TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken met Oplossingen

bij het College Toegepaste Statistiek

van Prof. Dr. H.C.Hamaker

samengesteld door Drs. A.J.Bosch

Voorjaarssemester 1969

Bibl. Wisk.

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken met oplossingen

BEHORENDE BIJ HET COLLEGE TOEGEPASTE STATISTIEK

VAN PROF. DR. H.C. HAMAKER

SAMENGESTELD DOOR DRS. A.J. BOSCH

VOORJAARSSEMESTER 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 231
PRIJS f 2,50

INHOUD

I Verzamelingen

1. Voor twee van toeval afhankelijke gebeurtenissen V en W geldt: $P(V|W) = 1$ en $P(W|V) \neq 1$. Welke der betrekkingen is geldig:

   a) $V \cup W = V$ c) $V \cap W = V$

   b) $V \cup W = W$ d) $V \cap W = W$.

2. Schrijf de volgende deelpopulaties als som van elementaire deelpopulaties

   a) $A(B \cup C)$ d) $A\overline{BC}$

   b) $A \cup (BC)$ e) $A \cup (\overline{B \cup C})$

   c) $A \cup B \cup C$

3. In een fabriek is 65% van het personeel mannen, 70% is gehuwd en 47% zijn gehuwde mannen.

   a) Wat is het percentage gehuwde vrouwen?

   b) Wat is het percentage ongehuwde mannnen?

   c) Welk percentage van het personeel zijn mannen en/of gehuwd?

4. Bewijs:

   a) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ c) $(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

   b) $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$ d) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

5. Wanneer geldt $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ en wanneer $P(A \cup B) =$ $= P(A) + P(B)$?

6. Het percentage vrouwen in de nederlandse bevolking is 4 hoger dan dat van de mannen. Het percentage van nature stroblonde personen is, <u>onafhankelijk</u> van het geslacht gelijk aan 25%. Van de vrouwen met andere haarkleur bleekt echter 5% het haar tot het stroblond is. Hoe groot is de kans dat een aselect gekozen persoon met stroblond haar een man is?

7. A, B en C zijn 3 willekeurige gebeurtenissen. Vindt uitdrukkingen voor het geval:

a) alleen A optreedt

b) A en B, maar niet C optreden

c) alle drie optreden

d) minstens 1 optreedt

e) minstens 2 optreden

f) geen enkele optreedt

g) precies 1 optreedt

h) niet meer dan 2 optreden.

II Kansrekening (kansregels)

1. Bepaal de kans om in 5 worpen met een munt minstens 3 keer achtereen "kruis" te werpen.

2. A en B werpen in deze volgorde met een munt tot één van hen kruis gooit. Wie het eerst kruis gooit heeft gewonnen.
   a) Hebben A en B gelijke winstkansen?
   b) Als A bij verlies f.1 aan B geeft, hoeveel moet B dan aan A betalen als A wint opdat het een eerlijk spel is?

3. Een man van 40 jaar koopt een lijfrente die 20 jaar later zal ingaan. Zijn vrouw is 38. Van alle mannen van 40 leeft 4/5 nog na 20 jaar en van alle vrouwen van 38 nog 9/10. Wat is de kans dat minstens één van beide nog in leven is als men de lijfrente gaat uitkeren?

4. A en B spelen een tennismatch van 3 sets. Wie het eerst twee sets gewonnen heeft is winnaar. Als A een kans p heeft een set te winnen hoe groot is dan A's kans de match te winnen?

5. Een roulette bevat de nummers 1,...,36. Alle hebben gelijke kans. Hoe vaak moet een speler op één van deze nummers spelen om een kans $\geq \frac{1}{2}$ te hebben minstens 1 keer te winnen?

6. Uit een doos met N lootjes waaronder slechts 1 prijs, trekken achter elkaar n personen elk 1 lot. Als de prijs echter getrokken is, is het spel afgelopen. Moet het spel mèt of zonder teruglegging van het getrokken lot gebeuren opdat het eerlijk is voor alle n spelers? ($n \leq N$)

7. Beschouw groepen van 4 toevalscijfers. Hoe groot is de kans dat het hoogste van de 4 cijfers een 8 of een 9 is?

8. A en B werpen in deze volgorde om beurten met een munt totdat KK achter elkaar voorkomt. Degeen die de tweede K gooit is winnaar. Hoe liggen de winstkansen voor A en B?

9. Er wordt tweemaal achtereen geworpen met 2 dobbelstenen.
   a) Hoe groot is de kans dat beide malen hetzelfde totaal aantal ogen wordt geworpen?
   b) Gegeven dat beide malen hetzelfde aantal punten werd geworpen, hoe groot is dan de kans dat dit aantal 8 was?

10. Uit een bridgespel trekt men blind een kaart, bekijkt haar en legt haar terug. Na goed schudden herhaalt men dit. Hoeveel maal dient men minstens te trekken teneinde een kans van minstens $\frac{1}{2}$ te hebben dat men schoppen aas heeft gezien?

11. A werpt met 3, B met 2 munten. Wie het grootste aantal malen kruis werpt heeft gewonnen. Bij een gelijk aantal wordt overgeworpen. Bereken de winstkansen voor A en B.

12. Hoe groot zijn de kansen
   a) om bij 4 worpen met 1 dobbelsteen minstens 1 keer 6 te gooien?
   b) om bij 24 worpen met 2 dobbelstenen minstens 1 keer 66 te gooien?
   (Beroemd probleem van Chevalier de Méré voorgelegd aan Pascal.)

13. Bereken de kans dat bij een worp met 4 dobbelstenen, de hoogste worp een 5 is.

14. Ik werp met 3 dobbelstenen. Bereken de kans:
   a) dat een 3, 4 en 5 wordt geworpen;
   b) dat 3 opeenvolgende puntentallen worden geworpen;
   c) dat het produkt der 3 puntentallen even is;
   d) dat de laagste worp een 1 is;
   e) dat de laagste worp een 3 is.

15. Hoe groot is de kans bij een worp met 4 dobbelstenen minstens een 1 en een 2 te werpen?

16. Hoe groot is de kans dat bij een worp met 4 dobbelstenen de hoogste worp een 5 en de laagste worp een 1 is?

17. Geef een formule voor de kans dat bij een worp met n dobbelstenen de cijfers 1,2,...,6 alle minstens één maal voorkomen.

18. Hoe kan men met behulp van een onzuivere munt een pakje onder 2 mensen verloten zodat elk gelijke kans heeft?

19. Op een cirkelomtrek worden willekeurig 3 punten geplaatst en genomen als de hoekpunten van een driehoek. Hoe groot is de kans dat deze driehoek stomp is?

20. In een cirkel wordt "at random" een koorde getrokken. Hoe groot is de kans dat deze groter is dan de zijde van een ingeschreven gelijkzijdige driehoek? (Paradox van Bertrand; deze demonstreert dat men "random" nader moet preciseren).

21. Uit een doos met M witte en N zwarte knikkers nemen we er één voor één uit, totaal k. Hoe groot is de kans dat de laatste wit is:
   a) als trekking gebeurt met teruglegging;
   b) als trekking gebeurt zonder teruglegging.

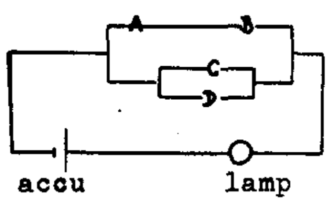
22. Een relais heeft een kans p_1 niet goed in te schakelen en een kans p_2 niet goed uit te schakelen.
   a) Wat is de kans dat het relais éénmaal goed in- en uitschakelt?
   b) Als 2 relais in serie geschakeld worden en tegelijk bekrachtigd, hoe groot is dan de kans dat het samenstel éénmaal goed in- en uitschakelt?
   c) Is het mogelijk dat beide relais in serie beter zullen funktioneren dan één relais alleen en zo ja onder welke voorwaarden?
   d) Beantwoordt dezelfde vragen wanneer 2 relais parallel geschakeld worden.

23. Een keuring van sigarettenmerken op nicotinegehalte werd uitgevoerd in 1958 en 1961. Naar grootte van de uitkomst gerangschikt werd gevonden:

in 1958: C,E,A,F,B,D.
in 1961: C,B,H,D,G,A.

De merken A,B,C en D zijn dus in beide jaren onderzocht, de merken E,F,G en H slechts in 1 van beide jaren. De bepaling van het nicotinegehalte is met grote toevallige fouten behept en het is best mogelijk dat de gevonden volgorden <u>zuiver toevallig</u> zijn. Het valt echter op dat het merk C beide malen op de eerste plaats staat. Vraag: mag men nu op grond van deze resultaten concluderen (α=0.05) dat het merk C inderdaad een hoger nicotinegehalte bevat dan de overige merken?

24.



A,B,C en D zijn onafhankelijke schakelaars. Kans op open of gesloten zijn is ½ voor elk. Hoe groot is de kans dat de lamp brandt? (accu, lamp, leiding funktioneren goed.)

25. Bij een statistisch onderzoek worden op 5 groepen waarnemingen die onderling onafhankelijk verkregen zijn, statistische analyses toegepast die tot de conclusies A,B,C,D en E leiden. Voor ieder der analyses geldt dat de bijbehorende conclusie behoudens een onbetrouwbaarheid α(die voor alle dezelfde is) geldt. Beantwoordt de volgende vragen:

a) Hoe groot is bij een dergelijke werkwijze de kans dat er onder de conclusies minstens 1 foute voorkomt?
b) Hoe groot is de kans dat ze allemaal fout zijn?
c) Bereken deze kansen voor α = 0.05.
d) Hoe groot moet men α nemen om, behoudens een onbetrouwbaarheid 0.05, er op te kunnen rekenen dat alle 5 conclusies juist zijn?

26. Men wenst contrôle op een produktieproces door een randomsteekproef ieder uur te onderzoeken. Het proces zal gestopt worden indien er 1 of meer defectieve exemplaren worden gevonden. Neem aan dat er 3% defectieven zijn hoe groot moet dan de steekproef hoogstens zijn om de kans dat het proces zal worden gestopt hoogstens 10% is?

27. Een urn bevat n loten genummerd 1,2,...,n. Men trekt er 1 voor 1 een lot uit zonder teruglegging. Als men bij de k^e greep juist lot nr. k pakt, spreekt men van een "match" of "rencontre". Gevraagd de kans op minstens 1 match. (Game of rencontre - matching problem)
Andere versie:
n paren komen op een feestje. De dames doen een briefje met hun naam erop in een doos. De heren mogen er elk 1 uitpakken om met de dame wier naam men trekt een dansje te maken. Hoe groot is de kans dat geen enkele heer met zijn eigen vrouw danst?

28. Twee spelers A en B werpen om de beurt met 2 dobbelstenen. A begint. Het spel wordt door A gewonnen als deze 6 ogen werpt vóórdat B 7 ogen heeft geworpen. Werpt B 7 ogen vóórdat A 6 ogen heeft geworpen dan wint B.
   a) Bereken de winstkansen voor A en B als ze hebben afgesproken dat elk hoogstens 10 keer mag werpen.
   b) Bereken de kans dat het spel onbeslist zal zijn na 10 worpen van ieder.
   c) Bereken ook de winstkansen als dit spel onbepaald lang wordt voortgezet.

III <u>Kansrekening</u> (kombinatoriek)

1. In een zak zitten 4 witte, 5 rode en 6 zwarte knikkers. Men trekt er 3 uit. Hoe groot is de kans op:
   a) geen zwarte?
   b) twee van de 3 zijn zwart?
   c) 3 van dezelfde kleur?

2. Een bridgespel wordt kaart voor kaart gekeerd. Hoe groot is de kans dat de 15e kaart die wordt gekeerd de tweede schoppenkaart is?

3. Hoe groot is de kans bij bridge dat u het spel begint
   a) met minstens één renonce?
   b) met een zevenkaart in een kleur?
   c) met een achtkaart in een kleur?

4. Een groep van 2N jongens en 2N meisjes wordt willekeurig in 2 groepen van 2N personen verdeeld. Hoe groot is de kans dat elke groep uit precies N jongens en N meisjes bestaat?

5. Hoeveel verschillende worpen zijn mogelijk met 3 dobbelstenen wanneer men deze niet van elkaar onderscheidt?

6. Pak 10 kaarten uit een bridgespel van 52 kaarten. Hoe groot is de kans op minstens 1 aas onder deze 10?

7. Bewijs: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

8. Hoe groot zijn de kansen dat de 4 azen in een bridgespel verdeeld zijn als a) 4 0 0 0 b) 3 1 0 0 c) 2 2 0 0 d) 2 1 1 0 e) 1 1 1 1 ?

9. Wanneer bij bridge een speler 1 aas heeft, hoe groot zijn dan de kansen dat zijn partner 0,1,2 resp. 3 azen in handen heeft?

10. Hoe groot is de kans dat van 23 (aselect gekozen) personen er minstens twee op dezelfde dag jarig zijn? (1 jaar=365 dagen).

11. Hoe groot is de kans om met 6 dobbelstenen precies 1 t/m 6 te gooien?

12. Hoe groot is de kans dat van een aselecte groep van 12 mensen de verjaardagen in 12 verschillende maanden vallen?

13. Twee personen kiezen elk 10 verschillende getallen uit 1 t/m 100. Wat is de kans op minstens 1 paar gelijke?

14. a) Op hoeveel manieren kan ik 10 guldens onder 3 personen verdelen?
•b) 8 gelijke dobbelstenen worden tegelijk geworpen. Hoeveel verschillende "beelden" zijn mogelijk?
c) Hoeveel dominostenen zitten er in een dominospel?

15. 7 loten worden gekenmerkt met de 7 letters van het woord ENERGIE. Uit deze loterij worden <u>met teruglegging</u> 3 loten getrokken.
a) Hoe groot zijn de kansen om met de 3 getrokken letters de woorden ERG resp. EEN te kunnen vormen?
b) dezelfde vraag <u>zonder teruglegging</u>.

16. Hoe groot is de kans dat uit een willekeurige groep van 25 mensen precies 3 paren op dezelfde dag jarig zijn? (de overige op verschillende dagen)

17. Op hoeveel manieren kan men de letters van de volgende woorden rangschikken: a) random
b) statistiek.

18. Ik pak 3 letters uit het woord examen. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

19. Er zijn 8 vakjes en 6 balletjes. Op hoeveel manieren kan ik deze balletjes over de vakjes verdelen als:

    I Alle balletjes verschillend zijn en

    a) er meerdere per vakje toelaatbaar zijn (Maxwell-Boltzmann)

    b) er maximaal 1 per vakje toelaatbaar is.

    II Alle balletjes hetzelfde zijn en

    a) er meerdere per vakje toelaatbaar zijn (Bose-Einstein)

    b) er maximaal 1 per vakje toelaatbaar is. (Fermi-Dirac)

20. Een club heeft 100 leden waaronder 50 advocaten en 50 leugenaars. Het aantal dat nòch advocaat nòch leugenaar is, is 20. Men kiest bij loting een comité van 5 man.

    a) Hoe groot is de kans dat het comité precies 3 advocaten bevat?

    b) Hoe groot is de kans dat het comité precies 3 advocaten bevat die tevens leugenaars zijn?

21. Bereken voor een groep van 4 toevalcijfers de kans op:

    a) 4 gelijke: AAAA

    b) 3 gelijke: AAAB

    c) 2 paren: AABB

    d) 1 paar AABC

    e) alle verschillend: ABCD.

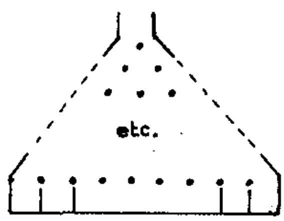
22. Van een doos met 100 schroeven is 5% defect. Men neemt hieruit zonder teruglegging een steekproef van 20 stuks. Hoe groot is de kans op 2 defecte hierin?

23. In het Morse-alfabet worden letters aangegeven door een opeenvolging van punten en strepen waarbij herhalingen zijn toegestaan. Hoeveel verschillende combinaties van punten en/of strepen kunt u van 5 tekens vormen?

24. Bepaal de kans op "9" bij het werpen met 3 dobbelstenen.

25. Bepaal de kans dat in een serie Bernoulli-experimenten het k^e-succes valt in het $(x+k)^e$-experiment.
(Negatief binomiale verdeling.)

26.



Boven in een Galton-bord worden n kogeltjes geworpen. De onderste rij van het bord bevat k spijkertjes. Bij botsing met een spijkertje is de kans om naar links te vallen p, naar rechts $q = 1 - p$. Hoe groot is de kans dat in het i^e vakje van links minstens x kogeltjes terechtkomen?

IV Voorwaardelijke kansen

1. Gegeven 2 vazen. Vaas 1 bevat 3 zwarte en 5 witte ballen, vaas 2 bevat 7 zwarte en 3 witte ballen. Men kiest willekeurig een vaas en trekt daaruit aselect een bal. Hoe groot is de kans dat deze wit is? (Exacte afleiding)

2. Een kast heeft 3 laden. In de ene la liggen 2 gouden munten, in een andere 2 zilveren en in de derde 1 gouden en 1 zilveren munt. Blindelings wordt een la opengetrokken en hieruit aselect een munt gepakt die van goud blijkt te zijn. Hoe groot is de kans dat de andere munt in die la ook van goud is? (Exacte afleiding)

3. Vaas 1 bevat 1 witte en 3 rode ballen, vaas 2 bevat 2 witte en 2 rode, vaas 3 bevat 4 witte en 3 rode ballen. Men kiest at random een vaas en trekt er blindelings een bal uit. Deze is wit. Hoe groot is de kans dat deze uit vaas 1 afkomstig is?

4. Men werpt met drie dobbelstenen. Bereken de kans op 2 of 3 vieren, als men weet dat er minstens 1 vier geworpen is.

5. Bewijs dat: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$.

6. Hoe groot is de kans dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit 3 jongens en 1 meisje als resp. gegeven is:
   a) het gezin bevat tenminste 3 jongens
   b) de oudste 3 kinderen zijn jongens.

7. Uit een vaas die 6 witte en 4 zwarte ballen bevat worden zonder teruglegging 2 ballen getrokken waarvoor 2 zwarte ballen in de plaats komen. Weer trekt men aselect zonder teruglegging 2 ballen. Bereken de kans dat beide zwart zijn.

8. Als A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn, zijn $\bar{A}$ en B resp. $\bar{A}$ en $\bar{B}$ dat ook. Bewijs.

9. Bij een experiment kunnen 3 gebeurtenissen A, B en C optreden die elkaar noch uitsluiten, noch een volledig stelsel vormen. Alle hebben dezelfde kans om op te treden. A is onafhankelijk van BC, maar B en C zijn afhankelijk: de voorwaardelijke kans op C onder voorwaarde B is 2x onvoorwaardelijke kans op C. De kans op het gelijktijdig optreden van A, B en C is $\frac{1}{4}$. Bewijs dat uit het optreden van B volgt dat ook C optreedt en omgekeerd.

10. Een moeder met bloedgroep A heeft een baby gekregen met bloedgroep O. Er zijn 3 mannen in het spel. Eén van hen is de vader, maar men weet niet wie en heeft ook geen voorkeur. De bloedgroepen echter van de 3 mannen zijn resp. A, O en AB. Hoe is nu de kansverdeling van het vaderschap? Gegevens: de kans op een baby met bloedgroep O uit ouders met AA, AO, A(AB) is resp. 0,0625; 0,25 en 0.

11. Gegeven 3 dozen. Doos 1 bevat 2 ballen met een 2 erop en één met een 3. Doos 2 bevat 3 witte en 1 zwarte, doos 3 bevat 1 witte en 4 zwarte ballen. We pakken aselect een bal uit doos 1 en daarna aselect een bal uit de doos met hetzelfde nummer als op de getrokken bal. Hoe groot is de kans dat deze laatste zwart is? (Exacte afleiding)

12. $\underline{x}$ bezit een Poissonverdeling met $\mu = 3$.
   a) Wat is de verdeling van $\underline{x}$ onder de voorwaarde $\underline{x} < 4$? (m.b.v. tabel)
   b) Bereken $E(\underline{x} \mid \underline{x} < 4)$ en $\mathrm{var}(\underline{x} \mid \underline{x} < 4)$.

13. Uit een vaas die 4 witte en 6 zwarte ballen bevat, worden eerst 2 ballen aselect getrokken en opzij gelegd zonder naar de kleur te kijken. Daarna wordt een derde bal getrokken. Hoe groot is de kans dat
   a) de derde bal wit is? Wat merkt u dus op?
   b) de derde bal wit is als gegeven is dat onder de opzijgelegde ballen minstens 1 witte is?

14. In een fabriek staan 3 machines die alle hetzelfde produkt vervaardigen. Door kleine verschillen in constructie etc. leveren deze een ongelijk percentage defecte exemplaren op en wel: machine A α%, B β% en machine C γ%. De ongesorteerde produkten van de 3 machines gaan doorelkaar naar het magazijn. Hieruit wordt 1 exemplaar genomen en dat blijkt fout te zijn. Hoe groot is de kans dat dit van machine A afkomstig is, als gegeven is dat in het magazijn op dat moment aanwezig waren: a exemplaren van A, b van B en c van C.

15. A en B zijn elkaar <u>uitsluitende</u> gebeurtenissen, terwijl elk afzonderlijk een <u>positieve</u> kans heeft om op te treden. Zijn A en B stochastisch onafhankelijk?

16. Als $P(A)P(\bar{A}) \neq 0$ en $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$, zijn A en B dan onafhankelijke gebeurtenissen?

17. Als A, B en C onafhankelijk zijn, dan geldt bijv.

$$P(A \mid B \cup C) = P(A).$$

V. De momenten

1. Bewijs: a) $\sigma^2 = E(\underline{x}-\mu)^2 = E(\underline{x}^2) - \{E(\underline{x})\}^2 = E(\underline{x}^2) - \mu^2$.

   b) $\mathrm{var}(a\underline{x}+b) = a^2 \mathrm{var}\ \underline{x}$.

2. Zij $\underline{s}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2/(n-1)$. Bewijs:

   a) $E\underline{s}^2 = \sigma^2$ d.w.z. $\underline{s}^2$ is een zuivere schatter voor σ^2.
   b) $E\underline{s} < \sigma$ d.w.z. $\underline{s}$ is gèèn zuivere schatter voor σ.

3. Bewijs dat voor 2 stochastieken $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt dat de spreiding van de som hoogstens gelijk is aan de som der spreidingen afzonderlijk: $\sigma(\underline{x}+\underline{y}) \leqslant \sigma(\underline{x}) + \sigma(\underline{y})$. Geldt dit ook voor de variantie?

4. Bereken $\mu(\underline{x})$ en $\sigma^2(\underline{x})$ van de volgende populaties:
   a) $\underline{x}$ is het aantal ogen geworpen met 1 dobbelsteen.
   b) $\underline{x}_i$: 1,0

      p_i: p,q   p + q = 1 (Bernoulli-verdeling).
   c) $\underline{x}$ is een aselecte trekking uit de populatie:

$\underline{x}_i$:	5	10	15	20
n_i:	3	7	4	1 .

5. Zij $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ een aselecte steekproef zonder teruglegging uit een populatie. Bewijs dat var $\bar{\underline{x}}$ indien:
   a) de populatie oneindig groot is, gelijk is aan $\sigma^2(\underline{x})/n$.
   b) de populatiegrootte N eindig is, gelijk is aan

$$\frac{\sigma^2(\underline{x})}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \sim \sigma^2(\underline{x})(1-n/N)/n.$$

6. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ vormen een steekproef uit een verdeling met eindige μ en σ. $\bar{\underline{x}} = \sum_1^n \underline{x}_i/n$. Bewijs met behulp van de ongelijkheid van Bienaymé-Tchebycheff dat $\bar{\underline{x}}$ stochastisch naar μ convergeert d.w.z.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{\underline{x}}-\mu| > \varepsilon) = 0.$$

7. Als men 20 appels uit een partij van 1000 mag trekken om het gemiddelde gewicht te schatten, met welk van de volgende methoden zou men dan het nauwkeurigste resultaat verkrijgen:
a) 1 steekproef van 20 met teruglegging
b) 4 steekproeven van 5 met teruglegging
c) 4 steekproeven van 5 zonder teruglegging
d) 1 steekproef van 20 zonder teruglegging.

8. Stel $\underline{x}$ is normaalverdeeld met parameters μ en σ. Bewijs:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
b) $E\underline{x} = \mu$ en var $\underline{x} = \sigma^2$
c) de absces van de buigpunten zijn $\mu \pm \sigma$.

9. Bepaal μ en σ^2 van de exponentiële verdeling $\lambda e^{-\lambda x}$, $0 \leq x < \infty$.

10. Twee grote en even grote partijen kogels worden bij elkaar gevoegd tot één grote gemengde partij. De diameters van de kogels hebben resp. frekwentiefunkties f_1 en f_2 met gemiddelden $\mu_1 = 2$ en $\mu_2 = 2,2$ en spreidingen $\sigma_1 = 0,2$ en $\sigma_2 = 0,3$.
a) Bereken μ en σ^2 van de gemengde partij.
b) Als f_1 en f_2 beide normaal zijn, is de frekwentieverdeling van de gemengde partij dan ook normaal?

11. Gegeven een driehoekige verdeling:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken μ en σ^2.

12. Bereken gemiddelde en variantie van $\underline{x}$, indien
a) $\underline{x}$ een continue rechthoekigverdeelde variabele is op $(0,a)$
b) $\underline{x}$ de getallen $1,2,\ldots,n$ met gelijke kansen doorloopt.

13. Gegeven de frekwentieverdeling $f(x) = A\,x\,e^{-\lambda x}$ $\quad 0 \leq x \leq \infty$. $\lambda > 0$.
Gevraagd A, μ en σ^2 te berekenen.
Aanw.: $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

14. Bereken μ en σ^2 voor:

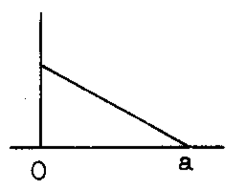
a) de binomiale verdeling $p(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

b) de Poissonverdeling $p(x;\lambda) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$

c) de Hypergeometrische verdeling

$$p(x;M,N,n) = \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} / \binom{N}{n}.$$

15. $\underline{x}$ bezit een driehoekige verdeling als in de fig. getekend.



$0 \leqslant x \leqslant a$. Bereken μ en σ^2.

16. Een produktieproces wordt uitgevoerd op 2 machines I, II. Een karakteristieke maat $\underline{x}$ van het produkt bezit een frekwentieverdeling $f_1(x)$ en $f_2(x)$ voor deze 2 machines met verwachtingen μ_1 en μ_2 en spreidingen σ_1 en σ_2 resp. Van de totale produktie worden frakties p_1 en p_2 $(p_1 + p_2 = 1)$ geproduceerd op machines I en II.

a) Indien alle produkten afkomstig van deze 2 machines bijeen worden gevoegd, wat is dan de frekwentieverdeling voor het totaal?

b) Leidt hieruit een formule af voor de verwachting μ en de variantie σ^2 van de totale produktie?

17. Men werpt met een dobbelsteen. Als men een zes gooit stopt men. Wat is de verwachting voor het aantal worpen nodig om de eerste zes te werpen? (Exacte afleiding)

18. Als men een pakje Hunter sigaretten koopt, staat er aan de binnenkant van de deksel één van de letters Hunter op. Levert men 6 deksels in zodat het woord Hunter kompleet is, dan krijgt men er 1 pakje als reclame voor terug. Alleen deze letters komen voor en wel met gelijke frekwenties over de handelaren verdeeld. Hoeveel pakjes moet men gemiddeld kopen om een reclamepakje te bemachtigen? (Toets uw antwoord met een dobbelsteen door te kijken hoe vaak men gemiddeld moet werpen om alle ogen minstens 1 keer geworpen te hebben.)

19. Een kansfunktie is gegeven door $f(x) = A + Bx \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
$= 0 \quad$ elders.
Gevraagd A en B, als gegeven is dat $\mu = \frac{1}{2}$.

20. Een doos bevat 2^n kaartjes. Er zijn $\binom{n}{k}$ kaartjes met het - getal k er op $(k = 0,1,2,\ldots,n)$. Ik pak er m uit. Wat is de verwachtingswaarde van de som van de m getallen?

21. Bij het keuren van een partij gaat men door tot men 2 afgekeurde exemplaren heeft aangetroffen. Het 2e afgekeurde blijkt juist het 20e gekeurde exemplaar te zijn. Is 10% een zuivere schatting van het percentage fouten p in de partij?

22. Gegeven de getallen $1,2,\ldots,N$. Men trekt hieruit een steekproef van n stuks: $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$. Stel $\underline{y} = \sum_1^n \underline{x}_i$. Bereken $\mu(\underline{y})$ en $\sigma^2(\underline{y})$ indien
a) trekking geschiedt met teruglegging
b) trekking geschiedt zonder teruglegging.

23. Bereken μ en σ^2 voor de χ^2 - verdeling.

24. Wanneer geldt voor 2 stochastieken $\underline{x}$ en $\underline{y}$
a) $\operatorname{var}(\underline{x}+\underline{y}) = \operatorname{var} \underline{x} + \operatorname{var} \underline{y}$?
b) $\sigma(\underline{x}+\underline{y}) = \sigma(\underline{x}) + \sigma(\underline{y})$?

25. Leidt af dat voor grote ν geldt: $\operatorname{var} \underline{s} \approx \sigma^2/2\nu$.
Het betrouwbaarheidsinterval voor σ wordt dan:
$a_1\underline{s} < \sigma < a_2\underline{s}$ met $a_1 = \sqrt{2\nu}/[\sqrt{2\nu} + u(\frac{1}{2}\alpha)]$
$a_2 = \sqrt{2\nu}/[\sqrt{2\nu} - u(\frac{1}{2}\alpha)]$.

26. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn 2 onafhankelijke stochastieken met gemiddelde en spreiding resp. μ_1, σ_1 en μ_2, σ_2. Laat $\underline{z} \cong \underline{x}\,\underline{y}$
Bereken var $\underline{z}$ en geef een uitdrukking in variatiecoëfficiënten.
(variatiecoëff.: $V = \sigma/\mu$)

27. Uit een steekproef van 50 waarnemingen berekende men $\bar{x} = 6.81$ en $s = 3.10$ (volgens de gebruikelijke formules). Later bleek dat bij de berekening één der waarnemingen foutief was overgenomen. Er moest staan 2.7 in plaats van 7.2.
Bereken de juiste waarde van $\bar{x}$ en s.

