TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

THEORETISCHE WAARSCHIJNLIJKHEIDSLEER

naar het college van

Dr. Ir. M.L.J. Hautus

samengesteld door

Jo Bollen, Rolf Fabrie, Peter Vergers

Voorjaar 1973

Fred Stenzel

THEORETISCHE

WAARSCHIJNLIJKHEIDSLEER

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

THEORETISCHE WAARSCHIJNLIJKHEIDSLEER

naar het college van dr.ir. M.L.J. Hautus

samengesteld door:

Jo Bollen

Rolf Fabrie

Peter Vergers

voorjaar 1973

Inhoudsopgave

Literatuur

H. Widom
Lectures on measure and integration. (BK-6916)

J.F.C. Kingman, S.J. Taylor
Introduction to measure and probability. (BL-6613)

H. Bauer
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie. (BL-6823)

K. Krickeberg
Wahrscheinlichkeitstheorie. (BL-6308)

J. Lamperti
Probability. (BL-6627)

A.N. Kolmogorov
Foundations of the theory of probability. (BL-5603)

L. Breiman
Probability. (BL-6840)

S. Ackermans en J. van Lint
Algebra en Analyse.

Errata.

Notatie: bv. 2^7 betekent: bladzijde 2, regel 7 van boven,

2_7 betekent: bladzijde 2, regel 7 van onderen.

		er staat:	er moet staan:
	1^0		- 1 -
	1^4	noemen	noemen.
	1^8	$\underline{\overset{\infty}{\cup}}_{i=1} A_i$	$\underline{\overset{n}{\cup}}_{i=1} A_i$
	3^4	$\{\emptyset,\{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}\}$	$\{\emptyset\} \cup \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
	3_3	$A \setminus B \subset \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$	$A \setminus B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$
	6^3	$A \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$	$A \in \mathcal{S}_{\cup}$
	6^8	$\in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$	
	10_{10}	additieve functie	<u>additieve functie</u>
	10_6	$\mu(A) \subseteq \mu(B)$	$\mu(A) \leq \mu(B)$
	11^5	$\mu(\sum_{j=1}^{n} B_j)$	$\mu(\underline{\overset{n}{\cup}}_{j=1} B_j)$
	11_1	$\mathbb{R}_+$	$\bar{\mathbb{R}}_+$
	13^{11}	$\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)$	$\mu(\underline{\overset{\infty}{\cup}}_{i=1} A_i)$
	16^9	$A \setminus E \in \mathcal{S}$	$A \setminus E \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$
17_6 →	19_9	gedefinieerd	gedefinieerde
19	20^2	$\underline{\overset{\infty}{\cup}}_{i=1} \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$	$\underline{\overset{\infty}{\cup}}_{i=1} A_i \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$
20	20_{10}	$\forall_{E \in \mathcal{F}(\mathcal{S})}$	$\forall_{E \in \mathcal{S}}$
	22^3	maatruimten	meetruimten
	22^6	maatruimten	meetruimten
	23^2	maatruimte	meetruimte
	24^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^m$
	27^4	$a > 1$	$a \geq 1$

27^5	$0 \leq a \leq 1$	$0 \leq a < 1$
27^8	$0 \leq a \leq 1$	$0 \leq a < 1$
28^9	$(U,\mathcal{F})$ een meetruimte	$(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte
32^{10}	$\mathcal{F}$-meetbaar	$\mathcal{F}$-meetbaar
35^{11}	$L(f) < \infty$	$L(f^+)$ en $L(f^-)$ beide eindig zijn
37_7	waarbij $_n$	waarbij β_n
37_2	1.8.5	(1.8.5)
39 40_7	$\int f\, d\lambda$	$\int \lvert f\rvert d\lambda$
40_5	$(a,b]$	$[a,b]$
40_4	Riemann-integreerbaar	eigenlijk Riemann-integreerbaar
41^4		(vgl. Algebra en Analyse 7.3.13)
47_7	$(A \subseteq U)$	$(A \in \mathcal{F})$
53^{10}	$(B_j \in \mathcal{F})$	$(B_j \in \mathcal{G})$
56^{12}	2.	3.
56_3	$\int h\, \nu(dv)$	$\int h(v)\nu(dv)$
57^1	Stelling.	Stelling (Fubini).
57^6	$\mu \otimes \nu(dv)$	$\mu \otimes \nu(dudv)$
57^9	$\mu(du)$	$d\mu$
57^{10}	$\mu(du)$	$d\mu$ (komt 3× voor)
57^{11}	$\mu(du)$	$d\mu$
59^1	HOOFDSTUK II.	HOOFDSTUK II. INLEIDENDE BEGRIPPEN.
59^{10}	, zodat $(U,\mathcal{F})$ een meetruimte is.	.
60_9	$P(x^{\leftarrow}(A))$	$P(\underline{x}^{\leftarrow}(A))$
61^5	$\int g \circ \underline{x}$	$\int g \circ \underline{x}\, dP$
65_4	$p \in \{x \geq 1\}$	$p \geq 1$
66 66^8	$L\lvert x\rvert$	$L(\lvert\underline{x}\rvert)$
69 72^7	$+ (E\underline{x})^2$	$- (E\underline{x})^2$
72_{12}	$\underline{x}_2\ \underline{x}_2 \cdots$	$\underline{x}_2\ \underline{x}_3 \cdots$
74_5	$\bigcap_{k=1}^{\infty}$	$\bigcap_{k=n}^{\infty}$
74_5	$\bigcap_{k=n}^{\infty}$	$\bigcap_{k=n}^{m}$

75_4	$< \varepsilon$ als n voldoende groot is	$\to 0$ $(n \to \infty)$
77_3	. dan	, dan
80 83_5	$\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$	$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \underline{x}_j$
85_3	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} PA_{n-1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} PA_n - 1$
91_9	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert e^{i\underline{x}\tau} - 1 \rvert dP$	$\int\limits_U \lvert e^{i\underline{x}\tau} - 1 \rvert dP$
91_7	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert e^{i\underline{x}\tau} - 1 \rvert dP$	$\int\limits_U \lvert e^{i\underline{x}\tau} - 1 \rvert dP$
95^3	$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + i\mu t}$	$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + i\mu t}$
97 98^5	$e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$	$e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
98^6	$e^{i\nu t - \frac{1}{2}\tau^2 t}$	$e^{i\nu t - \frac{1}{2}\tau^2 t^2}$
98^7	$e^{i(\mu+\nu)t - \frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t}$	$e^{i(\mu+\nu)t - \frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t^2}$
99 103_1	$\min(D^2, \frac{1}{t^2})$	$\min(D^2, \frac{1}{t^2}))$

103
107
111
112

Overige fouten.

blz. 18:

Bij (1.4.31) staat: " Als A $\in \mathfrak{F}$ dan heet A $\mathfrak{F}$-meetbaar."
Deze regel moet staan bij (1.4.30) achter definitie van meetruimte.

blz. 41:

Na $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ als tweede voorbeeld toevoegen:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases},$$

dan is de Lebesgue-integraal $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$ terwijl de eigenlijke Riemann-integraal over [0,1] niet bestaat.

blz. 42:

Bij opgave 5 toevoegen:

(probeer deze opgave nogmaals na (1.9.8)).

blz. 45:

Stelling (1.9.6) moet luiden:

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ dan geldt:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \, .$$

blz. 61:

Definitie (2.2.9) moet luiden:

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector. Dan heet $f_{\underline{x}}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een dichtheid van $\underline{x}$ indien

$$\forall_{A\in\mathcal{B}_n} : P_{\underline{x}}(A) = \int_A f_{\underline{x}} \, d\lambda_n \, . \qquad (2.2.9)$$

Gevolg.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}} \, d\lambda_n = 1 \, .$$

blz. 90:

Opgave 15 moet zijn:

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{z}_1$ en $\underline{z}_2$ onafhankelijke complexe stochastische variabelen, $\underline{z}_1$ en $\underline{z}_2 \in L_1$.

