbare $m \times m$-matrix. (2.2.1)

Stelling. Als A een $m \times n$-matrix is $(m > n)$ met reguliere kop dan geldt:

1) A is LI
2) A is RR
3) A is uit te breiden tot een $m \times m$-matrix die inverteerbaar is. (2.2.2)

Bewijs.

ad 1) We willen $Y_1$ en $Y_2$ zo dat

$$(Y_1 \mid Y_2)\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} = I$$

of dat

$$Y_1A_1 + Y_2A_2 = I .$$

Kies nu $Y_2$ willekeurig en neem $Y_1 = (I - Y_2A_2)A_1^{-1}$ (bv. $Y_2 = 0$ en $Y_1 = A_1^{-1}$).

ad 2) Zelf.

ad 3) Breid A als volgt uit

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & I_2 \end{array}\right)_{(m-n)\times(m-n)} .$$

met $I_2 : (m - n) \times (m - n)$.
Volgens (2.1.1) is deze $m \times m$-matrix inverteerbaar.

Voor $m < n$ gelden de gespiegelde eigenschappen.

Opgave

6) Laat $A_1 = \left(\frac{A_{11}}{A_{21}}\right)$ met $A_{11}$ inverteerbaar. Zoek alle $A_{12}$ en $A_{22}$ z.d.d.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

inverteerbaar is.

Antwoord.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & I_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{11} & W_{12} \\ \hline 0 & W_{22} \end{array}\right)$$

met $W_{22}$ inverteerbaar.

## 2.3. Permutatiematrices

Definitie. Een n-dimensionale permutatie is een afbeelding $i \to \pi(i)$ van $\{1,\ldots,n\}$ op zichzelf. (2.3.1)

Dus $\forall_j\ \exists!\ i\ [\pi(i) = j]$. De inverse afbeelding $\pi^{-1}$ is hierdoor gedefinieerd.

Definitie. Bij $\pi$ hoort een permutatiematrix P gedefinieerd door:

$$(P)_{ij} := \delta_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{als } j = \pi(i) \\ 0 & \text{als } j \neq \pi(i) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Voorbeeld

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{dan } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

<u>Stelling</u>. Zij P een $m \times m$ permutatiematrix, behorende bij een m-dimensionale permutatie $\pi$ en A een $m \times m$-matrix dan is de i-de rij van PA de $\pi(i)$-de rij van A. (2.3.3)

<u>Bewijs</u>. $(PA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (P)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{\pi(i),k} (A)_{kj} = (A)_{\pi(i),j}$ . q.e.d.

<u>Stelling</u>. Een permutatiematrix P is inverteerbaar en $P^{-1} = P^T$. (2.3.4)

<u>Bewijs</u>. Zelf!

<u>Opgaven</u>.

7) Als P een n-dimensionale permutatiematrix is dan is de j-de kolom van $AP^T$ de $\pi(j)$-de kolom van A.

8) Als P een m-dimensionale permutatiematrix is en Q een n-dimensionale permutatiematrix met permutatie $\pi_1$ resp. $\pi_2$ dan geldt:

$$(PAQ)^T)_{ij} = (A)_{\pi_1(i),\pi_2(j)} .$$

9) Als $\pi_1$ en $\pi_2$ permutaties zijn met permutatiematrices $P_1$ en $P_2$ dan is $P_1P_2$ een permutatiematrix behorende bij de permutatie $\pi_2 \circ \pi_1$.

## 3. Matrixdecompositie

### 3.1. De eerste decompositiestelling

Stelling. (eerste decompositiestelling)
Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $A \neq 0$, dan is er:

een $n \times m$ permutatiematrix $P$, behorend bij een permutatie $\pi_1$,
een $n \times n$ permutatiematrix $Q$, behorend bij een permutatie $\pi_2$,
een $r \in \mathbb{N}$, $r \leq \min(m,n)$,
een $m \times r$ linksonder driehoeksmatrix $L$ met $(L)_{ii} \neq o$ en
een $r \times n$ rechtsboven driehoeksmatrix $U$ met $(U)_{ii} \neq o$,

*zodat*

$$PAQ^T = LU \; , \tag{3.1.1}$$

oftewel

$$(A)_{\pi_1(i),\pi_2(j)} = \sum_{\ell=1}^{r} (L)_{i\ell} \, (U)_{\ell j} \; . \tag{3.1.2}$$

Bewijs. Volledige inductie naar $p := \min(m,n)$.
Als $p = 1$, dan is de bewering waar. Immers, zij $n = 1$ ($m = 1$ gaat analoog).
$A \neq 0$, dus er is een permutatiematrix $P$ zodat

$$\bar{A} := PA = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \hline \bar{A}_{21} \end{pmatrix} \text{, met } \bar{A}_{11} \in \mathcal{M}_{1,1} \text{ en } \bar{A}_{11} \neq 0,$$

$\bar{A}_{11}$ is dus inverteerbaar.

Neem nu $L = \bar{A}(\bar{A}_{11})^{-1}$ en $U = \bar{A}_{11}$ en $Q = I$, dan $PAQ^T = \bar{A} = LU$.

(Ga na of $L$ en $U$ aan de voorwaarden voldoen.)
Laat de bewering nu waar zijn voor een zekere waarde van $p$.
Laat $A$ een $(m+1)\times(n+1)$-matrix $\neq 0$ zijn, met $\min(m+1,n+1) = p+1$.
$A \neq 0 \Rightarrow$ er zijn permutatiematrices $P_1$ en $Q_1$, zodat

$$\bar{A} := P_1 A Q_1^T = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right) ,$$

waarin $\bar{A}_{11}$ een $1\times 1$ matrix $\neq 0$ en dus inverteerbaar is.
Definieer nu

$$L_1 := \left(\begin{array}{c} (1) \\ \hline \bar{A}_{21} \cdot \bar{A}_{11}^{-1} \end{array}\right), \quad U_1 := (\bar{A}_{11} \mid \bar{A}_{12}) \text{ en } \bar{\bar{A}} := \bar{A} - L_1 U_1 ,$$

dan is

$$\bar{\bar{A}} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{A}_{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right),$$

waarbij

$$A_2 = \bar{A}_{22} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{A}_{12} . \tag{*}$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. $A_2 = 0$, dan is $\bar{A} = P_1 A Q_1^T = L_1 U_1$ en we zijn dus klaar;
in dit geval geldt $r = 1$ (ga na!).
2. $A_2 \neq 0$, dan is $A_2$ een $m\times n$-matrix met $\min(m,n) = p$, dus zijn er, volgens de inductieveronderstelling matrices $P_2$, $Q_2$, $L_2$ en $U_2$ zodat:

$$P_2 A_2 Q_2^T = L_2 U_2 . \tag{**}$$

Bekijk nu:

$$\left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right) \bar{A} \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & Q_2^T \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} Q_2^T \\ \hline P_2 \bar{A}_{21} & P_2 \bar{A}_{22} Q_2^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} Q_2^T \\ \hline P_2 \bar{A}_{21} & P_2 \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{A}_{12} Q_2^T + L_2 U_2 \end{array}\right) =: W ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van (*) en (**) .
We kunnen W ook schrijven als:

$$W = \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline P_2 \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} & L_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} Q_2^T \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right) =: L U .$$

Noem nu

$$\left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right) P_1 =: P \text{ en } \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right) Q_1 =: Q \,,$$

P en Q zijn dan weer permutatiematrices.

Dus

$$PAQ^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right) \bar{A} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2^T \end{array}\right) = L\ U \,.$$

We hebben uit de inductieveronderstelling nu het volgende verkregen:

een $(m+1)\times(r+1)$ linksonder driehoeksmatrix L met $(L)_{ii} \neq 0$,
een $(r+1)\times(n+1)$ rechtsboven driehoeksmatrix U met $(U)_{ii} \neq 0$ (ga dit na!) en
permutatiematrices P en Q zodat $PAQ^T = LU$ .

Met inductie volgt dan de juistheid van de stelling. q.e.d.

## 3.2. De algemene decompositiestelling

Opmerking. In het vervolg kan het mogelijk zijn dat bij een partitie-indeling van een matrix de "hoogte" of de "breedte" van zo'n partitie nul is, zodat er eigenlijk niets staat.

Stelling. (Algemene decompositiestelling.)
Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $A \neq 0$, dan is er :

een $r \in \mathbb{N}$, $r \leq \min(m,n)$ ,
een inverteerbare $m\times m$-matrix B,
een inverteerbare $n\times n$-matrix C en
een $m\times n$-matrix J : $\left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, waarin $I_{11}$ de $r\times r$-eenheidsmatrix is,

zodat

$$A = B\ J\ C \,. \tag{3.2.1}$$

Opmerking. We zullen deze stelling op twee manieren bewijzen. Het eerste bewijs gaat uit van de eerste decompositiestelling, het tweede bewijs gaat rechtstreeks.

Bewijs 1. Volgens (3.1.1) geldt $PAQ^T = LU$.

Zij nu $L = \left(\begin{array}{c} L_{11} \\ \hline L_{21} \end{array}\right)$ en $U = (U_{11} \mid U_{12})$, waarin $L_{11}$ en $U_{11}$ de afmetingen $r\times r$ hebben en inverteerbaar zijn. Dus (zie 2.1.1) zijn ook de $m\times m$ resp. $n\times n$ matrices:

$$\tilde{L} := \left(\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & I_1 \end{array}\right) \text{en } \tilde{U} := \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$$

inverteerbaar. En er geldt

$$\tilde{L}J\tilde{U} = \left(\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & I_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} L_{11} \\ \hline L_{21} \end{array}\right) (U_{11} \mid U_{12}) = LU .$$

We hebben dus

$$PAQ^T = \tilde{L}J\tilde{U}$$

of

$$A = P^T\tilde{L}J\tilde{U}Q = BJC$$

met

$$B := P^T\tilde{L} \quad \text{en} \quad C := \tilde{U}Q ,$$

die kennelijk inverteerbaar zijn. q.e.d.

Bewijs 2. Volledige induktie naar $p := \min(m,n)$. Zij $p = 1$, dan $n = 1$ of $m = 1$.
Neem $m = 1$ ($n = 1$ gaat analoog).
$A \neq 0 \Rightarrow$ er is een permutatiematrix $Q$, zodat $\bar{A} := AQ^T = (\bar{A}_{11} \mid \bar{A}_{12})$ met $\bar{A}_{11} \in \mathcal{M}_{1,1}$ en $\bar{A}_{11} \neq 0$ en dus is $\bar{A}_{11}$ inverteerbaar.
Neem nu:

$B = \bar{A}_{11}$; dus $B$ is $1\times 1$ en inverteerbaar.

$$C = \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & \bar{A}_{11}^{-1}\bar{A}_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right) Q; \text{ dus } C \text{ is } n\times n \text{ en inverteerbaar.}$$

$J = (I_{11} \mid 0)$; $J$ is $1\times n$ .

Dan $A = B\,J\,C$ .

Stel nu dat de bewering waar is voor een zekere waarde van p.
Laat A nu een $(m+1)\times(n+1)$-matrix $\neq 0$ zijn met $\min(m+1,n+1) = p+1$.
Er zijn dan permutatiematrices $P_1$ en $Q_1$, zodat

$$\bar{A} := P_1AQ_1 = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right) \text{ met } \bar{A}_{11} \in \mathcal{M}_{1,1} \text{ en } \bar{A}_{11} \neq 0$$

en dus inverteerbaar.
Er geldt nu (ga na)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline \bar{A}_{21}\,\bar{A}_{11}^{-1} & I_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right),$$

met

$$A_2 = \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{11}^{-1}\ \bar{A}_{12}\ .$$

Nu zijn er twee mogelijkheden:

1. $A_2 = 0$, maar dan zijn we klaar en er geldt dan $r = 1$ (ga na!).
2. $A_2 \neq 0$, maar dan zijn er volgens de induktieveronderstelling (immers $A_2$ is een $m\times n$-matrix) matrices $B_2$, $C_2$ en $J_2$, zodat:

$$A_2 = B_2\ J_2\ C_2\ .$$

Maar dan is ook

$$\left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right),$$

dus

$$A = P^T\bar{A}Q = P^T \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{11}^{-1} & I_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right) Q = B\ J\ C$$

met

$$B := P^T \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline \bar{A}_{21}\ \bar{A}_{11}^{-1} & I_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right),$$

(dus $B$ is $m\times m$ en inverteerbaar (ga na!)) ,

$$J := \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

(dus $I_{22}$ : $(r+1)\times(r+1)$ en $J$ is $m\times n$),
en

$$C := \left(\begin{array}{c|c} (1) & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right) Q,$$

(dus $C$ is $n\times n$ en inverteerbaar (ga na!)).
En met inductie volgt nu het beweerde. q.e.d.

## 3.3. Enkele gevolgen van de decompositiestellingen

Stelling.

1. $A$ is RR $\Leftrightarrow$ $A$ is LI $\Leftrightarrow$ $n = r \Rightarrow n \leq m$
2. $A$ is LR $\Leftrightarrow$ $A$ = RI $\Leftrightarrow$ $m = r \Rightarrow m \leq n$ (3.3.1)
3. $A$ is regulier $\Leftrightarrow$ $A$ is inverteerbaar $\Leftrightarrow$ $m = n = r$.

Bewijs. Schrijf $A$ volgens (3.2.1) als $A = BJC$.
Kijk nu eerst naar

$$J = \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad J \text{ is } m\times n;\ I_{11} \text{ is } r\times r,$$

dan

$J$ is RR $\Leftrightarrow$ $n = r$ (ga na!)
$J$ is LI $\Leftrightarrow$ $n = r$ (ga na dat $J^T$ een linkerinverse is)

en dus

$J$ is RR $\Leftrightarrow$ $J$ is LI $\Leftrightarrow$ $n = r \Rightarrow n \leq m$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stel} & J \text{ is RR} \\ \text{nu is} & B \text{ is RR} \\ & C \text{ is RR} \end{array}\right\} \rightarrow \quad A \text{ is RR .}$$

Stel A is RR.

$$\text{We weten nu } \left.\begin{array}{l} B^{-1} \text{ is RR} \\ C^{-1} \text{ is RR} \\ J = B^{-1}AC^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow J \text{ is RR .}$$

Dus

$$A \text{ is RR} \iff J \text{ is RR,}$$

evenzo is te bewijzen dat

$$A \text{ is LI} \iff J \text{ is LI}$$

zodat 1. bewezen is.

2. gaat analoog en 3. volgt direct uit 1. en 2.

Opmerking. We zullen een matrix A irregulier noemen als A noch RR, noch RI, noch LR noch LI is.

Résumé. Voor $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ geldt

1. als $m = n$ (vierkante matrices) dan

$r = m = n \iff$ A is RR en RI en LR en LI

$r < m = n \iff$ A is irregulier.

2. als $m > n$ (staande matrices) dan

A is nooit LR of RI

$r = n \iff$ A is RR en LI

$r \quad n \iff$ A is irregulier.

3. als $m < n$ (liggende matrices) dan

A is nooit RR of LI

$r = m \iff$ A is LR en RI

$r < m \iff$ A is irregulier.

<u>Stelling</u>. (Uitbreidingsstelling.)
Als $A_1$ een m×n-matrix is, die RR is (dus $n \le m$), dan

als $n = m$ is $A_1$ een reguliere m×m-matrix,
als $n < m$ dan is er een m×(n−m)-matrix $A_2$ zodat $A := (A_1|A_2)$ een reguliere m×m-matrix is. (3.3.2)

<u>Bewijs</u>. Als $n = m$ is de zaak triviaal. Zij $n < m$. Volgens (3.2.1) is $A_1 = BJC$ (want $A_1$ is RR $\Rightarrow A_1 \neq 0$).

$A_1$ is RR $\Rightarrow r = n \Rightarrow J = \begin{pmatrix} I \\ \hline 0 \end{pmatrix}$, waarin I n×n = r×r is.

Dus

$$BJC = B\begin{pmatrix} C \\ \hline 0 \end{pmatrix}.$$

Neem nu $A = B\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = (B_1|B_2)\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = (B_1C|B_2) = (A_1|B_2)$ d.w.z. $A_2 = B_2$.

A is nu een reguliere m×m-matrix, zodat het gestelde bewezen is.

<u>Opgave</u>.
10. Als A is RR, dan is er een permutatiematrix P, zodat $PA = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \hline \bar{A}_{21} \end{pmatrix}$ met $A_{11}$ een reguliere n×n-matrix.

## 3.4. De rang van een matrix

We willen het getal r uit de decompositiestellingen de rang van de matrix noemen. We zullen dan echter eerst moeten bewijzen dat r eenduidig bepaald is (de decompositie zelf is zeker niet eenduidig).

<u>Opgave</u>.
11. Zie in met behulp van (3.3.1) dat als A niet irregulier is, het getal r eenduidig is bepaald.

<u>Stelling</u>. Het getal r uit de splitsingsstellingen is eenduidig bepaald.
Als

$$A = BJC \text{ en } A = B'J'C' \qquad (*)$$

dan is

$$J = J',\ B' = BS \text{ en } C = S'C',$$

waarin

$$S = \left(\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline 0 & S_{22} \end{array}\right) \quad \text{en} \quad S' = \left(\begin{array}{c|c} S'_{11} & 0 \\ \hline S'_{21} & S'_{22} \end{array}\right) \qquad (**)$$

met

$S_{11} = S'_{11}$ is $r \times r$ en regulier

$S_{22}$ is $(m-r)\times(m-r)$ en regulier

$S'_{22}$ is $(n-r)\times(n-r)$ en regulier. (3.4.1)

Omgekeerd: Als $S$ en $S'$ aan de bovenstaande relaties voldoen en $A = BJC$, $B' = BS$ en $C' = (S')^{-1}C$, dan is $A = B'JC'$ . (3.4.2)

Bewijs. Stel dat (*) geldt met $J = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $J' = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ met $I_1 = r \times r$ en $I_2 = r' \times r'$.
Zij $S := B^{-1}B'$ en $S' := CC'^{-1}$, dan zijn $S$ en $S'$ regulier en (*) geeft

$$SJ' = JS' . \qquad (***)$$

Laat nu

$$S = \left(\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array}\right) \quad \text{en} \quad S' = \left(\begin{array}{c|c} S'_{11} & S'_{12} \\ \hline S'_{21} & S'_{22} \end{array}\right)$$

waarin $S_{11}$ en $S'_{11}$ $r \times r'$-matrices zijn.
Dan volgt met (***) (ga na dat de partitionering past) dat

$$\left(\begin{array}{c|c} S_{11} & 0 \\ \hline S_{21} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S'_{11} & S'_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

dus

$$S_{21} = 0,\ S'_{12} = 0 \text{ en } S_{11} = S'_{11} .$$

$S$ en $S'$ hebben dus de vorm van (**).
Daaruit volgt nu (ga na)

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ regulier} \Rightarrow S_{11} \text{ is RR} \\ S' \text{ regulier} \Rightarrow S'_{11} \text{ is LR} \\ \qquad\qquad\quad S_{11} = S'_{11} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{11} = S'_{11} \text{ zijn regulier} \Rightarrow r = r' .$$

En verder

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ regulier} \Rightarrow S_{22} \text{ is LR} \\ r = r' \Rightarrow S_{22} \text{ is vierkant} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{22} \text{ is regulier .}$$

Analoog $S'_{22}$ is regulier.
De omgekeerde bewering volgt door rechtstreekse verificatie.

Definitie. Het getal r heet de rang van de matrix A. Notatie: $r = r(A)$.

Opmerkingen.
- We kunnen nu zeggen: A is RR $\Longleftrightarrow r(A) = n$
  A is LR $\Longleftrightarrow r(A) = m$ .

(Daar $r \le \min(m,n)$ spreken we in het eerste geval van volle kolomrang, in het tweede geval van volle rijrang.)
- We zullen voortaan de notatie $\mathcal{M}^r_{m,n}$ gebruiken voor de verzameling van alle $m \times n$-matrices met rang r.

Definitie. Twee matrices A en A' heten equivalent als er reguliere matrices U en V bestaan zodat:

$$A' = UAV .$$

Opgave.
12. Ga na dat de hierboven gedefinieerde relatie echt een equivalentierelatie is.

Stelling. $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ en $A' \in \mathcal{M}^{r'}_{m',n'}$ zijn dan en slechts dan equivalent als

$$m' = m,\ n' = n \text{ en } r' = r . \tag{3.4.3}$$

Bewijs. "$\Rightarrow$" : $m' = m$ en $n' = n$ is triviaal.

$$\left.\begin{array}{r} A \text{ en } A' \text{ equivalent} \Rightarrow A' = UAV \\ (3.2.1) \Rightarrow A = BJC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A' = (UB)\,J(CV) =: B'JC' \\ B' \text{ en } C' \text{ zijn regulier} \end{array}\right\} \overset{(3.4.1)}{\Longrightarrow} r' = r .$$

"$\Leftarrow$" : zij $A = BJC$ en

$A' = B'J'C'$, dan

$$\left.\begin{array}{l} r' = r \Rightarrow J = J' \\ n' = n \Rightarrow C^{-1}C' \text{ bestaat en regulier} \\ m' = m \Rightarrow B'B^{-1} \text{ bestaat en regulier} \end{array}\right\} \rightarrow A' = (B'B^{-1})\, A(C^{-1}C') \,.$$

q.e.d.

<u>Stelling</u>. $A \in \mathcal{M}^{r}_{m,n} \Leftrightarrow$ A is equivalent met

$$J = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad J : m\times n, \; I : r\times r. \tag{3.4.5}$$

<u>Bewijs</u>. Dit volgt onmiddellijk uit (3.2.1).

## 3.5. <u>De alternatieve decompositiestelling</u>

<u>Stelling</u>. (Alternatieve decompositiestelling.)
Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $A \neq 0$, dan is er

een $r \in \mathbb{N}$, $r \leq \min(m,n)$,
een RR $m\times r$-matrix $B_1$ en
een LR $r\times n$-matrix $C_1$,

zodat

$$A = B_1 C_1 \,. \tag{3.5.1}$$

$B_1$ kan worden uitgebreid tot een reguliere $m\times m$-matrix $B = (B_1 | B_2)$ en $C_1$ kan worden uitgebreid tot een reguliere $n\times n$-matrix

$$C = \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array}\right) . \tag{3.5.2}$$

Als ook geldt $A = B_1' C_1'$ met $B_1'$ een RR $m\times r'$-matrix en
$C_1'$ een LR $r'\times m$-matrix, dan
$r = r'$

en er is een reguliere matrix W zodat

$$B_1' = B_1 W \text{ en } C_1' = W^{-1} C_1 \,. \tag{3.5.3}$$

<u>Bewijs.</u> Volgens (3.2.1) is $A = BJC$. Zij $B = (B_1 | B_2)$ en $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \hline C_2 \end{pmatrix}$ met $B_1 \in \mathcal{M}_{m,r}$ en RR, en $C_1 \in \mathcal{M}_{r,n}$ en LR, dan geldt $A = B_1C_1$, waarmee (3.5.1) en (3.5.2) bewezen zijn.

Zij $U_1$ een linkerinverse van $B_1$ en $V_1'$ een rechterinverse van $C_1'$ (ga na dat deze bestaan) dan

$$B_1C_1 = B_1'C_1' \Rightarrow B_1' = B_1(C_1V_1') = B_1W \text{ als } W := C_1V_1'. \qquad (*)$$

Ook is dan $B_1C_1 = B_1WC_1'$ en daar $B_1$ RR is volgt met (1.4.5) dat

$$C_1 = WC_1' \, . \qquad (**)$$

Daar $B_1$ en $B_1'$ RR zijn, volgt (zie opgave 1) uit (*) dat $W$ RR is en daar $C_1$ en $C_1'$ LR zijn volgt uit (**) dat $W$ LR is, dus $W$ is regulier en omdat $W$ afmetingen $r \times r'$ heeft geldt

$$r = r' \, . \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Opgaven</u>

13. Bewijs de alternatieve decompositiestelling rechtstreeks uit (3.1.1).

14. Bewijs (3.3.1) uitgaande van de alternatieve decompositiestelling.

15. Bewijs met de alternatieve decompositiestelling de uitbreidingsstelling (3.3.2) en vervolgens de algemene decompositiestelling (3.2.1).

16. Bewijs (3.4.1) met behulp van opgave 6 en de alternatieve decompositiestelling.

## 4. Een aantal toepassingen van de decompositiestellingen

### 4.1. Stellingen over de rang van een matrix

- $$0 \le r \le \min(m,n) \qquad (4.1.1)$$

- $$\text{A is RR} \Leftrightarrow r = n \qquad (4.1.2$$
  $$\text{A is LR} \Leftrightarrow r = m$$

- $$\text{B is RR} \Rightarrow r(BA) = r(A) \qquad (4.1.3)$$
  $$\text{D is LR} \Rightarrow r(AD) = r(A).$$

Bewijs. Volgens (3.5.1) is $A = B_1C_1$.
$BA = BB_1C_1 = B_1'C_1$ met $B_1' = BB_1$ en $B_1' \in \mathcal{M}_{k,r}$.
Hierbij is $B_1'$ RR (ga na) en is $B_1'C_1$ dus een correcte splitsing van BA in een RR- en een LR-matrix, dus

$$r(BA) = r(B_1'C_1) = r(A). \qquad \text{q.e.d.}$$

- Als $A = (A_1|A_2)$ met $A_1 \in \mathcal{M}^{r_1}_{m,n_1}$, $A_2 \in \mathcal{M}^{r_2}_{m,n_2}$ en $A \in \mathcal{M}^{r}_{m,n_1+n_2}$

dan geldt $r_1 \le r$, $r_2 \le r$. (4.1.4)

Bewijs. $A = B_1C_1 = B_1\ (C_{11}|C_{12})$ met $C_{11} \in \mathcal{M}_{r,n_1}$, $C_{12} \in \mathcal{M}_{r,n_2}$.
$A_1 = B_1C_{11}$, $B_1$ is RR. Dus volgens (4.1.3) is $r_1 = r(C_{11}) \le \min(r,n_1)$, dus

$$r_1 \le r. \qquad \text{q.e.d.}$$

Een analoge stelling geldt voor $A = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right)$. (4.1.5)

- Als $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ dan geldt $r(A_{ij}) \le r(A)$. (4.1.6)

Bewijs. Dit volg uit (4.1.4) en (4.1.5).

Definitie. Als $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $A' \in \mathcal{M}_{m',n'}$ dan heet $A'$ een submatrix van A als er permutaties p en q zijn van $\{1,\dots,m\}$ resp. $\{1,\dots,n\}$, zodat

$$\left.\begin{array}{l} p(i) < p(i') \text{ als } i < i' \le m' \\ q(j) < q(j') \text{ als } j < j' \le n' \text{ en} \end{array}\right. \qquad (*)$$

$$(A')_{ij} = (A)_{p(i),q(j)}. \qquad (4.1.7)$$

Dus $PAQ^T = \left(\begin{array}{c|c} A' & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$.

Dank zij de nadere eis (*) kunnen we ook zeggen: A' ontstaat uit A door schrapping van een aantal rijen en kolommen.

- Voor iedere submatrix A' van A geldt $r(A') \le r(A)$. (4.1.8)

<u>Bewijs</u>. Volgens (4.1.3) is $r(A) = r(PAQ^T)$ en volgens (4.1.6) is $r(A') \leq r(PAQ^T)$, zodat $r(A') \leq r(PAQ^T) = r(A)$. q.e.d.

- Voor iedere $r' \leq r$ is er een submatrix $A'$ van $A$ met $A' \in \mathcal{M}^{r'}_{r',r'}$. (4.1.9)

<u>Bewijs</u>. Er zijn matrices $P$, $Q$, $L$ en $U$ zodat $PAQ^T = LU$ (zie 3.1.1).

$L = \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]$ met $L_{11} \in \mathcal{M}_{r',r'}$, dan is $L_{11}$ regulier (waarom?) en

$U = \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right]$ met $U_{11} \in \mathcal{M}_{r',r'}$ en regulier,

dan is $L_{11}U_{11} \in \mathcal{M}_{r',r'}$ en regulier.
Zie zelf nu in dat er permutatiematrices $P_1$ en $Q_1$ zijn, zodat $P_1L_{11}U_{11}Q_1^T$ een submatrix van $A$ is.
Hieruit volgt hetgeen te bewijzen was. q.e.d.

- $r(A) = \max\{r' \mid \exists A' \in \mathcal{M}_{r',r'}$ en $A'$ is een reguliere submatrix van $A\}$. (4.1.10)

<u>Bewijs</u>. Zie (4.1.8) en (4.1.9).

- Als $A = (A_1|A_2)$ dan geldt $\max(r_1,r_2) \leq r \leq r_1+r_2$. (4.1.11)

<u>Bewijs</u>. $\max(r_1,r_2) \leq r$ is al in (4.1.4) bewezen. Volgens (3.5.1) zijn er splitsingen $A_1 = B_1C_1$ en $A_2 = B_2C_2$.

Dan is $A = (B_1|B_2) \left[\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r_2 \end{array} = (B_1|B_2)\,C$.

$C$ is LR (ga na!) zodat volgens (4.1.3) $r(A) = r(B_1|B_2) \leq r_1+r_2$. q.e.d.

<u>Gevolg</u>. $r - n_2 \leq r_1 \leq r$ (ga na). (4.1.12)

<u>Opgave</u>

17. Als $A' \in \mathcal{M}_{m',n'}$ een submatrix van $A$ is, dan geldt

$r - (m-m') - (n-n') \leq r(A') \leq r$.

- Als $A \in \mathcal{M}^{r}_{m,n}$, $A_1 \in \mathcal{M}^{r_1}_{m,k}$, $A_2 \in \mathcal{M}^{r_2}_{k,n}$ en $A = A_1A_2$, dan geldt
$r_1 + r_2 - k \leq r \leq \min(r_1, r_2)$. (4.1.13)

Bewijs.
1) Stel $A_1 = B_1C_1$ en $A_2 = B_2C_2$, dan is $A = B_1C_1B_2C_2$,
met (4.1.3) volgt $r(A) = r(C_1B_2)$. (*)
Omdat $C_1B_2 \in \mathcal{M}_{r_1,r_2}$ is dus $r(A) \leq \min(r_1,r_2)$.
2) Uitbreiding van $C_1$ en $B_2$ tot reguliere k×k-matrices $C' = \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_1' \end{array}\right)$ en
$B' = (B_2|B_2')$ (zie (3.5.2)) levert

$$C'B' = \left(\begin{array}{c|c} C_1B_2 & C_1B_2' \\ \hline C_1'B_2 & C_1'B_2' \end{array}\right).$$

Uit (*) en opgave 17 volgt de linkerongelijkheid. q.e.d.

N.B. Als $A_1A_2 = 0$, dan is $r_1 + r_2 \leq k$. (4.1.14)

- Als $A_2 \in \mathcal{M}_{k_1,k_2}$, dan geldt

$$r(A_1A_2A_3) \geq r(A_1A_2) + r(A_2A_3) - r(A_2)$$
$$\geq r_1 + r_2 + r_3 - k_1 - k_2 \text{ (Stelling van Frobenius).} \qquad (4.1.15)$$

Bewijs. Zelf!
Hint: $A_1A_2A_3 = B_1C_1B_2C_2B_3C_3$

$$r(A_1A_2A_3) = r(\overline{C_1B_2}\,\overline{C_2B_3}).$$

- Als $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ dan geldt $r(A) = r(A_1) + r(A_2)$. (4.1.16)

Bewijs. Stel $A_1 = B_1C_1$ en $A_2 = B_2C_2$, dan geldt

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B_1C_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2C_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right).$$

Volgens opgave 4 is $\left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$ RR en $\left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right)$ LR.

Zie nu zelf in waarom $r(A) = r(A_1) + r(A_2)$. q.e.d.