28. Gegeven de frekwentieverdeling $f(x) = k/(1+x^2)$ $-\infty < x < \infty$
(Cauchy-verdeling)
Bereken k, μ en σ^2.

29. Een dronken man heeft 10 verschillende sleutels, waaronder zijn huissleutel, in zijn jaszak. Hij probeert steeds een sleutel en als hij niet past doet hij hem weer in dezelfde zak terug, schudt goed en probeert de volgende.
a) Hoeveel pogingen zal deze man gemiddeld nodig hebben om de deur te openen?
b) En hoeveel indien hij niet dronken was en de niet-passende sleutels steeds opzij legde?

30. $\underline{x}$ bezit een lognormale verdeling d.w.z. $\underline{y} = \ln \underline{x}$ is normaal verdeeld (zie ook X .15)
Bepaal $\mu(\underline{x})$ en $\sigma^2(\underline{x})$.

31. a) Bij elke verdeling waarbij μ_2 bestaat is $E(\underline{x} - c)^2$ minimaal als $c = E\underline{x}$.
b) $s^2 = \Sigma_1^n \dfrac{(x_i - d)^2}{n-1}$ is minimaal voor $d = \bar{x}$.

32. Bewijs de ongelijkheid van Bienaymé - Cebysev voor een continu verdeelde stochastische variabele $\underline{x}$. ($\sigma^2(x)$ bestaat)

33. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ vormen een aselecte steekproef van $\underline{x}$.
Zij $t(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ een zuivere schatter voor de populatiegrootheid θ.
a) Is $\underline{t}^2$ een zuivere schatter voor θ^2?
b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} E(\bar{\underline{x}})^2 = \mu^2$.

34. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk. Er worden n paren onafhankelijke waarnemingen (x_i, y_i) gedaan. Men wil een schatting maken van de parameter $E\underline{x}\underline{y}$ ($= E\underline{x}E\underline{y}$). Toon aan dat $\frac{1}{n}\Sigma_1^n \underline{x}_i\underline{y}_i$ en $\bar{\underline{x}}\bar{\underline{y}}$ zuivere schatters zijn en dat de laatste beter is.

VI De correlatiecoëfficiënt

1. Bereken voor de volgende gevallen $r(\underline{x},\underline{y})$ en zet x en y tegen elkaar uit.

a)

x:	1	2	3	4
y:	3	5	7	9

b)

x:	1	2	3	4
y:	6	4	2	0

c)

x:	1	2	3	4
y:	5	2	2	5

d)

x:	1	2	2	3	4
y:	2	1	3	2	2

2. Bewijs: $|\rho(x,y)| \leq 1$.

3. Bewijs: $\underline{y} \cong a\underline{x} + b \longleftrightarrow \rho^2 = 1$.

4. Bewijs: indien $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn, zijn ze ongecorreleerd (d.w.z. $\rho=0$). Geldt het omgekeerde ook? Zo neen, geef v.b.

5. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn simultaan verdeeld met correlatiecoëfficiënt ρ. Een reeks van n onafhankelijke paren waarnemingen hiervan wordt voorgesteld door $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. Bereken $\rho(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$.

6. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn twee stochastieken met correlatiecoëfficiënt ρ. Stel $\underline{u} \cong a\underline{x} + b$ en $\underline{v} \cong c\underline{y} + d$ (a,b,c en d zijn constanten $\neq 0$). Bereken $\rho(\underline{u},\underline{v})$. Wat merkt u dus op?

7. Men werpt met een dobbelsteen. Bereken de correlatiecoëfficiënt tussen het geworpen cijfer en het naar u toegekeerde cijfer. Zijn beide variabelen onafhankelijk?

8. Van een stochastiek $\underline{x}$ worden n + k onafhankelijke waarnemingen $x_1,\ldots,x_{n+k}$ verricht. Als $\bar{\underline{x}}$ het gemiddelde van de eerste n, en $\bar{\underline{y}}$ het gemiddelde van alle waarnemingen is, bereken dan $\rho(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$.

9. Er wordt driemaal achtereen met een dobbelsteen geworpen. Bereken de correlatiecoëfficiënt tussen de eerste worp en de som van de 3 worpen.

10. $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn ongecorreleerde isomore stochastieken.
Bereken de correlatiecoëfficiënt tussen a) $\underline{x}_i$ en $\bar{\underline{x}}$
b) $\underline{x}_i - \bar{\underline{x}}$ en $\bar{\underline{x}}$.

11. Bepaal de marginale frekwentieverdelingen van

a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}/\pi \qquad , -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty$

b) $f(x,y) = 1/\pi \qquad , x^2 + y^2 \leqslant 1.$

Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk? Bepaal ρ.

12. Onderstaande tabel geeft voor een groep van 100 middelbare scholieren de twee-dimensionale verdeling van de rapportcijfers voor nederlands en algebra.

alg. \ ned.	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1	2				1	
3	1	3	4		1			
4		3	5	3	1			
5		1	5	7	4	1		
6	1	1	4	8	9			
7		1	2	3	4	7	2	
8				1	1	4	3	1
9						1	2	2

Bereken voor beide variabelen het gemiddelde, de variantie en bereken daarna de correlatiecoëfficiënt.

13. Bij het werpen met 2 dobbelstenen is $\underline{x}$ de laagste, $\underline{y}$ de hoogste worp. Worden gelijke punten geworpen dan hebben $\underline{x}$ en $\underline{y}$ beiden die waarde. Bereken $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

14. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben als simultane verdeling $f(x,y) = k$
$0 \leqslant x;\ 0 \leqslant y;\ x + y \leqslant 1.$
Bereken k en $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

15. Uit 4 loten genummerd 1,2,3,4 worden na elkaar twee loten getrokken zonder teruglegging. Zij $\underline{x}$ het nummer op het eerste lot, $\underline{y}$ het nummer op het tweede lot. Bereken $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

16. Laten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijke stochastieken zijn met $\sigma(\underline{y}) = 2\sigma(\underline{x})$.
Stel $\underline{z} \cong 2\underline{x} + \underline{y}$. Bereken $\rho(\underline{x},\underline{z})$.

17. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastieken met dezelfde variantie.
Zij $\underline{u} \cong a\underline{x} + b\underline{y}$ en $\underline{v} \cong c\underline{x} + d\underline{y}$. Bereken $\rho(\underline{u},\underline{v})$.
Controleer uw antwoord met a=b=c=d=1 en a=d=1,b=c=0.

---

18. Twee grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ bezitten een simultane verdeling.
Zij $\underline{u} \cong \underline{x} + \underline{y}$ en $\underline{v} \cong \underline{x} - \underline{y}$. Wanneer is $\rho(\underline{u},\underline{v}) = 0$?

19. Men werpt met 3 zuivere dubbeltjes en 2 zuivere kwartjes.
Zij $\underline{x}$ het aantal malen kruis van de dubbeltjes en kwartjes tezamen.
Vervolgens werpt men alleen de dubbeltjes opnieuw, de kwartjes blijven liggen. Weer telt men het aantal malen kruis van de dubbeltjes en kwartjes tezamen: $\underline{y}$.
Bereken $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

20. Zij $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ een aselecte steekproef van $\underline{x}$ ($\mu_3 = 0$).
Toon aan dat $\bar{\underline{x}}$ en $\underline{s}^2$ <u>ongecorreleerd</u> zijn.
Opm.: Voor een symmetrische verdeling is o.a. $\mu_3 = 0$.
Is $\underline{x}$ normaal verdeeld, dan zijn $\bar{\underline{x}}$ en $\underline{s}^2$ zelfs <u>onafhankelijk</u>.
Het bewijs hiervoor ligt veel dieper.

21. Men werpt met 2 dobbelstenen. De uitkomsten zijn $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$.
Zij $\underline{v} = \underline{x} - \underline{y}$ en $\underline{d} = |\underline{x} - y|$

a) Bepaal gemiddelde en variantie van $\underline{v}$ en $\underline{d}$.

b) Bepaal $\rho(\underline{v}, \underline{d})$. Zijn $\underline{v}$ en $\underline{d}$ onafhankelijk?

VII De normale verdeling

1. Gegeven: $\underline{x} \cong 50 + 7\underline{u}$.
   Bereken a) $P(\underline{x} > 60)$ b) $P(\underline{x} < 40)$
   c) $P(42 < \underline{x} < 63)$ d) Bepaal x zodat $P(\underline{x} < x) = 2\frac{1}{2}\%$.
   e) Bepaal x zodat $P(|\underline{x} - 50| < x) = 0.85$.

2. Van een normaalverdeelde grootheid $\underline{x}$ met $\mu = 2$ en $\sigma = 3$ worden vier onafhankelijke waarnemingen verricht. Hoe groot is de kans dat de grootste van deze vier waarnemingen $\geqslant 5$. En hoe groot dat de kleinste $\geqslant 5$?

3. In een magazijn van 3,20 m. hoog ligt een groot aantal platte schijven waarvan de dikte normaal is verdeeld met gemiddelde 12 cm. en spreiding 2 cm. Men heeft de gewoonte 25 schijven op elkaar te stapelen. Hoe groot is de kans dat dat mislukt?

4. De gewichtsinhoud van een pakje boter heeft een spreiding van 3 gram. Een regeringsinstantie neemt ter contrôle af en toe een steekproef van 25 pakjes. De fabrikant krijgt een boete als de gemiddelde gewichtsinhoud van deze steekproef minder is dan 250 gram. Op welk gemiddelde moet de verpakkingsmachine worden ingesteld om het risico van een boete tot 1% te reduceren?

5. Een droog korrelig poeder bevat deeltjes die zuiver bolvormig zijn en waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\mu = 170$ en $\sigma = 11{,}6$ mikron. Men wil dit poeder in 3 soorten verdelen nl. grof, middel en fijn en wel zodanig dat deze 3 klassen een gelijk aantal korrels bevatten. Hoe groot moeten de diameters van de gaten van de benodigde zeven zijn, opdat de gewenste indeling te verkrijgen is?

6. $\underline{x} \cong \mu + 3\underline{u}$, μ onbekend. Hoeveel onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$ moet men minstens nemen opdat de breedte van een tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor μ hoogstens 2 is?

7. Een verpakkingsmachine die pakjes thee van nominaal 100 gram maakt, verpakt gemiddeld 101,0 gram in elk pakje. De verdeling van het gewicht aan thee in een pakje is normaal met een spreiding van 0,6 gram. Hoeveel procent van de pakjes bevat minder dan het nominale gewicht?

8. Van een grote partij assen is de diameter normaal verdeeld met μ_1 = 14,82 mm. en σ_1 = 0,03 mm. Van een evengrote partij boringen is de diameter eveneens normaal verdeeld met μ_2 = 14,89 mm. en σ_2 = 0,04 mm. Een as "past" in een boring als zijn diameter minstens 0,05 en hoogstens 0,15 mm. kleiner is dan die van de boring.
   a) Bereken welk percentage assen in boringen zal passen als as en boring aselect aan elkaar worden toegevoegd.
   b) Hoe kan dit percentage worden verhoogd indien men wèl de gemiddelden van as en boring door gewijzigde instelling der machines kan wijzigen, maar niet de spreidingen? Welk percentage kan men dan maximaal bereiken?

9. In een magazijn worden dozen opeengestapeld. Deze zijn gemiddeld 10 cm. hoog, doch met een spreiding van 1 cm. De beschikbare hoogte is 106 cm. Wanneer men de dozen aselect opstapelt, hoe groot zijn dan de kansen
   a) dat er voor een stapel van 10 dozen onvoldoende ruimte is?
   b) dat er voor een stapel van 11 dozen wel voldoende ruimte is?
   c) dat er voor 10 dozen wel, maar voor 11 dozen geen voldoende ruimte is?

10. Een automatische draaibank produceert assen waarvan de diameter $\underline{x}$ een normale verdeling bezit met μ = 5.010 mm. en σ = 0.006 mm. De tolerantie-eisen zijn $5.000 \leq x \leq 5.020$ mm.
   a) Welk percentage produkten valt buiten de toleranties?
   b) Wanneer het gemiddelde μ verloopt doch σ constant blijft, hoe zal dan het percentage uitval met μ veranderen? (neem b.v. μ = 5.006; 5.008; 5.012; 5.014; 5.016)
   c) Tot welke waarde moet men σ verkleinen opdat bij een juiste instelling van μ het percentage uitval tot 1% wordt teruggebracht?

11. Men toetst de nulhypothese $\underline{x} \cong \underline{u}$ tegen de alternatieve hypothese $\underline{x} \cong 2 + \underline{u}$ met een rechtszijdig kritiek gebied.
   a) Indien de kans op een fout van de eerste soort 0.05 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de tweede soort?
   b) Indien de kans op een fout van de tweede soort 0.10 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de eerste soort?

12. Een blokkendoos bevat 12 kubusvormige blokken in 3 rijen van 4 stuks. De afmeting der blokken heeft een gemiddelde van 40 mm. met een $\sigma = 0{,}3$ mm. De lengte van de doos is 162 mm. met een spreiding van 1 mm.
   a) Hoe groot is de kans dat een rij van 4 blokken niet in een doos past? (De doos is breed en diep genoeg).
   b) Hoe groot is de kans dat minstens één van de 3 rijen van 4 blokken niet in een doos past?

13. Een biscuitfabriek fabriceert rollen inhoudende 40 biscuits. De biscuits wegen gemiddeld 3 gr., met een standaardafwijking van 0,2 gr. (scheve verdeling). De verpakking weegt gemiddeld 15 g. met een standaardafwijking van 0,5 g.(normaal verdeeld). Gevraagd:
   a) Hoe groot is de kans dat een rol minder dan 131 g. weegt?
   b) Als men een steekproef van 5 rollen neemt, wat is dan de verwachting van de spreidingsbreedte (range) der gewichten? (m.b.v. een tabel)
   c) Bereken de correlatiecoëfficiënt tussen brutogewicht van de rollen en het gewicht van de verpakking.

14. In een kasboek komen 120 posten voor, alle groter dan f. 1.--. Hoe groot zijn de kansen dat men in het totale bedrag een fout maakt groter dan f. 5.--, als men:
   a) alle posten eerst op gehele guldens afrondt alvorens ze op te tellen;
   b) alle bedragen minder dan 1 gulden afkapt en het eindbedrag korrigeert met $120 \times 0.495 =$ f. 59.40?

15. Stel $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met $\mu = 20$ en $\sigma = 2$.
   a) Hoe groot is de kans dat 5 waarnemingen alle < 24 uitvallen?
   b) Hoe groot moet x zijn opdat de kans dat 5 waarnemingen alle $< x$ uitvallen, 95% is?

16. Van een stochastische grootheid $\underline{x}$ met spreiding 5 worden n onafhankelijke waarnemingen verricht. Hoe groot moet n minstens zijn opdat uit deze waarnemingen een betrouwbaarheidsinterval ($\alpha = 0.01$) voor het onbekende gemiddelde μ bepaald kan worden, waarvan de lengte hoogstens 1 bedraagt? Eveneens voor de lengte 2.

17. Van een stochastiek $\underline{x}$ die normaal verdeeld is met $\sigma = 10$ is μ onbekend. Men wenst op grond van het gemiddelde van een steekproef van nader te bepalen omvang n de hypothese $\mu = 50$ rechtseenzijdig te toetsen met onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05. Daarbij stelt men de eis dat het onderscheidingsvermogen van de toets als $\mu = 52$ is, gelijk moet zijn aan 0.9.
   a) Hoe groot moet men n nemen?
   b) Hoe groot is dan het onderscheidingsvermogen voor $\mu = 51$?

18. Een leverancier van flessen slaolie vermeldt als netto inhoud van zijn flessen 350 gram olie. Een winkelier wenst deze bewering te controleren zonder de flessen te openen. Hij weegt daartoe een zeer groot aantal gevulde flessen en hij vindt voor dit gewicht een normale verdeling met gemiddelde 585,2 gram en spreiding $\sigma = 12{,}8$ gram. Vervolgens weegt hij een groot aantal lege flessen die hij van zijn klanten teruggekregen heeft met bijbehorende sluitcapsules. Voor dit gewicht vindt hij eveneens een normale verdeling met 228,3 en $\sigma = 11{,}3$ gram.
   Gevraagd het percentage der flessen olie die minder dan 350 gram olie bevatten.

19. $x_1, \ldots, x_n$ vormen een steekproef van $\underline{x}$ met μ onbekend maar variantie 4. Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor μ ($\alpha = 0.1$)
   a) indien $\underline{x}$ normaal verdeeld is.
   b) indien niets omtrent de verdeling van $\underline{x}$ bekend is, behoudens de variantie.

VIII De binomiale verdeling.

1. Aangenomen wordt dat de kans op een jongen of een meisje gelijk en onafhankelijk is. Hoe groot zijn de kansen dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit:
   a) 4 jongens b) 2 jongens en 2 meisjes
   c) 3 jongens en 1 meisje?

2. Men werpt 5 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat in de laatste worp juist de tweede 6 valt.

3. Toon aan dat bij spelen met 5 dobbelstenen de kans op één of géén zes even groot is.

4. Iemand koopt een dobbelsteen en controleert deze op zuiverheid. Hiertoe werpt hij 600 keer en vindt 70 keer een zes. Is het nodig te reclameren?

5. Op een spitsuur staan twee evengrote treinen op een fabrieksemplacement gereed om 1000 arbeiders naar hun werk te brengen. De arbeiders kiezen een trein aselect. De Spoorwegen willen niet teveel materieel inzetten. Hoeveel zitplaatsen moet elke trein minstens hebben opdat hoogstens 1 op de 20 dagen één of meer arbeiders moeten staan? Dezelfde vraag voor hoogstens 1 op de 100 dagen.

6. A en B spelen een spel waarbij naar men zegt de winstkansen voor beide gelijk zijn. Om dit na te gaan spreken ze af 100 keer te spelen. Indien A 65, B 35 keer heeft gewonnen, is er dan reden om aan gelijkheid der kansen te twijfelen? Indien $\alpha = 0.05$ hoe vaak mag A of B dan hoogstens winnen zonder dat de hypothese voor gelijke kansen verworpen wordt?

7. Een handelaar verkoopt een grote partij goederen en deelt de koper mee dat er 5% ondeugdelijke exemplaren in zitten. De koper neemt om dit te verifiëren een steekproef van 150 stuks

en vindt er 10 ondeugdelijke in. Als hij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.05 aanhoudt, heeft hij dan recht te reclameren? Hoe groot moet het aantal ondeugdelijke exemplaren in een steekproef van 150 stuks minstens zijn om reclame te rechtvaardigen?

8. Een pottebakker moet 100 borden leveren volgens een speciaal ontwerp. De kans op een misbaksel is 1/5. De tint van een charge valt altijd enigszins verschillend uit zodat de 100 borden in één charge vervaardigd moeten worden. Hoe groot moet deze charge minstens zijn opdat de kans dat de charge minder dan 100 gave borden op zal leveren hoogstens 1% bedraagt?

9. In een aselecte steekproef van 300 flessen melk heeft men bij 80% een voldoende vetgehalte geconstateerd.
   a) Bepaal een tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage flessen melk met voldoende vetgehalte in de produktie.
   b) Geef in woorden een uitleg van de betekenis van een dergelijk interval.

10. In een advertentie van Pareldent-tandpasta wordt beweerd: 4 van de 5 personen poetsen hun tanden met Pareldent. De concurrerende firma Ivopuur twijfelt -gezien zijn eigen omzet- aan deze bewering en laat daarom een statistisch onderzoek instellen. Aan 25 aselect gekozen personen wordt gevraagd of zij Pareldent gebruiken. Hoeveel van hen moeten deze vraag bevestigend beantwoorden om de firma Ivopuur in de gelegenheid te stellen de bewering van Pareldent tegen te spreken?

11. Ik werp 120 keer met een dobbelsteen. Geef een tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal geworpen zessen.

12. Men toetst of in bepaalde populatie van vlasplanten de relatieve frekwentie van blauwbloeiende planten 0,10 is tegen het alternatief dat deze frekwentie groter is. Men doet dit door van 100 aselect gekozen planten de bloemkleur, die ook wit kan

zijn, vast te stellen. Het blijkt dat 15% van de steekproef blauw is.

a) Bepaal het kritieke gebied van de door u gekozen toetsingsgrootheid bij $\alpha = 0.05$.

b) Hoe groot is de overschrijdingskans bij deze waarnemingsuitkomst en formuleer de uitslag van de toets.

c) Hoe groot is het onderscheidingsvermogen van de toets indien de relatieve frekwentie van de blauwbloeiende planten 0,20 zou zijn?

13. Geef een benadering voor de kans dat 12 onafhankelijke worpen met een dobbelsteen tezamen minstens 60 opleveren.

14. Iemand werpt met 2 dobbelstenen. Als beide stenen eenzelfde aantal ogen geven noemt hij dit een succes. Hoe groot is de kans dat hij bij 90 van dergelijke worpen (elk dus met 2 stenen) minder dan 10 successen krijgt?

15. Iemand heeft 2 lucifersdoosjes in zijn zak, elk vol met N(even) lucifers. Hij pakt steeds blindelings een lucifer. Hoe groot is de kans als op een gegeven moment er een doosje leeg is, het andere juist nog half vol is?

16. Leidt af dat de binomiale verdeling tot een Poissonverdeling nadert voor $n \to \infty$, $p \to 0$ en $np = \lambda$.

17. Een dronken man loopt in een N-Z gelegen straat en gooit bij iedere dwarsstraat met een munt om te beslissen of hij verder zal gaan of om zal keren. Hoe groot is de kans dat hij na 10 blokken te hebben gelopen, weer op zijn uitgangspunt terug zal zijn:

a) als hij bij zijn vertrek ook om de richting loot?

b) Als hij begint naar het Noorden te lopen?

18. Iemand beweert dat een partij van 100 exemplaren 5% defecte bevat. Ik pak er 3 uit en vindt er 1 slechte onder. Hoe groot is de kans hierop, als ik trek a) met teruglegging?

b) zonder teruglegging?

19. Uit een zeer grote partij produkten die 10% ondeugdelijke elementen bevat wordt een aselecte steekproef van 10 stuks genomen. Hoe groot zijn de kansen dat in deze steekproef 0,1 of 2 ondeugdelijke produkten zullen worden aangetroffen? Hoe groot is de kans dat de partij zal worden goedgekeurd indien hoogstens 2 ondeugdelijke exemplaren in de steekproef zijn toegestaan?

20. Ter keuring van een grote partij blikjes conserven, die lang bij een grossier zijn opgeslagen geweest, wordt hieruit een steekproef van 120 blikjes genomen. De grossier is van plan alleen dan de partij te verkopen als alle gekeurde blikjes goed blijken te zijn. Hij vraagt zich echter af hoe groot het percentage bedorven blikjes in dat geval toch nog zou kunnen zijn.

a) Beantwoordt deze vraag ($\alpha = 0.05$).

b) Indien hij eist dat het percentage bedorven blikjes in de partij (bij goedkeuring van de steekproef) niet hoger dan 1% mag zijn, hoe grote steekproef moet hij dan nemen? ($\alpha = 0.05$)

21. Een produktieproces volgt een normale verdeling met spreiding 1.7. Men construeert een zogenaamde contrôlekaart met de grenzen 19.0 en 26.0. Om het uur wordt een steekproef gecontroleerd van 5 produkten. Het proces wordt ongemoeid gelaten zolang hoogstens 1 van de 5 waarnemingen buiten deze grenzen valt, doch wordt stopgezet en bijgeregeld wanneer 2 of meer van de 5 waarnemingen buiten deze grenzen vallen.
Bereken de kans P dat het proces zal worden stopgezet en bijgeregeld voor $\mu = 17.5$; 20; 22.5; 25; 27.5 en zet daarna P tegen μ uit. Dit geeft de zogenaamde werkkarakteristiek van de methode.

22. Iemand koopt transistors van 2 fabrieken A en B. Ter contrôle neemt hij steekproeven resp. van 75 van A en 50 van B en vindt er resp. 5 en 4 defecte onder. Daar de transistors van B goedkoper zijn, wil hij weten of er verschil in percentage defecten

bestaat. Wat kan hij konkluderen?

23. In een random steekproef van 250 sigarettenrokers waren 60 die merk A rookten en 190 merk B. Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het percentage rokers van merk A.

24. Bij zware terreinproeven met vrachtwagens worden wagens van 2 merken A en B gebruikt. Van de 30 wagens van merk A doorstaan er 22 de proeven goed, terwijl 8 ervan in moeilijkheden geraken; van de 28 wagens van merk B komen er 12 in moeilijkheden, de overige 16 doorstaan de proeven met succes. Onderzoek met betrouwbaarheidsdrempel 0.05 of één van beide merken beter geschikt is voor terreinwerk van het onderzochte soort dan het andere.

25. Men werpt n maal met een zuivere munt en verkrijgt daarbij 30 maal kruis. Bepaal een 95%-tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor n.

26. In een groot warenhuis weet men uit ervaring dat ongeveer 2% van de verkochte paren nylons van verschillende merken aanleiding geeft tot klachten. Dit wordt daarom als normaal beschouwd. Van een nieuw merk dat tengevolge van een reclamecampagne veel verkocht wordt komen van de eerste 200 verkochte paren 9 klachten binnen. De afdelingschef vraagt zich af of de kousen van dit merk minder sterk zijn. Welk advies zoudt u hem geven?

27. Van een partij aardewerk heeft volgens opgave van de fabrikant ongeveer 10% zeer kleine bakfouten. Een afnemer wil een schatting hebben van dit percentage door zelf een steekproef van n exemplaren te nemen. Hij stelt als eis dat het tweezijdig betrouwbaarheidsinterval een lengte van maximaal 0.1 heeft en hij aanvaardt hoogstens een kans 0.05 dat zijn interval de fractie niet bevat. Gevraagd: Hoe groot moet de steekproef zijn?

28. In een vijver wil men de visbevolking schatten. Men vangt daartoe 50 vissen welke van een merkteken worden voorzien. Vervolgens laat men deze vissen weer zwemmen en na verloop van enige tijd vangt men 100 vissen. Hierbij blijken 9 gemerkte vissen te zijn.
Geef grenzen aan waartussen de visbevolking behoudens een onbetrouwbaarheid 0.05 zal liggen, in de onderstelling dat de vispopulatie niet veranderd is en dat de vangsten aselect waren.

29. Monte Carlo-methode ter berekening van $\pi(=3.1415)$ d.m.v. "schieten" op een vierkant:
Bij elk paar aselecte getallen x en y (d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn homogeen en onafhankelijk verdeeld op (0.1)) die we op een computer genereren, berekenen we $z = x^2 + y^2$. Is $z \leq 1$ dan is "het schot" raak. Het quotiënt van het aantal rake schoten gedeeld door het totale aantal geeft een schatting voor $\pi/4$. Bereken het minimale aantal schoten n nodig om met een betrouwbaarheid van 95% π in 2 decimalen nauwkeurig te berekenen.

30. Het bestuur van een kunststichting die zijn begunstigers jaarlijks een serie culturele manifestaties aanbiedt, heeft voor elke voorstelling de beschikking over een zaal met 900 zitplaatsen. Blijkens ervaring blijft per voorstelling ongeveer 1 op de 6 begunstigers weg. Bij verstrekking van 900 seriekaarten blijven derhalve telkens plaatsen open. Daar er veel animo voor deze serie is wil het bestuur dus gaarne meer dan 900 begunstigers aannemen. Hoeveel mogen er dit maximaal zijn opdat de kans dat er meer dan 900 bezoekers op een bepaalde voorstelling verschijnen, 0.01 is?

31. Van een binomiaal verdeelde grootheid geven n waarnemingen x successen. Bepaal met $\alpha = 0.05$ (tweezijdig) een betrouwbaarheidsinterval voor p als
a) $n = 10, \quad x = 6$; c) $n = 1000, \quad x = 600$.
b) $n = 100, \quad x = 60$;

IX De Poisson- en exponentiële verdeling

1. Op een kantoor komen gemiddeld drie telefoongesprekken per uur binnen. De telefoniste is gedurende 10 min. afwezig. Hoe groot is de kans dat er in die tijd minstens 1 persoon geen gehoor heeft gekregen?

2. Een cake bevat 200 krenten. De cake wordt in 50 gelijke plakjes gesneden. Hoe groot is de kans dat er in een bepaald plakje géén krenten zitten? (Los op m.b.v. Poissonbenadering, maar ook exact.)

3. Gemiddeld passeren er een benzinestation 15 auto's per dag. De kans dat een auto tankt is 1/5. Bereken de kans dat op een zekere dag precies x auto's tanken.

4. Aan een technische school zijn in 1959 ongeveer 3% minder studenten aangekomen dan in 1958 (gemiddelde inschrijving is 300). Wijst dit op een duidelijke afname of kan dit een toevallige fluctuatie zijn?

5. Een boek van 500 pagina's bevat 500 drukfouten. Bepaal de kans dat een pagina minstens 3 drukfouten bevat.

6. Een produktieproces produceert gemiddeld 1% defectieve produkten. Hoe groot zijn de kansen dat een partij van N produkten c of minder defectieve bevat:
   a) voor N = 200 en c = 1,2,3
   b) voor N = 2000 en c = 10,20,30.

7. Als 500 voertuigen per uur over een bepaald stuk weg rijden dat in een $\frac{1}{2}$ min. gepasseerd wordt, wat is dan de kans dat de weg op een gegeven ogenblik leeg is? Neem aan dat alle tijdstippen van passeren even waarschijnlijk zijn.

8. Uit de kansverdeling $f(x) = e^{-x}$ $0 \leq x < \infty$ wordt 2 keer blind getrokken. Hoe groot is de kans dat beide waarnemingen >1 zijn? En wat is de kans dat minstens 1 van de 2 groter is dan 1?