Bewijs dat:

1. $\underline{z}_1\underline{z}_2 \in L_1$;
2. $E\underline{z}_1\underline{z}_2 = E\underline{z}_1 \cdot E\underline{z}_2$.

Aanwijzing: gebruik (2.4.16) en (2.4.19).

blz. 103:

In het bewijs van stelling (3.3.11), onderdeel c, 2e regel, staat $F_n(-2D) \le F_n^D(-2D)$ in plaats van $F_n(-2D) \le F_n^D(-D)$.

Onderstaande onderwerpen behoren niet tot de tentamenstof:

Bewijs van (1.4.8)
(1.4.11), (1.4.12), (1.4.13) en (1.4.14)
opmerking bij (1.4.16)
bewijs van (1.4.22)
(1.4.24), (1.4.25), (1.4.26) en (1.4.27)
bewijs van (1.4.28).

HOOFDSTUK I. INTEGRATIETHEORIE, MAATTHEORIE.

1.1. Notaties - definities - eigenschappen.

We gaan uit van een verzameling $\mathfrak{U}$ met als deelverzamelingen A,B,... en we zullen deze deelverzamelingen voortaan verzamelingen noemen

$$A^* := \mathfrak{U} \setminus A$$

$$A \uplus B := \begin{cases} A \cup B & \text{als } A \cap B = \emptyset \\ \text{niet gedefinieerd} & \text{als } A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\biguplus_{i=1}^{n} A_i := \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i & \text{als } A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \\ \text{niet gedefinieerd} & \text{als } \exists_i \ \exists_{j \neq i} : A_i \cap A_j \neq \emptyset \end{cases}$$

(de A_i's heten disjunct; $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i$ heet de disjuncte vereniging). Analoog definiëren we $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i$.

Definitie.

Een klasse $\mathfrak{C}$ is een verzameling van deelverzamelingen van $\mathfrak{U}$ met $\emptyset \in \mathfrak{C}$ (andere notaties: $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$). (1.1.1)

Definitie.

Zij $\mathfrak{C}$ een klasse, dan

$$\mathfrak{C}_{\cup} := \{A_1 \cup \ldots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathfrak{C}\}$$

$$\mathfrak{C}_{\uplus} := \{A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \mid n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathfrak{C}\}\,. \qquad (1.1.2)$$

Voorbeeld.

$\mathfrak{U} = \mathbb{R}$, $\mathfrak{C}$ = {intervallen}, dan $\mathfrak{C}_{\cup}$ = {eindig aantal intervallen}.
$\mathfrak{U}$ willekeurige verzameling, $\mathfrak{C} := \{\emptyset$, 1 puntverzamelingen}, dan $\mathfrak{C}_{\cup} = \mathfrak{C}_{\uplus}$.
$\mathfrak{U}$ willekeurige verzameling, $\mathfrak{C} := \{\emptyset$, 2 puntverzamelingen}, dan $\mathfrak{C}_{\cup} = \{\emptyset$, eindige verzamelingen met minstens 2 elementen}, $\mathfrak{C}_{\uplus} = \{\emptyset$, eindige verzamelingen met een even aantal elementen}. (1.1.3)

Definitie.

Zij $\mathfrak{C}$ een klasse, dan

$$\mathfrak{C}_\sigma := \{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid A_i \in \mathfrak{C}\} \quad \text{(aftelbare vereniging).} \tag{1.1.4}$$

Eigenschap.

$$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathfrak{C}_{\cup} \subseteq \mathfrak{C}_{\sigma} . \tag{1.1.5}$$

Definities.

$\mathfrak{C}$ heet $\cap$-stabiel als $A,B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ heet $\cup$-stabiel als $A,B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ heet $\underline{\cup}$-stabiel als $A,B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \,\underline{\cup}\, B \in \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ heet $\star$-stabiel als $A \in \mathfrak{C} \Rightarrow A^* \in \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{C}$ heet σ-stabiel als $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{C}$ heet $\setminus$-stabiel als $A,B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ heet $\div$-stabiel als $A,B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \div B \in \mathfrak{C}$.

$\mathfrak{C}$ heet $\sigma\underline{\cup}$-stabiel als $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C} \Rightarrow \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$. (1.1.6)

Eigenschappen.

$\mathfrak{C}$ $\cup$-stabiel $\Leftrightarrow \mathfrak{C}_{\cup} \subseteq \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ σ-stabiel $\Leftrightarrow \mathfrak{C}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{C}$.
$\mathfrak{C}$ $\underline{\cup}$-stabiel $\Leftrightarrow \mathfrak{C}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathfrak{C}$. (1.1.7)

1.2. Meetbare verzamelingen.

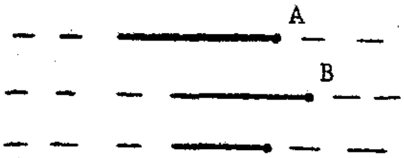
Definitie.

Een klasse $\mathfrak{S}$ heet een <u>semiring</u> als $\mathfrak{S}$ is $\cap$-stabiel en $A,B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{S}_{\underline{\cup}}$.
(1.2.1)

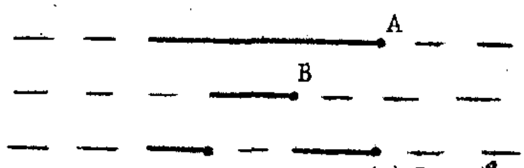
Voorbeelden.

1. $\mathfrak{U}$ willekeurige verzameling, $\mathfrak{S} := \{\emptyset,$ 1 puntverzamelingen$\}$. (Er geldt zelfs: $A,B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{S}$.)

2. $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$, $\mathfrak{S} := \{\emptyset, \{(a,b] \mid \underset{a<b}{a,b \in \mathbb{R}}\}\}$ (verzameling van alle spelden).



$A \cap B \in \mathfrak{S}$



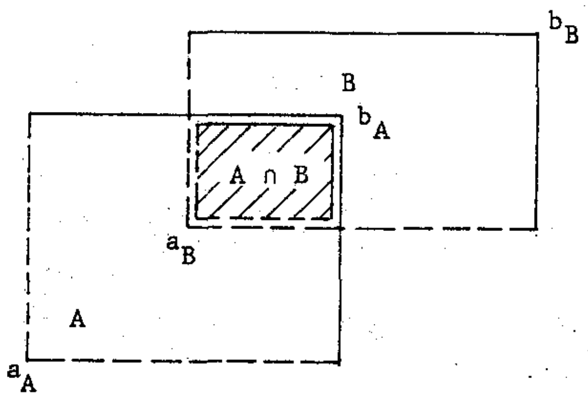
$A \setminus B \in \mathfrak{S}_{\cup}$

3. $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{S} := \{\emptyset\} \cup \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^n\}$ waarin $(a,b]$ als volgt wordt gedefinieerd:

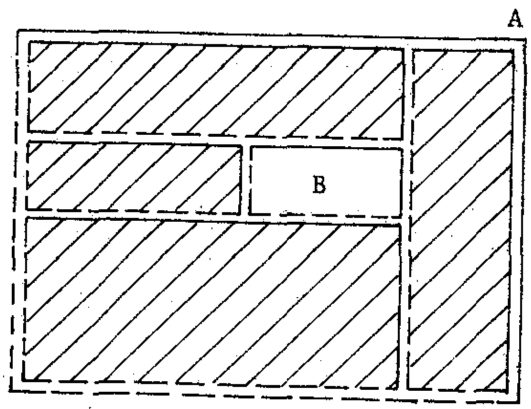
Zij $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ en $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$, dan

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{1\le i\le n} : a_i < x_i \le b_i\} \quad \text{(cel).}$$

Voor $n = 2$ krijgen we de volgende situaties:



$A \cap B \in \mathfrak{S}$



$A \setminus B \subset \mathfrak{S}_{\cup}$

Ga na dat de splitsing van $A \setminus B$ in disjuncte cellen niet eenduidig is.

