TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

STATISTISCH COMPENDIUM

samengesteld door

Drs. A.J. Bosch en Drs. H.J.L. Kamps

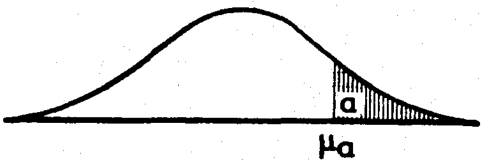
1982

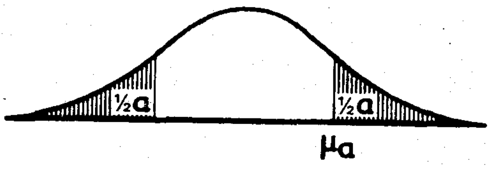
Technische Universiteit
Eindhoven

Faculteit Wiskunde en Informatica

Statistisch compendium

samengesteld door: drs. A.J. Bosch en drs. H.J.L. Kamps





α eenzijdig	μ_α	α tweezijdig
5 %	1.645	10 %
2.5 %	1.960	5 %
1 %	2.326	2 %
0.5 %	2.576	1 %
0.25 %	2.807	0.5 %
0.1 %	3.090	0.2 %
0.05 %	3.290	0.1 %
	3.897	0.01 %
	4.417	0.001 %

8702116

Statistisch compendium

Samengesteld door drs. A.J. Bosch en drs. H.J.L. Kamps

Technische Universiteit Eindhoven

INHOUD

Axioma, definitie of stelling 1

Axioma's; somregel; produktregel; onafhankelijk; voorwaardelijke kans.

Een- en tweedimensionale kansverdeling 2

Stochastiek; kansverdeling; frekwentieverdeling; cumulatieve verdeling; E-operator; gemiddelde; variantie; spreiding; covariantie; correlatiecoëfficiënt; schatters voor deze grootheden; gestandaardiseerde grootheid; variantie van het gemiddelde; var $\underline{s}$ voor grote ν; simultane verdeling; marginale- en voorwaardelijke verdeling; onafhankelijke variabelen; transformatie van toevalsvariabelen; convolutie; determinant van Jacobi; verdeling van een funktie van toevalsvariabelen.

Enkele belangrijke theorema's 5

Ongelijkheid van Bienaymé - Cebysev; theoretische wet der grote aantallen (theorema van Bernoulli); stochastische convergentie; centrale limietstelling (o.a. stelling van De Moivre en Laplace); Bayes' theorema.

Kombinatoriek 6

Permutaties; variaties; kombinaties; herhalingskombinaties; "occupancy"-probleem; Fermi-Dirac, Bose-Einstein, Maxwell-Boltzmann statistieken; binomium van Newton; driehoek van Pascal; getallen van Fibonacci.

Genererende funkties 7

Karakteristieke funktie; kansgf.; momentgf.; factoriële momentgf.; cumulantgf.; momenten t.o.v. oorsprong; centrale momenten; factoriële momenten; cumulanten; coëfficiënt van scheefheid; kurtosis; exces; variatiecoëfficiënt; verdeling van de som van twee onafhankelijke variabelen; twee limietstellingen.

Kansverdelingen en moment genererende funkties 10

Van de meest voorkomende verdelingen zijn de frekwentieverdelingen en de momentgenererende funkties gegeven. Tevens de definities van de Pascal-, Erlang-, Cauchy-, lognormale-, Weibull-, Pôlya-, multinomiale- en Rayleigh verdeling.

Kansverdelingen en hun momenten 11

Van de meestvoorkomende verdelingen zijn de eerste vier centrale momenten gegeven.

De χ^2-, F-, t- en r-verdeling 12

Definities en frekwentieverdelingen van de centrale en niet- centrale χ^2-, F-, en t-verdeling; de verdeling van r; het begrip isomoor; Fisher's z-verdeling; Cauchy-verdeling; χ^2-, F- en t-toets; betrouwbaarheidsinterval voor spreiding, gemiddelde, verschil van 2 gemiddelden en voor het quotiënt van 2 varianties.

Enkele samengestelde verdelingen 14

Binomiale verdeling met $\underline{n}$ Poisson-verdeeld; binomiale verdeling waarbij $\underline{p}$ een bêtaverdeling volgt; Poissonverdeling waarbij het gemiddelde een gammaverdeling volgt.

Schatters 15

Definities van zuivere-, bruikbare-, meest doeltreffende-en voldoende schatter; $\underline{\bar{x}}$ en $\underline{s}^2$ als voorbeelden van zuivere-, $\underline{s}$ als voorbeeld van een onzuivere schatter; methode der meest aannemelijke schatters (maximum likelihood method).

Onbetrouwbaarheid en onderscheidingsvermogen 16

Nulhypothese; alternatieve hypothese; kritieke zône; onbetrouwbaarheidsdrempel; onderscheidingsvermogen; fouten van de eerste en tweede soort.

De binomiale-, hypergeometrische- en Poissonverdeling 17

Benaderingen; betrouwbaarheidsintervallen; toetsen; nauwkeurigheid.

Variantie-analyse 18

Model I-, II- en III faktoren; uitgewerkt voorbeeld.

Regressie en correlatie 21

Variantie; covariantie; correlatiecoëfficiënt; regressiecoëfficiënt; methode der kleinste kwadraten; normaalvergelijkingen; enkelvoudige en meervoudige lineaire regressie; de schatters $\underline{s}_{xy}$, $\underline{s}_x^2$, $\underline{r}$ en $\underline{b}_k$; toets voor H_0: correlatiecoëfficiënt is nul; analoog regressiecoëfficiënt is nul; orthogonale polynomen; voorbeeld polynoomaanpassing.

Runs 24

Enkele kansverdelingen en momenten.

Enkele verdelingsvrije toetsen 25

Tekentoets; toets van Wilcoxon; rangcorrelatiecoëfficiënt van Kendall; rangcorrelatie coëfficiënt van Spearman; methoden der m rangschikkingen (toets van Friedman).

Verwerking van een serie waarnemingen 27

Range; kodering; afronding; schatting van de spreiding uit de range; betrouwbaarheidsinterval voor spreiding en gemiddelde; schatters voor spreiding en gemiddelde; Sheppard's korrectie.

Foutenvoortplanting 29

Toevallige fout; systematische fout; variatiecoëfficiënt.

Wiskundig formularium 30

TABELLEN

Axioma, definitie of stelling

I Axioma's (voor eindig veld)

ax 1: $0 \leq P(A) \leq 1$
ax 2: indien A onmogelijk, is $P(A) = 0$
ax 3: indien A zeker, is $P(A) = 1$
ax 4: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

volledig, afhankelijk stelsel

of

ax 1°: $P(A) \geq 0$
ax 2°: indien A zeker, is $P(A) = 1$
ax 3°: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ indien $AB = \emptyset$

volledig, onafhankelijk stelsel

II Definities:

1) voorwaardelijke kans:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

2) onafhankelijk:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

III a. Consekwenties:

1) Uit def. 1 volgt de produktregel voor 2 gebeurtenissen:

$$P(AB) = P(A \mid B)\, P(B).$$

2) Is A onafhankelijk B en $P(B) \neq 0$ dan volgt

$$P(AB) = P(A)\, P(B).$$

3) Uit ax 2 + ax 4 volgt voor 2 elkaar uitsluitende gebeurtenissen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

b. Stellingen:

1) Algemene somregel:

$$P\Big[\bigcup_{i}^{n} A_i\Big] = \sum_{i}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$$

Met inductie te bewijzen uit ax 4; ax 4 is dus somregel voor $n = 2$. Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen wordt deze somregel:

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i).$$

2) Algemene produktregel:

$$P[A_1 \dots A_n] = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

Met inductie te bewijzen uit consekw. 1. Voor onderling onafhankelijke gebeurtenissen wordt deze produktregel:

$$P[A_1 \dots A_n] = \prod P(A_i).$$

3) Er geldt:

$P[\cup A_i] = 1 - P[\cap \bar{A}_i]$. Hierin is $\bar{A}_i$ het complement (ontkenning) van A_i.

Een- en tweedimensionale kansverdeling

Definitie: Een stochastische variabele $\underline{x}$ (stochastiek, toevalsvariabele, Eng. variate, random variable) is een grootheid die verschillende waarden aan kan nemen zodat voor elk gegeven reëel getal x, $P[\underline{x} \leq x]$ gedefinieerd is.

I Eéndimensionaal.

De kansverdeling van $\underline{x}$ is de verzameling van alle waarden x die $\underline{x}$ kan aannemen met de bijbehorende kansen $P[\underline{x} \leq x]$.

	$\underline{x}$ diskreet	$\underline{x}$ continu
kans :	$p_i = P[\underline{x} = x_i]$	$f(x)dx = P[x < \underline{x} < x + dx]$
verdelingsdichtheid, frekwentieverdeling :	$p_i \quad i = 1, 2, \ldots$	$f(x)$; $f(x) = dF(x)/dx$
eigenschap :	$0 \leq p_i \leq 1$; $\Sigma p_i = 1$	$f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
verdelingsfunktie, cumulatieveverdeling :	$F(x) = P[\underline{x} \leq x]$	$F(x) = P[\underline{x} \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$
E-operator :	$Eg(\underline{x}) = \Sigma p_i g(x_i)$	$Eg(\underline{x}) = \int g(x) f(x)dx$
	E(expectation): mathematische verwachting, verwachtingswaarde.	
eigenschap :	$E(a\underline{x} + b\underline{y}) = a E\underline{x} + b E\underline{y}$	
gemiddelde :	$\mu = E\underline{x}$	
	$\mu = \Sigma p_i x_i$	$\mu = \int x f(x)dx$
variantie :	$\sigma^2 = E(\underline{x} - \mu)^2 = E\underline{x}^2 - (E\underline{x})^2$	
	$\sigma^2 = \Sigma p_i x_i^2 - \mu^2$	$\sigma^2 = \int x^2 f(x)dx - \mu^2$

standaardafwijking : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

gestandaardiseerde $\underline{x}$: $\underline{x}^* = (\underline{x}-\mu)/\sigma$ dus $E\underline{x}^* = 0$ en var $\underline{x}^* = 1$
Is $\underline{x}$ normaalverdeeld, dan is $\underline{u} = (\underline{x}-\mu)/\sigma$ dus $N(0,1)$ verdeeld.

schatters : uit steekproef $x_1, \ldots, x_n$

veor μ : $\underline{\bar{x}} = \Sigma x_i/n$; $E\underline{\bar{x}} = \mu$; voor oneindige populatie is
var $\underline{\bar{x}} = \sigma^2/n$, voor eindige populatie var $\underline{\bar{x}} = (1-{}^n/N)\,\sigma^2/n$.

voor σ^2 : $\underline{s}^2 = \Sigma(\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2/(n-1) = [\Sigma \underline{x}_i^2 - (\Sigma \underline{x}_i)^2/n]/(n-1)$
$E\underline{s}^2 = \sigma^2$ (zie pag.15)

voor σ : $\underline{s} = \sqrt{\underline{s}^2}$; $E\underline{s} < \sigma$ (zie pag.15)
Voor grote $\nu = n - 1$ is var $\underline{s} \approx \sigma^2/2\nu$; var $\underline{s}^2 = 2\sigma^4/\nu$.
Onderstelling: populatie is normaal verdeeld.

II Tweedimensionaal.

De simultane kansverdeling van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is de verzameling van alle waarden x en y die $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kunnen aannemen, met de bijbehorende kansen $P[\underline{x} \leq x \wedge \underline{y} \leq y]$.

	$\underline{x},\underline{y}$ diskreet	$\underline{x},\underline{y}$ continu
kans	: $p_{ij} = P[\underline{x} = x_i \wedge \underline{y} = y_j]$	$f(x,y)dx\,dy = P[x < \underline{x} \leq x + dx \wedge y < \underline{y} \leq y + dy]$
simultane frekwentieverdeling	: $p_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots$	$f(x,y) \quad ; \quad f(x,y) = \partial^2 F(x,y)/\partial x \partial y$
eigenschap	: $0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad ; \quad \sum_{ij} p_{ij} = 1$	$f(x,y) \geq 0; \quad \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = 1$
simultane verdelingsfunktie	: $F(x,y) = P[\underline{x} \leq x \wedge \underline{y} \leq y]$	$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi\,d\eta$
marginale verdeling van x	: $P[\underline{x}=x_i] = \sum_j p_{ij} = p_{i.}$	$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
voorwaardelijke verdeling van x	: $P[\underline{x} = x_i \mid \underline{y}=y_j] = p_{ij}/p_{.j}$	$f(x\mid y) = f(x,y)/f_2(y)$
E-operator	: $E\,g(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{ij} p_{ij} g(x_i,y_j)$	$E\,g(\underline{x},\underline{y}) = \iint g(x,y)\ f(x,y)dx\,dy$
gemiddelde van x	: $\mu_x = \sum_{ij} p_{ij}x_i = \sum_i p_{i.}x_i$	$\mu_x = \iint x\,f(x,y)dx\,dy = \int x f_1(x)dx$
	$E(\underline{x}\mid\underline{y}=y_j) = \sum_i p_{ij}x_i/p_{.j}$	$E(\underline{x}\mid y) = \int x f(x,y)dx/f_2(y)$
variantie van x	: $\sigma_x^2 = \sum_j p_{i.}x_i^2 - \mu_x^2$	$\sigma_x^2 = \int x^2 f_1(x)dx - \mu_x^2$
covariantie	: $\sigma_{xy} = \text{cov}(\underline{x},\underline{y})$	$= E(\underline{x}-\mu_x)(\underline{y}-\mu_y) = E(\underline{xy}) - E\underline{x}\,E\underline{y}$
	$\sigma_{xy} = \sum_{ij} p_{ij}x_iy_j - \mu_x\mu_y$	$\sigma_{xy} = \iint xyf(x,y)dx\,dy - \mu_x\,\mu_y$
correlatiecoëfficiënt:	$\rho = \rho(\underline{x},\underline{y})$	$= \sigma_{xy}/\sigma_x\,\sigma_y$
$\underline{x},\underline{y}$ onafhankelijk	: $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$	$f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)$
$\underline{x},\underline{y}$ onafhankelijk,	$E(\underline{xy})$	$= E\underline{x}\,E\underline{y}$ dus $\sigma_{xy} = \rho = 0$
dan is $\sigma_{xy} = \rho = 0$	: $\sum_{ij} p_{ij}x_iy_j = \sum_i p_{i.}x_i \sum_j p_{.j}x_j =$ $= \mu_x\,\mu_y$	$\iint xyf(x,y)dx\,dy = \int x\,f_1(x)dx \int y\,f_2(y)dy =$ $= \mu_x\mu_y$

eigenschap : Is $\underline{z} = \Sigma a_i\underline{x}_i$, dan is var $\underline{z} = \sum_i a_i^2$ var $\underline{x}_i + 2 \sum_{i<j} a_ia_j \text{ cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j)$

Voor $\underline{x}_i$ en $\underline{x}_j$ onafhankelijk, is var $\underline{z} = \sum_i a_i^2$ var $\underline{x}_i$

schatters : uit steekproef $x_1,y_1;\ldots;x_n,y_n$

voor σ_{xy} : $\underline{s}_{xy} = (\,\Sigma\underline{x}\underline{y} - \Sigma\underline{x}\,\Sigma\underline{y}/n)/(n-1)$

voor ρ : $\underline{r} = \underline{s}_{xy}/\underline{s}_x\underline{s}_y = \dfrac{n\Sigma\underline{xy} - \Sigma\underline{x}\Sigma\underline{y}}{\sqrt{[n\Sigma\underline{x}^2 - (\Sigma\underline{x})^2][n\Sigma\underline{y}^2 - (\Sigma\underline{y})^2]}}$

III Transformatie van toevalsvariabelen.

a. Gegeven: $\underline{x}$ met kansdichtheid $f_1(x)$ en een transformatie $\underline{y} = g(x)$, g monotoon.

Gevraagd: de kansdichtheid $f_2(y)$ van $\underline{y}$.

Oplossing: is $\underline{x}$ diskreet dan geldt $P(\underline{y}=y_i) = P(\underline{x}=x_i)$.

is $\underline{x}$ continu dan $f_2(y)|dy| = f_1(x)\,dx$ $\quad ; \; x = g^{-1}(y)$

oftewel:

$$f_2(y) = f_1[g^{-1}(y)]|dg^{-1}(y)/dy|$$

vb 1 : $\underline{u}$ is N(0,1) verdeeld, dus $f_1(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}/\sqrt{2\pi}$ $\quad -\infty < u < \infty$

Gevraagd de verdeling van $\underline{y} = \underline{u}^2$. Dus $u = \pm\sqrt{y}$ en

$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y}.\, \frac{1}{2\sqrt{y}}\, .\, 2 = y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}/\sqrt{2\pi}$ (χ^2_1-verdeling).

vb 2 : $\underline{x}$ heeft kansdichtheid $f(x)$. Gevraagd de verdeling van $\underline{y} = F(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$

Dus $f_2(y) = f(x)|dx/dy| = f(x)/\frac{dy}{dx} = f(x)/f(x) = 1$ dwz. $\underline{y}$ is homogeen verdeeld.

b. Gegeven: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ met simultane kansdichtheid $f_1(x,y)$ en de transformaties $\underline{u} = g(\underline{x},\underline{y})$; $\underline{v} = h(\underline{x},\underline{y})$ met inversen $\underline{x} = G(\underline{u},\underline{v})$ en $\underline{y} = H(\underline{u},\underline{v})$.

De simultane kansdichtheid van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ is

$$f_2(u,v) = f_1[G(u,v),\ H(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

Hierin is $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ de <u>determinant van Jacobi</u>: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

vb : $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn homogeen verdeeld op (0,1). Zij $\underline{u} = \underline{x} + \underline{y}$ en $\underline{v} = \underline{x} - \underline{y}$

Dan is $f_2(u,v) = \frac{1}{2}$

$$\text{en dus } f(u) = \tfrac{1}{2}\int_{-u}^{u} dv = u \quad \text{voor } 0 < u < 1$$

$$f(u) = \tfrac{1}{2}\int_{u-2}^{2-u} dv = 2-u \text{ voor } 1 < u < 2$$

IV Verdeling van een funktie van toevalsvariabelen.

Stel $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ zijn n continue stochastieken met simultane verdeling $f(x_1,\dots,x_n)$ en laat $\underline{y} = g(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$. Dan is:

$$F(y) = P(\underline{y} \leqslant y) = \underset{g(x_1,\dots,x_n)\leqslant y}{\int \dots \int} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

vb. $\underline{y} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$. Dan is $F_2(y) = \int\limits_{x_1+x_2<y} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1,x_2)dx_2$

$$\text{en dus } f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,y-x_1)dx_1$$

Zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijk dan is $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, f_2(y-x_1)\, dx_1$ of: $f_2 = f_1 * f_2$

in woorden: de verdeling van de som van 2 onafhankelijke variabelen is juist de <u>convolutie</u> van hun kansverdelingen.

Geldt bovendien $\underline{x},\underline{y} \geqslant 0$ dan is $L(f*g) = Lf.Lg$. Hierin is $Lf = \int_0^{\infty} f(x)e^{-tx}dx = Ee^{-t\underline{x}}$ de Laplace-getransformeerde van $f(x)$.

Enkele belangrijke theorema's

I Ongelijkheid van Bienaymé-Čebyšev:

Voor een stochastiek $\underline{x}$ met eindige μ en σ, geldt:

$$P[\,|\underline{x} - \mu| > k\sigma] < 1/k^2$$

nl. (discreet):

$$\sigma^2 = \sum (\underline{x} - \mu)^2\, p(x) \geqslant k^2\sigma^2\, P[\,|\underline{x} - \mu| > k\sigma\,].$$

Hieruit volgt:

II Theoretische wet der grote aantallen (Theorema van Bernoulli):

In een reeks van n onafhankelijke experimenten, elk met kans p op succes, convergeert de fractie successen $\underline{x}/n$ voor $n \to \infty$ stochastisch naar p d.w.z. voor elke $\varepsilon > 0$ geldt:

$$\lim_{n \to \infty} P[\,|\underline{x}/n - p| > \varepsilon\,] = 0$$

volgens I geldt nl. voor de binomiale verdeling:

$$P[\,|\underline{x} - np| > k\sqrt{npq}] < 1/k^2 \quad \text{oftewel} \quad P[\,|\underline{x}/n - p| > k\sqrt{pq/n}\,] < 1/k^2 .$$

$$\text{Stel } k = \varepsilon\sqrt{n/pq}.$$

$$P[\,|\underline{x}/n - p| > \varepsilon] < pq/n\varepsilon^2 \quad \text{oftewel} \quad \lim_{n \to \infty} P[\,|\underline{x}/n - p| > \varepsilon\,] = 0.$$

III Centrale limietstelling (2 speciale gevallen):

1. Zijn $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking σ, dan is

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{voor } n \to \infty \ N(0,1) \text{ verdeeld.}$$

2. Stelling van De Moivre en Laplace:

   Bezit x een binomiale verdeling met parameters n en p, dan is $(\underline{x} - np)/\sqrt{npq}$ voor $n \to \infty$ N(0,1) verdeeld.

IV Bayes' theorema:

Stel $A_1, \ldots, A_n$ vormen een volledig exclusief systeem, d.w.z. $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

$$A_i A_j = \emptyset \qquad i \neq j$$

dan is

$$P(A_i\,|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} .$$

Kombinatoriek

I **Definities:**

Zij gegeven n verschillende objecten.

1. Het aantal permutaties $= n!$: het aantal rangschikkingen.
2. Het aantal variaties van k uit n $= \frac{n!}{(n-k)!}$: het aantal manieren waarop men er k kan kiezen, lettend op de volgorde.
3. Het aantal kombinaties van k uit n $= \binom{n}{k}$: het aantal manieren waarop men er k kan kiezen, ongeacht de volgorde.
4. Het aantal herhalingskomb. van k uit n $= \binom{n+k-1}{k}$: het aantal manieren waarop men er k kan kiezen, ongeacht de volgorde, terwijl elk object meer malen gekozen mag worden.

1* Zijn er onder deze n objecten $n_1, n_2, \dots, n_k$ gelijke, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ dan is het aantal permutaties: $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$

II **"Occupancy"-probleem:**

n cellen, k ballen; vb. $n = 3$, $k = 2$.

verschil. ballen meerdere per cel	Maxwell-Boltzmann	n^k	xy xy xy	x x y x y y	y y x y x x	$3^2 = 9$
verschil. ballen max. 1 per cel	-	$\frac{n!}{(n-k)!}$		x x y x y y	y y x y x x	$\frac{3!}{1!} = 6$
dezelfde ballen meerdere per cel	Bose-Einstein	$\binom{n+k-1}{k}$	xx xx xx	x x x x x x		$\binom{4}{2} = 6$
dezelfde ballen max. 1 per cel	Fermi-Dirac	$\binom{n}{k}$		x x x x x x		$\binom{3}{2} = 3$

III **Enkele formules:**

1. $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ Driehoek van Pascal ; $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$

2. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$; $a = b = 1$: $\sum \binom{n}{i} = 2^n$

   Binomium van Newton ; $a = -1$, $b = 1$: $\sum (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

3. $\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{c+i} = \binom{a+b}{a+c}$; $a = b = n$, $c = 0$: $\sum \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

   $c = b - n$: $\sum \binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}$

4. $\sum_{i=a}^{n} \binom{i}{a} = \binom{n+1}{a+1}$; hieruit $\sum i, \sum i^2$ etc. te berekenen voor $a = 1, 2, \dots$

5. Getallen van Fibonacci : $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$; $a_1 = a_2 = 1$; $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{[\frac{1}{2}n]} \binom{n-i}{i}$

Genererende funkties

I Definities:

1. Kans genererende funktie : $P(t) = E\, t^{\underline{x}}$ $\qquad p_k = 1/k!\; P^{(k)}(0)$
2. Karakteristieke funktie : $\varphi(t) = E\, e^{it\underline{x}}$ $\qquad \mu_k' = (-i)^k\, \varphi^{(k)}(0)$
3. Moment genererende funktie : $M(t) = E\, e^{t\underline{x}}$ $\qquad \mu_k' = M^{(k)}(0)$
4. Factoriële moment gen. funktie: $G(t) = E(1 + t)^{\underline{x}}$ $\qquad \mu_{[k]} = G^{(k)}(0)$
5. Cumulant genererende funktie : $K(t) = \ln M(t)$ $\qquad \kappa_k = K^{(k)}(0)$

Momenten (t.o.v. oorsprong) : $E\, \underline{x}^k = \mu_k'$

Centrale momenten : $E\, (\underline{x} - \mu)^k = \mu_k$; $\qquad \mu_1' = \mu$

Factoriële momenten : $E\underline{x}(\underline{x} - 1)\ldots(\underline{x} - k + 1) = \mu_{[k]}$ $\qquad \mu_2 = \sigma^2$

De cumulanten κ_i zijn als volgt gedefinieerd:

$$\exp[\, \kappa_1 t + \frac{\kappa_2 t^2}{2!} + \ldots\,] = 1 + \mu_1' t + \mu_2' t^2/2! + \ldots$$

Coëfficiënt van scheefheid (skewness) : $\gamma_1 = E\, (\frac{\underline{x}-\mu}{\sigma})^3 = \mu_3/\sigma^3$

Coëfficiënt van platheid (peakedness, kurtosis) : $\beta_2 = E\, (\frac{\underline{x}-\mu}{\sigma})^4 = \mu_4/\sigma^4$

Het exces : $\gamma_2 = \beta_2 - 3$; $\beta_1 = \gamma_1^2$

Variatiecoëfficiënt (100 V =procentuele fout) : $V = \sigma/\mu$

II Onderlinge samenhang:

$M(t) = P(e^t)$; $G(t) = P(1 + t)$; $\varphi(t) = M(it)$

$$\begin{array}{lclcl}
\mu = \mu_1' & & \mu = \kappa_1 & & \mu(\bar{x}) = \mu(x) \\
\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 & ; & \sigma^2 = \kappa_2 & ; & \sigma(\bar{x}) = \sigma(x)/\sqrt{n} \\
\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3 & & \mu_3 = \kappa_3 & & \gamma_1(\bar{x}) = \gamma_1(x)/\sqrt{n} \\
\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 & & \mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2 & & \gamma_2(\bar{x}) = \gamma_2(x)/n
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_{[1]} \\
\sigma^2 &= \mu_{[2]} - \mu^2 + \mu \\
\mu_3 &= \mu_{[3]} - 3(\mu - 1)\mu_{[2]} + 2\mu^3 - 3\mu^2 + \mu \\
\mu_4 &= \mu_{[4]} + (6 - 4\mu)\mu_{[3]} + (6\mu^2 - 12\mu + 7)\mu_{[2]} - 3\mu^4 + 6\mu^3 - 4\mu^2 + \mu
\end{aligned}$$

III **Voorbeelden:**

1. **Binomiaal** : $P(t) = \sum \binom{n}{x} p^x q^{n-x} t^x = \sum \binom{n}{x} (pt)^x q^{n-x} = (pt + q)^n$

$M(t) = P(e^t) = (pe^t + q)^n$

$G(t) = P(1 + t) = [p(1 + t) + q]^n = (1 + pt)^n$

En hieruit:

$\mu \quad = G'(0) = np$

$\mu_{[2]} = G''(0) = np^2(n - 1) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu \qquad\qquad \sigma^2 = npq$

2. **Poisson** : $P(t) = \sum \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} t^x = e^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{\lambda(t-1)}$

$M(t) = P(e^t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$

$G(t) = P(1 + t) = e^{\lambda t}$

$K(t) = \ln M(t) = \lambda(e^t - 1)$

En hieruit:

$\varkappa_i \quad = K^{(i)}(0) = \lambda$ dus $\mu = \sigma^2 = \mu_3 = \lambda$; $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$

en $\mu_{[k]} = G^{(k)}(0) = \lambda^k$

3. **Gauss** : $M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}] e^{tx} dx =$

$= \frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\frac{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}] dx = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$K(t) = \ln M(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$

En hieruit:

$\varkappa_1 \quad = K'(0) = \mu$; $\varkappa_2 = \sigma^2$; $\varkappa_3 = \varkappa_4 = 0$ dus $\mu_4 = 3\sigma^4$

4. **Gamma** : $M(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} e^{tx} dx =$

$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)(t-\lambda)^r} \int_0^{\infty} [x(t - \lambda)]^{r-1} e^{x(t-\lambda)} dx(t - \lambda)$

$= (1 - t/\lambda)^{-r}$

En hieruit:

$\mu = M'(0) = r/\lambda \qquad \mu_2' = r(r + 1)/\lambda^2$ dus $\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = r/\lambda^2$

IV Theoretische toepassingen:

Er geldt: a. de karakteristieke funktie bepaalt één-éénduidig de kansfunktie;

b. voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk, geldt:

$$P_{x+y}(t) = E\,t^{\underline{x}+\underline{y}} = E\,t^{\underline{x}}\,t^{\underline{y}} = E\,t^{\underline{x}} \,.\, E\,t^{\underline{y}} = P_x(t)\,P_y(t).$$

Analoog:

$$\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t)\,\varphi_y(t) \quad ; \quad M_{x+y}(t) = M_x(t)\,M_y(t) \quad \text{en dus}$$

$$K_{x+y}(t) = K_x(t) + K_y(t)\,.$$

Hiermee zijn vele stellingen te bewijzen o.a.:

1. Verdelingen van sommen van onafhankelijke stochastieken

a. De som van 2 onafhankelijke binomiale stochastieken met parameters n_1,p resp. n_2,p is weer een binomiale stochastiek met parameters $n_1 + n_2$, p :

$$\varphi_{x+y}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1}(pe^{it} + q)^{n_2} = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2}\,.$$

b. De som van 2 onafhankelijke Poisson stochastieken met parameters λ en μ, is weer een Poisson stochastiek met parameter $\lambda + \mu$:

$$\varphi_{x+y}(t) = \exp \lambda(e^{it} - 1) \exp \mu(e^{it} - 1) = \exp(\lambda + \mu)(e^{it} - 1)\,.$$

c. De som van 2 onafhankelijke Gamma stochastieken met parameters r_1, λ resp. r_2,λ is weer een Gamma stochastiek met parameters $r_1 + r_2$, λ :

$$\varphi_{x+y}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{r_1}(1 - \frac{it}{\lambda})^{r_2} = (1 - \frac{it}{\lambda})^{r_1+r_2}\,.$$

Als bijzondere gevallen volgen hieruit direct d en e:

d. De som van r onafhankelijke exponentiële stochastieken met parameter λ, is een Gamma stochastiek met λ,r.

e. De som van 2 onafhankelijke χ^2-stochastieken met ν_1 resp. ν_2 vrijheidsgraden, is een χ^2-stochastiek met $\nu_1 + \nu_2$ vrijheidsgraden.[1]

f. De som van 2 onafhankelijke normale stochastieken is weer een normale stochastiek.

2. Limietstellingen:

a. Voor $n \to \infty$, $np = \lambda$ nadert de Binomiale stochastiek tot de Poisson stochastiek:

$$\lim_{n \to \infty} (pe^{it} + q)^n = \lim \left[1 + \lambda(e^{it} - 1)/n\right]^n = \exp \lambda(e^{it} - 1).$$

b. Analoog Poisson stochastiek → normale stochastiek.

3. Momenten van sommen van onafhankelijke stochastieken:

Daar $K_{x+y}(t) = K_x(t) + K_y(t)$ geldt: $\kappa_1(x + y) = \kappa_1(x) + \kappa_1(y)\,.$

En dus eveneens:

$$\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y) \quad ; \quad \mathrm{var}(x + y) = \mathrm{var}(x) + \mathrm{var}(y) \quad ;$$

$$\mu_3(x + y) = \mu_3(x) + \mu_3(y)\,.$$

Kansverdelingen en hun moment genererende funkties

Kanswet	Stochastiek	Kansdichtheid	Moment genererende funktie
I Rechthoekig (discreet)	$x = 0,1,\dots,n$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} e^{jt}$
II a Binomiaal	$x = 0,1,\dots,n$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$(p e^t + q)^n$
b Bernoulli	$x = 0,1$	$p(\underline{x} = 1) = p$ $p(\underline{x} = 0) = q$	$p e^t + q$
III Hypergeom.	$x = 0,1,\dots,n$	$\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}/\binom{N}{n}$	$\frac{(N-M)^{[n]}}{N^{[n]}} \sum_{j=0}^{n} \frac{M^{[j]} n^{[j]}}{(N-M-n+j)^{[j]}} \frac{e^{jt}}{j!}$
IV Poisson	$x = 0,1,\dots$	$e^{-\lambda} \lambda^x / x!$	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
V a Negatief Binomiaal	$x = 0,1,\dots$	$\binom{r+x-1}{x} p^r q^x$	$(\frac{p}{1-q e^t})^r$
b Geometrisch	$x = 0,1,\dots$	$p q^x$	$\frac{p}{1-q e^t}$
VI a Bêta	$0 \leqslant x \leqslant 1$	$\frac{x^{r-1} (1-x)^{s-1}}{B(r,s)}$	$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+j)}{\Gamma(r+s+j)\Gamma(j+1)} t^j$
b Rechthoekig (continu)	$a \leqslant x \leqslant b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
VII a Gamma	$x \geqslant 0$	$\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(r)$	$(1 - t/\lambda)^{-r}$
b Exponentiëel	$x \geqslant 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$(1 - t/\lambda)^{-1}$
c χ^2	$X \geqslant 0$	$\frac{(X\ )^{\frac{1}{2}\nu-1} e^{-\frac{1}{2}X}}{2^{\frac{1}{2}\nu} \Gamma(\frac{1}{2}\nu)}$	$(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}\nu}$
VIII Normaal	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Pascal verdeling : een negatief binomiale verdeling met r natuurlijk (Feller)

Erlang verdeling : een Gamma verdeling met r natuurlijk

Cauchy verdeling : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $\quad -\infty < x < \infty$

Lognormale verdeling : $f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}]$ $\quad x > 0$

Weibull verdeling : $f(x) = a x^{a-1} \exp[-x^a]$ $\quad x \geqslant 0$

Pólya verdeling : $p(x) = \binom{n}{x} B(r+x, s+n-x)/B(r,s) = \binom{n}{x} r^{(x)} s^{(n-x)}/(r+s)^{(n)}$

met $a^{(x)} \equiv a(a+1)\dots(a+x-1)$ $\quad x = 0,1,\dots,n$

Multinomiale verd. : $p(x_1,\dots,x_k) = \frac{n!}{x_1!\dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$; $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

Rayleigh verdeling : $f(x) = \frac{x}{a^2} \exp[-x^2/2a^2]$ $\quad x \geqslant 0$ $\quad x_i \geq 0$

Kansverdelingen en hun momenten

Kanswet	μ	σ^2	$\mu_3 = E(\underline{x} - \mu)^3$	$\mu_4 = E(\underline{x} - \mu)^4$
I Rechthoekig (discreet)	$\frac{1}{2}n$	$\frac{n(n+2)}{12}$	0	$\frac{n(n+2)(3n^2+6n-4)}{240}$
II a Binomiaal	np	npq	$npq(q - p)$	$npq(1 + 3npq - 6pq)$
b Bernoulli	p	pq	$pq(q - p)$	$pq(1 - 3pq)$
III Hypergeom.	nM/N	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	*	**
IV Poisson	λ	λ	λ	$\lambda(1 + 3\lambda)$
V a Negatief Binomiaal	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\frac{rq(1+q)}{p^3}$	$\frac{rq}{p^4}(1+4q+3rq+q^2)$
b Geometrisch	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{q(1+q)}{p^3}$	$\frac{q}{p^4}(1+7q+q^2)$
VI a Bêta	$\frac{r}{r+s}$	$\frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}$	$\frac{2rs(s-r)}{(r+s)^3(r+s+1)(r+s+2)}$	***
b Rechthoekig (continu)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\frac{(b-a)^4}{80}$
VII a Gamma	r/λ	r/λ^2	$2r/\lambda^3$	$3r(2+r)/\lambda^4$
b Exponentiëel	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$2/\lambda^3$	$9/\lambda^4$
c χ^2	ν	2ν	8ν	$48\nu + 12\nu^2$
VIII Normaal	μ	σ^2	0	$3\sigma^4$

* $nM(N - M)(N - n)(N - 2M)(N - 2n) / N^3(N - 1)(N - 2)$

** $\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)} \{ N^4 + N^3 - 6N^3(M + n) + 6N^2(M^2 + n^2) + 3Mn(N + 6)(N - M)(N - n)\}$

*** $\frac{3rs[rs(r+s-2)+2(r^2+s^2)]}{(r+s)^4(r+s+1)(r+s+2)(r+s+3)}$

De χ^2 -, F-, t- en r-verdeling

I **Definities:**

1. De $\underline{\chi}_\nu^2$-stochastiek is isomoor* met de som der kwadraten van ν onafhankelijke gestandaardiseerde normaal verdeelde stochastieken $\underline{u}_i$:

$$\underline{\chi}_\nu^2 \simeq \sum_{i=1}^{\nu} \underline{u}_i^2 .$$

De niet-centrale χ^2-stochastiek is: $\underline{\chi}_\nu^2(\delta) \simeq \sum_{i=1}^{\nu} (\underline{u}_i + \mu_i)^2$

niet centraliteitsparameter $\delta = \Sigma\mu_i^2$

2. De $\underline{F}_{\nu_2}^{\nu_1}$ -stochastiek is isomoor met het quotiënt van 2 onafhankelijke $\underline{\chi}_\nu^2$ stochastieken met ν_1 resp. ν_2 vrijheidsgraden:

$$\underline{F}_{\nu_2}^{\nu_1} \simeq \frac{\underline{\chi}_{\nu_1}^2/\nu_1}{\underline{\chi}_{\nu_2}^2/\nu_2} .$$

De niet-centrale F-stochastiek is: $\underline{F}_{\nu_2}^{\nu_1}(\delta) \simeq \frac{\underline{\chi}_{\nu_1}^2(\delta)/\nu_1}{\underline{\chi}_{\nu_2}^2/\nu_2}$.