9. Aangenomen wordt dat de kans dat een zeker insekt n eieren legt een Poissonverdeling volgt met parameter λ. Verder dat de kans dat een eitje uitkomt p is en de eieren zich onafhankelijk ontwikkelen. Bewijs dat het totaal aantal van x nieuwe jonge insekten een Poissonverdeling volgt met parameter λp.

10. Onderstel dat een firma gemiddeld 60 televisietoestellen per jaar verkoopt. Hij reorganiseert elke maand. Hoeveel toestellen moet de firma aan het begin van de maand in huis hebben opdat de kans op "uitverkocht" vòòr het eind van de maand kleiner is dan 5%?
Beantwoordt dezelfde vraag bij een jaarverkoop van 240 apparaten.

11. Bewijs dat de wachttijd op de r^e gebeurtenis in een serie gebeurtenissen die een Poissonverdeling volgen met μ per tijdseenheid, een Gammaverdeling bezit met parameters r en μ.
Opm: De tijd nodig om de 1e gebeurtenis te ontmoeten, volgt dus een exponentiële verdeling.

12. Een autoverhuurder bezit 2 wagens die per dag worden verhuurd. Het aantal aanvragen per dag volgt een Poissonverdeling met $\mu = 1{,}5$. Onder dag wordt verstaan van 9 - 18 uur.
a) Hoe groot is de kans dat hij om 12 uur nog geen aanvraag heeft gekregen?
b) Welk percentage van de dagen zijn beide wagens thuis?
c) Welk percentage zijn beide uit?
d) Indien beide wagens even vaak worden gebruikt, welk percentage van de dagen is één bepaalde wagen dan thuis?

13. Twee radio-actieve preparaten gaven in één minuut voor een Geigerteller resp. 252 en 315 tellingen.
   a) Is er verschil in activiteit?
   b) Geef betrouwbaarheidsintervallen voor μ_1, μ_2 en het verschil $\mu_1 - \mu_2$, als μ = verwachting van het aantal tellingen per minuut. ($\alpha = 0.05$)
   c) Beantwoordt a en b eveneens voor het geval de twee preparaten resp. 150 tellingen in 1 min. en 369 tellingen in 3 min. gaven.

14. Een leverancier verkoopt een artikel uit voorraad aan zijn klanten, terwijl hij het zelf op order inkoopt bij een fabriek. De frekwentie van de levertijden van de fabriek naar de leverancier volgt een Gammaverdeling. De verdeling van het aantal klanten in een periode van T maanden is een Poissonverdeling met parameter μT. Hoe groot is de kans dat er tijdens de levertijd van de volgende bestelling juist x klanten komen?

15. Bij een machinaal weefgetouw treden gewoonlijk gemiddeld 60 draadbreuken op in een bepaald tijdsinterval van lengte T. Als de machine ontregeld raakt neemt het aantal draadbreuken toe en men wenst dan zo snel mogelijk in te grijpen. De kans om ten onrechte in te grijpen dient echter bij iedere contrôle niet groter dan 0.01 te zijn.
   a) Bereken een getal x_r zodanig dat de regel "ingrijpen als $\underline{x} > x_r$" voldoet aan de gestelde eisen.
   b) Bereken die waarde van het gemiddelde aantal draadbreuken per tijdsinterval T, waarvoor het onderscheidingsvermogen van deze controlemethode gelijk is aan 0.6.

16. De kans dat een individu verkeerd reageert op zeker serum is 0.001. Men ent 2000 individuen in. Wat is de kans dat er meer dan 3 individuen verkeerd reageren?

17. Bij een tankstation tankt gemiddeld elke 5 min. een auto; de tijdstippen zijn zonder samenhang en volgen een Poissonverdeling.
   a) Bepaal de kans dat er 3 of meer auto's tanken tussen 10.30 en 10.35;
   b) Ga na dat de kans op 6 of meer auto's tussen 10.30 en 10.45 praktisch even groot is.

18. In een stad zijn de laatste jaren gemiddeld 10 ongelukken per maand gebeurd. In december jl. vonden 15 ongelukken plaats. Kan dit aantal nog van toevallige aard geacht worden of neemt het aantal ongelukken per maand toe?

19. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef uit een exponentiële verdeling met gemiddelde μ ; $\underline{y}$ is de kleinste onder de $\underline{x}_i$. Toon aan dat $\underline{y}$ eveneens exponentieel verdeeld is met gemiddelde μ/n. (zie X.2)

20. $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met parameter λ.
a) Bereken $P(\underline{x} \leqslant x \mid \underline{x} \geqslant a)$ $\quad a > 0$.

b) Men weet dat $E\underline{x} = 1/\lambda$. Bereken $E(\underline{x} \mid \underline{x} \geqslant a)$.

X Meerdimensionale verdeling
Verdeling van een funktie van één of meer variabelen

1. $\underline{x}$ heeft een rechthoekige verdeling op $(-a,a)$. Wat is de verdeling van $\underline{x}^2$?

2. $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn n onafhankelijke toevalsvariabelen elk met dezelfde cumulatieve verdeling $F(x)$. Bepaal de cumulatieve verdeling van:
   a) $\underline{y} = \max(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$
   b) $\underline{z} = \min(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$.

3. $\underline{x}$ heeft een continue kansverdeling met cumulatieve verdeling $F(x)$. Bepaal de frekwentieverdeling van $\underline{y} = F(x)$?

4. De snelheidsverdeling van gasmoleculen luidt: $f(\underline{v}) = av^2e^{-bv^2}$, $0 < v < \infty$.
   Wat is de frekwentieverdeling van de kinetische energie $\underline{E} = \frac{1}{2}m\underline{v}^2$ der gasmoleculen?

5. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke standaardrechthoekige stochastieken. Gevraagd de verdeling van $\underline{x} + \underline{y}$. Teken deze. Bereken μ, σ^2 en $P(\underline{x}+\underline{y} < 1\frac{1}{2})$.

6. Op een lijnstuk ter lengte a worden willekeurig 2 punten x en y gezet. Wat is de gemiddelde lengte van het lijnstuk xy? (Exacte afleiding)

7. $$f(x,y) = k\,x\,e^{-(x+y)} \qquad 0 \leq x \leq \infty,\ 0 \leq y \leq \infty.$$
   $$= 0 \qquad \text{elders.}$$
   Bereken k en de marginale verdelingen. Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk?

8. Twee personen hebben een afspraak tussen 8 en 9 uur. Hoe groot is de kans dat ze elkaar ontmoeten als ze niet langer dan 10min op elkaar willen wachten? (Hun aankomsttijden zijn random en

onafhankelijk ondersteld).

9. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke standaardrechthoekige stochastieken. Bereken de verdeling van : a) $\underline{x}/\underline{y}$
b) $\underline{x}\,\underline{y}$.

10. Op een lijnstuk ter lengte a worden at random 2 streepjes gezet. Hoe groot is de kans dat ik van de zo verkregen 3 lijnstukjes een driehoek kan vormen?

11. $f(x,y) = k$ voor $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$, $x + y \leqslant 1$.
Bereken $P(\underline{x} > \frac{1}{2})$; $P(\underline{y} > \frac{1}{3})$; $P(\underline{x} > \frac{1}{2}$ en $\underline{y} > \frac{1}{3})$.

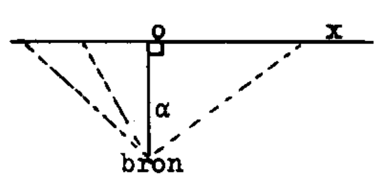
12. Op een lijnstuk ter lengte a worden at random en onafhankelijk van elkaar 3 punten gezet. Zij $\underline{x}$ het meest linkse, $\underline{y}$ het middelste en $\underline{z}$ het meest rechtsgelegen punt. Gevraagd:
a) de simultane verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{y}$
b) de marginale verdeling van $\underline{x}$; eveneens van $\underline{y}$.
c) $\mu(\underline{x})$, $\mu(\underline{y})$, $\sigma^2(\underline{x})$, $\sigma^2(\underline{y})$ en $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

13. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke exponentiëel verdeelde grootheden met dezelfde λ. Wat is de verdeling van
a) $\underline{x} - \underline{y}$
b) $\underline{x} + \underline{y}$? (Gammaverdeling met r = 2).

14. $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$ zijn onafhankelijke N(0,1) stochastieken. Bepaal de frekwentieverdeling van a) $\underline{u}_1^2$ (χ_1^2-verdeling)
b) $\underline{u}_1^2 + \underline{u}_2^2$ (χ_2^2-verdeling).

15. Als $\underline{x}$ $N(\mu,\sigma)$ verdeeld is, wat is dan de verdeling van $\underline{y} \cong e^{x}$? (men noemt $\underline{y}$ dan lognormaal verdeeld)

16. Een radio-actieve energiebron zendt deeltjes uit. Aangenomen wordt dat α (emissiehoek) homogeen verdeeld is op $(-\frac{1}{2}\pi,+\frac{1}{2}\pi)$. Zij $\underline{x}$ het punt waar het deeltje het scherm treft.



a) Leidt de verdelingsdichtheid van $\underline{x}$ af.
b) Bepaal μ en σ^2 van deze verdeling.

Opm.: De stralenwaaier ligt in een vlak, de trefpunten dus op een rechte lijn.

17. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke $N(0,1)$ stochastieken.
Gevraagd de verdeling van $\underline{r} \cong \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}$.
Opm.: de gevraagde verdeling is een Rayleigh-verdeling en treedt op bij ruisproblemen als de verdeling van de modulus van een signaal.

18. Laat $\underline{x} \cong A \sin \underline{\omega}$ waarin de amplitude A een bekende constante > 0 is en de phase $\underline{\omega}$ homogeen verdeeld is op $(-\pi/2, \pi/2)$.
Gevraagd de verdeling van $\underline{x}$.
Opm.: random variabelen als $\underline{x}$ treden o.a. op in de ballistische theorie.

19. Hoe zou men aselecte trekkingen kunnen simuleren uit een exponentiële verdeling met gemiddelde μ ?

XI De χ^2-, F- en t-verdeling

1. Voor het afrondingsinterval a van een variabele x neemt men: $a < \frac{1}{2} s(x)$. Geef hiervoor een verklaring. (Daar var $\underline{\bar{x}} = \sigma^2/n$ en var $\underline{s} \approx \sigma^2/2\nu$ worden de bijbehorende afrondingsintervallen: $a(\bar{x}) = s/2\sqrt{n}$ en $a(s) = s/2\sqrt{2\nu}$.)

2. Schets de afleiding van de volgende betrouwbaarheidsintervallen:

   a) $a_1 \underline{s} < \sigma < a_2 \underline{s}$ met $a_1 = \sqrt{\nu/\chi^2_\nu(\alpha_r)}$

   $a_2 = \sqrt{\nu/\chi^2_\nu(\alpha_\ell)}$

   a_1 en a_2 zijn getabelleerd.

   b) $\underline{\bar{x}} - \underline{a} < \mu < \underline{\bar{x}} + \underline{a}$ met $\underline{a} = t_\nu(\frac{1}{2}\alpha)\ \underline{s}/\sqrt{n}$.

   c) $a_1 \underline{s}_1^2/\underline{s}_2^2 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < a_2 \underline{s}_1^2/\underline{s}_2^2$ met $a_1 = 1/F^{\nu_1}_{\nu_2}(\frac{1}{2}\alpha)$

   $a_2 = F^{\nu_2}_{\nu_1}(\frac{1}{2}\alpha)$.

3. Aan 4 stalen kogels werd in een aantal richtingen de diameter gemeten met de navolgende uitkomsten:

kogelnr.	metingen in microns					
1	5520	5529	5530	5527		
2	5528	5528	5528	5525	5528	5526
3	5522	5522	5521	5521	5520	
4	5521	5523	5520			

Bepaal door samenvoegen van de varianties de gezamelijke standaardafwijking voor deze vier waarnemingsreeksen. Voor welk kenmerk van deze stalen kogels is die standaardafwijking een maat? (Opm.: indien de reeksen gelijktallig zijn is de gezamelijke variantie juist het gemiddelde der varianties per reeks.)

4. Gegeven een steekproef van 10 waarnemingen uit een normale verdeling met onbekende μ en σ:

12.05 12.71 12.25 12.40 12.15 12.94 12.00 12.40 12.49 12.33

a) Geef een schatting σ_w van σ uit de range R.

b) Rond de waarnemingen eventueel af en kodeer ze.

c) Bereken $\bar{x}$ en s zowel uit de gekodeerde oorspronkelijke, als uit de gekodeerde afgeronde waarnemingen. Rond $\bar{x}$ en s toelaatbaar af en vergelijk beide resultaten.

d) Geef 95%-tweezijdige betrouwbaarheidsintervallen voor μ en σ.

e) Indien gegeven was dat $\sigma = 0.3$, hoe wordt dan het betr. interval voor μ?

5. Gegeven 2 steekproeven van 7 waarnemingen uit 2 normale populaties met onbekende parameters μ_1, σ_1 resp. μ_2, σ_2.

I:	5.314	5.347	5.301	5.319	5.372	5.361	5.355
II:	5.382	5.393	5.420	5.359	5.390	5.378	5.402

a) Rond de reeksen toelaatbaar af en kodeer ze.

b) Bereken $\bar{x}_1$, s_1^2, $\bar{x}_2$ en s_2^2.

c) Geef een 95%-tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor μ_1 en μ_2 afzonderlijk.

d) Toets de hypothese $\sigma_1 = \sigma_2$. Voeg daarna de varianties samen.

e) Toets de hypothese $\mu_1 = \mu_2$.

f) Geef een tweezijdig betr.interval voor $\mu_1 - \mu_2$ en voor σ_1/σ_2.

g) Indien men niet zeker is betreffende de normaliteit, welke verdelingsvrije toets kan men dan toepassen om te toetsen of beide reeksen uit eenzelfde populatie komen?

6. Er worden tritaties uitgevoerd in duplo bij 10 monsters. Uitkomsten:

I:	76.3	77.2	73.7	75.8	77.4	74.5	78.2	73.8	75.7	76.1
II:	77.0	77.3	74.9	75.2	77.7	75.0	78.5	74.1	75.4	76.8

Men vermoedt dat de waarnemingen II die na I zijn genomen door een systematische invloed verhoogd zijn. Ga na of dit vermoeden juist is:

a) aannemende dat de waarnemingen normaal verdeeld zijn;

b) niets aannemend omtrent de verdeling (=verdelingsvrije toets).

7. In onderstaande tabel staan 50 getallen die als volgt werden verkregen. Geworpen werd met 3 dobbelstenen, één zwarte en twee witte. De ogen werden opgeteld waarbij de ogen van de zwarte dubbel werden geteld.

De 50 scores waren:

12	18	11	6	12	12	16	17	10	17
14	18	20	11	14	16	16	15	21	21
13	15	13	14	23	14	10	7	7	16
17	14	17	10	15	23	6	13	18	9
17	14	13	17	12	17	16	15	20	5

a) Welke zijn het <u>theoretisch</u> gemiddelde en de variantie van deze score?

b) Construeer een frekwentietabel en bereken daaruit $\bar{x}, s^2$ en s.

c) Zet de waarnemingen uit op normaalwh. papier en bepaal hieruit $\bar{x}$ en s.

d) Geef ook een schatting s_w voor σ uit een gemiddelde spreidingsbreedte $\bar{R}$.

8. Men heeft produkten gemeten afkomstig van 2 machines:

I:	5.314	5.347	5.301	5.319			
II:	5.332	5.343	5.370	5.409	5.340	5.328	5.352

a) Rond de reeksen eerst eventueel af en kodeer ze.

b) Toets of er een verschil in gemiddelden bestaat m.b.v. de t-toets.

c) Welke onderstellingen liggen hieraan ten grondslag?

d) Toets één van deze onderstellingen met de F-toets en tevens m.b.v. een betrouwbaarheidsinterval.

9. Voor het toetsen van de zuiverheid van een dobbelsteen werpt men 60 keer en vindt:

ogen :	1	2	3	4	5	6
aantal:	15	7	4	11	6	17

Toets dit m.b.v. de χ^2 -toets.

10. Van 289 planten die door een bepaalde kruising zijn ontstaan hebben 208 gele bloemen en 81 rode. Men verwachtte een verhouding 3:1. Is deze verwachting aannemelijk?

11. Bij het eindexamen van een lyceum werden bij wijze van proef dezelfde opgaven algebra verstrekt aan de candidaten van de afdeling H.B.S. B en Gymnasium β. De beoordelingen van het werk waren:

	goed	voldoende	onvoldoende
HBS B:	8	27	20
Gymn. β:	5	9	6

Onderzoek of de candidaten van één van de beide afdelingen systematisch beter zijn in algebra dan die van de andere afdeling.

12. Bij een keuring van produkten heeft men uit 6 achtereenvolgende partijen steekproeven genomen met de volgende resultaten:

partij :	1	2	3	4	5	6
steekproefgrootte:	100	150	100	200	150	200
aantal fouten :	4	15	8	7	9	11

Toets de hypothese dat de 6 partijen alle eenzelfde percentage foute produkten bevatten.

13. Door 3 ploegen A, B en C die om beurten op dezelfde machines werken, zijn in een gegeven week resp. 10, 24 en 8 storingen gemeld.
   a) Bestaat er verschil tussen de ploegen?
   b) Dezelfde vraag indien de ploegen resp. 4, 5 en 3 weken hebben gewerkt en resp. 10, 24 en 8 storingen hebben gemeld.

14. Twee ploegen A en B gaven in gelijke perioden resp. 0 en 5 storingen. Is er verschil tussen de beide ploegen?

15. Bij keuring van emailledraad meet men het aantal isolatiefouten per 20 meter draad. Metingen aan 25 verschillende stukken draad gaven de volgende uitkomsten:
5, 1, 3, 2, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 2, 6, 3, 4, 5, 2, 5, 3, 2, 6, 2, 4, 1, 2.

a) Maak een frekwentietabel.

b) Bereken hieruit het gemiddelde $\bar{x}$ en de variantie s^2 van het aantal fouten per 20 m.

c) Geef een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde μ van deze verdeling, aannemend dat we met waarnemingen uit een Poissonverdeling te maken hebben.

d) Bereken de verwachtingen van de frekwenties.

e) Toets in hoeverre de onderstelling van een Poissonverdeling aannemelijk is.

f) In hoeverre is het bevreemdend dat onder deze 25 waarnemingen de uitkomst 0 niet is voor gekomen?

16. Bewijs: $\lim_{\nu \to \infty} \underline{t}_\nu \cong \underline{u}$ d.w.z. de t-verdeling nadert voor $\nu \to \infty$ naar de gestandaardiseerde normale verdeling.

(zie in de t-tabel voor $\nu = \infty$)

17. Om de diameter op een hoogte van $1\frac{1}{2}$ m. van de bomen in een bos te bestuderen, werd een aselecte steekproef van 20 bomen genomen. De som van de daaraan gemeten diameters bleek 840 te zijn en de som van de kwadraten der diameters 35755. Men mag veronderstellen dat de verdeling van de diameters in een bos goed door een normale wordt benaderd.

a) Toets de hypothese $\sigma = 8$.

b) Hoe groot is σ hoogstens bij betrouwbaarheid 0.95?

c) Toets of de verwachting μ gelijk is aan 45.

d) Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor $\mu (\alpha=0.05)$.

e) In welk interval zal de diameter van één nieuwe aselect gekozen boom met betrouwbaarheid 0.95 liggen?

18. Onderstaande tabel geeft metingen van een belangrijke maat aan 30 bakeliten knoppen:

5.25	5.35	5.31	5.38	5.29	5.37
5.38	5.34	5.41	5.36	5.33	5.31
5.35	5.28	5.33	5.40	5.30	5.31
5.30	5.30	5.35	5.37	5.32	5.38
5.39	5.29	5.28	5.33	5.32	5.37

a) Maak een schatting van σ met behulp van de range.

b) Trek uit deze 30 waarden aselect een steekproef van 6 metingen zonder teruglegging. Geef aan hoe de trekking wordt uitgevoerd.

c) Bereken uit deze steekproef $\bar{x}$ en s en rond deze juist af.

d) Geef een tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ en σ. Welke onderstellingen liggen hieraan ten grondslag?

19. Men heeft twee analysten een aantal bepalingen laten verrichten van het verzepingsgehalte van kokosolie. De eerste analyste vond achtereenvolgens voor monsters, afkomstig uit eenzelfde fles:

253.8 255.4 256.2 256.1 255.2 255.4

De tweede analyste vond voor monsters uit dezelfde fles:

253.2 258.5 256.4 255.7 254.2 .

a) Toets met een onbetrouwbaarheid 0.05 de hypothese dat deze beide analysten even nauwkeurig werken.

b) Toets eveneens met een onbetrouwbaarheid 0.05 de hypothese dat de tweede onnauwkeuriger werkt dan de eerste.

20. Bij het kweken van bacteriën op een glazen plaat telt men het aantal bacteriën dat in verschillende vakjes van 1 cm^2 voorkomt.

Men heeft gevonden:

aantal bacteriën per vakje:	0	1	2	3	4	5	6
aantal vakjes :	5	19	26	26	21	13	8 .

Geen enkel vakje bevatte meer dan 6 bacteriën. Ga na of het vermoeden dat deze waarnemingen een Poisson-verdeling volgen, juist is.

21. Een fabriek heeft 2 automatische draaibanken A en B die ingesteld kunnen worden op de vervaardiging van assen van gelijke diameter. De asdiameters zijn blijkens de ervaring normaal verdeeld. Gedurende de productie worden elk uur 3 assen aselect gekozen waarvan de diameters worden gemeten. Het gemiddelde van de 3 waarnemingen wordt gerapporteerd. Na 5 uur productie door beide draaibanken wenst men een betrouwbaarheidsinterval te bepalen voor het eventuele verschil in gemiddelde asdiameter tussen de beide draaibanken.

Van draaibank A waren alle 15 afzonderlijke waarnemingen nog beschikbaar, van draaibank B slechts de vijf uurgemiddelden:

A					B		
7.41	7.34	7.24	7.36	7.24	7.307	7.287	7.280
7.33	7.27	7.28	7.46	7.32	7.403	7.283 .	
7.34	7.25	7.29	7.08	7.38			

a) Toets of de variantie van de diameters der assen van A significant verschilt van die afkomstig van B (α=0.05).

b) Aannemende dat a) ontkennend beantwoord is, geef een betrouwbaarheidsinterval voor het verschil tussen de gemiddelde asdiameters bij A en B.

22. Een analyste heeft een aantal titraties in duplo uitgevoerd met de volgende uitkomsten:

I:	2.12	1.68	1.55	2.57	2.40	1.97	1.19	2.88	1.74	1.10	2.34	1.72
II:	2.58	1.74	1.61	2.85	2.46	2.74	1.47	2.75	1.49	1.99	2.44	2.06

a) De tweede titratie geschiedt doorgaans enige tijd na de eerste. Toets met een verdelingsvrije toets of er een systematisch verschil bestaat tussen de 1e en 2e titratie.

b) Toets met een op de normale verdeling berustende toets of titratie II gemiddeld hogere waarden geeft dan titratie I.

c) Hoe groot is de standaardfout van de titratiemethode?

d) Construeer een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het verschil tussen titratie I en II.

e) Heeft de tweede decimaal in de waarnemingen zin of kan men deze zonder ernstig verlies aan nauwkeurigheid weglaten en op tienden afronden?

23. Gegeven 2 series waarnemingen uit normale verdelingen met gelijke σ:

I:	50	41	57	55	33	63	54	56
II:	53	55	58	58	42	56	67	68

a) Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil $\mu_2 - \mu_1$ der beide series, aannemende dat beide series onafhankelijk zijn.

b) Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_2 - \mu_1$, aannemende dat het b.v. 8 duplo-metingen zijn.

c) Hoe groot is de standaardfout in de metingen?

24. Past men de formule voor het samenvoegen van varianties toe op n paren waarnemingen (duplobepalingen) dan vindt men:

$s^2 = \frac{\Sigma d_i^2}{2n}$ waarin de d_i de verschillen tussen de twee waarnemingen zijn. Bewijs dit.

I Verzamelingen - Oplossingen

1. $P(V|W) = 1$ d.w.z. als W optreedt, treedt V zeker op oftewel $W \subset V$. Daar $P(W|V) \neq 1$ is W een echt deel van V. Geldig zijn dus: a) en d).

2. a) Dit lost men op m.b.v. een Venn-diagram.
   $A(B \cup C) = A(BC+\bar{B}C+B\bar{C}) = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$. Dit zijn deelpopulaties met lege doorsneden en voor het berekenen van kansen is de laatste vorm veel gemakkelijker.
   b) $A \cup (BC) = A + \bar{A}BC = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC$. nl. $A = AI$ (I=gehele verzameling) en $I = BC + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$.
   c) $A \cup B \cup C = I - \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ en dus $= ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$.
   d) $A\overline{BC} = A(I-BC) = A(\bar{B}\bar{C}+\bar{B}C+B\bar{C}) = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}$.
   e) $A\cup(\overline{B\cup C}) = A \cup \bar{B}\bar{C} = (A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC)\cup\bar{B}\bar{C} = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$
   $+ \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

3. De oplossing volgt direkt uit de volgende tabel:

	mnl.	vr.	
geh.	47	23	70
ongeh.	18	12	30
	65	35	100

Dus a) 23%
b) 18%
c) 47 + 23 + 18 = 88%.
(=100-percentage ongeh.vr.)

4. a) We bewijzen dit door beide leden uit te schrijven in elementaire deelpopulaties: $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$.
   En $\overline{A \cap B} = I - AB = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$.
   b) $A(B \cup C) = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$ (zie 2a)
   $(AB)\cup(AC) = ABC + AB\bar{C} + AC\bar{B} + ACB = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$.
   c) $(AB) \cup C = AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$ nl. in de deelpopulaties zit dus of een C en/of een AB.
   $(A\cup C)\cap(B\cup C) = (\bar{A}C+A\bar{C}+AC)\cap(\bar{B}C+B\bar{C}+BC) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$.
   d) Dit volgt direkt uit a) door A,B te vervangen door $\bar{A},\bar{B}$:
   $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ oftewel $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. (nl. $\bar{\bar{A}} = A$)

5. a) $P(A|B) = P(AB)/P(B) = P(A)$ dus indien A en B <u>onafhankelijk</u> zijn. Dus de doorsnede mag niet leeg zijn!

   b) Algemeen geldt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Oftewel $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ geldt indien $P(AB) = 0$ oftewel A en B elkaar <u>uitsluiten</u>!
   Met a) zien we dus dat elkaar uitsluitende gebeurtenissen <u>niet</u> onafhankelijk zijn! (Opm. we nemen uiteraard aan dat A en B optreden)

6. We maken weer de volgende tabel:

	mnl.	vr.	
van nature bl.	12	13	25
" " niet bl.	36	39	75
	48	52	100

Het percentage stroblonde personen is onafh. geslacht, dus
bl.man: $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12\%$
bl. vr: $\frac{1}{4} \cdot 52 = 13\%$.

Het percentage blonden is dus: $25 + 0.05 \times 39 = 26.95\%$.
De gevraagde kans is dus $12/26.95 = 0.44$.

7. a) $A\bar{B}\bar{C}$ b) $AB\bar{C}$ c) ABC d) $I - \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
   e) $ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$ f) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ g) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$ h) $I - ABC$.

II Kansrekening-Oplossingen

1. Elke worp geeft 2 mogelijkheden nl. K of M, dus 5 worpen 2^5 mogelijkheden. Hiervan zijn gunstig: KKK••; MKKK• en •MKKK oftewel 4 + 2 + 2 = 8 mogelijkheden, daar op de plaats van de punt een M of een K mag staan. Dus P = 8/32 = $\frac{1}{4}$.

2. a) P(K) = P(M) = $\frac{1}{2}$. A wint in de volgende gevallen: K, MMK, MMMMK, etc. dus zijn winstkans is: $\frac{1}{2}$ + 1/8 + 1/32 + ... = = $\frac{1}{2}/(1-\frac{1}{4})$ = 2/3; voor B dus 1/3. Andere opl.: p(A) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$p(A) nl. indien beiden munt geworpen hebben is er de begintoestand weer. Dus p(A) = 2/3.

   b) Eerlijk d.w.z. gelijke winstverwachtingen. Stel B betaalt f. x- aan A, dan geldt dus 2/3x = 1/3•1 oftewel x = f.0.50.

3. P(minstens 1 in leven) = 1 - P(beiden overleden) = 1 - 1/5•1/10 = 49/50. andere opl.: P(minstens 1 in leven) = P(man in leven) + P (vrouw in leven) - P(beiden in leven) = 4/5 + 9/10 - 4/5•9/10 = 49/50. Aangenomen is dat het overlijden van man en vrouw onafhankelijk is, in welk geval geldt b.v. P(beiden in leven) = P(man in leven) P(vrouw in leven). Zij A: man in leven, B: vrouw in leven dan wordt dit:
   $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$ of $= P(A) + P(B) - P(AB)$ met $P(AB) = P(A)P(B)$ en $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

4. A wint in de gevallen: AA, BAA, ABA met kansen: p^2, qp^2, pqp, dus zijn winstkans is: $p^2 + qp^2 + qp^2 = p^2(3-2p)$. Onafhankelijkheid der sets is weer ondersteld.

5. De speler kiest een nummer. Kans op winst 1/36, op verlies 35/36. Nu is P(winst in n keer) = 1 - P(geen winst in n keer) $= 1 - (35/36)^n \geq \frac{1}{2}$ dus $(35/36)^n < \frac{1}{2}; n > \log 2/(\log 36 - \log 35)$ = 24,7 oftewel minstens 25 keer.

6. Met teruglegging zijn de winstkansen der spelers resp.: 1/N; $\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N}$; $(\frac{N-1}{N})^2\frac{1}{N}$ etc. dus steeds kleiner. Zonder teruglegging echter: 1/N; $\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$; $\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}$ etc. D.w.z. zonder teruglegging is eerlijk.