- Als $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ dan geldt $r(A) \geq r(A_{11}) + r(A_{22})$. (4.1.17)

<u>Bewijs</u>. Zelf!

- Als $A = A_1 + A_2$ geldt $|r_1 - r_2| \leq r \leq r_1 + r_2$ . (4.1.18)

<u>Bewijs</u>.

1) Stel $A_1 = B_1C_1$ en $A_2 = B_2C_2$ dan is $A = B_1C_1 + B_2C_2 = (B_1|B_2)\left(\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array}\right)$ (zie opgave 3).

$r(B_1|B_2) \leq r_1 + r_2$ .

Dus volgens (4.1.3) is $r(A) \leq r_1 + r_2$ .

2) $\left.\begin{array}{l} A_1 = A - A_2 \Rightarrow r_1 \leq r + r_2 \\ A_2 = A - A_1 \Rightarrow r_2 \leq r + r_1 \end{array}\right\}$ $|r_1 - r_2| \leq r$ . q.e.d.

- Als $r((A_1|A_2)) = r(A_1)$ dan is er een $Z$ zodat $A_2 = A_1Z$. (4.1.19)

<u>Bewijs</u>. Stel $(A_1|A_2) = B_1(C_{11}|C_{12})$ .

Dan is $A_1 = B_1C_{11}$ (ga na, zie opgave 3).

Dit is een geldige splitsing van $A_1$, dus $r(C_{11}) = r(A_1) = r$.

$C_{11}$ is RI met rechterinverse $V_{11}$.

$A_2 = B_1C_{12} = B_1C_{11}V_{11}C_{12} = A_1Z$ met $Z = V_{11}C_{12}$. q.e.d.

<u>Opgave</u>.

18. Als $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ en $r(A_{11}) = r(A)$, dan zijn er matrices $Z_{12}$ en $Z_{21}$,

zodat

$$A = \left(\begin{array}{c} I_{11} \\ \hline Z_{21} \end{array}\right) A_{11}(I_{11}|Z_{12}).$$

## 4.2. <u>De vergelijking AX = Y</u>

Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ en $Y \in \mathcal{M}_{m,p}$ gegeven.

Gevraagd wordt $X \in \mathcal{M}_{n,p}$ zodanig dat $AX = Y$.

Eerst behandelen we het oplossen van $JX = Y$ met $J = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $I_1 \in \mathcal{M}_{r,r}$ , $J \in \mathcal{M}_{m,n}$ .

Uit $\left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline Y_2 \end{array}\right)$ met $\left\{\begin{array}{l} X_1 = Y_1 \\ 0 = Y_2 \end{array}\right.$ .

Dus $JX = Y$ oplosbaar $\Longleftrightarrow Y_2 = 0$.

Is de vergelijking oplosbaar dan is de oplossing $X = \left(\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline Z_2 \end{array}\right)$ met $Z_2$ willekeurig. (4.2.1)

<u>Opmerking</u>.

Als $m = r$ is $AX = Y$ altijd oplosbaar, daar $A$ is RI.

Als $n = r$ is de oplossing, als hij bestaat, eenduidig bepaald (1.4.4).

We willen oplossen $AX = Y$, oftewel $BJCX = Y$.

Laat nu $T = B^{-1}Y$ en $X = C^{-1}Z$, dan dus op te lossen $JZ = T$.

Stel

$$B^{-1} =: U = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right) \text{ en } C^{-1} =: V = (V_1 | V_2),\ Z = \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \end{array}\right),$$

dan geldt

$$T = \left(\begin{array}{c} U_1Y \\ \hline U_2Y \end{array}\right).$$

Dus

$$JZ = T \Rightarrow \begin{array}{l} Z_1 = U_1Y \\ 0 \ \ = U_2Y \end{array}.$$

<u>Hieruit volgt</u>: $JZ = T$ is oplosbaar $\Longleftrightarrow U_2Y = 0$.

Als $JZ = T$ oplosbaar is dan geldt $Z = \left(\begin{array}{c} U_1Y \\ \hline Z_2 \end{array}\right)$ met $Z_2$ willekeurig

$\Rightarrow X = C^{-1}Z = V_1U_1Y + V_2Z_2$.

<u>Conclusie</u>. $AX = Y$ oplosbaar $\Longleftrightarrow U_2Y = 0$ en de oplossing zijn

$$X = V_2U_1Y + V_2Z_2 \text{ met } Z_2 \text{ willekeurig.} \qquad (4.2.2)$$

<u>Opgave</u>

19. Onderzoek m.b.v. (3.4.1) of de oplosbaarheidsvoorwaarden en de verkregen oplossing onafhankelijk is van de gekozen splitsing van A.

<u>Stellingen</u>

- $AX = 0 \Rightarrow r(X) \leq n - r(A) \quad (A \in \mathcal{M}_{m,n})$. (4.2.3)

<u>Bewijs</u>. Zie (4.1.14).

- $n-r(A) = \max\{r' \mid \exists x[r(x) =: r' \text{ en } AX = 0]\}$ . (4.2.4)

Bewijs. Uit (4.2.3) volgt rechterlid ≤ linkerlid.
Neem $X = V_2$ (uit (4.2.2)) dan $r(X) = n-r(A)$. q.e.d.

- Als $r(X_0) = n-r(A)$ en $AX = 0$ dan

$AX = 0 \Rightarrow \exists Z[X = X_0 Z]$ . (4.2.5)

Bewijs. Zelf!

Voor de vergelijking $X'A = 0$ kunnen analoge stellingen worden afgeleid.
Het analogon van Z en $V_2$ is dan W resp. $U_2$.

- $AX = Y$ is oplosbaar $\Leftrightarrow \forall_Z : ZA = 0 \Rightarrow ZY = 0$. (4.2.6)

Bewijs.
" ⇒ " : $\left.\begin{matrix} AX = Y \\ ZA = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ZAX = ZY = 0$.

" ⇐ " : neem $Z = U_2$ dan $U_2 A = 0 \Rightarrow U_2 Y = 0$.
Volgens (4.2.2) is dit een voldoende voorwaarde voor oplosbaarheid.
q.e.d.

- Als $r(Z) = m-r$ en $ZA = 0$ dan:

$AX = Y$ oplosbaar $\Leftrightarrow ZY = 0$. (4.2.7)

Bewijs.
" ⇐ " : direct uit (4.2.6)
" ⇒ " : $AX = Y \Rightarrow ZY = ZAX = OX = 0$. q.e.d.

- $AX = Y$ oplosbaar $\Leftrightarrow r((A|Y)) = r(A)$. (4.2.8)

Bewijs.
" ⇒ " : $(A|Y) = A(I|X)$.
Daar stellig $(I|X)$ LR is geldt volgens (4.1.3) $r(A|Y) = r(A)$.
" ⇐ " : $r(A|Y) = r(A)$ impliceert volgens (4.1.19) dat er een X is z.d.d.
$AX = Y$. q.e.d.

Gevolg. $AX = Y$ heeft voor iedere Y een oplossing
$\Leftrightarrow$ A is RI $\Leftrightarrow$ A = LR $\Leftrightarrow m = r(A)$.

## 4.3. Een gegeneraliseerde inverse

Zij zoals in (3.2.1) en (3.5.1) $A = BJC = B_1C_1$ met $B = (B_1|B_2)$ en $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \hline C_2 \end{pmatrix}$ en $J = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Zeg $U := B^{-1} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \hline U_2 \end{pmatrix}$, $V := C^{-1} = (V_1|V_2)$, dan geldt

$$
\begin{array}{lll}
U_1B_1 = I_1 & & (B_1 \text{ is LI}) \\
U_1B_2 = 0 & & \\
U_2B_1 = 0 & & \\
U_2B_2 = I_2 & & \text{met } I_2 : (m-r)\times(m-r) \\
B_1U_1 + B_2U_2 = I_3 & & \text{met } I_3 : m\times m \\
C_1V_1 = I_1 & & (C_1 \text{ is LI})
\end{array}
$$

We definiëren

$$A^+ := C^{-1}J^TB^{-1} = V_1U_1 , \qquad (4.3.1)$$

dan is

$$A^+ \in \mathcal{M}_{n,m}.$$

We noemen $A^+$ een gegeneraliseerde inverse van A.

Eigenschappen

1. $A^+A = V_1C_1$
2. $AA^+ = B_1U_1$
3. $AA^+A = A$
4. $A^+AA^+ = A^+$
5. $(A^+A - I)\,A^+ = 0$
6. $A(A^+A - I) = 0$
7. $A^+(AA^+ - I) = 0$
8. $(AA^+ - I)\,A = 0$ . (4.3.2)

Stelling. Als een matrix $X \in \mathcal{M}_{n,m}$ voldoet aan

$$\left.\begin{array}{l} AXA = A \\ \\ XAX = X \end{array}\right\} \qquad (4.3.3)$$

en

dan geldt voor iedere splitsing $A = B_1C_1$ dat $X = V_1U_1$ met $U_1$ een linkerinverse van $B_1$ en $V_1$ een rechterinverse van $C_1$ (m.a.w. $A^+$ wordt min of meer gekarakteriseerd door (4.3.3)) . (4.3.4)

Bewijs. Laat $A = B_1C_1$, dan volgt uit $AXA = A$ dat $B_1C_1XB_1C_1 = B_1C_1$.
Daar $B_1$ is LI en $C_1$ is RI volgt $C_1XB_1 = I$. Uit $XAX = X$ volgt $XB_1 \cdot C_1X = X$.
Laat nu $U_1 := C_1X$ en $V_1 := XB_1$ dan: $U_1$ is linkerinverse van $B_1$, $V_1$ is rechterinverse van $C_1$ en $X = V_1U_1$. q.e.d.

Opgave

19. Stel dat $A = BJC$. Bewijs dat iedere X die aan (4.3.3) voldoet geschreven kan worden als $X = C^{-1}WB^{-1}$ met $W = \begin{pmatrix} I_{11} \\ \hline W_{21} \end{pmatrix} (I_{11} | W_{12})$.

Definitie. $P_A := AA^+$ en $P'_A := A^+A$. (4.3.5)

Eigenschappen

1. $P_A = B_1U_1$ $\qquad P'_A = V_1C_1$
2. $P_A \in \mathcal{M}^r_{m,m}$ $\qquad P'_A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$
3. $r(I-P_A) = m-r$ $\qquad r(I-P'_A) = n-r$
4. $I-P_A = B_2U_2$ $\qquad I-P'_A = V_2C_2$
5. $P_A^2 = P_A$ $\qquad (P'_A)^2 = P'_A$
6. $P_A(I-P_A) = (I-P_A)P_A = 0$ $\qquad P'_A(I-P'_A) = (I-P'_A)P'_A = 0$
7. $(I-P_A)^2 = I-P_A$ $\qquad (I-P'_A)^2 = I-P'_A$
8. $P_AA = A$ $\qquad P'_AA^+ = A^+$
9. $(I-P_A)A = 0$ $\qquad (I-P'_A)A^+ = 0$
10. $A^+P_A = A^+$ $\qquad AP'_A = A$
11. $A^+(I-P_A) = 0$ $\qquad A(I-P_A) = 0$ . (4.3.6)

Stellingen

- $AX = 0 \iff P'_AX = 0 \iff X = (I-P'_A)X$ . (4.3.7)

Bewijs.

1. " $\Rightarrow$ " : $P'_A X = A^+AX = A^+0 = 0$ ,

" $\Leftarrow$ " : $P_A X = 0 \Rightarrow A^+AX = 0 \Rightarrow AX = A(A^+AX) = 0$

2. triviaal. q.e.d.

- $\exists X : Y = AX \Leftrightarrow (I-P_A)Y = 0 \Leftrightarrow Y = P_A Y$ . (4.3.8)

Bewijs.

1. " $\Rightarrow$ " : $(I-P_A)Y = (I-P_A)AX = 0X = 0$ ,

" $\Leftarrow$ " : $(I-P_A)Y = 0 \Rightarrow Y = P_A Y = AA^+Y = AX$ met $X = A^+Y$.

2. triviaal. q.e.d.

- Als $(I-P_A)Y = 0$ dan heeft $AX = Y$ een oplossing en
$X = X_1 + X_2$ met $X_1 = A^+Y$ en $P'_A X_2 = 0$. (4.3.9)

Bewijs. Dat iedere X van deze vorm voldoet volgt uit (4.3.8) en (4.3.7).
Als $AX = Y$ dan $A(X-A^+Y) = (I-P_A)Y = 0$, dus $X-A^+Y = X_2$ met $P'_A X_2 = 0$.
q.e.d.

Analoog

- $A^+Y = 0 \Leftrightarrow P_A Y = 0 \Leftrightarrow Y = (I-P_A)Y$. (4.3.10)

- $\exists Y : X = A^+Y \Leftrightarrow (I-P'_A)X = 0 \Leftrightarrow P'_A X = X$. (4.3.11)

- Als $(I-P'_A)X = 0$ dan heeft $A^+Y = X$ een oplossing en
$Y = Y_1 + Y_2$ met $Y_1 = AX$ en $P_A Y_2 = 0$. (4.3.12)

Definities.

$R(A) := \{Y \mid \exists X : Y = AX\}$ (range van A)

$N(A^+) := \{Y \mid A^+Y = 0\}$ (nulruimte van $A^+$)

$R(A^+) := \{X \mid \exists Y : X = A^+Y\}$ (range van $A^+$)

$N(A) := \{X \mid AX = 0\}$ (nulruimte van A). (4.3.13)

Eigenschap.

$R(A) \cap N(A^+) = \{0\}$ en $N(A) \cap R(A^+) = \{0\}$. (4.3.14)

Bewijs. Laat $Y \in R(A) \cap N(A^+)$. Dus $\exists X_1 : Y = AX_1$ en $A^+Y = 0$.
Dan $A^+Y = A^+AX_1 = 0$. Hieruit volgt $AA^+AX_1 = 0$ en dus $Y = AX_1 = 0$ (zie eigenschap 3 uit (4.3.2)). q.e.d.

Opgave

20. Bewijs dat $R(A) = \{Y \mid Y = P_AY\}$, $N(A) = \{X \mid P'_AX = 0\}$,

$R(A^+) = \{X \mid X = P'_AX\}$, $N(A^+) = \{Y \mid P_AY = 0\}$.

Stelling. Voor iedere Y bestaan eenduidig bepaalde $Y_1 \in R(A)$ en $Y_2 \in N(A^+)$ z.d.d. $Y = Y_1 + Y_2$. (4.3.15)

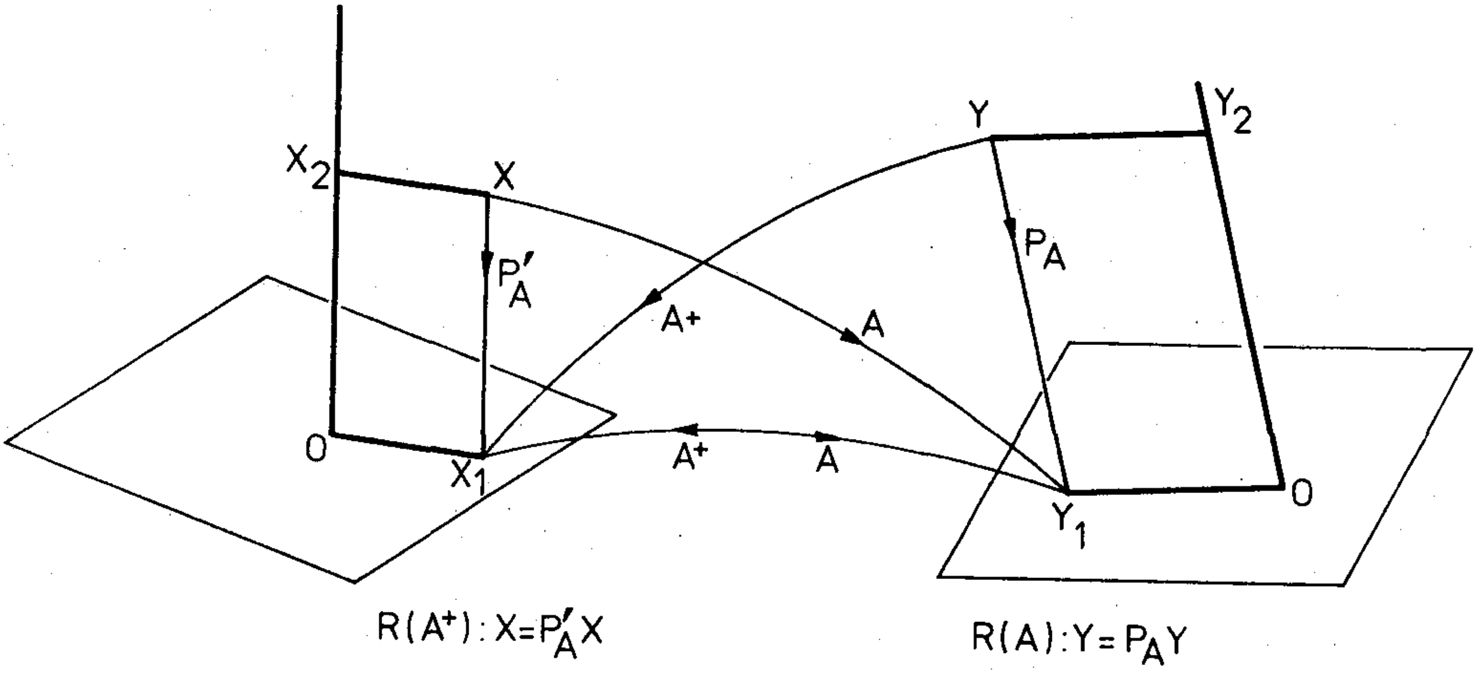
Bewijs. $Y = Y_1 + Y_2$ met $Y_1 = P_AY$ en $Y_2 = (I-P_A)Y$ (triviaal).
Dan $P_AY_1 = P_A^2Y_1 = Y_1$, dus $Y_1 \in R(A)$ (zie opgave 20).
$P_AY_2 = P_A(I-P_A)Y = P_AY - P_A^2Y = P_AY - P_AY = 0$, dus $Y_2 \in N(A^+)$ (zie opgave 20).
Dat $Y_1$ en $Y_2$ eenduidig bepaald zijn volgt uit (4.3.14) (ga na). q.e.d.

Stelling. Voor iedere X bestaan eenduidig bepaalde $X_1 \in R(A^+)$ en $X_2 \in N(A)$ z.d.d. $X = X_1 + X_2$. (4.3.16)

Bewijs. Analoog aan het bewijs van (4.3.15), ga dit zelf na.

Zij $X_1 \in R(A^+)$, $Y_1 := AX_1 \in R(A)$, dan is $A^+Y_1 = X_1$. Omgekeerd is $Y_1 \in R(A)$, $X_1 := A^+Y_1 \in R(A^+)$, dan is $AX_1 = Y_1$.
De "afbeelding" A beeldt $R(A^+)$ dus een-eenduidig af op $R(A)$ met inverse afbeelding $A^+$.
Anderzijds, als $Y_1 \in R(A)$, dan wordt de verzameling der X met $AX = Y_1$ gegeven door $X = X_1 + X_2$ met $X_1 = P'_AX = A^+Y_1 \in R(A^+)$, $X_2 = (I-P'_A)X \in N(A)$.
En als $X_1 \in R(A^+)$ dan is de verzameling der Y met $A^+Y = X_1$ gegeven door
$Y = Y_1 + Y_2$ met $Y_1 = P_AY = AX_1$ en $Y_2 = (I-P_A)Y \in N(A^+)$.

In de hierna volgende tekening is gepoogd een en ander weer te geven.




Het onbevredigende in dit verhaal is dat $A^+$ en daarmee $R(A^+)$ en $N(A^+)$ niet eenduidig door A bepaald worden ($R(A)$ en $N(A)$ wel!). In hoofdstuk 3 komen we op deze zaak terug. Dan willen we door een symmetrie eis $A^+$ eenduidig maken. Door deze eis worden $N(A)$ en $R(A^+)$ in een bepaalde zin onderling orthogonale deelverzamelingen van $\mathcal{M}_{n,p}$, analoog $N(A^+)$ en $R(A)$.

Opgaven

21. Laat zien dat geldt:

$$R(A) = \{Y \mid Y = B_1Z\} = \{Y \mid V_2Y = 0\}$$

$$N(A^+) = \{Y \mid Y = B_2Z\} = \{Y \mid V_1Y = 0\}$$

$$R(A^+) = \{X \mid X = V_1Z\} = \{X \mid C_2X = 0\}$$

$$N(A) = \{X \mid X = V_2Z\} = \{X \mid C_1X = 0\}.$$

22. Zij $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ met $A_{11}$ regulier.

Zij $A_{22.1} := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Bewijs dat $r(A) = r(A_{11}) + r(A_{22.1})$ en dat als $A_{22.1}$ (en dus ook A) regulier is geldt

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22.1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22.1}^{-1} \\ \hline -A_{22.1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22.1}^{-1} \end{array}\right)$$

Ga na dat als $A_{22}$ een $1\times 1$-matrix is en $A_{11}^{-1}$ bekend is, $A^{-1}$ eenvoudig te berekenen is (het zg. randen van een matrix).

23. Zij $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ regulier met $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)$.

Bewijs dat: $A_{11}$ regulier $\Leftrightarrow$ $X_{22}$ regulier.
Bewijs dat als $A_{11}$ regulier is geldt $A_{11}^{-1} = X_{11.2} := X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$.

24. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en regulier, $B \in \mathcal{M}_{n,k}$, $C \in \mathcal{M}_{k,n}$.
$F := A + BC$, $G := I + CA^{-1}B$.
Bewijs dat: F regulier $\Leftrightarrow$ G regulier.
Druk, als F regulier is, $F^{-1}$ uit in $A^{-1}$, $G^{-1}$, B en C.

Antwoord. $F^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BG^{-1}CA^{-1}$.

25. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ regulier, $D \in \mathcal{M}_{k,k}$ regulier, $B \in \mathcal{M}_{n,k}$, $C \in \mathcal{M}_{k,n}$.
$F := A - BD^{-1}C$, $G := D - CA^{-1}B$.
Dan geldt: $k + r(F) = n + r(G)$. Als F en G regulier zijn dan is $F^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BG^{-1}CA^{-1}$.

26. Zij A $n\times n$ regulier, B : $n\times 1$ en C : $1\times n$.
Bewijs dat $A + BC$ regulier $\Leftrightarrow$ $I + CA^{-1}B \neq 0$ en druk $(A+BC)^{-1}$ uit in $A^{-1}$, B en C.

27. Zij A regulier en zij $A = (A_1|A_2)$, $A^{-1} = X = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right)$ met $A_1$ : $n\times 1$ en $X_1$ : $1\times n$.
Zij

$$B = (A_1 + E_1|A_2).$$

Bewijs dat B regulier $\Leftrightarrow$ $I + X_1E_1 \neq 0$ en druk $B^{-1}$ uit in $X_1$, $X_2$ en $E_1$.

28. Zij $A$ : $n \times n$ en

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & 0 \end{array}\right)$$

met $A_{11}$ : $(n-1)\times(n-1)$.
Als $A_{11}$ regulier is dan geldt: $A$ regulier $\Leftrightarrow A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \neq 0$.
Als $A_{11}$ singulier is dan geldt:

$$A \text{ regulier} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{rang}(A_{11}|A_{12}) = n-1. \\ \operatorname{rang}\left(\begin{array}{c} A_{11} \\ \hline A_{21} \end{array}\right) = n-1. \end{cases}$$

29. Zij $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$

met $A_{11}$ : $m_1 \times n_1$, rang $r_1$

$A_{22}$ : $m_2 \times n_2$, rang $r_2$ .

Dan is

$$r_1 + r_2 \leq r(A) \leq \min(r_1+m_2,\ r_2+n_1) .$$

Als $A_{11}$ linksregulier is of $A_{22}$ rechtsregulier, dan gelden beide gelijktekens.

# Hoofdstuk II. Vectorruimten en matrices

## 5. Inleiding.

### 5.1. Vectorruimte.

**Definitie.**

Zij $\mathcal{L}$ een commutatief lichaam met elementen $\lambda$, $\mu$, $\xi$, $\eta$ ... .
Een vectorruimte $\mathcal{V}$ over $\mathcal{L}$ is een verzameling met elementen $\underline{u}$, $\underline{v}$, ... met daarop twee operaties:

a) optelling : $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$

eigenschappen : $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

$\exists \underline{o} : \underline{u} + \underline{o} = \underline{o} + \underline{u} = \underline{u}$

$\forall \underline{u} \; \exists (-\underline{u}) : \underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{o}$

b) scalaire vermenigvuldiging: $\mathcal{L} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\alpha\underline{u} = \underline{v}$

eigenschappen $(\alpha\beta)\,\underline{u} = \alpha(\beta\underline{u})$

$(\alpha + \beta)\,\underline{u} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{u}$

$\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$

$1 .\ \underline{u} = \underline{u}$ . (5.1.1)

**Definities.**

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ heet lineaire deelruimte van $\mathcal{V}$ als $\mathcal{V}'$ met de operaties uit $\mathcal{V}$ weer een vectorruimte is. (5.1.2)

  dus: $\underline{u} \in \mathcal{V}'$, $\underline{v} \in \mathcal{V}' \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in \mathcal{V}'$

  $\underline{u} \in \mathcal{V}'$, $\alpha \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha\underline{u} \in \mathcal{V}'$ .

- $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n \in \mathcal{V}$ heten afhankelijk als er $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{L}^n$ $\neq (o, \ldots, o)$ is z.d.d. $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \underline{u}_i = \underline{o}$ . (5.1.3)

- $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n \in \mathcal{V}$ heten onafhankelijk als ze niet afhankelijk zijn. (5.1.4)

Stelling. $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n \in \mathcal{V}$ onafhankelijk $\Leftrightarrow$ $(\forall(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathcal{L}^n$: $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \underline{u}_i = \underline{o} \Rightarrow$ $\forall 1 \leq i \leq n : \xi_i = 0)$. (5.1.5)

Definitie. Zij $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n \in \mathcal{V}$ dan heet $[\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n] :=$

$\{\underline{u} \mid \exists(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathcal{L}^n : \underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \underline{u}_i\}$ het lineaire opspansel van $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$. (5.1.6)

Stelling. $[\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n]$ is een lineaire deelruimte van $\mathcal{V}$. (5.1.7)

Definitie. $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ vormen een basis van $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ als :

1. $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ onafhankelijk zijn
2. $[\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n] = \mathcal{V}'$. (5.1.8)

Stelling. $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ basis van $\mathcal{V}'$ $\Leftrightarrow$ $\forall \underline{u} \in \mathcal{V}' \exists! (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ :

$\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \underline{u}_i$. (5.1.9)

Definities.

- $\mathcal{V}$ heet eindig dimensionaal als er $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ zijn zodat $\mathcal{V} = [\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n]$. (5.1.10)
- $\mathcal{V}$ heet oneindig dimensionaal als $\mathcal{V}$ niet eindig dimensionaal is. (5.1.11)

Stellingen.

- $\mathcal{V}$ is oneindig dimensionaal $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n) \in \mathcal{V}^n$ $\exists \underline{u}_{n+1} \in \mathcal{V} : \underline{u}_{n+1} \notin [\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n]$. (5.1.12)
- $\mathcal{V}$ eindig dimensionaal en $\mathcal{V}'$ lineaire deelruimte van $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{V}'$ is eindig dimensionaal. (5.1.13)

5.2. Lineaire afbeeldingen.

Definitie.

- Zij $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ vectorruimten over $\mathcal{L}$. $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ heet lineair als $\forall \underline{u},\underline{v} \in \mathcal{V}_1 \; \forall \alpha,\beta \in \mathcal{L} : \mathcal{A}(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = \alpha\mathcal{A}\underline{u} + \beta\mathcal{A}\underline{v}$. (5.2.1)

- $N(\mathcal{A}) := \{\underline{u} \in \mathcal{V}_1 \mid \mathcal{A}\underline{u} = \underline{o}\}$ (nulruimte van A)

  $R(\mathcal{A}) := \{\underline{v} \in \mathcal{V}_2 \mid \exists \underline{u} \in \mathcal{V}_1 : \underline{v} = \mathcal{A}\underline{u}\}$ (range van A). (5.2.2)

Stelling. Als $\mathcal{A}$ lineair is dan geldt: $N(\mathcal{A})$ is een lineaire deelruimte van $\mathcal{V}_1$ en $R(\mathcal{A})$ is een lineaire deelruimte van $\mathcal{V}_2$. (5.2.3)

Definities.

- $\mathcal{A}$ heet een-eenduidig als $N(\mathcal{A}) = \{\underline{o}\}$. (5.2.4)

- $\mathcal{A}$ heet een afbeelding op $\mathcal{V}_2$ als $R(\mathcal{A}) = \mathcal{V}_2$. (5.2.5)

Stelling. Als $\mathcal{A}$ een-eenduidig en op is dan heeft $\mathcal{A}$ een inverse $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_1$. (5.2.6)

Definitie. $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ heten isomorf als $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ een-eenduidig op elkaar kunnen worden afgebeeld. (5.2.7)

5.3. De vectorruimte $\mathcal{L}^m$.

Definitie. De vectorruimte $\mathcal{L}^m$ heeft elementen $\underline{x}$, $\underline{y}$,... met $\underline{x} = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ en $\forall 1 \le i \le m : \xi_i \in \mathcal{L}$. (5.3.1)
Als bovendien $\underline{y} = (\eta_1,\ldots,\eta_m)$ dan

$\underline{x} + \underline{y} := (\xi_1 + \eta_1,\ldots,\xi_m + \eta_m)$ en $\alpha\underline{x} := (\alpha\xi_1,\ldots,\alpha\xi_m)$

($\xi_i$ noemen we kental of component).

Opgave

30. Ga na dat $\mathcal{L}^m$ een vectorruimte is.

Definitie. $\underline{e}_k := (0,\ldots0,1,0,\ldots,0)$ waarin de 1 op de k-de plaats staat. (5.3.2)

Stellingen.

- $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$ vormen een basis voor $\mathcal{L}^m$. (5.3.3)
  We noemen $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m$ de natuurlijke basis van $\mathcal{L}^m$.

- $\mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{L})$ is, met de optelling en scalaire vermenigvuldiging van matrices een vectorruimte. (5.3.4)

- $\mathcal{M}_{m,1}$ is isomorf met $\mathcal{L}^m$. (5.3.5)

Bewijs. Voeg aan $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ toe $\underline{x} = (\xi_1,\dots,\xi_m)$. Laat zien dat dit een isomorfie is.

Afspraak: elementen uit $\mathcal{M}_{m,1}$ noemen we voortaan x,y,... .

Analoog : $\mathcal{M}_{1,m}$ is isomorf met $\mathcal{L}^m$. $(\xi_1,\dots,\xi_m) \in \mathcal{M}_{1,m}$ noteren we als $x^T$.

Definities.

- Zij $A = (a_1 | \dots | a_n) \in \mathcal{M}_{m,n}$ $(a_i \in \mathcal{M}_{m,1})$, dan heten $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ de kolomvectoren van A (rijvectoren analoog).
  Als $A = (\alpha_{ij})$ dan $\underline{a}_k = (\alpha_{1k},\dots,\alpha_{mk})$. (5.3.6)

- Zij $A = (a_1 | \dots | a_n) \in \mathcal{M}_{m,n}$ dan $\mathcal{V}_A := [\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n] \subset \mathcal{L}^m$. (5.3.7)

Stellingen.

- $\underline{y} \in \mathcal{V}_A \iff y \in R(A)$ . (5.3.8)

- $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ vormen een basis van $\mathcal{V}_A \iff \underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ lineair onafhankelijk $\iff$ A is RR $\iff r(A) = n$. (5.3.9)

Bewijs. We bewijzen alleen de tweede equivalentie.

$$\text{A is RR} \iff (\forall x \in \mathcal{M}_{n,1} : AX = 0 \implies X = 0)$$

$$\iff \forall(\xi_1,\dots,\xi_n) : (\sum_{i=1}^{n} \xi_i \underline{a}_i = \underline{o} \implies \forall_i : \xi_i = 0)$$

$$\iff \underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n \text{ lineair onafhankelijk.}$$

q.e.d.