3. De $\underline{t}_\nu$-stochastiek is isomoor met het quotiënt van 2 onafhankelijke stochastieken, waarvan de teller een u-, de noemer een $\sqrt{\underline{\chi}_\nu^2/\nu}$-verdeling bezit:

$$\underline{t}_\nu \simeq \frac{\underline{u}}{\sqrt{\underline{\chi}_\nu^2/\nu}}$$

De niet-centrale t-stochastiek is: $\underline{t}_\nu(\delta) \simeq \frac{\underline{u}+\delta}{\sqrt{\underline{\chi}_\nu^2/\nu}}$

II **Verdelingen:**	**Kansdichtheid:**		
1. χ_ν^2 -verdeling :	$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)}$	$(\chi^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$	
2. $F_{\nu_2}^{\nu_1}$-verdeling (Fisher) :	$\frac{\nu_1^{\frac{1}{2}\nu_1}\,\nu_2^{\frac{1}{2}\nu_2}}{B(\frac{1}{2}\nu_1,\frac{1}{2}\nu_2)}$	$F^{\frac{1}{2}\nu_1-1} . (\nu_2 + \nu_1 F)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$	
3. t_ν-verdeling (Student) :	$\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\nu)\sqrt{\nu}}$	$(1 + t^2/\nu)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$	
4. $r_\nu \mid \rho = 0$ -verdeling :	$\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\nu)}$	$(1 - r^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}$	$\nu = n - 2$

---

* $\underline{u} \simeq \underline{v}$ ($\underline{u}$ is isomoor met $\underline{v}$) d.w.z. $\underline{u}$ en $\underline{v}$ bezitten dezelfde kansverdeling.

III Onderlinge samenhang

$\underline{u} \simeq \underline{\chi}_1$; $\underline{t}_\nu^{\,2} \simeq \underline{F}_\nu^{1}$ $\underline{F}_\infty^{\nu} \simeq \underline{\chi}_\nu^{\,2}/\nu$

$\underline{t}_\infty \simeq \underline{u}$; $\underline{F}^{\nu_1}_{\nu_2} \simeq 1/\underline{F}^{\nu_2}_{\nu_1}$; $\underline{t}_1 \simeq \underline{u}_1/\underline{u}_2$ (Cauchy-verdeling)

$\underline{z} \simeq \frac{1}{2} \ln \underline{F}^{\nu_2}_{\nu_1}$ (Fisher's z-verdeling).

IV Toepassingen

1 a. χ^2-toets voor het vergelijken van verdelingen

Toetsingsgrootheid $\underline{\chi}_\nu^{\,2} \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{(\underline{o}_i - e_i)^2}{e_i} \approx \sum \frac{\underline{o}_i^{\,2}}{e_i} - n$. Hierin is: m = aantal klassen;

o_i en e_i = "observed" resp. "expected" aantal in klasse i; $n = \sum o_i = \sum e_i$; eis $e_i \geq 5$

b. Betrouwbaarheidsinterval voor σ

Onderstelling: de waarnemingen vormen een aselecte steekproef uit een normale populatie.

$$\sum_1^n \left(\frac{\underline{x}_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \simeq \underline{\chi}_n^{\,2} \quad ; \quad \sum_1^n \left(\frac{\underline{x}_i - \bar{\underline{x}}}{\sigma}\right)^2 \simeq \underline{\chi}_\nu^{\,2} \qquad \nu = n - 1 \quad ; \quad \frac{\nu \underline{s}^2}{\sigma^2} \simeq \underline{\chi}_\nu^{\,2} .$$

Dus

$a_1\underline{s} = \underline{s}\sqrt{\nu/\chi_\nu^{\,2}(\alpha_r)} < \sigma < \underline{s}\sqrt{\nu/\chi_\nu^{\,2}(\alpha_l)} = a_2\underline{s}$; a_1 en a_2 zijn getabelleerd in tabel 3.2

2 a. F-toets voor het vergelijken van varianties

Onderstelling : de waarnemingen vormen onafhankelijke, aselecte steekproeven uit normaal verdeelde populaties.

Nulhypothese H_o : $\sigma_1^{\,2} = \sigma_2^{\,2}$.

Toetsingsgrootheid: $\underline{F}^{\nu_1}_{\nu_2} \simeq \dfrac{\underline{\chi}_{\nu_1}^2 / \nu_1}{\underline{\chi}_{\nu_2}^{\,2} / \nu_2} \simeq \dfrac{\underline{s}_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}} : \dfrac{\underline{s}_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}} \simeq \underline{s}_1^{\,2}/\underline{s}_2^{\,2}$ (grootste s^2 in teller).

b. Betrouwbaarheidsinterval voor $\sigma_1^{\,2}/\sigma_2^{\,2}$

$$\frac{\underline{s}_1^{\,2}}{\underline{s}_2^{\,2}} \cdot 1/F^{\nu_1}_{\nu_2}(\tfrac{1}{2}\alpha) < \sigma_1^2/\sigma_2^{\,2} < \frac{\underline{s}_1^{\,2}}{\underline{s}_2^{\,2}} \cdot F^{\nu_2}_{\nu_1}(\tfrac{1}{2}\alpha) . \qquad \text{nl. } F^{\nu_2}_{\nu_1}(1 - \tfrac{1}{2}\alpha) = 1/F^{\nu_1}_{\nu_2}(\tfrac{1}{2}\alpha) .$$

3 a. t-toets voor het vergelijken van gemiddelden

Onderstelling : de waarnemingen $x_{11},\dots,x_{1n}$ en $x_{21},\dots,x_{2m}$ zijn onafhankelijke, aselecte steekproeven uit normale populaties met een zelfde onbekende σ.

Nulhypothese H_o : $\mu_1 = \mu_2$.

Toetsingsgrootheid: $\underline{t}_\nu = \dfrac{\bar{\underline{x}}_1 - \bar{\underline{x}}_2}{\underline{s}} \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}$ waarin $\nu = n + m - 2$ en $\underline{s}^2 = (\nu_1\underline{s}_1^{\,2} + \nu_2\underline{s}_2^{\,2})/\nu$

$\nu_1 = n - 1$, $\nu_2 = m - 1$.

b. Betrouwbaarheidsinterval voor μ (indien σ onbekend)

$$\bar{\underline{x}} - t_\nu(\tfrac{1}{2}\alpha)\,\underline{s}/\sqrt{n} < \mu < \bar{\underline{x}} + t_\nu(\tfrac{1}{2}\alpha)\,\underline{s}/\sqrt{n}$$

voor $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{\underline{x}}_1 - \bar{\underline{x}}_2 \pm t_\nu(\tfrac{1}{2}\alpha)\,\underline{s}\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}$.

c. Toets voor de hypothese $\rho = 0$ of β (lin. regres. coëf.) = 0 , zie tabel 2.2 resp. pag. 22.

Opm. 1. De niet-centrale verdelingen treden op bij het onderscheidingsvermogen van de bijbehorende toetsen.

2. Indien σ wel bekend, wordt onder punt 3, $\underline{t}_\nu$ vervangen door $\underline{u}$, en $t_\nu(\tfrac{1}{2}\alpha)$ door $u(\tfrac{1}{2}\alpha)$.

Enkele samengestelde verdelingen

Een samengestelde verdeling - compound distribution - is afgeleid van een verdeling, afhankelijk van een parameter die zelf weer stochastisch is.

De belangrijkste zijn:

1. Een binomiale verdeling met parameters $\underline{n}$,p waarbij $\underline{n}$ een Poisson verdeling bezit met parameter μ, geeft een Poissonverdeling met parameter μp.

$$p(x) = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} = \qquad \text{stel } n - x = y$$

$$= \frac{e^{-\mu} \mu^x p^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{q^y \mu^y}{y!} = \frac{e^{-\mu} (\mu p)^x e^{\mu q}}{x!} = \frac{e^{-\mu p} (\mu p)^x}{x!} .$$

2. Een binomiale verdeling met parameters n,$\underline{p}$ waarbij $\underline{p}$ een Bêta verdeling bezit, geeft een Pôlya verdeling.

$$p(x) = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \frac{p^{r-1} (1-p)^{s-1}}{B(r,s)} dp =$$

$$= \frac{\binom{n}{x}}{B(r,s)} \int_0^1 p^{r+x-1} (1 - p)^{s+n-x-1} dp =$$

$$= \binom{n}{x} B(r + x, s + n - x) / B(r,s).$$

3. Een Poisson verdeling met parameter $\underline{\mu}$ waarbij $\underline{\mu}$ een Gamma verdeling bezit, geeft een negatief binomiale verdeling.

$$p(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} . \frac{\lambda(\lambda \mu)^{r-1} e^{-\lambda\mu}}{\Gamma(r)} d\mu =$$

$$= \frac{\lambda^r}{x! \Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-\mu(\lambda+1)} \mu^{r+x-1} d\mu =$$

$$= \frac{\lambda^r}{x! \Gamma(r)} , \frac{\Gamma(r+x)}{(\lambda+1)^{r+x}} = \binom{r+x-1}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^r \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^x =$$

$$= \binom{r+x-1}{x} p^r q^x ,$$

Schatters

I Definities:

1. $\underline{t}$ is een zuivere schatter voor de parameter θ (Eng. unbiased) als $E\,\underline{t} = \theta$.
2. $\underline{t}_n$ is een bruikbare, asymptotisch rake schatter voor θ (Eng. consistent), als $\lim_{n \to \infty} P\,[\,|\underline{t}_n - \theta\,| > \varepsilon\,] = 0$ $\qquad n$ = steekproefgrootte.
3. $\underline{t}$ is een meestdoeltreffende schatter voor θ (Eng. efficient) als $\underline{t}$ onder alle zuivere schatters voor θ de kleinste spreiding heeft.
4. $\underline{t}$ is een voldoende schatter voor de parameter θ (Eng. sufficient) als voor elke andere schatter $\underline{t}'$ geldt dat de voorwaardelijke verdeling $f(\underline{t}' \mid \underline{t} = t)$ onafhankelijk van θ is.

De waarde die een schatter (estimator) aanneemt noemen we een schatting (estimate).

II Voorbeelden:

1. $\bar{\underline{x}} = \sum \underline{x}_i/n$ is een zuivere schatter voor μ nl. $E\,\bar{\underline{x}} = \sum E\,\underline{x}_i/n = \sum \mu/n = \mu$.
2. $\underline{s}^2 = \dfrac{\sum(\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2}{n-1}$ is een zuivere schatter voor σ^2 nl. $(n-1)\,\underline{s}^2 = \sum x_i^2 - n(\bar{x})^2$ dus $E(n-1)\,\underline{s}^2 = \sum E\,x_i^2 - n\,E(\bar{x})^2 = n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2) = (n-1)\,\sigma^2$ oftewel $E\,\underline{s}^2 = \sigma^2$.
3. $\underline{s} = \sqrt{\underline{s}^2}$ is geen zuivere schatter vopr σ nl. $0 < \text{var}\ \underline{s} = E\,\underline{s}^2 - [E(\underline{s})]^2 = \sigma^2 - [E(\underline{s})]^2$, dus $E(\underline{s}) < \sigma$.

De drie bovengenoemde schatters zijn asymptotisch raak.

III Methode der meest aannemelijke schatters (maximum likelihood method):

Stel we hebben een steekproef $x_1, \ldots, x_n$ van de stochastieken $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ die een simultane verdelingsdichtheid $f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_k)$ bezitten waarin de θ_i onbekende parameters zijn die we uit de steekproef willen schatten.

De meestaannemelijke schatters $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ voor resp. $\theta_1, \ldots, \theta_k$ zijn die waarden die de aannemelijkheidsfunktie $L(\theta_1, \ldots, \theta_k) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1, \ldots, \theta_k)$ maximaliseren. Indien de $\underline{x}_i$ onafhankelijk zijn, maximaliseert men vaak ln L.

Dit geeft:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} f(x_i \mid \theta_1, \ldots, \theta_k)}{f(x_i \mid \theta_1, \ldots, \theta_k)} = 0\,.$$

Vb. Poisson:

$$f(x) = e^{-\lambda}\,\lambda^x/x! \qquad \ln L = \sum[-\lambda + x_i \ln \lambda - \ln(x_i!)]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum(-1 + x_i/\lambda) = -n + \sum x_i/\lambda = 0 \quad \text{dus} \quad \lambda = \sum x_i/n = \bar{x}\,.$$

Onbetrouwbaarheid en onderscheidingsvermogen

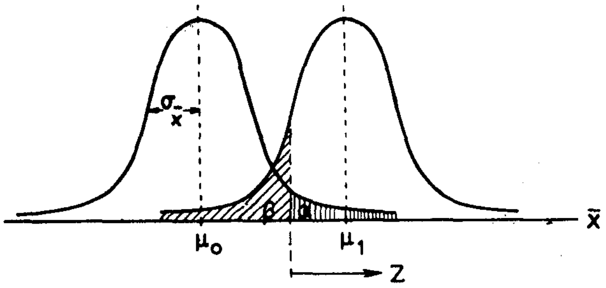
Definities:

H_o : getoetste- of nulhypothese.
H : alternatieve hypothese.
Z : kritieke zône, d.w.z. indien $\underline{x} \in Z$ wordt H_o verworpen.
α : onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets. (Engl. level of significance)
$\beta(H) = P[\underline{x} \notin Z \mid H \text{ is juist}]$.

Fout van de eerste soort: het verwerpen van een juiste nulhypothese.
Kans op fout van de 1^e soort $= 1 - \beta(H_o)$ = onbetrouwbaarheid van de toets.
Voor een continue verdeling is $1 - \beta(H_o) = \alpha$, anders $1 - \beta(H_0) \leq \alpha$.

Fout van de tweede soort: het aannemen van een onjuiste nulhypothese.
Kans op fout van de 2^e soort $= \beta(H)$.
Het onderscheidingsvermogen van de toets (Engl. Power) $= 1 - \beta(H)$.

	H_o aanvaard	H_o verworpen
H_o is juist	$1 - \alpha$	α (fout v.d. 1^e s.)
H is juist	β (fout v.d. 2^e s.)	$1 - \beta$



Het onderscheidingsvermogen $1 - \beta$ van een toets hangt af van α, σ, H en Z.
Vb.: $\underline{t}$-toets (van Student).

Stel $x_1, \ldots, x_n$ is een steekproef uit een normale verdeling met μ en σ onbekend.
$H_o : \mu = \mu_o$; $H : \mu = \mu_o + \delta = \mu_1$. We zien nu uit de fig.:

1. Hoe kleiner α (fout van de 1^e soort), des te groter β (fout van de 2e soort); deze werken elkaar dus tegen.

2. Hoe kleiner $\sigma_{\bar{x}}$, des te kleiner β, des te groter het onderscheidingsvermogen $1 - \beta$. Dit is dus o.a. te bereiken door meer waarnemingen te doen nl. $\sigma_{\bar{x}} = \sigma(x)/\sqrt{n}$.

3. Hoe groter δ, des te groter het onderscheidingsvermogen $1 - \beta$.

4. Zouden we een linker kritieke zône kiezen voor deze toets, dan zien we dat $\beta \sim 1$ dus $1 - \beta \sim 0$. Is daarentegen $\mu_1 < \mu_o$, dan zou dèze zône meer onderscheidend zijn.

5. Het onderscheidingsvermogen is: $1-\beta(\delta;\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t(\delta))\, dt(\delta)$ waarin $\underline{t}(\delta)$ de niet-centrale t-stochastiek is. Analoog treden de niet-centrale χ^2 - en F-verdeling op bij het onderscheidingsvermogen van de bijbehorende toetsen.

De binomiale-, hypergeometrische- en Poissonverdeling

Verdeling		Binomiaal : $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$	Poisson : $e^{-\mu}\,\mu^x/x!$ ****)	Hypergeometrisch: $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}/\binom{N}{n}$; $M/N \equiv p$
Tabellering		tabel 5.1 en 5.2 *)	tabel 6.1 en 6.2	-
Benadering Binomiale-	a	-	-	$n/N \leq 0.10$: met $n = n$, $p = M/N$ $p \leq 0.10$: met $n = M$, $p = n/N$
Poisson-	b	$p \leq 0.10$: met $\mu = np$	-	$n/N \leq 0.10$, $p \leq 0.10$: met $\mu = np$
Normale-	c	$np \geq 5$, $nq \geq 5$: met $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$ **)	$\mu \geq 10$: met $\mu = \mu$, $\sigma = \sqrt{\mu}$	$np \geq 5$, $nq \geq 5$: met $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq(N-n)/(N-1)}$
Betrouwb. interval 1 waarneming	a	: $\hat{p} = x/n$; $\hat{q} = 1-\hat{p}$. tabel 5.3	$\hat{\mu} = x$ -	$\hat{p} = x/n$. $n/N \leq 0.10$: zie kolom 1
	b	$\hat{p} \leq 0.10$, $n\hat{p} \leq 20$: tabel 6.3: $a_1/n < p < a_2/n$	$\hat{\mu} \leq 20$: tabel 6.3	$n/N \leq 0.10$, $\hat{p} \leq 0.10$: zie kolom 1
	c	$n\hat{p} \geq 5$, $n\hat{q} \geq 5$: $\dfrac{\hat{p} + u_\alpha^2/2n \pm u_\alpha \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n + u_\alpha^2/4n^2}}{1 + u_\alpha^2/n}$ *** $n\hat{p} > 50$, $n\hat{q} > 50$: $\hat{p} \pm u_\alpha \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$	$\hat{\mu} \geq 5$: $\hat{\mu} + \frac{1}{2}u_\alpha^2 \pm u_\alpha\sqrt{\hat{\mu} + \frac{1}{4}u_\alpha^2}$ $\hat{\mu} > 50$: $\hat{\mu} \pm u_\alpha\sqrt{\hat{\mu}}$	$n\hat{p} > 5$, $n\hat{q} > 5$, $10 < n < N-10$: zie kolom 1, met u_α vervangen door $u'_\alpha = u_\alpha\sqrt{1-n/N}$
K waarnemingen		$x_1, n_1; \ldots ; x_k, n_k$ Analoog met $n = n.$ en $\hat{p} = x./n.$	$x_1, \ldots, x_k$; Analoog met $\hat{\mu} = x.$ en intervalgrenzen delen door k	-
Toets		H_o: $p = p_o$ $np_o \geq 5$, $nq_o \geq 5$: $u = \dfrac{\lvert\hat{p} - p_o\rvert}{\sqrt{p_o q_o/n}}$ anders : d.m.v. betrouwb.heids interval	H_o: $\mu = \mu_o$ $\mu_o \geq 5$: $u = \lvert\hat{\mu} - \mu_o\rvert/\sqrt{\mu_o}$ $k\mu_o \geq 5$: $u = \lvert\bar{x}. - \mu_o\rvert/\sqrt{\mu_{o/k}}$ anders : d.m.v. betr.interval	H_o: $p = p_o$ $np_o \geq 5$, $nq_o \geq 5$, $10 < n < N-10$: $u = \dfrac{\lvert\hat{p} - p_o\rvert}{\sqrt{p_o q_o(1-n/N)/n}}$ anders : d.m.v. betr. interval
Nauwkeurigheid		gegeven Δp, α Steekproefgrootte: $n = \dfrac{p'q'u_\alpha^2}{(\Delta p)^2}$ p' is een voorlopige schatting van p	gegeven $\Delta\mu$, α Aantal waarn.: $K = \dfrac{\mu' u_\alpha^2}{(\Delta\mu)^2}$ µ' is een voorlopige schatt.	gegeven Δp, α aantal waarn. : $n = \dfrac{p'q'u_\alpha^2}{(\Delta p)^2 + p'q'u_\alpha^2/N}$ p' is een voorlopige schatting van p

* : indien $p > \frac{1}{2}$, gebruike men: $P(\underline{x}=x;n,p) = P(\underline{x}=n-x;n,q)$

** : $P(\underline{x}=x;n,p) = \varphi(x+\frac{1}{2};\mu,\sigma) - \varphi(x-\frac{1}{2};\mu,\sigma)$

*** : te vereenvoudigen tot: $\hat{p} + u_\alpha^2(\frac{1}{2}-\hat{p})/n \pm u_\alpha\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$

**** Voor een Poissonproces: $e^{-\lambda T}(\lambda T)^x/x!$ gelden analoge formules; 1 waarn.: x in tijd T met $\hat{\lambda} = x/T$; we vervangen $\hat{\mu}$ door $\hat{\lambda}T$ dwz. intervalgrenzen delen door T. Voor K waarnemingen $x_1, T_1; \ldots x_k, T_k$ analoog met x. en T. i.p.v. x en T; Tijd benodigd voor een gegeven nauwkeurigheid $\Delta\lambda, \alpha$ wordt: T of T. $= \dfrac{\lambda' u_\alpha^2}{(\Delta\lambda)^2}$

Variantie-analyse

1. Het schema.

Bron	SS	df	MS	EMS
A_{1*}	S_{1*}	n_{1*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{1*2*}\overline{\sigma^2}_{1*2*} + c_{1*3*}\overline{\sigma^2}_{1*3*} + c_{1*}\overline{\sigma^2}_{1*})/c_{1*}$
A_{2*}	S_{2*}	n_{2*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{1*2*}\overline{\sigma^2}_{1*2*} + c_{2*3*}\overline{\sigma^2}_{2*3*} + c_{2*}\overline{\sigma^2}_{2*})/c_{2*}$
A_{3*}	S_{3*}	n_{3*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{1*3*}\overline{\sigma^2}_{1*3*} + c_{2*3*}\overline{\sigma^2}_{2*3*} + c_{3*}\overline{\sigma^2}_{3*})/c_{3*}$
A_{1*2*}	S_{1*2*}	n_{1*2*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{1*2*}\overline{\sigma^2}_{1*2*})/c_{1*2*}$
A_{1*3*}	S_{1*3*}	n_{1*3*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{1*3*}\overline{\sigma^2}_{1*3*})/c_{1*3*}$
A_{2*3*}	S_{2*3*}	n_{2*3*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*} + c_{2*3*}\overline{\sigma^2}_{2*3*})/c_{2*3*}$
A_{1*2*3*}	S_{1*2*3*}	n_{1*2*3*}		$\sigma^2 + n(c_{1*2*3*}\overline{\sigma^2}_{1*2*3*})/c_{1*2*3*}$
A_{1234*}	S_{1234*}	n_{1234*}		σ^2
A^*	S^*	n^*		

Schema voor 3 factoren met herhalingen.

2. Verklaring der symbolen.

Zoals gebruikelijk, is $x_{.j} = \sum_i x_{ij}$; $x_{..} = \sum_{i,j} x_{ij}$

$\sum_i x^2_{i.} = \sum_i (\sum_j x_{ij})^2$; $x^2_{..} = (\sum_{i,j} x_{ij})^2$ etc.

Verder is voor faktor A_i : $i = 1, 2, \ldots$

populatiegrootte : N_i

aantal niveaus in steekproef : n_i $\quad n_{ij} = n_i n_j$

totaal aantal waarnemingen : n

korrektieterm : $S_o = x^2_{....}/n = I$

ruwe kwadratensom : $S_i = n_i \sum_k x^2_{..k.}/n$ (k = i^e index)

$S_{12} = n_{12} \sum_{i,j} x^2_{ij..}/n$ etc.

gekorrigeerde kwadratensom : $S_{i*} = S_i - S_o = S_i - I$

aantal vrijheidsgraden : $n_{i*} = n_i - n_o = n_i - 1$

gemiddeld kwadraat : $M_{i*} = S_{i*}/n_{i*}$

korrektie voor eindige pop. : $c_{i*} = 1 - n_i/N_i$ $\quad c_i = 1$

variantie v.h. gemiddelde effect : $\overline{\sigma^2}_{i*} = \sigma^2_{i*}/n_i$ $\quad \overline{\sigma^2}_{i*j*} = \sigma^2_{i*j*}/n_{ij}$

$\overline{\sigma^2}_{ij*} = \sigma^2_{ij*}/n_{ij}$

3. Nadere toelichting van het schema.

Voor een index met * leest men "tussen" (between), voor een index zonder * "binnen" (within). Zo is A_{1*} het "tussen A_1-effect"; A_{1*2*} de interaktie tussen A_1 en A_2; A_{12*} is het "tussen A_2 binnen A_1-effect"; A_{12*3*} de interaktie tussen A_2 en A_3 binnen A_1; A_{1234*} is, als A_4 de "faktor" herhalingen is: het "tussen herhalingen binnen celleneffekt", enz.

Is faktor A_2 genest in A_1, dan treedt index 2 nooit op zonder index 1 (ongesterd) dus A_{2*} bestaat niet, eveneens niet A_{1*2*}, maar deze worden in feite samengevoegd $A_{1*2*} + A_{2*} = A_{12*}$. Is A_3 genest in A_2 en A_2 in A_1, dan bestaan dus alleen A_{1*}, A_{12*} en A_{123*}.

Met de kwadratensommen, bronnen en aantal vrijheidsgraden rekenen we <u>symbolisch</u>.

Hiertoe definiëren we (en lees voor P resp. S, A of n):

$P_{i*} = P_i - I$; $I = P_o$ is de identiteit dwz. $P_{i*}\, I = P_{i*}$ en $I^2 = I$.

Verder is $P_{ij} = P_i P_j$; $P_{i*j*} = P_{i*}\, P_{j*}$; $P = P_{123..}$; $P^* = P - P_o$ etc.

Zo is dus bv. $S_{1*2*} + S_{2*} = S_{2*}(S_{1*} + I) = S_{12*}$.

Gegeven het model, dan is hieruit de splitsing in df en SS te vinden, vb.:

model : $a = \alpha_o + \alpha_{1*} + \alpha_{3*} + a_{12*} + \alpha_{1*3*} + a_{12*3*} + a_{1234*}$

bronnen : $A = A_o + A_{1*} + A_{3*} + A_{12*} + A_{1*3*} + A_{12*3*} + A_{1234*}$

SS : $S = S_o + S_{1*} + S_{3*} + S_{12*} + S_{1*3*} + S_{12*3*} + S_{1234*}$

df : $n = n_o + n_{1*} + n_{3*} + n_{12*} + n_{1*3*} + n_{12*3*} + n_{1234*}$

De α's zijn konstanten, de a's zijn stochastische variabelen. Eigenlijk moeten we schrijven:

$$a_{ijkl} = \alpha_o + (\alpha_{1*})_i + (\alpha_{3*})_j + (a_{12*})_{ij} + (\alpha_{1*3*})_{ik} + (a_{12*3*})_{ijk} + (a_{1234*})_{ijkl}.$$

Voor de coëfficiënten c geldt: $c_{ij} = c_i c_j$; $c_{i*j*} = c_{i*} c_{j*}$; $c_{i*}/c_{i*} = c_i/c_{i*} = 1$ ook als $c_{i*} = 0$. Deze c's hebben dezelfde indices als de bijbehorende σ^2-term bv. $c_{12*}\sigma^2_{12*}$.

Welke σ^2-termen voorkomen volgt uit het model, de overige laten we dus weg.

4. Een eenvoudig voorbeeld.

We beschouwen een variantie-analyse volgens het model

$$a = \alpha_o + a_{1*} + \alpha_{2*} + a_{1*2*} + a_{123*} .$$

Faktor A_1 (rij-effekt) op $n_1 = 4$ niveaus met $N_1 = \infty$ dus $c_{1*} = 1$

Faktor A_2 (kolom-effekt) op $n_2 = 3$ niveaus met $N_2 = n_2$ dus $c_{2*} = 0$

Faktor A_3 (herhalingen) op $n_3 = 2$ niveaus met $N_3 = \infty$ dus $c_{3*} = 1$.

Splitsing in orthogonale komponenten geeft:

$$x_{ijk} = \bar{x}_{...} + (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}) + (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...}) + (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})$$

$$\sum_{ijk} x^2_{ijk} = \Sigma(\bar{x}_{...})^2 + \Sigma(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2 + \Sigma(\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2 + \Sigma(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2 + \Sigma(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$$

of

SS: $S = S_o \quad + \quad S_{1*} \quad + \quad S_{2*} \quad + \quad S_{1*2*} \quad + \quad S_{123*}$

df: $n = n_o \quad + \quad n_{1*} \quad + \quad n_{2*} \quad + \quad n_{1*2*} \quad + \quad n_{123*}$

Waarnemingen:

	j →						$x_{i..}$	$x^2_{i..}$
i ↓	2	2	10	8	6	7	35	1225
	12	9	12	15	9	10	67	4489
	12	12	12	13	15	15	79	6241
	5	5	10	11	8	2	41	1681
$x_{.j.}$	59		91		72		222	13636
$x^2_{.j.}$	3481		8281		5184		16946	

Berekeningen:

$I = x^2_{...}/n = 222^2/24 = 2053.50$;

$S_1 = n_1 \, \Sigma x^2_{i..}/n = 4 \times 13636/24 = 2272.67$; $S_{1*} = S_1 - I = 219.17$

$S_2 = n_2 \, \Sigma x^2_{.j.}/n = 3 \times 16946/24 = 2118.25$; $S_{2*} = S_2 - I = 64.75$

$S_{12} = n_{12} \Sigma x^2_{ij.}/n = 12 \times 4782/24 = 2391$; $S* = S - I = 368.50$

$S = n \, \Sigma x^2_{ijk}/n = 2422$; $S_{1*2*} = S_{12} - S_1 - S_2 + I = 53.58$

$S_{123*} = S_{123} - S_{12} = 31.00$

Variantieanalyse:

bron	SS	df	MS	EMS	$F^{\nu_1}_{\nu_2}(\alpha)$
A_{1*}	219.17	3	73.06	$\sigma^2 + 6\sigma^2_{1*}$	$F^3_{12} = 3.49$
A_{2*}	64.75	2	32.38	$\sigma^2 + 2\sigma^2_{1*2*} + 8\sigma^2_{2*}$	$F^2_6 = 5.14$
A_{1*2*}	53.58	6	8.93	$\sigma^2 + 2\sigma^2_{1*2*}$	$F^6_{12} = 3.00$
A_{123*}	31.00	12	2.58	σ^2	
$A*$	368.50	23		$\sigma^2 = \sigma^2_{123*}$	$\alpha = 0.05$

We zien dat M_{1*} tegen M_{123*}, maar M_{2*} tegen M_{1*2*} getoetst moet worden.

Regressie en correlatie

I. Correlatie

Definities: covariantie : $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \sigma_{xy} = E(\underline{x}-\mu_x)(\underline{y}-\mu_y) = E(\underline{x}\underline{y}) - E(\underline{x})E(\underline{y})$

variantie : $\mathrm{var}\ \underline{x} = \sigma_x^2 = E(\underline{x} - \mu_x)^2 = E\underline{x}^2 - [E(\underline{x})]^2$

correlatiecoëff.: $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$; $|\rho| \leq 1$

Schatters: voor σ_{xy} : $\underline{s}_{xy} = (\Sigma\underline{x}\underline{y} - \Sigma\underline{x}\Sigma\underline{y}/n)/(n-1)$

σ_x^2 : $\underline{s}_x^2 = [\Sigma\underline{x}^2 - (\Sigma\underline{x})^2/n]/(n-1)$

ρ : $\underline{r} = \underline{s}_{xy}/\underline{s}_x\underline{s}_y$

Toets voor de hypothese H_0 : $\rho = 0$ zie tabel 2.2 of gebruik (zie III) als toetsingsgrootheid: $\underline{t}_{n-2} \simeq \underline{r}\sqrt{(n-2)/(1-\underline{r}^2)}$.

Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk dan is $E(\underline{x}\underline{y}) = E(\underline{x})E(\underline{y})$ en dus $\sigma_{xy} = \rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$. Omgekeerd geldt dit niet nl.:

Stelling: is de simultane verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ symmetrisch t.o.v. een lijn evenwijdig aan één der coördinaatassen, dan is $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$.

Opmerking: Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ simultaan normaal verdeeld dan geldt wel: $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x},\underline{y}$ stochastisch onafhankelijk ($\underline{x}$ en $\underline{y}$ elk afzonderlijk normaal is niet voldoende).

Is $\underline{u} = \Sigma a_i\underline{x}_i$, $\underline{v} = \Sigma b_j\underline{x}_j$ dan is

$$\mathrm{cov}(\underline{u},\underline{v}) = \sum_{ij} a_i b_j\ \mathrm{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j);\quad \mathrm{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_i) = \mathrm{var}\ \underline{x}_i$$

$$\mathrm{var}\ \underline{u} = \sum_{ij} a_i a_j\ \mathrm{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j)$$

$$\mathrm{var}\ \underline{u} = \sum_{i} a_i^2\ \mathrm{var}\ \underline{x}_i \text{ indien de } \underline{x}_i \text{ ongecorreleerd } (\rho = 0) \text{ zijn.}$$

II. Meervoudige lineaire regressie

Model: $\underline{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \underline{e}$, $\mathrm{var}\ \underline{e} = \sigma^2$.

Gevraagd: Uit n waarnemingen (of instellingen) van de x_i en de bijbehorende y_i, schattingen te geven voor de regressiecoëfficiënten β_i en σ^2.

Zo ontstaat ons steekproefmodel: $\underline{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \underline{e}_i$, $i = 1,\ldots,n$

of in matrixnotatie: $\underline{y} = X\beta + \underline{e}$ met $E\underline{e} = 0$ en $\mathrm{var}\ \underline{e} = \sigma^2 I_n$.

Hierin is $\underline{y} = (\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n)'$ de vektor der waarnemingen, response vektor; $\beta = (\beta_0,\ldots,\beta_k)'$ de vektor der regressiecoëfficiënten; $\underline{e} = (\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)'$ de storingsvektor (random disturbance); $X = (x_{*0}x_{*1}\ldots x_{*k})$ de matrix der instellingen, design matrix; $x_{*0} = (1,\ldots,1)'$.

Zij $\underline{b}$ de kleinste kwadratenschatter voor β, en $\hat{y} = Xb$; Zij $\| y \|^2 = \Sigma y_i^2$. Dus $\| y - \hat{y} \|^2 = \| y - Xb \|^2 = \min_{\beta} \| y - X\beta \|^2$. Oftewel $y - Xb \perp \langle X \rangle$, d.w.z. $y - Xb$ loodrecht de kolommen van X, dus $X'(y - Xb) = 0$.

Zo ontstaan de normaalvergelijkingen $X'Xb = X'y$ en, als X van volle rang is, $b = (X'X)^{-1}X'y$ met var $\underline{b} = (X'X)^{-1}\sigma^2$; var $\underline{\hat{y}} = X(X'X)^{-1}X'\sigma^2$. Schatting voor σ^2 is $s^2 = \| y - \hat{y} \|^2/(n-k-1) = (\| y \|^2 - b'X'y)/(n-k-1)$. Zijn de kolommen van X orthogonaal, dan geeft dat veel vereenvoudiging, nl. dan is $X'X$ en dus ook $(X'X)^{-1}$ een diagonale matrix, zodat dan

$$b_i = \frac{x'_{*i}y}{\| x_{*i} \|^2} \text{ ; var } \underline{b}_i = \frac{\sigma^2}{\| x_{*i} \|^2} \text{ ; cov}(\underline{b}_i, \underline{b}_j) = 0 \text{ voor } i \neq j \text{ .}$$

$$s^2 = [\| y \|^2 - \sum_i \frac{(x'_{*i}y)^2}{\| x_{*i} \|^2}]/(n-k-1) \text{ .}$$

Toetsingsgrootheid voor de hypothese $\beta_k = 0$ is $\frac{1}{\underline{s}^2} \frac{(x'_{*k}\underline{y})^2}{\| x_{*k} \|^2} \simeq \underline{F}^1_{n-k-1}$.