7. P(grootste 8 of 9) = 1 - P(alle <8) = 1 - $(0,8)^4$ = 0,59.

8. De eerste 2 worpen geven de volgende mogelijkheden: KK, KM, MM, MK elk met kans ¼. Het 1e geval geeft verlies voor A, het 2e en 3e geval geeft de begintoestand voor A terug. Het 4e geval splitsen we in MKK hetgeen winst voor A betekent, en MKM hetgeen de begintoestand voor B oplevert. Dus de winstkans p voor A wordt: p = ¼.0 + ¼.p + ¼.p + 1/8.1 + 1/8.q oftewel p = 2/5; q = 3/5.

9. a) A_i = eerste worp geeft tot som i ogen; B_i = tweede worp geeft tot som i ogen. De gevraagde kans is dus

$$P = \sum_{i=2}^{12} P(A_iB_i) = \sum_{i=2}^{12} P^2(A_i) \text{ daar } P(A_iB_i) = P^2(A_i).$$

Nu kan men b.v. 8 ogen gooien op 5 manieren nl. 62, 26, 53, 35, 44 d.w.z. de kans is 5/36. Etc. Zo wordt

$$P = \frac{1}{6^4}(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1) = 146/6^4.$$

b) $P(\text{som } 8 \mid \text{beide gelijk}) = \frac{P(\text{beide som } 8)}{P(\text{beide gelijk})} = \frac{5/36 \cdot 5/36}{146/6^4} = 25/146.$

10. P(schoppenaas) = 1/52; P(niet schoppenaas) = 51/52.
P(minstens 1 keer sch.aas) = 1 - P(geen sch.aas) =
1 - $(51/52)^n \geq \frac{1}{2}$ dus $(51/52)^n < \frac{1}{2}$ oftewel n > log 2/(log52-log51)=
= 35,8 oftewel minstens 36 keer.

11. A_i = "A werpt i keer kruis" i=0,1,2,3.
B_i = "B werpt i keer kruis" i=0,1,2.; $B_{<i}$ = "B werpt minder dan i keer kruis". Dan is dus P(A wint) = $\sum_1^3 P(A_iB_{<i})$ +
+ $\sum_0^2 P(A_iB_i)$P(A wint) oftewel:
= 3/8.1/4 + 3/8.3/4 + 1/8.1 + (1/8.1/4+3/8.1/2+3/8.1/4)P(A wint)
P(A wint) = 16/32 + 10/32 P(A wint) dus P(A wint) = 8/11, voor B dus 3/11.

12. a) P(minstens 1×6) = 1 - P(geen 6) = 1 - $(5/6)^4$ = 0.52

b) P(minstens 1×66)= 1 - P(geen 66)= 1 - $(35/36)^{24}$= 0.49.

13. A = hoogste worp is een 5; B = hoogste worp is een 6. Nu is $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ daar $P(AB) = 0$. En $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (5/6)^4$. $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - (4/6)^4$. Dus $P(A) = P(A \cup B) - P(B) = 1 - (4/6)^4 - 1 + (5/6)^4 = 41/144$.

14. a) Totaal 6^3 mogelijkheden. Hiervan zijn alleen gunstig de permutaties van 3,4 en 5, dat zijn er 3! = 6. Dus P = 1/36.

b) De gunstige zijn: 1 2 3, 2 3 4, 3 4 5, 4 5 6 elk met de kans onder a berekend, dus totaal P = 4/36 = 1/9.

c) P(produkt even) = 1 - P(produkt oneven) = 1 - P(alle oneven) = $1 - (\frac{1}{2})^3 = 7/8$.

d) P(laagste 1) = 1 - P(geen 1) = $1 - (5/6)^3 = 91/216$.

e) A = minstens een 1; B = minstens een 2; C = minstens een 3. Dus gevraagd: $P(\bar{A}\bar{B}C) = P[\bar{A}\bar{B}(1-\bar{C})] = P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = (4/6)^3 - (3/6)^3 = 37/216$.

15. A = "minstens een 1"; B = "minstens een 2". Gevraagd $P(AB) = P(1-\bar{A})(1-\bar{B}) = P(1-\bar{A}-\bar{B}+\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$. Nu is $P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = (5/6)^4$ en $P(\bar{A}\bar{B}) = (4/6)^4$ dus $P(AB) = 302/6^4$.

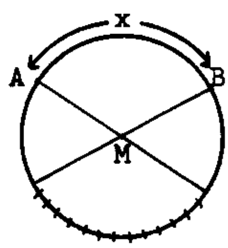
16. A = "minstens één 1"; B = "minstens één 5"; C = "minstens één 6". Gevraagd $P(AB\bar{C}) = P[(1-\bar{A})(1-\bar{B})\bar{C}] = P(\bar{C}-\bar{A}\bar{C}-\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}) =$
$= P(\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{C}) - P(\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = (5/6)^4 - 2(4/6)^4 + (3/6)^4 = 194/6^4$.

17. A_i = minstens één i (i=1,...,6). De gevraagde kans is dus
$P(A_1 \ldots A_6) = 1 - P(\overline{A_1 \ldots A_6}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \ldots \cup \bar{A}_6) =$
$= 1 - \Sigma P(\overline{A_i}) + \sum_{i \neq j} P(\bar{A}_i \bar{A}_j) - \ldots$ etc. Nu is $P(\overline{A_i}) = (5/6)^n$;
$P(\bar{A}_i \bar{A}_j) = (4/6)^n$ etc. Dus de gevraagde kans wordt:

$$1 - \left\{\binom{6}{1}(5/6)^n - \binom{6}{2}(4/6)^n + \binom{6}{3}(3/6)^n - \binom{6}{4}(2/6)^n + \binom{6}{5}(1/6)^n \right\}$$

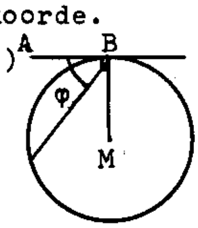
$$= \sum_0^5 (-1)^k \binom{6}{k}(1-k/6)^n.$$

18. Stel P(K) = p, P(M) = q. Men werpt 2× met die munt. Wordt KK of MM geworpen, dan werpt men opnieuw 2 keer. Werpt men KM (kans pq) dan wint de ene persoon, werpt men MK (kans qp) dan wint de andere. Ze hebben dus gelijke winstkansen.

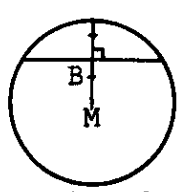
19. 

Neem straal 1, omtrek is dus 2π. Neem 1e punt A vast, plaats het 2e punt B willekeurig d.w.z. AB = $\underline{x}$ is rechthoekig verdeeld op $(0,\pi)$. Daarna plaatst men C willekeurig. De driehoek is <u>scherp</u> indien C valt op gearceerde omtrek. Nu is P(driehoek is scherp èn AB=x) $= \frac{x}{2\pi}\cdot\frac{dx}{\pi}$ dus P(scherpe driehoek) = $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{2\pi^2} = \frac{1}{4}$. Dus de kans op een stompe driehoek $\frac{3}{4}$.

20. Het antwoord hangt af van het "at random" trekken van de koorde.

a) 

Kies B willekeurig op de omtrek en trek raaklijn en straal in B. Kies daarna een hoek φ tussen 0 en π rad.(rechthoekig verdeeld). P[koorde > zijde] = $P[60^\circ < \varphi < 120^\circ] = 1/3$.

b) 

Trek willekeurig een straal en kies B willekeurig op deze straal. De koorde trekken we dan door B loodrecht straal. Ligt B dichter bij M dan $\frac{1}{2}r$ dan is de koorde dus groter dan de zijde oftewel P(koorde > zijde) = $P[BM<\frac{1}{2}r] = \frac{1}{2}$. Men moet dus eerst definiëren wat men onder het "at random" trekken van een koorde verstaat.

21. a) evident M/(N+M).

b) Stel we gaan na de k^e trekking door tot alle M+N knikkers getrokken zijn. Nummer de knikkers 1,2,...,M+N. Men kan deze op (M+N)! manieren nummeren; elke knikker heeft weer gelijke kans de k^e te zijn, dus de kans blijft M/(N+M) m.a.w. stel we hebben een zak met 100 knikkers, waarvan $\frac{1}{4}$ wit is. Pakken we er blindelings b.v. 30 uit en uit de rest weer 1, dan is de kans nog steeds $\frac{1}{4}$ op wit.

22. a) evident $(1-p_1)(1-p_2)$

b) Het samenstel werkt goed indien beide goed in en uit òf indien beide goed in en minstens 1 goed uit, dus: $(1-p_1)^2(1-p_2^2)$.

c) Voor $(1-p_1)^2(1-p_2^2) > (1-p_1)(1-p_2)$ oftewel $p_2 > p_1/(1-p_1)$.

d) Het samenstel werkt goed indien beide goed in en uit of indien 1 goed in en uit en de andere slecht in, dus: $(1-p_1)^2(1-p_2)^2 + 2(1-p_1)(1-p_2)p_1$ *

Het samenstel werkt beter indien * $>(1-p_1)(1-p_2)$ oftewel $p_2 < p_1/(1-p_1)$. De waarden van p_1 en p_2 bepalen dus of men parallel of in serie moet schakelen.

23. P(C 2x voorop) = $1/6 \times 1/6 = 1/36 = 2.8\% < \alpha$. Toch is het onjuist te concluderen dat C vermoedelijk een hoger nicotinegehalte bevat nl. wat indien B,A of D 2x voorop komt. Men moet dus berekenen: hoe groot is de kans dat een merk 2× voorop komt. Deze kans is nu $4 \times 1/36 = 1/9 > \alpha$, zodat men niets kan concluderen!

24. Stel A = "A is gesloten". Analoog voor B,C en D. De gevraagde kans is dan $P(AB \cup C \cup D) = 1 - P(\overline{AB})P(\overline{C})P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 13/16$. nl. $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B)$.

25. a) P(minstens 1 fout) = 1 - P(alle goed) = $1 - (1-\alpha)^5$.

b) evident α^5.

c) $\alpha = 0.05$ geeft voor a: 0.23 en b: 0.0003‰.

d) Dus $(1-\alpha)^5 = 0.95$ oftewel $\alpha = 0.01$.

26. P(1 of meer) = 1 - P(geen) = $1 - (0,97)^n \leq 0,10$. Dus $(0,97)^n > 0,90$. Oftewel $n < 3,5$.

27. Stel A_i = "i^e greep is een match". Dan is de gevraagde kans:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) - \ldots \text{etc.}$$

Nu is b.v. $P(A_iA_jA_k)$ = kans dat de i^e, j^e en k^e greep een match opleveren, en deze is $(n-3)!/n!$ nl. de loten zijn op $n!$ manieren te rangschikken. Er blijven er 3 op hun plaats en de overige laten zich op $(n-3)!$ manieren rangschikken. Dus $\Sigma P(A_i A_j A_k) = \binom{n}{3}(n-3)!/n!$ nl. ik kan op $\binom{n}{3}$ manieren er 3 uit de n kiezen. Zo is de gevraagde kans:

$P = \binom{n}{1}(n-1)!/n! - \binom{n}{2}(n-2)!/n! + \ldots \pm 1/n! = 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + \ldots \pm 1/n!$

Voor grote n nadert P dus tot $1 - 1/e = 0{,}63$.

28. a) P(6 ogen) = 5/36 nl. 15,42,33,51,24 en totaal 36 mogelijkheden. Analoog P(7 ogen) = 6/36; P(niet 7 ogen) = 30/36; P(niet 6 ogen) = 31/36. Dus winstkans voor A is:
$5/36 + 31/36 . 30/36 . 5/36 + (31/36 . 30/36)^2 5/36 + \ldots + (31/36 . 30/36)^9 \times$
$5/36 = 0{,}47$, dus voor B $0{,}53 - 0{,}04 = 0{,}49$. $(S_n = a(1-r^n)/(1-r))$.

b) P(onbeslist) $= (31/36)^{10}(30/36)^{10} = 0{,}036$.

c) Voor A: $5/36/(1-31/36 \cdot 30/36) = 30/61$; voor B 31/61.

III Kansrekening - Oplossingen

1. a) Totaal 15 knikkers waarvan 9 niet-zwarte, dus
   P(geen zwart) = $\binom{9}{3}/\binom{15}{3}$ = 12/65

   b) P(2 zwart) = $\binom{6}{2}\binom{9}{1}/\binom{15}{3}$ = 27/91

   (Gebruik tabel binomiaalcoëfficiënten)

   c) $\{\binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}\}/\binom{15}{3} = 34/455$.

2. Er zijn 13 schoppen, 39 niet-schoppen. In de eerste 14 moet 1 schoppen kaart zitten. Dus P = $\binom{13}{1}\binom{39}{13}/\binom{52}{14} \times 12/38$ nl. van de 38 resterende zijn nog 12 schoppen.

3. a) Stel S = renonce in schoppen; analoog H,R en K. Gevraagd wordt dus
   $P(S \cup H \cup R \cup K) = P(S) + P(R) + P(K) + P(H) - P(SR) - P(SK) \ldots$ etc.
   Nu is P(S) = $\binom{39}{13}/\binom{52}{13}$. Analoog P(R) = P(K) = P(H). Zo is

   $$P = \{4\binom{39}{13} - 6\binom{26}{13} + 4\binom{13}{13}\}/\binom{52}{13} = 0.05 = 5\%.$$

   b) P(7-kaart) = $4\binom{13}{7}\binom{39}{6}/\binom{52}{13}$ = 0.035 = $3\frac{1}{2}\%$

   c) P(8-kaart) = $4\binom{13}{8}\binom{39}{5}/\binom{52}{13}$ = 0.004 = 0,4%.

   Opm.: gebruik tabel log n!

4. Evident $\binom{2N}{N}^2/\binom{4N}{2N}$.

5. Dit zijn herhalingskombinaties. Uit de getallen 1,2,...,6 moet ik er 3 kiezen maar ik mag ook vaker hetzelfde getal kiezen. Dus volgens bekende formule:

   $$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56 \text{ manieren.}$$

   Zijn de dobbelstenen b.v. verschillend gekleurd zodat men ze kan onderscheiden, dan zijn er 6^3 = 216 manieren, dus veel meer.

6. Er zijn 48 niet-azen. P(minstens 1-aas) = 1 - P(geen aas) = 1 - $\binom{48}{10}/\binom{52}{10}$.

7. $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$.

Oftewel $(1+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\ldots+\binom{n}{n}t^n)(1+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\ldots+t^n) =$

$= 1 + \binom{2n}{1}t + \binom{2n}{2}t^2 + \ldots + t^{2n}$. Nu is de coëfficiënt voor t^n in het linkerlid en rechterlid gelijk dus:

$1 + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + 1 = \binom{2n}{n}$ oftewel

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{daar } \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}.$$

8. Er zijn 4 azen en 48 niet-azen. Beide ga ik in de gewenste groepjes verdelen. Het produkt geeft het totaal aantal gunstige indelingen. En het spel kan op $N = 52!/\{(13!)^4.4!\}$ manieren in 4 groepen van 13 kaarten worden gesplitst. We krijgen zo:

a) $1 \cdot \dfrac{48!}{9!(13!)^3} \cdot \dfrac{1}{3!}\;/N \qquad = 0.010$

b) $\dfrac{4!}{3!1!} \cdot \dfrac{48!}{10!12!(13!)^2} \cdot \dfrac{1}{2!}\;/N \qquad = 0.165$

c) $2!\cdot\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{1}{2!} \cdot \dfrac{48!}{(11!)^2(13!)^2}\cdot\dfrac{1}{(2!)^2}/N \qquad = 0.135$

d) $2!\cdot\dfrac{4!}{2!1!1!}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{48!}{11!(12!)^2 13!}\cdot\dfrac{1}{2!}\;/N \qquad = 0.584$

e) $4!\cdot\dfrac{4!}{1!1!1!1!}\cdot\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{48!}{(12!)^4} \cdot \dfrac{1}{4!}\;/N \qquad = 0.106$

Opm: die faktoren $\frac{1}{2!}$ midden en aan het eind van de formule ontstaan wanneer er groepjes met gelijke aantallen zijn. Vb: 1 2 3 4 geeft $4! = 26$ permutaties. Ik kan deze echter in $\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{2!} = 4$ manieren in 2 groepjes van 2 verdelen, nl. permutaties binnen groepjes doen er niet toe dus $12,34 = 21,43$ etc. Maar bovendien doet de volgorde der groepjes er niet toe dus $12,34 = 34,12$. D.w.z. bij groepjes met gelijke aantallen moet men nog delen door de permutaties van die aantallen groepjes. Die 2! vooraan ontstaat omdat men b.v. 2 groepjes met 1 aas, moet kombineren met 2 groepjes van 12 niet-azen. Dit kan juist op 2! manieren.

9. Voor partner resteren nog 3 azen en 36 niet-azen. Hieruit pak ik er 13. P(x-azen) = $\binom{3}{x}\binom{36}{13-x}/\binom{39}{13}$.

x = 0	P = 0,284	x = 2	P = 0,222
x = 1	P = 0,463	x = 3	P = 0,031.

10. P(minstens 2 op dezelfde dag) = 1 - P(geen op dezelfde dag) =
$= 1 - \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdots\frac{343}{365} = 1 - \frac{365!}{342!}/(365)^{23} = 0.51.$

11. Totaal 6^6 mogelijkheden; gunstig 1,2,...,6 met alle permutaties, dus $P = 6!/6^6 = 5!/6^5 = 5/324$.

12. Analoog aan 11: $12!/12^{12}$.

13. P(minstens 1 paar gelijk) = 1 - P(geen gelijke) = $1 - \frac{90\times 89\times\ldots\times 81}{100\times 99\times\ldots\times 91} = 0.67$
Ook $1 - \binom{90}{10}/\binom{100}{10} = 1 - 0.33 = 0.67$.

14. Dit zijn herhalingskombinaties.

a) Ik moet 10 keer uit 3 personen kiezen om hem een gulden te geven, waarbij ik meerdere malen dezelfde persoon mag kiezen, dus $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$ manieren.

b) Analoog: $\binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8} = 1287$ beelden.

c) Ik moet 2 keer kiezen uit de getallen 0,1,...,6, waarbij dubbele geoorloofd zijn. Dus analoog $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ stenen.

15. a) P(ERG) = $3!\cdot 3/7\cdot 1/7\cdot 1/7 = 18/343$ nl. volgorde van E,R,G doet er niet toe

P(EEN) = $3(3/7)^2\cdot 1/7 = 27/343$ id.

b) P(ERG) = $\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}/\binom{7}{3} = 3/35$
P(EEN) = $\binom{3}{2}\binom{1}{1}/\binom{7}{3} = 3/35$.

16. Het totaal aantal mogelijkheden is $(365)^{25}$. Kies 22 dagen, hiervan 3 om de dagen der paren aan te wijzen. Verdeel daarna de 25 personen over deze dagen. Dit geeft:
$P = \binom{365}{22}\binom{22}{3}\cdot\frac{25!}{2!2!2!}/(365)^{25}$.

17. a) 6! nl. alle letters zijn verschillend.
    b) 10!/3!2!2! nl. er zijn 3t, 2s en 2i.

18. Er zijn 2 letters e en 4 niet e. Als ik 3 letters pak, zijn daaronder 0,1 of 2 e's. Dit geeft $\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\binom{4}{1}=14$ mogelijkheden.

19. I a) Elk balletje heeft 8 mogelijkheden. Totaal $8^6 = 262144$.
    b) Het eerste heeft 8, het tweede 7, etc. het laatste balletje nog 3 mogelijkheden.
    Dus totaal $8.7...3 = \frac{8!}{2!} = 20160$ mogelijkheden.

    II a) Dit zijn herhalingskombinaties. Ik moet er 6 uit de 8 kiezen met herhaling dus $\binom{8+6-1}{6} = \binom{13}{6} = 1716$.
    b) Dit zijn gewone kombinaties: $\binom{8}{6} = 28$ manieren.

20. a) $\binom{50}{3}\binom{50}{2}/\binom{100}{5}$.
    b) Er zijn dus 20 advocaten die leugenaars zijn, dus
    $P = \binom{20}{3}\binom{80}{2}/\binom{100}{5}$.

21. Totaal 10^4 mogelijkheden.
    a) evident $10/10^4 = 0.001$.
    b) Gunstig zijn: Kies er 2 uit de 10, wijs aan welk cijfer 3 en welk 1 keer voorkomt; ga daarna permuteren dus
    $P = \binom{10}{2}\binom{2}{1}\frac{4!}{3!1!}/10^4 = 0.036$.
    c) Analoog: $P = \binom{10}{2}\frac{4!}{2!2!}/10^4 = 0.027$.
    d) Analoog: $P = \binom{10}{3}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!}/10^4 = 0.432$.
    e) $P = \binom{10}{4}\,4!/10^4 = 0.504$. Dit kan ook als volgt: $\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}$.

Opm: andere oplossing voor b.v. d). Kans op AABC in deze volgorde is: $\frac{10}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}$. Echter permutaties ook goed dus maal $\frac{4!}{2!}$. Echter nu nog maal $1/2!$ daar in die 4! de permutaties van B en C zitten, doch ook in die 9/10 en 8/10, dus dubbel geteld.

22. $P = \binom{5}{2}\binom{95}{18}/\binom{100}{20}$.

23. Elke plaats kan een punt of streep zijn dus totaal $2^5 = 32$ kombinaties.

24. Deze kans is gelijk aan de coëfficiënt van t^9 in

$\frac{1}{6^3}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^3$; nl. $P(t) = Et^x = \frac{1}{6}(t + t^2 + \dots t^6)$

is de kans genererende functie voor 1 worp (zie compendium p. 7 e.v.).
En voor de som van 3 worpen dus $P^3(t)$ (compendium p. 9).
Nu is dit ook $1/6^3\ t^3(1 - t^6)^3(1 - t)^{-3}$; ontwikkelen geeft

$1/6^3\ t^3(1 - 3t^6 - \dots)(1 + 3t + \dots + \frac{3.4.5.6.7.8}{6!} t^6 + \dots)$.

Dus de coëf. van t^9 wordt $1/6^3(28 - 3) = 25/216$.
Deze 25 mogelijkheden zijn: $1 + 2 + 6\,(6x)$; $1 + 4 + 4\,(3x)$; $1 + 3 + 5\,(6x)$; $2 + 4 + 3\,(6x)$; $2 + 2 + 5\,(3x)$; $3 + 3 + 3\,(1x)$.

25. Dus van $x + k - 1$ exp. gaven $k-1$ een succes, en het laatste gaf een succes

dus $P = \binom{x+k-1}{k-1} p^{k-1} q^x \cdot p = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x$.

26. De kans dat een kogeltje in het i^e vakje van links komt is evident

$P = \binom{k}{i-1} p^{k-i+1} q^{i-1}$ en dus de gevraagde kans

$\sum_{j=x}^{n} \binom{n}{j} P^j Q^{n-j}$ met $Q = 1 - P$.

IV Voorwaardelijke kansen - Oplossingen

1. $P(\text{wit}) = P(\text{wit}|\text{vaas } 1)P(\text{vaas } 1) + P(\text{wit}|\text{vaas } 2)P(\text{vaas } 2) =$
$= 5/8\cdot\frac{1}{2} + 3/10\cdot\frac{1}{2} = 37/80.$

2. $P(2\text{e G}|1\text{e G}) = P(\text{beide G})/P(1\text{e G}) = 1/3:\frac{1}{2} = 2/3$. Dus niet: de 2e munt is G of Z dus $P = \frac{1}{2}$.

3. Stel A_i = uit vaas i; B = wit. Gevraagd is dan $P(A_1|B) = P(A_1B)/P(B) =$
$= P(B|A_1)P(A_1)/\sum_i P(B|A_i)P(A_i) = (\frac{1}{4}\cdot 1/3)\big/1/3(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4/7) = 7/37$
(Bayes' Theorema).

4. $P(2 \text{ of } 3 \text{ vieren}|\text{minstens } 1) = P(2 \text{ of } 3 \text{ vieren})/P(\text{minstens } 1) =$
$= [\binom{3}{2}(1/6)^2\, 5/6 + (1/6)^3]/[1-(5/6)^3] = 16/91.$

5. $P(B|A)P(A) = P(AB)$; $P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(B\bar{A})$. Nu is $AB \cap \bar{A}B = 0$
dus $P(AB) + P(\bar{A}B) = P(AB \cup \bar{A}B) = P(B)$ nl. $B = (A \cup \bar{A})B = AB \cup \bar{A}B$.

6. a) $P(3 \text{ jongens}) = \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}$. $P(\text{minstens } 3 \text{ jongens}) = P(3 \text{ of } 4 \text{ jongens}) = \frac{1}{4} + 1/16 = 5/16$. Dus $P(3 \text{ j.}|\text{minstens } 3 \text{ j.}) =$
$= P(3\text{j.})/P(\text{minstens } 3\text{j.}) = (\frac{1}{4})/(5/16) = 4/5.$
b) $P(3\text{j.}|\text{oudste } 3\text{j.}) = P(3\text{j. en oudste } 3\text{j.})/P(\text{oudste } 3\text{j.}) =$
$= (1/16)/(1/8) = \frac{1}{2}$.
Dit is evident daar de kans dat het eerste een meisje is, $= \frac{1}{2}$ is.

7. Stel ZZ = beide vervangen ballen waren zwart; analoog WW en ZW. A = 2 laatste zijn zwart. Nu is $P(A) = P(A|ZZ)P(ZZ) + P(A|ZW)$
$P(ZW) + P(A|WW)P(WW) = [\binom{4}{2}/\binom{10}{2}]^2 + [\binom{5}{2}/\binom{10}{2}]\cdot\binom{4}{1}\binom{6}{1}/\binom{10}{2} +$
$+ [\binom{6}{2}/\binom{10}{2}]^2 = 167/675.$

8. $B = \bar{A}B + AB$. Nu is $\bar{A}B \cap AB = 0$ dus $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$
$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1-P(A)] = P(B)P(\bar{A})$
d.w.z. $\bar{A}$ en B onafhankelijk. Verder: $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B = \bar{A}$ en
$P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(\bar{A})$ daar $\bar{A}\bar{B} \cap \bar{A}B = 0$ oftewel
$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A})[1-P(B)] = P(\bar{A})P(\bar{B})$
d.w.z. $\bar{A}$ en $\bar{B}$ zijn onafhankelijk.

9. $P(ABC) = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C|B) = P(A)P(B)2P(C) = \frac{1}{4}$.
Dus $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. $P(C|B) = 2P(C) = 1$ d.w.z. uit B volgt C.
Dus $P(BC) = \frac{1}{2}$ en $P(B|C) = P(BC)/P(C) = 1$ d.w.z. uit C volgt B.

10. Stel A: man met groep A is de vader; analoog O en AB. $P(A|\text{kind } O) =$

$$= P(A \text{ én kind } O)/P(\text{kind } O) = \frac{P(A)P(\text{kind } O|A)}{P(A)P(\text{kind } O|A)+P(O)P(\text{kind } O|O)+P(AB)P(\text{kind } O|AB)}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 0{,}0625}{1/3(0.0625+0.25+0)} = 0{,}2$$ Analoog $P(O|\text{kind } O) = 0{,}80$ en $P(AB|\text{kind } O) = 0$.

11. $P(Z) = P(Z|\text{uit } 2)P(\text{doos } 2) + P(Z|\text{uit } 3)P(3) =$
$= \frac{1}{4} \cdot 2/3 + 4/5 \cdot 1/3 = 13/30$.

12. a) $P(x=0|x<4) = 0.0498/0.6472 = 0.077$
$P(x=1|x<4) = 0.1494/$ " $= 0.231$
$P(x=2|x<4) = 0.2240/$ " $= 0.346$
$P(x=3|x<4) = 0.2240/$ " $= 0.346$

b) $\mu = \Sigma p_i x_i = 1{,}961$
$\sigma^2 = \Sigma p_i x_i^2 - \mu^2 =$
$4{,}729-(1{,}961)^2 = 0{,}883$

13. a) Stel WW = 2 opzijgelegde ballen zijn beide wit; analoog ZZ en WZ.
$P(3^e\text{wit}) = P(3^e\text{wit}|WW)P(WW) + P(3^e\text{wit}|ZZ)P(ZZ) + P(3^e\text{wit}|ZW)P(ZW) =$
$= 2/8 \cdot \binom{4}{2}/\binom{10}{2} + 4/8 \cdot \binom{6}{2}/\binom{10}{2} + 3/8 \cdot 4 \cdot 6/\binom{10}{2} = 2/5$
oftewel de kans is niet veranderd nl. $P(1^e\text{wit})$ is ook 2/5.

b) Analoog $P(3^e\text{wit}|\text{minstens 1 wit}) = P(3^e\text{wit en minstens 1 } W)/$
$/P(\text{minstens 1 wit}) = [2/8 \cdot \binom{4}{2}/\binom{10}{2} + 3/8 \cdot 4 \cdot 6/\binom{10}{2}]/[1-\binom{6}{2}/\binom{10}{2}] =$
$= 7/20$.

14. Stel $a + b + c = d$. Dan is de gevraagde kans volgens het Bayes-theorema:

$$P(A|\text{fout}) = \frac{P(A \text{ en fout})}{P(\text{fout})} = \frac{P(A)P(\text{fout}|A)}{P(A)P(\text{fout}|A)+P(B)P(\text{fout}|B)+P(C)P(\text{fout}|C)} =$$

$$= \frac{a/d \cdot \alpha/100}{a/d \cdot \alpha/100+b/d \cdot \beta/100+c/d \cdot \gamma/100} = \frac{a\alpha}{a\alpha+b\beta+c\gamma}.$$

15. Gegeven: $P(A)$ en $P(B) \neq 0$. $A \cap B = 0$ dus $P(AB) = 0$ oftewel $P(A|B) = P(AB)/P(B) = 0 \neq P(A)$ oftewel A en B zijn afhankelijk. Dit is evident daar het optreden van A inhoudt dat B niet optreedt.

16. Geg. $P(AB)/P(A) = P(\overline{A}B)/P(\overline{A})$ dus

$P(AB)P(\overline{A}) = P(A)P(\overline{A}B)$; nu is $P(\overline{A}B) + P(AB) = P(B)$ dus

$P(AB)[1 - P(A)] = P(A)[P(B) - P(AB)]$

oftewel $P(AB) = P(A)P(B)$ dus A en B onafhankelijk!