(1.2.2)

Definitie.

Een klasse $\mathcal{R}$ heet een ring als $\mathcal{R}$ is $\cup$-stabiel en $\mathcal{R}$ is $\setminus$-stabiel. (1.2.3)

Eigenschappen.

1. Een ring is $\cap$-stabiel, immers $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. (Dus een ring is ook een semiring.)
2. Een ring is $\div$-stabiel, immers $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (1.2.4)

Definitie.

Ee-klasse
$\mathcal{A}$ heet een algebra als $\mathcal{A}$ is $\cup$-stabiel en $\mathcal{A}$ is $*$-stabiel. (1.2.5)

Eigenschappen.

1. Een algebra is $\cap$-stabiel, immers $A \cap B = (A^* \cup B^*)^*$.
2. Een algebra is $\setminus$-stabiel, immers $A \setminus B = A \cap B^*$ (dus een algebra is een ring). (1.2.6)

Definitie.

Een klasse $\mathcal{F}$ heet een σ-algebra als $\mathcal{F}$ is σ-stabiel en $\mathcal{F}$ is $*$-stabiel (Engels: σ-field). (1.2.7)

Eigenschappen.

1. Een σ-algebra is een algebra.
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, immers $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*)^*$. (1.2.8)

Voorbeeld.

$\mathcal{U}$ willekeurige verzameling, $\mathcal{F} = P(\mathcal{U}) := \{A \mid A \subseteq \mathcal{U}\}$.

1.3. Voortbrengers van klassen.

Zij $\mathcal{C}$ een klasse:

De door $\mathcal{C}$ voortgebrachte ring $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ is de doorsnede van alle ringen $\mathcal{R}$ met $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$.

De door $\mathcal{C}$ voortgebrachte algebra $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ is de doorsnede van alle algebra's $\mathcal{A}$ met $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

De door $\mathcal{C}$ voortgebrachte σ-algebra $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ is de doorsnede van alle σ-algebra's $\mathcal{F}$ met $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. (1.3.1)

Eigenschappen.

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$.
2. $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ is een ring.
3. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}$.
4. Zij $\tilde{\mathcal{R}}$ een ring met de eigenschappen $\mathcal{C} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R} \Rightarrow \tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$ dan geldt $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(\mathcal{C})$. (1.3.2)

(Analoge eigenschappen gelden voor $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}$.)

Stelling.

Als $\mathcal{S}$ een semiring is, dan $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$. (1.3.3)

Bewijs.

I. $\mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ is een ring want:
1. $\mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ is $\underline{\cup}$-stabiel (triviaal!).
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}} \Rightarrow A_1 \underline{\cup} \ldots \underline{\cup} A_n \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$. Dit volgt meteen uit 1 met inductie.
3. $A \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$, $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$, immers $A = A_1 \underline{\cup} \ldots \underline{\cup} A_n$ ($A_i \in \mathcal{S}$) en dan $A \setminus B = (A_1 \setminus B) \underline{\cup} \ldots \underline{\cup} (A_n \setminus B)$ met $A_i \setminus B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ zodat met 2 volgt $A \setminus B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$.
4. $\mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ is $\setminus$-stabiel, immers als $A \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ en $B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ dan $B = B_1 \underline{\cup} \ldots \underline{\cup} B_m$ ($B_i \in \mathcal{S}$) en dus volgt met 3: $A \setminus B = (\ldots((A \setminus B_1) \setminus B_2) \ldots \setminus B_m) \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$.
5. $\mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ is $\cup$-stabiel, immers $A \cup B = A \underline{\cup} (B \setminus A) \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ als $A, B \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ (zie 1 en 4).

Uit 4 en 5 volgt I.

II. $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$.
1. $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$. Dit volgt uit I en het feit dat $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$.
2. $\mathcal{S}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S})$, immers zij $A \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$ dan $A = A_1 \underline{\cup} \ldots \underline{\cup} A_n$ ($A_i \in \mathcal{S}$) en zij $\mathcal{R}$ een ring met $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ dan geldt dus $\forall_{1 \le i \le n} : A_i \in \mathcal{R}$. Daar $\mathcal{R}$ $\cup$-stabiel is, is $\mathcal{R}$ zeker $\underline{\cup}$-stabiel en dus is $A \in \mathcal{R}$ en dus $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Uit II.1 en II.2 volgt de bewering. □

Gevolgen.

1. $\mathfrak{S}$ semiring $\Rightarrow \mathfrak{S}_{\underline{\cup}} = \mathfrak{S}_{\cup}$.
   Bewijs. $\mathfrak{S}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathfrak{S}_{\cup}$ (triviaal). Zij $A \in \mathfrak{S}_{\underline{\cup}}$ dan $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ met $A_i \in \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_{\underline{\cup}}$. Volgens (1.3.3) no. 5 is dan $A \in \mathfrak{S}_{\underline{\cup}}$. □
2. Zij $\mathfrak{S}$ een semiring en zij $A \in \mathfrak{S}_\sigma$ dan bestaan er $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$ zodanig dat $A = A_1 \,\underline{\cup}\, A_2 \,\underline{\cup} \ldots$.
   Bewijs. $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$ $(B_i \in \mathfrak{S})$ en dus $A = B_1 \,\underline{\cup}\, (B_2 \setminus B_1) \,\underline{\cup}$ $\underline{\cup}\, (B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)) \,\underline{\cup}\, (B_4 \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)) \,\underline{\cup} \ldots \in \mathfrak{S}_{\underline{\cup}}$ (ga na). □

(1.3.4)

Bij voorbeeld 1 uit (1.2.2) geldt:

$\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ = {eindige verzamelingen}

$\mathcal{A}(\mathfrak{S})$ = {eindige verzamelingen} $\cup$ {verzamelingen met eindig complement}

$\mathcal{F}(\mathfrak{S})$ = {eindige of aftelbare verzamelingen} $\cup$ {verzamelingen met eindig of aftelbaar complement}.

Bij voorbeeld 2 uit (1.2.2) is het veel moeilijker om $\mathcal{F}(\mathfrak{S})$ expliciet te bepalen. We definiëren $\mathcal{B} := \mathcal{F}(\mathfrak{S})$. $\mathcal{B}$ heet de klasse der Borelverzamelingen.

Stelling.

Elke open verzameling is een Borelverzameling. (1.3.5)

Bewijs. Zij $A \in \mathcal{O}$:= {open verzamelingen}. Beschouw nu alle spelden $(r-s, r+t]$ met $r,s,t \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $(r-s,r+t] \subseteq A$. Dit zijn aftelbaar veel spelden uit $\mathfrak{S}$. A is gelijk aan de vereniging van al deze spelden en dus $A \in \mathcal{B}$. □

Gevolg.

Elke gesloten verzameling is een Borelverzameling. (1.3.6)

Dit volgt uit (1.3.5) en uit het feit dat $\mathcal{B}$ $*$-stabiel is.

Stelling.

$\mathcal{B} = \mathcal{F}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$:= {gesloten verzamelingen}). (1.3.7)

Bewijs. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\frac{1}{n})$. Daar $\forall_{n \in \mathbb{N}} : (a, b+\frac{1}{n}) \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{O})$ volgt met (1.2.8) dat

$(a,b] \in \mathfrak{F}(\mathfrak{O})$ en dus $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{O})$. Hieruit volgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{O})) = \mathfrak{F}(\mathfrak{O})$, dus $\mathfrak{F}(\mathfrak{O}) = \mathfrak{B}$. Analoog bewijst men $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ waarbij men gebruik maakt van de relatie $(a,b] = [a,b] \setminus \{a\}$. □

Bij voorbeeld 3 uit (1.2.2) definiëren we analoog $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_n)$, de n-dimensionale Borelverzameling. Er geldt weer: $\mathfrak{O}_n \subseteq \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{G}_n \subseteq \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{F}(\mathfrak{O}_n) = \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_n)$ met $\mathfrak{O}_n$ en $\mathfrak{G}_n$ de verzameling van alle open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ resp. de verzameling van alle gesloten verzamelingen in $\mathbb{R}^n$.