Betrouwbaarheidsinterval voor β_i: $\underline{b}_i \pm t_\nu(\frac{1}{2}\alpha)\underline{s}/\| x_{*i} \|$; $\nu = n-k-1$.

III. Enkelvoudige lineaire regressie

Dit is geheel analoog aan II met $k = 1$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i = \beta_0 + \beta_1(x_i - \bar{x}); \; i = 1,\ldots,n; \; \bar{x} = \Sigma x_i/n.$$

Regressielijn: $\hat{y}_i = b_0 + b_1(x_i - \bar{x})$

$$b_0 = \frac{x'_{*0}y}{\| x_{*0} \|^2} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \bar{y}; \; b_1 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})y_i}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = s_{xy}/s_x^2 \text{ .}$$

We zien dat $r = b_1 s_x/s_y$ en $\hat{y}_i - \bar{y} = b_1(x_i - \bar{x})$ zodat $\frac{\hat{y}_i - \bar{y}}{s_y} = r \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$

$\| \hat{y} - \bar{y} \|^2 = b_1^2 \| x - \bar{x} \|^2 = r^2 \| y - \bar{y} \|^2$. Hierin is $\| y - \bar{y} \|^2 = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$; $\| x - \bar{x} \|^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$; $\| \hat{y} - \bar{y} \|^2 = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

De regressie-analyse wordt nu:

oorsprong variatie	KS	ν	EMS
regressie	$r^2 \| y - \bar{y} \|^2$	1	
fout	$(1 - r^2) \| y - \bar{y} \|^2$	$n - 2$	σ^2
totaal	$\| y - \bar{y} \|^2$	$n - 1$	

$s^2 = \| y - \hat{y} \|^2/(n - 2)$.

Toets voor H_0: $\beta_1 = 0$: $\underline{F}^1_{n-2} \simeq \underline{t}^2_{n-2} \simeq \dfrac{\underline{r}^2}{(1-\underline{r}^2)/(n-2)}$ oftewel $\underline{r}\sqrt{(n-2)/(1-\underline{r}^2)} \simeq \underline{t}_{n-2}$. Betrouwbaarheidsinterval voor β_1: $\underline{b}_1 \pm \underline{t}_{n-2}(\frac{1}{2}\alpha)\underline{s}_b$ met $\underline{s}^2_b = \dfrac{\underline{s}^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$.

IV. Voorbeeld polynoom aanpassing

Is y slechts afhankelijk van één variabele x en wil men een polynoom aanpassen $\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k$, dan gaat men analoog te werk als onder II. De $(i+1)^e$ kolom van de matrix X wordt dan $x_{*i} = (x^i_1, \ldots, x^i_n)'$; $i = 1, \ldots, k$. Zijn de waarnemingen x_i aequidistant, d.w.z. $x_i - x_{i-1} = d$, dan gaat men over op orthogonale polynomen. Deze zijn getabelleerd t/m φ_3 en voor n t/m 15 in tabel 9.6.

Voorbeeld: X_i:	55	60	65	70	75	80	85	90
y_i:	1,16	1,52	1,95	2,43	2,96	3,63	4,24	5,01

Gevraagd een polynoom aan te passen $\hat{y} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots$.

Oplossing: We gaan over op de variabele $x = (X - \bar{X})/d = (X - 72{,}5)/5$ en gebruiken de orthogonale polynomen voor n = 8. We passen dus aan $\hat{y} = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots$ waarbij $\varphi_0 = 1$; $\varphi_1 = 2x$; $\varphi_2 = (4x^2 - 21)/4$.

Het rekenschema wordt:

y	x_{*0}	x_{*1}	x_{*2}	x_{*3}
1,16	1	-7	7	-7
1,52	1	-5	1	5
1,95	1	-3	-3	7
2,43	1	-1	-5	3
2,96	1	1	-5	-3
3,61	1	3	-3	-7
4,24	1	5	1	-5
5,01	1	7	7	7
$x'_{*i}y$	22,88	46,06	5,32	0,14
$\Vert x_{*i}\Vert^2$	8	168	168	264
$KS(\varphi_i)$	65,4368	12,6281	0,1685	0,0001
b_i	2,860	0,274	0,0317	0,0000

Hierin is: $KS(\varphi_i) = \dfrac{(x'_{*i}y)^2}{\Vert x_{*i}\Vert^2}$;

$b_i = \dfrac{x'_{*i}y}{\Vert x_{*i}\Vert^2}$;

$s^2 = [\Vert y\Vert^2 - \sum_i KS(\varphi_i)]/(n-k-1)$

var $\underline{b}_i = \sigma^2/\Vert x_{*i}\Vert^2$. Dus

$y^2 = 78{,}2348$;

$s^2 = 0{,}0013/4 = 0{,}0003$

$KS(\varphi_3) = 0{,}0001$ dus φ_3 geeft geen significante bijdrage.

De regressievergelijking wordt:

$\hat{y} = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 = 2{,}860 + 0{,}274\,\dfrac{X-72{,}5}{5} + 0{,}0317\left[\dfrac{4(x-72{,}5)^2/25-21}{4}\right]$ oftewel $\hat{y} = 1{,}401 - 0{,}0760X + 0{,}00127X^2$; $s^2 = 0{,}0014/5 = 0{,}00028$; $\nu = 5$.

Runs

We beschouwen alleen reeksen van alternatieven. Stel we hebben n elementen, bestaande uit n_1 a's en n_2 b's ; $n_1 + n_2 = n$.
Deze kunnen op $\binom{n}{n_1}$ manieren worden gerangschikt. Ondersteld wordt dat elke rangschikking gelijke kans heeft op te treden.
Noem het aantal a-runs r_1, het aantal b-runs r_2 ; $r_1 + r_2 = r$.

<u>De kansverdelingen zijn</u>:

1. $$P(\underline{r}_1 = r_1 , \underline{r}_2 = r_2) = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_2-1}}{\binom{n}{n_1}} \cdot F(r_1 , r_2)$$

$$\text{waarbij } F(r_1 , r_2) = \begin{cases} 1 & \text{als } |r_1 - r_2| = 1 \\ 2 & \text{als } |r_1 - r_2| = 0 \\ 0 & \text{als } |r_1 - r_2| > 1 \end{cases}$$

Hieruit volgt direct de verdeling van het totaal aantal runs $\underline{r}$:

2. $$P(\underline{r} = 2k) = 2\binom{n_1 - 1}{k - 1}\binom{n_2 - 1}{k - 1} / \binom{n}{n_1}$$

$$P(\underline{r} = 2k + 1) = \frac{\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1} + \binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k}}{\binom{n}{n_1}}$$

3. $$P(\underline{r}_1 = r_1) = \binom{n_1 - 1}{r_1 - 1}\binom{n_2 + 1}{r_1} / \binom{n}{n_1}$$

Dit is de marginale verdeling van de verdeling in 1.

4. $$P(\text{minstens 1 a-run} \geqslant k) = \sum_{i=1}^{[n_1/k]} (-1)^{i+1} \binom{n_2 + 1}{i}\binom{n - ik}{n_2} / \binom{n}{n_2} \equiv N(k) / \binom{n}{n_2}.$$

5. $$P(\text{max. a-run} = k) = \frac{N(k)-N(k+1)}{\binom{n}{n_1}}$$

Voor tabellen betreffende runs zie 7.6 t/m 7.9.

<u>Enkele momenten</u>:

$$E\,\underline{r}_1 = n_1(n_2 + 1) / n \qquad \text{var } \underline{r}_1 = \frac{n_1 n_2 (n_1-1)(n_2+1)}{n^2(n-1)}$$

$$E\,\underline{r} = 1 + 2n_1 n_2 / n \qquad \text{var } \underline{r} = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n)}{n^2(n-1)}$$

Enkele verdelingsvrije toetsen

Verdelingsvrije methoden (distributionfree-, non parametric methods) zijn methoden die onafhankelijk zijn van de verdeling der betreffende variabelen.
De belangrijkste zijn:

1. De tekentoets (sign test).

Algemeen gezegd is dit een toets voor de nulhypothese H_0: $p = \frac{1}{2}$.
De enige aanname omtrent de variabelen is dat alle onderling onafhankelijk zijn.

a. Eén serie van n waarnemingen $x_1,\dots,x_n$.
Men kan de tekentoets gebruiken als analogon van de t-toets voor het testen van de hypothese $\mu = \mu_0$. H_0 luidt dan: $\underline{P}[\underline{x} < \mu_0] = \underline{P}[\underline{x} > \mu_0] = \frac{1}{2}$.
Bij de t-toets wordt ondersteld dat $\underline{x}$ normaalverdeeld is, bij de tekentoets in dit geval alleen dat $\underline{x}$ een symmetrische verdeling bezit.
Natuurlijk is de tekentoets ook te gebruiken als mediaan-toets.

b. Eén serie van n waarnemingsparen $(x_1,y_1);\dots;(x_n,y_n)$.
Over de verdeling der $\underline{x}_i$, $\underline{y}_i$ wordt niets ondersteld, alleen dat alle onafhankelijk zijn. De tekentoets wordt gebruikt om te toetsen of er een verschil is tussen de 2 reeksen waarnemingen, H_0: $P[\underline{x}_i < \underline{y}_i] = P[\underline{x}_i > \underline{y}_i] = \frac{1}{2}$.
Indien $x_i - y_i > 0$, zet men een plus-, indien $x_i - y_i < 0$ een minteken (vandaar de naam tekentoets). Als toetsingsgrootheid neemt men het aantal + of - tekens en vergelijkt dit aantal K met de kritieke waarden in tabel 7.1.
Voor $n > 10$ kan men normaal benaderen:

$$\underline{u} = \frac{|\underline{K} - \frac{1}{2}n| - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

2. De toets van Wilcoxon

Gegeven 2 onafhankelijk steekproeven $x_1,\dots,x_{n_1}$ en $y_1,\dots,y_{n_2}$. Onderstel $n_1 \leq n_2$. Men wil toetsen H_0: $\underline{x} \simeq \underline{y}$ d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben dezelfde continue verdeling. De alternatieve hypothese is dat de verwachtingen verschillen. Hiertoe gebruikt men de toetsingsgrootheid $\underline{T}_1$.
De $n_1 + n_2$ waarnemingen worden in grootte gerangschikt, waarna rangnummers worden toegekend. T_1 = som van de rangnummers in de eerste steekproef.
Voor kritieke waarden van T_1, zie tabel 7.2.
Voor grotere n_1 en n_2 ($n_1 > 5$ en $n_2 > 20$) kan men normaal benaderen (eventueel met discontinuiteits correctie van $\frac{1}{2}$)

$$\frac{\underline{T}_1 - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \text{ met } \mu = \tfrac{1}{2}n_1(n_1 + n_2 + 1);\ \sigma = \sqrt{\tfrac{1}{12}\, n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}.$$

$$\underline{\text{Vb}}.\quad \begin{array}{lllllllllllllll} x_i: & 18 & 20 & 22 & 14 & 9 & 10 & 10 & & 5\frac{1}{2} & 8\frac{1}{2} & 10 & 4 & 1 & 2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} \\ y_i: & 20 & 19 & 18 & 27 & 24 & & & \text{geeft} & 8\frac{1}{2} & 7 & 5\frac{1}{2} & 12 & 11 & & \end{array}$$

Dit zijn de rangnummers van de 12 geordende waarnemingen; $n_1 = 5$, $n_2 = 7$.
Bij gelijke rangnummers wordt het gemiddelde toegekend. We vinden $T_1 = 44$.
Met tabel 7.2 en $\alpha = 0{,}05$ $20 < \underline{T}_1 < 45$.

3. De rangcorrelatiecoëfficiënt van Kendall.

Gegeven één serie van n paren rangnummers. In het geval men uitgaat van paren waarnemingen, geeft men deze eerst rangnummers. Voor series met gelijke waarnemingen (ties) wordt verwezen naar de litteratuur.
Men kan deze als toets gebruiken voor de hypothese dat beide reeksen onafhankelijk zijn. Als maat voor afhankelijkheid is genomen:

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{S}}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{4\underline{P}}{n(n-1)} - 1$$

Hierin is S het aantal (P) paren waaraan in beide reeksen dezelfde volgorde is toegekend, minus het aantal (Q) overige paren. Het aantal mogelijke paren is $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Dus $|\tau| \leqslant 1$.
$\tau = 1$ indien beide reeksen rangnummers gelijk zijn; $\tau = -1$ indien beide reeksen juist tegengesteld zijn. Tabel 7.3 geeft kritieke waarden van P.
Voor $n > 10$ kan men normaal benaderen:

$$\underline{u} = \frac{|\underline{S}|-1}{\sigma} \qquad \text{met } \sigma = \sqrt{n(n-1)(2n+5)/18}$$

vb. Stel de rangnummers zijn: $\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{matrix}$ oftewel $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{matrix}$.

Na 1 zijn er 4 groter, na 4 juist 1, na 2 juist 2 en na 5 geeneen, dus P = 4+1+2+0=7.

4. De rangcorrelatiecoëfficient van Spearman.

Een toets analoog aan die van Kendall. Als maat van afhankelijkheid is genomen de gewone correlatiecoëfficiënt tussen de 2 series rangnummers:

$$\underline{r}_s = 1 - \frac{6\,\Sigma\,\underline{d}_i^2}{n^3 - n}$$

Hierin is d_i het verschil tussen de rangnummers in het i^e paar.

$|r_s| \leqslant 1$; $r_s = 1$ indien beide reeksen rangnummers gelijk zijn; $r_s = -1$ indien beide reeksen tegengesteld zijn.
Zo is voor de serie onder punt 3: $\Sigma\, d_i^2 = 1 + 0 + 4 + 1 + 4 = 10$. Kritieke waarden van Σd_i^2 zijn getabelleerd in tabel 7.4.

Voor $n > 10$ kan men als toetsingsgrootheid nemen:

$$\underline{t}_{n-2} = \underline{r}_s \sqrt{\frac{n-2}{1-\underline{r}_s^2}} \quad .$$

5. De methode der m rangschikkingen (Toets van Friedman)

Gegeven m rangschikkingen van n objecten. We willen toetsen of deze onafhankelijk zijn. De rangnummers in de i^e rangschikking zijn $a_{i1}, \ldots, a_{in}$
Maat van afhankelijkheid is:

$$\underline{K} = \underline{S}/S_{max}$$

Hierin is $S_{max} = \frac{1}{12}m^2 n(n^2-1)$
en $S = \Sigma_j \; S_j^2 - (\Sigma\, S_j)^2/n$ met $S_j = a_{\cdot j}$

Er geldt: $0 \leqslant K \leqslant 1$; $K = 1$ indien alle m rangschikkingen gelijk zijn.
Kritieke waarden van $\underline{S}$ zijn gegeven in tabel 7.5 .

Verwerking van een serie waarnemingen

Gegeven : n waarnemingen van $\underline{x}$: $x_1, \ldots, x_n$.

Gevraagd : schattingen van en betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ en de spreiding (standaardafwijking) σ van $\underline{x}$.

I Kleine serie

Range, spreidingsbreedte : $R = x_{max} - x_{min}$.

Afrondingsinterval voor x_i : $d < \frac{1}{2} s$ of sneller $d < R/2\sqrt{n}$ als $n \leqslant 10$ of $d < \bar{R}/2\sqrt{m}$ als $n = km + r$ en $m \leqslant 10$.

Kodering : $y_i = (x_i - c)/d$.

Schatter voor μ : $\underline{\bar{x}} = c + d \sum \underline{y}_i / n$.

Afrondingsinterval voor $\bar{x}$: resp. $a < s/2\sqrt{n}$ of $a < R/2n$ of $a < \bar{R}/2\sqrt{nm}$.

Schatter voor σ : $s = \sqrt{\underline{s}^2}$; $\underline{s}^2 = d^2 [\sum \underline{y}_i^2 - (\sum \underline{y}_i)^2 / n]/(n - 1)$; $\nu = n - 1$.

Afrondingsinterval voor s : $a < s/\sqrt{8\nu}$.

Ruwere schatter voor o : $\underline{s} = A_n \underline{R}$ resp. $\underline{s} = A_m \underline{\bar{R}}$. Voor A_n zie tabel 8.3.
$\nu = [0{,}9\ (n - 1)]$ resp. $\nu = [0{,}9\ (m - 1)]$.
Ondersteld is dat $\underline{x}$ redelijk normaal verdeeld is.

Betrouwbaarheidsinterval voor μ : $\underline{\bar{x}} - t_\nu(\frac{1}{2}\alpha)\underline{s}/\sqrt{n} < \mu < \underline{\bar{x}} + t_\nu(\frac{1}{2}\alpha)\underline{s}/\sqrt{n}$.

Betrouwbaarheidsinterval voor σ : $a_1 \underline{s} < \sigma < a_2 \underline{s}$. Voor a_1, a_2 zie tabel 3.2.
Ondersteld is dat $\underline{x}$ redelijk normaal verdeeld is.

Voorbeeld :

x_i	x_i afgerond	$y_i = (x_i - 15.70)/0.01$	y_i^2
15.813	15.81	11	121
.705	.70	0	0
.748	.75	5	25
.801	.80	10	100
.720	.72	2	4
.743	.74	4	16
R = 0.108	n = 6	$\sum y_i = 32$	$\sum y_i^2 = 266$

Afronding x_i : $d < 0.108 / 2\sqrt{6} = 0.022$ dus $d = 0.01$.

Gemiddelde : $\bar{x} = 15.70 + 0.01 \times 32/6 = 15.753$.

Afronding $\bar{x}$: $a < 0.108 / 12 = 0.009$ dus $a = 0.001$.

Variantie : $s^2 = (0.01)^2 [266 - 32^2/6]/5 = 0.0019$.

Spreiding : $s = \sqrt{0.0019} = 0.0436 \sim 0.044$ $\nu = 5$.

Spreiding berekend uit R : $s = 0.395 \times 0.108 = 0.043$ $\nu = [0.9 \times 5] = 4$.

Betrouwbaarheidsinterval μ : $15.753 \pm 2.57 \times 0.044/\sqrt{6}$ oftewel $15.707 < \mu < 15.799$
$\alpha = 5\%$.

Betrouwbaarheidsinterval σ : $0.62 \times 0.044 < \sigma < 2.45 \times 0.044$ oftewel
$0.027 < \sigma < 0.108$ $\alpha = 5\%$.

II Grote serie

Geen afronding	: de afronding geschiedt door afturven. De waarnemingen worden ingedeeld in gelijke intervallen (klassen), zódanig dat iedere waarneming ondubbelzinnig in één bepaald interval thuishoort. Alle waarnemingen in één interval worden geacht samen te vallen met het intervalsmidden.
Aantal intervallen	: $\sim\sqrt{n}$.
Kodering	: kies het midden van een interval als nulpunt en nummer de intervallen ... -2,-1,0,1,2,... Dit komt neer op een kodering y = (x - c)/d waarin c = het gekozen nulpunt en d = intervalbreedte.
Schatter voor μ	: $\underline{\bar{x}} = c + d\sum f_i\, \underline{y}_i/n$.
Schatter voor σ²	: $\underline{s}^2 = d^2[\sum f_i\, \underline{y}_i^2 - (\sum f_i\, \underline{y}_i)^2/n]/(n - 1)$ f_i = aantal waarnemingen in klasse i.
Sheppard's korrektie	: door het samenvoegen der waarnemingen in klassen, ontstaat een fout in s^2. Deze kan men reduceren als volgt: $s'^2 = s^2 - d^2/12$.

Voor betrouwbaarheidsinterval en afronding van $\bar{x}$,s zie I.

Voorbeeld

x_i						
15.781	15.813	15.839	15.695	15.822	15.841	15.755
.728	.705	.909	.850	.752	.800	.825
.817	.748	.799	.823	.850	.883	.700
.785	.801	.840	.912	.798	.675	.710
.799	.720	.856	.816	.941	.850	.848
.798	.743	.728	.825	.855	.668	.695
.768	.781	.895	.820	.665	.792	.740
						.899

Bewerking

interval	turfstaat	f_i	y_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$	
15.650 - .699	卌	5	-3	-15	45	
15.700 - .749	卌 ////	9	-2	-18	36	$\bar{x} = 15.8245 + 0.050 \times \frac{-30}{50} = 15.794$
15.750 - .799	卌 卌 /	11	-1	-11	11	
15.800 - .849	卌 卌 ////	14	0	0	0	$s^2 = (0.050)^2[112 - 30^2/50]/49 = 0.004796$
15.850 - .899	卌 ///	8	1	8	8	$s = 0.070$; $\nu = 49$
15.900 - .949	///	3	2	6	12	
	$\sum$	50		-30	112	

Foutenvoortplanting

Bij experimenten is men vaak niet geïnteresseerd in de direkte waarnemingen zelf, doch in een uit die waarnemingen berekende grootheid die bv. niet rechtstreeks gemeten kan worden.

Gegeven het model: $y_g = f(x_{1g},x_{2g})$; f is bekend, $x_g = (x_{1g},x_{2g})$ onbekend.
$\underline{x}_i = x_{ig} + \delta_i + \underline{e}_i$ met $E\underline{e}_i = 0$, var $\underline{e}_i = \sigma_i^2$, $i = 1,2$.
Hierin is $(i = 1,2)$: x_{ig} de gezochte waarde van de direkte waarneming $\underline{x}_i$;
$\delta_i := E\underline{x}_i - x_{ig} = \mu_i - x_{ig}$ de <u>systematische</u> fout in $\underline{x}_i$; $\underline{e}_i = \underline{x}_i - \mu_i$ de <u>toevallige</u> fout in $\underline{x}_i$.
De toevallige fouten worden ongecorreleerd ondersteld, d.w.z. $E\underline{e}_1\underline{e}_2 = 0$.
Gevraagd: Uit $\underline{y} = f(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ een schatter $\hat{\underline{y}}_g$ te bepalen voor y_g, tevens de systematische fout $\delta(\hat{y}_g)$ en de variantie var $\hat{\underline{y}}_g$.

Ontwikkeling van $\underline{y} = f(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ in een Taylorreeks rond (x_{1g},x_{2g}) geeft:

$$\underline{y} = f(x_g) + (\underline{x}_1 - \underline{x}_{1g})f_1' + (\underline{x}_2 - x_{2g})f_2' + \tfrac{1}{2}[(\underline{x}_1 - x_{1g})^2 f_{11}'' + 2(\underline{x}_1 - x_{1g})(x_2 - x_{2g})f_{12}'' +$$
$$+ (\underline{x}_2 - x_{2g})^2 f_{22}''] + \ldots .$$

Hierin is:

$$f_i' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_g} ; \; f_{ii}'' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)_{x_g} ; \; f_{12}'' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{x_g} \quad (= f_{21}'' \text{ ondersteld})$$

Anders geschreven:

$$\underline{y} = y_g + (\delta_1 + \underline{e}_1)f_1' + (\delta_2 + \underline{e}_2)f_2' + \tfrac{1}{2}[(\delta_1 + \underline{e}_1)^2 f_{11}'' + 2(\delta_1 + \underline{e}_1)(\delta_2 + \underline{e}_2)f_{12}'' + (\delta_2 + \underline{e}_2)^2 f_{22}''] + ..$$

waaruit volgt:

$$\mu_y = E\underline{y} \approx y_g + \delta_1 f_1' + \delta_2 f_2' + \tfrac{1}{2}(\delta_1^2 + \sigma_1^2)f_{11}'' + \tfrac{1}{2}(\delta_2^2 + \sigma_2^2)f_{22}''$$
$$\sigma_y^2 \approx (f_1')^2\sigma_1^2 + (f_2')^2\sigma_2^2 .$$

Beschouwen we alleen toevallige fouten (dus $\delta_i = 0$, en $\mu_i = x_{ig}$) dan wordt dit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_y \approx f(\mu_1,\mu_2) \\ \sigma_y^2 \approx (f_1')\sigma_1^2 + (f_2')^2\sigma_2^2 \\ \delta_y \approx \delta_1 f_1' + \delta_2 f_2' \end{array}} \begin{array}{l} + \tfrac{1}{2}[\sigma_1^2 f_{11}'' + \sigma_2^2 f_{22}''] \\ , \; \underline{\text{de wet van de voortplanting van toev. fouten}} \\ + \tfrac{1}{2}(\delta_1^2 + \sigma_1^2)f_{11}'' + \tfrac{1}{2}(\delta_2^2 + \sigma_2^2)f_{22}'' . \end{array}$$

<u>Speciaal geval</u>: Is $\underline{y} = \underline{x}_1^{a_1}\underline{x}_2^{a_2}$ dan is $\sigma_y^2/\mu_y^2 \approx a_1^2\sigma_1^2/\mu_1^2 + a_2^2\sigma_2^2/\mu_2^2$ of met
$\sigma/\mu = V$ (variatiecoëfficiënt)
$V_y^2 \approx a_1^2 V_1^2 + a_2^2 V_2^2$, de wet van de voortplanting van de relatieve fout.

Wiskundig formularium

I Afgeleiden:

y	y'	y	y'	y	y'
x^a	ax^{a-1}	a^x	$a^x \ln a$	${}^g\log x$	$1/(x \ln g)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$\arctan x$	$1/(x^2+1)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$	$\operatorname{arccot} x$	$-1/(x^2+1)$	$\coth x$	$-1/\sinh^2 x$

y	$\int y\,dx + C$	y	$\int y\,dx + C$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$1/(x^2+a^2)$	$\frac{1}{a} \arctan x/a$
$1/x$	$\ln\|x\|$	$1/(x^2-a^2)$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$
a^x	$a^x/\ln a$	$1/\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{\|a\|}{a} \arcsin x/a$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$1/\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\|$
$\cot x$	$\ln\|\sin x\|$	$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{1}{2}[xy \pm a^2 \ln\|x+y\|]$
$1/\sin x$	$\ln\|\tan \frac{1}{2}x\|$	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}[xy + a^2 \arcsin x/a]$

III Bepaalde integralen:

Gamma functie : $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad x > 0$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x \neq 0,-1,-2,\ldots$

Onvolledige Gamma functie : $\Gamma_p(x) = \int_0^p e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

$\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; voor $n \to \infty$ is: $\Gamma(x+n) \sim n^x\, \Gamma(n)$.

Stirling : $n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Bêta functie : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \qquad x,y > 0$

$B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Onvolledige Bêta functie : $B_p(x,y) = \int_0^p t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

$$\sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x} = 1 - I_p(k+1,n-k) = I_q(n-k,k+1) \quad \text{met} \quad I_p = B_p(x,y)/B(x,y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\pi/a} \ .$$

Inhoud n-dim. bol $= \frac{\pi^a}{a\Gamma(a)}$; $a = n/2$

IV Reeksen, limieten:

$\lim_{n \to \infty} (1 + a/n)^n = e^a$; $\lim_{n \to \infty} (\sum_1^n 1/k - \ln n) = C$ (constante van Euler)

$\sum_1^\infty 1/k^2 = \pi^2/6$; $\sum_0^\infty 1/(2k + 1)^2 = \pi^2/8$; $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sum_1^n k^2 = n(n + 1)(2\ n + 1)/6$; $\sum_1^n k = \frac{1}{2}n(n + 1)$; $\sum_1^n k^3 = (\sum_1^n k)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n$; $\sum_{k=0}^\infty \binom{n+k-1}{k} x^k = (1 - x)^{-n}$ $|x| < 1$

Taylor : $f(x) = f(a) + (x - a)\ f'(a) + (x - a)^2\ f''(a)/2! + \ldots$

Maclaurin : $f(x) = f(0) + x\ f'(0) + x^2 f''(0)/2! + \ldots$

e^x	$= 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$		elke x
$\sin x$	$= x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$		"
$\sinh x$	$= x + x^3/3! + x^5/5! + \ldots$		"
$\cos x$	$= 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$		"
$\cosh x$	$= 1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots$	voor:	"
$\arcsin x$	$= x + \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{x^5}{5} + \ldots$		$\|x\| \leq 1$
$\arctan x$	$= x - x^3/3 + x^5/5 - \ldots$		$\|x\| \leq 1$
$\ln(1 + x)$	$= x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$		$-1 < x \leq 1$
$(1 + x)^m$	$= 1 + mx + m(m - 1)\ x^2/2! + \ldots$		$\|x\| < 1$
$1/(1 - x)$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$		$\|x\| < 1$

V Goniometrische formules:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\xrightarrow{x = y}$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

$\tan 2x = 2 \tan x/(1 - \tan^2 x)$

Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x \pm y) \cos \frac{1}{2}(x \mp y)$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Aantekeningen

Laplace-transformatie:

f(t)	F(p)
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$f^{(n)}(t)$	$- f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) \dots - p^{n-1}f(0) + p^n F(p)$.

Aantekeningen

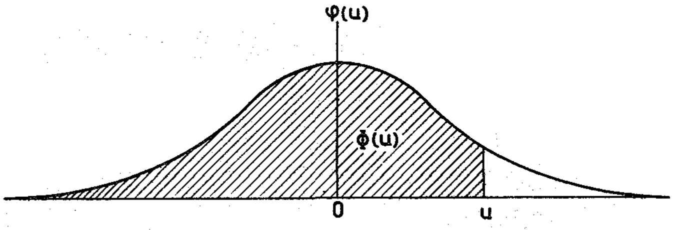
Aantekeningen

Aantekeningen

Aantekeningen

α eenzijdig	u_α	α tweezijdig
5 %	1.645	10 %
2.5 %	1.960	5 %
1 %	2.326	2 %
0.5 %	2.576	1 %
0.25 %	2.807	0.5 %
0.1 %	3.090	0.2 %
0.05 %	3.290	0.1 %
	3.897	0.01 %
	4.417	0.001 %

CUMULATIEVE NORMALE VERDELING 1.1



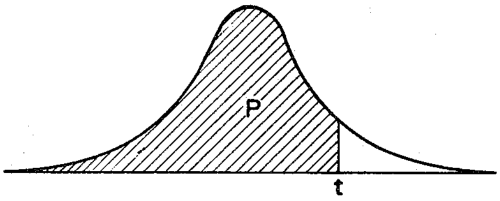
u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	φ(u)
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	.3989
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	.3970
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	.3910
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	.3814
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	.3683
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	.3521
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	.3332
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	.3123
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	.2897
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	.2661
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	.2420
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	.2179
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	.1942
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	.1714
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	.1497
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	.1295
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	.1109
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	.0940
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	.0790
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	.0656
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	.0540
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	.0440
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	.0355
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	.0283
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	.0224
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952	.0175
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964	.0136
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974	.0104
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	.0079
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	.0060
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990	.0044
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	.0033
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	.0024
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	.0017
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.0012
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.0009
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.0006

UITVOERIGE TABEL IN [6] [1] [3]

2.1

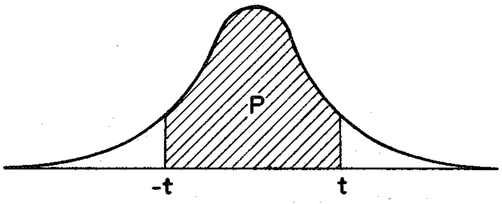
STUDENT'S T-VERDELING

Kritieke waarden



Eenzijdig

$P = P(\underline{t}_{11} < 2.72) = 0.99$



Tweezijdig

$P = P(-2.72 < \underline{t}_{11} < 2.72) = 0.98$

	P							
Eenzijdig	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999	0.9995
Tweezijdig	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
$\nu = 1$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.67	127.32	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.37	4.03	4.77	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.43	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	3.73	4.07
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.55	3.85
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.45	3.73
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.31	3.55
50	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	2.94	3.26	3.50
100	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63	2.87	3.17	3.39
200	1.29	1.65	1.97	2.35	2.60	2.84	3.13	3.34
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	2.81	3.09	3.29

THEORIE PAGINA 12, 13 - UITVOERIGE TABEL IN [7] [2]

2.2

VERDELING VAN DE STEEKPROEF-CORRELATIECOEFFICIËNT r, INDIEN $\rho = 0$

Kritieke waarden

Steekproef grootte n = 11
Eenzijdig $P(\underline{r} < 0.602 \mid \rho = 0) = 0.975$
Tweezijdig $P(-0.602 < \underline{r} < 0.602 \mid \rho = 0) = 0.95$

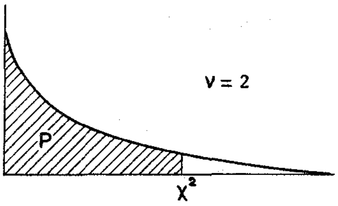
	P				
eenzijdig	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
tweezijdig	0.90	0.95	0.98	0.99	0.999
n = 3	0.988	0.997	1.000	1.000	1.000
4	0.900	0.950	0.980	0.990	0.999
5	0.805	0.878	0.934	0.959	0.991
6	0.729	0.811	0.882	0.917	0.974
7	0.669	0.754	0.883	0.874	0.951
8	0.662	0.707	0.789	0.834	0.925
9	0.582	0.666	0.750	0.798	0.898
10	0.549	0.632	0.716	0.765	0.872
11	0.521	0.602	0.685	0.735	0.847
12	0.497	0.576	0.658	0.708	0.823
13	0.476	0.553	0.634	0.684	0.801
14	0.458	0.532	0.612	0.661	0.780
15	0.441	0.514	0.592	0.641	0.760
16	0.426	0.497	0.574	0.623	0.742
17	0.412	0.482	0.558	0.606	0.725
18	0.400	0.468	0.542	0.590	0.708
19	0.389	0.456	0.528	0.575	0.693
20	0.378	0.444	0.516	0.561	0.679
21	0.369	0.433	0.503	0.549	0.665
22	0.360	0.423	0.492	0.537	0.652
23	0.352	0.413	0.482	0.526	0.640
24	0.344	0.404	0.472	0.515	0.629
25	0.336	0.396	0.462	0.505	0.618
30	0.306	0.361	0.423	0.463	0.568
35	0.283	0.334	0.392	0.430	0.533
40	0.264	0.312	0.366	0.403	0.501
45	0.248	0.294	0.346	0.380	0.475
50	0.235	0.278	0.328	0.361	0.452
60	0.214	0.254	0.300	0.330	0.415
70	0.198	0.235	0.278	0.306	0.386
80	0.185	0.220	0.260	0.286	0.362
90	0.174	0.207	0.250	0.270	0.342
100	0.165	0.197	0.232	0.256	0.325

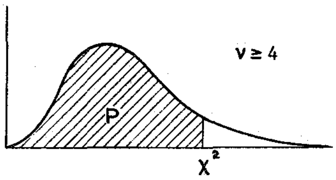
THEORIE PAGINA 21

3.1

χ^2 VERDELING

Kritieke waarden





$P = P(\underline{\chi}_7^2 < 14.1) = 0.95$

ν	P														ν
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999	
1	–	–	.001	.004	.016	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30
	−2.58	−2.33	−1.96	−1.64	−1.28	−0.67	0.00	+0.67	+1.28	+1.64	+1.96	+2.33	+2.58	+3.09	**u**

THEORIE PAGINA 12, 13 – . Voor $\nu > 30$ neem $\chi_\nu^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2\nu} + u)^2$

GAMMA VERDELING

kritieke waarden

Is $\underline{x}$ gamma verdeeld met parameters λ en r dan is

$$P(\underline{x} \leq x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t} dt =: \Gamma(x;\lambda,r) .$$

Getabelleerd zijn de waarden van $\frac{\lambda x}{r}$ bij de percentagepunten $\Gamma(\frac{\lambda x}{r};r,r) = 0.900, 0.950, 0.975, 0.990, 0.995$ en 0.999 voor $\frac{1}{\sqrt{r}} = 1.40 \ (-0.05) \ 0.00$.

Ga na dat $\Gamma(x;\lambda,r) = \Gamma(\lambda x;1,r) = \Gamma(\frac{\lambda x}{r};r,r)$.