17. $$P(A|B \cup C) = \frac{P[A \cap (B \cup C)]}{P(B \cup C)} = \frac{P(AB \cup AC)}{P(B \cup C)} = \frac{P(AB) + P(AC) - P(ABC)}{P(B \cup C)} =$$

wegens onafh.: $$\frac{P(A)[P(B) + P(C) - P(BC)]}{P(B) + P(C) - P(BC)} = P(A).$$

V De momenten - Oplossingen

1. a) $E(\underline{x}-\mu)^2 = E(\underline{x}^2-2\underline{x}\mu+\mu^2) = E\underline{x}^2 - 2\mu E\underline{x} + \mu^2 = E\underline{x}^2 - \mu^2$.

oftewel $E\underline{x}^2 = \sigma^2 + \mu^2$.

b) $\text{var}(a\underline{x}+b) = E(a\underline{x}+b-a\mu-b)^2 = Ea^2(\underline{x}-\mu)^2 = a^2 \text{ var } \underline{x}$.

2. a) $(n-1)\underline{s}^2 = \Sigma\underline{x}^2 - n(\bar{\underline{x}})^2$ dus $E(n-1)\underline{s}^2 = \Sigma E\underline{x}^2 - nE(\bar{\underline{x}})^2 =$

$n(\sigma^2+\mu^2) - n(\sigma^2/n+\mu^2) = (n-1)\sigma^2$ oftewel $E\underline{s}^2 = \sigma^2$.

b) $0 < \text{var } \underline{s} = E\underline{s}^2 - (E\underline{s})^2 = \sigma^2 - (E\underline{s})^2$ dus $\sigma^2 > (E\underline{s})^2$, $\sigma > E\underline{s}$.

d.w.z. σ wordt gemiddeld onderschat.

3. Beschouw $E[t(\underline{x}-\mu_x) + (\underline{y}-\mu_y)]^2 = t^2 \text{ var } \underline{x} + 2t \text{ cov}(\underline{x},\underline{y}) + \text{var } \underline{y}$.

Het linkerlid is $\geqslant 0$ dus de discriminant van het rechterlid is $\leqslant 0$ oftewel $\text{cov}^2(\underline{x},\underline{y}) \leqslant \text{var } \underline{x} \text{ var } \underline{y}$. Nu is $\text{var}(x+y) =$

$= \text{var } \underline{x} + \text{var } \underline{y} + 2 \text{ cov}(\underline{x},\underline{y}) \leqslant \text{var } \underline{x} + \text{var } \underline{y} + 2\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y}) =$

$= [\sigma(\underline{x}) + \sigma(\underline{y})]^2$ oftewel $\sigma(\underline{x}+\underline{y}) \leqslant \sigma(\underline{x}) + \sigma(\underline{y})$.

Opm.: het gelijkteken geldt indien $\underline{y} = a\underline{x} + b$ met $a > 0$.

4. a) $\mu = \Sigma p_i x_i = 1/6(1+2+\ldots+6) = 3\tfrac{1}{2}$.

$\sigma^2 = \Sigma p_i x_i^2 - \mu^2 = 1/6(1^2+\ldots+6^2) - (3\tfrac{1}{2})^2 = 35/12$.

b) $\mu = \Sigma p_i x_i = p\cdot 1 + q\cdot 0 = p$.

$\sigma^2 = \Sigma p_i x_i^2 - \mu^2 = p\cdot 1 + q\cdot 0 - p^2 = pq$.

c) $\mu = \Sigma p_i x_i = \Sigma n_i x_i/n = 1/15(3.5+7.10+4.15+1.20) = 11$.

$\sigma^2 = \Sigma n_i x_i^2/n - \mu^2 = 1/15(3.25+7.100+4.225+1.400) - 121 = 17\tfrac{1}{3}$.

5. a) $\text{var } \bar{\underline{x}} = \text{var } \Sigma\underline{x}/n = \Sigma \text{ var } \underline{x}/n^2 = \sigma^2/n$.

b) $\text{var } \bar{\underline{x}} = \dfrac{1}{n^2} \text{ var } \Sigma \underline{x}_i = \dfrac{1}{n^2}[\Sigma \text{ var } \underline{x}_i + \sum_{i\neq j} \text{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j)] =$

$\sigma^2/n + (n-1)\text{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j)/n$*. Voor $n = N$ is $\text{var } \bar{\underline{x}} = 0$ dus

$\text{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j) = -\sigma^2/(N-1)$. Dit ingevuld in * geeft:

$$\operatorname{var} \bar{\underline{x}} = \sigma^2/n - (n-1)\sigma^2/n(N-1) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} \sim \sigma^2(1-n/N)/n.$$

6. Er geldt $P(|\underline{x}-\mu| > k\sigma) < 1/k^2$ (Čebyšec). Dus voor $\bar{\underline{x}}$:

$P(|\bar{\underline{x}}-\mu| > k\sigma/\sqrt{n}) < 1/k^2$. Stel $k = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma$ dan wordt dit:

$P(|\bar{\underline{x}}-\mu| > \varepsilon) < \sigma^2/n\varepsilon^2$ oftewel $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{\underline{x}}-\mu| > \varepsilon) = 0$.

7. a) Stel populatie-variantie $= \sigma^2$. Dan is dus $\sigma(a) = \sigma/\sqrt{20}$.

b) En $\sigma(b) = \sigma/\sqrt{5}$; $\sigma(c) = \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1000-5}{1000-1}}$ en $\sigma(d) = \frac{\sigma}{\sqrt{20}}\sqrt{\frac{1000-20}{1000-1}}$

Oftewel d is het beste, doch zal niet veel van a verschillen.

8. a) Stel $(x-\mu)/\sigma = y$ dan wordt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = A$.

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}dydz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2}dr = 1.\int_0^{\infty} e^{-u}du = 1$$

dus $A = 1$.

b) $E\underline{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2}dy = 0$ nl. integrand is een onevenfunktie.

$E\underline{y} = E(\underline{x}-\mu)/\sigma = 0$ oftewel $E\underline{x} = \mu$.

c) $$E\underline{y}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} yd(e^{-\frac{1}{2}y^2}) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ye^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right\} = 1$$

dus $\operatorname{var} \underline{y} = E\underline{y}^2 - \mu^2(y) = 1$ en dus $\operatorname{var} \underline{x} = \sigma^2$.

d) $f(x) = ae^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$; $f'(x) = b(x-\mu)e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

$$f''(x) = be^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} - \frac{b}{\sigma^2}(x-\mu)^2e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = 0$$

dus $1 - (x-\mu)^2/\sigma^2 = 0 \quad (x-\mu)^2 = \sigma^2 \quad x = \mu \pm \sigma$.

9. $\mu = E\underline{x} = \lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = 1/\lambda \int_0^{\infty} ue^{-u}du = 1/\lambda$ nl. $\int_0^{\infty} u^ne^{-u}du = n!$

Analoog:

$$E\underline{x}^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2 \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = 2/\lambda^2 = \sigma^2 + \mu^2 \text{ dus}$$

$\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

10. a) De verdeling $f(z)$ van een element z uit de gemengde partij is dus: $f(z) = \frac{1}{2}[f_1(z) + f_2(z)]$.

$\mu = E\underline{z} = \int z f(z) dz = \frac{1}{2} \int z[f_1 + f_2] dz = \frac{1}{2} \int z f_1 dz + \frac{1}{2} \int z f_2 dz =$
$\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) = 2.1$ Analoog:

$E\underline{z}^2 = \frac{1}{2}[\int z^2 f_1 dz + \int z^2 f_2 dz] = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2)$.

var $\underline{z} = E\underline{z}^2 - \mu^2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2)^2 = 0.075$.

b) Neen, tenzij $\sigma_1 = \sigma_2$ en $\mu_1 = \mu_2$.

11. $\mu = E\underline{x} = \int x f\, dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$

$$E\underline{x}^2 = \int x^2 f\, dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x) dx = 7/6 = \sigma^2 + \mu^2 \text{ dus } \sigma^2 = 1/6.$$

12. a) $f(x) = 1/a$. $\mu = \int_0^a x/a\, dx = a/2$.

$E\underline{x}^2 = \int_0^a x^2/a\, dx = a^2/3 = \sigma^2 + \mu^2$ dus $\sigma^2 = a^2/12$.

b) $\mu = \Sigma\, p_i x_i = \frac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = (n+1)/2$.

$E\underline{x}^2 = \Sigma\, p_i x_i^2 = \frac{1}{n}(1^2+2^2+\ldots+n^2) = (n+1)(2n+1)/6$ dus $\sigma^2 = E\underline{x}^2 - \mu^2 =$

$= (n^2-1)/12$.

Opm.: is $\underline{x}$ de worp met 1 dobbelsteen, dan is $n = 6$ en dus $\mu = 3/2$; $\sigma^2 = 35/12$.

13. Er geldt $A \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x} dx = 1$. Nu is $\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2 \int_0^\infty u\, e^{-u} du = 1/\lambda^2$.

Gevolg $A = \lambda^2$.

$$\mu = E\underline{x} = \lambda^2 \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = 2/\lambda.$$

$$E\underline{x}^2 = \lambda^2 \int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2 \int_0^\infty u^3 e^{-u} du = 6/\lambda^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

dus $\sigma^2 = 2/\lambda^2$.

14. a) Direct te berekenen uit 4b nl. een binomiale stochastiek $\underline{x}$ is de som van n onafhankelijke Bernoulli-stochastieken $\underline{y}_i$: $\underline{x} \cong \sum_1^n \underline{y}_i$. Dus $\mu(\underline{x}) = n\mu(\underline{y}_i) = np$ en $\operatorname{var}\underline{x} = n \operatorname{var}\underline{y}_i = npq$.

2^e opl. $\mu = \sum_0^n x\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = np\sum_1^n \binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{n-x} =$

$$= np\sum_0^m \binom{m}{y}p^y q^{m-y} = np.$$

Analoog: $E\underline{x}(\underline{x}-1) = \sum_2^n x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2\Sigma\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{n-x} =$

$n(n-1)p^2 = E\underline{x}^2 - \mu = \sigma^2 + \mu^2 - \mu$ en hieruit $\sigma^2 = npq$.

b) Daar de binomiale verdeling tot een Poissonverdeling nadert voor $n \to \infty$, $p \to 0$ en $np = \lambda$, is dus $\mu = np = \lambda$ en $\sigma^2 = npq \to \lambda$ daar $q \to 1$.

Direct: $\mu = \sum_0^\infty x e^{-\lambda}\lambda^x/x! = \lambda e^{-\lambda}\sum_1^\infty \lambda^{x-1}/(x-1)! = \lambda$

Analoog: $E\underline{x}(\underline{x}-1) = \sum_0^\infty x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x/x! = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_2^\infty \lambda^{x-2}/(x-2)! =$

$$= \lambda^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu \text{ dus } \sigma^2 = \lambda.$$

c) $\mu = \sum_0^M x\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}/\binom{N}{n} = \frac{nM}{N}\sum_1^M \binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}/\binom{N-1}{n-1} = nM/N.$

Analoog m.b.v. $E\underline{x}(\underline{x}-1)$ vinden we

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Opm.: Stellen we in de binomiale verdeling $p = M/N$ (en dus $q = (N-M)/N$) dan is $\sigma^2 = npq = nM(N-M)/N^2$. Deze σ^2 vermenigvuldigen we met de faktor $(N-n)/(N-1)$, de korrectie voor een eindige populatie die ook optreedt in 5b) en we hebben de σ^2 van de hypergeometrische verdeling.

15. De oppervlakte = 1, dus de hoogte van de driehoek is 2/a en dus $f(x) = -2x/a^2 + 2/a$.

$$\mu = \int_0^a x\,(2/a-2x/a^2)dx = a/3 \text{ (abscis zwaartepunt driehoek).}$$

$$E\underline{x}^2 = \int_0^a x^2(2/a-2x/a^2)dx = a^2/6 = \sigma^2 + \mu^2 \text{ oftewel } \sigma^2 = a^2/18.$$

16. a) Evident: $p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)$.

b) $\mu = E\underline{x} = \int x[p_1 f_1 + p_2 f_2]dx = p_1 \int x f_1 dx + p_2 \int x f_2 dx =$

$= p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 = \Sigma p_i \mu_i$ (dus een gewogen gemiddelde).

c) Analoog: $E\underline{x}^2 = p_1 \int x^2 f_1 dx + p_2 \int x^2 f_2 dx = \Sigma p_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ dus $\sigma^2 = \Sigma p_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2) - (\Sigma p_i \mu_i)^2$ (juist de gewogen variantie indien $\mu_1 = \mu_2$; formules voor n machines zijn analoog).

17. Stel het aantal worpen nodig om de eerste zes te werpen op $\underline{x}$; de kansverdeling voor x = 1,2,... zijn resp.: $p, qp, q^2p, \ldots, q^{x-1}p$ met p = 1/6, q = 5/6 (geometrische verdeling). $\mu = \sum_1^\infty xq^{x-1}p$. Nu is $\sum_1^\infty q^x = q/(1-q)$ en differentiatie naar q geeft $\sum_1^\infty xq^{x-1} = 1/p^2$ dus $\mu = 1/p = 6$.

18. Het eerste pakje is altijd goed; het 2e pakje heeft 5/6 kans een andere letter te bevatten en volgens (17) moet men gemiddeld dus 6/5 pakje kopen; het 3e pakje heeft 4/6 kans op een nieuwe letter, gemiddeld dus 6/4 pakje enz. Het totaal geeft: 1 + 6/5 + 6/4 + 6/3 + 6/2 + 6 = 14.7 pakjes. (Analoog probleem: men moet gemiddeld 14.7 keer werpen met 1 dobbelsteen om alle ogen 1 t/m 6 minstens één keer geworpen te hebben).

19. $\int_0^1 (A+Bx)dx = A + \frac{1}{2}B = 1;\ \mu = \int_0^1 (Ax+Bx^2)dx = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B = \frac{1}{2}.$

Dit geeft B = 0, A = 1. (Direkt te voorspellen uit ligging van μ = zwaartepuntsabscis.)

20. Zij $\underline{x}_i$ het i^e getrokken getal en $\underline{y} = \sum_1^m \underline{x}_i$, dan is $E\underline{y} = m\,E\underline{x}$

$E\underline{x} = \sum_0^n p_k k = \sum \binom{n}{k} k/2^n$. Nu is $\sum_0^n \binom{n}{k} k = \sum_1^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$

$n \sum_0^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} = n2^{n-1}$ oftewel $E\underline{x} = n/2$ dus $E\underline{y} = nm/2$.

21. Stel het 2e afgekeurde is het x^e-gekeurde exemplaar. De kansverdeling is dan: $\binom{x-1}{1} p\, q^{x-2} \cdot p$ nl. in de eerste x-1 gekeurde exemplaren zit 1 foute, dat geeft een binomiale verdeling.

Een zuivere schatting voor p is 1/(x-1) nl. $E\, 1/(\underline{x}-1) =$

$= \sum_2^\infty p^2 q^{x-2} = p^2/(1-q) = p$, dus in dit geval 1/19 = 5.3%.

22. a) zie vraagstuk 12b met n vervangen door N.
$\mu(\underline{y}) = n\,E(\underline{x}) = n(N+1)/2$ en $\sigma^2(\underline{y}) = n\sigma^2(\underline{x}) = n(N^2-1)/12 = \frac{n(N-1)(N+1)}{12}$.

b) $\mu(\underline{y})$ is als onder a) daar $E(\underline{x}_i+\underline{x}_j) = E\underline{x}_i + E\underline{x}_j$ òòk indien beide onafhankelijk. Echter de variantie verandert: uit vraagstuk 5b) volgt: $\sigma^2(\underline{y}) = n\sigma^2(\underline{x})(N-n)/(N-1) = n(N-n)(N+1)/12$.

Opm.: voor n = 1 natuurlijk gelijk aan a).

Nemen we N - n = m, dan wordt onder b): $\sigma^2(\underline{y}) = nm(n+m+1)/12$, juist de variantie van de grootheid $\underline{U}$ van Wilcoxon.

23. $\underline{\chi}_\nu^2 \cong \sum_1^\nu \underline{u}_i^2$ waarin de $\underline{u}_i$ onafhankelijk N(0,1) verdeeld zijn.

var $\underline{u}$ = 1 = $E\underline{u}^2$ dus $E\,\underline{\chi}_\nu^2 = \Sigma E\underline{u}_i^2 = \nu$.

var $\underline{\chi}_\nu^2 = \nu$ var $\underline{u}_i^2$. Nu is var $\underline{u}_i^2 = E\underline{u}^4 - [E\underline{u}^2]^2 = 3 - 1 = 2$

dus var $\underline{\chi}_\nu^2 = 2\nu$. $\quad E\underline{u}^4 = 3$ nl.

$$\sigma^2 = E(\underline{x}-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \text{ oftewel}$$

$$\sigma^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma^2} dt.$$

Differentiëren naar σ en $\sigma = 1$ stellen geeft:

$$3 = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt = E\underline{u}^4.$$

24. a) Algemeen geldt: $\text{var}(\underline{x}+\underline{y}) = \text{var } \underline{x} + \text{var } \underline{y} + 2 \text{ cov}(\underline{x},\underline{y})$
dus het gestelde geldt indien $\text{cov}(x,y) = 0$ oftewel $\rho = 0$
d.w.z. indien de $\underline{x}$ en $\underline{y}$ ongecorreleerd zijn.

b) Eveneens geldt algemeen: $\sigma^2(x+y) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) + 2\rho\sigma(x)\sigma(y)$
daar $\rho = \text{cov}(\underline{x},\underline{y})/\sigma(x)\sigma(y)$. Voor $\rho = 1$ geldt dus:
$\sigma^2 (x+y) = [\sigma(x) + \sigma(y)]^2$ oftewel $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

25. We weten dat $\underline{\chi}^2_\nu \cong \nu\underline{s}^2/\sigma^2$ (zie XI.2) en var $\underline{\chi}^2_\nu = 2\nu$ (zie V.23).
Dus var $\underline{s}^2 = 2\sigma^4/\nu$.
Nu is $\underline{s}^2 = \sigma^2 + 2\sigma(\underline{s}-\sigma) + (\underline{s}-\sigma)^2$. Voor grote ν is $(\underline{s}-\sigma)^2$ te verwaarlozen t.o.v. $2\sigma(\underline{s}-\sigma)$.
Er geldt dan var $\underline{s}^2 \approx 4\sigma^2$ var $\underline{s}$ en dus var $\underline{s} \approx \sigma^2/2\nu$.

26. $\underline{z} \cong \underline{x}\underline{y}$ var $\underline{z} = E(\underline{z}-\mu_z)^2 = E\underline{z}^2 - \mu_z^2 = E(\underline{x}^2\underline{y}^2) - [E(\underline{x}\underline{y})]^2$

en daar $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn $= E\underline{x}^2 E\underline{y}^2 - (E\underline{x})^2(E\underline{y})^2 =$

$(\sigma_x^2+\mu_x^2)(\sigma_y^2+\mu_y^2) - \mu_x^2\mu_y^2 = \sigma_x^2\mu_y^2 + \sigma_y^2\mu_x^2 + \sigma_x^2\sigma_y^2$.

Delen door $\mu_x^2\mu_y^2$ geeft:

$V^2(z) = V^2(x) + V^2(y) + V^2(x)V^2(y)$ (laatste term vaak te verwaarlozen).

27. Noem correcte waarden $\bar{y}$ en z. $\Sigma x = 50 \times 6.81 = 340.5$

Dus $\bar{y} = (340.5-7.2+2.7)/50 = 6.72$.

$(n-1)s^2 = \Sigma x^2 - n(\bar{x})^2$ geeft $\Sigma x^2 = 49 \times (3.1)^2 + 50(6.81)^2 = 2789.70$

$\Sigma y^2 = 2789.70 - (7.2)^2 + (2.7)^2 = 2745.15$.

Dus $z^2 = [2745.15 - 50(6.72)^2]/49 = 9.943$ $\qquad z = 3.15$

28. $$k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2k \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = 2k \lim_{N\to\infty} \arctan N = k\pi \quad \text{dus } k = 1/\pi$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_{-M}^{N} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim \tfrac{1}{2}\,\ell n\,(1+x^2)\Big|_{-M}^{N} \text{ bestaat } \underline{\text{niet}}.$$

Dus de cauchy-verdeling is een verdeling zonder gemiddelde en (dus) zonder spreiding. Het is dus onjuist te zeggen $\mu = 0$ en $\sigma = \infty$.

29. a) De kans om in de n^e trekking voor 't eerst de juiste sleutel te pakken is: $p(n) = \frac{1}{10}\,(9/10)^{n-1}$.

Dus $\mu = E(\underline{n}) = \Sigma np(n) = \frac{1}{10} \sum_1^{\infty} n(9/10)^{n-1}$.

Nu is $\Sigma x^n = \frac{x}{1-x}$ en $\Sigma nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$ (differentiëren)

$\mu = \frac{1}{10} \cdot {}^1/(1-9/10)^2 = 10$.

b) Nu is de kans voor elke n steeds gelijk en wel 1/10.

Oftewel $\mu = \Sigma np(n) = \frac{1}{10}\sum_1^{10} n$ $\qquad$ ($p(n)=0$ voor $n>10$)

En $\mu = 5\frac{1}{2}$.

Conclusie: een dronken man verspilt zijn tijd.

30. Dus $h(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \exp\left\{\dfrac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad -\infty < y < \infty$

$\mu_k' = E\,\underline{x}^k = \int_0^\infty x^k f(x)dx$. Nu is $f(x)dx = h(y)dy$ en $x^k = e^{ky}$;

$$\mu_k' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ky} \exp\left\{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy = e^{\mu k+\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

dus $\mu(\underline{x}) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$;

$\sigma^2(\underline{x}) = E\underline{x}^2 - \mu^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

31. a) $E(\underline{x}-c)^2 = E(\underline{x}^2 - 2c\underline{x} + c^2) = c^2 - 2E\underline{x}c + E\underline{x}^2$.

Minimaal voor $c = \frac{-b}{2a} = \frac{2E\underline{x}}{2} = E\underline{x}$;

b) Differentiatie geeft:

$2\,\frac{\Sigma(x_i - d)}{n-1} = 0$ oftewel $\Sigma x_i - nd = 0$ dus $d = \Sigma x_i/n = \bar{x}$.

32. $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx > \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} \ldots + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} \ldots >$

$> k^2\sigma^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)dx \right\}$ nl. daar is $(x-\mu)^2 > k^2\sigma^2$

dus

$\sigma^2 > k^2\sigma^2\, P[|\underline{x}-\mu| > k\sigma]$ oftewel $P[|\underline{x}-\mu| > k\sigma] < 1/k^2$.

33. a) Dus gegeven $E\underline{t} = \theta$.

$0 < \text{var}\,\underline{t} = E(\underline{t}-\theta)^2 = E\underline{t}^2 - \theta^2$ dus $E\underline{t}^2 > \theta^2$, dus niet zuiver;

b) $E(\bar{\underline{x}})^2 = \text{var}\,\bar{\underline{x}} + \mu^2 = \sigma^2/n + \mu^2$ dus

$\lim_{n\to\infty} E(\bar{\underline{x}})^2 = \mu^2$.

34. Stel $\underline{A} = \frac{1}{n}\,\Sigma\,\underline{x}_i\underline{y}_i$ en $\underline{B} = \bar{\underline{x}}\bar{\underline{y}}$

$E\underline{A} = \frac{1}{n}\,\Sigma\,E\underline{x}E\underline{y} = E\underline{x}E\underline{y}$; $E\underline{B} = E\bar{\underline{x}}E\bar{\underline{y}} = E\underline{x}E\underline{y}$.

Echter is var $\underline{A}$ > var $\underline{B}$ nl.:

Zij $\underline{Z} = \underline{U}\,\underline{V}$ dan is var $\underline{z}$ = $\sigma_u^2\mu_v^2 + \sigma_v^2\mu_u^2 + \sigma_u^2\sigma_v^2$ (zie V 26).

Dus var $\underline{A} = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot \text{var}\,\underline{x}\,\underline{y} = (\sigma_x^2\mu_y^2 + \sigma_y^2\mu_x^2 + \sigma_x^2\sigma_y^2)/n$

en var $\underline{B} = \text{var}(\bar{\underline{x}}\bar{\underline{y}}) = \frac{\sigma_x^2}{n}\mu_y^2 + \frac{\sigma_y^2}{n}\mu_x^2 + \frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{n^2} <$ var $\underline{A}$.

VI De correlatiecoëfficiënt - Oplossingen

1. Een schatter voor ρ is: $r = s_{xy}/s_x s_y = \dfrac{n\Sigma xy - \Sigma x\ \Sigma y}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$

   a) We vinden: $\Sigma xy = 70$; $\Sigma x = 10$; $\Sigma y = 24$; $\Sigma x^2 = 30$; $\Sigma y^2 = 164$; $n = 4$. Dit geeft $r = 1$. Er geldt nl. $y = 2x + 1$ met richtingscoëff. > 0.

   b) Analoog $r = -1$, nl. $y = -2x+8$ met richt.coëff. < 0.

   c) $r = 0$ nl. $n\Sigma xy = 140$ en $\Sigma x\Sigma y = 140$. Toch zijn x en y afhankelijk nl. $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x + 11$.

   d) $r = 0$ daar $n\Sigma xy = 120$ en $\Sigma x\Sigma y = 120$. We vinden $r = 0$ indien er symmetrie heerst t.o.v. een lijn // één van de coörd.assen.

2. $\rho^2 = cov^2(\underline{x},\underline{y})/\sigma^2(x)\sigma^2(y)$. In V 3 is bewezen: $cov^2(\underline{x},\underline{y}) \leq var\ \underline{x}\ var\ \underline{y}$ dus $\rho^2 \leq 1$ oftewel $|\rho| \leq 1$.

3. a) stel $\underline{y} \cong a\underline{x} + b$; $cov(\underline{x},\underline{y}) = cov(\underline{x},a\underline{x}+b) = a\ var\ \underline{x}$
   $var\ \underline{y} = a^2 var\ \underline{x}$ dus $\rho^2 = 1$.

   b) Stel $\rho^2 = 1$ dus $cov^2(\underline{x},\underline{y}) = var\ \underline{x} \cdot var\ \underline{y}$ oftewel (zie V 3) de vorm $E[t(\underline{x}-\mu_x) + (\underline{y}-\mu_y)]^2 = 0$ heeft een dubbele reële wortel t_o. Dit kan echter alleen indien $t_o(x-\mu_x) + (y-\mu_y) = 0$ oftewel $\underline{y} \cong a\underline{x} + b$.

4. $cov(\underline{x},\underline{y}) = E(\underline{xy}) - E\underline{x}E\underline{y}$. Nu geldt indien $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn: $E(\underline{xy}) = E\underline{x}E\underline{y}$. Stel $\underline{x},\underline{y}$ continu, dan is $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ dus $E(\underline{xy}) = \int xy\ f(x,y)\,dx\,dy = \int xf_1\,dx \int yf_2\,dy = E\underline{x}E\underline{y}$.
   Zijn $\underline{x},\underline{y}$ discreet dan geldt $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ dus $E\underline{xy} = \sum_{ij} p_{ij}x_i y_j = \sum_i p_{i.}x_i \sum_j p_{.j}x_j = E\underline{x}E\underline{y}$.

   Uit $\underline{x},\underline{y}$ onafhankelijk volgt dus $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$. Is echter $\rho = 0$ dan zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ niet noodzakelijk onafhankelijk zoals reeds bleek in vraagstuk 1.

5. Beschouw $\underline{z} \cong \underline{x} + \underline{y}$. Hiervoor geldt: var $\underline{z}$ = var $\underline{x}$ + var $\underline{y}$ + 2 cov$(\underline{x},\underline{y})$ *

Evenzo voor $\bar{\underline{z}} = \bar{\underline{x}} + \bar{\underline{y}}$ geldt: var $\bar{z}$ = var $\bar{x}$ + var $\bar{y}$ + 2 cov$(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$

Nu is var $\underline{z}$ = n var $\bar{\underline{z}}$, var $\underline{x}$ = n var $\bar{x}$, var $\underline{y}$ = n var $\bar{\underline{y}}$ en dus

volgt uit * n cov$(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$ = cov$(\underline{x},\underline{y})$. Dus $\rho(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}}) = \text{cov}(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})/\sigma(\bar{x})\sigma(\bar{y})$ =

$$= \frac{\text{cov}(x,y)/n}{\sigma(x)\sigma(y)/n} = \rho(\underline{x},\underline{y}).$$

6. cov$(\underline{u},\underline{v})$ = cov$(a\underline{x}+b, c\underline{y}+d)$ = ac cov$(\underline{x},\underline{y})$; var $\underline{u} = a^2$var $\underline{x}$;

var $\underline{v} = b^2$var $\underline{y}$ dus $\rho(\underline{u},\underline{v}) = \frac{ac\ \text{cov}(x,y)}{|ac|\sigma(x)\sigma(y)} = \pm\rho(\underline{x},\underline{y})$.

We merken dus op dat ρ^2 (en ρ op het teken na) invariant is t.a.v. lineaire transformaties der variabelen. Speciaal geval: $\rho(\underline{x}^*,\underline{y}^*) = \rho(\underline{x},\underline{y})$ met $\underline{x}^* = (\underline{x}-\mu_x)/\sigma_x$ en $\underline{y}^* = (\underline{y}-\mu_y)/\sigma_y$.

7. Beide variabelen zijn afhankelijk daar b.v. als de 6 bovenkomt, de 1 onder ligt, en dus alleen de 2,3,4 of 5 naar voren gekeerd kunnen zijn. Toch is de $\rho = 0$. Dit is direkt in te zien door de x en y tegen elkaar uit te zetten. Er heerst symmetrie t.o.v.de lijn $x = 3\frac{1}{2}$ en dus is $\rho = 0$ (zie 1 d).
Natuurlijk ook te vinden door te laten zien dat $E(\underline{x}\underline{y}) = E\underline{x}E\underline{y}$.

8. Zij var $\underline{x} = \sigma^2$; dan is var $\bar{\underline{x}} = \sigma^2/n$ en var $\bar{\underline{y}} = \sigma^2/(n+k)$
cov$(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$ = cov$(x_1+\ldots+x_n, x_1+\ldots+x_{n+k})/n(n+k) = \sigma^2/(n+k)$.
Dus $\rho(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}}) = \sqrt{n/(n+k)}$.