<u>Stelling</u>.

Zij $\mathfrak{S}$ een semiring en $\mathfrak{C}$ een klasse zodanig dat
1) $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}$,
2) $\mathfrak{C}$ $*$-stabiel,
3) $\mathfrak{C}$ $\sigma\underline{\cup}$-stabiel,
dan geldt dat $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{C}$. (1.3.8)

<u>Bewijs</u>. We definiëren $\mathfrak{D}$ als de doorsnede van alle klassen $\mathfrak{E}$ met 1) $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, 2) $\mathfrak{E}$ $*$-stabiel, 3) $\mathfrak{E}$ $\sigma\underline{\cup}$-stabiel.

a) Het is eenvoudig in te zien dat $\mathfrak{D}$ een klasse is, die de eigenschappen 1), 2) en 3) bezit.
b) $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$ want $\mathfrak{D}$ is de doorsnede van elementen van een verzameling waartoe ook $\mathfrak{C}$ behoort.
c) $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \supseteq \mathfrak{D}$ omdat $\mathfrak{D}$ in inclusiezin de kleinste klasse is, met de eigenschappen 1), 2) en 3).

Als we bewezen hebben dat $\mathfrak{D}$ een semiring is, kunnen we hieruit met behulp van (1.3.4) concluderen dat $\mathfrak{D}_\sigma \subseteq \mathfrak{D}$ (immers als $A \in \mathfrak{D}_\sigma$ dan $A = \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel (zie a)) dus $A \in \mathfrak{D}$) en dus is $\mathfrak{D}$ σ-stabiel, waaruit volgt dat $\mathfrak{D}$ een σ-algebra is, en wel een σ-algebra die $\mathfrak{S}$ omvat.
Daar $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ de kleinste σ-algebra is, die $\mathfrak{S}$ omvat, geldt noodzakelijkerwijs dat $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{D}$.
Op grond van c) geldt dat $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{D}$, waaruit met behulp van a) en b) volgt wat bewezen moest worden.

Rest ons nog te bewijzen dat $\mathfrak{D}$ een semiring is. Voor $A \in \mathfrak{D}$ definiëren we:
$\mathfrak{D}_A := \{B \in \mathfrak{D} \mid B \cap A \in \mathfrak{D},\ B \setminus A \in \mathfrak{D}\}$.

d1) $\mathcal{D}_A$ is een klasse.

d2) $B \in \mathcal{D}_A \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{D},\ A \setminus B \in \mathcal{D})$. Immers: $A \cup B = A \,\underline{\cup}\, (B \setminus A)$, $A \in \mathcal{D}$, $B \setminus A \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel dus $\underline{\cup}$-stabiel, dus $A \,\underline{\cup}\, (B \setminus A) \in \mathcal{D}$.
$A \setminus B = (A^* \cup B)^* = (A^* \,\underline{\cup}\, (B \cap A))^*$, $A \in \mathcal{D}$, dus $A^* \in \mathcal{D}$ (want $\mathcal{D}$ is $*$-stabiel) en $B \in \mathcal{D}_A$ dus $A \cap B \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ $\underline{\cup}$- en $*$-stabiel, dus $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

d3) $\mathcal{D}_A$ is $*$-stabiel. Zij $B \in \mathcal{D}_A$, dan $B^* \cap A = A \setminus B \in \mathcal{D}$ (m.b.v. d2)).
$B^* \setminus A = B^* \cap A^* = (A \cup B)^* \in \mathcal{D}$ (m.b.v. d2) en $*$-stabiliteit $\mathcal{D}$), dus $B^* \in \mathcal{D}_A$.

d4) $\mathcal{D}_A$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel. Zij $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_A$ en onderling disjunct, $B := \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$.
$B \cap A = \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)$. Daar $A_i \in \mathcal{D}_A$ geldt dat $A_i \cap A \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel, dus $\underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i) \in \mathcal{D}$. $\therefore$ $B \cap A \in \mathcal{D}$. Analoog $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
We kunnen nu concluderen dat $B \in \mathcal{D}_A$ en dus dat $\mathcal{D}_A$ $\sigma\underline{\cup}$-stabiel is.

d5) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$. Zij $B \in \mathcal{S}$; daar $A \in \mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$ een semiring, geldt dat $B \cap A \in \mathcal{S}$, dus $B \cap A \in \mathcal{D}$.
$B \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$, dus $B \setminus A \in \mathcal{S}_{\underline{\cup}}$, $\mathcal{S}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathcal{D}$ (want $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ dus $\mathcal{S}_{\underline{\cup}} \subseteq \mathcal{D}_{\underline{\cup}} = \mathcal{D}$ omdat $\mathcal{D}$ $\underline{\cup}$-stabiel is) dus $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
Voor $B \in \mathcal{S}$ geldt dus dat $B \cap A \in \mathcal{D}$ en $B \setminus A \in \mathcal{D}$ en daarom $B \in \mathcal{D}_A$, dus $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$.

d6) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}_A$. Als $A \in \mathcal{S}$ dan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$ (d5)) en m.b.v. d3) en d4) volgt dat $\mathcal{D}_A$ een klasse is, die aan de eigenschappen 1), 2) en 3) voldoet, $\mathcal{D}$ is de kleinste klasse die hieraan voldoet dus $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_A$, uiteraard is $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}$, dus $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

d7) $\forall_{A \in \mathcal{D}} : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$.
Als $A \in \mathcal{S}$ en $B \in \mathcal{D}$ dan $B \in \mathcal{D}_A$ (zie d6)), dus ook:
Als $B \in \mathcal{S}$ en $A \in \mathcal{D}$ dan $A \in \mathcal{D}_B$.
$A \in \mathcal{D}_B \Rightarrow B \in \mathcal{D}_A$ (want $A \in \mathcal{D}_B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$ en m.b.v. d2) geldt dat $B \setminus A \in \mathcal{D}$ dus $B \in \mathcal{D}_A$). $\therefore$ $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$.

d8) $\forall_{A \in \mathcal{D}} : \mathcal{D} = \mathcal{D}_A$. Als $A \in \mathcal{D}$ dan volgt met behulp van d7) dat $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_A$, waaruit we (analoog aan d6)) kunnen concluderen dat $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

d9) $\mathcal{D}$ is een semiring. Uit d8) volgt dat: $\forall_{A \in \mathcal{D}} : \mathcal{D} = \{B \in \mathcal{D} \mid B \cap A \in \mathcal{D},\ B \setminus A \in \mathcal{D}\}$, zodat $\forall_{A,B \in \mathcal{D}} : B \cap A \in \mathcal{D},\ B \setminus A \in \mathcal{D}$.
Derhalve is $\mathcal{D}$ een semiring. $\square$

We definiëren nu een uitbreiding van $\mathbb{R}$: $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ zodanig dat $\forall_{a\in\mathbb{R}}: -\infty < a < \infty$ en met de volgende rekenregels:

$$\begin{array}{ll} a + \infty := \infty & (a \in \mathbb{R}) \\ \infty + a := \infty & (a \in \mathbb{R}) \\ a - \infty := -\infty & (a \in \mathbb{R}) \\ \infty - a := \infty & (a \in \mathbb{R}) \\ a \times \infty := \infty \text{ voor } a > 0 & (a \in \mathbb{R}) \\ a \times \infty := -\infty \text{ voor } a < 0 & (a \in \mathbb{R}) \\ 0 \times \infty := 0 & \end{array}$$

(let op: $\infty - \infty$ is niet gedefinieerd).
In $\bar{\mathbb{R}}$ geldt niet dat: $a - b = a - c \Rightarrow b = c$ want a kan ∞ zijn.

Als $a_i \geq 0$, dan geldt

1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heeft altijd betekenis,

2) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ als $\exists_{i\in\mathbb{N}}: a_i = \infty$,

3) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ als de reeks divergeert ($a_i \in \mathbb{R}$),

4) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ als de reeks convergeert ($a_i \in \mathbb{R}$). (1.3.9)

Opgave.