$\frac{1}{\sqrt{r}}$ \ p	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1.40	2.69	3.81	4.98	6.56	7.78	10.68
1.35	2.65	3.71	4.81	6.30	7.45	10.17
1.30	2.61	3.61	4.65	6.05	7.13	9.67
1.25	2.56	3.51	4.49	5.80	6.81	9.18
1.20	2.51	3.41	4.33	5.56	6.50	8.70
1.15	2.46	3.31	4.17	5.31	6.19	8.24
1.10	2.41	3.20	4.01	5.07	5.89	7.78
1.05	2.36	3.10	3.85	4.84	5.59	7.34
1.00	2.30	3.00	3.69	4.61	5.30	6.91
.95	2.24	2.89	3.53	4.37	5.01	6.49
.90	2.19	2.78	3.37	4.15	4.73	6.08
.85	2.13	2.68	3.22	3.93	4.46	5.68
.80	2.06	2.57	3.07	3.71	4.19	5.30
.75	2.00	2.46	2.91	3.50	3.93	4.92
.70	1.94	2.36	2.76	3.29	3.68	4.57
.65	1.87	2.25	2.62	3.09	3.43	4.22
.60	1.80	2.15	2.47	2.89	3.20	3.89
.55	1.74	2.04	2.33	2.70	2.97	3.57
.50	1.67	1.94	2.19	2.51	2.74	3.27
.45	1.60	1.84	2.06	2.33	2.53	2.97
.40	1.53	1.74	1.92	2.16	2.32	2.70
.35	1.47	1.64	1.79	1.99	2.13	2.44
.30	1.40	1.54	1.67	1.83	1.94	2.19
.25	1.33	1.44	1.55	1.67	1.76	1.95
.20	1.26	1.35	1.43	1.52	1.59	1.73
.15	1.20	1.26	1.31	1.38	1.43	1.53
.10	1.13	1.17	1.21	1.25	1.28	1.34
.05	1.06	1.08	1.10	1.12	1.13	1.16
.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Relatie tot $\underline{\chi}^2_\nu$ verdeling: $P(\underline{\chi}^2_{2r} \leq 2x) = \Gamma(x;1,r)$.

Relatie tot Poissonverdeling: $\sum_{x=c}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = P(\underline{x} \geq c \mid \mu) = \Gamma(\mu;1,c)$.

BETROUWBAARHEIDSINTERVAL VOOR σ

Aantal vrijheidsgraden $\nu = 20$

Eenzijdig : $P(0.80 \cdot \underline{s} < \sigma) = P(1.36\ \underline{s} > \sigma) = 0.95$
Tweezijdig: $P(0.80 \cdot \underline{s} < \sigma < 1.36\ \underline{s}) = 0.90$

	Betrouwbaarheid							
Eenzijdig	.95		.975		.99		.995	
Tweezijdig	.90		.95		.98		.99	
ν	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
1	0.51	15.9	0.45	31.9	0.39	79.8	0.36	160.
2	0.58	4.41	0.52	6.28	0.47	9.98	0.43	14.1
3	0.62	2.92	0.57	3.73	0.51	5.10	0.48	6.47
4	0.65	2.37	0.60	2.87	0.55	3.62	0.52	4.40
5	0.67	2.09	0.62	2.45	0.58	3.00	0.55	3.48
6	0.69	1.92	0.64	2.20	0.60	2.62	0.57	2.98
7	0.71	1.80	0.66	2.04	0.62	2.38	0.59	2.66
8	0.72	1.71	0.68	1.92	0.63	2.20	0.60	2.44
9	0.73	1.65	0.69	1.83	0.64	2.08	0.62	2.28
10	0.74	1.59	0.70	1.75	0.66	1.98	0.63	2.15
11	0.75	1.55	0.71	1.70	0.67	1.90	0.64	2.06
12	0.76	1.52	0.72	1.65	0.68	1.83	0.65	1.98
13	0.76	1.49	0.72	1.61	0.69	1.78	0.66	1.91
14	0.77	1.46	0.73	1.58	0.69	1.73	0.67	1.85
15	0.77	1.44	0.74	1.55	0.70	1.70	0.68	1.81
16	0.78	1.42	0.74	1.52	0.71	1.66	0.68	1.76
17	0.78	1.40	0.75	1.50	0.71	1.63	0.69	1.73
18	0.79	1.38	0.76	1.48	0.72	1.60	0.70	1.70
19	0.79	1.37	0.76	1.46	0.72	1.58	0.70	1.67
20	0.80	1.36	0.77	1.44	0.73	1.56	0.71	1.64
25	0.81	1.31	0.78	1.38	0.75	1.47	0.73	1.54
30	0.83	1.27	0.80	1.34	0.77	1.42	0.75	1.48
35	0.84	1.25	0.81	1.30	0.78	1.37	0.76	1.43
40	0.85	1.23	0.82	1.28	0.79	1.34	0.77	1.39
50	0.86	1.20	0.84	1.24	0.81	1.30	0.79	1.34
60	0.86	1.18	0.85	1.22	0.82	1.27	0.81	1.30
70	0.88	1.16	0.86	1.20	0.83	1.24	0.82	1.27
80	0.89	1.15	0.87	1.18	0.84	1.22	0.83	1.25
90	0.89	1.14	0.87	1.17	0.85	1.21	0.84	1.23
100	0.90	1.13	0.88	1.16	0.86	1.19	0.84	1.22
u	1.64		1.96		2.33		2.58	

THEORIE PAGINA 13 . Voor $\nu > 30$ neem $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{2\nu} + u}$ $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{2\nu} - u}$

F VERDELING

Kritieke waarden $\alpha = 0.05$

$P(F^{7}_{10} < 3.14) = 0.95$

Vrijheidsgraden van de noemer	Vrijheidsgraden van de teller																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

THEORIE PAGINA 12, 13 - UITVOERIGE TABEL IN [9] [3] [1]

F VERDELING

Kritieke waarden $\alpha = 0.025$

$P(F^{7}_{10} < 3.95) = 0.975$

	Vrijheidsgraden van de teller																		
Vrijheidsgraden van de noemer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1,001	1,006	1,010	1,014	1,018
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

THEORIE PAGINA 12, 13 - UITVOERIGE TABEL IN [9] [3] [1]

F VERDELING

Kritieke waarden $\alpha = 0.01$

$P(F_{10}^{7} < 5.20) = 0.99$

Vrijheidsgraden van de noemer	Vrijheidsgraden van de teller																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.27	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.32	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.77	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.58	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.42	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.17	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.99	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.85	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.74	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.65	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.61	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.46	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.28	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.94	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.78	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

THEORIE PAGINA 12, 13 - UITVOERIGE TABEL IN [9] [3] [1]

F VERDELING

Kritieke waarden $\alpha = 0.005$

$P(F_{10}^{7} < 6.30) = 0.995$

Vrijheidsgraden van de noemer	Vrijheidsgraden van de teller																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,148	25,253	25,359	25,465
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199.5	200
3	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.1	42.0	41.8
4	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.6	19.5	19.3
5	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.4	12.3	12.1
6	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.3	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.4	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.1	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.6	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.4	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.2	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.1	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

THEORIE PAGINA 12, 13 - UITVOERIGE TABEL IN [9] [3] [1]

5.1 BINOMIALE VERDELING

Frekwentie funktie: $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n	x	p											
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	1/6	1/3
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000	.8333	.6667
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000	.1667	.3333
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	.6944	.4444
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	.2778	.4444
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	.0278	.1111
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	.5787	.2963
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	.3472	.4444
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	.0695	.2222
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250	.0046	.0370
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	.4823	.1975
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	.3858	.3951
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	.1157	.2963
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500	.0154	.0988
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625	.0008	.0123
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312	.4019	.1317
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562	.4019	.3292
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	.1608	.3292
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125	.0321	.1646
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562	.0032	.0412
	5		.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312	.0001	.0041
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	.3349	.0878
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	.4019	.2634
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	.2009	.3292
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125	.0536	.2195
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344	.0080	.0823
	5		.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938	.0007	.0165
	6				.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156		.0014
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	.2791	.0585
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547	.3907	.2048
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	.2344	.3073
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734	.0782	.2561
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734	.0156	.1280
	5		.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641	.0019	.0384
	6			.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547	.0001	.0064
	7					.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078	.0000	.0005
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	.2326	.0390
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312	.3721	.1561
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	.2605	.2731
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188	.1042	.2731
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734	.0260	.1707
	5		.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188	.0042	.0683
	6			.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094	.0004	.0171
	7				.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312		.0024
	8						.0001	.0002	.0007	.0017	.0039		.0002

BINOMIALE VERDELING

5.1
(VERVOLG)

Frekwentie funktie $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n	x	p											
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	1/6	1/3
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020	.1938	.0260
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176	.3489	.1171
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703	.2791	.2341
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641	.1302	.2731
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461	.0391	.2048
	5		.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461	.0078	.1024
	6		.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641	.0010	.0341
	7				.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703	.0001	.0073
	8					.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176	.0000	.0009
	9							.0001	.0003	.0008	.0020	.0000	.0001
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010	.1615	.0173
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	.3230	.0867
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	.2907	.1951
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172	.1550	.2601
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051	.0543	.2276
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461	.0130	.1366
	6		.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051	.0022	.0569
	7			.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172	.0003	.0163
	8				.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439	.0000	.0030
	9						.0001	.0005	.0016	.0042	.0098	.0000	.0003
	10								.0001	.0003	0010	.0000	.0000
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000	.0649	.0023
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005	.1947	.0171
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032	.2726	.0599
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139	.2363	.1299
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417	.1418	.1948
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916	.0624	.2143
	6		.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527	.0208	.1786
	7		.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964	.0053	.1148
	8			.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964	.0011	.0574
	9			.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527	.0002	.0223
	10				.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916	.0000	.0067
	11					.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417		.0015
	12						.0001	.0004	.0016	.0052	.0139		.0003
	13							.0001	.0003	.0010	.0032		.0000
	14									.0001	.0005		
	15										.0000		
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000	.0261	.0003
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000	.1043	.0030
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002	.1982	.0143
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011	.2379	.0429
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046	.2022	.0911
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148	.1294	.1457
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370	.0647	.1821
	7		.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739	.0259	.1821
	8		.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201	.0084	.1480
	9		.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602	.0022	.0987
	10			.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762	.0005	.0543
	11				.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602	.0001	.0247
	12				.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201	.0000	.0092
	13					.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739		.0028
	14						.0002	.0012	.0049	.0150	.0370		.0007
	15							.0003	.0013	.0049	.0148		.0001
	16								.0003	.0013	.0046		.0000
	17									.0002	.0011		
	18										.0002		

THEORIE PAGINA 17 - UITVOERIGE TABEL IN [10] [1]

5.2 CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELING

$$\sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	c					p						1/6	1/3
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50		
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	.6944	.4444
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975	.7500	.9722	.8889
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	.5787	.2963
	1	.9928	.9720	.9392	.8960	.8438	.7840	.7182	.6480	.5748	.5000	.9259	.7407
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089	.8750	.9954	.9630
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	.4822	.1975
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910	.3125	.8681	.5926
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585	.6875	.9838	.8889
	3	1.000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590	.9375	.9992	.9877
	4		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312	.4019	.1317
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562	.1875	.8038	.4609
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931	.5000	.9645	.7901
	3	1.000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688	.8125	.9967	.9547
	4		.9999	.9999	.9997	.9990	.9976	.9948	.9898	.9816	.9688	.9999	.9959
	5		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	.3349	.0878
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636	.1094	.7368	.3512
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415	.3438	.9377	.6804
	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8726	.8208	.7447	.6562	.9913	.8999
	4	1.000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308	.8906	.9993	.9822
	5		1.000	1.000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917	.9844	1.000	.9986
	6				1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.000
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	.2791	.0585
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4450	.3294	.2338	.1586	.1024	.0625	.6698	.2634
	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164	.2266	.9042	.5706
	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083	.5000	.9824	.8267
	4	1.000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471	.7734	.9980	.9547
	5		1.000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643	.9375	.9999	.9931
	6			1.000	1.000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963	.9922	1.000	.9995
	7				1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.000
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	.2326	.0391
	1	.9428	.8131	.6572	.5033	.3671	.2553	.1691	.1064	.0632	.0352	.6047	.1951
	2	.9942	.9619	.8948	.7969	.6786	.5518	.4278	.3154	.2201	.1445	.8652	.4682
	3	.9996	.9950	.9786	.9437	.8862	.8059	.7064	.5941	.4770	.3633	.9693	.7413
	4	1.000	.9996	.9972	.9896	.9727	.9420	.8939	.8263	.7396	.6367	.9954	.9121
	5		1.000	.9998	.9988	.9958	.9887	.9747	.9502	.9115	.8555	.9996	.9803
	6			1.000	.9999	.9996	.9987	.9964	.9915	.9819	.9648	1.000	.9974
	7				1.000	1.000	.9999	.9998	.9993	.9983	.9961		.9998
	8						1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		1.000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELING

$$\sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	c	p											
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	1/6	1/3
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020	.2038	.0260
	1	.9288	.7748	.5995	.4362	.3004	.1960	.1211	.0705	.0385	.0195	.5427	.1431
	2	.9916	.9470	.8592	.7382	.6007	.4628	.3373	.2318	.1495	.0898	.8217	.3772
	3	.9994	.9917	.9661	.9144	.8343	.7297	.6089	.4826	.3614	.2539	.9520	.6503
	4	1.000	.9991	.9944	.9804	.9511	.9012	.8283	.7334	.6214	.5000	.9910	.8552
	5		.9999	.9994	.9969	.9900	.9747	.9464	.9007	.8342	.7461	.9989	.9576
	6		1.000	1.000	.9997	.9987	.9957	.9888	.9750	.9502	.9102	.9999	.9917
	7				1.000	.9999	.9996	.9986	.9962	.9909	.9805	1.000	.9990
	8					1.000	1.000	.9999	.9997	.9992	.9980		1.000
	9							1.000	1.000	1.000	1.000		
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010	.1615	.0173
	1	.9139	.7361	.5443	.3758	.2440	.1493	.0860	.0464	.0233	.0107	.4845	.1040
	2	.9885	.9298	.8202	.6778	.5256	.3828	.2616	.1673	.0996	.0547	.7752	.2991
	3	.9990	.9872	.9500	.8791	.7759	.6496	.5138	.3823	.2670	.1719	.9303	.5593
	4	.9999	.9984	.9901	.9672	.9219	.8497	.7515	.6331	.5044	.3770	.9845	.7869
	5	1.000	.9998	.9986	.9936	.9803	.9526	.9051	.8338	.7384	.6230	.9976	.9234
	6		1.000	.9999	.9991	.9965	.9894	.9740	.9452	.8980	.8281	.9997	.9803
	7			1.000	.9999	.9996	.9984	.9952	.9877	.9726	.9453	1.000	.9966
	8				1.000	1.000	.9999	.9995	.9983	.9955	.9893		.9996
	9						1.000	1.000	.9999	.9997	.9990		1.000
	10								1.000	1.000	1.000		
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000	.0649	.0023
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017	.0005	.2596	.0194
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107	.0037	.5322	.0794
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424	.0176	.7685	.2092
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	.0592	.9102	.4041
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	.1509	.9726	.6184
	6	1.000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	.3036	.9934	.7970
	7		1.000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	.5000	.9987	.9118
	8			.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	.6064	.9998	.9692
	9			1.000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	.8491	1.000	.9915
	10				1.000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745	.9408		.9982
	11					1.000	.9999	.9995	.9981	.9937	.9824		.9997
	12						1.000	.9999	.9997	.9989	.9963		1.000
	13							1.000	1.000	.9999	.9995		
	14									1.000	1.000		
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000	.0261	.0003
	1	.7358	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001	.0000	.1304	.0033
	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009	.0002	.3287	.0176
	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049	.0013	.5665	.0604
	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189	.0059	.7687	.1515
	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553	.0207	.8982	.2972
	6	1.000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299	.0577	.9629	.4792
	7		.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6110	.4159	.2520	.1316	.9887	.6615
	8		.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143	.2517	.9972	.8095
	9		1.000	.9998	.9974	.9861	.9620	.8792	.7553	.5914	.4119	.9994	.9081
	10			1.000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507	.5881	.9999	.9624
	11				.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692	.7483	1.000	.9870
	12				1.000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420	.8684		.9963
	13					1.000	.9997	.9985	.9935	.9786	.9423		.9991
	14						1.000	.9997	.9984	.9936	.9793		.9998
	15							1.000	.9997	.9985	.9941		1.000
	16								1.000	.9997	.9987		
	17									1.000	.9998		
	18										1.000		

THEORIE PAGINA 17 - UITVOERIGE TABEL IN [11]

5.3

BINOMIALE VERDELING

Betrouwbaarheidsinterval voor de parameter p

$$a_1(n,x) + a_2(n,n-x) = 100$$

$n = 20 \quad x = 5 \quad 9 < p < 49 \quad \alpha = 0{,}05$

$n = 20 \quad x = 15 \quad 51 < p < 91 \quad \alpha = 0{,}05$

nl. $a_1(20,15) = 100 - a_2(20,5)$

		betrouwbaarheid							
Eenzijdig		.95		.975		.99		.995	
Tweezijdig		.90		.95		.98		.99	
n	**x**	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
5	0	0	45	0	52	0	60	0	65
	1	1	66	0	72	0	78	0	81
	2	8	81	5	85	3	89	2	92
10	0	0	26	0	31	0	37	0	41
	1	0	39	0	44	0	50	0	54
	2	4	51	2	56	1	61	1	64
	3	9	61	7	65	5	70	4	73
	4	15	70	12	74	9	78	8	81
	5	22	78	19	81	15	85	13	87
15	0	0	18	0	22	0	26	0	30
	1	0	28	0	32	0	37	0	40
	2	0	36	0	41	2	45	2	48
	3	6	44	4	48	3	53	2	56
	4	10	51	8	55	6	60	5	63
	5	14	58	12	62	9	66	8	69
	6	19	64	16	68	13	72	12	74
	7	24	70	21	73	18	77	16	79
20	0	0	14	0	17	0	21	0	23
	1	0	22	0	26	0	30	0	33
	2	2	28	1	32	1	36	0	39
	3	4	34	3	38	2	42	2	45
	4	7	40	6	44	4	48	3	53
	5	10	46	9	49	7	53	6	56
	6	14	51	12	54	10	58	8	61
	7	18	56	15	59	13	63	11	66
	8	22	61	19	64	16	68	15	70
	9	26	65	23	68	20	72	18	74
	10	30	70	27	73	24	76	21	79
25	0	0	11	0	14	0	17	0	19
	1	0	18	0	20	0	24	0	26
	2	1	23	1	26	0	30	0	32
	3	3	28	2	31	2	35	1	37
	4	6	33	4	36	3	40	2	42
	5	8	38	7	41	5	44	5	47

BINOMIALE VERDELING

Betrouwbaarheidsinterval voor de parameter p

		betrouwbaarheid							
Eenzijdig		.95		.975		.99		.995	
Tweezijdig		.90		.95		.98		.99	
n	**x**	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
25	6	11	42	9	46	8	49	7	51
	7	14	46	12	49	10	53	9	56
	8	17	50	15	54	13	57	11	59
	9	20	54	18	57	15	61	14	63
	10	24	58	21	61	18	65	17	67
	11	27	62	25	65	22	68	20	71
	12	30	66	28	69	25	72	23	74
30	0	0	10	0	12	0	14	0	16
	1	0	15	0	17	0	20	0	22
	2	1	20	1	22	0	25	0	27
	3	3	24	2	27	1	30	1	32
	4	5	28	4	31	3	34	2	36
	5	7	32	6	35	4	38	4	40
	6	9	36	8	39	6	42	5	44
	7	11	39	10	42	8	46	7	48
	8	14	43	12	46	10	49	9	52
	9	17	47	15	49	13	53	11	55
	10	19	50	17	53	15	56	14	58
	11	22	53	20	56	18	59	16	62
	12	25	57	23	59	20	62	18	65
	13	28	60	25	63	23	66	21	68
	14	31	63	28	66	26	69	24	71
	15	34	66	31	69	28	72	26	74
40	0	0	7	0	9	0	11	0	12
	1	0	11	0	13	0	15	0	17
	2	1	15	0	17	0	19	0	21
	3	2	18	1	20	1	23	1	25
	4	3	21	3	24	2	26	2	28
	5	5	25	4	27	3	30	3	32
	6	7	28	6	30	5	33	4	35
	7	8	30	7	33	6	36	5	38
	8	10	33	9	36	8	39	7	41
	9	12	36	11	38	9	41	8	43
	10	14	39	13	41	11	44	10	46
50	0	0	6	0	7	0	9	0	10
	1	1	9	0	11	0	13	0	14
	2	2	12	1	14	1	16	0	17
	3	3	15	2	17	2	19	1	20
	4	4	17	3	19	2	22	2	23
	5	5	20	4	22	4	24	3	26
	6	5	22	4	24	4	27	3	28
	7	7	25	6	27	5	29	4	31
	8	8	27	7	29	6	32	5	33
	9	10	29	9	31	7	34	6	36
	10	11	32	10	34	9	36	8	38

Theorie pagina 17 - uitvoerige tabel in [12]

6.1 POISSON VERDELING

Frekwentie funktie: $\frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}$

μ

x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
0	.9512	.9048	.8607	.8187	.7788	.7408	.7047	.6703	.6376	.6065
1	.0476	.0905	.1291	.1637	.1947	.2222	.2466	.2681	.2869	.3033
2	.0012	.0045	.0097	.0164	.0243	.0333	.0432	.0536	.0646	.0758
3	.0000	.0002	.0005	.0011	.0020	.0033	.0050	.0072	.0097	.0126
4		.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0004	.0007	.0011	.0016
5				.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002
6								.0000	.0000	.0000

μ

x	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95	1.00
0	.5770	.5488	.5220	.4966	.4724	.4493	.4274	.4066	.3867	.3679
1	.3173	.3293	.3393	.3476	.3543	.3595	.3633	.3659	.3674	.3679
2	.0873	.0988	.1103	.1217	.1329	.1438	.1544	.1647	.1745	.1839
3	.0160	.0198	.0239	.0284	.0332	.0383	.0437	.0494	.0553	.0613
4	.0022	.0030	.0039	.0050	.0062	.0077	.0093	.0111	.0131	.0153
5	.0002	.0004	.0005	.0007	.0009	.0012	.0016	.0020	.0025	.0031
6	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005
7				.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001
8									.0000	.0000

μ

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9			.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002
10							.0000	.0000	.0000	.0000

μ

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12						.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

POISSON VERDELING

Frekwentie funktie: $\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$

	μ									
x	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
0	.0408	.0334	.0273	.0224	.0183	.0150	.0123	.0101	.0082	.0067
1	.1304	.1135	.0984	.0850	.0733	.0630	.0540	.0462	.0395	.0337
2	.2087	.1929	.1771	.1615	.1465	.1323	.1188	.1063	.0948	.0842
3	.2226	.2186	.2125	.2046	.1954	.1852	.1743	.1631	.1517	.1404
4	.1781	.1858	.1912	.1944	.1954	.1944	.1917	.1875	.1820	.1755
5	.1140	.1264	.1377	.1477	.1563	.1633	.1687	.1725	.1747	.1755
6	.0608	.0716	.0826	.0936	.1042	.1143	.1237	.1323	.1398	.1462
7	.0278	.0348	.0425	.0508	.0595	.0686	.0778	.0869	.0959	.1044
8	.0111	.0148	.0191	.0241	.0298	.0360	.0428	.0500	.0575	.0653
9	.0040	.0056	.0076	.0102	.0132	.0168	.0209	.0255	.0307	.0363
10	.0013	.0019	.0028	.0039	.0053	.0071	.0092	.0118	.0147	.0181
11	.0004	.0006	.0009	.0013	.0019	.0027	.0037	.0049	.0064	.0082
12	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0009	.0014	.0019	.0026	.0034
13			.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0009	.0013
14					.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005
15								.0001	.0001	.0002

	μ									
x	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10
0	.0041	.0025	.0015	.0009	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000
1	.0225	.0149	.0098	.0064	.0041	.0027	.0017	.0011	.0007	.0005
2	.0618	.0446	.0318	.0223	.0156	.0107	.0074	.0050	.0034	.0023
3	.1133	.0892	.0688	.0521	.0389	.0286	.0208	.0150	.0107	.0076
4	.1558	.1339	.1118	.0912	.0729	.0573	.0443	.0337	.0254	.0189
5	.1714	.1606	.1454	.1277	.1094	.0916	.0752	.0607	.0483	.0378
6	.1571	.1606	.1575	.1490	.1367	.1221	.1066	.0911	.0764	.0631
7	.1234	.1377	.1462	.1490	.1465	.1396	.1294	.1171	.1037	.0901
8	.0849	.1033	.1188	.1304	.1373	.1396	.1375	.1318	.1232	.1126
9	.0519	.0688	.0858	.1014	.1144	.1241	.1299	.1318	.1300	.1251
10	.0285	.0413	.0558	.0710	.0858	.0993	.1104	.1186	.1235	.1251
11	.0143	.0225	.0330	.0452	.0585	.0722	.0853	.0970	.1067	.1137
12	.0065	.0113	.0179	.0264	.0366	.0481	.0604	.0728	.0844	.0948
13	.0028	.0052	.0089	.0142	.0211	.0296	.0395	.0504	.0617	.0729
14	.0011	.0022	.0041	.0071	.0113	.0169	.0240	.0324	.0419	.0521
15	.0004	.0009	.0018	.0033	.0057	.0090	.0136	.0194	.0265	.0347
16	.0001	.0003	.0007	.0014	.0026	.0045	.0072	.0109	.0157	.0217
17		.0001	.0003	.0006	.0012	.0021	.0036	.0058	.0088	.0128
18			.0001	.0002	.0005	.0009	.0017	.0029	.0046	.0071
19					.0002	.0004	.0008	.0014	.0023	.0037
20					.0001	.0002	.0003	.0006	.0011	.0019
21						.0001	.0001	.0003	.0005	.0009
22							.0001	.0001	.0002	.0004
23									.0001	.0002
24										.0001

THEORIE PAGINA 17 - UITVOERIGE TABEL IN [15] [13] [1] [14]

6.2 CUMULATIEVE POISSON VERDELING

$$\sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

	μ									
c	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
0	.9512	.9048	.8607	.8187	.7788	.7408	.7047	.6703	.6376	.6065
1	.9988	.9953	.9898	.9825	.9735	.9631	.9513	.9384	.9246	.9098
2	1.000	.9998	.9995	.9988	.9978	.9964	.9945	.9921	.9891	.9856
3		1.000	1.000	.9999	.9999	.9997	.9995	.9992	.9988	.9982
4				1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9998
5								1.000	1.000	1.000

	μ									
c	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95	1.00
0	.5770	.5488	.5220	.4966	.4724	.4493	.4274	.4066	.3867	.3679
1	.8943	.8781	.8614	.8442	.8266	.8088	.7907	.7725	.7541	.7358
2	.9815	.9769	.9717	.9659	.9595	.9526	.9451	.9371	.9287	.9197
3	.9975	.9966	.9956	.9942	.9927	.9909	.9889	.9865	.9839	.9810
4	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9986	.9982	.9977	.9971	.9963
5	1.000	1.000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9994
6			1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999
7									1.000	1.000

	μ									
c	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9922	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9998	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.000	1.000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8			1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9998	.9998
9							1.000	1.000	1.000	1.000

	μ									
c	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.3796	.3546	.3309	.3084	.2873	.2674	.2487	.2311	.2146	.1991
2	.6496	.6227	.5960	.5697	.5438	.5184	.4936	.4695	.4460	.4232
3	.8386	.8194	.7993	.7787	.7576	.7360	.7141	.6919	.6696	.6472
4	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11					1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999
12									1.000	1.000

CUMULATIEVE POISSON VERDELING

$$\sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

c	μ									
	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
0	.0408	.0334	.0273	.0224	.0183	.0150	.0123	.0101	.0082	.0067
1	.1712	.1468	.1257	.1074	.0916	.0780	.0663	.0563	.0477	.0404
2	.3799	.3397	.3027	.2689	.2381	.2102	.1851	.1626	.1425	.1247
3	.6025	.5584	.5152	.4735	.4335	.3954	.3595	.3257	.2942	.2650
4	.7806	.7442	.7064	.6678	.6288	.5898	.5512	.5132	.4763	.4405
5	.8946	.8705	.8441	.8156	.7851	.7531	.7199	.6858	.6510	.6160
6	.9554	.9421	.9267	.9091	.8893	.8675	.8437	.8180	.7908	.7622
7	.9832	.9769	.9692	.9599	.9489	.9361	.9214	.9050	.8867	.8666
8	.9943	.9917	.9883	.9840	.9786	.9721	.9642	.9549	.9442	.9319
9	.9982	.9973	.9960	.9942	.9919	.9889	.9851	.9805	.9749	.9682
10	.9995	.9992	.9987	.9981	.9972	.9959	.9943	.9922	.9896	.9863
11	.9999	.9998	.9996	.9994	.9991	.9986	.9980	.9971	.9960	.9946
12	1.000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9993	.9990	.9986	.9980
13		1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9995	.9993
14					1.000	1.000	.9999	.9999	.9999	.9998
15							1.000	1.000	1.000	.9999
16										1.000

c	μ									
	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	.0041	.0025	.0015	.0009	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000
1	.0266	.0174	.0113	.0073	.0047	.0030	.0019	.0012	.0008	.0005
2	.0884	.0620	.0430	.0296	.0203	.0138	.0093	.0062	.0042	.0028
3	.2017	.1512	.1119	.0818	.0592	.0424	.0301	.0212	.0149	.0103
4	.3575	.2851	.2237	.1730	.1321	.0996	.0744	.0550	.0403	.0293
5	.5289	.4457	.3690	.3007	.2414	.1912	.1496	.1157	.0885	.0671
6	.6860	.6063	.5265	.4497	.3782	.3134	.2562	.2068	.1650	.1301
7	.8095	.7440	.6728	.5987	.5246	.4530	.3856	.3239	.2687	.2202
8	.8944	.8472	.7916	.7291	.6620	.5926	.5231	.4557	.3918	.3328
9	.9462	.9161	.8774	.8305	.7764	.7166	.6530	.5874	.5218	.4579
10	.9748	.9574	.9332	.9015	.8622	.8159	.7634	.7060	.6453	.5830
11	.9890	.9799	.9661	.9467	.9208	.8881	.8487	.8030	.7520	.6968
12	.9956	.9912	.9840	.9730	.9573	.9362	.9091	.8758	.8364	.7916
13	.9983	.9964	.9929	.9872	.9784	.9658	.9486	.9262	.8981	.8645
14	.9994	.9986	.9970	.9943	.9897	.9827	.9726	.9585	.9400	.9165
15	.9998	.9995	.9988	.9976	.9954	.9918	.9862	.9780	.9665	.9513
16	.9999	.9998	.9996	.9990	.9980	.9963	.9934	.9889	.9823	.9730
17	1.000	.9999	.9999	.9996	.9992	.9984	.9970	.9947	.9911	.9857
18		1.000	1.000	.9999	.9997	.9994	.9987	.9976	.9957	.9928
19				1.000	.9999	.9998	.9995	.9989	.9980	.9965
20					1.000	.9999	.9998	.9996	.9991	.9984
21						1.000	.9999	.9998	.9996	.9993
22							1.000	.9999	.9999	.9997
23								1.000	.9999	.9999
24									1.000	1.000

THEORIE PAGINA 17 - UITVOERIGE TABEL IN [13] [1] [14]

POISSON VERDELING

Betrouwbaarheidsinterval voor de parameter μ

vb.: In een steekproef x = 6 defectieven

$2.20 < \mu < 13.06$ $\alpha = 0,05$

	Betrouwbaarheid							
Eenzijdig	.95		.975		.99		.995	
Tweezijdig	.90		.95		.98		.99	
x	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
0	.00	3.00	.00	3.69	.00	4.605	.00	5.30
1	.05	4.74	.025	5.57	.01	6.64	.005	7.43
2	.355	6.30	.24	7.22	.15	8.41	.10	9.27
3	.82	7.75	.62	8.77	.44	10.045	.34	10.98
4	1.37	9.15	1.09	10.24	.82	11.605	.67	12.59
5	1.97	10.51	1.62	11.67	1.28	13.11	1.08	14.15
6	2.61	11.84	2.20	13.06	1.785	14.57	1.54	15.66
7	3.29	13.15	2.81	14.42	2.33	16.00	2.04	17.13
8	3.98	14.43	3.45	15.76	2.91	17.40	2.57	18.58
9	4.695	15.70	4.115	17.085	3.51	18.78	3.13	20.00
10	5.43	16.96	4.795	18.39	4.13	20.145	3.72	21.40
11	6.17	18.21	5.49	19.68	4.77	21.49	4.32	22.78
12	6.92	19.44	6.20	20.96	5.43	22.82	4.94	24.145
13	7.69	20.67	6.92	22.23	6.10	24.14	5.58	25.50
14	8.46	21.89	7.65	23.49	6.78	25.45	6.23	26.84
15	9.25	23.10	8.40	24.74	7.48	26.74	6.89	28.17
16	10.035	24.30	9.14	25.98	8.18	28.03	7.57	29.48
17	10.83	25.50	9.90	27.22	8.895	29.31	8.25	30.79
18	11.63	26.69	10.67	28.45	9.62	30.58	8.94	32.09
19	12.44	27.88	11.44	29.67	10.35	31.845	9.64	33.38
20	13.25	29.06	12.22	30.89	11.08	33.10	10.35	34.67
u	1.64		1.96		2.33		2.58	
u^2	2.70		3.84		5.43		6.63	

Benadering:

Voor waarden van x groter dan 20 kunnen de grenzen worden berekend uit:

$$a_{1,2} = x + \frac{u^2}{2} \mp u\sqrt{x + \frac{u^2}{4}} = \frac{(u \mp \sqrt{4x + u^2})^2}{4} .$$

De waarden van u en u^2 behorende bij de gewenste betrouwbaarheid zijn onder aan de tabel gegeven.

THEORIE PAGINA 17

TEKENTOETS 7.1

Linker kritieke waarden c waarvoor

$$\sum_{x=0}^{c}\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}\leqslant\alpha$$

n	α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,125
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	0
4	-	-	-	-	0
5	-	-	-	0	0
6	-	-	0	0	1
7	-	0	0	0	1
8	0	0	0	1	1
9	0	0	1	1	2
10	0	0	1	1	2
11	0	1	1	2	3
12	1	1	2	2	3
13	1	1	2	3	3
14	1	2	2	3	4
15	2	2	3	3	4
16	2	2	3	4	5
17	2	3	4	4	5
18	3	3	4	5	6
19	3	4	4	5	6
20	3	4	5	5	6
21	4	4	5	6	7
22	4	5	5	6	7
23	4	5	6	7	8
24	5	5	6	7	8
25	5	6	7	7	9
26	6	6	7	8	9
27	6	7	7	8	10
28	6	7	8	9	10
29	7	7	8	9	10
30	7	8	9	10	11
31	7	8	9	10	11
32	8	8	9	10	12
33	8	9	10	11	12
34	9	9	10	11	13
35	9	10	11	12	13
36	9	10	11	12	14
37	10	10	12	13	14
38	10	11	12	13	14
39	11	11	12	13	15
40	11	12	13	14	15
41	11	12	13	14	16
42	12	13	14	15	16
43	12	13	14	15	17
44	13	13	15	16	17
45	13	14	15	16	18
46	13	14	15	16	18
47	14	15	16	17	19
48	14	15	16	17	19
49	15	15	17	18	19
50	15	16	17	18	20
51	15	16	18	19	20
52	16	17	18	19	21
53	16	17	18	20	21
54	17	18	19	20	22
55	17	18	19	20	22
56	17	18	20	21	23
57	18	19	20	21	23
58	18	19	21	22	24
59	19	20	21	22	24
60	19	20	21	23	25
61	20	20	22	23	25
62	20	21	22	24	25
63	20	21	23	24	26
64	21	22	23	24	26
65	21	22	24	25	27
66	22	23	24	25	27
67	22	23	25	26	28
68	22	23	25	26	28
69	23	24	25	27	29
70	23	24	26	27	29
71	24	25	26	28	30
72	24	25	27	28	30
73	25	26	27	28	31
74	25	26	28	29	31
75	25	26	28	29	32
76	26	27	28	30	32
77	26	27	29	30	32
78	27	28	29	31	33
79	27	28	30	31	33
80	28	29	30	32	34
81	28	29	31	32	34
82	28	30	31	33	35
83	29	30	32	33	35
84	29	30	32	33	36
85	30	31	32	34	36
86	30	31	33	34	37
87	31	32	33	35	37
88	31	32	34	35	38
89	31	33	34	36	38
90	32	33	35	36	39
91	32	33	35	37	39
92	33	34	36	37	39
93	33	34	36	38	40
94	34	35	37	38	40
95	34	35	37	38	41
96	34	36	37	39	41
97	35	36	38	39	42
98	35	37	38	40	42
99	36	37	39	40	43
100	36	37	39	41	43

THEORIE PAGINA 25 - UITVOERIGE TABEL IN [11]

7.1a RANG TEKENTOETS (Symmetrietoets van Wilcoxon)

Linker kritieke waarden van $R_{(+)}$ bij tweezijdige toetsing

n	$\frac{1}{2}n(n+1)$	α			
		0.10	0.05	0.02	0.01
5	15	1			
6	21	2	1		
7	28	4	2	0	
8	36	6	4	2	0
9	45	8	6	3	2
10	55	11	8	5	3
11	66	14	11	7	5
12	78	17	14	10	7
13	91	21	17	13	10
14	105	26	21	16	13
15	120	30	25	20	16
16	136	36	30	24	19
17	153	41	35	28	23
18	171	47	40	33	28
19	190	54	46	38	32
20	210	60	52	43	37
21	231	68	59	49	43
22	253	75	66	56	49
23	276	83	73	62	55
24	300	92	81	69	61
25	325	101	90	77	68
26	351	110	98	85	76
27	378	120	107	93	84
28	406	130	117	102	92
29	435	141	127	111	100
30	465	152	137	120	109
31	496	163	148	130	118
32	528	175	159	141	128
33	561	188	171	151	138
34	595	201	183	162	149
35	630	214	195	174	160
36	666	228	208	186	171
37	703	242	222	198	183
38	741	256	235	211	195
39	780	271	250	224	208
40	820	287	264	238	221
41	861	303	279	252	234
42	903	319	295	267	248
43	946	336	311	281	262
44	990	353	327	297	277
45	1035	371	344	313	292
46	1081	389	361	329	307
47	1128	408	379	345	323
48	1176	427	397	362	339
49	1225	446	415	380	356
50	1275	466	434	398	373

Voorbeeld: N = 9, n = 7

x_i	y_i	$x_i - y_i$	
659	452	207	+5
984	984	0	-
397	460	-63	-1
574	787	-213	-6
447	351	96	+3
479	277	202	+4
676	234	442	+7
716	716	0	-
647	577	70	+2

$R_{(+)} = 21$; niet verwerpen.
$2 < \underline{R}_{(+)} < 26$, $\alpha = 0{,}05$.