- $\mathcal{V}_A = \mathcal{L}^m \iff$ A heeft rechterinverse. (5.3.10)

Bewijs. $\mathcal{V}_A = \mathcal{L}^m \iff \forall \underline{y} \in \mathcal{L}^m\ \exists \underline{x} \in \mathcal{L}^n : y = Ax \iff$ A is RI (zie (4.2.9)).

q.e.d.

- $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vormen een basis van $\mathcal{L}^m \Leftrightarrow$ A is regulier $\Rightarrow m = n$. (5.3.11)

Bewijs. De eerste equivalentie volgt uit (5.3.10) en (5.3.9).
($A$ is regulier $\Rightarrow m = n$) volgt uit (3.3.1).

- $\mathcal{V}_A \subset \mathcal{V}_B \Leftrightarrow \exists C : A = BC \Rightarrow r(A) \leq r(B)$. (5.3.12)

Bewijs. Zelf!

Gevolg. $\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B \Rightarrow r(A) = r(B)$ . (5.3.13)

- Iedere deelruimte $\mathcal{V}$ van $\mathcal{L}^m$ heeft een basis. (5.3.14)

Bewijs. $\mathcal{V}$ is eindig dimensionaal, er is dus een $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ z.d.d. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_A$. Zij $A = B_1 C_1$ met $B_1$ RR en $C_1$ LR, dan is $\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_{B_1}$ (ga na) en volgens (5.3.9) vormen de kolommen van $B_1$ een basis van $\mathcal{V}_{B_1}$, dus van $\mathcal{V}$.

- $\mathcal{V}$ lineaire deelruimte van $\mathcal{L}^m \Rightarrow$ iedere basis van $\mathcal{V}$ heeft evenveel elementen. (5.3.15)

Bewijs. Zij $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ een basis voor $\mathcal{V}$ en $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_\ell$ een basis voor $\mathcal{V}$.
$A := (a_1 | \ldots | a_k)$ en $B := (b_1 | \ldots | b_\ell)$.
$\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B = \mathcal{V}$ en dus $r(A) = r(B)$ (zie 5.3.13). Volgens (5.3.9) zijn $A$ en $B$ RR. Met (3.3.1) volgt dan dat $k = \ell$. q.e.d.

Definitie. De dimensie van een eindig dimensionale vectorruimte $\mathcal{V}$ is het aantal elementen van een basis van $\mathcal{V}$. Notatie: $\dim(\mathcal{V})$. (5.3.16)

Stelling. $\dim(\mathcal{L}^m) = m$. (5.3.17)

Stelling. $\dim(\mathcal{V}_A) = r(A)$. (5.3.18)

Bewijs. Volgens (3.5.1) geldt $A = B_1 C_1$. $C_1$ is RI, dus er is een $V_1$ zodanig dat $B_1 = AV_1$. Met (5.3.12) volgt dan dat $\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B$.

Stelling. Zij $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{L}^m$ dan is:

1. $\dim(\mathcal{V}') \leq \dim(\mathcal{V})$ en
2. $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \Leftrightarrow \dim(\mathcal{V}') = \dim(\mathcal{V})$ . (5.3.19)

Bewijs.

1. Zij $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_A$ en $\mathcal{V} = \mathcal{V}_B$ dan $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \Rightarrow \exists_C : A = BC$ en volgens (4.1.13) en (5.3.12) is dus $\dim(\mathcal{V}') = \dim(\mathcal{V})$.

2. " $\Leftarrow$ " : we kunnen B zo kiezen dat B RR is (dus moeten de kolommen van B een basis van $\mathcal{V}$ vormen).
$\dim(\mathcal{V}') = \dim(\mathcal{V}) \Rightarrow r(A) = r(B) =: r$.
B is RR $\Rightarrow$ B heeft "breedte" r $\Rightarrow$ C heeft "hoogte" r $\Rightarrow r(C) \leq r$, volgens (4.1.13) is $r(C) \geq r$ dus $r(C) = r$ en met (3.3.1) is C nu RI dus $B = AC^{-1}$.
(5.3.12) geeft nu dat $\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B$.
" $\Rightarrow$ " : triviaal. q.e.d.

Opgave

31. Bewijs dat algemeen geldt
Als $A = BC$ en $r(A) = r(B)$ dan is er een matrix D, zodat $B = AD$.

## 5.4. Uitbreidingsstellingen

Stelling. Als $\mathcal{V}$ een echte deelruimte is van $\mathcal{L}^m$ en $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ is een basis voor $\mathcal{V}$ dan zijn er vectoren $\underline{a}_{n+1},\ldots,\underline{a}_m$ zodanig dat $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m)$ een basis voor $\mathcal{L}^m$ is. (5.4.1)

Bewijs. Zij $A_1 := (a_1| \ldots |a_n)$, dan is volgens (5.3.9) $A_1$ RR en dus (zie 3.3.2) uit te breiden tot een reguliere m×m-matrix:

$$A = (A_1|A_2) .$$

Kennelijk geldt er $\mathcal{V}_A = \mathcal{L}^m$.
Neem dus voor $\underline{a}_{n+1},\ldots,\underline{a}_m$ de kolommen van $A_2$. q.e.d.

Stelling. Zij $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{L}^m$ met $\mathcal{V}' \neq \mathcal{V}$ en $\dim(\mathcal{V}) = n$, en
zij $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k)$ een basis voor $\mathcal{V}'$,
dan zijn er vectoren $\underline{a}_{k+1},\ldots,\underline{a}_n$, zodat $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ een basis voor $\mathcal{V}$ is.
(5.4.2)

Bewijs. Doe dit zelf.

Stelling. Als $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{L}^m$ met $\mathcal{V}' \neq \mathcal{V}$ en $(\underline{a}\ ,\ldots,\underline{a}_k)$ en $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ zijn bases voor resp. $\mathcal{V}'$ en $\mathcal{V}$, dan is er een n-dimensionale permutatie $\pi$ zodat $(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k, \underline{b}_{\pi(k+1)},\ldots,\underline{b}_{\pi(n)})$ een basis voor $\mathcal{V}$ is. (5.4.3)

Bewijs. Volgens (5.3.12) is er een matrix C zodat A = BC met A := $(a_1| \dots |a_k)$ en B := $(b_1| \dots |b_n)$.
A is RR, dus C is RR (ga na!) en er is dus volgens opgave 10 een permutatie-matrix P zodat PC = $\begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \hline \bar{C}_2 \end{pmatrix}$ met $\bar{C}_1$ : k×k en regulier.

Zij nu

$$\bar{B} := BP^T = (\bar{B}_1 | \bar{B}_2) ,$$

dan geldt

$$A = (\bar{B}_1 | \bar{B}_2) \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \hline \bar{C}_2 \end{pmatrix}$$

en ook

$$(A \mid \bar{B}_2) = (\bar{B}_1 \mid \bar{B}_2) \left(\begin{array}{c|c} \bar{C}_1 & 0 \\ \hline \bar{C}_2 & I_2 \end{array}\right) .$$

Omdat $\left(\begin{array}{c|c} \bar{C}_1 & 0 \\ \hline \bar{C}_2 & I_2 \end{array}\right)$ regulier is, spannen de kolommen van $(A| \bar{B}_2)$ en van $(\bar{B}_1 | \bar{B}_2)$ dezelfde ruimte op. q.e.d.

## 5.5. $\mathcal{M}_{m,n}$ en de lineaire afbeeldingen van $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{L}^m$

Definitie. Zij $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$, lineair,
$(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ de natuurlijke basis voor $\mathcal{L}^n$,
$(\tilde{\underline{e}}_1,\dots,\tilde{\underline{e}}_m)$ de natuurlijke basis voor $\mathcal{L}^m$ en
$\alpha_{ij}$ gedefinieerd door $\mathcal{A}\,\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\, \tilde{\underline{e}}_i$ ,

dan heet de matrix A := $(\alpha_{ij})$ de matrix van de afbeelding $\mathcal{A}$ t.o.v. de natuurlijke bases in $\mathcal{L}^n$ en $\mathcal{L}^m$. (5.5.1)

Dus $\quad A = (a_1 | \dots | a_n)$ zodanig dat $\underline{a}_j = \mathcal{A}\,\underline{e}_j$. (5.5.2)

Stelling. Zij $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$, lineair en A de bijbehorende matrix t.o.v. de natuurlijke bases in $\mathcal{L}^n$ en $\mathcal{L}^m$ dan geldt voor iedere $\underline{x} \in \mathcal{L}^n$

$$\underline{y} = \mathcal{A}\,\underline{x} \iff y = Ax . \qquad (5.5.3)$$

Bewijs. Reken maar na.

Uit het vorenstaande volgt dat de verzameling van lineaire afbeeldingen van $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{L}^m$ 1-1 duidig kan worden afgebeeld <u>op</u> $\mathcal{M}_{m,n}$ (ga dit na).
Als het beeld van $\mathcal{A}$ de matrix A is schrijven we $\mathcal{A} \sim A$.
Het is nu eenvoudig in te zien dat als $\mathcal{A} \sim A$ en $\mathcal{B} \sim B$ en $\lambda \in \mathcal{L}$ dan $\mathcal{A} + \mathcal{B} \sim A + B$ en $\lambda\mathcal{A} \sim \lambda A$ en als bovendien $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^k$ en $\mathcal{B} : \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^m$ dan $\mathcal{A}\mathcal{B} \sim AB$. (Dit laatste is echt niet zo verwonderlijk, want we hebben het produkt van twee matrices zo gedefinieerd dat deze betrekking zou gelden.)
We kunnen dus zeggen dat de ring $\mathcal{M}_{m,n}$ isomorf is met de ring der lineaire afbeeldingen van $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{L}^m$.

<u>Stelling</u>. Zij $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$ met matrix A dan

1. $\dim(R(\mathcal{A})) = r(A)$
2. $\dim(N(\mathcal{A})) = n - r(A)$. (5.5.4)

<u>Bewijs</u>.

1. De vectoren $\underline{a}_j = \mathcal{A}\underline{e}_j$ spannen $R(\mathcal{A})$ op, dus $\dim(R(\mathcal{A})) = \dim(\mathcal{V}_A) = r(A)$.
2. $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{o} \Leftrightarrow Ax = 0$.

We hebben in (4.2.4) gezien dat het stelsel $AX = 0$ een oplossing $X_0 \in \mathcal{M}^{n-r}_{n,n-r}$ heeft ($r := r(A)$). Met (4.2.5) geeft dit $A\underline{x} = \underline{o} \Leftrightarrow \exists_z\, [x = X_0 z] \Leftrightarrow x \in \mathcal{V}_{X_0}$.
Dus $N(\mathcal{A}) = \mathcal{V}_{X_0}$ en dus ook $\dim(N(\mathcal{A})) = \dim(\mathcal{V}_{X_0}) = r(X_0) = n - r(A)$. q.e.d.

<u>Gevolgen</u>

1. $\dim(R(\mathcal{A})) + \dim(N(\mathcal{A})) = n$.
2. $\mathcal{A}$ is een afbeelding van $\mathcal{L}^n$ op $\mathcal{L}^m \Leftrightarrow r(A) = m$ (dus A is LR).
3. $\mathcal{A}$ is een-eenduidig $\Leftrightarrow r(A) = n$ (dus A is RR).
4. $\mathcal{A}$ heeft een inverse $\Leftrightarrow r(A) = n = m$ (dus A is regulier).
5. $\mathcal{L}^n$ en $\mathcal{L}^m$ zijn dan en slechts dan isomorf als $n = m$. (5.5.5)

Als $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ (behorend bij $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$) dan geldt volgens (3.2.1)

$$A = BJC.$$

Als $V := C^{-1} = (V_1 \mid V_2)$ dan

$$AV = BJ = (B_1 \mid B_2)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dus $AV_1 = B_1$ en $AV_2 = 0$ en $Ax = 0 \Leftrightarrow \exists_z\, [x = V_2 z]$ (zie 4.2.5).

Zij $B = (b_1 | \dots | b_m)$ en $V = (v_1 | \dots | v_n)$ dan krijgen we als we dit geheel in *vectortaal vertalen:*

1. $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ is een basis voor $\mathcal{L}^n$
   $(\underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n)$ is een basis voor $N(\mathcal{A})$. (5.5.6)
2. $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m)$ is een basis voor $\mathcal{L}^m$
   $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$ is een basis voor $R(\mathcal{A})$. (5.5.7)
3. $\underline{v}_j = \begin{cases} \underline{b}_j & \text{als } 1 \le j \le r \\ \underline{o} & \text{als } r < j \le n \,. \end{cases}$ (5.5.8)

Stelling. Zij $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$ en $\dim(R(\mathcal{A})) = r$,
$(\underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n)$ een basis voor $N(\mathcal{A})$
$(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_r)$ zodanig dat $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ een basis voor $\mathcal{L}^n$ is en
$\underline{b}_j := \mathcal{A}\underline{v}_j$ als $1 \le j \le r$,
dan is $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$ een basis voor $R(\mathcal{A})$. (5.5.9)

Bewijs. Zij $\underline{x} \in \mathcal{L}^n$ dus $\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \underline{v}_j$ en $\mathcal{A}\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A}\underline{v}_j = \sum_{j=1}^{r} \xi_j \underline{b}_j$,
dus

$$R(\mathcal{A}) \subset [\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r] \,. \qquad (*)$$

We tonen nu aan dat de $b_i$'s onafhankelijk zijn.

Stel $\sum_{j=1}^{r} \eta_j \underline{b}_j = \underline{o} \Rightarrow \mathcal{A}(\sum_1^r \eta_j \underline{v}_j) = \underline{o} \Rightarrow \sum_1^r \eta_j \underline{v}_j \in N(\mathcal{A}) = [\underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n]$,

$\Rightarrow \sum_1^r \eta_i \underline{v}_j = \underline{o}$ dus, want de $\underline{v}_j$'s zijn onafhankelijk, moet $\forall_j \ \eta_j = 0$.

De $\underline{b}_j$'s zijn dus onafhankelijk.
Dus is $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$ een basis en daar $\dim([\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r]) = \dim R(\mathcal{A})$ volgt met (*) de bewering van de stelling. q.e.d.

Opgave

32. Bewijs bovenstaande stelling met behulp van matrixtheorie (met inverteerbaarheid en rechtsregulariteit e.d.).

## 5.6. Een alternatieve opzet

We hebben in het voorgaande het begin van de theorie van de eindig-dimensionale lineaire ruimten afgeleid met behulp van matrixtheorie en met name met het enige niet-triviale stuk gereedschap dat we daar ontwikkeld hebben: de splitsings- en uitbreidingsstellingen.
Kan het ook omgekeerd? Het antwoord op deze vraag is bevestigend.
Het essentiële gereedschap, waarmee men bij de opbouw van de theorie der eindig dimensionale lineaire ruimten de matrixtheorie kan omzeilen is de zogenaamde Austauschsatz van Steiner (of een variant daarvan):

Stelling. Zij $1 \le k \le n$,
$(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{k-1}, \underline{b}_k,\dots,\underline{b}_n)$ een basis voor een vectorruimte $\mathcal{V}$,
$\underline{a}_k \in \mathcal{V}$ en onafhankelijk van $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{k-1}$,
dan is er een permutatie $\pi$ van $\{k,\dots,n\}$ zodanig dat
$(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k, \underline{b}_{\pi(k+1)},\dots,\underline{b}_{\pi(n)})$ een basis voor $\mathcal{V}$ is. (5.6.1)

Bewijs. $\underline{a}_k \in \mathcal{V}$, dus $\underline{a}_k = \sum_1^{k-1} \alpha_i \underline{a}_i + \sum_k^n \beta_i \underline{b}_i$ .

Omdat $\underline{a}_k \notin [\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{k-1}]$ zijn niet alle $\beta_i$ nul. Er is dus een permutatie $\pi$ van $\{k,\dots,n\}$ zodanig dat $\beta_{\pi(k)} \neq o$ en dus

$$\underline{b}_{\pi(k)} = \sum_1^k \gamma_i \underline{a}_i + \sum_{k+1}^n \gamma_i \underline{b}_{\pi(i)} .$$

Hieruit volgt (ga na!) dat $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k, \underline{b}_{\pi(k+1)},\dots,\underline{b}_{\pi(n)}$ $\mathcal{V}$ opspannen, maar ze zijn ook onafhankelijk omdat $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_{k-1}, \underline{b}_{\pi(k+1)},\dots,\underline{b}_{\pi(n)}$ onafhankelijk zijn en $\underline{a}_k$ niet in de door deze vectoren opgespannen deelruimte ligt. q.e.d.

Uit deze stelling volgt (ga na) dat iedere basis van $\mathcal{V}$ evenveel elementen heeft, zodat de definitie van dimensie zinvol wordt. Vervolgens kan men met de Austauschsatz uitbreidingsstellingen zoals bijv. (5.4.2) bewijzen. Met deze uitbreidingsstelling volgt voor een lineaire afbeelding van een $\mathcal{V}_1$ in een $\mathcal{V}_2$ (na de definitie van $N(\mathcal{A})$ en $R(\mathcal{A})$ en het bewijs dat dit lineaire deelruimten van $\mathcal{V}_1$ resp. $\mathcal{V}_2$ zijn) de stelling ((5.5.6) t/m (5.5.8)):
Er is een $r$ met $r \le \min(m,n)$ en er zijn bases $(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ voor $\mathcal{V}_1$ en $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m)$ voor $\mathcal{V}_2$ zodanig dat: $(\underline{v}_{r+1},\dots,\underline{v}_n)$ een basis voor $N(\mathcal{A})$ is, $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$ een basis voor $R(\mathcal{A})$ is en $\mathcal{A}\,\underline{v}_j = \begin{cases} \underline{b}_j & \text{als } j \le r \\ \underline{o} & \text{als } j > r \end{cases}$ . (5.6.2)

Nu naar de matrixtheorie.

$A = (a_1 | \dots | a_n) \in \mathcal{M}_{m,n}$. Door vergelijking van definities volgt:

$(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ is een basis voor $\mathcal{V}_A \iff A$ is RR.

$\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ spannen $\mathcal{L}^m$ op $\iff A$ is LI.

Met de Austauschsatz en de uitbreidingsstelling volgt nu (ga na):
Als $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ RR is dan is $n \le m$; als $n = m$ dan is A RI en dus inverteerbaar en regulier (zie (1.4.6)); als $n < m$ is dan kan A worden uitgebreid tot een regulier matrix $(A \mid A')$, deze is inverteerbaar, dus A is LI (ga na). Met name geldt dus: $(\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)$ is een basis voor $\mathcal{L}^m \iff m = n$ en A is inverteerbaar.
Door naar de rijvectoren van A te kijken volgen analoog de "gespiegelde" resultaten.

Om de algemene splitsingsstelling te krijgen moeten we A identificeren met een lineaire afbeelding van $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{L}^m$. Stelling (5.6.2) zegt dan: er is een $r \le \min(m,n)$, en er zijn inverteerbare matrices $V \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $B \in \mathcal{M}_{m,m}$ zodanig dat:

$$AV = A(V_1|V_2) = (B_1|0) = (B_1|B_2)\left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = BJ \text{ met } I_1 : r\times r \ .$$

Met $C := V^{-1}$ volgt nu $A = BJC$ .

Opgave

33. $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ zijn deelruimten van $\mathcal{L}^m$, $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ en $\mathcal{V}_3 := \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \{z \mid \exists_{x\in\mathcal{V}_1} \exists_{y\in\mathcal{V}_2} [z = x+y]\}$.

a) Bewijs dat $\mathcal{V}_0$ en $\mathcal{V}_3$ deelruimten van $\mathcal{L}^m$ zijn.

b) Bewijs met de theorie van vectorruimten dat
$$\dim(\mathcal{V}_3) = \dim(\mathcal{V}_1) + \dim(\mathcal{V}_2) - \dim(\mathcal{V}_0) \ . \qquad (*)$$

Hint: neem basis $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p)$ voor $\mathcal{V}_0$, vul hem enerzijds aan met $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_q$ tot basis voor $\mathcal{V}_1$ en anderzijds met $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_r$ tot basis voor $\mathcal{V}_2$ en bewijs dat $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_p, \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_q, \underline{w}_1,\dots,\underline{w}_r)$ een basis voor $\mathcal{V}_3$ is.

c) Als A en B RR zijn en $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_A$ en $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_B$ bewijs dan dat
$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_{(A|B)}$ en dat $z \in \mathcal{V}_0 \iff \exists_{x,y} \left(\frac{x}{-y}\right) \in N((A|B))$ en $z = Ax = By]$
en dat $\left(\frac{x}{-y}\right) \neq 0 \iff z \neq 0$ .

Leid hieruit af dat $\dim(\mathcal{V}_0) = \dim(N((A|B)))$. Hieruit volgt (*) (ga na).

d) Bewijs dat

$$\dim(\mathcal{V}_1) + \dim(\mathcal{V}_2) - m \le \dim \mathcal{V}_0 \le \min(\dim(\mathcal{V}_1), \dim(\mathcal{V}_2)).$$

## 6. Abstracte eindig dimensionale vectorruimten

### 6.1. Coördinatisering van eindig dimensionale vectorruimten

Definitie. Zij $\mathcal{V}$ een eindigdimensionale vectorruimte met basis $(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m)$. Bij $\underline{u} \in \mathcal{V}$ zijn er dan eenduidig bepaalde $\xi_1,\dots,\xi_m$ zodanig dat $\underline{u} = \sum_1^m \xi_j \underline{u}_j$. De vector $\underline{x} \in \mathcal{L}^m$ met $\underline{x} := (\xi_1,\dots,\xi_m)$ heet coördinatenvector van $\underline{u}$ t.o.v. de basis $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m$. (6.1.1)

Stelling. De afbeelding $\mathcal{C} : \mathcal{V} \to \mathcal{L}^m$ gedefinieerd door $\mathcal{C}\,\underline{u} = \underline{x}$ is lineair, één-éénduidig en op.
$\mathcal{C}$ heet coördinatiserende afbeelding. (6.1.2)

Gevolg. $\mathcal{C}$ heeft een inverse $\mathcal{C}^{-1}$; $\mathcal{C}\,\underline{u}_j = \underline{e}_j$, $\mathcal{C}^{-1}\,\underline{e}_j = \underline{u}_j$. (6.1.3)

Stelling. Als $\mathcal{V}$ een basis van m elementen heeft, dan is $\mathcal{V}$ isomorf met $\mathcal{L}^m$. (6.1.4)

Gevolg. Iedere basis van $\mathcal{V}$ heeft evenveel elementen. (6.1.5)

Definitie. De dimensie van $\mathcal{V}$ is het aantal elementen van een basis van $\mathcal{V}$. (6.1.6)

Zij $\mathcal{V}$ een eindig dimensionale vectorruimte met twee bases $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m$ en $\underline{u}'_1,\dots,\underline{u}'_m$ en stel $\underline{u}'_j = \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\, \underline{u}_i$. Zij $\underline{u} \in \mathcal{V}$ met coördinatenvectoren $\underline{x} = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ en $\underline{x}' = (\xi'_1,\dots,\xi'_m)$ dan geldt

$$\underline{u} = \sum_{j=1}^m \xi'_j\, \underline{u}'_j = \sum_{j=1}^m \xi'_j \left(\sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\, \underline{u}_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}\, \xi'_j\right)\underline{u}_i = \sum_{i=1}^m \xi_i\, \underline{u}_i,$$

dus $$\xi_i = \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}\, \xi'_j \,. \qquad (6.1.7)$$

<u>Definitie</u>. We definiëren de matrix S door $S := (\sigma_{ij})$. S heet overgangsmatrix van basis $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m$ naar basis $\underline{u}'_1,\dots,\underline{u}'_m$.
Dan geldt dus $x = Sx'$ . (6.1.8).

<u>Stelling</u>. Zij $\mathcal{S} := \mathcal{C}(\mathcal{C}')^{-1}$ de afbeelding die de coördinatenvector $\underline{x}'$ transformeert in $\underline{x}$. Dan is S de matrix van $\mathcal{S}$ t.o.v. de natuurlijke bases in $\mathcal{L}^m$. (6.1.9)

<u>Bewijs</u>. $\mathcal{S}\underline{e}_j = \mathcal{C}(\mathcal{C}')^{-1}\underline{e}_j = \mathcal{C}\underline{u}'_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_{ij}\,\mathcal{C}\underline{u}_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_{ij}\,\underline{e}_i =: \underline{s}_j$ .

De componenten van $\underline{s}_j$ zijn de elementen van de j-de kolom van S. q.e.d.

<u>Opmerking</u>. We kunnen het voorafgaande ook anders benaderen. Als $\underline{u} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{C}\underline{u} = \underline{x}$ en $\mathcal{C}'\underline{u} = \underline{x}'$ dan is $\underline{x} = \mathcal{C}(\mathcal{C}')^{-1}\,\underline{x}' = \mathcal{S}\underline{x}'$ en $x = Sx'$. (6.1.10)

<u>Opgave</u>

34. Als voor $\mathcal{V}$ gegeven zijn de bases $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m$, $\underline{u}'_1,\dots,\underline{u}'_m$ en $\underline{u}''_1,\dots,\underline{u}''_m$ met bijbehorende coördinatiserende afbeeldingen $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}''$ druk dan de afbeeldingen $\mathcal{S}_{21}$, $\mathcal{S}_{32}$ en $\mathcal{S}_{31}$ uit in $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}''$ en bewijs dat $\mathcal{S}_{31} = \mathcal{S}_{21} \circ \mathcal{S}_{32}$ .

<u>Opmerking</u>. Daar iedere m dimensionale vectorruimte $\mathcal{V}$ isomorf is met $\mathcal{L}^m$ (zie 6.1.4) gelden de stellingen over $\mathcal{L}^m$ ook voor $\mathcal{V}$. (6.1.11)

<u>Voorbeeld</u>. $\mathcal{V}$ is de vectorruimte van alle polynomen met coëfficiënten uit $\mathcal{L}$, graad $< m$ en elementen $\underline{p}$.
Basis 1 heeft elementen $\underline{p}_j$ : $p_j(x) := x^{j-1}$, $j = 1,\dots,m$.
Voor $\underline{p} \in \mathcal{V}$ met $p(x) := \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x^{j-1} = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j p_j(x)$ geldt dus $\underline{p} = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \underline{p}_j$.
De afbeelding $\mathcal{C}' : \mathcal{V} \to \mathcal{L}^m$ is gedefinieerd door $\mathcal{C}'\underline{p} = \underline{c}$ met $\underline{c} := (c_1,\dots,c_m)$.
Basis 2 heeft als basiselementen de interpolatiepolynomen van Lagrange,

$$\underline{\ell}_j : \ell_j(x) := \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}\ , \quad j = 1,\dots,m$$

waarbij $x_1,\dots,x_m$ zo gekozen zijn dat $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$.

Dan geldt $p(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} p(x_j)\,\ell_j(x)$.

De afbeelding $\mathcal{C} : \mathcal{V} \to \mathcal{L}^m$ wordt gedefinieerd door

$$\mathcal{C}\underline{p} := (p(x_1),\dots,p(x_m)) =: \underline{b} .$$

Zij nu $\mathcal{S} := \mathcal{C}(\mathcal{C}')^{-1}$, dan is $\underline{b} = \mathcal{S}\underline{c}$ .

Dus $$(b_1,\dots,b_m) = \underline{b} = \mathcal{S}\underline{c} = \mathcal{C}(\mathcal{C}')^{-1}\,\underline{c} =$$

$$= \mathcal{C}\,\underline{p} = \mathcal{C}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\underline{p}_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} c_j\,\mathcal{C}\underline{p}_j =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j x_1^{j-1},\ \sum_{j=1}^{m} c_j x_2^{j-1},\dots,\ \sum_{j=1}^{m} c_j x_m^{j-1}\Big).$$

Dus $\underline{b} = S\underline{c}$ ,

met $$S = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots\dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & \dots\dots & x_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & & \vdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_m & \dots\dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} .$$

Opgave

35. Ga na dat voor iedere $\underline{p}$ geldt $c_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{p(x_k)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{m} (x_k - x_i)}$ .

## 6.2. Lineaire afbeeldlingen van $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$

Definitie. Zij $\mathcal{V}_1$ een n-dimensionale vectorruimte met basis $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$ en $\mathcal{V}_2$ een m-dimensionale vectorruimte met basis $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$.

Zij $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ lineair met $\mathcal{A}\underline{u}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\,\underline{v}_i$.

Dan heet $A := (\alpha_{ij})$ de matrix van afbeelding $\mathcal{A}$ t.o.v. de bases $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$ en $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ .

Als $\underline{u} \in \mathcal{V}_1$, $\underline{u} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\underline{u}_j$ met $\underline{x} := (\xi_1,\dots,\xi_n) = \mathcal{C}_1\underline{u}$ en $\underline{v} = \mathcal{A}\underline{u} \in \mathcal{V}_2$,

$\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} \eta_j\underline{v}_j$ met $\underline{y} := (\eta_1,\dots,\eta_m) = \mathcal{C}_2\underline{v}$ dan is $\underline{y} = \mathcal{C}_2\mathcal{A}\mathcal{C}_1^{-1}\,\underline{x}$, waarbij $\mathcal{C}_2\mathcal{A}\mathcal{C}_1^{-1}$ een afbeelding van $\mathcal{L}^n$ in $\mathcal{L}^m$ is.

Stelling. De matrix van de afbeelding $\mathcal{C}_2\mathcal{A}\mathcal{C}_1^{-1}$ t.o.v. de natuurlijke bases is A. (6.2.2)

Bewijs. Zelf.

Stelling. Zij $\mathcal{V}_1$ een n dimensionale vectorruimte en $\mathcal{V}_2$ een m dimensionale vectorruimte. (6.2.3)
$\mathcal{V}_1$ heeft bases $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$ en $\underline{u}'_1,\dots,\underline{u}'_n$ met bijbehorende $\mathcal{C}_1$ resp. $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{V}_2$ heeft bases $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ en $\underline{v}'_1,\dots,\underline{v}'_m$ met bijbehorende $\mathcal{C}_2$ resp. $\mathcal{C}'_2$.
Zij $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ met A als matrix t.o.v. $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$ en $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ en A' als matrix t.o.v. $\underline{u}'_1,\dots,\underline{u}'_n$ en $\underline{v}'_1,\dots,\underline{v}'_m$. Zij $S_1$ de matrix van $\mathcal{S}_1 := \mathcal{C}_1(\mathcal{C}'_1)^{-1}$ en $S_2$ de matrix van $\mathcal{S}_2 := \mathcal{C}_2(\mathcal{C}'_2)^{-1}$.
Dan geldt: $A' = S_2^{-1} AS_1$.

Bewijs. $\mathcal{C}'_2\mathcal{A}(\mathcal{C}'_1)^{-1} = (\mathcal{C}'_2\mathcal{C}_2^{-1})\mathcal{C}_2\mathcal{A}\mathcal{C}_1^{-1}(\mathcal{C}_1(\mathcal{C}'_1)^{-1}) =$

$= \mathcal{S}_2^{-1}\mathcal{C}_2\mathcal{A}\mathcal{C}_1^{-1}\mathcal{S}_1 \iff A' = S_2^{-1}AS_1$ (wegens 6.2.2). q.e.d.

Gevolg. Als A en A', behorende bij dezelfde afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$, matrices zijn t.o.v. verschillende bases dan zijn A' en A equivalent. (6.2.4)

Opgaven

36. Ook het omgekeerde geldt: als A en A' $\in \mathcal{M}_{m,n}$ equivalent zijn, dan is er een afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$, waarin A, resp. A' de matrices zijn t.o.v. geschikt gekozen paren van bases. Bewijs dit!