1. Als $a_{ij} \geq 0$ bewijs dan dat $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$.

Voorbeeld.

Breiden we voorbeeld 2 uit (1.2.2) uit, door voor $U = \bar{\mathbb{R}}$ te nemen en $\mathcal{S} := \{\emptyset\} \cup \{(a,b] \mid a,b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b\}$, dan noemen we $\mathcal{F}(\mathcal{S}) =: \bar{\mathcal{B}}$ de uitgebreide Borelverzamelingen.

$$\{-\infty\} \in \bar{\mathcal{B}} \quad \text{want } \{-\infty\} = \bar{\mathbb{R}} \setminus (-\infty,\infty]$$

$$\{\infty\} \in \bar{\mathcal{B}} \quad \text{want } \{\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (n,\infty]$$

$$\mathbb{R} \in \bar{\mathcal{B}} \quad \text{want } \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty,\infty\} .$$

Opgave.

2. Laat zien dat $\bar{\mathcal{B}}$ bestaat uit: B, $B \cup \{\infty\}$, $B \cup \{-\infty\}$, $B \cup \{-\infty,\infty\}$ $(B \in \mathcal{B})$.

1.4. Maten.

Definitie.

Zij $\mathcal{C}$ een klasse, dan is een maat op $\mathcal{C}$ een afbeelding

$$\mu\colon \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$$

die voldoet aan:

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

2) $(A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, onderling disjunct, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}) \Rightarrow (\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i))$.

(1.4.1)

Eigenschap 2) van een maat zullen we de σ-additiviteit noemen.
σ-additiviteit impliceert dat $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, deze eigenschap noemen we additiviteit, en een functie die deze eigenschap bezit een additieve functie.

Eigenschappen.

Zij $\mathcal{R}$ een ring en μ een maat op $\mathcal{R}$.

1) Als $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$ en $A \subseteq B$ dan $\mu(A) \overset{\leq}{\cancel{\leq}} \mu(B)$. $\leq$

Bewijs. $B = A \cup (B \setminus A)$, $B \setminus A \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ring), dus $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ en daar μ een afbeelding is in $\bar{\mathbb{R}}_+$ is $\mu(B) \geq \mu(A)$. □

(1.4.2)

2) Als $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ en $\overset{A:=}{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{R}$, dan $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Bewijs. Definieer $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j)$, $i = 2,3,\ldots$, dan $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.
$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (immers $B_i \subseteq A_i$, $B_i \in \mathcal{R}$, (1.4.2)). □

(1.4.3)

3) Als $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$, $A_i \in \mathcal{R}$, en $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, dan is $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) =$
$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Bewijs. Definieer $B_1 = A_1$ en $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, $i = 2,3,\dots$ dan zijn de B_i's onderling disjunct en daar $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, geldt dat

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\sum_{j=1}^{n} B_j) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) .$$
□

(1.4.4)

$\bigcap A_i \in \mathcal{R},$

4) Als $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, $A_i \in \mathcal{R}$, en $\exists_i : \mu(A_i) < \infty$, dan $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) =$
$= \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

$(1-\frac{1}{n}, 1]$

Bewijs. Zelf. (1.4.5)

Opmerkingen.

1. ad 1). In het algemeen geldt niet dat $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, want $\mu(A)$ kan ∞ zijn. Als $\mu(A)$ eindig is, geldt de genoemde gelijkheid echter wel. (1.4.6)
2. ad 4). De eis $\exists_{i\in\mathbb{N}} : \mu(A_i) < \infty$ is noodzakelijk want als voor alle A_i's $\mu(A_i) = \infty$ en $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ dan geldt (1.4.5) zeker niet. (1.4.7)

We willen nu een maat μ, welke gedefinieerd is op een semiring $\mathcal{S}$, uitbreiden tot een maat op $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Allereerst zullen we μ uitbreiden tot $\mathcal{S}_\sigma$.

Stelling.

Zij $\mathcal{S}$ een semiring en μ een maat op $\mathcal{S}$. Als $A \in \mathcal{S}_\sigma$ dan is A te schrijven als $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ met $A_i \in \mathcal{S}$. We definiëren: $\bar{\mu}(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ voor $A \in \mathcal{S}_\sigma$ dan is $\bar{\mu}: \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{R}_+$ welgedefinieerd en een maat op $\mathcal{S}_\sigma$. (1.4.8)

Bewijs.

i) Dat $A = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} A_i$, $A_i \in \mathfrak{I}$, is reeds bewezen bij (1.3.4).

ii) Zij $\underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} A_i = \underset{j=1}{\overset{\infty}{\cup}} B_j = B$, dan is $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$, immers zij

$P_{ij} := A_i \cap B_j$, dan is $A_i = \underset{j=1}{\overset{\infty}{\cup}} P_{ij}$, $B_j = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} P_{ij}$ en $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{ij}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_{ij}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$.

iii) Zij $B_i \in \mathfrak{I}_\sigma$, onderling disjunct. $B_i = \underset{j=1}{\overset{\infty}{\cup}} P_{ij}$, $i = 1,2,\dots$, $P_{ij} \in \mathfrak{I}$ en

$\underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} B_i = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} \underset{j=1}{\overset{\infty}{\cup}} P_{ij}$ en dus $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_{ij}) = \bar{\mu}(\underset{i=1}{\overset{\infty}{\cup}} B_i)$. □

Eigenschap.

$\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ voor $A \in \mathfrak{I}$. Immers, $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, dus $\bar{\mu}(A) = \mu(A) +$ $+ \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots$. (1.4.9)

Gevolg.

De eigenschappen voor maten op ringen (1.4.2 e.v.) gelden ook voor semiringen, want een maat gedefinieerd op een semiring $\mathfrak{I}$ kan worden voortgezet tot $\mathfrak{I}_\sigma \supseteq \mathfrak{I}_{\cup} = \mathcal{R}(\mathfrak{I})$. (1.4.10)

Definitie.

Zij U een topologische ruimte en $\mathfrak{I}$ een semiring op U. Een functie $\mu: \mathfrak{I} \to \mathbb{R}_+$ met $\mu(\emptyset) = 0$ heet <u>regulier</u> als:

$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{A\in\mathfrak{I}} \exists_{E,G\in\mathfrak{I}} : (\bar{E}$ compact, $\bar{E} \subseteq A \subseteq \mathrm{int}(G)$, $\mu(G) - \mu(E) \leq \varepsilon)$ (int G := := inwendige van G, $\bar{E}$ is de afsluiting van E). (1.4.11)

Opmerking.

Zoals we een maat, gedefinieerd op een semiring $\mathfrak{I}$, tot een maat op $\mathfrak{I}_\sigma$ hebben uitgebreid, kunnen we ook een reguliere, additieve functie gedefinieerd op een semiring $\mathfrak{I}$ uitbreiden tot een reguliere additieve functie op $\mathfrak{I}_{\cup}$, nl.

$$\mu(\underset{i=1}{\overset{n}{\cup}} A_i) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \qquad (A_i \in \mathfrak{I}) \ . \tag{1.4.12}$$

Lemma.

Zij μ een reguliere, additieve functie op een semiring $\mathfrak{I}$; $A,B \in \mathfrak{I}_{\underline{\cup}}$, en $A \subseteq B$. Dan geldt: $\mu(A) \le \mu(B)$ als μ conform (1.4.12) is uitgebreid tot $\mathfrak{I}_{\underline{\cup}}$. (1.4.13)

Bewijs. $B = A \mathbin{\underline{\cup}} (B \setminus A)$ en dus $\mu(B) = \mu(A \mathbin{\underline{\cup}} (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A)$. □

Stelling.

Een reguliere additieve functie $\mu\colon \mathfrak{I} \to \mathbb{R}_+$ met $\mu(\emptyset) = 0$ is een maat. (1.4.14)

Bewijs. Breidt μ uit tot $\mathfrak{I}_{\underline{\cup}}$ (zie (1.4.12)).