Voor $n > 50$: normale benadering

$$\frac{R_{(+)} - \frac{1}{2}n(n+1)}{\sqrt{\frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)}} \sim N(0,1)$$

De rechter kritieke waarde $= \frac{1}{2}n(n+1)$-linker kritieke waarde. Steekproef N paren (x_i, y_i), waarvan n paren met $x_i \neq y_i$. H_0: $\underline{x}_i \simeq \underline{y}_i$, $i = 1,\ldots,N$. De absolute verschillen $|x_i - y_i| \neq 0$ worden naar opklimmende grootte genummerd. Aangenomen wordt dat geen gelijke abs. verschillen optreden. De toetsingsgrootheid is $R_{(+)} = \Sigma$ (rangnummers van de positieve verschillen).

Uitvoerige tabel in [2]

7.2 TWEE STEEKPROEVENTOETS VAN WILCOXON

Steekproeven $x_1,\ldots,x_{n_1}$ en $y_1,\ldots,y_{n_2}$.
Neem $n_1 \leq n_2$.
Toetsingsgrootheid T_1 = som rangnummers $x_1,\ldots,x_{n_1}$.
Rechter kritieke waarde = $n_1(n_1 + n_2 + 1)$-linker kritieke waarde

Linker kritieke waarden van T_1 bij tweezijdige onbetrouwbaarheid 0,05

n_1 n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	-	-																	
4	-	-	10																
5	-	6	11	17															
6	-	7	12	18	26														
7	-	7	13	20	27	36													
8	3	8	14	21	29	38	49												
9	3	8	14	22	31	40	51	62											
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78										
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96									
12	4	10	17	26	35	46	58	71	84	99	115								
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	136							
14	4	11	19	28	38	50	62	76	91	106	123	141	160						
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	184					
16	4	12	21	30	42	54	67	82	97	113	131	150	169	190	211				
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154	174	195	217	240			
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139	158	179	200	222	246	270		
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124	143	163	183	205	228	252	277	303	
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110	128	147	167	188	210	234	258	283	309	337

Linker kritieke waarden van T_1 bij tweezijdige onbetrouwbaarheid 0,01

n_1 n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	-	-	-																
5	-	-	-	15															
6	-	-	10	16	23														
7	-	-	10	16	24	32													
8	-	-	11	17	25	34	43												
9	-	6	11	18	26	35	45	56											
10	-	6	12	19	27	37	47	58	71										
11	-	6	12	20	28	38	49	61	73	87									
12	-	7	13	21	30	40	51	63	76	90	105								
13	-	7	13	22	31	41	53	65	79	93	109	125							
14	-	7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147						
15	-	8	15	23	33	44	56	69	84	99	115	133	151	171					
16	-	8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	136	155	175	196				
17	-	8	16	25	36	47	60	74	89	105	122	140	159	180	201	223			
18	-	8	16	26	37	49	62	76	92	108	125	144	163	184	206	228	252		
19	3	9	17	27	38	50	64	78	94	111	129	148	168	189	210	234	258	283	
20	3	9	18	28	39	52	66	81	97	114	132	151	172	193	215	239	263	289	315

THEORIE PAGINA 25 - UITVOERIGE TABEL IN [2]

RANGCORRELATIE TOETS VAN KENDALL 7.3

Linker en rechter kritieke waarden van P bij tweezijdige toetsing

Steekproef : n paren (x_i, y_i)

Rangschik de x-en zodat $x_1 < x_2 < \ldots . < x_n$

Plaats daaronder de bijbehorende $y_i \quad y_k \quad \ldots . \quad y_e$

$$P = \text{toetsingsgrootheid} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}$$

waarbij
$$y_{ij} = 1 \quad y_j > y_i$$
$$= \tfrac{1}{2} \quad y_j = y_i$$
$$= o \quad y_j < y_i$$

n	Onbetrouwbaarheid							
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.10	0.05	0.02	0.01
4	-	-	-	0	6	-	-	-
5	-	0	0	1	9	10	10	-
6	0	1	1	2	13	14	14	15
7	1	2	3	4	17	18	19	20
8	3	4	5	6	22	23	24	25
9	5	6	8	9	27	28	30	31
10	8	9	11	12	33	34	36	37
11	11	12	14	16	39	41	43	44
12	14	15	18	20	46	48	51	52
13	17	19	22	25	53	56	59	61
14	22	24	27	29	62	64	67	69
15	26	28	32	35	70	73	77	79
16	31	34	37	41	79	83	86	89
17	36	39	43	47	89	93	97	100
18	42	45	50	54	99	103	108	111
19	48	52	57	61	110	114	119	123
20	55	59	64	69	121	126	131	135
21	62	66	72	77	133	138	144	148
22	70	74	80	85	146	151	157	161
23	77	82	89	94	159	164	171	176
24	86	91	98	104	172	178	185	190
25	95	100	107	114	186	193	200	205
26	104	109	117	124	201	208	216	221
27	113	119	128	135	216	223	232	238
28	124	130	139	146	232	239	248	254
29	134	140	150	158	248	256	266	272
30	145	152	162	170	265	273	283	290
31	157	164	174	183	282	291	301	308
32	166	174	185	196	300	309	320	328
33	181	188	200	210	318	328	340	347
34	193	202	214	224	337	347	359	368
35	207	215	228	239	356	367	380	388
36	220	229	242	254	376	388	401	410
37	234	244	257	269	397	409	422	432
38	249	259	273	285	418	430	444	454
39	264	274	289	301	440	452	467	477
40	279	290	305	318	462	475	490	501

THEORIE PAGINA 26 - UITVOERIGE TABEL IN [17]

7.4 RANG CORRELATIE TOETS VAN SPEARMAN

Linker en rechter kritieke waarden van $\sum (X_i - Y_i)^2$ bij tweezijdige toetsing

Steekproef bevat n paren $(x_j\ y_j)$ waarbij $j=1,\ldots.n$
X_i het rangnummer van x_i en Y_i van y_i is.
Als toetsingsgrootheid bepaald men $\Sigma d_i^2 = \Sigma (X_i - Y_i)^2$.

n	Onbetrouwbaarheid							
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.10	0.05	0..02	0.01
4	-	-	-	0	20	-	-	-
5	-	0	0	2	38	40	40	-
6	0	2	4	6	64	66	68	70
7	4	6	12	16	96	100	106	108
8	10	14	22	30	138	146	154	158
9	20	26	36	48	192	204	214	220
10	34	42	58	72	258	272	288	296
11	54	64	84	102	338	356	376	386
12	78	92	118	142	430	454	480	494
13	108	128	160	188	540	568	600	620
14	146	170	210	244	666	700	740	764
15	194	222	268	310	810	852	898	926
16	248	284	338	388	972	1022	1076	1112
17	290	341	416	480	1152	1216	1291	1342
18	363	422	508	582	1356	1430	1516	1575
19	447	514	613	698	1582	1667	1766	1833
20	544	620	731	828	1832	1929	2040	2116
21	653	738	865	973	2107	2215	2342	2427
22	775	871	1013	1135	2407	2529	2671	2767
23	912	1020	1178	1314	2734	2870	3028	3136
24	1064	1184	1360	1511	3089	3240	3416	3536
25	1232	1365	1559	1727	3473	3641	3835	3968
26	1418	1564	1778	1962	3888	4072	4286	4432
27	1621	1781	2016	2219	4333	4536	4771	4931
28	1842	2018	2275	2497	4811	5033	5290	5466
29	2083	2275	2556	2797	5323	5564	5845	6037
30	2344	2553	2859	3122	5868	6131	6437	6646
31	2627	2853	3185	3470	6450	6735	7067	7293
32	2931	3176	3535	3844	7068	7377	7736	7981
33	3259	3523	3910	4244	7724	8058	8445	8709
34	3610	3894	4311	4670	8420	8779	9196	9480
35	3985	4291	4740	5125	9155	9540	9989	10295
36	4386	4714	5195	5609	9931	10345	10826	11154
37	4814	5165	5680	6123	10749	11192	11707	12058
38	5268	5643	6194	6667	11611	12084	12635	13010
39	5751	6151	6738	7243	12517	13022	13609	14009
40	6263	6689	7314	7852	13468	14006	14631	15057

THEORIE PAGINA 26 - UITVOERIGE TABEL IN [2]

DE TOETS VAN FRIEDMAN 7.5

Methode der m rangschikkingen
Kritieke waarden voor S

Onbetrouwbaarheid 0.05						Onbetrouwbaarheid 0.01					
	n						n				
m	3	4	5	6	7	m	3	4	5	6	7	m
3	18	37	64	104	158	3	-	43	76	123	186	3
4	26	52	89	144	217	4	32	64	109	176	265	4
5	32	65	113	183	277	5	42	83	143	229	344	5
6	42	76	137	222	336	6	54	102	176	282	423	6
7	50	91	167	272	412	7	62	121	216	348	519	7
8	50	102	190	310	471	8	72	138	260	420	628	8
9	56	118	214	349	529	9	78	164	296	475	706	9
10	62	131	238	388	588	10	96	190	332	528	785	10
11	72	144	261	427	647	11	104	209	365	581	862	11
12	74	157	285	465	706	12	114	228	398	633	941	12
13	78	170	309	504	764	13	122	247	432	686	1019	13
14	86	183	333	543	823	14	126	267	465	739	1098	14
15	96	196	356	582	882	15	134	284	498	792	1177	15
χ^2_{n-1} (.05)	6.0	7.8	9.5	11.1	12.6		9.2	11.3	13.3	15.1	16.8	χ^2_{n-1}(.01)

Gegeven m rangschikkingen van n dingen. α_{ij} is het rangnummer dat voor komt in de i^{o} rij en de j° kolom. i = 1,....., m j = 1,.....,n.

De toetsingsgrootheid S is gelijk aan:

$$S = \sum_{j=1}^{n} s_j^2 - (\sum_{j=1}^{n} s_j)^2 / n = \sum s_j^2 - \frac{1}{4} m^2 n\ (n+1)^2 \ ; s_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha\, ij$$

Voor grote m : $\frac{12\ S}{m\ n\ (n+1)} = \chi^2_{n-1}$

THEORIE PAGINA 26 - UITVOERIGE TABEL IN [2] [18]

7.6 HET AANTAL RUNS BOVEN EN ONDER DE MEDIAAN

Linker en rechter kritieke waarden van R,

m = Aantal uitkomsten boven de mediaan
R = Aantal runs boven en onder de mediaan

eenzijdig	0,005	0.01	0.025	0.05	0.05	0.025	0.01	0.005
tweezijdig	0.01	0.02	0.05	0.10	0.10	0.05	0.02	0.01
m = 5	-	2	2	3	9	10	10	-
6	2	2	3	3	11	11	12	12
7	3	3	3	4	12	13	13	13
8	3	4	4	5	13	14	14	15
9	4	4	5	6	14	15	16	16
10	5	5	6	6	16	16	17	17
11	5	6	7	7	17	17	18	19
12	6	7	7	8	18	19	19	20
13	7	7	8	9	19	20	21	21
14	7	8	9	10	20	21	22	23
15	8	9	10	11	21	22	23	24
16	9	10	11	11	23	23	24	25
17	10	10	11	12	24	25	26	26
18	10	11	12	13	25	26	27	27
19	11	12	13	14	26	27	28	29
20	12	13	14	15	27	28	29	30
21	13	14	15	16	28	29	30	31
22	14	14	16	17	29	30	32	32
23	14	15	16	17	31	32	33	34
24	15	16	17	18	32	33	34	35
25	16	17	18	19	33	34	35	36
26	17	18	19	20	34	35	36	37
27	18	19	20	21	35	36	37	38
28	18	19	21	22	36	37	39	40
29	19	20	22	23	37	38	40	41
30	20	21	22	24	38	40	41	42

$m > 30$ $$u = (R - m - 1)\sqrt{\frac{2}{m}}$$

Beschouw de waarnemingsreeks:

36 06 46 13 25 09 48 47 41 91 67 84 19 55 21 50 91 77 92 73 88 72 39 04 12

$\underline{O\ O\ O\ O\ O\ O}\ \overline{B}\quad \underline{O}\ \overline{B\ B\ B}\ \underline{O}\ \overline{B}\ \underline{O}\ \overline{B\ B\ B\ B\ B\ B\ B}\ \underline{O\ O\ O}$

Rangschik de 25 waarnemingen in opklimmende volgorde en bepaal de mediaan; de 13e waarneming. Er zijn 12 waarnemingen kleiner dan 47, en 12 groter dan 47. Noteer daarna bij elk getal of het onder of boven de mediaan ligt.

Het aantal runs boven en onder de mediaan; R = 9.
Het aantal waarnemingen onder de mediaan; m = 12.
Uit de tabel blijkt dat men bij reeksen van 25 aselecte getallen in 5% van de gevallen 8 of minder runs boven en onder de mediaan aantreft.
De waargenomen reeks wijkt nog niet significant af van het toevalspatroon.

THEORIE PAGINA 24 - UITVOERIGE TABEL IN [19]

DE LANGSTE RUN BOVEN OF ONDER DE MEDIAAN 7.7

Bovengrenzen m_0 voor het aantal waarnemingen boven de mediaan, waarbij de kans op een of meer runs boven of onder de mediaan ter lengte l_R of langer niet groter is dan α

	Runlengte l_R								
	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	bovengrenzen m_0								
α = 0.05	5	7	11	17	27	45	76	131	224
α = 0.01	-	-	7	10	15	20	30	46	77

36 06 46 13 25 09 48 47 41 91 67 84 19 55 21 50 91 77 92 73 88 72 39 04 12

$\underline{\text{O O O O O O}}\ \overline{\text{B}}\quad \underline{\text{O}}\ \overline{\text{B B B}}\ \underline{\text{O}}\ \overline{\text{B}}\ \underline{\text{O}}\ \overline{\text{B B B B B B.B}}\ \underline{\text{O O O}}$

Rangschik de 25 waarnemingen in opklimmende volgorde en bepaal de mediaan; -de 13e waarneming. Er zijn 12 waarnemingen kleiner dan 47 en 12 groter dan 47. Noteer daarna bij elk getal of het onder of boven de mediaan ligt.

De langste run boven of onder de mediaan; $L_R = 7$.
Het aantal waarnemingen onder de mediaan; $m = 12$.
Uit de tabel blijkt dat bij een waarde $m < m_o = 11$, de P (een of meer runs $> 7) < 5\%$.
Bij $m = 12$ komt een run van 7 vaker dan in 5% van de gevallen voor.

THEORIE PAGINA 24 - *UITVOERIGE TABEL IN* [2]

DE LANGSTE OP- OF NEERWAARTSE RUN 7.8

Bovengrenzen n_0 voor het aantal waarnemingen, waarbij de kans op een of meer op- en neerwaartse runs ter lengte l_S of langer niet groter is dan α

	Runlengte l_S				
	4	5	6	7	8
	bovengrenzen n_0				
α = 0.05	7	26	153	1170	10350
α = 0.01	-	9	34	235	2036

36 06 46 13 25 09 48 47 41 91 67 84 19 55 21 50 91 77 92 73 88 72 39 04 12

↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↓ ↑

Noteer bij elk paar a,b als $b > a$: ↑
als $b < a$: ↓
De langste op of neerwaartse run; $L_s = 3$.
Het aantal waarnemingen ; $n = 25$.
Uit de tabel blijkt dat bij een waarde $n < n_0 = 26$ de P (een of meer runs $> 5) < 5\%$.
Een runlengte van $L_s = 5$ zou juist significant geweest zijn bij $\alpha = 0.05$.
Deze reeks wijkt niet significant af van het toevalspatroon.

THEORIE PAGINA 24

7.9 HET AANTAL OP- EN NEERWAARTSE RUNS

Linker en rechter kritieke waarden van S, bij tweezijdige toetsing

S = het aantal op- en neerwaartse runs
n = „ „ waarnemings uitkomsten.

n	Onbetrouwbaarheid							
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.10	0.05	0.02	0.01
10	2	3	3	3	9			
11	3	3	4	4	10	10		
12	3	4	4	4	11	11		
13	4	4	5	5	12	12	12	
14	4	5	5	6	12	13	13	13
15	5	5	6	6	13	14	14	14
16	5	6	6	7	14	14	15	15
17	6	6	7	7	15	15	16	16
18	6	7	7	8	15	16	17	17
19	7	7	8	8	16	17	17	18
20	7	8	8	9	17	18	18	19
21	8	8	9	10	18	18	19	19
22	8	9	10	10	18	19	20	20
23	9	9	10	11	19	20	21	21
24	10	10	11	11	20	21	21	22
25	10	11	11	12	21	21	22	23
26	11	11	12	13	21	22	23	23
27	11	12	13	13	22	23	24	24
28	12	12	13	14	23	24	24	25
29	12	13	14	14	24	24	25	26
30	13	13	14	15	24	25	26	26
31	13	14	15	16	25	26	27	27
32	14	15	15	16	26	27	27	28
33	15	15	16	17	27	27	28	29
34	15	16	17	17	27	28	29	29
35	16	16	17	18	28	29	30	30
36	16	17	18	19	29	29	30	31
37	17	18	18	19	29	30	31	32
38	17	18	19	20	30	31	32	33
39	18	19	20	20	31	32	33	33
40	19	19	20	21	32	32	33	34

$n > 40$ $$u = \frac{3s - 2n + 1}{4} \sqrt{\frac{10}{n-2}}$$

Beschouw de waarnemingsreeks:

36 06 46 13 25 09 48 47 41 91 67 84 19 55 21 50 91 77 92 73 88 72 39 04 12
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↓ ↓ ↑

Noteer bij elk paar a,b als b > a: ↑
als b < a: ↓
Het aantal op en neerwaartse runs; s = 20.
Het aantal waarnemingen ; n = 25.
Uit de tabel blijkt dat bij n = 25 in 5% van de gevallen nog 21 of meer op- en neerwaartse runs voorkomen.

THEORIE PAGINA 24

Bij voorgeschreven P_A en c geeft de tabel de waarden van de Poisson parameter $\mu = n.p$ waarvoor

$$\sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-\mu} \mu^{x}}{x!} = P_A$$

c = aantal toelaatbaar aantal defectieven.
P_A = de goedkeurkans.

c	Goedkeurkans P_A													$P_A = .100$ / $P_A = .950$
	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	
0	.00501	.0101	.0253	.0513	.105	.288	.693	1.386	2.303	2.996	3.689	4.605	5.298	44.890
1	.103	.149	.242	.355	.532	.961	1.678	2.693	3.890	4.744	5.572	6.638	7.430	10.946
2	.338	.436	.619	.818	1.102	1.727	2.674	3.920	5.322	6.296	7.224	8.406	9.274	6.509
3	.672	.823	1.090	1.366	1.745	2.535	3.672	5.109	6.681	7.754	8.768	10.045	10.978	4.890
4	1.078	1.279	1.623	1.970	2.433	3.369	4.671	6.274	7.994	9.154	10.242	11.605	12.594	4.057
5	1.537	1.785	2.202	2.613	3.152	4.219	5.670	7.423	9.275	10.513	11.668	13.108	14.150	3.549
6	2.037	2.330	2.814	3.286	3.895	5.083	6.670	8.558	10.532	11.842	13.060	14.571	15.660	3.206
7	2.571	2.906	3.454	3.981	4.656	5.956	7.669	9.684	11.771	13.148	14.422	16.000	17.134	2.957
8	3.132	3.507	4.115	4.695	5.432	6.838	8.669	10.802	12.995	14.434	15.763	17.403	18.578	2.768
9	3.717	4.130	4.795	5.426	6.221	7.726	9.669	11.914	14.206	15.705	17.085	18.783	19.998	2.618
10	4.321	4.771	5.491	6.169	7.021	8.620	10.668	13.020	15.407	16.962	18.390	20.145	21.398	2.497
11	4.943	5.428	6.201	6.924	7.829	9.519	11.668	14.121	16.598	18.208	19.682	21.490	22.779	2.397
12	5.580	6.099	6.922	7.690	8.646	10.422	12.668	15.217	17.782	19.442	20.962	22.821	24.145	2.312
13	6.231	6.782	7.654	8.464	9.470	11.329	13.668	16.310	18.958	20.668	22.230	24.139	25.496	2.240
14	6.893	7.477	8.396	9.246	10.300	12.239	14.668	17.400	20.128	21.886	23.490	25.446	26.836	2.177
15	7.566	8.181	9.144	10.035	11.135	13.152	15.668	18.486	21.292	23.098	24.741	26.743	28.166	2.122
16	8.249	8.895	9.902	10.831	11.976	14.068	16.668	19.570	22.452	24.302	25.984	28.031	29.484	2.073
17	8.942	9.616	10.666	11.633	12.822	14.986	17.668	20.652	23.606	25.500	27.220	29.310	30.792	2.029
18	9.644	10.346	11.438	12.442	13.672	15.907	18.668	21.731	24.756	26.692	28.448	30.581	32.092	1.990
19	10.353	11.082	12.216	13.254	14.525	16.830	19.668	22.808	25.902	27.879	29.671	31.845	33.383	1.954
20	11.069	11.825	12.999	14.072	15.383	17.755	20.668	23.883	27.045	29.062	30.888	33.103	34.668	1.922
21	11.791	12.574	13.787	14.894	16.244	18.682	21.668	24.956	28.184	30.241	32.102	34.355	35.947	1.892
22	12.520	13.329	14.580	15.719	17.108	19.610	22.668	26.028	29.320	31.416	33.309	35.601	37.219	1.865
23	13.255	14.088	15.377	16.548	17.975	20.540	23.668	27.098	30.453	32.586	34.512	36.841	38.485	1.840
24	13.995	14.853	16.178	17.382	18.844	21.471	24.668	28.167	31.584	33.752	35.710	38.077	39.745	1.817
25	14.740	15.623	16.984	18.218	19.717	22.404	25.667	29.234	32.711	34.916	36.905	39.308	41.000	1.795
26	15.490	16.397	17.793	19.058	20.592	23.338	26.667	30.300	33.836	36.077	38.096	40.535	42.252	1.775
27	16.245	17.175	18.606	19.900	21.469	24.273	27.667	31.365	34.959	37.234	39.284	41.757	43.497	1.757
28	17.004	17.957	19.422	20.746	22.348	25.209	28.667	32.428	36.080	38.389	40.468	42.975	44.738	1.739
29	17.767	18.742	20.241	21.594	23.229	26.147	29.667	33.491	37.198	39.541	41.649	44.190	45.976	1.723
30	18.534	19.532	21.063	22.444	24.113	27.086	30.667	34.552	38.315	40.690	42.827	45.401	47.210	1.707

UITVOERIGE TABEL IN [22]

8.2 TOETS VAN SHPIRO EN WILK OP NORMALITEIT

Coëfficienten $a_{n-i+1,n} = -a_{i,n}$

i	n = 3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2	0.0000	0.1677	0.2413	0.2807	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3	-	-	0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4	-	-	-	-	0.0000	0.0561	0.0947	0.1224
5	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0399

i	n = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	-	-	0.0000	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8	-	-	-	-	0.0000	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0163	0.0303	0.0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0000	0.0140

Linker kritieke waarden van $\underline{W}_n$

	α						α				
n	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50	n	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935	13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927	14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928	16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932	17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935	18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938	19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959

Waarden van γ, δ en ε.

n	γ	δ	ε
3	-0.625	0.889	.7500
4	-1.107	1.644	.6297
5	-1.530	2.153	.5521
6	-2.010	2.620	.4963
7	-2.356	2.867	.4533
8	-2.696	3.069	.4186
9	-2.968	3.224	.3900
10	-3.262	3.387	.3660
11	-3.485	3.488	.3451
12	-3.731	3.617	.3270
13	-3.936	3.714	.3111
14	-4.155	3.811	.2969
15	-4.373	3.903	.2842
16	-4.567	3.970	.2727
17	-4.713	4.004	.2622
18	-4.885	4.076	.2528
19	-5.018	4.112	.2440
20	-5.153	4.149	.2359

Voor een steekproef van n stuks (n = 3,4,...,20) is de toetsingsgrootheid

$$W_n = \frac{[\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} x_{(i)}]^2}{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n} .$$

Hierin is $x_{(i)}$ de i^e waarneming, gerangschikt naar opklimmende grootte. De toetsingsgrootheid

$$\underline{G} := \gamma + \delta \times {}^{10}\log(\frac{\underline{W}_n - \varepsilon}{1 - \underline{W}_n}) \sim N(0,1)$$

bij benadering. Bij steekproefgrootten n > 20 worden de waarnemingen aselect in k (zo klein mogelijk) ongeveer gelijke groepen verdeeld met een grootte van hoogstens 20. De toetsingsgrootheid

$$\underline{G}_{tot} := \frac{\sum_{j=1}^{k} \underline{G}_j}{\sqrt{k}} \sim N(0,1)$$

bij benadering. De toets is links éénzijdig.

8.3 HET BEREKENEN VAN REGELGRENZEN VOOR HET CONTROLEREN VAN EEN FABRIKAGEPROCES.

FAKTOREN VOOR HET BEREKENEN VAN REGELGRENZEN (ENGELSE METHODE).

Steek-proef-grootte	$\frac{\sigma}{E(R)}$	Benedengrens voor R		Bovengrens voor R		Grenzen voor $\bar{x}$		Grenzen voor de Mediaan		Grenzen voor x	
	A_n	$D_{0.001}$	$D_{0.025}$	$D_{0.975}$	$D_{0.999}$	$A_{0.001}$	$A_{0.025}$	$M_{0.001}$	$M_{0.025}$	$E_{0.001}$	$E_{0.025}$
2	0.886	0.00	0.04	2.81	4.12	1.94	1.23	1.94	1.23	2.74	1.74
3	0.591	0.04	0.18	2.17	2.99	1.05	0.67	1.22	0.78	1.83	1.16
4	0.486	0.10	0.29	1.93	2.58	0.75	0.48	0.82	0.52	1.50	0.95
5	0.430	0.16	0.37	1.81	2.36	0.59	0.38	0.71	0.45	1.33	0.84
6	0.395	0.21	0.42	1.72	2.21	0.50	0.32	0.57	0.36	1.22	0.77
7	0.370	0.26	0.46	1.66	2.12	0.43	0.27	0.52	0.33	1.14	0.72
8	0.351	0.29	0.50	1.62	2.04	0.38	0.24	0.44	0.28	1.08	0.69
9	0.337	0.32	0.52	1.58	1.99	0.35	0.22	0.42	0.27	1.04	0.66
10	0.325	0.35	0.54	1.56	1.94	0.32	0.20	0.37	0.24	1.00	0.64
11	0.315	0.38	0.56	1.53	1.90	0.29	0.19	0.36	0.23	0.97	0.62
12	0.307	0.40	0.58	1.51	1.87	0.27	0.17	0.33	0.21	0.95	0.60

AFLEESVOORBEELD; VERKLARING VAN SYMBOLEN

Men vindt in de tabel bij een gegeven steekproefgrootte, n, de faktoren voor het berekenen van regelgrenzen volgens de Engelse methode. Uit een vrij groot aantal steekproefjes van n waarnemingen ieder wordt $\bar{R}$ berekend. De grenzen worden als volgt gevormd:

Grenzen voor R:

Tweezijdig, P = .998 : $\bar{R} \cdot D_{0.001} < R < \bar{R} \cdot D_{0.999}$

Tweezijdig, P = .95 : $\bar{R} \cdot D_{0.025} < R < \bar{R} \cdot D_{0.975}$

Grenzen voor $\bar{X}$:

Tweezijdig, P = .998 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot A_{0.001} < \bar{X} < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot A_{0.001}$

Tweezijdig, P = .95 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot A_{0.025} < \bar{X} < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot A_{0.025}$

Grenzen voor M:

Tweezijdig, P = .998 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot M_{0.001} < M < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot M_{0.001}$

Tweezijdig, P = .95 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot M_{0.025} < M < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot M_{0.025}$

Grenzen voor X:

Tweezijdig, P = .998 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot E_{0.001} < X < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot E_{0.001}$

Tweezijdig, P = .95 : $\bar{\bar{X}} - \bar{R} \cdot E_{0.025} < X < \bar{\bar{X}} + \bar{R} \cdot E_{0.025}$

Schatting van σ :

$S = A_n.R$

TOETS VAN DIXON VOOR UITSCHIETERS

Rechter kritieke waarden van r_{ij} bij tweezijdige toetsing

		α			
Toetsingsgrootheid	n	0.10	0.05	0.02	0.01
r_{10}	3	.886	.941	.976	.988
	4	.679	.765	.846	.889
	5	.557	.642	.729	.780
	6	.482	.560	.644	.698
	7	.434	.507	.586	.637
r_{11}	8	.479	.554	.631	.683
	9	.441	.512	.587	.635
	10	.409	.477	.551	.597
r_{21}	11	.517	.576	.638	.679
	12	.490	.546	.605	.642
	13	.467	.521	.578	.615
r_{22}	14	.492	.546	.602	.641
	15	.472	.525	.579	.616
	16	.454	.507	.559	.595
	17	.438	.490	.542	.577
	18	.424	.475	.527	.561
	19	.412	.462	.514	.547
	20	.401	.450	.502	.535
	21	.391	.440	.491	.524
	22	.382	.430	.481	.514
	23	.374	.421	.472	.505
	24	.367	.413	.464	.497
	25	.360	.406	.457	.489
	26	.354	.399	.450	.486
	27	.348	.393	.443	.475
	28	.342	.387	.437	.469
	29	.337	.381	.431	.463
	30	.332	.376	.425	.457

$x_{(1)},\dots,x_{(n)}$ zijn de naar opklimmende grootte gerangschikte waarnemingen.
De toetsingsgrootheden zijn:

$$r_{10} = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \quad \text{of} \quad r_{10} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

$$r_{11} = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}} \quad \text{of} \quad r_{11} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}}$$

$$r_{21} = \frac{x_{(3)} - x_{(1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}} \quad \text{of} \quad r_{21} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(2)}}$$

$$r_{22} = \frac{x_{(3)} - x_{(1)}}{x_{(n-2)} - x_{(1)}} \quad \text{of} \quad r_{22} = \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(3)}}$$

Onderstelling: de waarnemingen zijn afkomstig uit een, bij benadering, normaal verdeelde populatie.