37. Gegeven is de vectorruimte $\mathcal{V}$ van de polynomen met graad < m en basiselementen $\underline{p} : p_j(x) := x^{j-1}$.
Zij $\mathcal{A}_\alpha$ gedefinieerd door $\mathcal{A}_\alpha \underline{p} = \underline{q} \iff q(x) = p(x+\alpha)$.
Bepaal de matrix van $\mathcal{A}_\alpha$ en zie in dat $\mathcal{A}_\alpha^{-1} = \mathcal{A}_{-\alpha}$. Verifieer hier rechtstreeks dat $A_1 . A_{-1} = I$. (Voor $\alpha = 1$ heet $A_\alpha$ de Pascalmatrix.)

## 6.3. Lineaire vormen (Functionalen)

Lineaire vormen zijn afbeeldingen van de vorm $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{L}$.
Voor de theorie hierover wordt verwezen naar het dictaat Lineaire Analyse I van prof.dr. N.G.de Bruijn. Probeer zelf delen van deze theorie voor het geval van eindig dimensionale vectorruimten op te schrijven (verband met bases e.d.).

## 7. Vectorruimten met inprodukt (Unitaire vectorruimten)

### 7.1. Inprodukt en orthogonaliteit

Definitie. Een inprodukt in een vectorruimte $\mathcal{V}$ over $\mathcal{L}$ is een afbeelding van $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{L}$; $\underline{u} \in \mathcal{V}$, $\underline{v} \in \mathcal{V} \to (\underline{u},\underline{v}) \in \mathcal{L}$ waarvoor geldt

1. $(\underline{u},\underline{v}) = (\underline{v},\underline{u})$
2. $(\underline{w},\underline{u}+\underline{v}) = (\underline{w},\underline{u}) + (\underline{w},\underline{v})$
3. $(\underline{w},\alpha\underline{u}) = \alpha(\underline{w},\underline{u})$.

Als $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ dan moet ook gelden: $\underline{u} \neq \underline{o} \Rightarrow (\underline{u},\underline{u}) > 0$;
als $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ dan wordt i.p.v. 1. geëist: $(\underline{u},\underline{v}) = \overline{(\underline{v},\underline{u})}$
en weer: $\underline{u} \neq \underline{o} \Rightarrow (\underline{u},\underline{u}) > o$. (7.1.1)

In het vervolg nemen we $\mathcal{L} = \mathbb{C}$ .

Gevolg. $(\alpha\underline{w},\underline{u}) = \overline{(\underline{u},\alpha\underline{w})} = \bar{\alpha}\overline{(\underline{u},\underline{w})} = \bar{\alpha}(\underline{w},\underline{u})$ .

Definitie. $\underline{u}$ en $\underline{v}$ heten orthogonaal als $(\underline{u},\underline{v}) = o$ . (7.1.2.)
Notatie: $\underline{u} \perp \underline{v}$ .

Definitie. $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n \in \mathcal{V}$ heten orthonormaal als $(\underline{u}_i,\underline{u}_j) = \delta_{ij}$ . (7.1.3)

Stelling. Als $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ orthonormaal zijn in de m-dimensionale vectorruimte $\mathcal{V}$ dan zijn ze onafhankelijk. (7.1.4)

Bewijs. Stel $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \underline{u}_j = \underline{o}$ dan $o = (\underline{u}_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \underline{u}_j) = \xi_i$ ,
$i = 1,\ldots,m$. Dus $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ zijn onafhankelijk. q.e.d.

Gevolg. Als $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ orthonormaal zijn in $\mathbb{C}^m$ dan vormen ze een basis.
Voor iedere $\underline{u} \in \mathbb{C}^m$ geldt dan (ga na) $\underline{u} = \sum_{j=1}^{m} (\underline{u}_j,\underline{u})\, \underline{u}_j$; de coördinaten van $\underline{u}$ zijn dan $((\underline{u}_1,\underline{u}),\ldots,(\underline{u}_m,\underline{u}))$ . (7.1.5)

Lemma. Zij $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n$ orthonormaal in $\mathcal{V}$ en $\underline{a} \notin [\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n]$. Dan is er een $\underline{q}_{n+1}$ zodanig dat $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n, \underline{q}_{n+1}$ een orthonormale basis is voor $[\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n, \underline{a}]$. (7.1.6)

Bewijs. Laat $\underline{b} : \underline{a} - \sum_{i=1}^{n} (\underline{q}_i, \underline{a})\, \underline{q}_i$ dan $\underline{b} \perp [\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n]$.

Daar $\underline{a} \notin [\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n]$ geldt $\underline{b} \neq \underline{o}$ .

Definieer: $\underline{q}_{n+1} := \dfrac{\underline{b}}{\sqrt{(\underline{b},\underline{b})}}$ .

Dan is $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n, \underline{q}_{n+1}$ een orthonormale basis voor $[\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n, \underline{a}]$. q.e.d.

(De oplettende lezer herkent hierin direkt een stap van het Gram- Schmidt-proces.)

Stelling. In iedere $\mathcal{V}$ met inprodukt bestaan orthonormale bases. Bij iedere basis $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ zijn er $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_m$ z.d.d. voor $1 \leq n \leq m$ $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_n$ een orthonormale basis is voor $[\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n]$. (7.1.7)

Bewijs. Pas met volledige inductie het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt toe (zie 7.1.6).

Stelling. Als $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ k-dimensionaal is en $\mathcal{V}$ m-dimensionaal is, met $k < m$ dan is de verzameling $\mathcal{V}_2 := \{\underline{v} \in \mathcal{V} \mid \forall \underline{u} \in \mathcal{V}_1 : (\underline{u},\underline{v}) = 0\}$ een $(m-k)$-dimensionale deelruimte van $\mathcal{V}$. Voor iedere $\underline{u} \in \mathcal{V}$ geldt:
$\exists!\, \underline{u}_1 \in \mathcal{V}_1\ \exists!\, \underline{u}_2 \in \mathcal{V}_2 : \underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2,\ \underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$. $\mathcal{V}_2$ heet orthogonale complement van $\mathcal{V}_1$. (7.1.8)

Notatie: $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1^{\perp}$ .

Bewijs. Kies voor $\mathcal{V}_1$ een orthonormale basis. Dit is mogelijk (zie 7.1.7). Breidt deze basis vervolgens uit tot een orthonormale basis voor $\mathcal{V}$. Ga na dat $\mathcal{V}_2$ het lineaire opspansel is van de uitbreiding en dat $\mathcal{V}_1$ en deze $\mathcal{V}_2$ aan het gestelde voldoen. q.e.d.

Stelling. Zij $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ een orthonormale basis voor $\mathcal{V}$ en zij

$$\underline{u} := \sum_{i=1}^{m} \xi_i\, \underline{u}_i \text{ en } \underline{v} := \sum_{i=1}^{m} \eta_i\, \underline{u}_i \text{ en } x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix} \text{ en } y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix},$$

dan is $(\underline{v},\underline{u}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\eta}_i\, \xi_i = (y^H x)_{11}$ (1×1-matrix!) .

<u>Bewijs</u>. $(\underline{v},\underline{u}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (\eta_j \underline{u}_j, \xi_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{\eta}_j \xi_i (\underline{u}_j,\underline{u}_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \bar{\eta}_i \xi_i = (y^H x)_{11} \; . \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Opgave</u>

38. Zij $\mathcal{V}$ een vectorruimte over $\mathbb{C}$ zonder inprodukt en zij $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ onafhankelijk in $\mathcal{V}_1$ dan is er precies één inprodukt in $\mathcal{V}$ z.d.d. $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ orthonormaal zijn t.o.v. dit inprodukt.

<u>Definitie</u>. Een matrix $S \in \mathcal{M}_{m,n}$ heet kolomunitair als $S^H S = I$. (7.1.10)

<u>Opmerking</u>. S heeft een linkerinverse $S^H$ en is dus RR. Als n = m dan is S regulier (zie (3.3.1)) en $S^{-1} = S^H$; S heet dan unitair. (7.1.11)

<u>Stelling</u>. S is dan en slechts dan kolomunitair als de kolomvectoren van S t.o.v. het natuurlijke inprodukt loodrecht op elkaar staan. (7.1.12)

<u>Stelling</u>. Zij $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ met orthonormale bases $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ resp. $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m)$ en S de overgangsmatrix van $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ naar $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m)$ (dus $\underline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} \underline{u}_i$ en $(\sigma_{ij}) = S$). Dan is S kolomunitair. (7.1.13)

<u>Bewijs</u>. $\underline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} \underline{u}_i$. Dus $\delta_{ij} = (\underline{v}_i,\underline{v}_j) = (\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} \underline{u}_k, \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{\ell j} \underline{u}_\ell) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\sigma_{ki}} \sigma_{\ell j} \delta_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\sigma_{ki}} \sigma_{kj} = (S^H S)_{ij},$$

dus $S^H S = I$ . q.e.d.

## 7.2. <u>De geadjungeerde afbeelding</u>

<u>Stelling</u>. Zij $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ vectorruimten, $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ en $\underline{v} \in \mathcal{V}_2$.
Dan geldt

$$\exists! \underline{w} \in \mathcal{V}_1 \; \forall \underline{u} \in \mathcal{V}_1 : (\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) = (\underline{w},\underline{u}) \; . \qquad (7.2.1)$$

Bewijs. Laat $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ bases $(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n)$ resp. $(\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m)$ hebben.

Dan geldt met (7.1.5) voor $\underline{u} \in \mathcal{V}_1$ : $\underline{u} = \sum_{j=1}^{n} (\underline{u}_j,\underline{u})\underline{u}_j$ .

Dus $\mathcal{A}\underline{u} = \sum_{j=1}^{n} (\underline{u}_j,\underline{u})\mathcal{A}\underline{u}_j$ en dus ook $(\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) =$

$$\sum_{j=1}^{n} (\underline{u}_j,\underline{u})\ (\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} ((\overline{\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}_j})\underline{u}_j,\underline{u}) = (\sum_{j=1}^{n} (\mathcal{A}\underline{u}_j,\underline{v})\underline{u}_j,\underline{u}) .$$

Neem dus $\underline{w} := \sum_{j=1}^{n} (\mathcal{A}\underline{u}_j,\underline{v})\underline{u}_j$ .

$\underline{w}$ hangt dan niet van $\underline{u}$ af, dus moeten we alleen de eenduidigheid nog bewijzen.
Stel $\forall\underline{u} \in \mathcal{V}_1$ : $(\underline{w},\underline{u}) = (\underline{w}',\underline{u})$ dan is $\forall\underline{u} \in \mathcal{V}_1$ : $(\underline{w}-\underline{w}',\underline{u}) = 0$.
Neem $\underline{u} = \underline{w} - \underline{w}'$, dan volgt hieruit $\underline{w} = \underline{w}'$ . q.e.d.

In het bovenstaande bewijs hebben we gezien dat $\underline{w} = \sum_{j=1}^{n} (\mathcal{A}\underline{u}_j,\underline{v})\underline{u}_j$.

Dus $\underline{w}$ hangt lineair af van $\underline{v}$, immers $\underline{w}(\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2) = \alpha\underline{w}(\underline{v}_1) + \beta\underline{w}(\underline{v}_2)$.

De afbeelding $\mathcal{A}^* : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_1$ zo dat $\underline{w} = \mathcal{A}^*\underline{v}$ is dus lineair.

We noemen $\mathcal{A}^*$ de aan $\mathcal{A}$ geadjungeerde afbeelding. (7.2.2)

Dit rechtvaardigt de volgende definitie.

Definitie. $\mathcal{A}^*$ is de aan $\mathcal{A}$ geadjungeerde afbeelding als

$\forall\underline{u}\ \forall\underline{v}$ : $(\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) = (\mathcal{A}^*\underline{v}, \underline{u})$ . (7.2.3)

Opgave

39. Bewijs dat $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

Stelling. $N(\mathcal{A}^*) = (R(\mathcal{A}))^\perp$
$R(\mathcal{A}^*) = (N(\mathcal{A}))^\perp$ . (7.2.4)

Bewijs. $\underline{v} \in N(\mathcal{A}^*) \Longleftrightarrow \mathcal{A}^*\underline{v} = \underline{o} \Longleftrightarrow \forall\underline{u} : (\mathcal{A}^*\underline{v},\underline{u}) = 0 \Longleftrightarrow$
$\forall\underline{u} : (\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) = 0 \Longleftrightarrow \underline{v} \in (R(\mathcal{A}))^\perp$.

De tweede gelijkheid gaat analoog. (7.2.5)

Gevolg. (Zie 5.5.4.) Als $\dim(R(\mathcal{A})) = r$ dan $\dim(R(\mathcal{A}^*)) = r$ en $\dim(N(\mathcal{A}^*)) = m-r$, met $m = \dim(\mathcal{V}_2)$ (uit (7.2.2)).

Definitie. Een afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heet zelfgeadjungeerd als $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. (7.2.6)

Stelling. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \iff \forall \underline{u} \in \mathcal{V}\ \forall \underline{v} \in \mathcal{V} : (\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) = (\mathcal{A}\underline{v}, \underline{u})$ . (7.2.7)

Definitie. Een afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ heet linksunitair als $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ is de identieke afbeelding van $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_1$). (7.2.8)

Stelling. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I} \iff \forall \underline{u} \in \mathcal{V}_1\ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_1 : (\mathcal{A}\underline{v}, \mathcal{A}\underline{u}) = (\underline{v}, \underline{u})$ . (7.2.9)

Opgave

40. $\mathcal{A}$ is linksunitair $\Rightarrow r(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{V}_1)$ .

41. Zij $\mathcal{A}$ linksunitair, dan geldt: $\dim(\mathcal{V}_1) = \dim(\mathcal{V}_2) \iff$ A is regulier $\iff \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$.

Opmerking. Als, zoals hierboven $\dim(\mathcal{V}_1) = \dim(\mathcal{V}_2)$ en $\mathcal{A}$ linksunitair is, dan noemen we $\mathcal{A}$ unitair; er geldt dan dat ook

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{I}, \text{ dus } \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*. \qquad (7.2.10)$$

Definitie. Een afbeelding $\mathcal{P} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heet een orthogonale projector van $\mathcal{V}$ op een deelruimte $\mathcal{V}_1$ van $\mathcal{V}$ als:

1. $\mathcal{P}$ zelfgeadjungeerd is
2. $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$
3. $R(\mathcal{P}) = \mathcal{V}_1$ . (7.2.11)

Stelling. Zij $\mathcal{P}$ een orthogonale projector, dan geldt:

1. $\underline{u} \in R(\mathcal{P}) \iff \underline{u} = \mathcal{P}\underline{u}$
2. $\underline{u} \in (R(\mathcal{P}))^\perp \iff \mathcal{P}\underline{u} = \underline{o}$
3. $\forall \underline{u} \in \mathcal{V} : \underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ met $\underline{u}_1 = \mathcal{P}\underline{u} \in R(\mathcal{P})$ en $\underline{u}_2 = (\mathcal{I} - \mathcal{P})\underline{u} \in (R(\mathcal{P}))^\perp$
4. $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ is orthogonale projector op $(R(\mathcal{P}))^\perp$. (7.2.12)

Bewijs. Zelf!

Stelling. Zij $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, dan is er precies één orthogonale projector $\mathcal{P}$ van $\mathcal{V}$ zodat $R(\mathcal{P}) = \mathcal{V}_1$. (7.2.13)

Bewijs. Laat $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m$ een orthonormale basis voor $\mathcal{V}$ zijn, zodanig dat $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ $(n \le m)$ een orthonormale basis voor $\mathcal{V}_1$ is (ga na dat dit kan).
Dan is $\mathcal{P}\underline{u}_j = \underline{u}_j$ voor $j \le n$ en $\mathcal{P}\underline{u}_j = \underline{o}$ voor $j > n$ (want voor $j > n$ ligt $\underline{u}_j$ in $\mathcal{V}_1^{\perp}$).
Derhalve $\mathcal{P}\underline{u} = \mathcal{P}\sum_{j=1}^{m} (\underline{u}_j,\underline{u})\underline{u}_j = \sum_{j=1}^{n} (\underline{u}_j,\underline{u})\underline{u}_j$.
Dit bepaalt $\mathcal{P}$ eenduidig. q.e.d.

Opmerking. We kunnen de eenduidigheid ook rechtstreeks bewijzen:
Laat $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}'$ orthogonale projectoren van $\mathcal{V}$ op $\mathcal{V}'$ zijn, zo dat voor elke vector $\underline{u} \in \mathcal{V}$ (volgens (7.2.12-3)) geldt dat er eenduidig bepaalde $\underline{u}_1 \in \mathcal{V}_1$ en $\underline{u}_2 \in \mathcal{V}_1^{\perp}$ zijn, zodanig dat $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$.
Derhalve is $\mathcal{P}\underline{u} = \underline{u}_1$ en $\mathcal{P}'\underline{u} = \underline{u}_1 = \mathcal{P}\underline{u}$. Dit geldt voor iedere $\underline{u}$, dus $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

## 7.3. Matrices van geadjungeerde afbeeldingen

Stelling. Zij $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$. Zij A de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. orthonormale bases in $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$. Dan is t.o.v. deze bases $A^H$ de matrix van $\mathcal{A}^*$. (7.3.1)

Bewijs. Zelf!

Gevolg. $\mathcal{A}$ is d.e.s.d. zelfgeadjungeerd als $A = A^H$, de matrix A noemen we dan hermitisch.
$\mathcal{A}$ is d.e.s.d. linksunitair als $A^HA = I$, A is dan kolomunitair.
$\mathcal{A}$ is d.e.s.d. een projector als $A = A^H$ en $A^2 = A$. (7.3.2)

Definitie. Een afbeelding $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heet normaal als $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.
Een matrix $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ heet normaal als $A^HA = AA^H$. (7.3.3)

Gevolg. Als A de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. een orthonormale basis in $\mathcal{V}$ is, dan geldt: $\mathcal{A}$ is normaal $\Longleftrightarrow$ A is normaal.
Hermitische en unitaire afbeeldingen en orthogonale projecties zijn normaal!

Let wel. De definities en stellingen over geadjungeerde afbeeldingen van $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ zijn afhankelijk van de gekozen inwendige produkten in $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$. De eigenschappen van de corresponderende matrices gelden dan ook alleen als we t.o.v. die inprodukten orthonormale bases hebben. Ter illustratie hiervan diene het volgende voorbeeld.

<u>Voorbeeld</u>. Laat $B \in \mathcal{M}_{m,m}$ een hermitische en positief definiete matrix zijn (d.w.z. $B^H = B$ en $\forall x \neq 0 : x^H Bx > 0$). Dan definiëren we een inprodukt $<\ ,\ >$ in $\mathbb{C}^m$ d.m.v. $<\underline{x},\underline{y}> := y^H Bx$ (we identificeren $1\times 1$-matrices met de scalaire waarde van hun element, ga zelf na dat hier sprake is van een inprodukt, met name dat $<\underline{x},\underline{x}> \ >0$ voor $\underline{x} \neq \underline{o}$.

Zij $\mathcal{A} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ met matrix A t.o.v. de natuurlijke basis van $\mathbb{C}^m$.

Zij $\mathcal{A}$ zelfgeadjungeerd t.o.v. het bovenstaande inprodukt. Dan geldt:

$$\forall \underline{x}\ \forall \underline{y}\ <\mathcal{A}\underline{y},\ \underline{x}> = <\underline{y},\ \mathcal{A}\underline{x}> \iff (Ay)^H Bx = y^H B(Ax) \iff y^H A^H Bx = y^H BAx,$$

dus moet $A^H B = BA$ oftewel $(BA)^H = BA$. (*)

De matrix A is dus als regel <u>niet</u> hermitisch.

N.B. Als $B = I$, dan krijgen we het natuurlijke inprodukt en (*) wordt dan $A^H = A$, wat inderdaad klopt.

Kies nu $U \in \mathcal{M}_{m,m}$ zodanig dat $B^{-1} = UU^H$ met $U = (U_1 | \ \dots\ | U_m)$.

Daar $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_m$ orthonormaal zijn t.o.v. ons inprodukt (ga na) vormen ze een orthonormale basis voor $\mathbb{C}^m$. We zoeken nu de matrix $A' = (\alpha'_{ij})$ van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis. Daarvoor moet gelden:

$$\mathcal{A}\,\underline{u}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\, \underline{u}_i \Rightarrow \alpha_{ij} = <\underline{u}_i,\ \mathcal{A}\,\underline{u}_j> = u_i^T BAu_j \quad \text{(zie (7.1.5))}.$$

N.B. U is dus gewoon de overgangsmatrix van de natuurlijke naar de hierboven gedefinieerde basis.

Dus $A' = U^H BAU = U^{-1}AU$. Er geldt nu $A'^H = U^H (BA)^H U$.

Met (*) geeft dit $A'^H = U^H BAU = A'$.

De matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis is dus <u>wel</u> hermitisch.

# Hoofdstuk III. Metriek in de matrixtheorie

## 8. Orthogonaliteit

### 8.1. Gram-Schmidt

Stelling. (Gram-Schmidt)

Zij $A \in \mathcal{M}^n_{m,n}$ (dus A is RR). Dan is er een m×n kolomunitaire matrix Q en een reguliere rechtsboven driehoeksmatrix R z.d.d.

$$A = QR . \tag{8.1.1}$$

Bewijs. Pas volledige induktie naar n toe en gebruik het analogon van (7.1.6) in de matrixtheorie. q.e.d.

Opgave

42. Bewijs dat alle diagonaalelementen van R positief gekozen kunnen worden en dat met deze nevenconditie de bovenstaande splitsing van A eenduidig is.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$, dan is er:

1. een kolomunitaire m×r-matrix Q en een LR r×n-matrix C zodat $A = QC$, (8.1.2)
2. een kolomunitaire m×r-matrix Q, een m×m-permutatiematrix P en een r×n-rechtsboven driehoeksmatrix R met $\forall i : R_{ii} > 0$, zodat $AP^T = QR$. (8.1.3)

Bewijs. ad (8.1.2). Met (3.5.1) schrijven we $A = B_1C_1$. $B_1$ is RR, dus (volgens 8.1.1) kunnen we schrijven $B_1 = QR$, dus $A = QRC_1$. R is regulier. $C_1$ is LR en dus $C := RC_1$ is ook LR.

ad (8.1.3). Met (3.1.1) schrijven we $P'AP^T = LU$ of $AP^T = P'^TLU$.
$P'^TL$ is RR en dus volgens (8.1.1) te schrijven als $QR_1$.
Hieruit volgt dat $AP^T = QR_1U$, maar met $R_1$ en U is $R := R_1U$ ook een rechtsboven driehoeksmatrix. Ga nu zelf na dat alle afmetingen kloppen en dat, omdat $\forall i : L_{ii} \neq 0$ en $R_{1_{ii}} \neq 0$, gezorgd kan worden dat $\forall i : R_{ii} > 0$. q.e.d.

Opgave

43. Bewijs (8.1.3) volgens de methode waarmee (8.1.1) bewezen wordt, maar dan met kolomverwisselingen tijdens het Gram-Schmidt proces.

<u>Stelling</u>. Zij $Q_1$ een kolomunitaire m×n-matrix, dan is er een m×(m−n)-matrix $Q_2$ zodanig dat $(Q_1|Q_2)$ unitair is. (8.1.4)

<u>Bewijs</u>. Beschouw de m×(n+m)-matrix $A = (Q_1|I)$; A heeft dan rang m. Volgens (8.1.3) geldt $AP^T = QR$. Zie nu zelf in dat we het Gram-Schmidt proces met kolomverwisselen zo kunnen uitvoeren dat de eerste n kolommen van $AP^T$ dezelfde zijn als die van A, de eerste n kolommen van Q die van $Q_1$ zijn en het n×n linksboven blok van R een eenheidsmatrix is (d.w.z. begin pas echt bij de n+1-ste slag). q.e.d.

<u>Stelling</u>. Zij $Q = (Q_1|Q_2)$ unitair met $Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $Q_2 \in \mathcal{M}_{m,m-n}$, dan geldt

1. $Q_1^H Q_1 = I_1 \in \mathcal{M}_{n,n}$ , $Q_2^H Q_2 = I_2 \in \mathcal{M}_{m-n,m-n}$
2. $Q_1^H Q_2 = 0 \quad \in \mathcal{M}_{n,m-n}, Q_2^H Q_1 = 0 \quad \in \mathcal{M}_{n-n,n}$
3. $Q_1 Q_1^H + Q_2 Q_2^H = I \in \mathcal{M}_{m,m}$ . (8.1.5)

<u>Bewijs</u>. Daar $Q^H Q = I$ geldt

$$\begin{pmatrix} Q_1^H \\ \hline Q_2^H \end{pmatrix} (Q_1|Q_2) = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Dus $Q_1^H Q_1 = I_1$, $Q_2^H Q_2 = I_2$, $Q_1^H Q_2 = 0$ en $Q_2^H Q_1 = 0$ .
Daar $QQ^H = I$ geldt

$$(Q_1|Q_2) \begin{pmatrix} Q_1^H \\ \hline Q_2^H \end{pmatrix} = I . \quad \text{Dus } Q_1 Q_1^H + Q_2 Q_2^H = I. \qquad \text{q.e.d.}$$

We definiëren $P_1 := Q_1 Q_1^H$ en $P_2 := Q_2 Q_2^H$ . (8.1.6)

Dan gelden de volgende
<u>eigenschappen</u>:

| | |
|---|---|
| 1. $P_1$ is hermitisch | $P_2$ is hermitisch |
| 2. $P_1^2 = P_1$ | $P_2^2 = P_2$ |
| 3. $P_1 P_2 = 0$ | $P_2 P_1 = 0$ |
| 4. $P_1 + P_2 = I$ . | |

(8.1.7)

Stelling. $P_1$ en $P_2$ zijn projectoren op deelruimten $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ die elkaars orthogonale complement zijn. (8.1.8)

Bewijs. Dat $P_1$ en $P_2$ projectoren zijn volgt uit eigenschap 2 uit (8.1.6). $(P_1x,\ P_2y) = (P_1x)^H \cdot (P_2y) = x^H P_1^H P_2 y = 0$. De deelruimten $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$ zijn dus orthogonaal. Zij $y \perp \mathcal{V}_1$ dan geldt voor alle x met $x = P_1x$ : $0 = (y,x) = y^H P_1 x$, dus $(P_1y)^H x = 0$, dus $P_1y = 0$. Met eigenschap 4 uit (8.1.7) volgt $P_2y = y$, dus $y \in \mathcal{V}_2$. De deelruimten zijn elkaars complement. q.e.d.

Stelling. Zij $P \in \mathcal{M}^n_{m,m}$ een hermitische projector dan is er een kolomunitaire $Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n}$ zodanig dat $P = Q_1Q_1^H$. (8.1.9)

Bewijs. Volgens (8.1.2) geldt $P = Q_1C_1^H$ met $Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n}$ kolomunitair en $C_1 \in \mathcal{M}^n_{m,n}$. Daar $P^H = P$ geldt $C_1Q_1^H = Q_1C_1^H$ en daar $P = P^2 = P^HP$ geldt $Q_1C_1^H = C_1Q_1^HQ_1C_1^H = C_1C_1^H$ (want $Q_1$ is kolomunitair). Dus $C_1Q_1^H = C_1C_1^H$. Omdat $C_1$ RR is kunnen we hieruit concluderen $C_1^H = Q_1^H$. q.e.d.

Opgave

44. Zij $A \in \mathcal{M}^n_{m,n}$. Maak een hermitische projector zodanig dat $R(P) = R(A)$.

Antwoord: $P = A(A^HA)^{-1}A^H$ .

## 8.2. Nieuwe splitsingen

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ dan is er:

een kolomunitaire $U_1 \in \mathcal{M}_{m,r}$

een reguliere $Z_1 \in \mathcal{M}_{r,r}$

een kolomunitaire $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}$ ,

zodanig dat

$$A = U_1Z_1V_1^H \ . \tag{8.2.1}$$

Bewijs. Volgens (8.1.2) geldt $A = U_1C_1^H$ met $U_1 \in \mathcal{M}^r_{m,r}$ kolomunitair en $C_1 \in \mathcal{M}^r_{n,r}$ RR en ook $C_1 = V_1R_1$ met $V_1 \in \mathcal{M}^r_{n,r}$ kolomunitair en $R_1 \in \mathcal{M}^r_{r,r}$ regulier. Dus $A = U_1(V_1R_1)^H = U_1R_1^HV_1^H = U_1Z_1V_1^H$ met $Z_1 := R_1^H$ regulier. q.e.d.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ dan is er:

een unitaire $U \in \mathcal{M}_{m,m}$

een reguliere $Z_1 \in \mathcal{M}_{r,r}$

een unitaire $V \in \mathcal{M}_{n,n}$ ,

zodanig dat

$$A = U \left(\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^H . \tag{8.2.2}$$

Bewijs. Volgens (8.1.4) kunnen we $U_1$ en $V_1$ uit (8.2.1) uitbreiden tot unitaire matrices $U := (U_1|U_2)$ en $V := (V_1|V_2)$. Dan geldt:

$$A = U_1Z_1V_1^H = (U_1|U_2) \left(\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} V_1^H \\ \hline V_2^H \end{array}\right) = U \left(\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^H . \qquad \text{q.e.d.}$$

Stelling. De kolommen van $U_1$ vormen een basis voor $R(A)$. (8.2.3)

Bewijs. $A = U_1Z_1V_1^H \Rightarrow R(A) \subset R(U_1)$

$U_1 = AV_1Z_1^{-1} \Rightarrow R(U_1) \subset R(A)$ .

Dus $R(U_1) = R(A)$. Bovendien zijn de kolommen van $U_1$ onafhankelijk. q.e.d.

Stelling. De kolommen van $V_2$ vormen een basis voor $N(A)$. (8.2.4)

Bewijs. $Ax = 0 \Rightarrow U_1Z_1V_1^Hx = 0 \Rightarrow V_1^Hx = 0$ (want $U_1Z_1$ is RR; ga na) $\Rightarrow$ $x \perp$ kolommen van $V_1 \Rightarrow x$ is een lineaire combinatie van de kolommen van $V_2$, maar ook $AV_2 = 0$ en de kolommen van $V_2$ zijn onafhankelijk. q.e.d.

Stelling. De kolommen van $V_1$ vormen een basis voor $R(A^H)$ en de kolommen van $U_2$ vormen een basis voor $N(A^H)$. (8.2.5)

Bewijs. $A^H = V_1 \left(\begin{array}{c|c} Z_1^H & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) U_1^H$ . Pas nu (8.2.4) en (8.2.3) toe. q.e.d.

Opmerking. Hieruit volgt datgene wat we al wisten (vgl.(7.2.4)), nl. $R(A^H) = (N(A))^\perp$ en $N(A^H) = (R(A))^\perp$.

Een direct gevolg (ga na) van het voorafgaande is de volgende

Stelling (Fredholm).

$\exists x : Ax = y \iff y \perp N(A^H)$ . (8.2.6)

Opgaven

45. Zij $B = (B_1|B_2)$ RR. Dan is er een $C_{12}$ z.d.d. als

$$B_1 = (B_1|B_2)\left(\begin{array}{c|c} I_1 & C_{12} \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = (B_1|B_2')$$

geldt

$$B_1^H B_2' = 0 \ .$$

46. Zij $B = (B_1|B_2)$ rechtsregulier met linkerinverse $U = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array}\right)$ dan zijn de volgende beweringen equivalent:

i) $B_1^H B_2 = 0$

ii) $U_1 = (B_1^H B_1)^{-1} B_1^H$

iii) $U_2 = (B_2^H B_2)^{-1} B_2^H$

iv) $B_1 U_1$ hermitisch

v) $B_2 U_2$ hermitisch

vi) $U_1 U_2^H = 0$ .