Opm.: voor k = 0 is natuurlijk $\rho = 1$; voor n = 1 en k = n-1 wordt $\rho = 1/\sqrt{n}$ (zie 10a).

9. Stel de worpen zijn $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$. Zij $\underline{z} \cong \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3$.
var $\underline{z}$ = 3 var $\underline{x}_1$; cov$(\underline{x}_1,\underline{z})$ = cov$(\underline{x}_1,\underline{x}_1+\underline{x}_2+\underline{x}_3)$ = var $\underline{x}_1$.
Dus $\rho(\underline{x}_1,\underline{z}) = \text{cov}(\underline{x}_1,\underline{z})/\sigma(x_1)\sigma(z)$ = var $\underline{x}_1$/var $\underline{x}_1\sqrt{3} = 1/3\sqrt{3}$.

10. a) Zij var $\underline{x}_i = \sigma^2$. Nu is cov$(\underline{x}_i,\bar{\underline{x}}) = \frac{1}{n}cov(x_i, x_1+\ldots+x_n) = \sigma^2/n$
oftewel $\rho(\underline{x}_i,\bar{\underline{x}}) = 1/\sqrt{n}$, daar var $\bar{\underline{x}} = \sigma^2/n$.
b) cov$(\underline{x}_i-\bar{\underline{x}},\bar{\underline{x}})$ = cov$(\underline{x}_i,\bar{\underline{x}})$ - var $\bar{x}$ = 0 dus $\rho = 0$.

11. a) $f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dy = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$; Analoog $f_2(y) = e^{-y^2}/\sqrt{\pi}$.

We zien dat $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk, dus $\rho = 0$.

b) $f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2\sqrt{1-x^2}/\pi.$; Analoog $f_2(y) = 2\sqrt{1-y^2}/\pi$.

$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn dus afhankelijk daar $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$.

Echter $\rho = 0$ nl. $\mu(x) = \mu(y) = 0$ dus $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \iint xy/\pi dx\, dy = 0$.

12. Stel cijfer Ned. x_i, cijfer alg. y_i. In het schema staan de n_{ij}.
Marginaal rekenen we achtereenvolgens uit:

$n_{i.} = \sum_j n_{ij} = 2,\ 10,\ 22,\ 22,\ 20,\ 13,\ 8,\ 3\ ;\ \sum_i n_{i.} = n = 100$

$n_{i.}x_i = 4,\ 30,\ 88, 110, 120,\ 91,\ 64,\ 27; \sum x = \sum_i n_{i.}x_i = 534$

$n_{i.}x_i^2 = 8,\ 90, 352, 550, 720, 637, 512, 243\ ;\ \sum x^2 = \sum_i n_{i.}x_i^2 = 3112$

Analoog verticaal: $\sum y = \sum_j n_{.j}y_j = 569; \sum y^2 = \sum n_{.j}y_j^2 = 3543$

Verder nog:

$\sum_j n_{ij}y_j = 9,\ 41,\ 99, 124, 117,\ 95,\ 58,\ 26$

$\sum_j n_{ij}x_i y_j = 18, 123, 396, 620, 702, 665, 464, 234$ dus $\sum xy = 3222$.

Zo wordt:

$\bar{x} = \Sigma x/n = 5.34$ var $\underline{x} = [\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n]/(n-1) = 2.63$

$\bar{y} = \Sigma y/n = 5.69$ var $\underline{y} = 3.08$.

$\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = (\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y/n)/(n-1) = 1.85$; $\rho = 1.85/\sqrt{3.08 \times 2.63} = 0.65$.

13. We maken het volgende schema:

y_j \ x_i	1	2	3	4	5	6	$n_{i.}$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$	$\sum_j n_{ij}y_j$
1	1	2	2	2	2	2	11	11	11	41
2	0	1	2	2	2	2	9	18	36	38
3	0	0	1	2	2	2	7	21	63	33
4	0	0	0	1	2	2	5	20	80	26
5	0	0	0	0	1	2	3	15	75	17
6	0	0	0	0	0	1	1	6	36	6
$n_{.j}$	1	3	5	7	9	11	36	91	301	
$n_{.j}y_j$	1	6	15	28	45	66	161			

De berekening wordt:

$$E\underline{x} = \Sigma p_{i.}x_i = \Sigma n_{i.}x_i/n = 91/36 = 2.53$$

$$E\underline{y} = \Sigma p_{.j}y_j = \Sigma n_{.j}y_j/n = 161/36 = 4.47.$$

Analoog: $E\underline{x}^2 = 301/36$ en dus var $\underline{x} = 301/36 - (91/36)^2 = 1.97 =$ var $\underline{y}$

$E\underline{xy} = \Sigma n_{ij}x_iy_j/n = \frac{1}{n}\sum_i (x_i \sum_j n_{ij}y_j) = 441/36$ en dus $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) =$

$= 441/36 - 161 \times 91/36^2 = 0.94.$

Dus $\rho = 0.94/1.97 = 0.48.$

14. $\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$ dus $k\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy = 1$ oftewel $k = 2$.

(Ook direkt: inhoud = 1, opp.driehoek = $\frac{1}{2}$, dus hoogte = 2)

$f_1(x) = 2\int_0^{1-x} dy = 2(1-x)$; Analoog $f_2(y) = 2(1-y)$.

Dus $\mu(x) = 2\int_0^1 x(1-x)dx = 1/3$; Analoog $\mu(y) = 1/3$ (zwaartepunt driehoek)

$E\underline{x}^2 = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 1/6$ en dus $\sigma^2(x) = 1/18$; Analoog $\sigma^2(y) = 1/18$.

$E\underline{xy} = 2\int xy\,dx\,dy = 1/12$ dus $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = 1/12 - 1/9 = -1/36$

en $\rho(\underline{x},\underline{y}) = -\frac{1}{2}$.

15. var $\underline{x}$ = var $\underline{y}$ = 5/4 (zie V 12b: $\sigma^2 = (n^2-1)/12$ met $n = 4$).

$\mu(x) = \mu(y) = 2\frac{1}{2}$. $E(\underline{xy}) = \Sigma p_{ij}x_iy_j = 1/12[(2+3+4)+2(1+3+4)+$

$+ 3(1+2+4) + 4(1+2+3)] = 70/12.$

Dus $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{cov}(x,y)/\sigma(x)\sigma(y) = \dfrac{70/12 - 25/4}{5/4} = -1/3.$

16. var $\underline{z}$ = 4 var $\underline{x}$ + var $\underline{y}$ = $8\sigma^2(\underline{x})$; cov($\underline{x},\underline{z}$) = cov($\underline{x},2\underline{x}+\underline{y}$) = 2 var $\underline{x}$.
Dus $\rho(\underline{x},\underline{z}) = \text{cov}(\underline{x},\underline{z})/\sigma(x)\sigma(z) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

17. Zij var $\underline{x}$ = var $\underline{y}$ = σ^2 ; var $\underline{u} = a^2\text{var }\underline{x} + b^2\text{var }\underline{y} = (a^2+b^2)\sigma^2$.

Analoog var $\underline{v} = (c^2+d^2)\sigma^2$; cov($\underline{u},\underline{v}$) = cov($a\underline{x}+b\underline{y},c\underline{x}+d\underline{y}$) = $(ac+bd)\sigma^2$.

Dus $\rho = (ac+bd)/\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

18. $\rho = 0$ als cov($\underline{u},\underline{v}$) = cov($\underline{x}+\underline{y},\underline{x}-\underline{y}$) = var $\underline{x}$ - var $\underline{y}$ = 0 oftewel

als $\sigma^2(x) = \sigma^2(y)$ (zie 17 met a=b=c=1 en d=-1.).

19. $\underline{x} \cong \underline{d}_1 + \underline{d}_2 + \underline{d}_3 + \underline{k}_1 + \underline{k}_2$ $\qquad$ $\underline{y} \cong \underline{d}_4 + \underline{d}_5 + \underline{d}_6 + \underline{k}_1 + \underline{k}_2$
var $\underline{d}_i$ = var $\underline{k}_j$ = σ^2. $\qquad$ var $\underline{x}$ = var $\underline{y}$ = $5\sigma^2$.
cov(x,y) = $2\sigma^2$ dus ρ = 0.4.

20. Voor het gemak nemen we aan dat $\mu = 0$. Dit beïnvloedt ρ niet (zie VI.6).
Dus gegeven is $E(\underline{x}-\mu)^3 = E\underline{x}^3 = 0$; te bewijzen:
$E\bar{\underline{x}}\underline{s}^2 = E\bar{\underline{x}}\,E\underline{s}^2 = 0$. Nu is $\bar{\underline{x}} = \Sigma\,\underline{x}/n$ en $\underline{s}^2 = [\Sigma\,\underline{x}^2 - (\Sigma\,\underline{x})^2/n]/(n-1)$
dus te bewijzen: $E\{\Sigma\,\underline{x}[\Sigma\,\underline{x}^2 - (\Sigma\,x)^2/n]\} = 0$.
Nu is
$E\,\Sigma\,\underline{x}_i\underline{x}_j^2 - E(\Sigma\,\underline{x})^3/n = 0$ daar $E\underline{x}_i\underline{x}_j^2 = E\underline{x}_i E\underline{x}_j^2 = 0$ als $i \neq j$
en $E\underline{x}_i\underline{x}_j^2 = E\underline{x}_i^3 = 0$. Dit resultaat is belangrijk voor de toepassing van de t-verdeling.

21. a) $E\underline{v} = E\underline{x} - E\underline{y} = 0$; var $\underline{v}$ = 2 var $\underline{x}$ = 35/6.
d_i = 0 1 2 3 4 5 ; v_i = 0 ±1 ±2 ±3 ±4 ±5
p_i =(6 10 8 6 4 2)/36 ; p_i = (6 5 4 3 2 1)/ 36.
$E\underline{d} = \Sigma p_i\, d_i = 70/36$; var $\underline{d} = \Sigma p_i\, d_i^2 - (70/36)^2 = 2660/36^2$.
b) cov(v,d) = $E(\underline{v}\,\underline{d}) - E\underline{v}\,E\underline{d} = E(\underline{v}\,\underline{d}) = 0$ dus $\rho = 0$.
Toch afhankelijk daar bv. $P(\underline{d}=5\mid\underline{v}=4) = 0 \neq P(\underline{d}=5)$.

VII De normale verdeling - Oplossingen

1. a) $P(\underline{x}>60) = P(\underline{u} > \frac{60-50}{7} = 1.43) = 0.0764.$

   b) $P(\underline{x}<40) = P(\underline{u} < \frac{40-50}{7} = -1.43) = 0.0764.$

   c) $P(42<\underline{x}<63) = P(-1.14 < \underline{u} < 1.86) = P(\underline{u} < 1.86) - P(\underline{u} > 1.14) = 0.8415.$

   d) $u = -1.96$ dus $x = 50 - 7 \times 1.96 = 36.28.$

   e) $P(|\underline{u}|<1.44) = 0.85$ dus $u = 1.44$ en $|x-50| = |7u|$
   oftewel $x = 7 \times 1.44 = 10.08.$

2. $P(\underline{x} \geqslant 5) = P(\underline{u} \geqslant \frac{5-2}{3} = 1) = 0{,}1587$; $P(\text{grootste} \geqslant 5) = 1 - P(\text{alle} < 5) =$
$1-(0{,}8413)^4 = 0{,}50$; $P(\text{kleinste} \geqslant 5) = P(\text{alle} \geqslant 5) = (0.1587)^4 = 0.0006.$

3. Zij schijfdikte $\underline{x}_i$ en $\underline{y} \cong \sum_1^{25} \underline{x}_i$. Dus $\mu(y) = 25 \times 12 = 300$ cm en
var $\underline{y} = 25 \times 4 = 100$ dus $\sigma(y) = 10.$
$P(\text{mislukking}) = P(\underline{y} > 320) = P(\underline{u} > \frac{320-300}{10} = 2) = 0.0228.$

4. Zij gewicht 1 pakje $\underline{x}_i$. Stel $\bar{\underline{x}} \cong \sum_1^{25} \underline{x}_i/25$; dus var $\bar{\underline{x}}$ = var $\underline{x}/25 = 9/25$
oftewel $\sigma(\bar{x}) = 0.6$. $P(\text{boete}) = P(\underline{u} < -2.33) = 0.01.$
Dus $(250-\mu)/0.6 = -2.33$ en $\mu = 251.4$ gram.

5. $P(\underline{u} > 0.43) = 0.33$; $P(\underline{u} < -0.43) = 0.33.$
Dus $\frac{x-170}{11.6} = \pm\, 0.43$ oftewel $x = 170 \pm 11.6 \times 0.43.$
De diameters moeten dus zijn 165 en 175 mikron.

6. $\sigma(\bar{x}) = \sigma/\sqrt{n} = 3/\sqrt{n}.$; $u(\frac{1}{2}\alpha) = 1.96.$
Dus $2u(\frac{1}{2}\alpha)\,\sigma/\sqrt{n} \leqslant 2$ oftewel $n > 34.$

7. Stel $\underline{x}$ = gewicht thee per pakje;
$P(\underline{x} < 100) = P(\underline{u} < \frac{100-101}{0.6}) = P(\underline{u} < -1.67) = 0.0475$ nl.
$u = \frac{x-101}{0.6}$ met $x = 100$. **Dus slechts 4.8% minder dan het nominale gewicht.**

8. a) Asdiameter = $\underline{x}$; diameterboring = $\underline{y}$. Stel $\underline{z} = \underline{y} - \underline{x}$, dus
$\mu(z) = \mu(y) - \mu(x) = 0.07$ en var $\underline{z}$ = var $\underline{x}$ + var $\underline{y}$ = 0.0025
dus $\sigma(\underline{z}) = 0.05$; $\underline{z} \cong 0.07 + 0.05\underline{u}$.
P(as past) = $P(0.05 < \underline{z} < 0.15) = P(-0.4 < \underline{u} < 1.6) = 0.60$ dus 60%.

b) Het percentage is maximaal indien $\mu(z) = 0.10$ dus $\mu_2 - \mu_1 = 0.10$.
Dan is $u = \frac{0.15-0.10}{0.05} = 1$ en $P(|\underline{u}|<1) = 0.6826$ oftewel 68.3%.

9. a) Stel hoogte doos $\underline{x}_i$; $\underline{z} \cong \sum_1^{10} \underline{x}_i$ dus $\mu(z) = 10\mu(x) = 100$ en
var $\underline{z}$ = 10 var $\underline{x}$ = 10, $\sigma(z) = 3.16$; $\underline{z} = 100 + 3.16\underline{u}$.
P(onvoldoende plaats) = $P(\underline{z} > 106) = P(\underline{u} > 1.90) = 0.0287$.

b) $\underline{y} \cong \sum_1^{11} \underline{x}_i$ met $\mu(y) = 110$ en var $\underline{y}$ = 11, $\sigma(y) = 3.32$.
P(voldoende plaats) = $P(\underline{y} < 106) = P(u < -1.20) = 0.1151$.

c) A: 10 gaan er in; B: 11 gaan er in; Gevraagd $P(A\overline{B})$ =
$= P[A(1-B)] = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B) = 0.9713 - 0.1151 =$
$= 0.8562$.
Opm.: Eigenlijk is $P(AB) \neq P(B)$ daar de normale stochastiek < 0 kan worden.

10. a) $\underline{x} = 5.01 + 0.006\underline{u}$; $P(5.00 \leq \underline{x} \leq 5.02) = P(-1.67 \leq \underline{u} \leq 1.67) =$
$= 0.9050$ oftewel 9.5% valt buiten de toleranties.

b) $\mu = 5.006$; $P(-1 < \underline{u} < 2.33) = 0.8314$ dus 16.9% valt erbuiten.
$\mu = 5.008$; $P(-1.33 < \underline{u} < 2) = 0.8854$ dus 11.5% valt erbuiten.
$\mu = 5.012$ en $\mu = 5.014$ analoog aan resp. 5.008 en 5.006 wegens symmetrie.
$\mu = 5.016$; $P(-2.67 < \underline{u} < 0.67) = 0.7448$ dus 25.5% valt erbuiten.
Opm. : zet het percentage uitval tegen μ uit.

c) Dus $\mu = 5.010$; $u = 2.576$ oftewel $(5.020-5.010)/\sigma = 2.576$
dus $\sigma = 0.004$.

11. a) Kans op fout van de eerste soort = kans op het verwerpen van de juiste nulhypothese ten gunste van de alternatieve hypothese. Dus hier $u = 1.645$.
Kans op fout van de tweede soort = kans op het aannemen van de onjuiste nulhypothese, terwijl de alternatieve juist is. Deze is $P(\underline{x} < 1.645) = P(\underline{u} < -0.355) = 0.36$.

b) Dus $u = -1.282$ oftewel $x = 0.718$ en $P(x > 0.718) = 0.24$.
Opm.: we zien dus dat deze twee fouten elkaar tegenwerken.

12. Zij $\underline{x}_i$ = afmeting blok; $\underline{z}$ = lengte doos; $\underline{y} \cong \sum_1^4 \underline{x}_i$. ; $\mu(y) = 160$
$\text{var } \underline{y} = 4 \text{ var } \underline{x}_i = 4 \times 0.09 = 0.36$; $\text{var } \underline{z} = 1$; $\mu(z-y) = 2$;

a) $\text{var } (\underline{z}-\underline{y}) = \text{var } \underline{z} + \text{var } \underline{y} = 1.36$; $\sigma(\underline{z}-\underline{y}) = 1.166$
$P(\text{niet passen}) = P(\underline{z}-\underline{y} < 0) = P(\underline{u} < \frac{0-2}{1.166}) = P(u > 1.72) = 0.0427$.

b) $P = 1 - (0.9573)^3 = 0.123$.

13. Stel $\underline{x}_i$ = gewicht 1 biscuit; $\underline{y}$ = gewicht verpakking; $\underline{z} \cong \sum_1^{40} \underline{x}_i + \underline{y}$.

a) $\mu(z) = 40\mu(x) + \mu(y) = 135$; $\text{var } \underline{z} = 40 \text{ var } \underline{x} + \text{var } \underline{y} = 1.85$;
$\sigma(z) = 1.36$.
$P(\underline{z} < 131) = P(\underline{u} < \frac{131-135}{1.36}) = P(\underline{u} < -2.94) = 0.0016$.

b) Uit tabel: $\sigma = 0.43R$ oftewel $R = 1.36/0.43 = 3.16$.

c) Gevraagd $\rho(z,y) = \text{cov}(\underline{z},\underline{y})/\sigma(y)\sigma(z)$. Nu is $\text{cov}(\underline{z},\underline{y}) = \text{var } \underline{y}$ oftewel $\rho(z,y) = \sigma(y)/\sigma(z) = 0.368$.

14. a) $\underline{y}_i \cong \underline{x}_i + \underline{e}_i$. Hierin is $\underline{y}_i$ = afgeronde post; $\underline{x}_i$ = de oorspr. post; $\underline{e}_i$ = afrondingsfout. Voor het totale bedrag geldt:

$$\sum_1^{120} \underline{y}_i \cong \sum_1^{120} \underline{x}_i + \sum_1^{120} \underline{e}_i.$$

Gevraagd wordt $P(|\Sigma y - \Sigma x| > 5) = P(|\Sigma \underline{e}| > 5)$.

Nu doorloopt $\underline{e}_i$ de waarden -50,-49,...,-1,0,1,...,49,50 met kansen resp. 1/200,1/100,...,1/100,1/200 nl. ƒ 32.50 wordt ƒ 32 en ƒ 33.50 wordt ƒ 34, de overige rechthoekig verdeeld. Dus $\mu(\underline{e}_i) = 0$ en var $\underline{e}_i$ =

$= 2[1/200(50)^2 + 1/100(49^2 + \ldots + 1)] = 833.5$ ct. Dus E $\Sigma \underline{e}_i = 0$

en var $(\Sigma e_i) = 120 \times 833.5 = 10^5$ oftewel $\sigma(\Sigma e_i) =$ ƒ 3.16.

$P(|\Sigma \underline{e}_i| > 5) = P(|\underline{u}| > 1.58) = 0.1142.$

b) Nu doorloopt $\underline{e}_i$ de waarden 0,1,...,99 elk met kans 1/100. var $\underline{e}_i = 833.2$ en $\text{var}(\Sigma e_i) = 120 \times 833.2 \approx 10^5$. Dus vrijwel dezelfde uitkomst.

15. a) $u = (24-20)/2 = 2$ $\quad P(\underline{u} < 2) = 0{,}9772$. Dus de gevraagde kans is: $P = (0.9772)^5 = 0.89$.

b) Dus $p^5 = 0.95$; $p = 0.9898$; $u = 2.32$ en $x = 20 + 2 \times 2.32 =$ $= 24.64$.

16. $u = 2.576$; $\sigma(\bar{x}) = 5/\sqrt{n}$, dus $2.576 \times 2 \times 5/\sqrt{n} \leqslant 1$; $n > 663$. Voor lengte 2 wordt dit aantal 4 keer zo klein dus $n > 166$.

17. a) $u(0.05) = 1.645$ en $u(0.90) = -1.28$ dus $50 + 1.645 \times 10/\sqrt{n} = 52 - 1.28 \times 10/\sqrt{n}$ oftewel $2\sqrt{n} = 29.25$; $n = 214$.

b) voor $n = 214$ wordt $x = 50 + 1.645 \times 10/\sqrt{214} = 51{,}12$.
$u = (51.12-51)\sqrt{n}/10 = 0.176$; $P(\underline{u} > 0.176) = 0.57$
Oftewel het onderscheidingsvermogen voor $\mu = 51$ is 0.43, dus vrij klein.

18. $\underline{x}$ = gewicht olieïnhoud, $\underline{y}$ = gewicht lege fles+capsule, $\underline{z}$ = gewicht gevulde fles $\underline{z} \cong \underline{x} + \underline{y}$ ($\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk ondersteld).
var $\underline{z}$ = var $\underline{x}$ + var $\underline{y}$; $E\underline{z} = E\underline{x} + E\underline{y}$ dus $E\underline{x} = 585.2 - 228,3 = 356.9$
en var $\underline{x} = (12.8)^2 - (11.3)^2 = 36.15 = (6.0)^2$.
$P(\underline{x} < 350) = P[(\underline{x}-\mu)/\sigma < \frac{350-356.9}{6.0} = -1.15] = 12.5\%$.

Opm.: vooral niet: $\underline{x} = \underline{z} - \underline{y}$ dus var $\underline{x}$ = var $\underline{z}$ + var $\underline{y}$ nl. $\underline{z}$ en $\underline{y}$ zijn wèl afhankelijk.

19. a) evident: $\bar{\underline{x}} - 1.645 \times 2/\sqrt{n} < \mu < \bar{\underline{x}} + 1.645 \times 2/\sqrt{n}$;

b) met Cebysev: $P[|\bar{\underline{x}} - \mu| > k\sigma/\sqrt{n}] < \frac{1}{k^2} = 0.1$ dus $k = \sqrt{10} = 3.16$
oftewel $\bar{\underline{x}} \pm 3.16 \times 2/\sqrt{n}$ dus bijna tweemaal zo breed.

VIII De binomiale verdeling - Oplossingen

1. a) Evident $(\frac{1}{2})^4 = 1/16$; b) $\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = 6/16$; c) $\binom{4}{3}(\frac{1}{2})^4 = 4/16$.

2. Dus in de eerste 4 worpen slechts één zes, daarna nog een zes.
Kans = $\binom{4}{1}1/6(5/6)^3 1/6 = 500/6^5$.

3. P(één 6) = $\binom{5}{1}1/6(5/6)^4 = (5/6)^5$; P(geen 6) = $(5/6)^5$.

4. $\mu = np = 100$; $\sigma = \sqrt{npq} = 9.13$; $u = (70-100)/9.13 = -3.28$
$P(|\underline{u}| > +3.28) = 0.001$, dus zeker nodig te reclameren.

5. $\mu = np = 500$; $\sigma = \sqrt{npq} = 15.83$;
$x = 500 + 1.96 \times 15.83 = 531$ oftewel 531 zitplaatsen. Voor 1 op de 100 dagen wordt dit: $x = 500 + 2.576 \times 15.83 = 541$ zitplaatsen.

6. $\mu = np = 50$; $\sigma = \sqrt{npq} = 5$; $u = (65-50)/5 = 3$ $P(|\underline{u}| > 3) = 0{,}0026$.
Er is sterke reden te twijfelen; dus $u = 1.96$ en $x = 50 + 1.96 \times 5 = 59.80$ dus men mag hoogstens 59 keer winnen.

7. $p = 0.05$; $\mu = np = 7.5$; $\sigma = \sqrt{npq} = 2.67$; $u = (10-7.5)/2.67 = 0.94$
$P(\underline{u} > 0.94) = 0.1736$ dus geen recht te reclameren.
$u = 1.645$; $x = 7.5 + 1.645 \times 2.67 \approx 12$, dus minstens 12 ondeugdelijke exemplaren.

8. $u = -2.33$; $\mu = np = 4/5n$; $\sigma = \sqrt{npq} = 2/5\sqrt{n}$, dus
$5(100-4n/5)/2\sqrt{n} = -2.33$; $n - 1.165\sqrt{n} - 125 = 0$; dit geeft
$n = 138.7$ oftewel hij moet minstens 139 borden maken.

9. $\hat{p} = 0.80$. Voor $n\hat{p} > 50$ geldt bij benadering $|p-\hat{p}| < u(\frac{1}{2}\alpha)\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$
oftewel $|p-0.80| < 1.96 \times \sqrt{0.8 \times 0.2/300} = 0.045$ dus $0.755 < p < 0.845$.

10. $\mu = np = 20$; $\sigma = \sqrt{npq} = 2$; $u(\alpha) = -1.645$ (α=0.05).
Dus $x = 20 - 1.645 \times 2 = 16.7$ oftewel maximaal 16 personen.

11. $\mu = np = 20$; $\sigma = \sqrt{npq} = 4.08$; $\mu - u(\frac{1}{2}\alpha)\sigma < \underline{x} < \mu + u(\frac{1}{2}\alpha)\sigma$ wordt $12 < \underline{x} < 28$.

12. a) $\mu = np = 10$; $\sigma = \sqrt{npq} = 3$; $u = +1.645$ (rechts éénzijdig). Dus $x = 10 + 1.645 \times 3 = 14.9$. Het kritieke gebied is dus $x \geqslant 15$, met x = aantal blauwe planten in de steekproef.
   b) $u = (15-10)/3 = 1.67$ en $P(\underline{u} > 1.67) = 0.0475 < \alpha$; daar $x = 15$ juist in het kritieke gebied valt, verwerpen we de nulhypothese $p \leqslant 0.10$ ten gunste van de alternatieve hypothese $p > 0.10$.
   c) $u = (14.93-20)/4 = -1.27$; $P(\underline{u} > -1.27) = 0.8980$ = bijbehorend onderscheidingsvermogen. ($\sigma = \sqrt{npq}$ is nu $= \sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8} = 4$)

13. Zij $\underline{x}_i$ = worp met een dobbelsteen; $\underline{y} \cong \sum_1^{12} \underline{x}_i$; Nu is $\mu(\underline{x}_i) = 3\frac{1}{2}$ en var $\underline{x}_i = 35/12$. Dus $\mu(y) = 42$ en var $\underline{y} = 35$, $\sigma(y) = 5.92$. $P(\underline{y} \geqslant 60) = P(\underline{u} \geqslant 3.04) = 0.0012$.

14. P(succes) = 1/6; De gevraagde kans is exact: P =
$= \sum_{x=0}^{9} \binom{90}{x}(1/6)^x(5/6)^{90-x}$. Deze is te benaderen door een normale verdeling met $\mu = np = 15$ en $\sigma = \sqrt{npq} = 3.54$. Oftewel $P(\underline{x} < 10) = P(\underline{u} < -1.41) = 0.0793$.

15. Hij heeft totaal $1\frac{1}{2}$ N lucifers gepakt, waarvan N uit het nu lege doosje, en $\frac{1}{2}$N uit het andere. Oftewel $P = \binom{1\frac{1}{2}N}{N}(\frac{1}{2})^{1\frac{1}{2}N}$.

16. $p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ wordt met $p = \lambda/n$ en $q = 1 - p$:

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} (\lambda/n)^x(1-\lambda/n)^{n-x}.$$

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} (1-\lambda/n)^n\{(1-\lambda/n)^{-x}. \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\}$$ Nu is

$\lim_{n\to\infty} (1-\lambda/n)^n = e^{-\lambda}$; en de vorm tussen accolades gaat naar 1 oftewel $p(x) \to e^{-\lambda} \lambda^x/x!$

17. a) Dus van de 10 keer werpen heeft hij 5 keer kruis, 5 keer munt geworpen, oftewel $P = \binom{10}{5}(\frac{1}{2})^{10}$.

b) evident gelijk a of zo u wilt: van de 9 beslissingen, zijn er 5 voor zuid en 4 voor noord dus $P = \binom{9}{4}(\frac{1}{2})^{9}$ en dit is gelijk kans onder a.

18. a) binomiaal : $P = \binom{3}{1}(0.95)^2(0.05)^1 = 0.135$

b) hypergeometrisch: $P = \binom{5}{1}\binom{95}{2}/\binom{100}{3} = 0.138$.

19. $P(x \text{ defecte}) = \binom{10}{x}(0.1)^x(0.9)^{10-x}$. Deze kansen zijn voor $x = 0$, 1 en 2 resp. 0.348, 0.387 en 0.194.
P(goedkeuren) = P(0,1 of 2 defecte) = 0.929.

20. a) Stel percentage bedorven blikjes = p. Dus we gaan berekenen die p zodat $(1-p)^{120} \geq 0.05$ oftewel $120 \log(1-p) \geq \log 0.05$ dus $p \leq 0.025$ oftewel $2\frac{1}{2}$ %; (met tabel 6.1 $P(\underline{x} = 0) < 0.05$ geeft $\mu = 3 = 120p$ dus $p = 2\frac{1}{2}\%$).

b) Analoog: $(1 - 0.01)^n \leq 0.05$ oftewel $n \geq 296$.