8.4 ASELECTE GETALLEN

36 06 46 13 25	09 48 47 41 91	67 84 19 55 21	50 91 77 92 73	88 72 39 04 12
07 25 44 57 45	93 84 57 29 55	15 26 69 92 45	58 35 75 23 89	75 12 47 61 54
02 33 89 14 71	52 02 72 25 35	37 87 44 05 16	12 44 49 48 66	11 92 85 53 37
51 87 11 59 95	20 22 19 05 86	83 24 04 61 26	98 22 47 90 97	87 69 50 48 09
89 72 70 32 02	04 75 48 97 75	40 01 83 62 31	07 88 73 17 20	96 70 57 98 53
94 67 32 91 07	71 49 59 59 91	47 87 85 95 53	46 07 76 82 59	36 54 27 42 77
40 20 54 27 91	89 00 67 90 84	38 00 98 13 70	19 92 81 24 17	71 34 00 88 53
94 52 73 33 96	41 96 69 66 75	56 39 87 31 16	97 48 97 77 46	20 72 59 95 56
86 07 79 95 74	82 02 57 50 23	19 74 72 98 77	17 76 89 99 03	22 32 05 76 83
22 17 48 61 18	01 25 82 30 42	76 06 24 63 95	90 52 87 51 78	00 39 80 65 49
23 17 23 20 75	87 18 04 28 99	21 80 69 36 04	34 70 20 77 76	18 30 97 48 62
24 27 10 67 76	39 87 93 02 76	56 57 64 66 20	15 71 48 22 11	25 06 98 68 69
35 38 80 01 79	44 29 85 66 28	77 39 38 88 10	27 29 86 32 44	71 65 98 92 32
22 63 70 64 07	21 26 88 40 28	98 63 35 73 42	60 49 50 18 91	38 36 27 02 93
04 43 05 32 11	94 39 12 37 38	87 21 17 35 09	98 60 40 65 18	12 50 25 99 16
06 63 30 04 99	83 20 18 44 79	66 41 94 44 93	48 29 35 28 82	49 94 22 01 50
28 28 40 79 08	21 86 42 98 35	05 94 38 66 41	98 37 04 87 99	42 22 62 29 47
30 05 78 69 83	43 68 37 15 73	36 57 33 23 96	43 21 68 17 76	81 18 85 25 94
54 83 43 03 57	78 78 17 89 41	06 99 65 47 75	63 92 29 26 09	11 85 81 53 65
41 61 55 84 94	75 19 63 23 60	06 44 29 77 02	79 41 69 93 61	96 53 45 98 39
06 01 22 15 95	22 23 83 26 29	39 95 50 23 53	87 00 55 83 49	24 76 90 24 80
20 56 94 22 81	07 86 11 61 30	81 70 61 89 74	83 56 28 71 58	81 18 45 40 94
79 51 06 83 63	01 03 56 59 04	26 05 83 06 01	16 51 72 44 99	98 41 73 86 43
69 58 97 33 79	22 16 00 65 91	12 92 55 89 73	19 07 06 41 38	34 73 12 43 45
04 50 94 95 99	48 14 54 12 97	49 86 70 98 56	06 93 58 74 94	55 92 16 91 54
39 93 94 40 33	81 09 23 42 98	56 50 79 19 25	23 07 84 81 05	56 68 68 57 69
17 79 56 31 98	27 97 82 33 62	61 52 59 10 26	70 98 60 39 42	90 75 46 94 86
80 54 04 48 41	05 79 16 40 07	17 26 94 82 80	68 08 09 64 53	37 58 99 36 10
79 86 00 59 48	35 04 48 39 46	04 71 43 88 01	10 41 56 45 66	43 00 83 69 67
14 72 30 79 13	95 96 59 31 70	82 43 92 35 11	16 85 17 53 73	54 82 35 65 82
28 45 78 47 60	52 78 55 17 11	83 93 55 20 47	28 22 38 32 06	44 39 10 13 49
42 70 25 26 46	83 22 00 23 87	97 32 26 12 70	55 15 62 88 31	89 23 84 59 38
11 84 85 18 88	73 20 07 72 47	66 44 92 10 27	29 17 13 12 33	27 85 59 31 76
26 59 28 19 74	29 90 19 71 19	68 14 07 13 36	01 31 68 09 28	98 60 59 30 31
42 33 03 34 94	42 79 42 13 28	31 77 52 02 05	94 78 45 93 07	65 56 49 47 64
03 83 10 84 20	23 08 20 55 02	87 00 35 28 30	35 16 81 40 12	95 83 80 52 81
02 73 79 02 38	74 75 56 37 47	89 79 16 81 66	75 83 90 36 61	18 45 61 80 48
63 90 04 21 64	59 23 19 69 88	46 31 26 75 55	87 41 93 10 64	90 06 27 26 38
19 74 52 13 57	00 54 60 02 12	63 02 32 30 27	72 98 93 55 13	62 98 93 54 79
15 18 14 82 28	21 77 74 95 64	63 45 16 53 70	68 77 68 19 13	96 91 42 32 97
03 66 02 96 69	92 73 90 78 64	29 95 05 30 38	10 78 48 69 44	01 74 96 98 45
34 18 99 00 10	38 21 44 18 01	88 22 54 59 36	12 99 85 93 51	73 06 46 92 32
88 58 63 52 43	58 32 01 29 25	74 39 96 20 36	64 75 40 85 26	24 04 67 34 33
56 58 69 07 85	85 06 75 95 54	87 11 73 21 18	58 04 97 21 86	75 29 21 16 06
64 81 69 43 66	28 72 33 17 85	44 99 88 90 86	87 48 59 72 99	80 83 81 31 54
90 38 91 52 74	41 90 46 38 82	05 56 03 19 28	84 81 18 28 73	94 77 76 21 89
28 49 79 39 95	30 43 23 12 16	55 99 69 63 48	40 02 15 15 24	84 49 29 40 39
50 87 17 56 96	34 07 37 63 91	41 65 91 70 82	78 29 40 71 59	47 97 64 69 58
35 65 04 30 42	82 42 37 71 93	01 43 95 08 01	48 00 55 88 43	47 12 01 57 23
27 01 05 53 39	60 93 79 14 62	84 06 26 57 43	76 12 15 08 53	67 00 95 81 33

ASELECTE GETALLEN

78 12 65 02 45	51 08 83 81 65	28 23 60 46 16	19 72 40 03 32	17 84 41 41 99
15 43 16 44 81	09 12 16 10 21	69 51 25 35 04	76 52 47 82 67	57 97 52 37 45
52 79 35 03 10	59 60 61 69 28	22 95 56 80 91	80 19 92 04 55	91 16 32 99 14
40 23 26 41 80	35 33 33 19 75	46 21 72 70 96	99 94 21 38 55	91 19 51 73 45
77 93 81 02 31	21 82 58 55 95	57 62 44 42 37	88 59 79 85 30	40 95 05 23 28
11 28 63 11 22	91 25 94 98 51	15 21 26 34 33	65 10 68 50 54	95 89 76 20 46
51 07 79 18 69	25 22 70 01 40	21 32 42 33 12	50 80 00 13 71	05 73 03 24 07
05 14 40 76 87	04 41 09 09 93	22 01 43 03 03	95 86 28 52 51	91 86 54 49 51
54 73 17 70 31	85 82 07 47 26	52 75 00 07 66	47 24 51 90 38	38 87 52 70 15
08 50 64 22 58	81 50 40 59 17	51 06 71 31 30	16 61 07 58 43	60 44 99 71 41
75 36 86 15 36	38 37 22 74 22	35 36 98 99 06	18 45 39 54 29	32 80 12 53 80
56 65 29 54 48	57 46 20 72 31	18 54 93 03 72	25 38 11 33 01	37 58 28 22 80
32 17 43 86 53	45 91 27 58 81	48 66 76 15 41	24 95 09 41 62	15 63 33 95 61
91 93 86 25 42	42 49 30 76 30	35 22 11 50 34	58 39 25 79 16	60 15 15 72 19
68 85 14 77 40	24 12 98 54 09	88 85 27 54 12	63 18 62 49 60	44 64 31 06 35
84 36 01 96 75	77 95 62 95 40	39 61 31 17 55	39 04 13 57 18	41 75 41 96 16
13 18 51 61 92	06 06 65 64 63	19 33 13 76 45	10 69 98 88 30	58 46 42 96 00
87 65 13 18 91	69 71 83 79 40	24 85 34 38 80	68 45 56 98 25	56 97 26 10 69
80 77 32 16 34	08 90 63 07 68	44 72 10 13 38	98 49 31 58 85	42 62 01 37 63
84 82 67 73 21	40 66 28 88 23	15 97 50 02 62	94 43 60 01 74	93 07 55 16 36
94 95 01 00 25	91 16 20 92 69	84 35 82 83 65	37 34 56 41 56	12 01 75 97 35
30 08 39 65 08	72 68 73 23 02	17 43 93 15 25	51 69 50 09 61	00 57 04 72 84
57 31 47 02 42	10 46 45 53 61	98 39 32 96 64	98 46 19 31 37	83 10 00 78 80
85 11 97 72 98	86 83 29 13 14	20 51 12 37 04	14 09 80 26 66	31 41 70 31 63
35 21 83 60 52	03 18 33 00 63	84 59 44 38 47	68 92 39 92 45	44 48 99 68 96
07 98 09 54 01	98 38 82 32 78	88 59 85 33 00	39 12 23 38 05	56 13 00 42 10
41 12 41 76 89	65 62 27 64 36	02 05 69 88 05	04 87 67 58 81	70 77 50 26 57
77 99 67 71 56	21 90 93 84 68	85 55 50 06 78	55 71 79 14 81	15 74 53 86 62
99 51 69 56 31	23 42 54 83 33	00 70 86 64 00	68 94 94 12 93	49 91 10 42 18
92 74 04 86 66	85 95 40 05 95	24 14 02 47 36	93 33 78 37 06	22 84 04 78 31
67 80 05 85 90	00 97 03 17 63	52 11 90 75 02	26 85 81 76 10	93 57 40 01 19
43 01 21 97 69	04 56 65 52 61	49 04 85 06 17	47 00 57 33 53	49 65 82 64 35
13 31 72 48 11	41 22 05 39 76	96 16 81 81 20	03 04 34 94 30	16 66 78 89 25
80 34 11 53 79	27 00 31 02 77	31 55 84 53 83	08 54 39 11 92	90 83 98 47 63
70 02 01 12 79	68 33 28 75 34	21 44 29 09 24	62 32 17 59 46	71 07 40 36 50
73 78 51 59 46	71 11 54 68 84	16 09 70 39 60	63 74 91 61 12	83 96 14 34 92
69 22 97 62 83	66 97 89 26 14	20 40 70 57 41	71 93 45 54 68	79 41 49 07 93
01 84 12 48 79	68 15 29 27 36	99 62 93 10 69	81 23 32 96 08	45 25 68 96 95
34 83 73 90 48	13 30 49 47 69	62 59 63 05 07	84 43 13 21 22	54 98 09 78 80
12 99 39 24 82	47 14 97 29 03	04 37 16 62 19	68 54 47 24 82	86 22 62 00 47
40 28 61 24 90	37 30 92 36 87	17 94 19 98 42	37 27 15 36 24	19 69 59 56 30
22 99 98 19 17	16 70 50 33 98	17 25 36 91 88	17 32 15 94 17	81 90 35 88 42
48 86 97 03 36	65 20 44 97 23	15 62 42 08 90	53 95 40 20 15	56 45 32 95 46
40 46 56 73 78	36 85 69 74 12	82 40 17 03 79	21 20 42 48 18	77 93 82 25 30
93 15 58 31 85	84 94 96 59 61	68 69 56 23 45	83 25 37 85 68	13 17 43 39 72
72 56 99 90 54	96 84 01 06 40	02 84 02 92 49	90 31 87 47 08	90 18 34 92 04
34 46 30 31 14	42 70 42 46 01	30 36 39 81 86	66 33 65 41 42	20 35 58 78 10
65 07 15 30 51	26 68 89 85 12	89 21 80 42 91	54 20 99 38 02	42 29 06 07 07
22 27 30 42 37	41 58 82 50 66	73 80 91 24 91	83 09 45 34 93	23 76 73 00 34
33 13 07 03 74	35 42 17 74 52	81 58 71 85 22	29 41 30 86 97	79 61 69 11 82

8.4 ASELECTE GETALLEN

(VERVOLG)

26 00 99 42 46	03 40 22 12 81	08 81 47 08 55	43 80 74 24 97	70 10 50 41 76
37 33 15 48 54	74 64 28 05 40	89 68 14 89 42	16 35 19 64 88	36 14 11 26 35
32 64 32 56 29	73 03 20 05 94	55 63 64 71 07	57 92 40 56 63	72 82 41 43 73
21 36 59 90 52	26 37 14 49 57	84 03 54 70 06	23 46 33 43 15	93 03 91 28 96
57 03 12 35 76	74 53 57 48 49	63 90 78 32 92	87 35 74 26 23	95 30 73 18 29
83 65 81 19 24	04 64 69 21 35	51 05 05 43 10	58 76 77 03 35	05 39 27 97 71
23 92 50 81 85	04 12 11 47 25	19 37 95 43 99	76 52 96 72 90	68 18 07 97 15
50 56 79 76 33	89 44 71 58 86	16 96 59 34 16	93 14 25 34 25	06 45 31 84 65
52 86 48 41 28	08 39 49 86 03	18 49 83 00 36	33 44 09 76 64	53 15 29 20 09
83 91 53 57 44	96 64 07 77 25	91 30 26 09 29	79 57 71 68 75	68 34 25 30 16
40 76 03 45 52	72 13 29 60 13	27 19 04 66 21	58 00 11 00 14	68 73 59 77 84
54 68 23 20 59	77 42 12 02 52	93 81 92 92 54	42 76 63 81 94	49 33 74 69 93
56 10 63 84 88	42 83 12 83 30	61 01 27 00 76	62 56 50 21 08	42 54 97 28 23
81 23 15 90 64	59 47 57 05 40	75 02 56 50 57	57 17 02 05 14	75 53 20 27 57
04 20 26 94 54	65 56 82 08 66	16 14 65 57 32	27 12 03 30 55	14 08 30 82 28
76 08 34 66 07	27 83 96 71 14	75 55 79 77 38	62 30 42 92 93	66 52 67 77 53
90 24 83 83 63	29 66 95 31 29	88 11 02 19 01	50 37 67 92 37	82 86 16 57 18
15 55 92 43 99	10 35 12 90 54	43 64 54 65 19	07 26 41 95 98	36 21 32 08 19
30 19 56 01 20	94 47 53 23 14	37 31 56 11 39	91 79 50 98 21	52 81 65 68 26
82 35 59 90 05	74 02 41 73 13	61 89 66 87 62	28 68 16 45 69	41 01 74 85 50
01 09 00 87 47	77 44 32 03 14	47 16 19 03 58	30 85 69 08 60	65 31 02 74 65
72 80 44 12 65	11 06 75 42 82	54 34 55 56 26	85 50 96 55 29	31 72 09 57 45
26 27 89 40 76	91 14 79 49 91	03 89 74 71 83	06 00 03 97 72	35 09 74 61 38
53 52 16 36 15	53 24 12 46 59	61 88 35 36 63	17 50 88 79 64	44 03 06 27 92
98 70 60 81 12	59 42 96 04 05	02 61 55 52 31	19 19 58 74 12	28 64 04 29 89
35 51 07 73 87	71 97 22 56 19	10 72 21 56 75	55 79 06 80 35	70 17 01 82 81
35 51 23 88 08	78 51 54 86 11	25 18 57 77 71	69 90 97 47 92	07 54 70 90 78
57 30 67 12 83	36 77 21 62 75	90 64 11 70 53	57 55 59 03 80	32 40 24 88 82
04 98 08 87 04	81 54 97 23 73	91 08 41 47 87	96 87 15 21 46	67 41 34 62 85
01 48 34 19 42	50 07 24 32 24	08 05 74 29 80	12 41 95 85 09	11 46 69 15 18
82 41 33 13 42	98 01 72 34 08	00 68 43 97 92	18 94 89 20 70	63 50 52 27 51
67 20 70 31 68	70 93 02 10 42	42 91 53 49 64	48 03 80 86 19	08 60 79 41 10
66 40 12 40 77	64 73 79 63 73	01 36 48 52 75	26 15 04 10 96	08 79 16 98 26
18 32 93 62 12	01 89 81 64 01	19 52 56 41 12	15 97 60 44 37	09 08 64 43 19
46 57 44 11 21	54 96 29 51 55	22 17 78 46 53	40 38 00 21 44	07 79 66 85 38
50 20 90 09 92	80 00 96 75 94	20 36 58 14 19	37 78 24 61 63	10 80 39 07 75
03 10 07 38 93	62 57 60 16 69	12 51 63 54 22	15 21 88 33 36	66 35 08 39 06
61 21 52 42 54	60 97 89 52 20	27 25 17 74 79	05 45 18 72 78	75 35 28 05 56
15 76 03 98 86	85 79 88 01 82	46 20 84 00 04	47 56 46 57 24	08 80 27 39 72
68 67 13 84 33	25 43 92 53 34	22 66 60 71 99	91 35 56 88 50	55 87 06 80 27
25 65 03 65 03	42 75 69 85 17	23 52 73 02 51	60 35 04 31 12	45 67 14 14 93
84 45 51 09 04	84 70 31 52 21	91 56 37 41 17	57 29 13 62 46	34 06 09 44 61
54 09 81 19 62	34 29 15 97 05	77 23 80 56 33	75 17 58 10 97	59 66 85 51 18
08 30 51 45 77	75 30 07 52 33	04 43 34 73 91	82 82 04 91 06	75 84 28 22 72
19 90 28 53 40	30 44 11 49 56	22 12 54 88 75	03 31 48 38 91	37 22 48 02 12
99 75 61 41 99	77 14 97 27 68	47 01 83 85 79	21 01 02 52 62	87 42 02 34 46
85 96 62 03 59	17 74 61 05 36	83 34 22 59 22	35 07 29 55 41	73 63 88 34 05
05 41 20 33 59	91 95 77 95 23	03 44 34 81 43	30 14 59 33 80	64 20 52 93 95
41 38 40 12 76	74 95 46 82 45	32 57 21 67 86	24 43 04 23 59	30 15 76 76 95
52 71 04 77 99	98 22 05 03 03	40 46 11 67 31	15 27 04 87 53	11 35 63 61 82

UITVOERIGE TABEL IN [24] [25]

ASELECTE PERMUTATIES

Verlotingsseries

2	5	9	1	7	4	2	0	7	5	4	1	8	9	2	2	1	0	3	9	4	7	8	9	5
8	0	3	4	6	8	1	6	3	9	6	5	0	3	7	8	5	4	6	7	1	3	2	0	6
8	9	7	0	2	7	9	2	3	6	7	9	5	1	3	3	5	6	7	2	9	1	8	5	0
1	6	4	5	3	5	4	0	8	1	6	0	4	2	8	0	4	8	9	1	4	7	2	3	6
8	4	1	9	7	3	0	9	8	7	2	0	4	6	3	7	6	1	4	2	0	4	9	5	6
0	3	5	2	6	4	5	1	6	2	7	9	8	1	5	8	9	3	0	5	1	8	7	2	3
7	0	9	1	6	8	6	2	4	9	1	9	8	7	4	8	2	3	9	5	2	1	0	8	4
5	3	4	8	2	5	3	7	1	0	3	0	2	6	5	1	7	4	6	0	6	9	7	3	5
22	12	05	00	15	17	08	13	00	02	24	03	18	04	05	14	04	22	09	23	21	02	07	17	19
06	08	03	17	19	06	09	20	01	03	02	15	17	00	09	06	10	20	16	02	06	01	08	03	18
04	10	07	11	18	23	19	10	04	16	08	19	22	23	06	12	07	01	05	18	14	15	12	11	20
21	02	23	20	16	18	07	22	24	14	20	10	12	14	13	21	24	15	00	13	05	16	23	24	22
14	09	24	01	13	21	15	05	12	11	01	07	21	16	11	17	08	19	03	11	13	04	00	09	10
16	21	18	24	07	02	23	21	24	07	06	13	05	18	16	06	11	08	19	04	13	12	05	08	23
05	08	09	20	12	20	22	16	03	00	22	00	10	12	17	01	14	13	15	02	20	24	09	19	00
13	00	10	15	17	09	05	15	01	11	19	20	11	08	14	10	16	12	23	03	02	15	11	03	04
14	23	19	01	22	18	04	08	17	14	07	15	24	09	04	24	00	05	20	17	06	01	07	14	17
02	04	03	11	06	10	12	13	06	19	02	21	03	23	01	22	09	07	18	21	22	16	18	21	10
06	44	39	42	22	42	34	13	45	35	37	24	07	18	35	22	43	41	01	00	00	32	16	30	05
00	19	49	37	30	16	25	26	05	43	21	45	17	08	14	38	47	06	18	48	04	34	49	27	17
10	32	38	33	15	32	07	11	14	39	38	00	41	49	09	27	12	40	21	32	33	45	47	11	24
13	25	35	12	23	40	47	37	27	49	30	11	44	03	26	02	17	49	34	16	35	44	36	41	29
04	05	21	18	02	17	44	00	21	28	19	27	23	40	13	35	36	10	24	04	22	42	15	38	26
08	46	14	03	11	36	24	31	15	46	02	47	31	33	48	20	44	39	23	14	25	12	13	37	02
24	09	31	43	40	03	29	02	01	18	43	32	34	15	46	37	15	08	29	03	07	48	40	09	39
27	07	16	20	36	23	30	33	20	48	01	16	12	39	22	30	25	19	11	33	28	43	31	08	18
48	47	34	41	01	41	04	06	19	08	04	36	42	28	06	26	09	28	42	46	21	23	19	20	03
28	17	26	29	45	10	22	12	38	09	20	25	29	05	10	45	31	05	07	13	14	46	10	06	01
81	56	33	83	66	03	69	89	59	45	84	09	75	25	95	97	41	65	76	90	70	60	28	07	24
74	65	15	45	99	16	95	80	96	01	05	00	35	04	63	06	28	37	09	82	32	64	98	39	79
67	32	12	57	09	15	29	36	88	11	56	48	94	76	01	67	75	31	79	01	16	18	40	69	48
95	27	41	97	06	40	53	47	08	84	07	36	28	59	42	70	19	88	56	12	08	74	68	88	13
70	40	17	44	10	71	39	06	64	27	91	06	21	44	30	33	64	18	30	55	01	73	67	81	56
61	63	47	84	30	77	25	82	81	73	26	14	51	89	19	03	15	87	78	40	61	00	52	63	26
37	51	48	82	01	07	48	00	28	05	98	55	64	90	23	51	23	45	95	04	25	93	09	54	72
42	54	60	87	00	86	74	49	83	32	74	16	93	96	82	43	77	60	38	61	49	14	41	87	71
62	50	28	21	36	46	35	56	13	23	12	41	18	68	65	96	59	49	24	68	23	50	84	19	42
93	53	02	58	24	61	19	50	99	54	45	71	20	40	67	02	93	32	80	26	05	85	20	91	11
52	96	22	11	91	92	62	38	94	51	80	77	43	49	62	63	62	35	89	72	59	02	55	89	36
07	34	89	23	19	67	09	87	52	98	32	24	92	85	22	52	69	99	54	84	86	82	15	76	58
16	18	04	80	64	78	34	12	18	63	73	52	39	33	31	94	98	58	71	16	83	65	77	29	95
29	88	71	31	46	72	44	14	37	57	54	29	02	13	34	10	29	86	81	25	97	47	57	27	38
39	13	14	90	69	66	55	17	42	68	69	70	83	58	53	92	14	42	85	83	03	31	44	90	10
43	73	76	55	85	43	20	65	79	24	79	11	38	72	10	21	74	50	36	44	37	06	04	51	96
08	98	78	35	94	75	97	76	10	90	86	27	60	08	03	34	53	05	91	73	99	22	66	34	33
77	20	49	26	59	91	21	93	41	33	46	50	97	47	17	48	57	07	46	22	30	12	80	46	92
25	05	86	79	92	02	22	30	26	31	57	81	37	61	87	39	11	47	17	20	75	53	35	94	43
72	68	03	75	38	04	58	85	60	70	99	15	66	88	78	13	08	27	00	66	78	17	45	62	21

UITVOERIGE TABEL IN [26]

8.6

ASELECTE TREKKINGEN UIT EEN NORMALE VERDELING

$\mu = 0 \quad \sigma = 1$

0.14	0.44	-0.48	1.25	0.03	0.35	-0.72	-0.85	-0.44	0.90	0.35	0.74
0.75	0.23	0.15	1.53	2.36	0.69	0.16	1.20	0.77	1.29	0.03	1.16
-0.79	-0.76	-0.58	-1.79	0.88	0.28	1.13	1.30	-0.78	-0.58	-0.84	0.84
1.11	-0.33	1.35	-0.33	-0.29	0.97	-1.27	0.92	-1.18	-1.23	1.01	-2.01
-0.94	-2.10	0.01	-1.12	-0.32	-3.39	-0.53	-0.45	1.56	0.34	-2.08	-1.01
1.13	-1.38	0.82	-1.68	-0.65	0.61	1.94	-0.59	-1.62	-1.18	0.57	3.14
-0.18	1.32	1.26	0.20	0.06	-1.09	0.51	-0.54	-1.08	-0.07	1.94	0.70
-0.64	0.23	0.98	0.24	-0.88	-1.43	1.76	-0.23	0.35	0.02	0.73	0.34
-0.16	-0.95	-2.37	0.34	0.00	-0.47	-1.60	-0.94	-0.02	0.49	0.43	0.19
1.06	-0.35	-1.63	1.37	-0.76	0.27	0.33	-1.49	-0.57	0.58	0.14	-0.84
-0.78	-2.71	-0.71	1.67	1.23	1.53	-1.77	-0.61	-0.75	-1.19	1.82	-0.83
-1.18	-0.24	0.34	-0.81	-0.59	-0.21	-0.17	1.45	-1.46	1.57	0.35	-0.06
-1.25	1.79	0.34	-0.91	1.01	0.17	0.14	-0.19	-2.22	-0.34	0.35	-0.04
2.35	1.25	2.56	1.97	0.11	0.95	0.14	-0.37	-0.72	0.33	0.51	0.23
2.50	0.63	0.84	0.88	0.27	2.16	-1.45	-0.16	-1.02	0.49	1.09	0.24
-0.73	0.77	-0.06	-0.00	-0.09	-0.47	0.15	-0.30	-0.96	1.34	-0.01	0.30
0.64	0.09	-1.77	-1.21	-0.36	1.36	0.80	0.41	0.47	-0.04	-0.69	-0.09
1.37	0.90	1.74	-0.96	-0.61	-1.54	-1.34	1.45	-0.40	-0.78	-0.77	0.10
-2.06	-1.15	1.16	0.58	0.28	0.50	0.35	2.22	1.42	0.16	-2.25	0.49
0.66	0.44	1.67	-0.21	0.95	0.88	-0.37	-0.24	-0.16	1.26	1.82	-1.76
0.20	-0.03	0.61	-0.25	0.76	-0.19	-0.18	0.92	-0.77	1.15	0.09	0.82
-0.20	-0.15	0.90	1.72	-0.72	0.84	-0.52	-1.49	1.45	-0.65	0.04	0.03
0.43	-1.03	-0.42	-0.30	-0.59	0.99	-1.41	0.77	-0.52	-0.04	1.13	-0.63
-2.86	1.43	1.14	-0.86	0.07	0.77	0.39	1.00	1.18	-1.12	-1.70	-0.93
-0.00	-0.95	-0.25	0.34	1.57	-0.65	0.03	1.17	-1.22	-2.58	-0.05	-0.23
-1.58	-0.29	-0.55	-0.04	0.14	-1.45	-0.05	-1.12	1.27	0.83	-0.41	-0.47
-0.56	2.56	-1.01	-0.30	-1.18	-0.71	0.19	0.20	0.70	1.23	-0.79	-0.57
1.47	1.10	1.19	-0.86	1.30	1.18	0.32	0.43	-0.68	-1.18	0.35	-0.25
0.08	-0.41	-0.43	-0.69	-1.28	-2.20	-0.25	1.05	-0.87	-1.22	-1.42	-0.97
0.85	0.12	-0.16	-0.41	1.10	-0.26	0.28	0.55	-0.59	0.60	1.23	0.82
-0.30	-1.03	-2.41	0.27	-1.70	1.39	0.04	2.53	-0.89	1.09	0.22	1.06
0.34	2.36	0.05	0.62	-2.47	-0.55	0.30	-1.55	-1.39	0.10	1.26	1.75
-1.22	1.22	0.42	-0.97	0.40	1.46	0.62	0.82	-1.09	0.94	-1.68	1.11
-0.02	0.63	-0.21	1.06	0.17	-0.42	0.56	0.66	0.61	2.05	1.49	-0.21
0.45	-0.35	-0.19	-0.89	0.80	-0.86	-0.27	0.06	0.83	-0.11	0.26	0.99
-1.69	-0.62	0.84	0.81	0.51	0.52	1.58	1.48	-0.44	-1.01	-2.32	-0.71
1.55	-1.89	-0.27	-1.43	1.43	1.54	-0.01	1.49	0.14	-0.48	0.20	0.29
0.65	0.01	0.66	-0.29	1.51	-0.14	-0.86	0.64	0.35	1.58	0.70	-0.98
-0.08	-0.71	0.19	0.40	-0.96	0.49	-0.65	-0.80	-0.31	-0.51	0.49	-1.33
0.68	-2.42	0.81	0.20	-2.02	-1.40	0.15	-0.73	0.90	-1.01	-1.71	-0.07
1.58	1.11	-0.97	0.90	-0.03	0.22	-1.32	0.69	1.41	-1.09	-0.01	0.85
-0.61	2.70	1.09	0.15	0.94	-2.13	0.07	0.90	0.46	1.85	-0.60	0.68
0.04	1.57	-0.27	1.27	0.57	0.74	-0.68	0.90	-1.61	-0.96	-0.52	0.68
-0.66	1.10	-0.99	0.33	-1.11	0.10	0.35	-1.84	0.64	-0.26	-1.14	-0.30
-1.87	-0.12	0.91	-0.54	-0.77	-0.37	1.50	-0.49	0.87	0.20	-0.66	1.96
-0.79	-1.65	0.10	-0.56	-1.49	0.39	-0.39	0.69	0.47	0.92	-0.87	0.35
-0.34	0.48	-0.42	-0.01	-0.98	1.37	-0.90	1.86	-1.35	-0.74	0.99	-0.10
0.46	2.54	-1.57	2.03	-0.13	-0.40	0.03	-2.07	-0.23	-0.64	-0.32	1.94
1.60	-1.75	-0.60	-0.63	0.70	-0.43	0.11	-0.09	-1.19	0.08	-0.24	-0.36
-0.40	1.99	0.11	-1.11	0.50	0.71	0.51	2.86	0.11	0.16	-0.45	-0.24

ASELECTE TREKKINGEN
UIT EEN NORMALE VERDELING

$\mu = 0 \quad \sigma = 1$

-0.84	0.68	0.11	1.05	0.09	0.83	1.01	-0.54	0.28	0.88	-1.01	0.30
1.37	-0.77	-0.89	0.61	-2.54	1.55	-0.20	1.11	-1.52	-0.62	-0.43	0.95
-0.18	-1.39	0.99	-0.01	-0.22	0.36	0.45	0.59	1.52	-0.36	-0.76	-1.00
0.35	-1.91	0.50	-0.92	-0.30	0.36	-0.69	-1.64	0.42	0.86	0.13	1.43
2.82	0.05	-0.95	1.17	1.22	0.14	-0.76	0.24	-1.07	0.98	-0.87	1.06
2.12	1.32	0.81	-1.91	-1.23	-0.17	-0.03	-1.65	-0.35	-0.73	1.69	-0.66
-0.99	-0.67	-0.28	-0.48	-0.12	-2.21	0.40	-0.83	-0.37	-0.52	0.02	0.60
0.34	-0.81	-1.64	-0.21	-0.19	0.66	0.39	1.06	-0.38	-0.72	0.33	1.11
0.64	0.96	-1.44	-2.47	-1.69	-0.45	1.39	-0.17	0.09	-0.97	-0.79	-0.08
0.11	-0.24	0.01	-0.28	0.04	1.28	0.77	-1.31	-0.38	1.28	1.41	1.41
-0.02	-0.66	0.24	-0.43	1.09	-0.41	-0.37	-0.56	0.38	-0.18	1.79	0.78
-0.86	1.08	0.46	0.08	1.03	-1.73	0.35	0.66	0.88	-0.27	1.38	-2.01
0.01	0.27	0.02	-0.60	-0.61	-1.01	-1.25	1.43	-1.92	1.17	0.71	-1.53
-0.03	0.46	-2.09	-1.60	-0.56	-1.36	-0.70	-0.18	1.11	0.91	-0.28	0.30
-0.41	-0.77	2.08	-0.98	0.36	-0.36	1.41	-0.07	-1.59	0.15	-0.96	0.87
0.62	0.00	-0.80	-0.62	0.35	0.31	-0.04	-0.41	-0.33	0.72	-0.09	-0.77
0.83	1.01	0.27	1.47	0.29	-2.79	0.42	0.51	-0.63	-1.25	-0.60	2.32
-0.78	-0.92	0.21	-0.60	-0.59	0.14	-0.09	0.97	0.96	-1.08	-0.09	0.62
0.03	0.98	-1.33	0.66	-0.57	-0.68	-0.59	-1.20	1.05	-1.18	-0.51	-0.93
-2.30	0.24	1.70	-0.52	-0.15	1.13	0.77	-0.10	-0.48	-0.89	-0.29	1.65
0.78	1.01	-0.92	1.82	-0.67	-1.30	-0.69	1.53	-0.60	0.30	1.50	0.13
0.66	1.49	1.73	-0.27	-0.87	-0.64	0.14	-0.68	0.69	-0.65	-0.47	1.35
-0.34	1.16	0.66	0.59	0.35	-1.63	-0.34	1.70	-0.46	0.88	-2.34	-1.14
1.16	0.48	-1.69	0.07	0.70	-0.49	-0.51	1.40	-0.87	0.98	-1.09	0.35
0.76	0.40	2.13	-0.25	-0.15	-0.25	0.54	0.17	-0.45	1.97	1.18	-2.15
-1.00	-0.12	-2.20	0.75	1.30	-0.64	1.35	-1.98	-0.14	-0.82	-0.53	0.43
-0.32	-0.85	1.57	0.25	0.75	-0.61	0.06	-0.61	-1.02	0.60	-0.73	-1.41
0.18	-0.46	-1.85	2.24	1.08	0.24	0.66	1.03	-0.58	-0.37	1.47	-0.14
0.08	0.35	-2.24	-0.27	0.67	-1.01	-0.35	0.66	1.38	0.68	-0.78	1.69
1.98	0.23	-0.15	-0.22	-0.56	-0.62	-0.53	-0.62	1.11	-0.88	-0.30	0.84
0.91	0.20	-0.45	0.06	-1.10	-0.23	-0.56	-0.03	-1.49	1.73	1.73	-2.14
-0.32	-0.17	-0.03	-0.75	0.93	0.42	-0.02	0.15	-0.14	0.38	1.02	-0.75
-1.77	0.12	1.01	-2.27	0.55	0.32	0.66	-1.86	0.50	-0.65	-0.31	-0.58
0.16	-1.48	1.19	-0.23	0.59	0.41	0.10	-1.55	-0.35	1.07	1.28	-0.25
0.79	0.52	-1.03	-1.18	-0.85	1.67	0.52	0.34	0.94	-0.05	-1.14	0.29
0.20	1.56	0.35	-0.62	-0.15	-0.19	-0.46	-0.63	0.50	-0.54	-0.27	-1.00
1.31	1.04	-0.82	0.47	0.81	0.26	0.47	0.30	0.83	-0.28	-1.14	-1.69
0.35	-0.18	1.76	0.92	-1.21	-0.48	0.40	0.31	0.04	-0.61	1.68	0.63
0.74	-0.26	-0.68	-0.32	-0.44	0.01	-1.15	1.13	-0.12	-0.22	-1.70	-1.34
0.27	1.00	-0.88	-0.23	-0.47	-1.61	-0.29	0.68	0.30	0.15	0.27	-1.76
1.39	-0.51	-0.14	-0.89	0.76	0.14	0.82	-0.01	-1.45	-0.86	0.69	0.73
-0.14	0.05	0.77	1.33	-0.58	-0.76	0.23	-0.45	-0.23	0.75	-0.85	-0.10
-0.76	-0.69	-1.61	0.33	-0.13	0.30	-0.87	0.03	0.77	0.82	0.50	0.69
0.37	-0.58	-0.67	0.68	0.17	-0.54	-0.12	0.03	-0.37	-0.73	-0.05	0.63
-2.28	-0.69	0.58	-0.38	-1.65	-0.86	0.64	-0.64	1.26	0.40	-0.15	-1.33
0.36	-1.41	-1.06	-0.89	-0.28	-0.75	-0.03	0.34	-0.62	0.17	1.66	-0.63
1.37	0.24	0.51	-0.28	0.32	0.32	0.17	0.01	-0.00	1.36	0.76	0.11
1.04	0.41	-0.24	0.19	-2.10	-0.69	1.49	0.49	0.83	-0.98	-1.38	-1.08
-0.67	0.15	-1.60	0.84	-0.07	-0.06	-0.51	-0.63	0.88	-1.30	0.53	1.05
0.39	-0.24	0.29	-0.03	0.83	0.67	0.62	-2.07	1.21	0.06	-0.87	0.48

UITVOERIGE TABEL IN [24] [27]

8.7 ASELECTE TREKKINGEN UIT EEN EXPONENTIELE VERDELING

$\mu = 1$

0.053	1.798	1.190	0.940	1.311	0.500	0.397	4.335	0.047	0.212	0.893	0.487
2.059	0.617	0.242	0.631	0.746	4.459	2.244	0.566	0.447	0.850	0.445	0.272
0.244	0.251	1.118	0.962	2.118	1.160	1.103	0.080	2.590	1.468	0.730	0.191
1.949	0.908	0.609	1.719	0.028	0.187	0.696	1.210	1.283	0.679	1.338	0.940
0.487	1.765	0.071	1.186	0.040	0.794	3.357	0.743	0.437	0.184	0.743	0.256
1.498	0.128	0.942	0.852	0.979	0.590	0.108	1.980	2.263	1.122	0.642	2.237
1.077	0.446	0.184	0.494	0.145	0.063	0.447	1.398	0.373	2.003	3.271	0.692
1.686	0.603	1.040	0.392	1.232	1.883	0.492	1.422	1.546	1.511	0.663	0.587
1.354	0.187	0.494	0.074	3.936	1.159	0.253	1.115	0.731	3.821	2.040	0.835
0.245	1.006	1.599	2.859	0.695	0.412	0.627	0.322	1.576	0.830	0.706	0.458
1.462	2.908	1.032	0.411	0.547	0.352	0.778	0.716	0.114	1.924	0.154	0.110
0.460	0.686	2.804	1.177	0.387	2.120	0.198	0.600	0.396	0.563	0.742	0.312
0.465	0.396	0.753	2.434	0.088	0.771	0.950	1.544	1.168	0.180	1.489	0.050
0.880	2.738	0.235	0.687	0.928	0.447	0.702	1.587	0.280	0.885	0.632	0.234
0.942	0.979	0.574	1.781	0.355	0.194	0.378	2.151	0.302	0.958	1.763	1.043
0.401	0.368	0.068	0.012	0.203	1.627	1.500	0.266	3.380	1.546	2.054	0.616
1.484	1.187	4.035	1.548	0.811	1.189	1.183	0.002	0.292	0.215	0.039	0.236
0.135	0.215	3.532	0.845	0.577	0.314	2.828	1.681	0.313	5.127	1.431	2.063
2.496	0.702	0.147	1.555	0.757	0.100	1.595	1.839	1.332	0.801	0.673	0.161
1.935	0.435	1.177	0.145	0.577	0.212	1.085	0.472	0.293	0.289	1.379	1.045
2.742	0.084	0.961	0.491	1.137	0.931	0.665	0.267	3.070	0.081	0.280	2.194
1.156	0.077	0.159	1.272	0.394	0.305	1.327	2.334	3.190	1.917	1.072	0.483
0.073	3.156	1.306	1.460	0.061	0.319	0.299	3.589	0.110	1.841	0.790	0.179
1.490	2.030	0.369	0.371	0.450	0.650	1.728	0.176	2.477	0.014	2.512	1.619
0.535	0.558	1.265	0.368	0.507	0.229	2.142	0.710	0.034	0.251	0.085	0.013
0.822	1.125	0.343	0.197	0.077	0.432	0.400	1.482	0.255	1.596	0.160	0.082
1.875	3.209	1.686	0.870	0.498	0.670	1.457	1.240	0.849	1.260	1.298	0.082
1.245	0.856	0.700	1.292	0.358	0.337	0.913	0.053	0.520	0.348	0.174	2.771
0.608	0.067	1.300	0.830	1.854	0.728	1.074	1.791	0.422	1.566	0.257	0.121
0.130	0.342	0.812	0.073	0.701	0.249	2.568	0.541	1.278	0.399	0.106	0.216
0.527	1.102	0.228	0.585	2.394	0.232	2.213	1.561	1.214	0.634	1.978	0.247
2.301	0.472	0.084	0.074	0.195	0.157	2.461	0.963	2.268	1.235	0.922	0.745
1.605	3.908	1.527	1.159	0.213	0.423	0.042	1.525	0.056	1.129	0.925	0.065
0.079	1.638	0.163	0.316	1.237	1.670	2.094	1.277	0.300	1.755	2.357	0.358
0.410	0.484	1.795	1.128	0.637	0.371	0.606	1.134	0.255	1.593	0.727	0.122
2.701	0.360	0.553	0.695	0.286	1.236	0.437	0.958	2.202	0.612	1.161	0.181
1.250	0.370	0.893	0.231	0.262	0.051	0.401	0.287	0.092	0.051	0.348	0.303
0.416	4.109	1.416	0.517	0.128	0.440	1.692	0.940	0.258	0.317	0.312	1.090
0.577	1.903	0.978	0.139	0.757	0.518	0.889	1.056	1.730	2.251	0.346	1.531
0.011	2.317	1.219	2.325	1.396	2.678	4.157	1.780	0.083	0.228	1.466	0.013
1.337	0.117	0.987	0.433	0.867	1.059	1.302	1.004	0.287	0.382	1.179	0.548
0.072	0.029	1.039	0.498	0.336	0.790	0.118	0.130	0.018	0.689	0.314	1.156
0.330	1.666	1.699	1.581	1.465	0.399	0.490	0.991	0.150	1.773	0.156	0.843
0.128	0.148	0.099	0.145	0.482	1.519	0.809	1.028	0.131	0.161	2.042	1.148
0.229	0.180	0.900	0.046	1.214	0.707	2.559	0.697	1.222	1.520	0.484	2.101
0.320	0.234	0.663	1.034	1.298	0.405	1.395	1.204	0.136	0.246	0.185	0.789
1.140	0.881	0.070	2.012	0.320	0.938	1.234	1.357	0.333	0.053	0.253	1.409
0.412	1.098	0.829	0.028	0.986	0.658	0.919	0.482	1.246	0.004	3.030	0.385
0.749	3.019	0.651	4.653	0.114	0.096	0.830	2.456	0.157	1.208	1.694	0.993
0.309	0.416	0.323	0.482	0.134	0.680	0.264	0.213	0.916	1.832	2.458	0.391