47. Zij A RR. Dan is er een eenduidige linkerinverse X z.d.d. AX hermitisch is.

48. Zij $Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $Q_2 \in \mathcal{M}_{m,k}$, beiden kolomunitair. Zij $R(Q_2) \subset R(Q_1)$. Dan is $Q_2 = Q_1 C$ met $C \in \mathcal{M}_{n,k}$ linksunitair.

49. Zij $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ en $S^2 = A^H A$, dan is A hermitisch.

## 9. De pseudo inverse

### 9.1. Algebraïsche opbouw

Definitie. Zij $A = U_1 Z_1 V_1^H$ als in (8.2.1) en $A \neq 0$, dan definiëren we $A^+ := V_1 Z_1^{-1} U_1^H$. Als $A = 0$ dan $A^+ := 0$. (9.1.1)

Eigenschappen

1. $AA^+$ is hermitisch
2. $A^+A$ is hermitisch
3. $AA^+A = A$
4. $A^+AA^+ = A^+$ . (9.1.2)

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ dan is er precies één $A^+ \in \mathcal{M}_{n,m}$ die de vier eigenschappen (9.1.2) heeft. (Met andere woorden, door toevoeging van de eis van het hermitisch zijn van $A^+A$ en $AA^+$, aan de eisen 3 en 4 wordt $A^+$ eenduidig bepaald; vergelijk dit met par. 4.3.) (9.1.3)

Bewijs. De existentie van $A^+$ volgt uit het feit dat (9.1.1) aan (9.1.2) voldoet. Stel dat X en X + Y voldoen, dan $(YA)^H = ((X+Y)A-XA)^H = ((X+Y)A)^H - (XA)^H = (X+Y)A - XA = YA$. Analoog $(AY)^H = AY$. Verder geldt $A = AXA = A(X+Y)A$, dus $AYA = 0$. Hieruit volgt $(AY)^H A = 0$, dus $0 = (AY)^H AY$ en dientengevolge $AY = 0$. Analoog $YA = 0$. Dan $X + Y = (X+Y)A(X+Y) = XAX = X$. Dus $Y = 0$. q.e.d.

Eigenschappen

1. $r(A^+) = r(A)$. (9.1.4)

   Bewijs. $A = AA^+A \Rightarrow r(A) \leq r(A^+)$ (zie (4.1.13))
   $A^+ = A^+AA^+ \Rightarrow r(A^+) \leq r(A)$. q.e.d.

2. $P_A := AA^+$ is een hermitische projector op $\mathcal{R}(A)$.
   $P'_A := A^+A$ is een hermitische projector op $R(A^+)$. (9.1.5)

   Bewijs. $AA^+$ is per definitie hermitisch. $P_A^2 = AA^+AA^+ = AA^+ = P_A$, dus $P_A$ is een projector. $A = AA^+A$, dus $R(A) \subset R(P_A)$. $R(P_A) \subset R(A)$ (triviaal). Dus $R(A) = R(P_A)$. De tweede bewering kunnen we analoog bewijzen. q.e.d.

3. $R(A^+) = R(A^H)$. (9.1.6)

<u>Bewijs</u>. $A^+ = A^+AA^+ = (A^+A)^H A^+ = A^H(A^+)^H A^+ \Rightarrow R(A^+) \subset R(A^H)$.
$A^H = (AA^+A)^H = (A^+A)^H A^H = A^+AA^H \Rightarrow R(A^H) \subset R(A^+)$. q.e.d.

4. $N(A^+) = (R(A))^\perp = N(A^H)$. (9.1.7)

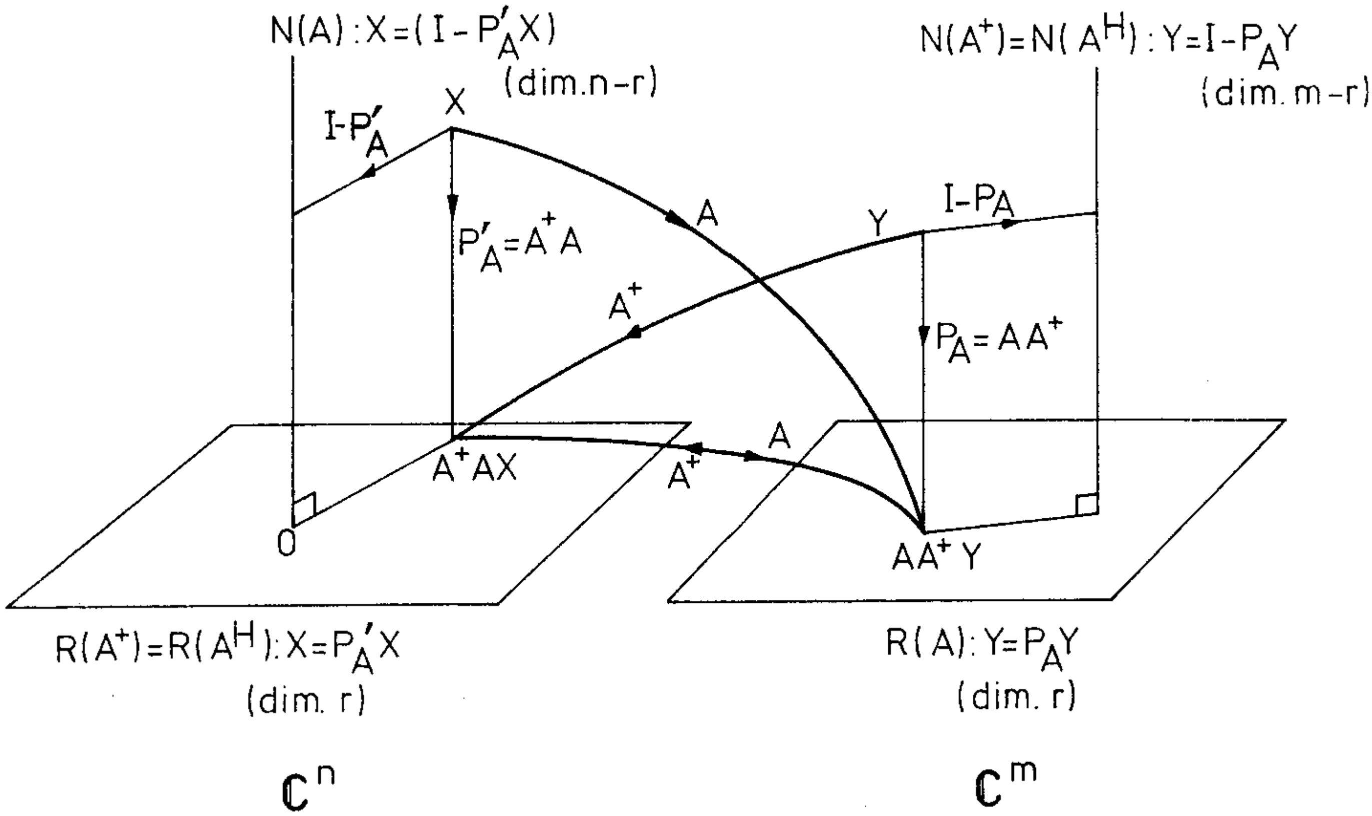
<u>Bewijs</u>. Zij $x \in N(A^+)$ dan $\forall z$ : $(x,Az) = x^H Az = x^H AA^+Az = (AA^+x)^H Az = 0$, dus $x \in (R(A))^\perp$. Zij $x \in (R(A))^\perp$ dan $\forall z$ : $x^H Az = 0$, dus $0 = x^H AA^+ Az = (AA^+x)^H Az$. In het bijzonder $(AA^+x)^H AA^+x = 0$, dus $AA^+x = 0$. Hieruit volgt $A^+AA^+x = 0$ en dus $A^+x = 0$, dus $x \in N(A^+)$. $N(A^+) = (R(A))^\perp$ is nu bewezen. Zie verder (7.2.4).

<u>Opmerking</u>. Het kan ook bewezen worden door eerst op te merken dat uit 3. volgt dat $R(A^{+H}) = R(A)$.

5. $I-P_A$ is een hermitische projector op $N(A^H)$. (9.1.8)

$I-P'_A$ is een hermitische projector op $N(A)$.

In onderstaande tekening is een en ander weergegeven.



## 9.2. Meetkundige opbouw

Het voorafgaande kan ook op meetkundige wijze worden opgebouwd.

Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ .

a) Zij $P_A \in \mathcal{M}_{m,m}$ een projector op $R(A)$, dan gelden de volgende eigenschappen

1. $\exists X : P_A = AX$ immers $R(P_A) \subset R(A)$ (zie (5.3.12)).

2. $\exists Y : A = P_A Y$ immers $R(A) \subset R(P_A)$.

3. $XA$ is een projector.

   Bewijs. Uit eigenschap 2. volgt $P_A A = P_A^2 Y = P_A Y = A$. Met eigenschap 1. volgt dan $A = AXA$ en dus $XAXA = XA$. q.e.d.

4. $I-XA$ is een projector op $N(A)$.

   Bewijs. Dat $I-XA$ een projector is is triviaal uit 3.
   $X \in N(A) \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow (I-XA)X = X \Rightarrow X \in R(I-XA)$.
   $Y \in R(I-XA) \Rightarrow \exists Y : (I-XA)Z = Y \Rightarrow AY = (A-A)Z = 0 \Rightarrow Y \in N(A)$. q.e.d.

Definieer nu $P'_A := XA$.

b) Eis dat $P_A$ en $P'_A$ hermitisch zijn. Dan gelden bovendien de volgende eigenschappen

1. $I-P_A$ is de hermitische projector op $N(A^H) = (R(A))^{\perp}$.

   Bewijs. Dat $I-P_A$ een projector is is triviaal.
   Zij $Z = (I-P_A)Y$ dan $A^H Z = (A^H - A^H AX)Y = (A^H - A^H X^H A^H)Y = (A^H - A^H)Y = 0$
   (want $A = AXA$). Dus $R(I-P_A) \subset N(A^H)$. Zij $A^H Z = 0$ dan geldt
   $Z = Z - X^H A^H Z = Z - AXZ = (I-P_A)Z$. Dus $N(A^H) \subset R(I-P_A)$. Dus $R(I-P_A) = N(A^H)$.
   Met (7.2.4) volgt de bewering. q.e.d.

2. $P'_A$ is de hermitische projector op $R(A^H) = (N(A))^{\perp}$.

   Bewijs. Volgens eigenschap 3. uit a) is $P'_A$ een projector.
   $A^H = A^H X^H A^H = XAA^H \Rightarrow R(A^H) \subset R(XA) = R(P'_A)$.
   $XA = (XA)^H = A^H X^H \Rightarrow R(XA) \subset R(A^H)$. Dus $R(P'_A) = R(A^H)$.
   Zie verder (7.2.4). q.e.d.

3. $R(A^H) \subset R(X)$.

4. $N(X) \subset N(A^H)$ .

Bewijs. $XZ = 0 \Rightarrow AXZ = 0 \Rightarrow X^HA^HZ = 0 \Rightarrow A^HZ = A^HX^HA^HZ = 0$. q.e.d.

Als $A = U \left(\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^H$ (zie (8.2.2)) dan voldoet $X := V \left(\begin{array}{c|c} Z_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & W_2 \end{array}\right) U^H$ aan a) en b). De eisen die tot nog toe gesteld zijn, zijn dus niet voldoende om de éénduidigheid van X te garanderen, immers $W_2$ kan willekeurig gekozen worden.

c) Eis dat $R(X) \subset R(A^H)$ of $N(A^H) \subset N(X)$. Dan geldt bovendien de volgende eigenschap

$XAX = X$.

Bewijs. $R(X) \subset R(A^H) \Rightarrow \exists Z : X = A^HZ \Rightarrow XAX = XAA^HZ = A^HX^HA^HZ = A^HZ = X$. q.e.d.

De éénduidigheid van X volgt nu weer net als in (9.1.3).

Bewijs zelf bovenstaande eigenschap als geëist wordt dat $N(A^H) \subset N(X)$.

Opgave

50. Ga na dat we $P_A$ en $P'_A$ ook als volgt kunnen karakteriseren. Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $X \in \mathcal{M}_{n,m}$, $P_A := AX$ en $P'_A = XA$. We eisen:

 a) $P_A$ en $P'_A$ zijn projectoren
 b) $P_A$ is projector op $R(A)$
 c) $P'_A$ is projector op $R(X)$
 (Hieraan voldoen alle gegeneraliseerde inversen uit hoofdstuk I.)
 d) $R(X) \perp N(A)$ èn $N(X) \perp R(A)$.

## 9.3. Verband met kleinste kwadraten

Definitie. Zij $y \in \mathbb{C}^m$ dan $\|y\| := (y^Hy)^{\frac{1}{2}}$. (9.3.1)

Eigenschap. Als $x^Hy = 0$ dan geldt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ . (Pythagoras!). (9.3.2)

Beschouwen we nu het volgende probleem: Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. Bij $y \in \mathbb{C}^m$ willen we $x \in \mathbb{C}^n$ zodanig bepalen dat $\|y-Ax\|$ minimaal is.

Oplossing: $y-Ax = y-AA^+y + A(A^+y-x)$ met $y-AA^+y = (I-P_A)y \in N(A^H) \perp R(A)$ en $A(A^+y-x) \in R(A)$. Met bovenstaande eigenschap volgt $\|y-Ax\|^2 = \|(I-P_A)y\|^2 + \|A(A^+y-x)\|^2$. Dit is minimaal dan en slechts dan als $A(A^+y-x) = 0$, dus als $x = A^+y+z$ met $z \in N(A)$. Daar $A^+y \in R(A^+) \perp N(A)$, geldt voor iedere minimaliserende x: $\|x\|^2 = \|A^+y\|^2 + \|z\|^2$. Van alle minimaliserende x heeft $x = A^+y$ dus de kleinste norm.

<u>Opgave</u>

51. In de vectorruimte der m×n-matrices definiëren we voor $A = (\alpha_{ij})$ :

$$\|A\| := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\text{spoor van } A^HA)^{\frac{1}{2}}.$$

Als $B^HA = 0$ dan geldt $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$ (ga na). Zij $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $X \in \mathcal{M}_{n,m}$ en $f(\mathbf{x}) := \|I-Ax\|$. Dan geldt:

1. X minimaliseert f $\Longleftrightarrow$ $X = A^+ + Y$ met $AY = 0$,

2. onder alle minimaliserende X heeft $X = A^+$ de kleinste norm.

## 9.4. <u>$A^+$ in enkele speciale gevallen</u>

a) Als A regulier is, dan geldt $A^+ = A^{-1}$ . (9.4.1)

b) Als A RR is, dan geldt $A^+ = (A^HA)^{-1}A^H$ en $A^+A = I$ (dus $A^+$ is linker-inverse).
Als A LR is, dan geldt $A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$ en $AA^+ = I$ (dus $A^+$ is rechter-inverse). (9.4.2)

c) Als A kolomunitair of rij-unitair is, dan geldt $A^+ = A^H$ . (9.4.3)

d) Als Q kolomunitair of rij-unitair is, C LR is en $A = QC$ dan geldt $A^+ = C^+Q^H$ . (9.4.4)

e) Als A een hermitische projector is, dan geldt $A^+ = A$ . (9.4.5)

N.B. 1) Dat aan vorenstaande beweringen is voldaan is in te zien met (9.1.2) en (9.1.3).

2) Als $A = A_1A_2$ geldt in het algemeen <u>niet</u> $A^+ = A_2^+A_1^+$. Maar als $A = B_1C_1$ met $B_1$ RR en $C_1$ LR (zie (3.5.1)) dan geldt $A^+ = C_1^+B_1^+$ .

<u>Opgaven</u>

52. $A^+ = A^H \Longleftrightarrow A^HA$ is projector $\Longleftrightarrow A = U_1V_1^H$ met $U_1$ en $V_1$ kolomunitair.

53. $A^+ = A \Longrightarrow A = UZU^H$ met $Z^2 = I$.

54. Zij $A = (A_1|A_2)$ dan geldt:

$$A_1^HA_2 = 0 \Longleftrightarrow (A_1^+A_2 = 0 \text{ en } A_2^+A_1 = 0) \Longleftrightarrow A^+ = \begin{pmatrix} A_1^+ \\ \hline A_2^+ \end{pmatrix} .$$

55. $A^+ = \lim\limits_{\alpha \downarrow 0} (\alpha I + A^HA)^{-1}A^H$ (met elementsgewijze limiet).

56. Zij $\alpha x^Hx + (y-Ax)^H(y-Ax)$ minimaal voor $x = x_\alpha$ dan geldt:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} x_\alpha = A^+y.$$

## 10. <u>Hermitische matrices</u>

Voorlopig is A hermitisch en $n \times n$.

### 10.1. <u>Splitsingen</u>

<u>Stelling</u>. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch, dan is er

een $B_1 \in \mathcal{M}^r_{n,r}$ ,

een hermitische $Z \in \mathcal{M}^r_{r,r}$ ,

zodat

$$A = B_1ZB_1^H . \tag{10.1.1}$$

Bewijs. Volgens (3.5.1) geldt $A = B_1 C_1^H$ met $B_1$ en $C_1$ RR en $n \times r$.
$A = A^H \Rightarrow B_1 C_1^H = C_1 B_1^H$. Daar $B_1$ een linkerinverse $U_1^H$ heeft, geldt

$$C_1^H = U_1^H C_1 B_1^H = Z B_1^H \text{ met } Z := U_1^H C_1 \;,$$

$$C_1^H U_1 = U_1^H A U_1 = U_1^H C_1 B_1^H U_1 = U_1^H C_1 \;.$$

Dus Z is hermitisch. q.e.d.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch, dan is er

een kolomunitaire matrix Q,

een reguliere matrix W,

zodat

$$A = QWQ^H \;. \tag{10.1.2}$$

Bewijs. Triviaal met (8.1.1) en (10.1.1).

Opgaven

57. Zij $A = B_1 Z B_1^H = \tilde{B}_1 \tilde{Z} \tilde{B}_1^H$ (zoals in 10.1.1), dan is er een unitaire matrix $Q \in \mathcal{M}_{r,r}$, zodat $\tilde{B}_1 = B_1 Q$ en $\tilde{Z} = Q^H Z Q$.

58. Zij $A = B_1 C_1^H$ met $B_1$ en $C_1$ linksonder matrices met reguliere kop, dan is er een diagonaalmatrix D, zodat $A = B_1 D B_1^H$.

## 10.2. Positief (semi) definiete matrices

Definitie. A heet positief definiet (pd) als A hermitisch is en
$\forall x \neq 0 : x^H A x > 0$. (10.2.1)

Definitie. A heet positief semidefiniet (psd) als A hermitisch is en als
$\forall x : x^H A x \geq 0$. (10.2.2)

Stelling. A is psd $\Rightarrow$ ($x^H A x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$). (10.2.3)

Bewijs. Zij $x^H A x = 0$ dan geldt $\forall x,y : (\alpha x + y)^H A (\alpha x + y) \geq 0$.
Dus $\alpha y^H A x + \bar{\alpha} x^H A y + y^H A y \geq 0$. Dit kan alleen voor iedere $\alpha$ als er geldt
$\forall y : y^H A x = 0 = x^H A y$, zodat $Ax = 0$ (ga na).
De omgekeerde bewering is triviaal. q.e.d.

Gevolg. A is psd $\Rightarrow$ ($r(A) = n \Leftrightarrow$ A is pd). (10.2.4)

Stelling. A is pd $\Rightarrow \forall k : (A)_{kk} > 0$. (10.2.5)

Bewijs. A is pd $\Rightarrow x^H Ax > 0$ voor $x \neq 0$. Zij $k \in \{1,\dots,n\}$ en $x := e_k$, dan geldt $x^H Ax = (A)_{kk} > 0$. q.e.d.

Stelling. Zij A psd, dan geldt $\forall k : (A)_{kk} \geq 0$ en $(A)_{\ell\ell} = 0 \Rightarrow \forall i : (A_{i\ell}) = (A)_{\ell i} = 0$. (10.2.6)

Bewijs. Het eerste is triviaal.
Zij $(A)_{\ell\ell} = 0$ dan is $e_\ell^H Ae_\ell = 0$. Volgens (10.2.3) is dan $Ae_\ell = 0$.
Dus $\forall i : (A)_{\ell i} = 0$. Daar A hermitisch is geldt ook $\forall i : (A)_{i\ell} = 0$. q.e.d.

Opgave

59. A is psd $\Rightarrow |(A)_{k\ell}|^2 \leq (A)_{kk}(A)_{\ell\ell}$.

Stelling. Zij $C \in \mathcal{M}_{n,k}$ en A psd, dan geldt $C^H AC$ is psd. (10.2.7)

Bewijs. $C^H AC$ is hermitisch (triviaal).
Daar A psd is geldt $(Cx)^H A(Cx) \geq 0$ zodat ook $x^H C^H ACx \geq 0$. q.e.d.

Stelling. Zij $C \in \mathcal{M}^k_{n,k}$ en zij A pd dan is $C^H AC$ pd. (10.2.8)

Stelling. Zij $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ psd, dan geldt dat $A_{11}$ psd is.

Als $A_{11}$ ook regulier is, dan is $A_{22.1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ psd. (10.2.9)

Bewijs. Neem $x = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline 0 \end{array}\right)$ z.d.d. $x^H Ax = x_1^H A_{11} x_1$.
Daar A psd is, is ook $x_1^H A_{11} x_1 \geq 0$.

$A = CA'C^H$ met $C = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & I_{22} \end{array}\right)$ regulier (zie 2.1.1) en $A' = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A_{22.1} \end{array}\right)$

A' is psd (10.2.7), (want C regulier), zodat ook $A_{22.1}$ psd is. q.e.d.

<u>Stelling</u>. Zij $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ pd dan zijn $A_{11}$ en $A_{22.1}$ pd. (10.2.10)

<u>Stelling</u>. (Choleski splitsing)

Zij A psd, dan is er

een linksonder rechtsreguliere matrix $L \in \mathcal{M}_{n,r}$ ,

zodat

$$A = LL^H . \tag{10.2.11}$$

<u>Bewijs</u>. We bewijzen dit met volledige induktie naar n.

Voor n = 1 triviaal waar.

Stel nu dat het waar is voor n-1 en laat A een n×n-matrix zijn die psd is ($A \neq 0$).

Splits A z.d.d. $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a_1^T \\ \hline a_1 & A_1 \end{array}\right)$ met $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}$.

Volgens (10.2.6) geldt dat $\alpha \geq 0$.

a) Als $\alpha = 0$ dan is $a_1 = 0$ (10.2.6). Volgens de induktieveronderstelling is $A_1 = L_1L_1^H$.

Definieer $L := \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline L_1 \end{array}\right)$ met $0 \in \mathcal{M}_{1,r}$, zodat $A = LL^H$.

b) Als $\alpha = \lambda^2 > 0$ dan geldt $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline a_1 & I_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A_{22.1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a_1^H \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$

met $A_{22.1} = A_1 - \frac{1}{\alpha} a_1 a_1^H$.

$A_{22.1}$ is psd volgens (10.2.9). Dus $A_{22.1} = L_1L_1^H$ met $L_1 \in \mathcal{M}_{n-1,r-1}$.

Neem nu $L := \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline \lambda^{-1}a_1 & L_1 \end{array}\right)$. Verifieer zelf dat L voldoet. q.e.d.

<u>Opmerking</u>. Als A pd is dan is L regulier.

<u>Opgaven</u>

60. Bewijs dat er een permutatiematrix P is zodat $PAP^H = \tilde{L}\,\tilde{L}^H$ met $(\tilde{L})_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq r$.

Hint: Voer de constructie als volgt uit: als $(A)_{11} = 0$, zoek dan $P_1$ z.d.d. $(P_1AP_1^H)_{11} > 0$.

61. (Stelling van Hadamard)

Zij $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ en $A = (a_1 | \ldots | a_n)$ dan geldt

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^{n} \| a_k \|_2 ,$$

en

$$|\det A| = \prod_{k=1}^{n} \| a_k \|_2 \iff \exists Q : Q^H Q = I \text{ en } A = QD \text{ met } D \text{ diagonaal.}$$

62. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,r}$ en $B \in \mathcal{M}_{n,k}$, dan geldt

$$AA^H = BB^H \Rightarrow B = AQ^H \text{ en } Q^H Q = I .$$

## 10.3. Algemene hermitische matrices

Lemma. Zij $A \in \mathcal{M}_{2,2}$ hermitisch en zij $A \neq 0$ dan is er

een unitaire matrix $Q$

zodat

$$(Q^H A Q)_{11} \neq 0 . \tag{10.3.1}$$

Bewijs. Stel $A$ is van de vorm $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$.

Voor $\alpha \neq 0$ is het triviaal.

Voor $\alpha = 0$ en $\gamma \neq 0$ is $Q$ een permutatiematrix : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Voor $\alpha = \gamma = 0$ en $\beta = |\beta| e^{i\varphi}$ nemen we $Q = 2^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

N.B. Dit is een rotatie over $45^\circ$. q.e.d.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch en $A \neq 0$ dan is er

een unitaire matrix $Q$,

een linksonder matrix $L \in \mathcal{M}_{n,r}$ met reguliere kop,

een diagonaalmatrix $D \in \mathcal{M}_{r,r}$ met $(D)_{ii} = \pm 1$, $i = 1,\ldots,r$

zodat

$$Q^H A Q = LDL^H. \tag{10.3.2}$$

Bewijs. We bewijzen dit met volledige induktie naar $n$.

Voor $n = 1$ triviaal waar.

Stel nu dat het waar is voor $n-1$ en laat $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch zijn.

a) Als $(A)_{kk} \neq 0$ dan is er een permutatiematrix Q, zodat $(Q^H AQ)_{11} = (A)_{kk}$.

b) Als $(A)_{ii} = 0$, $i = 1,\ldots,n$ dan is er een $(A)_{k\ell} = (\bar{A})_{\ell k} \neq 0$, er is dan een unitaire Q z.d.d. $(Q^H AQ)_{11} \neq 0$; eerst een permutatie en daarna (10.3.1) toepassen.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & \ell \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} k \rightarrow \\ \ell \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \beta & \\ & \bar{\beta} & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \beta & & \\ \bar{\beta} & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(10.3.1)} \left(\begin{array}{c|c} \beta' & \\ \hline & \ddots \end{array}\right)$$

De rest van het bewijs is analoog aan het tweede gedeelte van het bewijs van (10.2.11).

q.e.d.

<u>Stelling</u>. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch en $A \neq 0$ dan is er

een matrix $B \in \mathcal{M}^r_{n,r}$

een diagonaalmatrix $D \in \mathcal{M}_{r,r}$ met $(D)_{ii} = \pm 1$

zodat

$$A = BDB^H. \tag{10.3.3}$$

<u>Bewijs</u>. Uit (10.3.2) volgt dat $Q^H AQ = LDL^H$, met Q unitair zodat $A = QLDL^H Q^H = BDB^H$ met $B := QL$.

q.e.d.

<u>Opmerking</u>. Door kolom- en rijverwisseling is te bereiken dat D van de vorm

$$D = \text{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\ \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{r-p}) \text{ is.} \tag{10.3.4}$$

Als we een splitsing hebben van A volgens (10.3.3) en D de vorm van (10.3.4) heeft dan kunnen we B uit (10.3.3) partitioneren $B = (B_1|B_2)$ met $B_1 \in \mathcal{M}^p_{n,p}$ en $B_2 \in \mathcal{M}^{r-p}_{n,r-p}$ zodanig dat

$$A = (B_1|B_2) \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} B_1^H \\ \hline B_2^H \end{array}\right) = B_1 B_1^H - B_2 B_2^H .$$

Dat het getal p alleen afhankelijk van A en niet van de gekozen splitsing is wordt uitgedrukt door de volgende

<u>Stelling</u> (traagheidsstelling van Sylvester).

Als er een $B = (B_1|B_2)$ en een $C = (C_1|C_2)$ is die beiden RR zijn, $B_1 \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n,r-p}$ z.d.d. $A = B_1B_1^H - B_2B_2^H = C_1C_1^H - C_2C_2^H$, dan geldt

$$C_1 \in \mathcal{M}_{n,p}\,,$$
$$C_2 \in \mathcal{M}_{n,r-p}\,. \qquad (10.3.5)$$

<u>Bewijs</u>. Stel $C_1 \in \mathcal{M}_{n,q}$ met $q < p$.

$x^HAx = x^HB_1B_1^Hx - x^HB_2B_2^Hx = x^HC_1C_1^Hx - x^HC_2C_2^Hx$ .

Bepaal $B_3$ z.d.d. $B = (B_1|B_2|B_3)$ regulier is (zie 3.2.2).

Zoek $x \neq 0$ z.d.d. $B_2^Hx = 0$

$$C_1^Hx = 0$$
$$B_3^Hx = 0.$$

Dit zijn $n-p+q$ vergelijkingen.

Daar $n-p+q < n$ hebben deze vergelijkingen een oplossing $x \neq 0$.

Er geldt $B_1^Hx \neq 0$ want $B_1^Hx = 0$ impliceert $B^Hx = 0$ en dus $x = 0$. Tegenspraak.

Nu geldt er
$$\left.\begin{array}{l} x^HB_1B_1^Hx > 0 \\ x^HB_2B_2^Hx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^HAx > 0$$
$$\left.\begin{array}{l} x^HC_1C_1^Hx = 0 \\ x^HC_2C_2^Hx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^HAx \leq 0\,.$$

Tegenspraak, zodat $q \geq p$.

Analoog is te bewijzen dat $p \geq q$. (Hiervoor moet $(C_1|C_2)$ RR zijn!) q.e.d.

<u>Definitie</u>. Het getal $s := p-(r-p) = 2p-r$ heet de signatuur van A en p heet de index van A (merk op dat s het spoor van D is). (10.3.6)

<u>Opgave</u> (moeilijk!!)

63. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ hermitisch en $A = B_1B_1^H - B_2B_2^H = B_1'B_1'^H - B_2'B_2'^H$ met $B_1^HB_2 = 0$ en $B_1'^HB_2' = 0$ dan geldt $B_1' = B_1Z_1$, $B_2' = B_2Z_2$ met $Z_1$ en $Z_2$ unitair.

## 10.4. Hermitische bilineaire en kwadratische vormen

Definitie. Een hermitische bilineaire vorm is een afbeelding $\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$; $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{C}^n \to \phi(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt

1. $\phi(\underline{y},\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2) = \alpha_1\phi(\underline{y},\underline{x}_1) + \alpha_2\phi(\underline{y},\underline{x}_2)$
2. $\phi(\underline{x},\underline{y}) = \overline{\phi(\underline{y},\underline{x})}$ . (10.4.1)

Gevolg. $\phi(\alpha\underline{y},\underline{x}) = \bar{\alpha}\phi(\underline{y},\underline{x})$ . (10.4.2)

Stelling. Voor iedere bilineaire vorm $\phi$ is er precies één hermitische matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ z.d.d. $\phi(\underline{y},\underline{x}) = y^H Ax$ . (10.4.3)

Bewijs. Neem $(A)_{ij} := \phi(\underline{e}_i,\underline{e}_j)$, verder zelf.

Definitie. Een hermitische kwadratische vorm is een afbeelding $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ die kan worden afgeleid van een hermitische bilineaire vorm : $F(\underline{x}) = \phi(\underline{x},\underline{x})$.