Laat $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{I}$ met $A = \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{I}$. Dan geldt volgens (1.4.13)

$$\mu\Big(\underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \ge \mu\Big(\underline{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \qquad \text{voor elke } n$$

en dus ook

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\ .$$

Kies nu $E \in \mathfrak{I}$ met $\bar{E}$ compact zodat $\mu(A \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$ (dit kan want μ is regulier, dus er is een $E \in \mathfrak{I}$, $G \in \mathfrak{I}$, zodanig dat $\bar{E}$ compact, $\bar{E} \subseteq A \subseteq \mathrm{int}(G)$ en $\mu(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$, en $\mu(A \setminus E) \le \mu(G \setminus E)$ volgens (1.4.13)).

Voor iedere verzameling A_i is er een verzameling $E_i \in \mathfrak{I}$ en $G_i \in \mathfrak{I}$ zodanig dat $\bar{E}_i \subseteq A_i \subseteq \mathrm{int}(G_i)$, $\mu(G_i \setminus E_i) \le \varepsilon$ en daar $\mu(G_i \setminus A_i) \le \mu(G_i \setminus E_i)$ (μ is additief) kunnen we voor elke i een verzameling $G_i \in \mathfrak{I}$ kiezen zodanig dat $A_i \subseteq \mathrm{int}(G_i)$ en $\mu(G_i \setminus A_i) \le \varepsilon\, 2^{-i-1}$. De verzamelingen $\mathrm{int}(G_i)$ vormen een overdekking van A en dus van $\bar{E}$. Daar $\bar{E}$ compact is, bestaat er een getal n zodanig dat $\bigcup_{i=1}^{n} G_i \supseteq \bar{E}$. Dus

$$\mu(A) \le \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon\ .$$

Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt hieruit het gestelde. □

Enige voorbeelden van maten.

1. Beschouw voorbeeld (1.1.3), dan geldt dat $\mu(A)$:= aantal elementen van A ($A \in \mathfrak{I}$) een maat is (ga na).

2. Zij $\varphi: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en voor $\emptyset \neq A \subseteq U$

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & \text{als A overaftelbaar is} \\ \sum\limits_{u \in A} \varphi(u) & \text{als A aftelbaar is} \end{cases}$$

$$\mu(\emptyset) := 0 \ ,$$

dan is μ een maat op $P(U)$ (ga na).
Als we voor $U = \mathbb{N}$ nemen en voor $\varphi(i) = p_i$ dan $\mu(A) = \sum\limits_{i \in A} p_i$.

3. Beschouwen we voorbeeld (1.2.2) en definiëren we: $\mu(\emptyset) := 0$, $\mu((a,b]) := b - a$, dan is μ een maat, de zgn. Lebesgue-maat (dit volgt uit (1.4.16) met $F(x) = x$). (1.4.15)

4. Laat F een monotoon niet dalende, rechts continue functie zijn van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dan definiëren we op $\mathfrak{I}$ van voorbeeld 2 uit (1.2.2) de maat μ_F door:
$\mu_F(\emptyset) := 0$,
$\mu_F((a,b]) := F(b) - F(a)$,
μ_F heet de Stieltjes-Lebesgue-maat. (1.4.16)

μ_F is regulier op $\mathfrak{I}$ (want als $A = (a,b]$ kies dan voor E in (1.4.11) $(a+\delta,b]$ en voor G: $(a,b+\delta]$. Dan is $\mu_F(G \setminus E) = F(b+\delta) - F(b) + F(a+\delta) + - F(a) < \varepsilon$, als δ klein is, vanwege de rechtscontinuïteit van F) en additief dus volgens (1.4.14) een maat.

5. Beschouwen we voorbeeld 3 uit (1.2.2) dan kunnen we op $\mathfrak{I}_n$ een maat μ definiëren door:

$$\mu((a,b]) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ . \qquad (1.4.17)$$

(Het is niet moeilijk om na te gaan dat μ regulier is.)

Nu breiden we μ uit van een maat op $\mathfrak{I}_\sigma$ tot een maat op $\mathcal{F}(\mathfrak{I})$.

Definitie.

Als $Q \subseteq U$, $\mathfrak{T} \subseteq U$, $\mathfrak{T}$ semiring met maat μ, dan definiëren we:

$$\mu^*(Q) := \inf\{\bar{\mu}(A) \mid A \in \mathfrak{T}_\sigma,\ Q \subseteq A\}$$

(N.B. $\inf \emptyset = \infty$). (1.4.18)

μ^* heet de uitwendige maat van μ.
μ^* is geen maat op $P(U)$, want μ^* is niet additief voor willekeurige Q (ga dit bv. na bij $U := \mathbb{R}$, $\mathfrak{T} := \{\emptyset, (0,\frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$).

Eigenschappen.

1) $\mu^*(Q) = \bar{\mu}(Q)$ als $Q \in \mathfrak{T}_\sigma$, in het bijzonder $\mu^*(\emptyset) = 0$. (1.4.19)

2) $\mu^*(Q) \geq 0 \quad (Q \subseteq U)$. (1.4.20)

3) $Q \subseteq P \subseteq U \Longrightarrow \mu^*(Q) \leq \mu^*(P)$. (1.4.21)

4) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) \quad (Q_n \subseteq U,\ n \in \mathbb{N})$. (1.4.22)

Bewijs.
1), 2) en 3) zijn eenvoudig in te zien.
ad 4). Als $\exists_{n \in \mathbb{N}} : \mu^*(Q_n) = \infty$ dan is (1.4.22) triviaal. Neem nu $\mu^*(Q_n) < \infty$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{A_n \in \mathfrak{T}_\sigma} : (Q_n \subseteq A_n,\ \mu^*(Q_n) \geq \bar{\mu}(A_n) - \varepsilon\, 2^{-n})$;

dus $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n) \leq \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon$,

immers: $A_n \in \mathfrak{T}_\sigma$ dus $A_n = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} B_{nj}$, $B_{nj} \in \mathfrak{T}$,

$$\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} B_{nj})) = \bar{\mu}(\bigcup_{j,n=1}^{\infty} B_{nj}) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) .$$ □

Definitie.

$E \subseteq U$ heet μ^*-meetbaar als

$$\forall_{A \in \mathfrak{S}} : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) . \tag{1.4.23}$$

We geven de klasse van μ^*-meetbare verzamelingen aan met $\mathfrak{M}$.

Eigenschappen.

1) $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}$. (1.4.24)

2) $E \in \mathfrak{M} \Rightarrow \forall_{Q \subseteq U} : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \setminus E)$. (1.4.25)

Bewijs.

ad 1). $\mathfrak{S}$ is een semiring, dus als $E \in \mathfrak{S}$ dan ook $A \cap E \in \mathfrak{S}$, $A \setminus E \in \mathfrak{S}$, en daar μ^* op $\mathfrak{S}_\sigma$ een maat is volgt 1) hieruit.

ad 2). Uit eigenschap (1.4.22) volgt dat

$$\forall_{Q \subseteq U} \forall_{E \subseteq U} : \mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \setminus E) . \tag{1.4.26}$$

Zij nu $Q \in \mathfrak{S}_\sigma$, $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathfrak{S}$, $E \in \mathfrak{M}$, dan geldt:

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \setminus E) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap E)\right) +$$

$$+ \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus E)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \{\mu^*(A_i \cap E) + \mu^*(A_i \setminus E)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i) = \bar{\mu}(Q) ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van (1.4.22) en (1.4.19). Daar het rechterlid gelijk is aan het linkerlid moet overal het gelijkteken gelden, zodat

$$E \in \mathfrak{M} \Rightarrow \forall_{Q \in \mathfrak{S}_\sigma} : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \setminus E) . \tag{1.4.27}$$

Zij nu $Q \subseteq U$. Als $\mu^*(Q) = \infty$ dan is (1.4.25) evident met behulp van (1.4.26). Zij $\mu^*(Q) < \infty$, en $A \in \mathfrak{S}_\sigma$ zodanig dat $Q \subseteq A$ en $\mu^*(Q) \geq \bar{\mu}(A) - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Nu geldt als $E \in \mathfrak{M}$:

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(A) - \varepsilon = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) - \varepsilon \geq$$
$$\geq \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \setminus E) - \varepsilon \geq \mu^*(Q) - \varepsilon$$

met behulp van (1.4.27), (1.4.21) en (1.4.26).
Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig was, geldt overal het gelijkteken met $\varepsilon = 0$ waaruit (1.4.25) direkt volgt. □

Stelling.