ASELECTE TREKKINGEN UIT EEN EXPONENTIELE VERDELING

$$\mu - 1$$

0.729	1.464	1.166	0.615	0.626	0.038	0.185	0.734	0.810	0.328	0.023	0.805
0.633	0.722	0.872	1.756	1.079	0.885	0.349	2.169	0.896	2.320	1.303	2.921
0.264	0.997	0.321	0.312	1.048	2.503	0.835	1.493	0.872	0.598	0.055	0.487
0.063	0.243	0.014	0.038	0.066	1.355	0.157	0.854	0.094	0.881	0.575	0.066
1.295	1.054	0.788	1.089	0.275	0.761	0.685	1.120	0.012	2.965	1.087	1.826
1.490	1.440	0.232	1.742	0.799	0.311	3.784	2.023	2.439	1.849	0.256	1.742
2.135	0.149	0.348	2.423	3.397	0.735	0.330	0.530	1.203	0.097	3.007	0.027
6.667	0.501	0.046	0.030	0.434	1.016	0.955	0.850	1.385	0.971	0.094	0.352
0.663	1.469	1.112	0.181	0.897	0.247	0.706	0.977	0.613	3.985	0.390	0.905
0.094	1.445	0.518	1.132	0.882	1.692	0.020	3.387	0.520	0.537	0.182	0.357
0.150	0.062	1.668	2.532	0.933	0.083	0.389	1.581	0.091	0.040	0.484	2.032
1.319	0.510	2.361	0.910	0.818	1.105	2.599	0.432	1.632	0.608	0.232	2.880
0.936	3.207	0.309	0.019	0.364	2.681	1.914	0.342	0.612	0.995	3.117	2.725
2.011	1.895	0.643	0.225	0.104	1.676	0.741	0.463	0.191	3.276	0.798	0.866
0.843	1.850	0.922	0.541	0.193	0.033	0.395	0.601	2.408	1.092	0.350	1.075
0.168	0.816	0.945	0.273	0.106	0.233	1.386	0.410	3.766	0.602	0.811	1.012
1.717	3.010	0.403	0.760	0.854	1.013	0.428	0.239	0.226	1.439	0.025	0.951
0.394	0.921	1.035	1.380	1.734	0.227	0.075	0.098	0.673	0.964	0.531	1.877
1.771	0.055	2.518	2.004	0.011	0.980	0.282	0.392	2.394	0.494	0.368	0.862
0.036	0.309	0.847	0.385	0.883	3.065	0.205	0.980	0.518	1.777	0.309	2.367
0.494	0.614	0.368	0.413	0.986	0.257	0.367	0.420	1.041	1.140	1.167	0.519
0.027	1.129	0.505	0.727	1.592	0.505	0.143	1.519	1.521	0.154	0.202	0.505
0.698	0.793	1.585	0.653	3.947	0.656	1.074	1.258	0.091	0.698	0.045	0.278
1.183	2.774	2.042	1.181	0.877	0.729	0.957	0.946	1.376	6.570	3.589	0.047
0.494	4.748	0.095	1.995	1.074	0.681	0.199	0.577	3.122	0.093	0.804	1.684
0.745	0.869	0.325	0.575	0.329	1.309	0.367	2.419	0.959	1.293	0.033	1.306
0.182	3.109	1.212	0.375	0.719	0.584	1.023	0.099	0.555	2.625	0.116	0.769
0.016	1.503	1.101	1.249	0.081	0.948	0.252	0.116	0.780	0.275	0.110	0.244
0.009	0.453	2.690	0.296	0.211	0.949	0.005	0.331	0.857	2.572	0.318	0.858
3.060	0.210	2.075	0.201	0.939	2.642	0.439	0.271	1.420	0.156	0.999	0.177
2.097	1.543	0.659	0.273	0.050	0.359	0.117	1.065	0.248	1.219	2.671	0.322
1.357	0.115	2.698	0.386	0.021	0.860	0.268	1.046	2.801	0.573	1.085	4.137
0.136	0.702	0.578	2.305	0.703	0.125	1.147	0.094	0.360	0.970	0.171	0.779
2.877	0.916	0.711	0.867	1.087	0.478	1.627	0.104	2.418	1.178	0.747	0.439
0.198	0.827	1.688	0.415	0.091	2.668	0.669	0.253	0.901	0.117	0.503	0.029
3.868	0.178	0.911	2.828	1.291	2.178	0.013	2.011	0.092	2.378	0.133	1.565
0.376	0.102	0.580	0.380	0.367	1.492	4.539	1.980	0.318	1.130	3.023	1.715
0.583	0.263	1.709	0.050	2.106	0.115	0.243	3.228	2.258	0.592	1.533	0.383
0.738	2.385	0.087	1.513	0.449	0.464	2.468	0.211	0.140	0.090	0.380	0.157
1.640	1.311	0.431	0.518	2.152	0.235	0.356	0.982	3.446	1.201	0.227	0.272
2.230	0.615	1.386	0.110	1.855	0.372	0.487	0.389	3.078	0.100	1.002	0.454
0.777	0.379	0.556	1.479	0.599	0.006	0.747	0.673	2.043	1.030	0.352	1.710
1.430	2.484	2.471	0.312	0.135	3.432	0.319	0.521	0.030	0.335	0.659	2.716
0.467	1.696	0.632	0.390	2.678	0.272	1.273	0.987	6.707	0.099	0.068	0.937
1.943	0.922	0.235	0.113	0.742	2.612	1.256	1.084	0.321	1.333	2.149	4.107
0.325	0.643	0.240	0.651	0.180	0.031	0.056	0.299	1.555	1.295	2.292	1.104
0.340	0.131	0.045	0.307	0.432	0.304	0.885	1.351	1.837	2.007	2.469	1.636
0.114	0.145	0.013	1.140	1.639	0.367	3.777	0.722	1.479	0.282	1.940	1.259
0.484	0.502	2.047	1.440	0.087	0.298	1.477	0.868	1.414	0.214	0.869	0.009
0.010	4.428	1.047	0.125	0.862	0.982	1.676	0.788	0.443	0.844	0.942	2.020

Constanten

c	c	$\sqrt{c}$	$1/c$	$^{10}\log c$
π	3.1415927	1.7724539	0.3183099	0.4971499
2π	6.2831853	2.5066283	0.1591549	0.7981799
$\pi/2$	1.5707963	1.2533141	0.6366198	0.1961199
π^2	9.8696044	3.1415927	0.1013212	0.9942997
e	2.7182818	1.6487213	0.3678794	0.4342945
$^{e}\log 10$	2.3025851			
γ (Euler)	0.5772157			

9.1

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
1.00	1.000	3.162
1.01	1.005	3.178
1.02	1.010	3.194
1.03	1.015	3.209
1.04	1.020	3.225
1.05	1.025	3.240
1.06	1.030	3.256
1.07	1.034	3.271
1.08	1.039	3.286
1.09	1.044	3.302
1.10	1.049	3.317
1.11	1.054	3.332
1.12	1.058	3.347
1.13	1.063	3.362
1.14	1.068	3.376
1.15	1.072	3.391
1.16	1.077	3.406
1.17	1.082	3.421
1.18	1.086	3.435
1.19	1.091	3.450
1.20	1.095	3.464
1.21	1.100	3.479
1.22	1.105	3.493
1.23	1.109	3.507
1.24	1.114	3.521
1.25	1.118	3.536
1.26	1.122	3.550
1.27	1.127	3.564
1.28	1.131	3.578
1.29	1.136	3.592
1.30	1.140	3.606
1.31	1.145	3.619
1.32	1.149	3.633
1.33	1.153	3.647
1.34	1.158	3.661
1.35	1.162	3.674
1.36	1.166	3.688
1.37	1.170	3.701
1.38	1.175	3.715
1.39	1.179	3.728
1.40	1.183	3.742
1.41	1.187	3.755
1.42	1.192	3.768
1.43	1.196	3.782
1.44	1.200	3.795
1.45	1.204	3.808
1.46	1.208	3.821
1.47	1.212	3.834
1.48	1.217	3.847
1.49	1.221	3.860

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
1.50	1.225	3.873
1.51	1.229	3.886
1.52	1.233	3.899
1.53	1.237	3.912
1.54	1.241	3.924
1.55	1.245	3.937
1.56	1.249	3.950
1.57	1.253	3.962
1.58	1.257	3.975
1.59	1.261	3.987
1.60	1.265	4.000
1.61	1.269	4.012
1.62	1.273	4.025
1.63	1.277	4.037
1.64	1.281	4.050
1.65	1.285	4.062
1.66	1.288	4.074
1.67	1.292	4.087
1.68	1.296	4.099
1.69	1.300	4.111
1.70	1.304	4.123
1.71	1.308	4.135
1.72	1.311	4.147
1.73	1.315	4.159
1.74	1.319	4.171
1.75	1.323	4.183
1.76	1.327	4.195
1.77	1.330	4.207
1.78	1.334	4.219
1.79	1.338	4.231
1.80	1.342	4.243
1.81	1.345	4.254
1.82	1.349	4.266
1.83	1.353	4.278
1.84	1.356	4.290
1.85	1.360	4.301
1.86	1.364	4.313
1.87	1.367	4.324
1.88	1.371	4.336
1.89	1.375	4.347
1.90	1.378	4.359
1.91	1.382	4.370
1.92	1.386	4.382
1.93	1.389	4.393
1.94	1.393	4.405
1.95	1.396	4.416
1.96	1.400	4.427
1.97	1.404	4.438
1.98	1.407	4.450
1.99	1.411	4.461

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
2.00	1.414	4.472
2.01	1.418	4.483
2.02	1.421	4.494
2.03	1.425	4.506
2.04	1.428	4.517
2.05	1.432	4.528
2.06	1.435	4.539
2.07	1.439	4.550
2.08	1.442	4.561
2.09	1.446	4.572
2.10	1.449	4.583
2.11	1.453	4.593
2.12	1.456	4.604
2.13	1.459	4.615
2.14	1.463	4.626
2.15	1.466	4.637
2.16	1.470	4.648
2.17	1.473	4.658
2.18	1.476	4.669
2.19	1.480	4.680
2.20	1.483	4.690
2.21	1.487	4.701
2.22	1.490	4.712
2.23	1.493	4.722
2.24	1.497	4.733
2.25	1.500	4.743
2.26	1.503	4.754
2.27	1.507	4.764
2.28	1.510	4.775
2.29	1.513	4.785
2.30	1.517	4.796
2.31	1.520	4.806
2.32	1.523	4.817
2.33	1.526	4.827
2.34	1.530	4.837
2.35	1.533	4.848
2.36	1.536	4.858
2.37	1.539	4.868
2.38	1.543	4.879
2.39	1.546	4.889
2.40	1.549	4.899
2.41	1.552	4.909
2.42	1.556	4.919
2.43	1.559	4.930
2.44	1.562	4.940
2.45	1.565	4.950
2.46	1.568	4.960
2.47	1.572	4.970
2.48	1.575	4.880
2.49	1.578	4.990

9.1
(VERVOLG)

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
2.50	1.581	5.000	3.00	1.732	5.477	3.50	1.871	5.916
2.51	1.584	5.010	3.01	1.735	5.486	3.51	1.873	5.925
2.52	1.587	5.020	3.02	1.738	5.495	3.52	1.876	5.933
2.53	1.591	5.030	3.03	1.741	5.505	3.53	1.879	5.941
2.54	1.594	5.040	3.04	1.744	5.514	3.54	1.881	5.950
2.55	1.597	5.050	3.05	1.746	5.523	3.55	1.884	5.958
2.56	1.600	5.060	3.06	1.749	5.532	3.56	1.887	5.967
2.57	1.603	5.070	3.07	1.752	5.541	3.57	1.889	5.975
2.58	1.606	5.079	3.08	1.755	5.550	3.58	1.892	5.983
2.59	1.609	5.089	3.09	1.758	5.559	3.59	1.895	5.992
2.60	1.612	5.099	3.10	1.761	5.568	3.60	1.897	6.000
2.61	1.616	5.109	3.11	1.764	5.577	3.61	1.900	6.008
2.62	1.619	5.119	3.12	1.766	5.586	3.62	1.903	6.017
2.63	1.622	5.128	3.13	1.769	5.595	3.63	1.905	6.025
2.64	1.625	5.138	3.14	1.772	5.604	3.64	1.908	6.033
2.65	1.628	5.148	3.15	1.775	5.612	3.65	1.910	6.042
2.66	1.631	5.158	3.16	1.778	5.621	3.66	1.913	6.050
2.67	1.634	5.167	3.17	1.780	5.630	3.67	1.916	6.058
2.68	1.637	5.177	3.18	1.783	5.639	3.68	1.918	6.066
2.69	1.640	5.187	3.19	1.786	5.648	3.69	1.921	6.075
2.70	1.643	5.196	3.20	1.789	5.657	3.70	1.924	6.083
2.71	1.646	5.206	3.21	1.792	5.666	3.71	1.926	6.091
2.72	1.649	5.215	3.22	1.794	5.675	3.72	1.929	6.099
2.73	1.652	5.225	3.23	1.797	5.683	3.73	1.931	6.107
2.74	1.655	5.235	3.24	1.800	5.692	3.74	1.934	6.116
2.75	1.658	5.244	3.25	1.803	5.701	3.75	1.936	6.124
2.76	1.661	5.254	3.26	1.806	5.710	3.76	1.939	6.132
2.77	1.664	5.263	3.27	1.808	5.718	3.77	1.942	6.140
2.78	1.667	5.273	3.28	1.811	5.727	3.78	1.944	6.148
2.79	1.670	5.282	3.29	1.814	5.736	3.79	1.947	6.156
2.80	1.673	5.292	3.30	1.817	5.745	3.80	1.949	6.164
2.81	1.676	5.301	3.31	1.819	5.753	3.81	1.952	6.173
2.82	1.679	5.310	3.32	1.822	5.762	3.82	1.954	6.181
2.83	1.682	5.320	3.33	1.825	5.771	3.83	1.957	6.189
2.84	1.685	5.329	3.34	1.828	5.779	3.84	1.960	6.197
2.85	1.688	5.339	3.35	1.830	5.788	3.85	1.962	6.205
2.86	1.691	5.348	3.36	1.833	5.797	3.86	1.965	6.213
2.87	1.694	5.357	3.37	1.836	5.805	3.87	1.967	6.221
2.88	1.697	5.367	3.38	1.838	5.814	3.88	1.970	6.229
2.89	1.700	5.376	3.39	1.841	5.822	3.89	1.972	6.237
2.90	1.703	5.385	3.40	1.844	5.831	3.90	1.975	6.245
2.91	1.706	5.394	3.41	1.847	5.840	3.91	1.977	6.253
2.92	1.709	5.404	3.42	1.849	5.848	3.92	1.980	6.261
2.93	1.712	5.413	3.43	1.852	5.857	3.93	1.982	6.269
2.94	1.715	5.422	3.44	1.855	5.865	3.94	1.985	6.277
2.95	1.718	5.431	3.45	1.857	5.874	3.95	1.987	6.285
2.96	1.720	5.441	3.46	1.860	5.882	3.96	1.990	6.293
2.97	1.723	5.450	3.47	1.863	5.891	3.97	1.992	6.301
2.98	1.726	5.459	3.48	1.865	5.899	3.98	1.995	6.309
2.99	1.729	5.468	3.49	1.868	5.908	3.99	1.997	6.317

9.1

(VERVOLG)

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
4.00	2.000	6.325
4.01	2.002	6.332
4.02	2.005	6.340
4.03	2.007	6.348
4.04	2.010	6.356
4.05	2.012	6.364
4.06	2.015	6.372
4.07	2.017	6.380
4.08	2.020	6.387
4.09	2.022	6.395
4.10	2.025	6.403
4.11	2.027	6.411
4.12	2.030	6.419
4.13	2.032	6.427
4.14	2.035	6.434
4.15	2.037	6.442
4.16	2.040	6.450
4.17	2.042	6.458
4.18	2.045	6.465
4.19	2.047	6.473
4.20	2.049	6.481
4.21	2.052	6.488
4.22	2.054	6.496
4.23	2.057	6.504
4.24	2.059	6.512
4.25	2.062	6.519
4.26	2.064	6.527
4.27	2.066	6.535
4.28	2.069	6.542
4.29	2.071	6.550
4.30	2.074	6.557
4.31	2.076	6.565
4.32	2.078	6.573
4.33	2.081	6.580
4.34	2.083	6.588
4.35	2.086	6.595
4.36	2.088	6.603
4.37	2.090	6.611
4.38	2.093	6.618
4.39	2.095	6.626
4.40	2.098	6.633
4.41	2.100	6.641
4.42	2.102	6.648
4.43	2.105	6.656
4.44	2.107	6.663
4.45	2.110	6.671
4.46	2.112	6.678
4.47	2.114	6.686
4.48	2.117	6.693
4.49	2.119	6.701

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
4.50	2.121	6.708
4.51	2.124	6.716
4.52	2.126	6.723
4.53	2.128	6.731
4.54	2.131	6.738
4.55	2.133	6.745
4.56	2.135	6.753
4.57	2.138	6.760
4.58	2.140	6.768
4.59	2.142	6.775
4.60	2.145	6.782
4.61	2.147	6.790
4.62	2.149	6.797
4.63	2.152	6.804
4.64	2.154	6.812
4.65	2.156	6.819
4.66	2.159	6.826
4.67	2.161	6.834
4.68	2.163	6.841
4.69	2.166	6.848
4.70	2.168	6.856
4.71	2.170	6.863
4.72	2.173	6.870
4.73	2.175	6.877
4.74	2.177	6.885
4.75	2.179	6.892
4.76	2.182	6.899
4.77	2.184	6.907
4.78	2.186	6.914
4.79	2.189	6.921
4.80	2.191	6.928
4.81	2.193	6.935
4.82	2.195	6.943
4.83	2.198	6.950
4.84	2.200	6.957
4.85	2.202	6.964
4.86	2.205	6.971
4.87	2.207	6.979
4.88	2.209	6.986
4.89	2.211	6.993
4.90	2.214	7.000
4.91	2.216	7.007
4.92	2.218	7.014
4.93	2.220	7.021
4.94	2.223	7.029
4.95	2.225	7.036
4.96	2.227	7.043
4.97	2.229	7.050
4.98	2.232	7.057
4.99	2.234	7.064

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
5.00	2.236	7.071
5.01	2.238	7.078
5.02	2.241	7.085
5.03	2.243	7.092
5.04	2.245	7.099
5.05	2.247	7.106
5.06	2.249	7.113
5.07	2.252	7.120
5.08	2.254	7.127
5.09	2.256	7.134
5.10	2.258	7.141
5.11	2.261	7.148
5.12	2.263	7.155
5.13	2.265	7.162
5.14	2.267	7.169
5.15	2.269	7.176
5.16	2.272	7.183
5.17	2.274	7.190
5.18	2.276	7.197
5.19	2.278	7.204
5.20	2.280	7.211
5.21	2.283	7.218
5.22	2.285	7.225
5.23	2.287	7.232
5.24	2.289	7.239
5.25	2.291	7.246
5.26	2.293	7.253
5.27	2.296	7.259
5.28	2.298	7.266
5.29	2.300	7.273
5.30	2.302	7.280
5.31	2.304	7.287
5.32	2.307	7.294
5.33	2.309	7.301
5.34	2.311	7.308
5.35	2.313	7.314
5.36	2.315	7.321
5.37	2.317	7.328
5.38	2.319	7.335
5.39	2.322	7.342
5.40	2.324	7.348
5.41	2.326	7.355
5.42	2.328	7.362
5.43	2.330	7.369
5.44	2.332	7.376
5.45	2.335	7.382
5.46	2.337	7.389
5.47	2.339	7.396
5.48	2.341	7.403
5.49	2.343	7.409

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
5.50	2.345	7.416
5.51	2.347	7.423
5.52	2.349	7.430
5.53	2.352	7.436
5.54	2.354	7.443
5.55	2.356	7.450
5.56	2.358	7.457
5.57	2.360	7.463
5.58	2.362	7.470
5.59	2.364	7.477
5.60	2.366	7.483
5.61	2.369	7.490
5.62	2.371	7.497
5.63	2.373	7.503
5.64	2.375	7.510
5.65	2.377	7.517
5.66	2.379	7.523
5.67	2.381	7.530
5.68	2.383	7.537
5.69	2.385	7.543
5.70	2.387	7.550
5.71	2.390	7.556
5.72	2.392	7.563
5.73	2.394	7.570
5.74	2.396	7.576
5.75	2.398	7.583
5.76	2.400	7.589
5.77	2.402	7.596
5.78	2.404	7.603
5.79	2.406	7.609
5.80	2.408	7.616
5.81	2.410	7.622
5.82	2.412	7.629
5.83	2.415	7.635
5.84	2.417	7.642
5.85	2.419	7.649
5.86	2.421	7.655
5.87	2.423	7.662
5.88	2.425	7.668
5.89	2.427	7.675
5.90	2.429	7.681
5.91	2.431	7.688
5.92	2.433	7.694
5.93	2.435	7.701
5.94	2.437	7.707
5.95	2.439	7.714
5.96	2.441	7.720
5.97	2.443	7.727
5.98	2.445	7.733
5.99	2.447	7.740

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
6.00	2.449	7.746
6.01	2.452	7.752
6.02	2.454	7.759
6.03	2.456	7.765
6.04	2.458	7.772
6.05	2.460	7.778
6.06	2.462	7.785
6.07	2.464	7.791
6.08	2.466	7.797
6.09	2.468	7.804
6.10	2.470	7.810
6.11	2.472	7.817
6.12	2.474	7.823
6.13	2.476	7.829
6.14	2.478	7.836
6.15	2.480	7.842
6.16	2.482	7.849
6.17	2.484	7.855
6.18	2.486	7.861
6.19	2.488	7.868
6.20	2.490	7.874
6.21	2.492	7.880
6.22	2.494	7.887
6.23	2.496	7.893
6.24	2.498	7.899
6.25	2.500	7.906
6.26	2.502	7.912
6.27	2.504	7.918
6.28	2.506	7.925
6.29	2.508	7.931
6.30	2.510	7.937
6.31	2.512	7.944
6.32	2.514	7.950
6.33	2.516	7.956
6.34	2.518	7.962
6.35	2.520	7.969
6.36	2.522	7.975
6.37	2.524	7.981
6.38	2.526	7.987
6.39	2.528	7.994
6.40	2.530	8.000
6.41	2.532	8.006
6.42	2.534	8.012
6.43	2.536	8.019
6.44	2.538	8.025
6.45	2.540	8.031
6.46	2.542	8.037
6.47	2.544	8.044
6.48	2.546	8.050
6.49	2.548	8.056

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
6.50	2.550	8.062
6.51	2.551	8.068
6.52	2.553	8.075
6.53	2.555	8.081
6.54	2.557	8.087
6.55	2.559	8.093
6.56	2.561	8.099
6.57	2.563	8.106
6.58	2.565	8.112
6.59	2.567	8.118
6.60	2.569	8.124
6.61	2.571	8.130
6.62	2.573	8.136
6.63	2.575	8.142
6.64	2.577	8.149
6.65	2.579	8.155
6.66	2.581	8.161
6.67	2,583	8.167
6.68	2.585	8.173
6.69	2.587	8.179
6.70	2.588	8.185
6.71	2.590	8.191
6.72	2.592	8.198
6.73	2.594	8.204
6.74	2.596	8.210
6.75	2.598	8.216
6.76	2.600	8.222
6.77	2.602	8.228
6.78	2.604	8.234
6.79	2.606	8.240
6.80	2.608	8.246
6.81	2.610	8.252
6.82	2.612	8.258
6.83	2.613	8.264
6.84	2.615	8.270
6.85	2.617	8.276
6.86	2.619	8.283
6.87	2.621	8.289
6.88	2.623	8.295
6.89	2.625	8.301
6.90	2.627	8.307
6.91	2.629	8.313
6.92	2.631	8.319
6.93	2.632	8.325
6.94	2.634	8.331
6.95	2.636	8.337
6.96	2.638	8.343
6.97	2.640	8.349
6.98	2.642	8.355
6.99	2.644	8.361

9.1
(VERVOLG)

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
7.00	2.646	8.367
7.01	2.648	8.373
7.02	2.650	8.379
7.03	2.651	8.385
7.04	2.653	8.390
7.05	2.655	8.396
7.06	2.657	8.402
7.07	2.659	8.408
7.08	2.661	8.414
7.09	2.663	8.420
7.10	2.665	8.426
7.11	2.666	8.432
7.12	2.668	8.438
7.13	2.670	8.444
7.14	2.672	8.450
7.15	2.674	8.456
7.16	2.676	8.462
7.17	2.678	8.468
7.18	2.680	8.473
7.19	2.681	8.479
7.20	2.683	8.485
7.21	2.685	8.491
7.22	2.687	8.497
7.23	2.689	8.503
7.24	2.691	8.509
7.25	2.693	8.515
7.26	2.694	8.521
7.27	2.696	8.526
7.28	2.698	8.532
7.29	2.700	8.538
7.30	2.702	8.544
7.31	2.704	8.550
7.32	2.706	8.556
7.33	2.707	8.562
7.34	2.709	8.567
7.35	2.711	8.573
7.36	2.713	8.579
7.37	2.715	8.585
7.38	2.717	8.591
7.39	2.718	8.597
7.40	2.720	8.602
7.41	2.722	8.608
7.42	2.724	3.614
7.43	2.726	8.620
7.44	2.728	8.626
7.45	2.729	8.631
7.46	2.731	8.637
7.47	2.733	8.643
7.48	2.735	8.649
7.49	2.737	8.654
7.50	2.739	8.660
7.51	2.740	8.666
7.52	2.742	8.672
7.53	2.744	8.678
7.54	2.746	8.683
7.55	2.748	8.689
7.56	2.750	8.695
7.57	2.751	8.701
7.58	2.753	8.706
7.59	2.755	8.712
7.60	2.757	8.718
7.61	2.759	8.724
7.62	2.760	8.729
7.63	2.762	8.735
7.64	2.764	8.741
7.65	2.766	8.746
7.66	2.768	8.752
7.67	2.769	8.758
7.68	2.771	8.764
7.69	2.773	8.769
7.70	2.775	8.775
7.71	2.777	8.781
7.72	2.778	8.786
7.73	2.780	8.792
7.74	2.782	8.798
7.75	2.784	8.803
7.76	2.786	8.809
7.77	2.787	8.815
7.78	2.789	8.820
7.79	2.791	8.826
7.80	2.793	8.832
7.81	2.795	8.837
7.82	2.796	8.843
7.83	2.798	8.849
7.84	2.800	8.854
7.85	2.802	8.860
7.86	2.804	8.866
7.87	2.805	8.871
7.88	2.807	8.877
7.89	2.809	8.883
7.90	2.811	8.888
7.91	2.812	8.894
7.92	2.814	8.899
7.93	2.816	8.905
7.94	2.818	8.911
7.95	2.820	8.916
7.96	2.821	8.922
7.97	2.823	8.927
7.98	2.825	8.933
7.99	2.827	8.939
8.00	2.828	8.944
8.01	2.830	8.950
8.02	2.832	8.955
8.03	2.834	8.961
8.04	2.835	8.967
8.05	2.837	8.972
8.06	2.839	8.978
8.07	2.841	8.983
8.08	2.843	8.988
8.09	2.844	8.994
8.10	2.846	9.000
8.11	2.848	9.006
8.12	2.850	9.011
8.13	2.851	9.017
8.14	2.853	9.022
8.15	2.855	9.028
8.16	2.857	9.033
8.17	2.858	9.039
8.18	2.860	9.044
8.19	2.862	9.050
8.20	2.864	9.055
8.21	2.865	9.061
8.22	2.867	9.066
8.23	2.869	9.072
8.24	2.871	9.077
8.25	2.872	9.083
8.26	2.874	9.088
8.27	2.876	9.094
8.28	2.877	9.099
8.29	2.879	9.105
8.30	2.881	9.110
8.31	2.883	9.116
8.32	2.884	9.121
8.33	2.886	9.127
8.34	2.888	9.132
8.35	2.890	9.138
8.36	2.891	9.143
8.37	2.893	9.149
8.38	2.895	9.154
8.39	2.897	9.160
8.40	2.898	9.165
8.41	2.900	9.171
8.42	2.902	9.176
8.43	2.903	9.182
8.44	2.905	9.187
8.45	2.907	9.192
8.46	2.909	9.198
8.47	2.910	9.203
8.48	2.912	9.209
8.49	2.914	9.214

$\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
8.50	2.915	9.220
8.51	2.917	9.225
8.52	2.919	9.230
8.53	2.921	9.236
8.54	2.922	9.241
8.55	2.924	9.247
8.56	2.926	9.252
8.57	2.927	9.257
8.58	2.929	9.263
8.59	2.931	9.268
8.60	2.933	9.274
8.61	2.934	9.279
8.62	2.936	9.284
8.63	2.938	9.290
8.64	2.939	9.295
8.65	2.941	9.301
8.66	2.943	9.306
8.67	2.944	9.311
8.68	2.946	9.317
8.69	2.948	9.322
8.70	2.950	9.327
8.71	2.951	9.333
8.72	2.953	9.338
8.73	2.955	9.343
8.74	2.956	9.349
8.75	2.958	9.354
8.76	2.960	9.359
8.77	2.961	9.365
8.78	2.963	9.370
8.79	2.965	9.375
8.80	2.966	9.381
8.81	2.968	9.386
8.82	2.970	9.391
8.83	2.972	9.397
8.84	2.973	9.402
8.85	2.975	9.407
8.86	2.977	9.413
8.87	2.978	9.418
8.88	2.980	9.423
8.89	2.982	9.429
8.90	2.983	9.434
8.91	2.985	9.439
8.92	2.987	9.445
8.93	2.988	9.450
8.94	2.990	9.455
8.95	2.992	9.460
8.96	2.993	9.466
8.97	2.995	9.471
8.98	2.997	9.476
8.99	2.998	9.482

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
9.00	3.000	9.487
9.01	3.002	9.492
9.02	3.003	9.497
9.03	3.005	9.503
9.04	3.007	9.508
9.05	3.008	9.513
9.06	3.010	9.518
9.07	3.012	9.524
9.08	3.013	9.529
9.09	3.015	9.534
9.10	3.017	9.539
9.11	3.018	9.545
9.11	3.020	9.550
9.13	3.022	9.555
9.14	3.023	9.560
9.15	3.025	9.566
9.16	3.027	9.571
9.17	3.028	9.576
9.18	3.030	9.581
9.19	3.032	9.586
9.20	3.033	9.592
9.21	3.035	9.597
9.22	3.036	9.602
9.23	3.038	9.607
9.24	3.040	9.612
9.25	3.041	9.618
9.26	3.043	9.623
9.27	3.045	9.628
9.28	3.046	9.633
9.29	3.048	9.638
9.30	3.050	9.644
9.31	3.051	9.649
9.32	3.053	9.654
9.33	3.055	9.659
9.34	3.056	9.664
9.35	3.058	9.670
9.36	3.059	9.675
9.37	3.061	9.680
9.38	3.063	9.685
9.39	3.064	9.690
9.40	3.066	9.695
9.41	3.068	9.701
9.42	3.069	9.706
9.43	3.071	9.711
9.44	3.072	9.716
9.45	3.074	9.721
9.46	3.076	9.726
9.47	3.077	9.731
9.48	3.079	9.737
9.49	3.081	9.742

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
9.50	3.082	9.747
9.51	3.084	9.752
9.52	3.085	9.757
9.53	3.087	9.762
9.54	3.089	9.767
9.55	3.090	9.772
9.56	3.092	9.778
9.57	3.094	9.783
9.58	3.095	9.788
9.59	3.097	9.793
9.60	3.098	9.798
9.61	3.100	9.803
9.62	3.102	9.808
9.63	3.103	9.813
9.64	3.105	9.818
9.65	3.106	9.823
9.66	3.108	9.829
9.67	3.110	9.834
9.68	3.111	9.839
9.69	3.113	9.844
9.70	3.114	9.849
9.71	3.116	9.854
9.72	3.118	9.859
9.73	3.119	9.864
9.74	3.121	9.869
9.75	3.122	9.874
9.76	3.124	9.879
9.77	3.126	9.884
9.78	3.127	9.889
9.79	3.129	9.894
9.80	3.130	9.899
9.81	3.132	9.905
9.82	3.134	9.910
9.83	3.135	9.915
9.84	3.137	9.920
9.85	3.138	9.925
9.86	3.140	9.930
9.87	3.142	9.935
9.88	3.143	9.940
9.89	3.145	9.945
9.90	3.146	9.950
9.91	3.148	9.955
9.92	3.150	9.960
9.93	3.151	9.965
9.94	3.153	9.970
9.95	3.154	9.975
9.96	3.156	9.980
9.97	3.158	9.985
9.98	3.159	9.990
9.99	3.161	9.995

UITVOERIGE TABEL IN [5].