(10.4.4)

Stelling. Bij F is er een matrix $B = (b_1 | \ldots | b_r)$ en getallen $\delta_1,\ldots,\delta_r$ met $\forall 1 \le i \le r : \delta_i = \pm 1$ z.d.d.

$$F(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i |b_i^H x|^2 . \qquad (10.4.5)$$

Bewijs. $F(\underline{x}) = \phi(\underline{x},\underline{x}) = x^H Ax = x^H BDB^H x$ volgens (10.3.3) en dus

$$F(\underline{x}) = (x^H b_1,\ldots,x^H b_r)\, D \begin{pmatrix} b_1^H x \\ \vdots \\ b_r^H x \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \delta_i |b_i^H x|^2 \text{ als } D = \mathrm{diag.}(\delta_1,\ldots,\delta_r). \text{ q.e.d.}$$

Definitie. De signatuur van een kwadratische vorm F is de signatuur van de bijbehorende matrix. (10.4.6)

De stelling van Sylvester zegt dus: bij representatie in de vorm (10.4.5) is het aantal positieve $\delta$'s - het aantal negatieve $\delta$'s gelijk aan de signatuur van F.

Interpretatie.

De vergelijking $F(\underline{x}) = 1$ is de vergelijking van een kwadratisch oppervlak in $\mathbb{C}^n$. Kiezen we een andere, niet noodzakelijk orthonormale basis in $\mathbb{C}^n$ met overgangsmatrix S, dus x = Su, dan geldt

$$F(\underline{x}) = x^H A x = u^H S^H A S u = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i |c_i^H u|^2 \text{ met } \varepsilon_i = \pm 1 .$$

Sylvester zegt nu dat het aantal positieve $\delta$'s en $\varepsilon$'s evenals het aantal negatieve $\delta$'s en $\varepsilon$'s aan elkaar gelijk is. Het type van het oppervlak verandert dus niet bij een assentransformatie.

Opgaven

64. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ en $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n : x^H A x = 0$ dan geldt $A = 0$.

65. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ en $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n : x^T A x = 0$ dan geldt $A^T + A = 0$.

66. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ en $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n : x^H A x \in \mathbb{R}$ dan is A hermitisch.

Hoofdstuk IV. Equivalentie-begrippen

## 11.1. Definities en gevolgen

a. $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ en $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ .

Definitie. A en B heten equivalent als er reguliere U en V bestaan zodat $A = UBV^{-1}$ (zie § 3.4). (11.1.1)

Stelling. Iedere $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$ is equivalent met een

$$J_r := \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(zie (3.4.5))} . \qquad (11.1.2)$$

N.B. $\mathcal{M}^r_{m,n}$ is dus een equivalentieklasse.

Gevolg. A en B equivalent $\Longleftrightarrow$ $r(A) = r(B)$ . (11.1.3)

Definitie. A en B heten unitair equivalent als er unitaire U en V bestaan zodat $A = UBV^H$. (11.1.4)

In hoofdstuk V wordt bewezen:

Stelling. Iedere A is unitair equivalent met een

$$\Sigma := \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \qquad (11.1.5)$$

($\sigma_i$ is een singular value van A, d.w.z. $\sigma_i^2$ is eigenwaarde van $A^TA$.)

Gevolg. A en B unitair equivalent $\Longleftrightarrow$ A en B hebben dezelfde singular values. (11.1.6)

b. $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $B \in \mathcal{M}_{n,n}$.

<u>Definitie</u>. A en B heten gelijkvormig als er een reguliere U is zodat
$A = UBU^{-1}$. (11.1.7)

In hoofdstuk V wordt bewezen:

<u>Stelling</u>. Iedere A is gelijkvormig met een zg. Jordanmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_1\end{matrix} & & \bigcirc \\ \hline & \begin{matrix}\lambda_2 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_2\end{matrix} & \\ \hline \bigcirc & & \begin{matrix}\lambda_3 & 1 & \\ & \ddots & \ddots\end{matrix}\end{array}\right)$$

met $\lambda_i$ eigenwaarde van A.

(11.1.8)

<u>Gevolg</u>. A en B gelijkvormig $\Longleftrightarrow$ A en B hebben dezelfde eigenwaarden (met multipliciteit) en dezelfde Jordanstructuur. (11.1.9)

c. $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $B \in \mathcal{M}_{n,n}$, beiden hermitisch.

<u>Definitie</u>. A en B heten congruent als er een reguliere U bestaat zodat
$A = UBU^{H}$. (11.1.10)

Stelling. Iedere $A \in \mathcal{M}^r_{n,n}$ met signatuur s is congruent met

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\quad}_{p} \quad \underbrace{\quad}_{q} \quad \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{met } p+q = r \\ \text{en } p-q = s. \end{array} \qquad (11.1.11)$$

Dit volgt uit de stelling van Sylvester.

N.B. Alle psd-matrices met gelijke afmetingen vormen een congruentieklasse.

Gevolg. A en B congruent $\Longleftrightarrow$ A en B hebben dezelfde rang en dezelfde signatuur. (11.1.12)

Definitie. A en B heten unitair gelijkvormig ($\equiv$ unitair congruent) als er een unitaire U bestaat zodat $A = UBU^H$. (11.1.13)

In hoofdstuk V wordt bewezen:

Stelling. Iedere A is unitair gelijkvormig met een

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ met } \lambda_i \text{ eigenwaarde van A.} \qquad (11.1.14)$$

Gevolg. A en B unitair gelijkvormig $\Longleftrightarrow$ A en B hebben dezelfde eigenwaarden (met hun multipliciteit). (11.1.15)

## 11.2. Interpretatie

ad a.

1. Zij $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ met matrix A t.o.v. zekere bases en B t.o.v. twee andere bases dan zijn A en B equivalent.
2. Als de bases bij A en B uit 1. orthonormaal zijn dan zijn A en B unitair equivalent.

ad b.

3. Zij $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ met matrix A t.o.v. een basis en B t.o.v. een andere basis dan is B gelijkvormig met A.

ad c.

4. Als A en B uit 3. t.o.v. orthonormale bases genomen zijn dan zijn A en B unitair gelijkvormig.

5. Zij F een kwadratische vorm met matrix A t.o.v. een orthonormale basis en B t.o.v. een andere orthonormale basis dan zijn A en B congruent.

Opgave

67. Ga na dat de relaties uit deze paragraaf equivalentierelaties zijn.

Hoofdstuk V. Gelijkvormigheid

We nemen steeds $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, meestal over $\mathbb{C}$, soms over $\mathcal{L}$.

## 12. Eigenwaarden-eigenvectoren-eigenruimte

### 12.1. Inleiding.

Definitie. $\lambda \in \mathcal{L}$ heet eigenwaarde van A als $A-\lambda I$ singulier is. (12.1.1)

Definitie. Het spectrum van A is $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathcal{L} \mid \lambda \text{ eigenwaarde van } A\}$. (12.1.2)

Definitie. Als $\lambda \in \sigma(A)$ dan heet $N(A-\lambda I)$ de eigenruimte van A bij $\lambda$. De elementen van $N(A-\lambda I)\backslash\{0\}$ heten eigenvector bij $\lambda$. De $\dim(N(A-\lambda I))$ heet geometrische multipliciteit van $\lambda$. (12.1.3)

N.B. De geometrische multipliciteit van een eigenwaarde is dus minstens 1.

Stelling. Zij $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$) met geometrische multipliciteiten $n_1,\ldots,n_p$ dan geldt

$$\sum_{k=1}^{p} n_k \leq n \ . \qquad (12.1.4)$$

Bewijs. Zij $S_k \in \mathcal{M}_{n,n_k}$ zodanig dat de kolommen een basis vormen voor $N(A-\lambda_k I)$ ($k \in \{1,\ldots,p\}$) dan geldt $AS_k = \lambda_k S_k$. Daar dus $(A-\lambda_j I)S_k = (\lambda_k-\lambda_j)S_k$ geldt

$$\forall \ell \in \{1,\ldots,p\} : \Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq \ell}}^{p} (A-\lambda_j I)\Big)\cdot S_k = \Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq \ell}}^{p} (\lambda_k-\lambda_j)\Big)\cdot S_k = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq \ell \\ \gamma_\ell S_\ell & \text{als } k = \ell \\ \text{met } \gamma_\ell \neq 0. & \end{cases}$$

Zij nu $S := (S_1 | \ldots | S_p)$ en $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ (gepartioneerd als S), z.d.d.

$Sx = 0$, dus $\sum_{k=1}^{p} S_k x_k = 0$, dan geldt

$$0 = \Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq \ell}}^{p} (A-\lambda_j I)\Big)\cdot \sum_{k=1}^{p} S_k x_k = \gamma_\ell S_\ell x_\ell .$$

Dus $S_\ell x_\ell = 0$ en daar $S_\ell$ RR is volgt hieruit $x_\ell = 0$. We hebben bewezen: $Sx = 0 \Rightarrow x = 0$ en dus is $S$ RR en dientengevolge geldt de breedt van $S \leq n$; d.w.z. $\sum_{k=1}^{p} n_k \leq n$. q.e.d.

Gevolg. $p \leq n$: $A$ heeft hoogstens $n$ onderling verschillende eigenwaarden. (12.1.5)

## 12.2. Het minimaalpolynoom van een matrix

Afspraak. Zij $p(z) = \sum_j \gamma_j z^j$ met coëfficiënten uit $\mathcal{L}$.
Optelling, vermenigvuldiging etc. zijn op de bekende wijze gedefinieerd, zodat relaties tussen polynomen relaties tussen coëfficiëntenrijen worden. We mogen dan voor de variabele $z$ best een matrix $A$ substitueren:

$$p(A) = \sum_j \gamma_j A^j \text{ (met } A^0 := I).$$

Eigenschappen

1. $p_1(z)\cdot p_2(z) = p(z) \Rightarrow p_1(A)\cdot p_2(A) = p(A)$
2. $\forall\lambda \in \mathcal{L}$ : $p(\lambda I) = p(\lambda)\cdot I$. (12.2.1)

Stelling. Bij iedere $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ is er een niet triviaal polynoom $p$ over $\mathcal{L}$ z.d.d. $p(A) = 0$. (12.2.2)

Bewijs. Beschouw de $n^2$ homogene lineaire vergelijkingen $\gamma_m A^m + \gamma_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \gamma_o A^o = 0 \in \mathcal{M}_{n,n}$ met de $(m+1)$ onbekenden $\gamma_m, \ldots, \gamma_o$. Voor voldoende grote $m$ (en zeker als $m \geq n^2$, want dan zijn er meer onbekenden dan vergelijkingen) hebben deze vergelijkingen een niet triviale oplossing en deze correspondeert met een niet triviaal polynoom $p$. q.e.d.

Opmerking. Het polynoom $p(z)$ heet annihilerend polynoom. Ga na dat er een annihilerend polynoom van de vorm $p(z) = z^h + \gamma_{h-1} z^{h-1} + \ldots + \gamma_o$ bestaat. (12.2.3)

Definitie. Een niet triviaal polynoom $p_o$ heet minimaalpolynoom van $A$ als geldt

1. $p_o(A) = 0$
2. $p(A) = 0 \Rightarrow$ graad $(p) \geq$ graad $p_o$. (12.2.4)

<u>Stelling</u>. Als we eisen dat de kopcoëfficiënt van $p_o$ 1 is dan is $p_o$ éénduidig bepaald. (12.2.5)

<u>Stelling</u>. $p(A) = 0 \Rightarrow p_o(z)$ is een deler van $p(z)$. (12.2.6)

<u>Stelling</u>. Zij p annihilerend polynoom en $p_o$ minimaalpolynoom van A dan geldt

1. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow p(\lambda) = 0$
2. $p_o(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$. (12.2.7)

<u>Bewijs</u>.

1. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists x \neq 0$: $Ax = \lambda x$. Voor deze x geldt $A^j x = \lambda^j x$, dus $0 = p(A)x = p(\lambda)x \Rightarrow p(\lambda) = o$.

2. " $\Rightarrow$ " : $p_o(\lambda) = o \Rightarrow p_o(z) = (z-\lambda)q(z)$ (reststelling) $\Rightarrow 0 = p_o(A) = (A-\lambda I)q(A)$. Stel dat $A-\lambda I$ regulier is, dan zou moeten gelden $q(A) = 0$. De graad van q is echter kleiner dan de graad van $p_o$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $p_o$ minimaalpolynoom is van A. Dus $A-\lambda I$ is singulier en dientengevolge is $\lambda$ een eigenwaarde van A.
" $\Leftarrow$ " : Dit volgt uit het feit dat $p_o$ een annihilerend polynoom is en uit 1.

<u>Gevolg</u>. $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathcal{L} \mid p_o(\lambda) = o\}$. (12.2.8)

<u>Stelling</u>. Iedere $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ heeft minstens één eigenwaarde in C. (12.2.9)

<u>Bewijs</u>. Dit volgt uit de hoofdstelling van de algebra en 12.2.8.

<u>Waarschuwing</u>. Een $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ hoeft in $\mathbb{R}$ geen enkele eigenwaarde te hebben.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix}$.

# 13. Diagonalisatie

## 13.1. Diagonaliseerbare matrices

Stelling. Zij $S \in \mathcal{M}_{n,n}$ regulier

en $A \in \mathcal{M}_{n,n}$

dan heeft A hetzelfde spectrum met dezelfde geometrische multipliciteiten als $S^{-1}AS$. (13.1.1)

Bewijs. $S^{-1}AS-\lambda I = S^{-1}(A-\lambda I)S$, dus $r(S^{-1}AS-\lambda I) = r(A-\lambda I)$. q.e.d.

Opmerking. We kunnen stelling (13.1.1) ook als volgt formuleren: Als twee matrices A en B gelijkvormig zijn, dan hebben ze hetzelfde spectrum.

Stelling. Als $A = \mathrm{diag}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ dan geldt $\sigma(A) = \{\lambda \mid \exists_i : \alpha_i = \lambda\}$ en de multipliciteit van elke eigenwaarde $\lambda$ is gelijk aan het aantal $\alpha_i$'s waarvoor $\alpha_i = \lambda$. (13.1.2)

Bewijs. Zelf!

Definitie. Een matrix heet diagonaliseerbaar als hij gelijkvormig is met een diagonaalmatrix. (13.1.3)

Stelling. Als A een diagonaliseerbare matrix is (d.w.z. $\exists S \in \mathcal{M}^n_{n,n} : S^{-1}AS = \Lambda$, met $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$), dan zijn de diagonaalelementen van $\Lambda$ eigenwaarden van A en de bijbehorende kolommen van S zijn corresponderende eigenvectoren. (13.1.4)

Bewijs. $AS = S\Lambda \Rightarrow ASe_k = S\Lambda e_k \Rightarrow As_k = \lambda_k s_k$. q.e.d.

Stelling. $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ is dan en slechts dan diagonaliseerbaar als de som der geometrische multipliciteiten n is. (13.1.5)

Bewijs. " $\Rightarrow$ " : Dit is een gevolg van (13.1.2). " $\Leftarrow$ " : Stel $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ met bijbehorende multipliciteiten $n_1,\ldots,n_p$ dan is er een nxn-matrix $S = (S_1 | \ldots | S_p)$ met $S_i \in \mathcal{M}_{n,n_i}$ zodanig dat de kolommen van $S_i$ een basis voor $N(A-\lambda_i I)$ vormen, immers

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = n.$$

We hebben in het bewijs van (12.1.4) gezien dat S dan RR is, daar S vierkant is volgt hieruit dat S regulier is. Ook geldt $(A-\lambda_i I)S_i = 0$ dus $AS_i = \lambda_i S_i$ en $AS = (\lambda_1 S_1 | \dots | \lambda_p S_p) =$

$$= (S_1 | \dots | S_p) \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_p \end{pmatrix} = S\Lambda$$

met $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_p I_p) = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots}_{n_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \dots}_{n_2}, \dots, \dots, \underbrace{\dots, \lambda_p}_{n_p})$

En aangezien S regulier is, is A dus diagonaliseerbaar. q.e.d.

Stel dat naast $A = S^{-1}\Lambda S$ ook geldt $A = T^{-1}MT$ met S en T regulier, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_p I_p)$ en $M = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Dan volgt uit (13.1.1) dat $\Lambda$ en M hetzelfde spectrum met dezelfde multipliciteiten hebben. Met (13.1.2) kunnen we dan concluderen dat er een permutatiematrix P is zodat $M = P\Lambda P^T$. Hieruit volgt: $S\Lambda S^{-1} = TP\Lambda P^T T^{-1}$ oftewel $\Lambda Z = Z\Lambda$, met $Z := S^{-1}TP$.
Er geldt dus

$$(\Lambda Z)_{ij} = (Z\Lambda)_{ij},$$

en dus ook

$$(\Lambda)_{ii}(Z)_{ij} = (Z)_{ij}(\Lambda)_{jj} .$$

Hieruit volgt dat $(Z)_{ij} = o$ als $(\Lambda)_{ii} \neq (\Lambda)_{jj}$, daar $\Lambda$ de vorm $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_p I_p)$ heeft, is Z van de vorm $\mathrm{diag}(Z_1, \dots, Z_p)$.
$Z = S^{-1}TP$, dus $TP = SZ = (S_1 | \dots | S_p) \cdot \mathrm{diag}(Z_1, \dots, Z_p) = (S_1 Z_1 | \dots | S_p Z_p)$.
Als nu $TP = (T_1 | \dots | T_p)$ dan geldt $T_i = S_i Z_i$ en aangezien $Z_i$ regulier is (ga na!) wil dat zeggen dat zowel de kolommen van $S_i$ als die van $T_i$ een basis vormen voor $N(A-\lambda_i I)$.

Definitie. $\mathcal{V}$ heet een invariante deelruimte t.o.v. een matrix A als $\forall x \in \mathcal{V} : Ax \in \mathcal{V}$ (dus A is vierkant). (13.1.6)

N.B. We schrijven ook $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ in plaats van $\forall x \in \mathcal{V} : Ax \in \mathcal{V}$.

<u>Stelling</u>. Zij A een diagonaliseerbare matrix en $\mathcal{V}$ een invariante deelruimte t.o.v. A dan is er een basis van $\mathcal{V}$ bestaande uit eigenvectoren van A. (13.1.7)

<u>Bewijs</u>. Zij $U = (u_1 | \ldots | u_m)$ met $(u_1, \ldots, u_m)$ een basis voor $\mathcal{V}$, dan geldt omdat $\mathcal{V}$ een invariante deelruimte is

$$\exists Z \in \mathcal{M}_{m,m} : AU = UZ. \qquad (*)$$

Uit $A = S\Lambda S^{-1}$ volgt $\Lambda S^{-1}U = S^{-1}UZ$, of $\Lambda W = WZ$ met $W := S^{-1}U$.
Daar W RR is (ga na!) is er volgens opgave 10 een permutatiematrix P zodat
$PW = \begin{pmatrix} W_1 \\ \hline W_2 \end{pmatrix}$ met $W_1$ regulier en m×m. $\Lambda W = WZ$ en dus $P\Lambda P^T PW = PWZ$, dus ook

$$\left(\begin{array}{c|c} \Lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} W_1 \\ \hline W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \hline W_2 \end{pmatrix} Z, \text{ met } \left(\begin{array}{c|c} \Lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_2 \end{array}\right) = P\Lambda P^T \text{ (dit is weer een diagonaalmatrix).}$$

Hieruit volgt: $\Lambda_1 W_1 = W_1 Z$ of $Z = W_1^{-1}\Lambda_1 W_1$, met (*) geeft dit $AU = UW_1^{-1}\Lambda_1 W_1$, dus $AV = V\Lambda_1$ met $V := UW_1^{-1}$. De kolommen van V vormen ook een basis voor $\mathcal{V}$ en omdat $AV = V\Lambda_1$ zijn die kolommen eigenvectoren van A. q.e.d.

<u>Opgaven</u>

68. Als A en B diagonaliseerbare matrices zijn dan geldt:

$AB = BA \iff$ er is een gemeenschappelijke basis van eigenvectoren,

m.a.w. A en B kunnen met dezelfde gelijkvormigheidstransformaties gediagonaliseerd worden,

m.a.w. $\exists S$, regulier: $S^{-1}AS = \Lambda$ en $S^{-1}BS = M$, met $\Lambda$ en M diagonaalmatrices.

69. Als $AB = BA$, dan is er bij iedere eigenwaarde van A minstens één eigenvector u van A, die ook eigenvector van B is.

## 13.2. <u>Unitair diagonaliseerbare en normale matrices</u>

<u>Definitie</u>. Een matrix is unitair diagonaliseerbaar als hij unitair gelijkvormig is met een diagonaalmatrix. (13.2.1)

<u>Stelling</u> (het zg. lemma van Schur).
Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ dan is er

een unitaire matrix Q en

een rechtsbovendriehoeksmatrix R

zodat

$$Q^H AQ = R$$

oftewel:

Iedere vierkante matrix is unitair gelijkvormig met een rechtsbovendriehoeksmatrix. (13.2.2)

Bewijs. Volledige inductie naar n.

Als n = 1 is de bewering triviaal waar.

Stel nu dat de bewering waar is voor (n-1)×(n-1)-matrices.

Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, dan heeft A volgens (12.2.9) minstens één eigenwaarde $\lambda_1$, laat $q_1$ een bijbehorende eigenvector zijn, zodanig dat $q_1^H q_1 = 1$. Maak nu een matrix $Q_1 = (q_1 | Q_{12}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ met $Q_{12}$ zodanig dat $Q_1$ unitair is, dan geldt

$$Q_1^H AQ_1 = \left(\begin{array}{c} q_1^H \\ \hline Q_{12}^H \end{array}\right) (\lambda_1 q_1 | AQ_{12}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & q_1^H AQ_{12} \\ \hline 0 & Q_{12}^H AQ_{12} \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & R_{12} \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) .$$

$A_2$ is een (n-1)×(n-1)-matrix en dus is er volgens de induktieveronderstelling een unitaire matrix $Q_2$ en een rechtsboven driehoeksmatrix $R_2$ zodanig dat

$$Q_2^H A_2 Q_2 = R_2 .$$

Neem nu $Q := Q_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right)$, dan is Q unitair en $Q^H AQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & R_{12} \\ \hline 0 & R_2 \end{array}\right)$ is een rechtsbovendriehoeksmatrix. Met inductie volgt nu de bewering. q.e.d.

Opmerking. Uit het bovenstaande bewijs volgt dat de diagonaalelementen van R eigenwaarden van A zijn, maar het aantal keren dat zo'n eigenwaarde op de diagonaal voorkomt hoeft niet persé gelijk te zijn aan de geometrische multipliciteit van die eigenwaarde. Neem bijvoorbeeld $A = R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A heeft dan een eigenwaarde 0 met geometrische multipliciteit 1, en toch staan er twee nullen op de diagonaal.

Opgaven

70. Zij $\lambda_i$ eigenwaarde van R (uit 13.2.2) met geometrische multipliciteit $n_i$ dan zijn er minstens $n_i$ diagonaalelementen van R gelijk aan $\lambda_i$.

71. Als $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right)$, met $A_{11}$ en $A_{22}$ vierkant, dan geldt:

$$\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22})$$

en als $\lambda \in \sigma(A)$ met multipliciteit $n_o$,
en $\lambda \in \sigma(A_{11})$ met multipliciteit $n_1$,

dan geldt

als $\lambda \notin \sigma(A_{22})$ dan $n_o = n_1$ en
als $\lambda \in \sigma(A_{22})$ met multipliciteit $n_2$
dan

$$n_o \leq n_1 + n_2 \; .$$

Stelling. Een hermitische matrix is unitair diagonaliseerbaar, de bijbehorende diagonaalmatrix is reëel. (13.2.3)

Bewijs. Uit (13.2.2) volgt A is hermitisch $\Rightarrow$ R is hermitisch $\Rightarrow$ R is een reële diagonaalmatrix.

We vragen ons nu af of er nog meer unitair diagonaliseerbare matrices zijn.

P.M. Een matrix A is normaal als $A^HA = AA^H$ (zie 7.3.3).

Stelling. Diagonaalmatrices zijn normaal. (13.2.4)

Stelling. Als A en B unitair gelijkvormige matrices zijn dan geldt:
A is normaal $\Leftrightarrow$ B is normaal. (13.2.5)

Bewijs. Stel B is normaal dan $AA^H = QBQ^HQB^HQ^H = QBB^HQ^H = QB^HBQ^H = QB^HQ^HQBQ^H = A^HA$.
De andere kant op gaat analoog. q.e.d.

Gevolg. Unitair diagonaliseerbare matrices zijn normaal. (13.2.6)

Stelling. Als R een rechtsbovendriehoeksmatrix is dan geldt:

R is normaal $\Leftrightarrow$ R is diagonaal. (13.2.7)

Bewijs. " $\Rightarrow$ " : $RR^H = R^HR$, dus ook

$(RR^H)_{ij} = (R^HR)_{ij}$, oftewel (met $R = (\rho_{ij})$)

$$\sum_{\ell=i+1}^{n} |\rho_{i\ell}|^2 = \sum_{\ell=1}^{i-1} |\rho_{\ell i}|^2 \; .$$

Hieruit is eenvoudig in te zien dat $i = 1$ levert dat $\rho_{1\ell} = o$ voor $\ell > 1$.
Vervolgens levert $i = 2$ dat $\rho_{2\ell} = o$ voor $\ell > 2$.
Als we zo doorgaan dan hebben we na $n-1$ stappen bewezen dat R een diagonaalmatrix is.
" $\Leftarrow$ " : triviaal met (13.2.4). q.e.d.

Stelling. A is unitair diagonaliseerbaar $\Leftrightarrow$ A is normaal. (13.2.8)

Bewijs. " $\Rightarrow$ " : zie (13.2.6).

" $\Leftarrow$ " : A is normaal $\xRightarrow{(13.2.5)}$ R (uit stelling 13.2.2) is normaal $\xRightarrow{(13.2.7)}$ R is een diagonaalmatrix $\xRightarrow{(13.2.1)}$ A is unitair diagonaliseerbaar. q.e.d.

Enige speciale gevallen van unitair diagonaliseerbare matrices zijn:

1. A is hermitisch, d.w.z. $A = A^H$,
   dan $A = Q\Lambda Q^H$ met $\Lambda$ reëel.
2. A is antihermitisch, d.w.z. $A = -A^H$ (of: iA is herm.),
   dan $A = Q\Lambda Q^H$ met $\Lambda$ zuiver imaginair.
3. A is unitair, d.w.z. $A^HA = AA^H = I$,
   dan $A = Q\Lambda Q^H$ met $\Lambda\Lambda^H = I$ (dus $\forall_i : |\lambda_i| = 1$).

Opgave

72. Als A een hermitische projector op een k-dimensionale deelruimte van $C^n$ is, dan heeft A k eigenwaarden +1 en de rest o.

Zij A een hermitische matrix en $A = Q\Lambda Q^H$ met $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1,..,\lambda_p,\lambda_{p+1},..,\lambda_r,o,..,o)$, zodanig dat $\lambda_i > o$ als $1 \le i \le p$ en $\lambda_i < o$ als $p+1 \le i \le r$. We kunnen dan $\Lambda$ schrijven als:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c|c} \Delta_1^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\Delta_2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{met } \delta_i = |\lambda_i|^{\frac{1}{2}} .$$

Als nu $Q = (Q_1|Q_2|Q_3)$ (gepartitioneerd als $\Lambda$), dan geldt $A = Q_1\Delta_1^2Q_1^H - Q_2\Delta_2^2Q_2^H$.
Laat $B_i := Q_i\Delta_i$ dan geldt dus $A = B_1B_1^H - B_2B_2^H$; dit is Sylvester en we kunnen dus concluderen dat de signatuur van een hermitische matrix A het aantal positieve eigenwaarden minus het aantal negatieve eigenwaarden van A is.

Opgave

73. Zij A een hermitische matrix en $\mathcal{V}$ een k dimensionale invariante deelruimte t.o.v. A, dan is er een orthonormale basis van $\mathcal{V}$ bestaande uit k eigenvectoren van A.

## 13.3. Singular value decompositie

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}^r_{m,n}$, $A \neq 0$. Dan is er

een kolomunitaire $U_1 \in \mathcal{M}_{m,r}$,

een kolomunitaire $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}$,

een $\Sigma_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ met $\sigma_1 > \ldots > \sigma_r > o$, (*)

zodanig dat

$$A = U_1\Sigma_1V_1^H. \qquad (**) \qquad (13.3.1)$$

De $\sigma_j$'s heten singular values van A.
(*) heet singular value decompositie.
Ook geldt: er is een unitaire $U \in \mathcal{M}_{m,m}$

een unitaire $V \in \mathcal{M}_{n,n}$

een m×n-matrix $\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ met $\Sigma_1$ als in (*)

zodanig dat $A = U\Sigma V^H$. (***) (13.3.2)

Bewijs. $A^HA$ is hermitisch, n×n, psd en heeft rang r (want $Ax = 0 \Longleftrightarrow A^HAx = 0$ ).
Dus is er een unitaire n×n-matrix V zodanig dat

$$A^HA = V \cdot \operatorname{diag}(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_r^2,o,\ldots,o)V^H .$$

Stel $V = (V_1|V_2)$ met $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}$ en $\Sigma_1$ als in (*) dan is ook $A^HA = V_1\Sigma_1^2V_1^H$ met $V_1$ kolomunitair. Definieer nu $U_1 = AV_1\Sigma_1^{-1}$, dan $U_1^HU_1 = \Sigma_1^{-1}V_1^HA^HAV_1\Sigma_1^{-1} = I$, dus $U_1$ is kolomunitair en als $B := A - U_1\Sigma_1V_1^H = A(I-V_1V_1^H)$ dan geldt
$B^HB = (I-V_1V_1^H)V_1\Sigma_1^2V_1^H(I-V_1V_1^H) = 0$ dus $B = 0$. Hiermee is (**) bewezen, (***) volgt daaruit door aanvulling van $U_1$ en $V_1$ tot unitaire matrices. q.e.d.

Gevolgen

1. $AA^H = U\Sigma^2U^H = U_1\Sigma_1^2U_1^H$ ,

$A^HA = V\Sigma^2V^H = V_1\Sigma_1^2V_1^H$ . (13.3.3)

2. $A = U_1\Sigma_1V_1^H$ , $A^H = V_1\Sigma_1U_1^H$

$A^+ = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^H$ , $A^{H+} = U_1\Sigma_1^{-1}V_1^H$ . (13.3.4)

3. Als $P_A := AA^+$, $P_A' := A^+A$ ,

dan $P_A = U_1U_1^H$ , $P_A' = V_1V_1^H = P_{A^H}$ . (13.3.5)

4. Zij $U_1 = (u_1| \dots |u_r)$, $V_1 = (v_1| \dots |v_r)$ ,

$u_1,\dots,u_r$ vormen een orthonormale basis voor $(N(A))^\perp = R(A^H)$ ,

$v_1,\dots,v_r$ vormen een orthonormale basis voor $(N(A^H))^\perp = R(A)$.

$$Au_j = \sigma_j v_j \ , \ A^H v = \sigma_j u_j \ ,$$
$$A^+v_j = \sigma_j^{-1}u_j \ , \ (A^H)^+u_j = \sigma_j^{-1}v_j \ , \qquad (13.3.6)$$

(vergelijk dit met paragraaf 9).

Stelling. Bij iedere A is er een $\Sigma$ (zoals in 13.3.2) waarmee A unitair equivalent is. (13.3.7)

Stelling. A en B zijn dan en slechts dan unitair equivalent als ze dezelfde singular values hebben (vergelijk dit met hoofdstuk 4). (13.3.8)

# 14. Reductie naar blokdriehoeksvorm

## 14.1. Index en algebraïsche multipliciteit van eigenwaarden

Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ met geometrische multipliciteiten $n_1,\ldots,n_p$.

We weten dat A diagonaliseerbaar is als $\sum_{k=1}^{p} n_k = n$ (zie (13.1.5)).

Wat gebeurt er als dit niet het geval is?