21. Zij het gemiddelde μ; stel de kans om binnen de grenzen te vallen $q(\mu) = q$. Dan is $P(\text{stoppen})|\mu) = 1 - q^5 - 5pq^4$ nl.
$1 - \sum_{x=0}^{1}\binom{5}{x}p^x q^{5-x}$ oftewel $P = 1 - q^4(5-4q)$.

$\mu = 22.5$ geeft $u_1 = -2.06$; $u_2 = 2.06$; $q = 0.9606$; P(stop) = 0.02
$\mu = 25$ of 20 geeft $u_1 = \pm 3.53$; $u_2 = \mp 0.59$; $q = 0.7222$; P(stop) = 0.43
$\mu = 27.5$ of 17.5 geeft $u_1 = \mp 0.88$; $u_2 = \mp 5$; $q = 0.1894$; P(stop) = 0.95

22. Schatting fractie defecten voor A: $\hat{p}_1 = 0.0667$, voor B: $\hat{p}_2 = 0.08$ en voor het totaal: $\hat{p} = 9/125 = 0.072$.
Men kan dit op verschillende manieren oplossen

1e. Construeer een betrouwbaarheidsinterval voor p_1 en p_2 afzonderlijk. Daar $\hat{p}_1 < 0.10$ en $n\hat{p}_1 < 20$ gebruiken we de tabel met $a_1/n < p < a_2/n$ van de Poissonbenadering of de tabel $a_1 < p < a_2$. Beide geven ongeveer (α=0.95) $2.8 < p_2 < 18$ en $2.6 < p_1 < 14$. Deze overlappen elkaar d.w.z. geen duidelijk verschil in percentage defecten.

2e. Toets de hypothese $p_1 = p_2 = p$; $u = \dfrac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(1/n_1 + 1/n_2)}} =$

$= \dfrac{0.0133 \times 125}{\sqrt{9 \times 116(1/75 + 1/50)}} = 0.28$. De tweezijdige overschrijdingskans is 0.77 dus niet significant.

3e. Een betrouwbaarheidsinterval voor het verschil wordt:
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm u(\frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\hat{p}_1\hat{q}_1/n_1 + \hat{p}_2\hat{q}_2/n_2}$ oftewel $-0.767 < p_1 - p_2 < 0.741$.
Het interval bevat de 0, dus geen significant verschil.

23. $\hat{p} = 0.24$. Voor $n\hat{p} > 50$ geldt bij benadering: $|p - \hat{p}| < u(\frac{1}{2}\alpha) \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$
oftewel $|p - 0.24| < 1.96 \times \sqrt{0.24 \times 0.76/250} = 0.05$
dus $0.19 < p < 0.29$.

24. Dit vraagstuk is analoog aan 22 dus voor verder commentaar zie daar.
We gebruiken hier 2e methode: $\hat{p}_1 = 22/30$; $\hat{p}_2 = 16/28$; $\hat{p} = 38/58$

$u = \dfrac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(1/n_1 + 1/n_2)}} = 1.30$ met tweezijdige overschrijdingskans $= 0.19$ dus geen significant verschil.

25. Dus $\frac{1}{2}n \pm 1.96 \sqrt{n/4} = 30$ oftewel $n^2 - 123.84n + 3600 = 0$.
Dit geeft $46 < n < 78$.

26. Pas op, niet normaal aanpassen maar Poisson, daar $np = 4 < 5$ en $p = 0.02 < 0.1$. Dus $\mu = 4$ en $P(x \geq 9) = 1 - P(x \leq 8) = 1 - 0.9786 = 0.0214$ (zie tabel Poisson). Advies: vermoedelijk zijn de kousen van dit merk minder sterk. Men kan eventueel nog wachten op meer klachten zodat de significantie duidelijker wordt.
2e opl.: uit tabel met $m = 9$ vinden we: $5.10 < \mu = 200p$ ($\alpha = 0.05$ éénz.)
oftewel $2.5\% < p$. Hierin ligt $p = 2\%$ juist niet.

27. Dus $2 \times 1.96 \sqrt{pq/n} \leq 0.1$; $p = 0.1$; $q = 0.9$ oftewel
$2 \times 1.96 \times 3 \leq \sqrt{n}$ dus $n > 138$.

28. Stel visbevolking = N. Fractie gemerkte vissen is $p = 50/N$.
Schatting hiervoor is $\hat{p} = 0.09$. Daar $n\hat{p} > 5$ maar < 50 wordt het betrouwbaarheidsinterval:

$$\frac{\hat{p} + u^2(\tfrac{1}{2}\alpha)/2n \pm u(\tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n + u^2(\tfrac{1}{2}\alpha)/4n^2}}{1 + u^2(\tfrac{1}{2}\alpha)/n}$$

Dit geeft: $0.041 < p < 0.175$ oftewel $285 < N < 1220$.

Opm.: daar $\hat{p} < 0.10$ en $n\hat{p} < 20$ kan men ook de tabellen gebruiken voor betrouwbaarheidsintervallen voor p of μ. Deze geven beide ongeveer eveneens: $0.045 < p < 0.17$.

29. π in 2 decimalen nauwkeurig d.w.z. $|\text{fout}| < 0.005$.
Zij $\underline{k}$ het aantal rake schoten, dan is $\underline{\hat{p}} = \underline{k}/n$ een schatter voor $p = \pi/4 = 0.785$.
Gevraagd n zodat $P(|\underline{\hat{p}} - p| < 0.00125) \geq 0.95$. Nu is var $\underline{\hat{p}} = pq/n = 0.1685/n$ en $\sigma(\hat{p}) = 0.41/\sqrt{n}$.

$$P\left(\frac{|\underline{\hat{p}} - p|}{0.41/\sqrt{n}} < \frac{0.00125}{0.41/\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \text{oftewel} \quad \frac{0.00125\sqrt{n}}{0.41} \geq 1.96.$$

Dit geeft $n \geq 413295$; ruwe schatter voor n zie compendium pag. 17:
$$n = p'q'u_\alpha^2/(\Delta p)^2$$

30. Zij $\underline{x}$ = aantal bezoekers per voorstelling; stel n begunstigers.
Dan is var $\underline{x} = npq = 5n/36$ en $\mu(x) = np = 5n/6$.

$$P(\underline{x} > 900) = P\left(\frac{\underline{x} - \mu}{\sigma} > \frac{900 - 5n/6}{\sqrt{5n}/6}\right) = 0.01$$

dus

$$\frac{5400 - 5n}{\sqrt{5n}} \geq 2.326 \quad ; \quad n^2 - 2161n + 1166400 \geq 0$$

oftewel $n \leq 1047$.

31. a) m.b.v. tabel 5.3.; $a_1(10,6) = 1 - a_2(10,4) = 0.30$
$a_2(10,6) = 1 - a_1(10,4) = 0.85$ dus $0.30 < p < 0.85$

b) $n\hat{p} > 50$: $0.6 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{100}}$ dus $0.50 < p < 0.70$

c) analoog: $0.6 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{1000}}$ dus $0.57 < p < 0.63$

De intervallen worden steeds smaller omdat aantal waarnemingen toeneemt.

IX De Poissonverdeling - Oplossingen

1. $P(\underline{x}=x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ met $\lambda = \frac{1}{2}$. De gevraagde kans is: $P(\underline{x} \geq 1) =$ $= 1 - P(\underline{x}=0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.39$ (zie tabel Poissonverdeling).
   2e oplossing: de kansverdeling van de tijd nodig voor de eerste gebeurtenis, volgt een exponentiële verdeling: $\lambda e^{-\lambda t}$ met $\lambda = 3$.
   Dus de gevraagde kans is: $P(\underline{t} \leq 1/6) = 3\int_0^{1/6} e^{-3t}dt = -e^{-3t}\Big|_0^{1/6} =$ $= 1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

2. Binomiaal: $P(\underline{x}=0) = \binom{200}{0}(0.02)^0(0.98)^{200} = 0.017$.
   Poisson : $\lambda = 4$; $P(\underline{x}=0) = e^{-4} = 0.018$.

3. We nemen aan dat het aantal auto's $\underline{n}$ dat per dag het benzinestation passeert, een Poissonverdeling volgt: $P(\underline{n}=n) = e^{-15}15^n/n!$
   De kans dat een auto tankt $p = 1/5$. We voelen nu aan dat de kans dat er $\underline{x}$ auto's tanken juist is: $P(\underline{x}=x) = e^{-3}3^x/x!$ d.w.z. een Poissonverdeling met $\lambda = \mu p = 15/5 = 3$. We leiden dit als volgt af:
   $P(\underline{x}=x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(x|n)P(n) = \sum\binom{n}{x}(1/5)^x(4/5)^{n-x}e^{-15}15^n/n!$;
   Stel $n - x = y$.
   $P = e^{-15}(1/5)^x 15^x/x! \cdot \sum_{y=0}^{\infty} 15^y(4/5)^y/y! = e^{-3}3^x/x!$ nl.
   $\sum_{y=0}^{\infty} a^y/y! = e^a (a=12)$.

   Dit is een zgn. "samengestelde"verdeling, nl. een binomiale verdeling waarbij de parameter $\underline{n}$ een Poissonstochastiek is.

4. We nemen aan dat de verdeling van het aantal eerstejaars weer Poisson is. Dus $\mu = 300$; $\sigma = \sqrt{\mu} = 17.3$; er zijn 3% = 9 minder studenten aangekomen. Nu is $9 < \sigma$ dus zeker geen duidelijke afname!

5. Poissonbenadering met $\mu = 1$; $P(\underline{x} \geq 3) = 1 - P(\underline{x} \leq 2) = 0.08$ (Tabel).

6. a) $\mu = np = 2$; $P(\underline{x} \leq c)$ voor $c = 1,2,3$ resp. 0.41; 0.68; 0.86(Tabel).
   b) normale benadering met $\mu = np = 20$ en $\sigma = \sqrt{\mu} = 4.47$.
   Met continuïteitscorrectie:
   $P(\underline{x} \leq 10) = P[\underline{u} \leq (10.5-20)/4.47] = 0.0170$; voor $c = 20$:
   $P(\underline{x} \leq 20) = 0.5438$ en $P(\underline{x} \leq 30) = 0.9906$.

7. 500/uur d.w.z. per $\frac{1}{2}$ min. $\lambda = 500/120 = 4.17$.
   $P(\underline{x}=0) = e^{-\lambda} = e^{-4.17} = 0.015$.

8. $P(\underline{x} > 1) = \int_1^\infty e^{-x}dx = 1/e = 0.368$; $P(\text{beide} > 1) = e^{-2} = 0.135$.
   $P(\text{minstens één} > 1) = 1 - P(\text{beide} < 1) = 1 - (1-1/e)^2 = 0.60$.

9. $P(\underline{n}=n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ Oplossing volkomen analoog aan vraagstuk 3.
   $P(\underline{x}=x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(x|n)P(n) = \sum \binom{n}{x}p^x q^{n-x} e^{-\lambda}\lambda^n/n! = e^{-\mu}\mu^x/x!$
   met $\mu = \lambda p$.

10. a) $\mu = 5$. We zoeken die x zodat $P(\underline{x} > x) < 0.05$.
    We zien in tabel: $P(\underline{x} \leq 9) = 0.9682$ oftewel $P(\underline{x} > 9) = 0.0318 < 5\%$.
    b) We kunnen deze tabel nu niet gebruiken, maar passen de normale benadering toe met $\mu = 20$ en $\sigma = \sqrt{\mu} = 4.47$;
    $u = (x+\frac{1}{2}-20)/4.47 = 1.65$ oftewel $x = 27$.
    Hij moet dus 9 resp. 27 toestellen inslaan.

11. Zij $F(t) = P(\underline{t} \leq t)$ = kans dat tijd nodig voor r^e succes $\leq t$.
    Dan is $1 - F(t)$ = kans dat tijd nodig voor r^e succes $> t$
    oftewel het aantal successen in tijd 0 - t is minder dan r, dus

$$1 - F(t) = \sum_{x=0}^{r-1} e^{-\mu t}(\mu t)^x/x!;$$ beide zijden differentiëren geeft:

$$-f(t) = \sum[\mu x(\mu t)^{x-1}e^{-\mu t} - \mu(\mu t)^x e^{-\mu t}]/x! \text{ oftewel}$$

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}\sum_{x=0}^{r-1}(\mu t)^x/x! - \sum_{1}^{r-1}(\mu t)^{x-1}/(x-1)! = \mu e^{-\mu t}(\mu t)^{r-1}/(r-1)!$$

Dit is de Gammaverdeling met parameters r en μ.
Voor $r = 1$ krijgen we $\mu e^{-\mu t}$ juist de exponentiële verdeling.
Hiermee hangt direct samen: de som van r onafhankelijk exponentiëel-verdeelde grootheden met dezelfde λ, volgt een Gammaverdeling met parameters r en λ. (zie ook X 13b)

12. a) De tijd verstreken tot de eerste aanvraag volgt een exponentiële verdeling: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ met $\lambda = 1.5$. Dus
$P(\underline{t} > 1/3) = 1.5 \int_{1/3}^{\infty} e^{-1.5\,t}dt = e^{-\frac{1}{2}} = 0.606.$
Men kan dit ook oplossen met een Poissonverdeling met $\lambda = \frac{1}{2}$ (per 3 uur). Dus $P(\underline{x}=0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

b) P(beide thuis) = P(geen aanvraag) = $e^{-1.5} = 0.2231.$ ~ 22%.

c) P(beide uit) = P(2 of meer aanvraag) = 0.4422(zie Poissontabel) ~ 44%.

d) Gevraagde kans $P = \frac{1}{2}P(\underline{x}=1) + P(\underline{x}=0) = \frac{1}{2}(1.5e^{-1.5}) + e^{-1.5} =$
$= 0.39$ ~ 39%.

13. a) $\hat{\mu}_1 = 315$; $\hat{\mu}_2 = 252$; $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\hat{\mu}_1} = 17.75$; $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\hat{\mu}_2} = 15.87$

$|u| = \dfrac{|315 - 252|}{\sqrt{252 + 315}} = 2.64$; $P(|\underline{u}| > 2.64) = 0.008$ d.w.z. er is vermoedelijk een verschil.

b) $315 \pm 1.96\sqrt{315}$ oftewel $280 < \mu_1 < 350$
$252 \pm 1.96\sqrt{252}$ oftewel $221 < \mu_2 < 283$ en

$315 - 252 - 1.96\sqrt{252+315} < \mu_1 - \mu_2 < 315 - 252 + 1.96\sqrt{252+315}$
oftewel $16 < \mu_1 - \mu_2 < 110$. Het interval bevat de 0 niet, dus vermoedelijk is $\mu_1 > \mu_2$.

c) Nu wordt $|u| = \dfrac{|150 - 369/3|}{\sqrt{150 + 369/9}} = 1.95$; $P(|\underline{u}| > 1.95) = 0.051$
d.w.z. nog geen duidelijk verschil.

Analoog aan b:

$150 \pm 1.96\sqrt{150}$ geeft: $126 < \mu_1 < 174$

$123 \pm 1.96\sqrt{41}$ geeft: $110 < \mu_2 < 136$

$(150-123) \pm 1.96\sqrt{150+41}$ wordt $0 \leq \mu_1 - \mu_2 < 54$

Het interval bevat nog juist de 0, dus geen duidelijk verschil.

Opm.: een betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_1 - \mu_2$ verdient de voorkeur boven afzonderlijke intervallen, daar men hierbij de betrouwbaarheid kan opgeven.

14. De verdeling van de levertijd is: $p(t) = \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{r-1}/\Gamma(r)$; $\Gamma(r) = (r-1)!$

De verdeling van het aantal klanten in periode t is:

$p(x|t) = e^{-\mu t}(\mu t)^x/x!$

De kansverdeling van het aantal klanten tijdens de volgende levertijd is dus:

$$p(x) = \int_0^\infty p(x|t)p(t)dt = \frac{\mu^x\lambda^r}{x!\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}t^{r+x-1}dt =$$

$$= \frac{\mu^x\lambda^r}{x!(r-1)!} \cdot \frac{\Gamma(r+x)}{(\lambda+\mu)^{r+x}} = \binom{r+x-1}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^x \text{, een}$$

<u>negatiefbinomiale</u> verdeling.

Dit is weer een samengestelde verdeling, nl. een Poissonverdeling waarin de parameter $\underline{\mu}$ een Gammaverdeling bezit.

15. a) $\mu = 60$; $\sigma = \sqrt{\mu} = 7.75$; $u(\alpha)$ éénzijdig $= 2.326$.

Dus $x_r = 60 + 2.326 \times 7.75 = 78$.

b) $P[\underline{u} > (78-x)/\sqrt{x}\ ] = 0.60$; oftewel $(78-x)/\sqrt{x} = -0.25$ dus $x = 80$. (Exacter is: $\frac{78-x}{\sqrt{x}} = -0.25$, maar geeft hetzelfde antwoord.)

16. $p = 0.001$; $np = \mu = 2$. Poissontabel 6.2.

$P(\underline{x} > 3) = 1 - P(\underline{x} \leq 3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$.

17. a) 5 min. als tijdseenheid geeft $\mu = 1$.

$P(\underline{x} > 2) = 1 - P(\underline{x} \leq 2) = 1 - 0.9197 = 0.0803$;

b) nu per 15 min. is $\mu = 3$.

$P(\underline{x} > 5) = 1 - P(\underline{x} \leq 5) = 1 - 0.9161 = 0.0839$.

18. $\hat{\mu} = 10$; $\hat{\sigma} = \sqrt{10} = 3.16$. Daar $\hat{\mu} > 5$ maar < 50 gebruiken we:

$\hat{\mu} + \frac{1}{2}u^2(\alpha) + u(\alpha)\sqrt{\hat{\mu} + \frac{1}{4}u^2(\alpha)}$ (zie Compendium p. 17)

met $u(\alpha) = 1.645$ ($\alpha = 0.05$ éénzijdig).

Dit geeft: $\mu < 16.7$; Het kan ook met tabel 6.3.

Deze geeft $\mu < 16.3$. Daar 15 erbinnen valt kan deze afwijking nog van toevallige aard geacht worden. Neemt men $\hat{\mu} + 1.645\sqrt{\hat{\mu}}$, dan geeft dit $\mu < 15.2$.

19. Dus $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ en $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$.
In X.2 zien we dat $H(y) = 1 - [1 - F(y)]^n = 1 - [e^{-y/\mu}]^n$
dus $H(y) = 1 - e^{-ny/\mu}$ en dus $h(y) = \frac{n}{\mu} e^{-ny/\mu} = \lambda e^{-\lambda y}$.
We weten $E\underline{y} = 1/\lambda$ dus hier μ/n.

20.

a) $$= \frac{P(a \leq \underline{x} \leq x)}{P(\underline{x} \geq a)} = \frac{\lambda \int_a^x e^{-\lambda t}\, dt}{\lambda \int_a^\infty e^{-\lambda t}\, dt} = 1 - e^{-\lambda(x-a)}.$$

b) dus $F(x \mid a) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}$ en $f(x \mid a) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$.

$$E(\underline{x} \mid \underline{x} \geq a) = \lambda \int_a^\infty x e^{-\lambda(x-a)} dx = a + 1/\lambda .$$

X Meerdimensionale verdeling - Oplossingen

1. $\underline{y} = g(x) \cong \underline{x}^2$; $\underline{x} = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{\underline{y}}$. De verdeling van $\underline{x}$ is $f(x) = \frac{1}{2a}$ (nl.oppervlakte=1). De verdeling van $\underline{y}$ wordt:

   $h(y) = f[g^{-1}(y)]\,|dx/dy|$ voor elk monotoon stuk; $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$

   dus $h(y) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 2 = \frac{1}{2a\sqrt{y}}$, $0 \leq y \leq a^2$ (contrôle $\int_0^{a^2}\frac{1}{2a\sqrt{y}}\,dy = 1$).

2. a) $H(y) \equiv P(\underline{y} < y) = P(\underline{x}_1 < y, \underline{x}_2 < y, \ldots, \underline{x}_n < y) = P(\underline{x}_1 < y)\ldots P(\underline{x}_n < y)$ wegens onafhankelijkheid der variabelen, $= \{F(y)\}^n$.

   b) $G(z) \equiv P(\underline{z} < z) = 1 - P(\underline{z} > z) = 1 - P(\underline{x}_1 > z, \ldots, \underline{x}_n > z) = 1 - [1-F(z)]^n$.

3. Analoog aan 1); $h(y) = f(x)\,|dx/dy| = f(x)/\frac{dy}{dx} = f(x)/f(x) = 1$, $0 \leq y \leq 1$. d.w.z. $\underline{y}$ is homogeen verdeeld op $(0,1)$.

4. $v = \sqrt{2E/m}$; $\frac{dv}{dE} = 1/\sqrt{2mE}$ dus

   $h(E) = \frac{2aE}{m}\, e^{-2bE/m} . 1/\sqrt{2mE}$ (wegens monotonie van E op $0 < v < \infty$ geen faktor 2).

5. Dus $f(x) = 1$ $\;0 \leq x \leq 1$ en $g(y) = 1$ $\;0 \leq y \leq 1$; $\underline{z} \cong \underline{x} + \underline{y}$

   1e opl. $h(z) = \int_G f(x)\,g(x-z)\,dx = \int_G dx$. Nu is $y = z - x$ dus $0 \leq z-x \leq 1$ oftewel $z-1 \leq x \leq z$ en tevens $0 \leq x \leq 1$. We krijgen zo: $h(z) = \int_0^z dx = z$ voor $0 \leq z \leq 1$.

   $h(z) = \int_{z-1}^{1} dx = 2 - z$ voor $1 \leq z \leq 2$. Dit is een driehoekige verdeling.

   2e opl. $H(z) = P(\underline{z} < z) = P(\underline{x}+\underline{y} < z) = \int_G dx\,dy$ daar $f(x) = g(y) = 1$.

   $0 < z < 1$ geeft: $H(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} dy = \frac{1}{2}z^2$ dus $h(z) = dH(z)/dz = z$.

   $1 < z < 2$ geeft: $H(z) = \int_0^z dy \int_0^{z-y} dx - (z-1)^2 = -\frac{1}{2}z^2 + 2z - 1$

   (zie fig.) oftewel $h(z) = -z + 2$.

Evident is $\mu(z) = \mu(x) + \mu(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ en $\mathrm{var}(z) = \mathrm{var}(x) + \mathrm{var}(y) =$
$= 1/12 + 1/12 = 1/6$.

Dit is natuurlijk ook te berekenen als volgt:

$$\sigma^2 = \int z^2 h(z)dz - \mu^2 = \int_0^1 z^3 dz + \int_1^2 z^2(2-z)dz - 1 = 1/6.$$

$$P(\underline{z} < 1\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 z\,dz + \int_1^{1\frac{1}{2}} (2-z)dz = 7/8 \text{ (klopt met deel opp. driehoek).}$$

6. Zij $\underline{x}$ = afstand tot 0, $\underline{y}$ = afstand tot 0 van de beide punten.
$f_1(x) = 1/a$; $f_2(y) = 1/a$ d.w.z. $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = 1/a^2$.;
$0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$.

Gevraagd $E|\underline{x}-\underline{y}| = \int |x-y|/a^2\,dx\,dy = \frac{2}{a^2}\int_0^a dx \int_0^x (x-y)dy = a/3.$

7. $k\iint x\,e^{-(x+y)}dx\,dy = 1 \qquad k\int_0^\infty x\,e^{-x}dx \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$ dus $k = 1$.

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \int_0^\infty x\,e^{-(x+y)}dy = x\,e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}dy = x\,e^{-x}.$$

$$f_2(y) = \int f(x,y)dx = e^{-y}\int_0^\infty x\,e^{-x}dx = e^{-y}.$$

We zien $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn stochastisch onafhankelijk.

8. Stel tijd na 8 uur van de eerstaankomende $\underline{x}$ min., van de tweede persoon $\underline{y}$ min. Dus $x < y$; $0 \leq x \leq 60$; $0 \leq y \leq 60$ en $f(x,y) = 1/1800$ (opp = 1). Dan is P(niet ontmoeten) =

$$= \frac{1}{1800}\int_0^{50} dx \int_{x+10}^{60} dy = 25/36$$

en dus de kans dat ze elkaar ontmoeten 11/36. Deze kans leest men ook direct af uit een fig.

9. $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$. $\quad f(x,y) = 1$.

Stel $\underline{v} \cong \underline{xy}$, $\underline{w} \cong \underline{x}/\underline{y}$ dus $x = \sqrt{vw}$, $y = \sqrt{v/w}$. Het nieuwe gebied wordt: $v, w \geq 0$; $w \geq v$, $w \leq 1/v$.

De determinant van Jacobi is: $|\delta(x,y)/\delta(v,w)| = \frac{1}{2w}$.

En dus $f(v,w) = \frac{1}{2w}$.

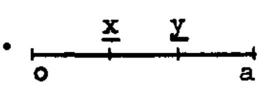
a) $f_2(w) = \frac{1}{2w}\int_0^{1/w} dv = \frac{1}{2w^2}$ voor $w > 1$

$0 \leqslant w \leqslant \infty$

$f_2(w) = \frac{1}{2w}\int_0^{w} dv = \frac{1}{2}$ voor $w < 1$

b) $f_1(v) = \frac{1}{2}\int_v^{1/v} 1/w \, dw = -\log v.$ $0 < v \leqslant 1$

Opm.: controleer steeds of de totale integraal 1 oplevert.

10. 

. Stel $\underline{x}$ is afstand eerste streepje tot o, $\underline{y}$ afstand 2e streepje. Dus $f(x,y) = 2$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $x \leqslant y \leqslant a$. Voor een driehoek geldt: som twee zijden is groter dan de derde zijde, dus hier:

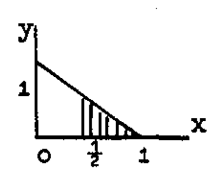
$$\begin{aligned} x &< (y-x) + (a-y) \\ (a-y) &< (y-x) + x \\ (y-x) &< x + (a-y) \end{aligned} \qquad \text{oftewel:} \qquad \begin{aligned} x &< \tfrac{1}{2}a \\ y &> \tfrac{1}{2}a. \\ y &< x + \tfrac{1}{2}a. \end{aligned}$$

In het vierkant op (0,a) geeft dit juist een driehoekje met opp. 1/8 en $f(x,y) = 2$, dus P(driehoek te vormen) = 2/8 = 1/4.

11. Daar $\int_G f(x,y)dx\,dy = 1$ en opp. G = $\frac{1}{2}$ is dus $k = 2$ of ook:

$$\iint k\,dx\,dy = k\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = 1 \text{ dus } k = 2.$$

De gevraagde kansen haalt men direct uit een fig. als:



Ook door berekenen: $f_1(x) = \int f(x,y)dy = 2\int_0^{1-x} dy = 2(1-x)$

$P(\underline{x} > \frac{1}{2}) = 2\int_{1/2}^{1}(1-x)dx = \frac{1}{4}$. Analoog $P(\underline{y} > 1/3) = 2\int_{1/3}^{1}(1-y)dy = 4/9.$

$P(\underline{x} > \frac{1}{2} \text{ en } \underline{y} > 1/3) = 2\int_{1/2}^{2/3} dx \int_{1/3}^{1-x} dy = 1/36 \neq 1/9 \times 4/9$ nl.

$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn niet onafhankelijk.

12. a) Dus $f(x,y,z) = k$. Echter $k \int_0^a dx \int_x^a dy \int_y^a dz = 1$ nl. $0 < x < y < z < a$

oftewel $k = 6/a^3$.

$$f(x,y) = \frac{6}{a^3} \int_y^a dz = 6(a-y)/a^3.$$

b) $$f_1(x) = \frac{6}{a^3} \int_x^a (a-y)dy = (3a^2-6ax+3x^2)/a^3$$

$$f_2(y) = \frac{6}{a^3} \int_0^y (a-y)dx = 6y(a-y)/a^3.$$

c) $\mu(y) = \int_0^a y\, f_2(y)dy = \frac{1}{2}a$; Analoog $\mu(x) = a/4$.

$$E\underline{y}^2 = \int_0^a y^2 f_2(y)dy = 3a^2/10 \quad \text{dus } \sigma^2(y) = 3a^2/10 - (a/2)^2 =$$

$$= a^2/20 = 4a^2/80. \text{ Analoog } \sigma^2(x) = 3a^2/80.$$

$$E(\underline{xy}) = \frac{6}{a^3} \int_0^a x\, dx \int_x^a y(a-y)dy = 3a^2/20.$$

En dus $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \dfrac{3a^2/20 - (a/2)(a/4)}{\sqrt{3a^2/80 \cdot 4a^2/80}} = 1/\sqrt{3}$.

13. Stel $\underline{v} \cong \underline{x} - \underline{y}$ dus $\underline{x} \cong \frac{1}{2}(\underline{v}+\underline{w})$ Daar $x,y \geq 0$ wordt
$\underline{w} \cong \underline{x} + \underline{y}$ $\underline{y} \cong \frac{1}{2}(\underline{w}-\underline{v})$ $w > v$ en $w > -v$.

Wegens onafhankelijkheid is $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ en dus
$h(v,w) = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda w}$ (det.van Jacobi$=\frac{1}{2}$)

a) $f_1(v) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_v^\infty e^{-\lambda w}dw = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda v}$ als $v > 0$
dus $f_1(v) = \frac{1}{2}\lambda\, e^{-\lambda|v|}, -\infty < v < \infty$

$f_1(v) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_{-v}^\infty e^{-\lambda w}dw = \frac{1}{2}\lambda\, e^{\lambda v}$ als $v < 0$

b) $f_2(w) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_{-w}^{w} e^{-\lambda w}dv = \lambda^2 w\, e^{-\lambda w}$; $0 \leq w \leq \infty$

Opm.: ook natuurlijk op te lossen met de methodes gebruikt bij 5.

$$F(w) = P(\underline{w} < w) = \lambda^2 \int_0^w e^{-\lambda x} dx \int_0^{w-x} e^{-\lambda y} dy = \lambda(1 - we^{-\lambda w} - e^{-\lambda w})$$

dus $f(w) = dF/dw = \lambda^2 w e^{-\lambda w}$.