$^{10}\log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	**1004**	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	**2014**
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	**3010**	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	**4014**	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	**5011**	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	**6010**
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	**7007**	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

$^{10}\log e = 0.4342945$

9.2

(VERVOLG)

$^{10}\log x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	**8000**	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	**9004**	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9631	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

9.3

$^{10}\log n!$

n	log n!	n	log n!	n	log n!	n	log n!	n	log n!
1	0.0000	51	66.1906	101	159.9743	151	264.9359	201	377.2001
2	0.3010	52	67.9066	102	161.9829	152	267.1177	202	379.5054
3	0.7782	53	69.6309	103	163.9958	153	269.3024	203	381.8129
4	1.3802	54	71.3633	104	166.0128	154	271.4899	204	384.1226
5	2.0792	55	73.1037	105	168.0340	155	273.6803	205	386.4343
6	2.8573	56	74.8519	106	170.0593	156	275.8734	206	388.7482
7	3.7024	57	76.6077	107	172.0887	157	278.0693	207	391.0642
8	4.6055	58	78.3712	108	174.1221	158	280.2679	208	393.3822
9	5.5598	59	80.1420	109	176.1595	159	282.4693	209	395.7024
10	6.5598	60	81.9202	110	178.2009	160	284.6735	210	398.0246
11	7.6012	61	83.7055	111	180.2462	161	286.8803	211	400.3489
12	8.6803	62	85.4979	112	182.2955	162	289.0898	212	402.6752
13	9.7943	63	87.2972	113	184.3485	163	291.3020	213	405.0036
14	10.9404	64	89.1034	114	186.4054	164	293.5168	214	407.3340
15	12.1165	65	90.9163	115	188.4661	165	295.7343	215	409.6664
16	13.3206	66	92.7359	116	190.5306	166	297.9544	216	412.0009
17	14.5511	67	94.5619	117	192.5988	167	300.1771	217	414.3373
18	15.8063	68	96.3945	118	194.6707	168	302.4024	218	416.6758
19	17.0851	69	98.2333	119	196.7462	169	304.6303	219	419.0162
20	18.3861	70	100.0784	120	198.8254	170	306.8608	220	421.3587
21	19.7083	71	101.9297	121	200.9082	171	309.0938	221	423.7031
22	21.0508	72	103.7870	122	202.9945	172	311.3293	222	426.0494
23	22.4125	73	105.6503	123	205.0844	173	313.5674	223	428.3977
24	23.7927	74	107.5196	124	207.1779	174	315.8079	224	430.7480
25	25.1906	75	109.3946	125	209.2748	175	318.0509	225	433.1002
26	26.6056	76	111.2754	126	211.3751	176	320.2965	226	435.4543
27	28.0370	77	113.1619	127	213.4790	177	322.5444	227	437.8103
28	29.4841	78	115.0540	128	215.5862	178	324.7948	228	440.1682
29	30.9465	79	116.9516	129	217.6967	179	327.0477	229	442.5281
30	32.4237	80	118.8547	130	219.8107	180	329.3030	230	444.8898
31	33.9150	81	120.7632	131	221.9280	181	331.5606	231	447.2534
32	35.4202	82	122.6770	132	224.0485	182	333.8207	232	449.6189
33	36.9387	83	124.5961	133	226.1724	183	336.0832	233	451.9862
34	38.4702	84	126.5204	134	228.2995	184	338.3480	234	454.3555
35	40.0142	85	128.4498	135	230.4298	185	340.6152	235	456.7265
36	41.5705	86	130.3843	136	232.5634	186	342.8847	236	459.0994
37	43.1387	87	132.3238	137	234.7001	187	345.1565	237	461.4742
38	44.7185	88	134.2683	138	236.8400	188	347.4307	238	463.8508
39	46.3096	89	136.2177	139	238.9830	189	349.7071	239	466.2292
40	47.9116	90	138.1719	140	241.1291	190	351.9859	240	468.6094
41	49.5244	91	140.1310	141	243.2783	191	354.2669	241	470.9914
42	51.1477	92	142.0948	142	245.4306	192	356.5502	242	473.3752
43	52.7811	93	144.0632	143	247.5860	193	358.8358	243	475.7608
44	54.4246	94	146.0364	144	249.7443	194	361.1236	244	478.1482
45	56.0778	95	148.0141	145	251.9057	195	363.4136	245	480.5374
46	57.7406	96	149.9964	146	254.0700	196	365.7059	246	482.9283
47	59.4127	97	151.9831	147	256.2374	197	368.0003	247	485.3210
48	61.0939	98	153.9744	148	258.4076	198	370.2970	248	487.7154
49	62.7841	99	155.9700	149	260.5808	199	372.5959	249	490.1116
50	64.4831	100	157.9700	150	262.7569	200	374.8969	250	492.5096

${}^{10}\log n!$

n	log n!	n	log n!	n	log n!	n	log n!	n	log n!
251	494.9093	301	616.9644	351	742.6373	401	871.4096	451	1002.8931
252	497.3107	302	619.4444	352	745.1838	402	874.0138	452	1005.5482
253	499.7138	303	621.9258	353	747.7316	403	876.6191	453	1008.2043
254	502.1186	304	624.4087	354	750.2806	404	879.2255	454	1010.8614
255	504.5252	305	626.8930	355	752.8308	405	881.8329	455	1013.5194
256	506.9334	306	629.3787	356	755.3823	406	884.4415	456	1016.1783
257	509.3433	307	631.8659	357	757.9349	407	887.0510	457	1018.8383
258	511.7549	308	634.3544	358	760.4888	408	889.6617	458	1021.4991
259	514.1682	309	636.8444	359	763.0439	409	892.2734	459	1024.1609
260	516.5832	310	639.3357	360	765.6002	410	894.8862	460	1026.8237
261	518.9999	311	641.8285	361	768.1577	411	897.5001	461	1029.4874
262	521.4182	312	644.3226	362	770.7164	412	900.1150	462	1032.1520
263	523.8381	313	646.8182	363	773.2764	413	902.7309	463	1034.8176
264	526.2597	314	649.3151	364	775.8375	414	905.3479	464	1037.4841
265	528.6830	315	651.8134	365	778.3997	415	907.9660	465	1040.1516
266	531.1079	316	654.3131	366	780.9632	416	910.5850	466	1042.8200
267	533.5344	317	656.8142	367	783.5279	417	913.2052	467	1045.4893
268	535.9625	318	659.3166	368	786.0937	418	915.8264	468	1048.1595
269	538.3922	319	661.8204	369	788.6608	419	918.4486	469	1050.8307
270	540.8236	320	664.3255	370	791.2290	420	921.0718	470	1053.5028
271	543.2566	321	666.8320	371	793.7983	421	923.6961	471	1056.1758
272	545.6912	322	669.3399	372	796.3689	422	926.3214	472	1058.8498
273	548.1273	323	671.8491	373	798.9406	423	928.9478	473	1061.5246
274	550.5651	324	674.3596	374	801.5135	424	931.5751	474	1064.2004
275	553.0044	325	676.8715	375	804.0875	425	934.2035	475	1066.8771
276	555.4453	326	679.3847	376	806.6627	426	936.8329	476	1069.5547
277	557.8878	327	681.8993	377	809.2390	427	939.4633	477	1072.2332
278	560.3318	328	684.4152	378	811.8165	428	942.0948	478	1074.9127
279	562.7774	329	686.9324	379	814.3952	429	944.7272	479	1077.5930
280	565.2246	330	689.4509	380	816.9749	430	947.3607	480	1080.2742
281	567.6733	331	691.9707	381	819.5559	431	949.9952	481	1082.9564
282	570.1235	332	694.4918	382	822.1379	432	952.6307	482	1085.6394
283	572.5753	333	697.0143	383	824.7211	433	955.2672	483	1088.3234
284	575.0287	334	699.5380	384	827.3055	434	957.9047	484	1091.0082
285	577.4835	335	702.0631	385	829.8909	435	960.5431	485	1093.6940
286	579.9399	336	704.5894	386	832.4775	436	963.1826	486	1096.3806
287	582.3977	337	707.1170	387	835.0652	437	965.8231	487	1099.0681
288	584.8571	338	709.6460	388	837.6540	438	968.4646	488	1101.7565
289	587.3180	339	712.1762	389	840.2440	439	971.1071	489	1104.4458
290	589.7804	340	714.7076	390	842.8351	440	973.7505	490	1107.1360
291	592.2443	341	717.2404	391	845.4272	441	976.3949	491	1109.8271
292	594.7097	342	719.7744	392	848.0205	442	979.0404	492	1112.5191
293	597.1766	343	722.3097	393	850.6149	443	981.6868	493	1115.2119
294	599.6449	344	724.8463	394	853.2104	444	984.3342	494	1117.9057
295	602.1147	345	727.3841	395	855.8070	445	986.9825	495	1120.6003
296	604.5860	346	729.9232	396	858.4047	446	989.6318	496	1123.2958
297	607.0588	347	732.4635	397	861.0035	447	992.2822	497	1125.9921
298	609.5330	348	735.0051	398	863.6034	448	994.9334	498	1128.6893
299	612.0087	349	737.5479	399	866.2044	449	997.5857	499	1131.3874
300	614.4858	350	740.0920	400	868.8064	450	1000.2389	500	1134.0864

UITVOERIGE TABEL IN [14]

9.4

$$\binom{n}{x}$$

	n									
x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4		1	5	15	35	70	126	210	330	495
5			1	6	21	56	126	252	462	792
6				1	7	28	84	210	462	924

	n									
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1.3^{1}	1.4^{1}	1.5^{1}	1.6^{1}	1.7^{1}	1.8^{1}	1.9^{1}	2.0^{1}	2.1^{1}	2.2^{1}
2	7.8^{1}	9.1^{1}	1.05^{2}	1.20^{2}	1.36^{2}	1.53^{2}	1.71^{2}	1.90^{2}	2.10^{2}	2.31^{2}
3	2.86^{2}	3.64^{2}	4.55^{2}	5.60^{2}	6.80^{2}	8.16^{2}	9.69^{2}	1.140^{3}	1.330^{3}	1.540^{3}
4	7.15^{2}	1.001^{3}	1.365^{3}	1.820^{3}	2.380^{3}	3.060^{3}	3.876^{3}	4.845^{3}	5.985^{3}	7.315^{3}
5	1.287^{3}	2.002^{3}	3.003^{3}	4.368^{3}	6.188^{3}	8.568^{3}	1.163^{4}	1.550^{4}	2.035^{4}	2.633^{4}
6	1.716^{3}	3.003^{3}	5.005^{3}	8.008^{3}	1.238^{4}	1.856^{4}	2.713^{4}	3.876^{4}	5.426^{4}	7.461^{4}
7	1.716^{3}	3.432^{3}	6.435^{3}	1.144^{4}	1.945^{4}	3.182^{4}	5.039^{4}	7.752^{4}	1.163^{5}	1.705^{5}
8			6.435^{3}	1.287^{4}	2.431^{4}	4.376^{4}	7.558^{4}	1.260^{5}	2.035^{5}	3.198^{5}
9					2.431^{4}	4.862^{4}	9.238^{4}	1.680^{5}	2.939^{5}	4.974^{5}
10							9.238^{4}	1.848^{5}	3.527^{5}	6.466^{5}
11									3.527^{5}	7.054^{5}

	n									
x	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1	3.3^{1}	3.4^{1}	3.5^{1}	3.6^{1}	3.7^{1}	3.8^{1}	3.9^{1}	4.0^{1}	4.1^{1}	4.2^{1}
2	5.28^{2}	5.61^{2}	5.95^{2}	6.30^{2}	6.66^{2}	7.03^{2}	7.41^{2}	7.80^{2}	8.20^{2}	8.61^{2}
3	5.426^{3}	5.984^{3}	6.545^{3}	7.140^{3}	7.770^{3}	8.436^{3}	9.139^{3}	9.880^{3}	1.066^{4}	1.148^{4}
4	4.092^{4}	4.638^{4}	5.236^{4}	5.891^{4}	6.605^{4}	7.382^{4}	8.225^{4}	9.139^{4}	1.013^{5}	1.119^{5}
5	2.373^{5}	2.783^{5}	3.246^{5}	3.770^{5}	4.359^{5}	5.019^{5}	5.758^{5}	6.580^{5}	7.494^{5}	8.507^{5}
6	1.108^{6}	1.345^{6}	1.623^{6}	1.948^{6}	2.325^{6}	2.761^{6}	3.263^{6}	3.838^{6}	4.496^{6}	5.246^{6}
7	4.272^{6}	5.380^{6}	6.725^{6}	8.348^{6}	1.030^{7}	1.262^{7}	1.538^{7}	1.864^{7}	2.248^{7}	2.698^{7}
8	1.388^{7}	1.816^{7}	2.354^{7}	3.026^{7}	3.861^{7}	4.890^{7}	6.152^{7}	7.690^{7}	9.555^{7}	1.180^{8}
9	3.857^{7}	5.245^{7}	7.061^{7}	9.414^{7}	1.244^{7}	1.630^{8}	2.119^{8}	2.734^{8}	3.503^{8}	4.459^{8}
10	9.256^{7}	1.311^{8}	1.836^{8}	2.542^{8}	3.483^{8}	4.727^{8}	6.357^{8}	8.477^{8}	1.121^{9}	1.471^{9}
11	1.935^{8}	2.861^{8}	4.172^{8}	6.008^{8}	8.550^{8}	1.203^{9}	1.679^{9}	2.312^{9}	3.159^{9}	4.281^{9}
12	3.548^{8}	5.484^{8}	8.345^{8}	1.259^{9}	1.852^{9}	2.707^{9}	3.911^{9}	5.587^{9}	7.899^{9}	1.106^{10}
13	5.732^{8}	9.280^{8}	1.476^{9}	2.311^{9}	3.562^{9}	5.415^{9}	8.122^{9}	1.203^{10}	1.762^{10}	2.552^{10}
14	8.188^{8}	1.392^{9}	2.320^{9}	3.796^{9}	6.107^{9}	9.670^{9}	1.508^{10}	2.321^{10}	3.524^{10}	5.286^{10}
15	1.037^{9}	1.856^{9}	3.248^{9}	5.568^{9}	9.364^{9}	1.547^{10}	2.514^{10}	4.023^{10}	6.343^{10}	9.867^{10}
16	1.167^{9}	2.204^{9}	4.060^{9}	7.308^{9}	1.288^{10}	2.224^{10}	3.771^{10}	6.285^{10}	1.031^{11}	1.665^{11}
17	1.167^{9}	2.334^{9}	4.538^{9}	8.597^{9}	1.591^{10}	2.878^{10}	5.102^{10}	8.873^{10}	1.516^{11}	2.547^{11}
18				9.075^{9}	1.767^{10}	3.358^{10}	6.236^{10}	1.134^{11}	2.021^{11}	3.537^{11}
19					1.767^{10}	3.535^{10}	6.892^{10}	1.313^{11}	2.447^{11}	4.468^{11}
20							6.892^{10}	1.378^{11}	2.691^{11}	5.138^{11}
21									2.691^{11}	5.383^{11}

$$\binom{n}{x}$$

n

x	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	2.3^{1}	2.4^{1}	2.5^{1}	2.6^{1}	2.7^{1}	2.8^{1}	2.9^{1}	3.0^{1}	3.1^{1}	3.2^{1}
2	2.53^{2}	2.76^{2}	3.00^{2}	3.25^{2}	3.51^{2}	3.78^{2}	4.06^{2}	4.35^{2}	4.65^{2}	4.96^{2}
3	1.771^{3}	2.024^{3}	2.300^{3}	2.600^{3}	2.925^{3}	3.276^{3}	3.654^{3}	4.060^{3}	4.495^{3}	4.960^{3}
4	8.855^{3}	1.063^{4}	1.265^{4}	1.495^{4}	1.755^{4}	2.048^{4}	2.375^{4}	2.740^{4}	3.146^{4}	3.596^{4}
5	3.365^{4}	4.250^{4}	5.313^{4}	6.578^{4}	8.073^{4}	9.828^{4}	1.188^{5}	1.425^{5}	1.699^{5}	2.014^{5}
	-	-			+	+	+2	+2	-	
6	1.009^{5}	1.346^{5}	1.771^{5}	2.302^{5}	2.960^{5}	3.767^{5}	4.750^{5}	5.938^{5}	7.363^{5}	9.062^{5}
7	2.452^{5}	3.461^{5}	4.807^{5}	6.578^{5}	8.880^{5}	1.184^{6}	1.561^{6}	2.036^{6}	2.630^{6}	3.366^{6}
8	4.903^{5}	7.355^{5}	1.082^{6}	1.562^{6}	2.220^{6}	3.108^{6}	4.292^{6}	5.853^{6}	7.889^{6}	1.052^{7}
9	8.172^{5}	1.308^{6}	2.043^{6}	3.125^{6}	4.687^{6}	6.907^{6}	1.002^{7}	1.431^{7}	2.016^{7}	2.805^{7}
10	1.144^{6}	1.961^{6}	3.269^{6}	5.312^{6}	8.436^{6}	1.312^{7}	2.003^{7}	3.005^{7}	4.435^{7}	6.451^{7}
11	1.352^{6}	2.496^{6}	4.457^{6}	7.726^{6}	1.304^{7}	2.147^{7}	3.460^{7}	5.463^{7}	8.467^{7}	1.290^{8}
12	1.352^{6}	2.704^{6}	5.200^{6}	9.658^{6}	1.738^{7}	3.042^{7}	5.190^{7}	8.649^{7}	1.411^{8}	2.258^{8}
13			5.200^{6}	1.040^{7}	2.006^{7}	3.744^{7}	6.786^{7}	1.198^{8}	2.063^{8}	3.474^{8}
14					2.006^{7}	4.012^{7}	7.756^{7}	1.454^{8}	2.652^{8}	4.714^{8}
15							$7,756^{7}$	1.551^{8}	3.005^{8}	5.657^{8}
16									3.005^{8}	6.011^{8}

n

x	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	4.3^{1}	4.4^{1}	4.5^{1}	4.6^{1}	4.7^{1}	4.8^{1}	4.9^{1}	5.0^{1}	5.1^{1}	5.2^{1}
2	9.03^{2}	9.46^{2}	9.90^{2}	1.035^{3}	1.081^{3}	1.128^{3}	1.176^{3}	1.225^{3}	1.275^{3}	1.326^{3}
3	1.234^{4}	1.324^{4}	1.419^{4}	1.518^{4}	1.622^{4}	1.730^{4}	1.842^{4}	1.960^{4}	2.082^{4}	2.210^{4}
4	1.234^{5}	1.358^{5}	1.490^{5}	1.632^{5}	1.784^{5}	1.946^{5}	2.119^{5}	2.303^{5}	2.499^{5}	2.707^{5}
5	9.626^{5}	1.086^{6}	1.222^{6}	1.371^{6}	1.534^{6}	1.712^{6}	1.907^{6}	2.119^{6}	2.349^{6}	2.599^{6}
6	6.096^{6}	7.059^{6}	8.145^{6}	9.367^{6}	1.074^{7}	1.227^{7}	1.398^{7}	1.589^{7}	1.801^{7}	2.036^{7}
7	3.222^{7}	3.832^{7}	4.538^{7}	5.352^{7}	6.289^{7}	7.363^{7}	8.590^{7}	9.988^{7}	1.158^{8}	1.338^{8}
8	1.450^{8}	1.772^{8}	2.156^{8}	2.609^{8}	3.145^{8}	3.773^{8}	4.510^{8}	5.369^{8}	6.368^{8}	7.525^{8}
9	5.639^{8}	7.089^{8}	8.862^{8}	1.102^{9}	1.363^{9}	1.677^{9}	2.054^{9}	2.505^{9}	3.042^{9}	3.679^{9}
10	1.917^{9}	2.481^{9}	3.190^{9}	4.076^{9}	5.178^{9}	6.541^{9}	8.218^{9}	1.027^{10}	1.278^{10}	1.582^{10}
11	5.752^{9}	7.669^{9}	1.015^{10}	1.334^{10}	1.742^{10}	2.260^{10}	2.914^{10}	3.735^{10}	4.763^{10}	6.040^{10}
12	1.534^{10}	2.109^{10}	2.876^{10}	3.891^{10}	5.225^{10}	6.967^{10}	9.226^{10}	1.214^{11}	1.588^{11}	2.064^{11}
13	3.658^{10}	5.192^{10}	7.301^{10}	1.018^{11}	1.407^{11}	1.929^{11}	2.626^{11}	3.549^{11}	4.763^{11}	6.350^{11}
14	7.838^{10}	1.150^{11}	1.669^{11}	2.399^{11}	3.416^{11}	4.823^{11}	6.752^{11}	9.378^{11}	1.293^{12}	1.769^{12}
15	1.515^{11}	2.299^{11}	3.449^{11}	5.117^{11}	7.516^{11}	1.093^{12}	1.576^{12}	2.251^{12}	3.189^{12}	4.481^{12}
16	2.652^{11}	4.167^{11}	6.466^{11}	9.915^{11}	1.503^{12}	2.255^{12}	3.348^{12}	4.924^{12}	7.175^{12}	1.036^{13}
17	4.212^{11}	6.864^{11}	1.103^{12}	1.750^{12}	2.741^{12}	4.244^{12}	6.499^{12}	9.847^{12}	1.477^{13}	2.194^{13}
18	6.084^{11}	1.030^{12}	1.716^{12}	2.819^{12}	4.569^{12}	7.310^{12}	1.155^{13}	1.805^{13}	2.790^{13}	4.267^{13}
19	8.005^{11}	1.409^{12}	2.438^{12}	4.154^{12}	6.973^{12}	1.154^{13}	1.885^{13}	3.041^{13}	4.846^{13}	7.636^{13}
20	9.606^{11}	1.761^{12}	3.170^{12}	5.608^{12}	9.762^{12}	1.674^{13}	2.828^{13}	4.713^{13}	7.754^{13}	1.260^{14}
21	1.052^{12}	2.013^{12}	3.774^{12}	6.944^{12}	1.255^{13}	2.231^{13}	3.905^{13}	6.733^{13}	1.145^{14}	1.920^{14}
22	1.052^{12}	2.104^{12}	4.117^{12}	7.890^{12}	1.483^{13}	2.739^{13}	4.970^{13}	8.875^{13}	1.561^{14}	2.705^{14}
23			4.117^{12}	8.233^{12}	1.612^{13}	3.096^{13}	5.834^{13}	1.080^{14}	1.968^{14}	3.529^{14}
24					1.612^{13}	3.225^{13}	6.321^{13}	1.215^{14}	2.296^{14}	4.264^{14}
25							6.321^{13}	1.264^{14}	2.480^{14}	4.776^{14}
26									2.480^{14}	4.959^{14}

UITVOERIGE TABEL IN [14]

9.5

e^x

x	e^x	x	e^x	x	e^x	x	e^x
0.00	1.0000	0.50	1.6487	1.00	2.7183	5.0	148.41
01	1.0101	51	1.6653	05	2.8577	5.1	164.02
02	1.0202	52	1.6820	10	3.0042	5.2	181.27
03	1.0305	53	1.6989	15	3.1582	5.3	200.34
04	1.0408	54	1.7160	20	3.3201	5.4	221.41
0.05	1.0513	0.55	1.7333	1.25	3.4903	5.0	244.69
06	1.0618	56	1.7507	30	3.6693	5.6	270.43
07	1.0725	57	1.7683	35	3.8574	5.7	298.87
08	1.0833	58	1.7860	40	4.0552	5.8	330.30
09	1.0942	59	1.8040	45	4.2631	5.9	365.04
0.10	1.1052	0.60	1.8221	1.50	4.4817	6.0	403.43
11	1.1163	61	1.8404	55	4.7115	6.1	445.86
12	1.1275	62	1.8589	60	4.9530	6.2	492.75
13	1.1388	63	1.8776	65	5.2070	6.3	544.57
14	1.1503	64	1.8965	70	5.4739	6.4	601.85
0.15	1.1618	0.65	1.9155	1.75	5.7546	6.5	665.14
16	1.1735	66	1.9348	80	6.0496	6.6	735.10
17	1.1853	67	1.9542	85	6.3598	6.7	812.41
18	1.1972	68	1.9739	90	6.6859	6.8	897.85
19	1.2092	69	1.9937	95	7.0287	6.9	992.27
0.20	1.2214	0.70	2.0138	2.0	7.3891	7.0	1096.6
21	1.2337	71	2.0340	2.1	8.1662	7.1	1212.0
22	1.2461	72	2.0544	2.2	9.0250	7.2	1339.4
23	1.2586	73	2.0751	2.3	9.9742	7.3	1480.3
24	1.2712	74	2.0959	2.4	11.023	7.4	1636.0
0.25	1.2840	0.75	2.1170	2.5	12.182	7.5	1808.0
26	1.2969	76	2.1383	2.6	13.464	7.6	1998.2
27	1.3100	77	2.1598	2.7	14.880	7.7	2208.3
28	1.3231	78	2.1815	2.8	16.445	7.8	2440.6
29	1.3364	79	2.2034	2.9	18.174	7.9	2697.3
0.30	1.3499	0.80	2.2255	3.0	20.086	8.0	2981.0
31	1.3634	81	2.2479	3.1	22.198	8.1	3294.5
32	1.3771	82	2.2705	3.2	24.533	8.2	3641.0
33	1.3910	83	2.2933	3.3	27.113	8.3	4023.9
34	1.4049	84	2.3164	3.4	29.964	8.4	4447.1
0.35	1.4191	0.85	2.3396	3.5	33.115	8.5	4914.8
36	1.4333	86	2.3632	3.6	36.598	8.6	5431.7
37	1.4477	87	2.3869	3.7	40.447	8.7	6002.9
38	1.4623	88	2.4109	3.8	44.701	8.8	6634.2
39	1.4770	89	2.4351	3.9	49.402	8.9	7332.0
0.40	1.4918	0.90	2.4596	4.0	54.598	9.0	8103.1
41	1.5068	91	2.4843	4.1	60.340	9.1	8955.3
42	1.5220	92	2.5093	4.2	66.686	9.2	9897.1
43	1.5373	93	2.5345	4.3	73.700	9.3	10938
44	1.5527	94	2.5600	4.4	81.451	9.4	12088
0.45	1.5683	0.95	2.5857	4.5	90.017	9.5	13360
46	1.5841	96	2.6117	4.6	99.484	9.6	14765
47	1.6000	97	2.6379	4.7	109.95	9.7	16318
48	1.6161	98	2.6645	4.8	121.51	9.8	18034
49	1.6323	99	2.6912	4.9	134.29	9.9	19930

UITVOERIGE TABEL IN [28]

e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.00	1.0000	0.50	0.6065	1.00	0.3679	5.0	0.00674
01	0.9900	51	0.6005	05	0.3499	5.1	0.00610
02	0.9802	52	0.5945	10	0.3329	5.2	0.00552
03	0.9704	53	0.5886	15	0.3166	5.3	0.00499
04	0.9608	54	0.5827	20	0.3012	5.4	0.00452
0.05	0.9512	0.55	0.5769	1.25	0.2865	5.5	0.00409
06	0.9418	56	0.5712	30	0.2725	5.6	0.00370
07	0.9324	57	0.5655	35	0.2592	5.7	0.00355
08	0.9231	58	0.5599	40	0.2466	5.8	0.00303
09	0.9139	59	0.5543	45	0.2346	5.9	0.00274
0.10	0.9048	0.60	0.5488	1.50	0.2231	6.0	0.002479
11	0.8958	61	0.5434	55	0.2122	6.1	0.002243
12	0.8869	62	0.5379	60	0.2019	6.2	0.002029
13	0.8781	63	0.5326	65	0.1920	6.3	0.001836
14	0.8694	64	0.5273	70	0.1827	6.4	0.001662
0.15	0.8607	0.65	0.5220	1.75	0.1738	6.5	0.001503
16	0.8521	66	0.5169	80	0.1653	6.6	0.001360
17	0.8437	67	0.5117	85	0.1572	6.7	0.001261
18	0.8353	68	0.5066	90	0.1496	6.8	0.001114
19	0.8270	69	0.5016	95	0.1437	6.9	0.001008
0.20	0.8187	0.70	0.4966	2.0	0.1353	7.0	0.000912
21	0.8106	71	0.4916	2.1	0.1225	7.1	0.000825
22	0.8025	72	0.4868	2.2	0.1108	7.2	0.000747
23	0.7945	73	0.4819	2.3	0.1003	7.3	0.000676
24	0.7866	74	0.4771	2.4	0.09072	7.4	0.000611
0.25	0.7788	0.75	0.4724	2.5	0.08208	7.5	0.000553
26	0.7711	76	0.4677	2.6	0.07427	7.6	0.000500
27	0.7634	77	0.4630	2.7	0.06721	7.7	0.000453
28	0.7558	78	0.4584	2.8	0.06081	7.8	0.000410
29	0.7483	79	0.4538	2.9	0.05502	7.9	0.000371
0.30	0.7408	0.80	0.4493	3.0	0.04979	8.0	0.000335
31	0.7334	81	0.4449	3.1	0.04505	8.1	0.000304
32	0.7261	82	0.4404	3.2	0.04076	8.2	0.000275
33	0.7189	83	0.4360	3.3	0.03688	8.3	0.000249
34	0.7118	84	0.4317	3.4	0.03337	8.4	0.000225
0.35	0.7047	0.85	0.4274	3.5	0.03020	8.5	0.000203
36	0.6977	86	0.4232	3.6	0.02732	8.6	0.000184
37	0.6907	87	0.4190	3.7	0.02472	8.7	0.000167
38	0.6839	88	0.4148	3.8	0.02237	8.8	0.000151
39	0.6771	89	0.4107	3.9	0.02024	8.9	0.000136
0.40	0.6703	0.90	0.4066	4.0	0.01832	9.0	0.000123
41	0.6637	91	0.4025	4.1	0.01657	9.1	0.000112
42	0.6570	92	0.3985	4.2	0.01500	9.2	0.000101
43	0.6505	93	0.3946	4.3	0.01357	9.3	0.000091
44	0.6440	94	0.3906	4.4	0.01228	9.4	0.000083
0.45	0.6376	0.95	0.3867	4.5	0.01111	9.5	0.000075
46	0.6313	96	0.3829	4.6	0.01005	9.6	0.000068
47	0.6250	97	0.3791	4.7	0.00910	9.7	0.000061
48	0.6188	98	0.3753	4.8	0.00823	9.8	0.000055
49	0.6126	99	0.3716	4.9	0.00745	9.9	0.000050

UITVOERIGE TABEL IN [28]

9.6

ORTHOGONALE POLYNOMEN

voor gelijke waarnemingsintervallen

d = lengte interval
n = aantal waarnemingsniveaus
$x = (X - \bar{X}) / d$

n	polynoom	numerieke waarde van ϕ	ϕ_k^2
3	$\phi_1 = x$	-1 0 1	2
	$\phi_2 = 3x^2 - 2$	1 -2 1	6
4	$\phi_1 = 2x$	-3 -1 1 3	20
	$\phi_2 = (4x^2 - 5) : 4$	1 -1 -1 1	4
	$\phi_3 = (20x^3 - 41x) : 6$	-1 3 -3 1	20
5	$\phi_1 = x$	-2 -1 0 1 2	10
	$\phi_2 = x^2 - 2$	2 -1 -2 -1 2	14
	$\phi_3 = (5x^3 - 17x) : 6$	-1 2 0 -2 1	10
6	$\phi_1 = 2x$	-5 -3 -1 1 3 5	70
	$\phi_2 = (12x^2 - 35) : 8$	5 -1 -4 -4 -1 5	84
	$\phi_3 = (20x^3 - 101x) : 12$	-5 7 4 -4 -7 5	180
7	$\phi_1 = x$	0 1 2 3	28
	$\phi_2 = x^2 - 4$	-4 -3 0 5	84
	$\phi_3 = (x^3 - 7x) : 6$	0 -1 -1 1	6
8	$\phi_1 = 2x$	1 3 5 7	168
	$\phi_2 = (4x^2 - 21) : 4$	-5 -3 1 7	168
	$\phi_3 = (4x^3 - 37x) : 6$	-3 -7 -5 7	264
9	$\phi_1 = x$	0 1 2 3 4	60
	$\phi_2 = 3x^2 - 20$	-20 -17 -8 7 28	2772
	$\phi_3 = (5x^3 - 59x) : 6$	0 -9 -13 -7 14	990
10	$\phi_1 = 2x$	1 3 5 7 9	330
	$\phi_2 = (4x^2 - 33) : 8$	-4 -3 -1 2 6	132
	$\phi_3 = (20x^3 - 293x) : 12$	-12 -31 -35 -14 42	8580
11	$\phi_1 = x$	0 1 2 3 4 5	110
	$\phi_2 = x^2 - 10$	-10 -9 -6 -1 6 15	858
	$\phi_3 = (5x^3 - 89x) : 6$	0 -14 -23 -22 -6 30	4290
12	$\phi_1 = 2x$	1 3 5 7 9 11	572
	$\phi_2 = (12x^2 - 143) : 4$	-35 -29 -17 1 25 55	12012
	$\phi_3 = (4x^3 - 85x) : 6$	-7 -19 -25 -21 -3 33	5148
13	$\phi_1 = x$	0 1 2 3 4 5 6	182
	$\phi_2 = x^2 - 14$	-14 -13 -10 -5 2 11 22	2002
	$\phi_3 = (x^3 - 25x) : 6$	0 -4 -7 -8 -6 0 11	572
14	$\phi_1 = 2x$	1 3 5 7 9 11 13	910
	$\phi_3 = (4x^2 - 65) : 8$	-8 -7 -5 -2 2 7 13	728
	$\phi_2 = (20x^3 - 581x) : 12$	-24 -67 -95 -98 -66 11 143	97240
15	$\phi_1 = x$	0 1 2 3 4 5 6 7	280
	$\phi_2 = 3x^2 - 56$	-56 -53 -44 -29 -8 19 52 91	37128
	$\phi_3 = (5x^3 - 167x) : 6$	0 -27 -49 -61 -58 -35 13 91	39780

Algemeen:

$\phi_1 = \lambda_1 x$

$\phi_2 = \lambda_2 \{x^2 - \frac{1}{12}(n^2 - 1)\}$

$\phi_3 = \lambda_3 \{x^3 - \frac{1}{20}(3n^2 - 7)x\}$

waarbij de λ_i zo gekozen worden, dat de numerieke waarden gehele getallen zijn.

THEORIE PAGINA 23 - UITVOERIGE TABEL IN [1]

LITERATUUR

Guide to tables in mathematical statistics
GREENWOOD, J.A. and HARTLEY, H.O.
Princeton, New Yersey: Princeton University Press, 1962.

Algemene tabelwerken

[1] PEARSON, E.S. and HARTLEY, H.O. 25 sh.
Biometrika tables for Statisticians. Volume I.
Cambridge University Press, 1954.

[2] OWEN, D.B. 94 sh.
Handbook of statistical tables.
Addison-Wesley; Reading, Mass. Londen, 1962.

[3] HALD, A. 34 sh.
Statistical tables and formulas.
New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952.

[4] BURINGTON, R.S. and MAY, D.C. $ 4.50
Handbook of probability and statistics with tables.
Ohio: Sandusky, 1952.

[5] ARKIN, H. and COLTON, R.R. $ 1.50
Tables for statisticians.
New York: Barnes and Noble, 1950.

Andere tabelwerken

[6] NATIONAL BUREAU OF STANDARDS.
Tables of normal probability functions.
Applied Mathematics Series 23, Washington 25 D.C.
U.S. Government Printing Office, Superintendent of Documents, 1953.

[7] SMIRNOV, N.V. (ed.)
Tables for the distribution and density functions of t-distributions.
Pergamon Press: Oxford, London, New York, Paris, 1961.

[8] THOMPSON, C.M.
Tables of percentage points of χ^2distribution.
Biometrika (1941), 187 - 191.

[9] FISHER, R.A. and YATES, F.

Statistical tables for biological, agricultural and medical research.
Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.

[10] NATIONAL BUREAU OF STANDARDS.

Tables of the Binomial Probability Distribution.
Applied Mathematics Series 6, Washington 25, D.C.
U.S. Government Printing Office, Superintendent of Documents 1950.

[11] HARVARD UNIVERSITY COMPUTATION LABORATORY.

Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution.
Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1955.

[12] HAMAKER, H.C.

"Average confidence" limits for binomial probabilities.
Review of the international statistical institute 21, 1953.

[13] MOLINA, E.C.

Poisson's Exponential Binomial Limit.
New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1942.

[14] FRY, T.C.

Probability and its engineering uses.
New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1928.

[15] KITAGAWA, T.

Tables of Poisson Distribution.
Tokyo: Baifukan, 1952.

[16] WABEKE, D. en EEDEN, C. VAN

Handleiding voor de toets van Wilcoxon (S 176)
Mathematisch Centrum Amsterdam.

[17] KAARSEMAKER, L and VAN WIJNGAARDEN, A.

Tables for use in rank correlation (R 73)
Mathematisch Centrum Amsterdam.

[18] DE JONGE, H.

Inleiding tot de medische statistiek.
Nederlands Instituut voor Praeventieve Geneeskunde. Leiden.

[19] SWED, F.S. and EISENHART, C.

Tables for testing the randomness of grouping in a sequence of alternatives.
Annals of Mathematical Statistics 14(1943) 66 - 87.

[20] KENDALL, M.G.

Rank Correlations Methods.
London: Charles Griffin and Company Ltd., Second edition 1955.

[21] DIXON, W.J. and MASSEY, F.J.

Introduction to statistical analysis.
New York, London etc.: McGraw-Hill Book Co. 1957.

[22] CAMERON, J.M.

Tables for constructing and for computing the operating characteristics of single sampling plans.
Industrial Quality Control Vol.IX No. 1, Part 1, 1952.

[23] SCHAAFSMA, A.H. en WILLEMZE, F.G.

Modern kwaliteitsbeleid.
Philips Technische Bibliotheek, 1954.

[24] RAND CORPORATION.

A Million Random Digits with 100.000 Normal Deviates.
Glencoe, Illinois: Free Press, 1955.

[25] KENDALL, MG. and BABINGTON SMITH, B.

Tables of random sampling numbers - Tracts for computers, No. XXIV.
Cambridge University Press, London, 1939.

[26] HAMAKER, H.C.

Verlotingsseries; Aan te vragen bij: Groep Statistiek. Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven.

[27] WOLD, H.

Random normal deviates - Tracts for computers, No. XXV.
Cambridge University Press, London, 1948.

[28] NATIONAL BUREAU OF STANDARDS.

Tables of the exponential function e^x.
Applied Mathematics Series 14, Washington 25 D.C.
U.S. Government Printing Office, Superintendent of Documents 1951.