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ en $\mu_j := \dim(N((A-\lambda I)^j))$ (dus $\mu_0 = 0$).
Dan is er een h, $1 \le h \le n$, zodat

$$0 \le i < j \le h \Rightarrow \mu_i < \mu_j$$

$$j \ge h \Rightarrow \mu_j = \mu_h \,, \qquad (14.1.1)$$

dus

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_h = \mu_{h+1} = \ldots \,.$$

Bewijs. Zeker geldt $\mu_{j+1} \ge \mu_j$. Ook geldt $0 = \mu_0 < \mu_1$ = geometrische multipliciteit.
Zij $N_j := N((A-\lambda I)^j)$, $j = 0,1,2,\ldots$ . Dan is $N_{j-1} \subset N_j$.
Stel voor een $j > 1$ is $\mu_j = \mu_{j-1}$, dan is volgens (5.3.19) $N_j = N_{j-1}$.
Zij $x \in N_{j+1}$, dan is $(A-\lambda I)\, x \in N_j = N_{j-1}$. Dus $x \in N_j$.
Dus $N_{j+1} = N_j$ en dientengevolge is $\mu_{j+1} = \mu_j$ (5.3.19).
Zeker is $\mu_j \le n$. Dus vanaf een $j \le n$ is $\mu_j$ constant. q.e.d.

De rij $\mu_0,\mu_1,\ldots$ is dus strict stijgend totdat hij constant wordt voor $j =: h$. Zolang hij stijgt is $\mu_j \ge j$.

Definitie. Het hierboven gedefinieerde getal h heet de index van $\lambda$, $\mu_h$ heet de algebraïsche multipliciteit van $\lambda$, en de rij $\{\mu_1,\ldots,\mu_h\}$ heet de multipliciteitenrij van $\lambda$. (14.1.2)

P.M. $\mu_1$ heet de geometrische multipliciteit van $\lambda$ (13.1.1).

Stelling. De in (14.1.2) gedefinieerde begrippen zijn invariant onder gelijkvormigheidstransformaties. (14.1.3)

Bewijs. $\dim(N((S^{-1}AS-\lambda I)^j)) = \dim(N((S^{-1}(A-\lambda I)S)^j)) = \dim(N((A-\lambda I)^j))$. q.e.d.

Gevolgen. $1 \leq \mu_1 \leq \mu_h \leq n$ ,

$$1 \leq h \leq \mu_h \leq n$$

$$\mu_1 + h-1 \leq \mu_h \leq h\mu_1 \ . \qquad (14.1.4)$$

Het linkerdeel van de laatste regel volgt direct uit het voorgaande.
Het rechterdeel volgt uit het feit dat $\dim(N(A^h)) \leq h \dim(N(A))$.
Bewijs dit zelf uit de stelling dat $r(A^{j+1}) \geq r(A^j) + r(A) - n$ (vgl.(4.1.13)).

Opgaven

74. Bereken de multipliciteitenrij als $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \bigcirc \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ \bigcirc & & & & 0 \end{bmatrix}$ .

75. Als A een driehoeksmatrix is, dan is $\sigma(A) = \{\text{diagonaalelementen}\}$ en iedere eigenwaarde komt op de diagonaal even vaak voor als zijn algebraïsche multipliciteit is (hint: inductie naar n).

76. Bewijs dat geldt $\mu_{j+1} - \mu_j \leq \mu_j - \mu_{j-1}$ , $j \geq 1$ (moeilijk!).
N.B. Dit volgt straks als nevenresultaat.

77. Teken de grafiek van $\mu_j$ als functie van j, rekening houdend met opgave 76.
Leid hieruit (14.1.4) af.

## 14.2. Nilpotente matrices

Definitie. Een matrix A heet nilpotent als er een $h \geq 1$ zodat $A^h = 0$.
Als h zo is dat $A^{h-1} \neq 0$ dan heet h de index van A. (14.2.1)

Stelling. A is nilpotent met index h $\Longleftrightarrow$ minimaalpolynoom van A is $p_0(z) = z^h$.
A is nilpotent $\Longleftrightarrow$ $\sigma(A) = \{o\}$. (14.2.2)

Bewijs.

1) " $\Rightarrow$ " : Stel A is nilpotent met index h. Dan is $p(z) := z^h$ een annihilerend polynoom van A. $p_0(z)$ is een deler van $p(z)$. De enige echte delers zijn $p'(z) := z^j$, $j < h$. Maar $A^j \neq 0$ voor $j < h$, zodat $p_0(z) = z^h$.

" $\Leftarrow$ " : Als $p_0(z) = z^h$ dan is $A^h = 0$ en $A^{h-1} \neq 0$.

2) Volgt uit 1) en (12.2.8). q.e.d.

Opmerking. De index van een nilpotente matrix is gelijk aan de index van zijn eigenwaarde 0.

Opgave

78. Bewijs rechtstreeks dat als $p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$ en $p(A) = 0$, dan zijn alle $c_j = 0$.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ nilpotent en $B \in \mathcal{M}_{k,k}$ regulier. Dan is er bij iedere $Y \in \mathcal{M}_{m,k}$ één $X \in \mathcal{M}_{m,k}$, zodat

$$AX - XB = Y . \tag{14.2.3}$$

Bewijs. We hebben mk vergelijkingen met mk onbekenden.
Voor het homogene stelsel $AX - XB = 0$ geldt $X = AXB^{-1} = A^h XB^{-h} = 0$, zodat het homogene stelsel alleen de triviale oplossing heeft.
Dus het inhomogene stelsel is éénduidig oplosbaar. q.e.d.

N.B. Er geldt dan $X = -YB^{-1} + AXB^{-1}$.

Successieve substitutie geeft $X = -\sum_{j=1}^{h} A^{j-1} Y B^{j-1}$.

## 14.3. Grof-reductiestelling

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $o \in \sigma(A)$ met index h en algebraïsche multipliciteit m, dan is er

een unitaire $Q \in \mathcal{M}_{n,n}$ ,
een reguliere $S \in \mathcal{M}_{n,n}$ ,
een $B_{11} \in \mathcal{M}_{m,m}$, nilpotent met index h en $\dim(N(B_{11}^j)) = \dim(N(A^j))$,
een reguliere $B_{22} \in \mathcal{M}_{n-m,n-m}$

zodat

$$Q^H AQ = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right) \tag{14.3.1}$$

en

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(B_{11}, B_{22}) . \tag{14.3.2}$$

Bewijs. Neem $Q := (\overbrace{Q_1}^{m} \mid \overbrace{Q_2}^{n-m})$ unitair z.d.d. de m kolommen van $Q_1$ $N(A^h)$ opspannen. Dan geldt ook dat de kolommen van $AQ_1$ element zijn van $N(A^h)$ zodat er een $B_{11}$ is z.d.d. $AQ_1 = Q_1 B_{11}$.

Dan is

$$Q^H A Q = \begin{pmatrix} Q_1^H \\ \hline Q_2^H \end{pmatrix} A(Q_1|Q_2) = \left(\begin{array}{c|c} Q_1^H A Q_1 & Q_1^H A Q_2 \\ \hline 0 & Q_2^H A Q_2 \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right)$$

en

$$Q^H A^j Q = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}^j & B_{12}^{(j)} \\ \hline & B_{22}^j \end{array}\right) \quad \text{met } B_{22} \in \mathcal{M}_{n-m,n-m}. \qquad (*)$$

Uit $A^h Q_1 = Q_1 B_{11}^h$, $A^h Q_1 = 0$ en $Q_1$ is RR volgt $B_{11}^h = 0$.

Dus $Q^H A^h Q = (0|B_2^{(h)})$ met $B_2^{(h)} := \begin{pmatrix} B_{12}^{(h)} \\ \hline B_{22}^h \end{pmatrix}$ (breedte n-m).

Dan is $Q^H A^{h+j} Q = (0|B_2^{(h)} B_{22}^j)$.

Hieruit volgt dat $r(B_2^{(h)} B_{22}^j) = r(A^{j+h}) = n-m$ voor $j \geq 0$.

Dus $B_2^{(h)} B_{22}^j$ is RR en dus ook is $B_{22}$ RR.

Daar $B_{22}$ ook vierkant is, is $B_{22}$ regulier. Dus $B_{22}^j$ is regulier.

Met behulp van (*) geldt nu dat $\dim(N(A^j)) = \dim(N(B_{11}^j))$.

Om (14.3.2) te bewijzen zoeken we een

$$T := \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right),$$

zodat

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & I_{22} \end{array}\right).$$

Hieraan is voldaan dan en slechts dan als

$$T_{12} B_{22} = B_{11} T_{12} + B_{12}.$$

Volgens (14.2.3) is er precies één $T_{12}$ die hieraan voldoet.

Neem $S := QT$. q.e.d.

Opgave

79. Bewijs dat $Q^H A^h Q = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}^h & T_{12}B_{22}^h \\ \hline 0 & B_{22}^h \end{array}\right)$

en vervolgens dat geldt $T_{12} = Q_1^H A^h Q_2 B_{22}^{-h}$

en $S = (Q_1 | A^h Q_2 B_{22}^{-h})$.

80. Bewijs ook rechtstreeks dat, als Q aan (14.3.1) voldoet, de S uit opgave 79 voldoet aan (14.3.2).

Stelling (grofreductie).

Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ en $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ met indices $h_1,\ldots,h_p$ en met algebraïsche multipliciteiten $m_1,\ldots,m_p$. Dan is er

een unitaire $Q \in \mathcal{M}_{n,n}$,
een reguliere $S \in \mathcal{M}_{n,n}$,
een $B_{kk} \in \mathcal{M}_{m_k,m_k}$ met $B_{kk}-\lambda_k I_k$ nilpotent met index $h_k$ en

$$\dim(N((B_{kk}-\lambda_k I_k)^j)) = \dim(N((A-\lambda_k I)^j)) \tag{1}$$

voor $k = 1,\ldots,p$,

zodat

$$Q^H A Q = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & \cdots & B_{1p} \\ & B_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & B_{pp} \end{pmatrix}$$

en

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(B_{11},\ldots,B_{pp}). \tag{14.3.3}$$

Bewijs. We bewijzen dit met volledige inductie naar p.
Voor $p = 1$ triviaal waar (neem $Q = S = I$).
Zij $p > 1$, zonder beperking van algemeenheid mogen we stellen $\lambda_1 = o$ (werk anders met $A-\lambda_1 I$ en $B-\lambda_1 I$, zie in dat dit kan).
Volgens (14.3.1) is er een unitaire $Q_1$ zodat

$$Q_1^H A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hline 0 & \hat{B}_{22} \end{array}\right)$$

met $B_{11} \in \mathcal{M}_{m_1,m_1}$ nilpotent, $\dim(N(B_{11}^j)) = \dim(N(A^j))$ en $\hat{B}_{22}$ regulier. $B_{11}$ heeft dus de eigenschap (1).

Daar $\sigma(A) = \sigma(B_{11}) \cup \sigma(\hat{B}_{22})$, is $\sigma(\hat{B}_{22}) = \{\lambda_2,\ldots,\lambda_p\}$ (zie (14.2.2)). (2)

Zij $2 \le k \le p$.

Daar $Q_1^H(A-\lambda_k I)^j Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} (B_{11}-\lambda_k I_1)^j & \hat{B}_{12}^{(j)} \\ \hline 0 & (\hat{B}_{22}-\lambda_k I_2)^j \end{array}\right)$

en $B_{11}-\lambda_k I_1$ regulier is, is $\dim(N((\hat{B}_{22}-\lambda_k I_2)^j)) = \dim(N((A-\lambda_k I)^j))$. (3)

Daar $\sigma(\hat{B}_{22})$ p-1 elementen heeft volgt uit de inductieveronderstelling, gecombineerd met (2) en (3) dat er een $Q_2$ is, zodat

$$Q_2^H \hat{B}_{22} Q_2 = \begin{pmatrix} B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & B_{pp} \end{pmatrix}$$

waarin de $B_{kk}$ de eigenschap hebben dat $\dim(N((B_{kk}-\lambda_k I_k)^j)) = \dim(N((\hat{B}_{22}-\lambda_k I_2)^j))$.

Neem tenslotte $Q = Q_1 \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right)$ en schrijf $\hat{B}_{12} = (B_{12} | \ldots | B_{1p})$.

Het bewijs met betrekking tot S loopt analoog:

bepaal m.b.v. (14.3.1) $S_1$ z.d.d. $S_1^{-1}AS_1 = \text{diag}(B_{11},B_{22})$, etc. q.e.d.

N.B. (3) is nodig om te bewijzen dat $\dim(N((B_{kk}-\lambda_k I_k)^j)) = \dim(N((A-\lambda_k I)^j))$.

Opgave

81. Zij $B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & B_{pp} \end{pmatrix}$ als in bovenstaande stelling.

Construeer rechtstreeks een T van de vorm $T = \begin{pmatrix} I_1 & T_{12} & \cdots & T_{1p} \\ & I_2 & & T_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & I_p \end{pmatrix}$

z.d.d. $BT = T\,\text{diag}(B_{11},\ldots,B_{pp})$ door de stelsels $\sum_{\ell=i}^{j} B_{i\ell}T_{\ell j} = T_{ij}B_{jj}$, $1 \le i \le j \le p$, op te lossen (met $T_{ii} = I_i$).

<u>Stelling</u>. Zij $N_k := N((A-\lambda_k I)^{h_k})$, dan geldt er

1) $k \neq \ell \Rightarrow N_k \cap N_\ell = \{o\}$

2) $[N_1,\ldots,N_p] = \mathbb{C}^n$

3) $\dim N_k = m_k$

4) $AN_k \subset N_k$

5) $\dim((A-\lambda_k I)^j N_k) = m_k - r((A-\lambda_k I)^j)$

6) $(A-\lambda I)N_k = N_k$ als $\lambda \neq \lambda_k$. (14.3.4)

<u>Bewijs</u>. Zij $S = (S_1 | \ldots | S_p)$ als in vorige stelling, zodat de kolommen van $S_k$ een basis vormen voor $N_k$.
Ook geldt er $AS_k = S_k B_{kk}$ en dus $(A-\lambda_k I)^{h_k} S_k = S_k (B_{kk}-\lambda_k I_k)^{h_k}$.
Leid nu zelf hieruit alles af.

<u>Stelling</u>. Zij $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_p$ zo, dat

a) $k \neq \ell \Rightarrow \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_\ell = \{o\}$

b) $[\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_p] = \mathbb{C}^n$

c) $(A-\lambda I)\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_k$ voor $\lambda \neq \lambda_k$.

Dan is $\mathcal{V}_k = N((A-\lambda_k I)^{h_k})$. (14.3.5)

<u>Bewijs !</u> (meetkundig).
Uit c) volgt (ga na) dat $A\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}_k$. (*)
Ook volgt uit c) : $\lambda \neq \lambda_k$, $x_k \in \mathcal{V}_k$, $(A-\lambda_k I)x_k = o \Longleftrightarrow x_k = o$. (**)
Zij $x \in N_k := N((A-\lambda_k I)^{h_k})$.
Volgens b) is $x = \sum_{\ell=1}^{p} x_\ell$ met $x_\ell \in \mathcal{V}_\ell$.
Dan is $\sum_{\ell=1}^{p} (A-\lambda_k I)^{h_k} x_\ell = o$ en uit (*) volgt dat $(A-\lambda_k I)^{h_k} x_\ell \in \mathcal{V}_\ell$.
Dus m.b.v. a) geldt er voor iedere $\ell$ dat $(A-\lambda_k I)^{h_k} x_\ell = o$.
Volgens (**) is dus: $\forall \ell \neq k : x_\ell = o$. Dus $x \in \mathcal{V}_k$, d.w.z. $N_k \subset \mathcal{V}_k$.
Daar $\Sigma \dim N_k = n$ volgt eenvoudig dat $N_k = \mathcal{V}_k$. q.e.d.

Bewijs 2 (algebraïsch).

Zij $U = (U_1 | \dots | U_p)$ zo dat de kolommen van $U_k$ bases voor $\mathcal{V}_k$ zijn.

Uit a) en b) volgt dat U n×n en regulier is (ga na).

Uit c) volgt: $\exists C_k: AU_k = U_k C_{kk}$ en $\sigma(C_{kk}) = \{\lambda_k\}$.

Dus $U^{-1}AU = \operatorname{diag}(C_{11},\dots,C_{pp}) =: C$.

Als $S = (S_1 | \dots | S_p)$ en $B := \operatorname{diag}(B_{11},\dots,B_{pp})$ de in (14.3.3) optredende matrices zijn (waarbij dus de kolommen van $S_k$ een basis vormen voor $N_k$), dan is $BV = VC$ met $V := S^{-1}U$.

Dus $B_{kk}V_{k\ell} = V_{k\ell}C_{\ell\ell}$, en dus ook $(B_{kk}-\lambda_k I_k)V_{k\ell} = V_{k\ell}(C_{\ell\ell}-\lambda_k I_\ell)$.

Daar $B_{kk}-\lambda_k I_k$ nilpotent is en voor $k \neq \ell$ $C_{\ell\ell}-\lambda_k I_\ell$ regulier is, volgt uit (14.2.3) dat $V_{k\ell} = o$.

Dus $V = \operatorname{diag}(V_{11},\dots,V_{pp})$ met $V_{kk}$ regulier en $U_k = S_{kk}V_{kk}$.

De kolommen van $U_k$ spannen dus dezelfde ruimte op als de kolommen van S. q.e.d.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ als in (14.3.3) dan geldt $p_o(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda-\lambda_k)^{h_k}$. (14.3.6)

Bewijs. Voor ieder polynoom p geldt $p(A) = Sp(B)S^{-1} = S \operatorname{diag}(p(B_{11}),\dots,p(B_{pp}))S^{-1}$.
Dus $p(A) = o \iff \forall 1 \le k \le p$: $p(B_{kk}) = o$. Uit (14.2.2) en het feit dat $(B_{kk}-\lambda_k I_k)$ nilpotent is met index $h_k$ volgt dat $(\lambda-\lambda_k)^{h_k}$ minimaalpolynoom van $B_{kk}$ is. Daar $\forall j\ \forall \ell \neq k$: $(B_{kk}-\lambda_\ell I_k)^j \neq o$ moet $p_o(\lambda)$ dus alle factoren $(\lambda-\lambda_k)^{h_k}$ bevatten. q.e.d.

N.B. De graad van $p_o$ is $\sum_{k=1}^{p} h_k$.

Hieronder geven we een opsomming van een aantal (grotendeels reeds bekende) relaties:

$$1 \le n_k \le m_k \qquad\qquad p \le \sum_{k=1}^{p} n_k \le n$$

$$1 \le h_k \le m_k$$

$$n_k + h_k - 1 \le m_k \le n_k h_k \qquad\qquad p \le \sum_{k=1}^{p} h_k \le n$$

$$h_k = 1 \Rightarrow n_k = m_k$$

$$n_k = 1 \Rightarrow h_k = m_k \qquad\qquad 2p \le \sum_{k=1}^{p} (n_k + h_k) \le n + p$$

$$1 \le p \le n$$

$$\sum_{k=1}^{p} m_k = n \qquad\qquad n \le \sum_{k=1}^{p} n_k h_k \,. \qquad (14.3.7)$$

Definities.

A heet gedegenereerd als $p < n$, d.w.z. A heeft minder dan n verschillende eigenwaarden.

A heeft defectief als $\sum_{k=1}^{p} n_k < n$, d.w.z. A heeft minder dan n onafhankelijke eigenvectoren. (Er is dus géén basis van eigenvectoren.)

A heet derogatoir als $\sum_{k=1}^{p} h_k < n$, d.w.z. de graad van het minimaalpolynoom van A is kleiner dan n. (14.3.8)

Eigenschappen (bewijs deze zelf!)

A is niet gedegenereerd $\Leftrightarrow$ A heeft n verschillende eigenwaarden

$\Leftrightarrow \forall k : m_k = 1$

$\Leftrightarrow \forall k : h_k = n_k = 1$

$\Leftrightarrow$ A is niet defectief en niet derogatoir.

A is niet defectief $\Leftrightarrow$ A is diagonaliseerbaar

$\Leftrightarrow \forall k : m_k = n_k$

$\Leftrightarrow \forall k : h_k = 1$

$\Leftrightarrow$ de graad van een minimaalpolynoom van A is p

A is niet derogatoir $\Leftrightarrow$ de graad van een minimaalpolynoom van A is n

$\Leftrightarrow \forall k : h_k = m_k$

$\Leftrightarrow \forall k : n_k = 1$

$\Leftrightarrow$ A heeft slechts p onafhankelijke eigenvectoren

$\Leftrightarrow$ per eigenwaarde is er slechts één Jordankast (komt nog aan de orde). (14.3.9)

Opgave

82. A heet irreducibele Hessenberg matrix als $\left.\begin{array}{l} A_{ij} = 0 \text{ voor } i > j+1 \\ A_{j+1,j} \neq 0 \end{array}\right\} 1 \le j \le n$

Bewijs dat zo'n A niet derogatoir is.

Voorbeelden.

$$A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ dan } \begin{array}{ll} Ae_1 = o & \\ Ae_2 = o & \\ Ae_3 = o & \\ Ae_4 = o & \\ \mu_1 = 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda_1 = o \\ n_1 = 4 \\ m_1 = 4 \\ h_1 = 1 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ dan } \begin{array}{ll} Ae_1 = o & \\ Ae_2 = o & \\ Ae_3 = o & \\ Ae_4 = e_3 & A^2e_4 = o \\ \mu_1 = 3 & \mu_2 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda_1 = o \\ n_1 = 3 \\ m_1 = 4 \\ h_1 = 2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ dan } \begin{array}{ll} Ae_1 = o & \\ Ae_2 = e_1 & A^2e_2 = o \\ Ae_3 = 0 & \\ Ae_4 = e_3 & A^2e_4 = o \\ \mu_1 = 2 & \mu_2 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda_1 = o \\ n_1 = 2 \\ m_1 = 4 \\ h_1 = 2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ dan } \begin{array}{lll} Ae_1 = o & & \\ Ae_2 = o & & \\ Ae_3 = e_2 & A^2e_3 = o & \\ Ae_4 = e_3 & A^2e_4 = e_2 & A^3e_4 = o \\ \mu_1 = 2 & \mu_2 = 3 & \mu_3 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda_1 = o \\ n_1 = 2 \\ m_1 = 4 \\ h_1 = 3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ dan } \begin{array}{llll} Ae_1 = o & & & \\ Ae_2 = e_1 & A^2e_2 = o & & \\ Ae_3 = e_2 & A^2e_3 = e_1 & A^3e_2 = o & \\ Ae_4 = e_3 & A^2e_4 = e_2 & A^3e_4 = e_1 & A^4e_4 = o \\ \mu_1 = 1 & \mu_2 = 2 & \mu_3 = 3 & \mu_4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 1 \\ \lambda_1 = o \\ n_1 = 1 \\ m_1 = 4 \\ h_1 = 4 \end{array}$$

Alle 5 matrices zijn gedegenereerd. De laatste 4 zijn defectief en de eerste 4 zijn derogatoir. (14.3.10)

## 15. Reductie van nilpotente matrices

We zullen de reductie van nilpotente matrices eerst meetkundig en vervolgens algebraïsch aanpakken.

### 15.1. Hulpmiddelen

Zij $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots$ lineaire deelruimten van $\mathcal{V} := \mathcal{L}^m$.
Zij $\phi \subset \mathcal{V}$ gedefinieerd door $\phi := \{o\}$.

Definitie. $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 := [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] := \{x \in \mathcal{V} \mid \exists x_1 \in \mathcal{V}_1\ \exists x_2 \in \mathcal{V}_2 : x = x_1 + x_2\}$. (15.1.1)

Stelling. $\dim(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) = \dim(\mathcal{V}_1) + \dim(\mathcal{V}_2) - \dim(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$
(zie opgave 33). (15.1.2)

Gevolg. $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \phi \ (i \neq j) \Rightarrow \dim(\sum_i \mathcal{V}_i) = \sum_i \dim(\mathcal{V}_i)$. (15.1.3)

Stelling. $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \Rightarrow \exists \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_0 : \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \phi,\ \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0$. (15.1.4)

### 15.2. Fijnreductiestelling.

Stelling. Zij $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathcal{L})$, nilpotent, index h.
Zij $N_j := N(A^j)$, $\mu_j := \dim(N_j)$, $\nu_j := \mu_j - \mu_{j-1}$, dan zijn er deelruimten $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_h \subset \mathcal{L}^m$ zodanig dat

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \phi \ (i \neq j) \qquad (15.2.1)$$

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} \mathcal{V}_i \quad (1 \leq j \leq h) \qquad (15.2.2)$$

$$A\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j-1} \quad (2 \leq j \leq h) \qquad (15.2.3)$$

$$\dim(A^i \mathcal{V}_j) = \dim(\mathcal{V}_j) = \nu_j \quad (o \leq i < j \leq h). \qquad (15.2.4)$$

Bewijs.

1. Aangezien $N_{h-1} \subset N_h$ kunnen we volgens (15.1.4) $\mathcal{V}_h$ zo kiezen dat $N_{h-1} \cap \mathcal{V}_h = \phi$ en $N_{h-1} + \mathcal{V}_h = N_h$ en volgens (15.1.3) geldt dan $\dim(\mathcal{V}_h) = \dim(N_h) - \dim(N_{h-1}) = \mu_h - \mu_{h-1} = \nu_h$.

2. Zij $1 \leq j < h$ en $\mathcal{V}_{j+1}$ zó dat $N_j \cap \mathcal{V}_{j+1} = \phi$ en $N_j + \mathcal{V}_{j+1} = N_{j+1}$.
Dan is $A\,\mathcal{V}_{j+1} \subset AN_{j+1} \subset N_j$.
Ook geldt

$$A\,\mathcal{V}_{j+1} \cap N_{j-1} = \phi, \tag{a}$$

want als $x \in \mathcal{V}_{j+1}$ en $Ax \in N_{j-1}$ dan $x \in \mathcal{V}_{j+1} \cap N_j = \phi$.
Daar ook $N_{j-1} \subset N_j$ is, geldt $N_{j-1} + A\,\mathcal{V}_{j+1} \subset N_j$ en dus volgt met (15.1.4) dat er een $\mathcal{V}'_j$ is zodanig dat

$$\mathcal{V}'_j \cap (N_{j-1} + A\,\mathcal{V}_{j+1}) = \phi, \tag{b}$$

en

$$N_j = \mathcal{V}'_j + (A\,\mathcal{V}_{j+1} + N_{j-1})\ . \tag{c}$$

Neem $\mathcal{V}_j := \mathcal{V}'_j + A\,\mathcal{V}_{j+1}$, dan volgt uit (a) en (b) dat

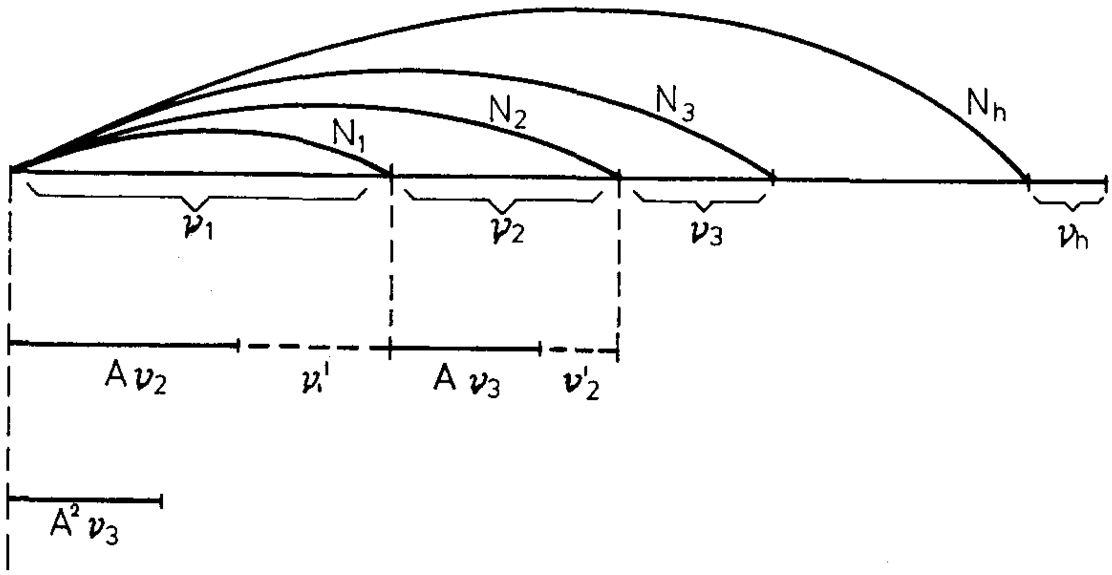
$$\mathcal{V}_j \cap N_{j-1} = \phi. \tag{d}$$

Uit (c) volgt tenslotte dat

$$\mathcal{V}_j + N_{j-1} = N_j \text{ en } A\,\mathcal{V}_{j+1} \subset \mathcal{V}_j\ . \tag{e}$$

3. Uit 1. en 2. volgt dat we achtereenvolgens $\mathcal{V}_h, \ldots, \mathcal{V}_1$ kunnen construeren zodanig dat (d) en (e) geldt voor $1 \leq j < h$. Daar voor $1 \leq i < j$ geldt $(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j) \subset (N_i \cap \mathcal{V}_j) \subset (N_{j-1} \cap \mathcal{V}_j) = \phi$ is aan (15.2.1) voldaan.
Uit $N_j = \mathcal{V}_j + N_{j-1}$ volgt (15.2.2). (15.2.3) volgt uit (e).
$\mathrm{Dim}(A^{j-1}\mathcal{V}_j) = \dim(\mathcal{V}_j) - \dim(N_{j-1} \cap \mathcal{V}_j) = \dim(\mathcal{V}_j)$.
Hieruit volgt dat voor $1 \leq i \leq j-1$:
$\dim(A^i\,\mathcal{V}_j) = \dim(\mathcal{V}_j) = \dim(N_j) - \dim(N_{j-1}) = \mu_j - \mu_{j-1} = \nu_j$ . q.e.d.

In de volgende figuur is gepoogd een en ander weer te geven.




Gevolg. 1. $\nu_{j-1} \geq \nu_j$ (volgt uit (15.2.3) en (15.2.4)),

2. $\sum_{i=1}^{h} \mathcal{V}_i = \mathcal{L}^m$ (volgt uit (15.2.2)) . (15.2.5)

Een vector x waarvoor geldt $x \in N_j$, $x \notin N_{j-1}$ heet principal vector van graad j.
Kennelijk geldt:
x principal vector van graad j $\Leftrightarrow A^j x = o$ en $A^{j-1}x \neq o \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{V}_j\backslash\{o\}$ : $x-y \in N_{j-1}$.
Ze vormen géén lineaire deelruimte.

De $\mathcal{V}$'s zijn in het algemeen niet eenduidig bepaald: we kiezen $\mathcal{V}'_h, \mathcal{V}'_{h-1}, \ldots, \mathcal{V}'_1$ slechts met onafhankelijkheidsvoorwaarden.

Als A niet defectief is dan h = 1 en dus is $\mathcal{V}_1$ de hele ruimte.
Als A niet derogatoir is dan $h = m$, $\mu_j = j$, $\nu_j = 1$.
Alle $\mathcal{V}_j$'s hebben dus dimensie 1 en de $\mathcal{V}'_j = \phi$. We hoeven dus slechts één vector te kiezen, nl. in $\mathcal{V}_h$ (een principal vector van graad h) en dan is verder

$$\mathcal{V}_j = A^{h-j}\mathcal{V}_h.$$

## 15.3. Basiskeuze

De basisvectoren kunnen op de volgende pseudo-algol wijze gegenereerd worden.