$\mathfrak{M}$ is een σ-algebra, $\mathfrak{F}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{M}$, μ^* is een maat op $\mathfrak{M}$. (1.4.28)

Bewijs.

i) $\mathfrak{M}$ is $\cup$-stabiel. Zij $E,F \in \mathfrak{M}$, $Q \subseteq U$.

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap (E \cup F)) + \mu^*(Q \cap (E \cup F)^*) \leq$$
$$\leq \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \cap E^* \cap F) + \mu^*(Q \cap E^* \cap F^*) =$$
$$= \mu^*(Q \cap E) + \mu^*(Q \cap E^*) = \mu^*(Q)$$

met behulp van (1.4.26), (1.4.22), $Q \cap (E \cup F) = (Q \cap E) \,\underline{\cup}\, (Q \cap F \cap E^*)$ en (1.4.25).
Overal geldt het gelijkteken waaruit direkt de $\cup$-stabiliteit van $\mathfrak{M}$ volgt.

ii) $\mathfrak{M}$ is $*$-stabiel (triviaal).

iii) Voor $P \subseteq U$, $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$ volgt dat

$$\mu^*(P \cap (A_1 \,\underline{\cup}\, A_2)) = \mu^*(P \cap A_1) + \mu^*(P \cap A_2) .$$

Dit volgt uit (1.4.25) met $Q = P \cap (A_1 \,\underline{\cup}\, A_2)$ en $E = A_1$.

iv) $$\mu^*(P \cap (A_1 \,\underline{\cup}\, A_2 \,\underline{\cup} \dots \underline{\cup}\, A_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(P \cap A_i) .$$

Dit volgt uit iii) met volledige inductie.

v) Zij nu $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ en onderling disjunct; $A = \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$. Dan geldt:
$A \in \mathfrak{M}$ en $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Immers daar $\underline{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}$ (zie 1.4.28i) geldt voor alle n en voor willekeurige $P \subseteq U$ dat:

$$\mu^*(P) = \mu^*(P \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) + \mu^*(P \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^*) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(P \cap A_i) + \mu^*(P \cap A^*)$$

waarbij gebruik gemaakt is van (1.4.25), (1.4.28iv) en (1.4.21).
Dus ook

$$\mu^*(P) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(P \cap A_i) + \mu^*(P \cap A^*) \geq$$

$$\geq \mu^*(P \cap A) + \mu^*(P \cap A^*) \geq \mu^*(P)$$

wat volgt met behulp van (1.4.22) en (1.4.26).
Het linkerlid en het rechterlid van laatstgenoemde ongelijkheid zijn hetzelfde, derhalve geldt overal het gelijkteken waaruit volgt dat $A \in \mathfrak{M}$ en (vul voor P A in) $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
Uit (ii) en (v) volgt dat $\mathfrak{M}$ een σ-algebra is en μ^* een maat op $\mathfrak{M}$ en op grond van (1.4.24) dat $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}$, derhalve is $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{M}$. □

Opmerkingen.

1. In het algemeen is $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \neq \mathfrak{M}$.
2. Als $A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ definiëren we $\mu(A) := \mu^*(A)$. μ is een maat op $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$. (1.4.29)

Definities.

Zij $\mathfrak{F}$ een σ-algebra op een verzameling U dan heet het paar $(U,\mathfrak{F})$ een <u>meetruimte</u>. (1.4.30)

Zij $\mathfrak{F}$ een σ-algebra op een verzameling U en μ een maat op $\mathfrak{F}$ dan heet het tripel $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een <u>maatruimte</u>. Als $A \in \mathfrak{F}$ dan heet A <u>$\mathfrak{F}$-meetbaar</u>. (1.4.31)

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte dan heet A een <u>nulverzameling</u> als:

$$\exists_{B \in \mathfrak{F}} : (A \subseteq B,\ \mu(B) = 0)\ . \qquad (1.4.32)$$

Een maatruimte $(U,\mathfrak{F},\mu)$ heet <u>volledig</u> als elke nulverzameling in $\mathfrak{F}$ ligt. (1.4.33)

Stelling.

Zij $\mathfrak{S}$ een semiring en $\mathfrak{M}$ gedefinieerd als in (1.4.23) dan geldt dat $(U,\mathfrak{M},\mu^*)$ een volledige maatruimte is. (1.4.34)

Bewijs. Uit (1.4.28) weten we dat $(U,\mathfrak{M},\mu^*)$ een maatruimte is. Zij A een nulverzameling en $B \in \mathfrak{M}$ zodanig dat $\mu^*(B) = 0$ en $A \subseteq B$. Als $Q \subseteq U$ geldt dat $Q \cap A \subseteq B$ en m.b.v. (1.4.21) dat $\mu^*(Q \cap A) = 0$. Dus $\mu^*(Q) \le \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) = \mu^*(Q \setminus A) \le \mu^*(Q)$, zodat overal gelijktekens gelden en dus $A \in \mathfrak{M}$. □

Opmerking.

In het algemeen is $(U,\mathfrak{F}(\mathfrak{S}),\mu)$ niet volledig.

Definities. σ-finite maatruimte

Een maat μ gedefinieerd op een semiring $\mathfrak{S}$ heet σ-finiet (of: σ-eindig) als er onderling disjuncte verzamelingen $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$ bestaan zodanig dat $\mu(A_i) < \infty$ en $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. (1.4.35)

Een maat μ heet eindig als $U \in \mathfrak{S}$ en $\mu(U) < \infty$. (1.4.36)

Voorbeelden.

1. De Lebesgue-maat (zie (1.4.15)) is σ-finiet, immers $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n,n+1]$.

2. De in (1.4.17) gedefinieerd maat μ is σ-finiet, immers $\mathbb{R}^n$ is de vereniging van disjuncte cellen (ga na). (1.4.37)

Stelling.

Zij $\mathfrak{S}$ een semiring op een verzameling U en μ een σ-finiete maat op $\mathfrak{S}$ dan is er precies één uitbreiding van μ tot een maat op $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$. (1.4.38)

Bewijs. Uit (1.4.29) weten we dat er minstens één uitbreiding van μ tot een maat op $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ bestaat. Stel μ_1 en μ_2 zijn uitbreidingen van μ tot $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$.

I. Als μ eindig is dan $\mathfrak{C} := \{A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Er geldt:

a) $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}$ (triviaal).

b) $\mathcal{C}$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel, immers zij $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, onderling disjunct en

$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ dan geldt: $\mu_1(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(A_i) = \mu_2(A)$.

c) $\mathcal{C}$ is $\star$-stabiel, immers zij $A \in \mathcal{C}$ dan geldt dat $A^\star \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ en $\mu_1(A^\star) =$ $= \mu_1(U \setminus A) = \underbrace{\mu_1(U) - \mu_1(A) = \mu_2(U)}_{U \in C\ ?} - \mu_2(A) = \mu_2(A^\star)$ volgens (1.4.6) en (1.4.36).

M.b.v. (1.3.8) en de definitie van $\mathcal{C}$ geldt nu $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$.