14. a) Stel $y = \underline{u}_1^2$; $\underline{x} = \underline{u}_1$ dan weten we $h(y) = f[g^{-1}(y)]\,|dx/dy|$
indien $y = g(x)$ monotoon; $x = \pm\sqrt{y}$; $dx/dy = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{y}}$ en

$$h(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 = e^{-\frac{1}{2}y} y^{-\frac{1}{2}}/\sqrt{2\pi} \quad (\chi^2\text{-verdeling met } \nu = 1)$$

b) $f(u_1, u_2) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}$ wegens onafhankelijkheid van $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$

Stel $\underline{y} \cong \underline{u}_1^2 + \underline{u}_2^2$

$$F(y) = P(\underline{y} < y) = \frac{1}{2\pi} \int_G e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)} du_1 du_2 \text{ met } G: u_1^2 + u_2^2 < y.$$

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{y}} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = 1 - e^{-\frac{1}{2}y} \text{ en dus } f(y) = dF/dy = \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}.$$

(χ^2-verdeling met $\nu = 2$).

15. Dus $f_x(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$; $x = \ell n y$, $dx/dy = 1/y$.

$$f_y(y) = f_x(\ell n y)\,dx/dy = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-(\ell n y - \mu)^2/2\sigma^2} \quad ; \; 0 < y.$$

y heeft een lognormale verdeling.

16. a) De verdelingsdichtheid van α is: $g(\alpha) = 1/\pi$
$\mathrm{tg}\,\alpha = x$ (neem afstand bron-scherm gelijk 1); $\alpha = \arctan x$
$d\alpha = dx/(1+x^2)$
En dus $f(x) = g(\alpha)\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$
dus juist de cauchy-verdeling (zie V.28)

b) μ en σ^2 bestaan niet (zie V.28).

17. Dus $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$.

Wegens de onafhankelijkheid geldt: $f(x,y) = f_x(x)f_y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

Overgang op poolcoördinaten geeft:

$f(x,y)\, dx\, dy = f(r,\varphi) r\, dr\, d\varphi$

en dus $f_r(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, d\varphi = re^{-\frac{1}{2}r^2}$ (Rayleigh-verdeling).

Opm.: We weten uit vraagstuk X 146 dat r^2 een χ_2^2-verdeling bezit;

$$r = \sqrt{r^2} \text{ dus } f_r(r) = f(r^2) \frac{dr^2}{dr} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}r^2} 2r = re^{-\frac{1}{2}r^2}.$$

18. $f(x)dx = h(\omega)d\omega$ met $h(\omega) = 1/\pi$; $\omega = \arcsin x/A$
$d\omega = \frac{1}{A} (1 - x^2/A^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ dus $f(x) = \frac{1}{\pi A} (1 - x^2/A^2)^{-\frac{1}{2}}$ $|x| \leq A$

19. Zij $\underline{x}$ rechthoekig verdeeld op $[0,1]$. Stel $\underline{y} = -\mu\ {}^{e}\log \underline{x}$
$h(y)dy = f(x)dx$ dus $h(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right|$ daar $f(x) = 1$.

Nu is $x = e^{-y/\mu}$ dus $\frac{dx}{dy} = -1/\mu\ e^{-y/\mu}$; $h(y) = \frac{1}{\mu} e^{-y/\mu}$.

${}^{e}\log x = {}^{10}\log x/{}^{10}\log e =$ (comp. p. 79) $2.303\ {}^{10}\log x$
dus $\underline{y} = -2.303\mu\ {}^{10}\log \underline{x}$ is exponentieel verdeeld met gemiddelde μ.
x haalt men uit tabel 8.4. Met tabel 8.7. krijgt men eenvoudig aselecte trekkingen uit een exp. verdeling met gemiddelde μ door deze getallen met μ te <u>vermenigvuldigen</u>.

De χ^2-, F- en t-verdeling - Oplossingen

1. Zij $\underline{y} \cong \underline{x} + \underline{e}$ waarin $\underline{y}$ de afgeronde variabele en $\underline{e}$ de afrondingsfout is. $\underline{e}$ is rechthoekig verdeeld op $(-\frac{1}{2}a, +\frac{1}{2}a)$ dus met var $\underline{e} = a^2/12$ (zie V.12) var $\underline{y}$ = var $\underline{x}$ + var $\underline{e} = \sigma^2 + a^2/12$ (onderstel $\text{cov}(\underline{x},\underline{e}) = 0$) en dit is $< 1.02\ \sigma^2$ als $a < \sigma/2$. De variantie neemt dus hoogstens met 2% toe, de σ hoogstens met 1%, hetgeen gezien de numerieke vereenvoudiging gerechtvaardigd is.

2. a) $\sum_1^n (\underline{x}_i - \mu)^2/\sigma^2 \cong \underline{\chi}^2_n$ indien de $\underline{x}_i$ onafhankelijk en normaal verdeeld zijn.

$\sum_1^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2/\sigma^2$ is bij benadering $\underline{\chi}^2_\nu$-verdeeld met $\nu = n - 1$

oftewel $\nu \underline{s}^2/\sigma^2 \cong \underline{\chi}^2_\nu$ en $\underline{s} \cong \sigma\sqrt{\underline{\chi}^2_\nu/\nu}$ waaruit het interval volgt.

b) $\dfrac{\bar{\underline{x}}-\mu}{\underline{s}/\sqrt{n}} \cong \dfrac{\bar{\underline{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} : \dfrac{\underline{s}}{\sigma} \cong \dfrac{\underline{u}}{\sqrt{\underline{\chi}^2_\nu/\nu}} \cong \underline{t}_\nu$ oftewel $\bar{\underline{x}} \cong \mu + \underline{t}_\nu \underline{s}/\sqrt{n}$ waaruit het interval volgt.

c) $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{\underline{s}_2^2}{\underline{s}_1^2} \cong \dfrac{\underline{s}_2^2}{\sigma_2^2} : \dfrac{\underline{s}_1^2}{\sigma_1^2} \cong \dfrac{\underline{\chi}^2_{\nu_2}/\nu_2}{\underline{\chi}^2_{\nu_1}/\nu_1} \cong \underline{F}^{\nu_2}_{\nu_1}$

$\dfrac{\underline{s}_1^2}{\underline{s}_2^2} F^{\nu_2}_{\nu_1}(1-\tfrac{1}{2}\alpha) < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \dfrac{\underline{s}_1^2}{\underline{s}_2^2} F^{\nu_2}_{\nu_1}(\tfrac{1}{2}\alpha)$ En $F^{\nu_2}_{\nu_1}(1-\tfrac{1}{2}\alpha) = 1/F^{\nu_1}_{\nu_2}(\tfrac{1}{2}\alpha)$

daar direct uit de definitie volgt dat $\underline{F}^{\nu_2}_{\nu_1} \cong 1/\underline{F}^{\nu_1}_{\nu_2}$.

Opm.: denk eraan dat de F-tabel éénzijdige betrouwbaarheden geeft van 95; 97,5; 99 en 99,5%.

3. Ter vereenvoudiging verminderen we elke waarneming met 5520 daar dit de variantie niet beïnvloedt. Het rekenschema wordt:

							KS_i	ν_i
1)	0	9	10	7			61	3
2)	8	8	8	5	8	6	8.8	5
3)	2	2	1	1	0		2.8	4
4)	1	3	0				4.7	2
							77.3	14

$s^2 = \Sigma\nu_i s_i^2/\Sigma\nu_i = \Sigma KS_i/\Sigma\nu_i = 77.3/14 = 5.5$ en $s = 2.36$.

Dit is een maat voor de onrondheid(+meetfout) der kogels.

4. a) $R = 0.94$, $\sigma_w = A_n R$, A_n is getabelleerd; $\sigma_w = 0.325 \times 0.94 = 0.30$

b) afrondingsinterval $a < \frac{1}{2}s$ dus $a = 0.1$. De waarnemingen worden:

y_i: 0 7 2 4 2 9 0 4 5 3

met $x_i = 0.1\,y_i + 12$

c) uit afgeronde: $\bar{x} = 0.1\,\bar{y} + 12 = 12.36$, $s^2(x) = s^2(y)/100 = 0.083$

$s = 0.29$

uit oorspronkelijke: $\bar{x} = 12.37$ en $s = 0.29$

d) voor μ: $\bar{x} \pm t_9(\frac{1}{2}\alpha)s/\sqrt{n} = 12.37 \pm 2.26 \times 0.29/\sqrt{10}$

oftewel $12.16 < \mu < 12.58$

voor σ: m.b.v. tabel $a_1 s < \sigma < a_2 s$ wordt: $0.69 \times 0.29 < \sigma < 1.83 \times 0.29$

dus $0.20 < \sigma < 0.53$

e) $\bar{x} \pm u(\frac{1}{2}\alpha)\sigma/\sqrt{n} = 12.37 \pm 1.96 \times 0.30/\sqrt{10}$

$12.19 < \mu < 12.55$ dus iets smaller.

5. a) I : $R = 0.071$, $a < R/2\sqrt{n} = 0.071/2\sqrt{7} = 0.013$ dus $a = 0.01$

reeks y_i: 1 , 5 , 0 , 2 , 7 , 6 , 6 . $x_i = 0.01y_i + 5.30$

II: $R = 0.061$, $a < 0.061/2\sqrt{7} = 0.012$ dus $a = 0.01$

reeks z_i: 3 , 4 , 7 , 1 , 4 , 3 , 5 . $x_i = 0.01z_i + 5.35$

b) $\bar{x} = 0.01\,\bar{y} + 5.30 = 5.338$ $a(\bar{x}) < R/2n = 0.005$

$\overline{x_2} = 0.01\,\bar{z} + 5.35 = 5.388$

$s_1^2 = 0.00078$ $s_1 = 0.028$ $s_2^2 = 0.000348$ $s_2 = 0.019$

c) μ_1 : $5.338 \pm 2.45 \times 0.028/\sqrt{7}$ $5.312 < \mu_1 < 5.364$

μ_2 : $5.388 \pm 2.45 \times 0.019/\sqrt{7}$ geeft: $5.370 < \mu_2 < 5.406$

d) $F_6^6 = s_1^2/s_2^2 = 7.817/3.483 = 2.2$ niet significant bij $\alpha = 0.1$ (tweezijdig). Samenvoegen is geoorloofd en geeft:

$s^2 = (s_1^2 + s_2^2)/2 = 0.00056$; $s = 0.024$.

e) We zien onder c dat de beide intervallen elkaar niet overlappen. Het interval onder f bevat de nul niet. Of directer:

$$t_{12} = \frac{5.388 - 5.338}{0.024\sqrt{2/7}} = 4 \text{ significant bij } \alpha = 0.01$$

f) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{12}\, s\sqrt{2/7}$ geeft $-0.078 < \mu_1 - \mu_2 < -0.022$ $\alpha = 0.05$

$\frac{s_1}{s_2} \times 1/\sqrt{F_6^6} < \sigma_1/\sigma_2 < \frac{s_1}{s_2}\sqrt{F_6^6}$ geeft $0.7 < \sigma_1/\sigma_2 < 3.0$ $\alpha = 0.10$

g) Toets van Wilcoxon. Noem de waarnemingen der reeksen resp. x en y en rangschik naar grootte. Zo ontstaat xxxxxyxxyyyyyy en $W = 94 > 2 \times 7^2 - 22$ (zie tabel) oftewel de nulhypothese wordt verworpen bij $\alpha = 0.05$.

6. a) De waarnemingen $y = x_2 - x_1$ worden:

0.7 0.1 1.2 -0.6 0.3 0.5 0.3 0.3 -0.3 0.7

met $\bar{y} = 0.32$ en $s^2(y) = 0.264$ $s = 0.51$

Dus $t_9 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s/\sqrt{10}} = \frac{0.32}{0.51/3.162} = 1.97 > 1.83$ (éénzijdig, nl. de alternatieve hypothese luidt $\mu_2 > \mu_1$), d.w.z. er is een significant verschil.

b) Het betrouwbaarheidsinterval onder a berust op een aanname normale verdeling. Zonder deze aanname kunnen we de tekentoets gebruiken. Deze levert 8 plus- en 2 mintekens. In de tabel vinden we dat voor n = 10 de kans op 8 of meer plustekens > 0.05, dus hier géén significant verschil in gemiddelden.

7. a) $\underline{y} \cong 2\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3$ ($\underline{x}_1$ aantal ogen van de zwarte, $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ van beide witte stenen)

$\mu(y) = 2\mu(x_1) + \mu(x_2) + \mu(x_3) = 4\mu(x) = 14$ daar $\mu(x) = 3\frac{1}{2}$;

var $\underline{x} = 35/12$. var $\underline{y} = 4$ var $\underline{x}_1$ + var $\underline{x}_2$ + var $\underline{x}_3 = 6$ var $\underline{x} = 17\frac{1}{2}$

$s = 4.18$.

b) Neem ongeveer $\sqrt{50} \approx 7$ klassen.

	turfstaat	f_i	u_i	f_iu_i	$f_iu_i^2$
4.5 - 7.5	~~IIII~~	5	-3	-15	45
7.5 - 10.5	IIII	4	-2	-8	16
10.5 - 13.5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	-1	-10	10
13.5 - 16.5	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15	0	0	0
16.5 - 19.5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	1	10	10
19.5 - 22.5	IIII	4	2	8	16
22.5 - 25.5	II	2	3	6	18

$n = 50$; $\sum f_iu_i = -9$; $\sum f_iu_i^2 = 115$

$\bar{y} = 3\ \Sigma f_iu_i/n + 15 = 14.46.$

$$s^2(y) = 9 \cdot \frac{\Sigma f_iu_i^2 - (\Sigma f_iu_i)^2/n}{n-1} = 9 \cdot \frac{115 - 81/50}{49} = 20.83 \qquad s = 4.56$$

d) De spreidingsbreedten per rij zijn: 12, 10, 16, 17, 15 dus $\bar{R} = 14.$ en $s_w = 0.325 \times 14 = 4.55$ hetgeen dus aardig overeenstemt.

8. a) I : $R = 0.046$; $a < R/2\sqrt{n} = 0.046/2\sqrt{4} = 0.011$ dus $a = 0.01$

y_i: 1, 5, 0, 2 $\qquad x_i = 0.01\,y_i + 5.30$

II: z_i: 3, 4, 7, 11, 4, 3, 5 $\qquad x_i = 0.01z_i + 5.30$

b) $\bar{x}_1 = 0.01\bar{y} + 5.30 = 5.320$ $\qquad a(\bar{x}) = 0.001$

$\bar{x}_2 = 0.01\bar{z} + 5.30 = 5.353$

$s_1^2 = 0.00047$ $\qquad s^2 = \dfrac{3s_1^2 + 6s_2^2}{9} = 0.0007$ $\qquad s = 0.026$

$s_2^2 = 0.00082$ $\qquad \nu = 9$

$$t_9 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s\sqrt{1/4 + 1/7}} = 2.0$$ niet significant bij $\alpha = 0.05$, wel bij $\alpha = 0.10$.

c) Ondersteld is dat beide reeksen uit normale verdelingen komen met dezelfde σ.

d) $F_3^6 = 82/47 = 1.7$ niet significant.

$s_1^2/s_2^2 \cdot 1/F_6^3 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < s_1^2/s_2^2\ F_3^6$ geeft: $0.12 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 5.12$ en bevat dus de één.

9. $\chi^2_5 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 1/10\ (5^2 + 3^2 + 6^2 + 1^2 + 4^2 + 7^2) = 13.6 > 11.1$

(α=0.05) (o_i= observed aantal, e_i= expected aantal in i^eklasse)

Men kan de uitspraak doen dat de steen onzuiver is met een betrouwbaarheid groter dan 95% maar kleiner dan 99%.

10. o_i: 208 81

e_i: 216.75 72.25

$\chi^2_1 = \frac{(8.75)^2}{216.75} + \frac{(8.75)^2}{72.25} = 1.41 < 3.84$

Dus zeer aannemelijk.

11. Het schema wordt:

8(9.5)	27(26.4)	20(19.1)	55
5(3.5)	9(9.6)	6(6.9)	20
13	36	26	75

De tussen haakjes geplaatste waarden zijn de e_i. Zo is $9.5 = \frac{13 \times 55}{75}$ etc.

We krijgen:

$$\chi^2_2 = \frac{(1.5)^2}{9.5} + \frac{(0.6)^2}{26.4} + \frac{(0.9)^2}{19.1} + \frac{(1.5)^2}{3.5} + \frac{(0.6)^2}{9.6} + \frac{(0.9)^2}{6.9} = 1.09.$$

Verre van significant, dus er is geen verschil aan te wijzen.

12. Totaal in n = 900, 54 fouten dat is $\hat{p}$ = 0.06 en dus $\hat{q}$ = 0.94.

o_i:	4	15	8	7	9	11
e_i:	6	9	6	12	9	12

$$\chi^2_5 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{n_i p_i q_i} = \frac{1}{0.94} \left(\frac{4}{6} + \frac{36}{9} + \frac{4}{6} + \frac{25}{12} + \frac{1}{12}\right) = 8.0 < 11.1$$

dus geen significant verschil.

13. a) e_i = 14 dus $\chi^2_2 = \frac{1}{14}\{(10-14)^2 + (24-14)^2 + (8-14)^2\} = 10.9 > 9.21$ (α=0.01). Er is dus alle reden te onderstellen dat er verschil is.

b) Het gemiddeld aantal storingen per week is nu $\frac{10+24+8}{4+5+3} = 3.5$ en de e_i worden 14, 17.5 en 10.5.

$$\chi_2^2 = \frac{(10-14)^2}{14} + \frac{(24-17.5)^2}{17.5} + \frac{(8-10.5)^2}{10.5} = 4.1 < 4.6 \qquad (\alpha=0.10)$$

d.w.z. geen significant verschil.

14. De aantallen zijn nu zo klein dat men de χ^2-toets niet mag toepassen. (globaal genomen moeten de $e_i \geq 5$ zijn)
Is er geen verschil dan is de kans dat de 5 storingen alle bij 1 ploeg optreden: $p = 2(\frac{1}{2})^5 = 0.06$ d.w.z. met $\alpha = 0.05$ nog net niet significant. Er is dus mogelijk een verschil, maar niet overtuigend. De χ^2-toets zou geven:

$$\chi_1^2 = \frac{(2.5)^2+(2.5)^2}{2.5} = 5 > 3.84$$ dus wèl significant, het verschil wordt dus overschat.

15.

x		f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0		0	0	0
1	$\vert\vert\vert$	4	4	4
2	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	8	16	32
3	$\vert\vert\vert\vert$	4	12	36
4	$\vert\vert\vert\vert$	4	16	64
5	$\vert\vert\vert$	3	15	75
6	$\vert\vert$	2	12	72
		25	75	283

b) $\bar{x} = \Sigma f_i x_i/n = 75/25 = 3$

$$s^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2 - (\Sigma f_i x_i)^2/n}{n-1} = \frac{283-225}{24} = 2.42$$

c) $3 - 1.96\sqrt{3/25} < \mu < 3 + 1.96\sqrt{3/25}$
nl.var $\underline{x} = \mu$
oftewel $2.32 < \mu < 3.68$
Ook te vinden uit de tabel met m = 75 en verder $a_1/25 < \mu < a_2/25$.

d) In de Poissontabel met $\mu = 3$ vinden we de percentages

x_i :	0	1	2	3	4	5	$\geq$ 6
percentages:	5	15	22	22	17	10	9
e_i :	$\underbrace{1.3\quad 3.7}_{5}$		5.6	5.6	4.2	$\underbrace{2.5\quad 2.1}_{4.6}$	
o_i :	$\underbrace{0\quad 4}_{4}$		8	4	4	$\underbrace{3\quad 2}_{5}$	

e) Daar voor toepassing van χ^2-toets de e_i niet te klein mogen zijn (≥ 5) voegen we de eerste twee en de laatste twee klassen samen.

$\chi_3^2 = 1/5 + (2.4)^2/5.6 + (1.6)^2/5.6 + (0.2)^2/4.2 + (0.4)^2/4.6 = 1.73.$

Dus de Poissonaanpassing is zeer goed; $\nu = 3$ omdat we uit de waarnemingen de parameter μ geschat hebben en omdat $\Sigma e_i = 25$ moet zijn, dus ν = aantal klassen - 2.

f) P(geen 0) = $(0.95)^{25} \approx 0.28$ dus zeker niet bevreemdend.

16. $\underline{t}_\nu \cong \dfrac{\underline{u}}{\sqrt{\underline{\chi}^2_\nu/\nu}}$. In V.23 zagen we: var $\underline{\chi}^2_\nu = 2\nu$ en $\mu(\chi^2_\nu) = \nu$ dus var $\underline{\chi}^2_\nu/\nu = 2/\nu$ en $\mu(\chi^2/\nu) = 1$ oftewel voor $\nu \to \infty$ gaat $\underline{\chi}^2_\nu/\nu \to 1$ daar de variantie naar nul gaat en dus $\underline{t}_\nu \to \underline{u}$. Daarom vervangt men voor $\nu > 30$, t door u.

17. a) $s^2 = \dfrac{35755 - (840)^2/20}{19} = 25$ $s = 5$ en $\nu = 19$.

We weten: $\underline{s}\sqrt{\nu/\chi^2_\nu(\alpha_r)} < \sigma < \underline{s}\sqrt{\nu/\chi^2_\nu(\alpha_\ell)}$ oftewel $5\sqrt{19/32.9} < \sigma < 5\sqrt{19/8.91}$; $3.8 < \sigma < 7.3$ $\sigma = 8$ blijkt buiten dit interval te liggen.

Of direct uit de tabel (ν=19) $a_1 s < \sigma < a_2 s$ geeft $5 \times 0.76 < \sigma < 5 \times 1.46$.

b) Uit de tabel: $\sigma < a_2 s$; $\sigma < 1.37 \times 5 = 6.8$.

c) $\bar{x} = 840/20 = 42$; $t_{19} = \dfrac{45-42}{5\sqrt{20}} = 2.68 > 2.5$ (α=0.02)

dus $\mu = 45$ is vermoedelijk te groot.

d) $\bar{x} - t_{19} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{19} s/\sqrt{n}$ wordt:
$42 - 2.09 \times 5/\sqrt{20} < \mu < 42 + 2.09 \times 5/\sqrt{20}$; $39.7 < \mu < 44.3$.

e) $\underline{t}_{19} \cong \dfrac{\underline{x}_{21} - \bar{\underline{x}}}{\underline{s}\sqrt{1+1/20}}$ dus interval: $\bar{x} \pm t_{19} s\sqrt{(1+1/20)}$ geeft: $31.3 < \underline{x} < 52.7$.

18. a) We bepalen de range R voor elke rij (aangenomen dat de waarnemingen aselect staan): 0.13 ; 0.10 ; 0.12 ; 0.08 ; 0.11
$\bar{R} = 0.108$ $s = 0.395\,\bar{R} = 0.043$.

b) We nummeren de waarnemingen 1 t/m 30 en wijzen er zes aan d.m.v. verlotingsserie. Stel dat we zo de eerste rij verkregen hebben.

c) Koderen geeft: -5 , 5 , 1 , 8 , -1 , 7 ; $y_i = 100x_i - 530$
$\bar{y} = 2.5$ dus $\bar{x} = 0.025 + 5.30 = 5.325$ (a=0.001)
$s^2(y) = 25.5$ dus $s^2 = 0.00255$ en $s = 0.050$.

d) $\bar{x} \pm t_5 s/\sqrt{n} = 5.325 \pm 2.57 \times 0.050/\sqrt{6}$; $5.273 < \mu < 5.377$.

Opm.: Omdat we het betrouwbaarheidsinterval uit één serie van 6 waarnemingen berekend hebben, is $n = 6$ en $\nu = 5$. Betrekken we alle waarnemingen in de berekening van $\bar{x}$ en s, dan wordt $n = 30$ en $\nu = 29$ en wordt het interval veel smaller.

Met tabel: $\nu = 5$ $\quad a_1 s < \sigma < a_2 s$ $\quad$ wordt:

$0.62 \times 0.05 < \sigma < 2.45 \times 0.05$

$0.03 < \sigma < 0.12.$

19. a) We vinden $s_1^2 = 0.743$ $\quad \nu = 5$ $\quad$ en $\quad s_2^2 = 4.195$ $\quad \nu = 4.$

Opm.: Bereken deze door codering $y = (x-255)10$

$F_5^4 = \dfrac{4.195}{0.743} = 5.65 < 7.3$ ($\alpha = 0.05$ twéézijdig) en we verwerpen de hypothese dus niet.

b) $F_5^4 = 5.65 > 5.19$ ($\alpha = 0.05$ éénzijdig). Ook deze hypothese wordt dus nu verworpen. Op.: Hierbij moet men dus vóórdat de waarnemingen gedaan zijn, de analyste aanwijzen van wie men vermoedt dat ze onnauwkeuriger werkt. Nadat men gezien heeft dat $s_2^2 > s_1^2$, te beslissen is dan onjuist.

20. Totaal geteld 346 in 118 vakjes dus $\mu = 2.9$. De kansen op 0, 1, 2, etc. bacteriën vinden we in tabel 6.1. Deze vermenigvuldigen we met 118 om het aantal vakjes te vinden. Zo krijgen we:

aantal bacteriën per vakje:	0	1	2	3	4	5	6	>6
waargenomen aantal vakjes :	5	19	26	26	21	13	8	0
verwachte aantal vakjes :	6.5	18.8	27.3	26.4	19.1	11.1	5.4	3.4

De laatste 2 klassen voegen we samen daar $e_i < 5$; $\nu = 7 - 2 = 5$

(1 vrijheidsgr. minder voor schatting μ en één minder omdat $\Sigma e_i = 118$)

$$\chi_5^2 = (1.5)^2/6.5 + (0.2)^2/18.8 + (1.3)^2/27.3 + (0.4)^2/26.4 + (1.9)^2/19.1 + (1.9)^2/11.1 + (0.8)^2/8.8$$

$\chi_5^2 = 1$ $\quad$ dus zeker niet significant. De Poisson-aanpassing is zeer goed.

21. a) De varianties der 2 waarnemingsseries berekent men door codering (b.v. voor A: $x' = 100x - 730$, voor B $y' = 1000y - 7200$.)

We vinden $s_1^2 = 0.00794$; $s_2^2 = 0.002699$; voor B echter is de var der individuele waarnemingen 3 keer groter, dus:

$$F_{14}^4 = \frac{0.0081}{0.00794} = 1.02 < 3.89 \text{ (twéézijdig)}$$

b) $\bar{x}_1 = 7.306$ $\bar{x}_2 = 7.312$ $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0.006$

$s^2 = \dfrac{14s_1^2 + 4(3s_2^2)}{18} = 0.00797$; $s = 0.0893$; $t_{18} = 2.10$

Het betrouwbaarheidsinterval wordt:

$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \pm t_{18} s\sqrt{2/15}$ oftewel $-0.062 < \mu_2 - \mu_1 < 0.074$.

22. a) Indien we een plusteken zetten als waarneming II groter is dan waarneming I, geeft dit 10 plus- en 2 mintekens. De kans hierop (<u>tweézijdig</u>!) is < 0.05 (zie tabel 7.1) en vermoedelijk is er dus een systematisch verschil tussen beide titraties.

b) De verschillen worden, vermenigvuldigd met 100:

46 6 6 28 6 77 28 -13 -25 89 10 34

$\bar{x} = 0.243$ $s^2 = 0.1144$ $s = 0.338$

$t_{11} = \dfrac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s/\sqrt{12}} = \dfrac{0.243}{0.338} \cdot \sqrt{12} = 2.49 > \ldots.$ (<u>éénzijdig</u>!)

d.w.z. de tweede titratie geeft gemiddeld hogere waarden.

c) $s_0^2 = \frac{1}{2}s^2 = 0.057$ $s_0 = 0.24$

d) met behulp van b): $0.243 \pm 2.20 \times 0.338/\sqrt{12}$ geeft:

$+0.03 < \mu_2 - \mu_1 < 0.46$ (tweézijdig $P = 95\%$)

of $\mu_2 - \mu_1 > 0.243 + 1.80 \times 0.338/\sqrt{12} = 0.42$ (éénzijdig)

e) De waarnemingen kan men op $a < \frac{1}{2}s_0 = 0.12$ afronden dus af te ronden op tienden.

23. a) Daar beide reeksen eenzelfde σ hebben, voegen we de varianties samen;

I geeft $Ks_1 = 655$; II geeft $Ks_2 = 469$.

Dus $s^2 = \Sigma Ks_i/\Sigma\nu_i = 1124/14 = 80.3$ $s = 9.0$

$\bar{x}_1 = 51.1$ $\bar{x}_2 = 57.1$ $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 6$ $n = 8$

Dus $6 - t_{14}s\sqrt{2/n} < \mu_2 - \mu_1 < 6 + t_{14}s\sqrt{2/n}$ $t_{14} = 2.14$

oftewel $-3.6 < \mu_2 - \mu_1 < 15.6$

b) De verschilreeks wordt:

3 , 14 , 1 , 3 , 9 , -7 , 13 , 12 $\nu = 7$ $\bar{x} = 6$

$s^2 = \dfrac{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}{n-1} = \dfrac{658 - 288}{7} = 52.9$ $s = 7.3$ $t_7 = 2.36$

Dus $6 - t_7 s/\sqrt{n} < \mu_2 - \mu_1 < 6 + t_7 s/\sqrt{n}$
$-0.11 < \mu_2 - \mu_1 < 12.1$, dus smaller dan onder a)

c) s_0^2 is de helft van s^2 onder b) dus $s_0^2 = 52.9/2 = 26.4$.

24. Beschouw 1 paar (x,y). Hiervoor is $s_i^2 = x^2 + y^2 - (x+y)^2/2 = (x-y)^2/2$.

Zij $x - y = d_i$ dan is dus de totale $s^2 = \dfrac{\Sigma \nu_i s_i^2}{\Sigma \nu_i} = \dfrac{\Sigma s_i^2}{n} = \Sigma \dfrac{d_i^2}{2n}$

daar $\nu_i = 1$.