**for** $j := h$ **step** $-1$ **until** $1$ **do**

**begin if** $j < h$ **then** $x_{j,\ell} := Ax_{j+1,\ell}$ $(\ell = 1,\dots,\nu_{j+1})$;
  kies $x_{j,\ell}$ $(\ell = \nu_{j+1}+1,\dots,\nu_j)$ zodat $x_{j,\ell}$ $(1 \le \ell \le \nu_j)$ een basis voor $\mathcal{V}_j$ vormen

**end** basiskeuze;

Dit kan omdat $\mathcal{V}_j = A\mathcal{V}_{j+1} + \mathcal{V}'_j$ en $\dim(A\mathcal{V}_{j+1}) = \dim(\mathcal{V}_{j+1}) = \nu_{j+1}$. Als dus $x_{j+1,\ell}$ $(1 \le \ell \le \nu_{j+1})$ een basis voor $\mathcal{V}_{j+1}$ vormen dan vormen $x_{j,\ell} := Ax_{j+1,\ell}$ $(1 \le \ell \le \nu_{j+1})$ een basis voor $A\mathcal{V}_{j+1}$.
Zo vinden we achtereenvolgens:

$$\mathcal{V}_h \quad : x_{h,1},\dots,x_{h,\nu_h}$$

$$\mathcal{V}_{h-1} \quad : \underbrace{x_{h-1,1},\dots,x_{h-1,\nu_h}}_{A\mathcal{V}_h},\underbrace{\dots\dots,x_{h-1,\nu_{h-1}}}_{\mathcal{V}'_{h-1}}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}_2 \quad : \underbrace{x_{2,1},\dots,x_{2,\nu_h}}_{A^{h-2}\mathcal{V}_h},\underbrace{\dots\dots,x_{2,\nu_{h-1}}}_{A^{h-2}\mathcal{V}'_{h-1}},\underbrace{\dots,x_{2,\nu_2}}_{\mathcal{V}'_2}$$

$$\mathcal{V}_1 \quad : \underbrace{x_{1,1},\dots,x_{1,\nu_h}}_{A^{h-1}\mathcal{V}_h},\underbrace{\dots\dots,x_{1,\nu_{h-1}}}_{A^{h-2}\mathcal{V}'_{h-1}},\dots\dots,x_{1,\nu_2},\underbrace{\dots,x_{1,\nu_1}}_{\mathcal{V}'_1} \qquad (15.3.1)$$

Er geldt nu:

$$Ax_{j,\ell} = \begin{cases} 0 & j = 1\,, \quad 1 \le \ell \le \nu_1 \\ x_{j-1,\ell} & 2 \le j \le \ell, \quad 1 \le \ell \le \nu_j\,. \end{cases} \qquad (15.3.2)$$

## 15.4. Fijnstructuur van een nilpotente matrix

Stelling. Zij A een nilpotente matrix dan is er een regulier matrix X zodanig dat

$$AX = XJ,$$

met

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & J_{12} & 0 & 0 & \cdot \\ \hline 0 & 0 & J_{23} & 0 & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_{34} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \end{array}\right),$$

waarin de diagonaalblokken afmetingen $\nu_j \times \nu_j$ $(j = 1,\dots,h)$ hebben en

$$J_{j-1,j} = \begin{pmatrix} I_j \\ \hline 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \nu_j \\ \end{array} \Bigg\updownarrow \nu_{j-1} \qquad (15.4.1)$$

($J_j$ is de $\nu_j \times \nu_j$-eenheidsmatrix).

Bewijs.

Neem $X = (x_{1,1}|\dots|x_{1,\nu_1}|x_{2,1}|\dots|x_{2,\nu_2}|\dots\dots|x_{h,1}|\dots|x_{h,\nu_h})$.

Dit zijn de basisvectoren uit (15.3.1), rijsgewijs geordend, beginnend met de onderste rij. X is dan regulier.

Uitwerking van AX, rekening houdend met (15.3.2) levert de bewering. q.e.d.

Opmerking. Als A niet derogatoir is geldt $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & 0 \end{pmatrix}$

Stelling. Zij A een nilpotente matrix dan is er een reguliere matrix Y zodanig dat

$$AY = YN$$

met

$$N = \text{diag}\,(\underbrace{N_h,\dots,N_h}_{\nu_h \text{ stuks}},\ \underbrace{N_{h-1},\dots,N_{h-1}}_{\nu_{h-1}-\nu_h \text{ stuks}},\dots,\underbrace{N_1,\dots,N_1}_{\nu_1-\nu_2 \text{ stuks}}).$$

waarin $N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & 0 \end{pmatrix}$ en $N_k \in \mathcal{M}_{k,k}$ ($N_k$ heet Jordankast). (15.4.2)

Bewijs.
Neem $Y = (x_{1,1}|\ldots|x_{h,1}|x_{1,2}|\ldots|x_{h,2}|\ldots|x_{1,\nu_h}|\ldots|x_{h,\nu_h}|\ldots$

$|x_{1,\nu_h+1}|\ldots|x_{h-1,\nu_h+1}|\ldots|x_{1,\nu_{h-1}}|\ldots|x_{h-1,\nu_{h-1}}|\ldots|x_{1,\nu_1})$.

(Dit zijn dus de basisvectoren uit (15.3.1), kolomsgewijs geordend en per kolom van onder naar boven.)
Uit (15.3.2) volgt dan de bewering. q.e.d.

Opmerking. De matrices J en N (uit (15.4.1) resp. (15.4.2)) hangen alleen af van de multipliciteitenrij van A.
N heet de Jordannormaalvorm van A en $N_k$ heet een Jordankast.

## 15.5. Het karakteristieke polynoom van een matrix

Stelling. Zij A een matrix met $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$, indices $h_1,\ldots,h_p$, algebraïsche multipliciteiten $m_1,\ldots,m_p$, en multipliciteitenrijen

$$\begin{matrix} u_{1,1} & \ldots, & u_{1,h_1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{p,1}, & \ldots, & u_{p,h_p} \end{matrix}.$$

Dan is A gelijkvormig met $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_1 + N^{(1)},\ldots,\lambda_p I_p + N^{(p)})$, waarin $I_k$ de $m_k \times m_k$-eenheidsmatrix is, en $N^{(k)}$ de $m_k \times m_k$-normaalvorm van Jordan is, horend bij de multipliciteitenrij $u_{k,1},\ldots,u_{k,h_k}$. (15.5.1)

Bewijs. Pas de grofreductiestelling toe; en daarna (15.4.2) op ieder der matrices $B_{kk} - \lambda_k I_k$. q.e.d.

Gevolg. De matrices A en B zijn d.e.s.d. gelijkvormig als ze hetzelfde spectrum en dezelfde multipliciteitenrijen (= Jordanstructuur) hebben.
Vergelijk dit met hoofdstuk IV.

Uitgaande van elementaire kennis van determinanten kunnen we bewijzen:

Stelling. $\det(\lambda I - A) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$. (15.5.2)

Bewijs. $\det(\lambda I-A) = \det(S^{-1}(\lambda I-A)S) = \det(\lambda I-S^{-1}AS) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, waarbij $S$ zo gekozen is dat $S^{-1}AS$ de vorm uit (15.5.1) heeft. Hierbij is gebruik gemaakt van de eigenschappen:

$\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ en

det(rechtsbovendriehoeksmatrix) = produkt van de diagonaalelementen.

Definitie. $\Delta(\lambda) := \prod_{k=1}^{p} (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ heet karakteristiek polynoom van A. (15.5.3)

Gevolgen.

1. Het minimaalpolynoom is een deler van $\Delta(\lambda)$ (uit (14.3.6) en $h_k \le m_k$).
2. A is niet derogatoir $\Longleftrightarrow p_o(\lambda) = \Delta(\lambda)$ (uit (14.3.9)). (15.5.4)

Stelling. (Hamilton-Cayley)

$\Delta(A) = 0.$ (15.5.5)

Bewijs. $p_o(A) = o$ en $p_o$ is deler van $\Delta$. q.e.d.

Opgave

83. Bewijs de stelling van Hamilton-Cayley rechtstreeks door m.b.v. de regel van Cramer een uitdrukking voor $(\lambda I-A)^{-1}$ op te schrijven en hieruit af te leiden dat $\Delta(\lambda)I = (\lambda I-A)\cdot Q(\lambda)$, waarin $Q(\lambda)$ een polynoom is met matrices als coëfficiënten. Laat zien dat men in deze identiteit $\lambda$ door A mag vervangen.

## 15.6. Algebraïsche aanpak van de reductie van een nilpotente matrix

Stelling. Zij A m×m, nilpotent met index h, $\mu_j = \dim(N(A^j))$, $o \le j \le h$, $\nu_j = \mu_j - \mu_{j-1}$, $1 \le j \le h$.

Dan is er een reguliere matrix U (desgewenst unitair) zodanig dat

$$AU = UC$$

met

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \cdots & C_{1h} \\ & 0 & \cdots & C_{2h} \\ & & \ddots & \\ & & 0 & C_{h-1,h} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (15.6.1)$$

waarin $C_{ij}$ afmetingen $\nu_i \times \nu_j$ heeft en $C_{j-1,j}$ RR is.

<u>Bewijs</u>. Zij $N_j := N(A^j)$. Omdat $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_h$ is er een reguliere (desgewenst unitaire) matrix $U = (U_1|\ldots|U_h)$ zodanig dat de kolommen van $(U_1|\ldots|U_j)$ een (orthonormale) basis voor $N_j$ vormen $(1 \le j \le h)$.
Kennelijk geldt $AU_1 = 0$. En daar voor $2 \le j \le h$ : $AN_j \subset N_{j-1}$ zijn er matrices $C_{ij}$ $(1 \le i \le j-1)$ zodanig dat

$$AU_j = \sum_{i=1}^{j-1} U_i C_{ij} .$$

We hoeven dus nog slechts te bewijzen dat de $C_{j-1,j}$ rechtsregulier zijn.
Stel dat $C_{j-1,j}\, y_j = 0$. Zij $x := U_j y_j$. Dan is

$$Ax = \sum_{i=1}^{j-2} U_i C_{ij} y_j \in N_{j-2} ,$$

dus $x \in N_{j-1}$, dus $x = \sum_{1}^{j-1} U_i y_i$. Daar $(U_1|\ldots|U_j)$ rechtsregulier is volgt hieruit dat $y_j = 0$. Dus $C_{j-1,j}$ is rechtsregulier. q.e.d.

<u>Gevolg</u>. $\nu_{j-1} \ge \nu_j$.

<u>Stelling</u>. Zij

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \cdots & C_{1h} \\ & 0 & \cdots & C_{2h} \\ & & \ddots\, 0 & C_{h-1,h} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

met $C_{ij}$ $\nu_i \times \nu_j$ en $C_{j-1,j}$ rechtsregulier. Dan is er een reguliere $S$ zodanig dat

$$CS = SJ$$

met

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} & & \bigcirc \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & J_{h-1,h} \\ \bigcirc & & & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$J_{j-1,j} = \begin{array}{c} \overset{\nu_j}{\longleftrightarrow} \\ \left[\begin{array}{c} I_j \\ \hline 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \nu_j \\ \\ \end{array} \Bigg\updownarrow \nu_{j-1} . \qquad (15.6.2)$$

Bewijs. We lossen $S$ op uit het stelsel $CS = SJ$. Partitioneren we $S$ net als $C$ dan moet voor $1 \leq i \leq h$

$$(*) \qquad \sum_{\ell=i+1}^{h} C_{i\ell} S_{\ell j} = \begin{cases} 0 & \text{als } j = 1 \\ S_{i,j-1} J_{j-1,j} & \text{als } 2 \leq j \leq h. \end{cases}$$

Zij eerst $1 \leq j \leq i \leq h-1$. Dan schrijven we $(*)$ als

$$C_{i,i+1} S_{i+1,j} = - \sum_{\ell=i+2}^{h} C_{i\ell} S_{\ell j} + \begin{cases} 0 & \text{als } j = 1 \\ S_{i,j-1} J_{j-1,j} & \text{als } j \geq 2. \end{cases}$$

Neem nu achtereenvolgens $j = 1,2,\ldots,h-1$ en bij iedere $j$ achtereenvolgens $i = h,h-1,\ldots,j$. Dan vinden we dat $C_{i,i+1} S_{i+1,j} = 0$ en dus, daar $C_{i,i+1}$ rechtsregulier is,

$$S_{i,j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq i \leq h-1.$$

$S$ is dus noodzakelijk een blok bovendriehoeksmatrix.
Het linkerlid van $(*)$ is dan 0 voor $i \geq j$ en van de relatie $(*)$ blijft over

$$S_{i,j-1} J_{j-1,j} = \sum_{\ell=i+1}^{j} C_{i\ell} S_{\ell j}, \quad 1 \leq i < j \leq h.$$

Daar $J_{j-1,j}$ rechtsregulier is en dus een linker-inverse heeft (bv. $J^T_{j-1,j}$) kunnen we hiermee de $j-1$ ste blokkolom van $S$ uitdrukken in de $j$-de blokkolom en er nog de oplossingen van het homogene stelsel $S_{i,j-1} J_{j-1,j} = 0$ aan toevoegen

$$(**) \qquad S_{i,j-1} = \Big( \sum_{\ell=i+1}^{j} C_{i\ell} S_{\ell j} \,\Big|\, S'_{i,j-1} \Big), \quad 1 \leq i < j \leq h$$

met $S'_{i,j-1}$ een onbepaalde $\nu_i \times (\nu_{j-1} - \nu_j)$-matrix.

We kunnen derhalve de matrices $S$ die aan $CS = SJ$ voldoen verkrijgen door de $h$-de blok-kolom van $S$ vrij te kiezen en daarna achtereenvolgens met $j = h,h-1,\ldots,2$ de $j-1$ ste blok-kolom van $S$ uit $(**)$ te bepalen (onder de diagonaal aan te vullen met nul-blokken), waarbij de $S'_{i,j-1}$ willekeurig zijn.

Is de aldus verkregen matrix S regulier? Daar S blok-bovendriehoeksmatrix is, is S regulier dan en slechts dan als de diagonaalblokken van S regulier zijn. Het blok $S_{hh}$ kunnen we vrij kiezen. En voor $i = j-1$ volgt uit (**)

$$S_{j-1,j-1} = (C_{j-1,j}\, S_{jj} | S'_{j-1,j-1}) .$$

Daar $C_{j-1,j}$ rechtsregulier is, is $C_{j-1,j}\, S_{jj}$ rechtsregulier als $S_{jj}$ regulier is en in dat geval kan $S'_{j-1,j-1}$ zo gekozen worden dat $S_{j-1,j-1}$ regulier is. Het is dus mogelijk S zo te bepalen dat zij regulier is. q.e.d.

Opgaven

84. Ga na dat de keuzevrijheid in S geheel correspondeert met de keuzevrijheid in de basisvectoren van de ruimten $\mathcal{V}_h, \mathcal{V}_{h-1}, \ldots, \mathcal{V}_1$ uit 15.3.

85. Bepaal bij een J van de vorm uit de stelling alle regulier S zodanig dat $JS = SJ$.

86. Bewijs voor een C van de vorm uit stelling (15.6.2) rechtstreeks dat hij nilpotent is met index h.

Uit de stellingen (15.6.1) en (15.6.2) volgt nu dat een nilpotente matrix gelijkvormig is met een matrix J, zoals in stelling (15.4.1). Daarmee is de algebraïsche formulering van de fijnstructuur stelling voor nilpotente matrices voltooid. De stap van de matrix J naar de Jordan-normaalvorm geschiedt door gelijkvormigheidstransformatie met een permutatiematrix, essentieel zoals in §15.4.

## 15.7. Numerieke implementatie van het reductieproces

Stel dat met een betrouwbare numerieke methode (bijv. de QR-algoritme van Francis) gevonden wordt dat de $n\times n$-matrix A een aantal geheel of vrijwel gelijke eigenwaarden $\lambda$ heeft. Hoe bepalen we de hierbij behorende index en multipliciteitenrij?

We willen niet ingaan op typisch numerieke problemen als: wanneer zijn eigenwaarden "vrijwel gelijk" of: wanneer is een matrix numeriek niet onderscheidbaar van een matrix met rang r, maar geven een tweetal algebraïsche stellingen die, omdat ze met unitaire gelijkvormigheidstransformaties werken, tot één betrouwbare numerieke algoritme uitgewerkt kunnen worden.

Opmerking. Zie A. Ruhe, An algorithm for numerical determination of the structure of a general matrix, BIT 10 (1970), 196-210.

Lemma. Zij A singulier met index h en rang r. Dan is er unitaire Q zodanig dat

$$Q^H AQ = (\,0\,|B_2) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right)$$

met $B_2$ $n\times r$, rang r

$B_{22}$ $r\times r$ en: als $h = 1$ dan $B_{22}$ regulier

als $h > 1$ dan $B_{22}$ singulier,

index $h-1$ en rang $(B_{22}^j) = \text{rang}(A^{j+1})$

en ook

$$\dim(N(B_{22}^j)) = \dim(N(A^{j+1})) - \dim(N(A)). \tag{15.7.1}$$

Bewijs. $\dim(N(A)) = n-r$. Kies $Q = (Q_1|Q_2)$ unitair zodat de $n-r$ kolommen van $Q_1$ $N(A)$ opspannen. Dus $AQ_1 = 0$ en

$$Q^H AQ = Q^H(0|AQ_2) =: (0\ |B_2) =: \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right)$$

met $B_2$ $n\times r$ en $B_{22}$ $r\times r$.

Zeker is rang $B_2$ = rang A = r.

Verder geldt

$$Q^H A^{j+1} Q = (0\ |B_2)^{j+1} = (0\ |B_2 B_{22}^j).$$

Daar $B_2$ rechtsregulier is volgt hieruit dat rang $(A^{j+1}) = \text{rang}(B_{22}^j)$.

Maak het bewijs zelf af. q.e.d.

Opmerking. Dit is een generalisatie van de inductiestap bij het lemma van Scheer (13.2.2).

De constructie van Q en de bepaling van de rang van A kan numeriek uitgevoerd worden met zg. Householder transformaties. Dit zijn links- of rechtsvermenigvuldigingen met matrices van de vorm

$$Q_1 = I - \frac{2}{c_1^H c_1}\, c_1 c_1^H .$$

Bepaal nl., als $A \neq 0$, een permutatiematrix $P_1$ zodanig dat

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a_1^H \\ \hline A_2 \end{pmatrix}$$

met $a_1^H \neq o$. Zij $\alpha_1 := (a_1^H a_1)^{\frac{1}{2}}$, $c_1^H := a_1^H - \alpha_1$ en T en $Q_1$ de met $c_1$ gevormde Housholder-transformatiematrix. Dan geldt (ga na) dat

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha_1 \\ \hline A^{(1)} & a^{(1)} \end{array}\right)$$

Als $A^{(1)} \neq 0$ dan gaan we verder met $A^{(1)}$. Na r slagen vinden we zo: er is een permutatiematrix P en een unitaire matrix Q zodanig dat

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} 0 & R_{12} \\ \hline 0 & R_{22} \end{array}\right) =: (0 \mid R_2)$$

waarin $R_{12}$ een reguliere r×r-rechtsondermatrix is.
Derhalve is

$$Q^H A Q = (0 | Q^H P^T R_2) =: (0 \mid B_2)$$

met $B_2$ n×r, rechtsregulier.

Met behulp van (15.7.1) kunnen we door volledige inductie naar h nu de volgende stelling afleiden (en numeriek implementeren)

<u>Stelling</u>. Zij $\lambda \in \sigma(A)$ met index h en multipliciteitenrij $\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_h$.
Zij $\nu_j := \mu_j - \mu_{j-1}$ ($j \leq h$), $\nu_{h+1} = n - \mu_h$.
Dan is er unitaire Q zodanig dat

$$Q^H A Q = \begin{pmatrix} \lambda I_1 & C_{12} \cdots & C_{1h} & C_{1,h+1} \\ & \lambda I_2 \cdots & C_{2h} & C_{2,h+1} \\ & & \ddots & \\ & \bigcirc & \lambda I_h & C_{h,h+1} \\ & & & C_{h+1,h+1} \end{pmatrix}$$

met

$$I_j : \nu_j \times \nu_j \ (1 \le j \le h), \ C_{h+1,h+1} : \nu_{h+1} \times \nu_{h+1}$$

$$C_{ij} : \nu_i \times \nu_j \ (1 \le i < j \le h+1)$$

$$C_{j-1,j} \text{ rechtsregulier } (2 \le j \le h)$$

$$C_{h+1,h+1} - \lambda I_{h+1,h+1} \text{ regulier.} \qquad (15.7.2)$$

Opgave

87. Voer het bewijs uit.

## 16. Toepassingen van de normaalvorm van Jordan

### 16.1. Begrensdheidscriteria voor machten van een matrix

Zij N een h×h-Jordankast en $A = \lambda I+N$.
Dan is, omdat I en N commuteren, voor natuurlijke s

$$A^s = \sum_{\ell=o}^{s} \binom{s}{\ell} \lambda^{s-\ell} N^\ell = \sum_{j=o}^{\min(s,h-1)} \binom{s}{\ell} \lambda^{s-\ell} N^\ell .$$

Daar $(N^\ell)_{ij} = \delta_{j-i,\ell}$ (ga na), is dus

$$(A^s)_{ij} = \begin{cases} \binom{s}{j-i} \lambda^{s-(j-i)} & \text{als } i \le j \le \min(h,i+s) \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hieruit volgt (ga na; bedenk dat $\binom{s}{\ell}$ een polynoom in s is met graad $\ell$)

a) $\lim\limits_{s \to \infty} A^s = 0 \iff |\lambda| < 1$

b) $A^s$ begrensd $\iff |\lambda| < 1$ of $|\lambda| = 1$ en $h = 1$

c) $$\lim_{s \to \infty} \sqrt[s]{|(A^s)_{ij}|} = \begin{cases} |\lambda| & \text{als } i \le j \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad (16.1.1)$$

Eigenlijk zouden we een topologie in de ruimte der matrices moeten invoeren. Daar deze ruimte lineair en eindig dimensionaal is zijn echter alle topologiëen equivalent. We kunnen dus bijv. alle limieten elementsgewijs opvatten.

Opgave

88. Bewijs dat als $\lambda \neq o$, en s negatief geheel is,

$$A^s = \sum_{j=o}^{h-1} \binom{s}{\ell} \lambda^{s-\ell} N^\ell$$

en leid hieruit relaties als a), b) en c) af.

Stel dat $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ met indices $h_1,\dots,h_p$ en algebraische multipliciteiten $m_1,\dots,m_p$ heeft. Dan is er een reguliere S z.d.d.

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_1 + N_1,\dots,\lambda_p I_p + N_p),$$

waarin iedere $N_k$ bestaat uit een of meer Jordankasten met maximale afmeting $h_k \times h_k$.

Uit

$$A^s = S\,\mathrm{diag}((\lambda_1 I_1 + N_1)^s,\dots,(\lambda_p I_p + N_p)^s)S^{-1}$$

volgt nu (ga na)

a) $$\lim_{s\to\infty} A^s = 0 \iff \forall_k : |\lambda\ | < 1$$

b) $$A^s \text{ begrensd } \iff \begin{cases} \forall_k : |\lambda_k| \leq 1 \\ |\lambda_k| = 1 \Rightarrow h_k = 1 \end{cases}$$

c) $$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\max_{i,j} |(A^s)_{ij}|} = \max_k |\lambda_k|. \qquad (16.1.2)$$

Opgave

89. Zij x een principal vector van A bij eigenwaarde $\lambda$ en met graad h. Dan is

$$A^s x = \sum_{\ell=o}^{\min(s,h-1)} \binom{s}{\ell} \lambda^{s-\ell} (A-\lambda I)^\ell x .$$

Bewijs dat hieruit volgt:

$$A^s x \text{ begrensd} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\lambda| \leq 1 \\ |\lambda| = 1 \Rightarrow h = 1 . \end{cases}$$

Opgave

90. Zij $\rho := \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ .

Bewijs dat voor iedere matrixnorm geldt

$$\lim_{s \to \infty} \sqrt[s]{\|A^s\|} = \rho .$$

## 16.2. Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

We beschouwen nu de differentiaalvergelijking

$$\frac{dY}{dt} = AY . \qquad (*)$$

Hierin is A een n×n-matrix (onafhankelijk van t), Y een n×p-matrix waarvan de elementen functies van t zijn (de limieten in de differentiaalquotiënten kunnen elementsgewijs genomen worden).
We construeren van (*) straks een zg. fundamentele oplossing $\lambda(t)$, waarin $p = n$, die bestaat voor $-\infty < t < \infty$, en waarvoor $A\cdot Y(t) = Y(t)\cdot A$ en $Y(o) = I$ is.
Dan geldt

$$\frac{d}{dt} Y(t)\, Y(-t) = AY(t)\, Y(-t) - Y(t)\, AY(-t) = 0$$

en dus

$$Y(t)\, Y(-t) = \text{constant} = Y^2(o) = I ,$$

waaruit volgt dat Y(t) voor alle t regulier is en dat

$$(Y(t))^{-1} = Y(-t) .$$

Hieruit volgt nu eenvoudig (ga na) dat voor iedere n×p-matrix Z(t) die aan (*) voldoet, geldt

$$Y(-t)\cdot Z(t) = Z(o) \text{ en dus } Z(t) = Y(t)\, Z(o) .$$

Dit resultaat impliceert de éénduidigheid van de fundamentele oplossing!

Ook vinden we zo alle oplossingen van de vector-differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = Ay$.

Opgaven

91. Bewijs dat voor de fundamentele oplossing Y geldt

$$Y(t + t_o) = Y(t) \cdot Y(t_o) .$$

92. Bewijs dat de oplossingen van

$$\frac{dZ}{dt} = AZ + F$$

(met Z en F $n \times p$, afhankelijk van t) gegeven worden door

$$Z(t) = \int_o^t Y(t-\tau)\ F(\tau)d\tau + Y(t)\ Z(o)$$

(met elementsgewijze integratie).

Om de fundamentele oplossing Y(t) van (*) te vinden kunnen we als volgt te werk gaan.
Zij S regulier zo dat

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_1 + N_1, \ldots) =: J .$$

Stel $Y(t) = SZ(t)S^{-1}$. Dan moet (ga na)

$$\frac{dZ}{dt} = JZ,\ Z(o) = I .$$

Partitioneer Z net als J. Dan geldt voor de buiten-diagonaalblokken ($i \neq j$)

$$\frac{dZ_{ij}}{dt} = 0,\ Z_{ij}(o) = 0 \Rightarrow Z_{ij}(t) = 0$$

dus $Z = \mathrm{diag}(Z_1, \ldots, Z_p)$ met

$$\frac{dZ_k}{dt} = (\lambda_k I_k + N_k)Z_k,\ Z_k(o) = I_k .$$

Stel

$$Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\ W_k(t)\ .$$

Dan moet (ga na)

$$\frac{dW_k}{dt} = N_k W_k,\quad W_k(o) = I_k\ .$$

Hieruit volgt

$$\frac{d^\ell W_k}{dt^\ell} = N_k^\ell\ W_k\ .$$

Omdat $N_k^\ell = 0$ voor $\ell \geq h_k$ is $W_k$ dus een polynoom en wel het polynoom

$$W_k(t) = \sum_{\ell=o}^{h_k-1} \frac{t^\ell}{\ell!}\ \frac{d^\ell W_k}{dt^\ell}(o) = \sum_{\ell=o}^{h_k-1} \frac{t^\ell}{\ell!}\ N_k^\ell\ .$$

Hieruit volgt tenslotte dat

$$Y(t) = S\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t} \sum_{\ell=o}^{h_1-1} \frac{t^\ell}{\ell!}\ N_1^\ell\ ,\ldots)S^{-1}\ .$$

Ga zelf na dat uit het feit dat $W_k(t)$ een polynoom in $N_k$ is, en dus commuteert met $N_k$, volgt dat

$$A(t)\ Y(t) = Y(t)\ A(t)\quad (= \frac{dY}{dt})\ .$$

We definiëren de fundamentele oplossing $Y(t)$ nu op een andere manier.
Zij

$$e^{tA} := \sum_{o}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!}\ A^\ell.$$

De reeks in het rechterlid convergeert (elementsgewijs) voor alle $t$.
Want als

$$\alpha_\ell := \max_{i,j} |(A^\ell)_{ij}|,$$

dan geldt (ga na)

$$\alpha_\ell \leq n\alpha_{\ell-1} \cdot \alpha_1 \leq n^{\ell-1} \alpha_1^\ell$$

en

$$\sum_o^\infty \frac{1}{\ell!} |t|^\ell n^{\ell-1} \alpha_1^\ell$$

convergeert voor alle t.

Met behulp van een standaardredenering volgt nu dat

$$e^{(t_1+t_2)A} = \sum_{\ell=o}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left( \sum_{k=o}^{\ell} \binom{k}{\ell} t_1^k t_2^{\ell-k} \right) A^\ell$$

$$= \sum_{\ell=o}^{\infty} \sum_{k=o}^{\ell} \frac{t_1^k}{k!} A^k \cdot \frac{t_2^{\ell-k}}{(\ell-k)!} A^{\ell-k}$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t_1^k}{k!} A^k \cdot \sum_{m=o}^{\infty} \frac{t_2^m}{m!} A^m = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} .$$

Hieruit volgt met name dat $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .

Tenslotte geldt

$$(e^{(t+\Delta t)A} - e^{tA})/\Delta t = e^{tA} (e^{\Delta tA} - I)/\Delta t =$$

$$= e^{tA} \cdot A \cdot \sum_1^\infty \frac{(\Delta t)^{\ell-1}}{\ell!} A^{\ell-1}$$

en hieruit volgt

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} \cdot A = Ae^{tA} .$$

Omdat de fundamentele oplossing Y(t) eenduidig is, betekent dat

$$Y(t) = e^{tA} .$$

Opgaven

93. Bewijs dat als A en B commuteren,

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB} .$$

Leid hieruit af dat als N bestaat uit een of meer Jordankasten(index h)

$$e^{t(\lambda I+N)} = e^{\lambda t I} \cdot e^{tN} = e^{\lambda t} \sum_{o}^{h-1} \frac{t^{\ell}}{\ell!} N^{\ell}$$

en tenslotte dat

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_1 + N_1, \ldots)$$

impliceert

$$e^{tA} = S\, \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t} \sum_{\ell=o}^{h_1-1} \frac{t^{\ell}}{\ell!} N_1^{\ell}, \ldots) S^{-1} .$$

94. Bewijs dat

a) $\lim_{t \to \infty} e^{tA} = 0 \iff \forall_k : \mathrm{Re}\, \lambda_k < 0$

b) $e^{tA}$ begrensd voor $t \to \infty \iff \begin{cases} \forall_k : \mathrm{Re}\, \lambda_k \leq 0 \\ \mathrm{Re}\, \lambda_k = o \Rightarrow h_k = 1 \end{cases}$

95. Beschouw de n-de orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n z = o .$$

Voeg aan een oplossing $z(t)$ toe de vector $y(t) \in \mathbb{C}^n$ volgens

$$y(t) = (z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t))^T .$$

Dan voldoet $y(t)$ aan

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

a) Bewijs dat A niet-derogatoir is. (Hint: voor iedere $\lambda$ heeft $A-\lambda I$ minstens rang $n-1$.)

b) Bewijs dat het minimaal polynoom van A is

$$p_o(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n .$$

Hint: er geldt

$$e_1^T A^j = e_{j+1}^T, \quad o \le j < n ,$$

$$e_1^T A^n = -a_n e_1^T - \ldots - a_1 e_n^T$$

en dus $e_1^T p_o(A) = o^T$.
Het minimaal polynoom heeft dus (!) graad n en is $p_o(z)$.

c) Bewijs dat de oplossingsvector $y(t)$ begrensd is voor $t \to \infty$ dan en slechts dan als voor alle nulpunten $\lambda$ van het minimaalpolynoom geldt

$$\mathrm{Re}\,\lambda \le o \text{ en } \mathrm{Re}\,\lambda = o \Rightarrow \lambda \text{ is enkelvoudig.}$$

<u>Opmerking</u>. De matrix A heet companion-matrix van het polynoom $p_o(z)$.