II. Zij μ niet noodzakelijkerwijs eindig, maar wel σ-finiet, dan geldt:

$\exists_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}} : (U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \mu(A_i) < \infty)$. Zij $E \in \mathcal{S}$ en $\mu(E) < \infty$ dan

$\mathcal{C}_E := \{A \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \mid \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}$. Er geldt:

a) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}_E$ (triviaal).

b) $\mathcal{C}_E$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel (analoog aan Ib).

c) $\mathcal{C}_E$ is $\star$-stabiel, immers zij $A \in \mathcal{C}_E$ dan geldt dat $A^\star \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ en $\mu_1(A^\star \cap E) = \mu_1(E \setminus (E \cap A)) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap A) = \mu_2(A^\star \cap E)$ volgens (1.4.6).

mit $\mu(E) < \infty$)

M.b.v. (1.3.8) en de definitie van $\mathcal{C}_E$ geldt nu $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}_E$ en dus

$\forall_{A \in \mathcal{F}(\mathcal{S})} \forall_{E \in \mathcal{F}(\mathcal{S})} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$. E

Als $A \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ geldt in het bijzonder $\forall_{i \in \mathbb{N}} : \mu_1(A \cap A_i) = \mu_2(A \cap A_i)$ en dus

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu_1(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A \cap A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(A \cap A_i) = \mu_2(A).$$

Merk op dat bewijs II een uitbreiding is van bewijs I. □

<u>Opmerkingen</u>.

1. In het algemeen is de uitbreiding van een maat op een semiring $\mathcal{S}$ tot een maat op $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ niet éénduidig:

   Zij bv. U een willekeurige, niet lege verzameling, $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$ en $\mu(\emptyset) = 0$. Dan is

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \{\emptyset, U\} \quad \text{en} \quad \mu^* := \begin{cases} \mu^*(\emptyset) = 0 \\ \mu^*(U) \text{ willekeurig } \geq 0 \end{cases}$$

een niet éénduidige uitbreiding van μ tot $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. (1.4.39)

2. Als $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte is en $(U,\mathcal{F}^*,\mu^*)$ een volledige maatruimte waarvoor geldt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ (zo'n $\mathcal{F}^*$ bestaat volgens (1.4.34)) dan geldt

$$A \in \mathcal{F}^* \iff \exists_{E,F\in\mathcal{F}} : (E \subseteq A \subseteq F,\ \mu(E) = \mu(F)) \ . \tag{1.4.40}$$

(We gaan hier verder niet op in.)

Voorbeeld.

Beschouw voorbeeld 2 uit (1.2.2) met de in (1.4.15) gedefinieerde Lebesgue-maat μ. Volgens (1.4.37) en (1.4.38) is μ éénduidig uit te breiden tot een maat λ op $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$.

a) Zij $a \in \mathbb{R}$ en $A_n := (a-\frac{1}{n}, a]$ dan $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ en $\mu(A_n) = \frac{1}{n}$.
   Volgens (1.4.5) geldt $\lambda(\{a\}) = \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
b) Uit a) volgt dat voor iedere eindige deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt $\lambda(A) = 0$.
c) Als A een aftelbare deelverzameling is volgt uit a) met behulp van (1.4.1) dat $\lambda(A) = 0$. In het bijzonder geldt dus $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
d) $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ is niet volledig.
   De Cantorverzameling C (zie Algebra en Analyse 5.10.19) is overaftelbaar en er geldt $\lambda(C) = 0$. De machtigheid van $P(C) = 2^{\text{machtigheid van } C} = 2^{\text{machtigheid van } \mathbb{R}} >$ machtigheid $\mathbb{R}$ = machtigheid van $\mathcal{B}$. Er is dus een nulverzameling $D \subseteq C$ waarvoor geldt $D \notin \mathcal{B}$.
e) We kunnen $\mathcal{B}$ als in (1.4.40) uitbreiden tot $\mathcal{B}^*$.
   Als $A \in \mathcal{B}^*$ dan heet A Lebesgue-meetbaar.
   Er geldt $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^* \subset P(\mathbb{R})$.

1.5. Meetbare functies

Definitie.

$(U_1,\mathcal{F}_1)$ en $(U_2,\mathcal{F}_2)$ zijn maatruimten.
Een afbeelding $f\colon U_1 \to U_2$ heet $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$-meetbaar als $\forall_{P\in\mathcal{F}_2}: f^{\leftarrow}(P) \in \mathcal{F}_1$.
(1.5.1)

Stelling.

$(U_1,\mathcal{F}_1)$ en $(U_2,\mathcal{F}_2)$ zijn maatruimten, $f\colon U_1 \to U_2$, $\mathcal{C}$ een klasse op U_2 en $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$.
Als $\forall_{P\in\mathcal{C}}: f^{\leftarrow}(P) \in \mathcal{F}_1$ dan is f $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$-meetbaar. (1.5.2)

Bewijs. $\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{F}_2 \mid f^{\leftarrow}(P) \in \mathcal{F}_1\}$.
Dan is eenvoudig te verifiëren dat $\mathcal{D}$ een σ-algebra is die $\mathcal{C}$ omvat zodat $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$. M.b.v. de definitie van $\mathcal{D}$ volgt dan $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$. □

Voorbeeld.

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is $(\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m)$-meetbaar als $\forall_{A\in\mathcal{B}_m}: f^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{B}_n$. f heet dan Borel-meetbaar. Daar $\mathcal{B}_m = \mathcal{F}(\mathcal{O}_m)$ (zie (1.3.7)) volgt met (1.5.2) dat $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Borelmeetbaar is als $\forall_{A\in\mathcal{O}_m}: f^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{B}_n$. (1.5.3)

Gevolg.

Elke continue functie van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ is Borelmeetbaar (zie Algebra en Analyse 5.7.1). (1.5.4)

Stelling.

Zij $(U_1,\mathcal{F}_1)$, $(U_2,\mathcal{F}_2)$ en $(U_3,\mathcal{F}_3)$ meetruimten.
Zij $f\colon U_1 \to U_2$ $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$-meetbaar en zij $g\colon U_2 \to U_3$ $(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)$-meetbaar, dan geldt: $g\circ f\colon U_1 \to U_3$ is $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_3)$-meetbaar. (1.5.5)

$((g\circ f)(u) := g(f(u)))$.

Bewijs. Als $A \in \mathcal{F}_3$ dan geldt $g^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{F}_2$, dus $(g\circ f)^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(A)) \in \mathcal{F}_1$. □

Opmerkingen.

1. Zij $(U,\mathfrak{F})$ een meetruimte. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ is eveneens een maatruimte. Functies $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ die $(\mathfrak{F},\mathcal{B}_m)$-meetbaar zijn noemen we voortaan $\mathfrak{F}$-meetbaar.
2. Een functie die $\mathcal{B}_n^*$-meetbaar is noemen we Lebesgue-meetbaar (zie blz. 21). (1.5.6)

Notatie.

Zij $P(u)$ een predicaat (zie Algebra en Analyse 1.13.1), dan:

$$\{P\} := \{u \mid P(u)\} . \tag{1.5.7}$$

Voorbeelden.

Als f en g functies van U in $\mathbb{R}$ zijn en $a \in \mathbb{R}$ dan

$$\begin{aligned} \{f = a\} &= \{u \mid f(u) = a\} \\ \{f = g\} &= \{u \mid f(u) = g(u)\} \\ \{f \le a\} &= \{u \mid f(u) \le a\} . \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F})$ een meetruimte en $f\colon U \to \mathbb{R}$ dan geldt:

$$f \text{ is } \mathfrak{F}\text{-meetbaar} \iff \forall_{a\in\mathbb{R}} : \{f \le a\} \text{ is een } \mathfrak{F}\text{-meetbare verzameling.} \tag{1.5.9}$$

Bewijs. Zij $\mathcal{C} := \{\emptyset\} \cup \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ en $\mathcal{Y} := \{\emptyset\} \cup \{(a,b] \mid a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R}\}$, dan geldt $\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, immers:

$(a,b] = (-\infty,b] \setminus (-\infty,a] \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$, dus $\mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{C})$ en dus $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{C})$. Bovendien geldt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}$, dus $\mathfrak{F}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

"$\Leftarrow$": Volgens bovenstaande en (1.5.2) hoeven we alleen aan te tonen: $A \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{\leftarrow}(A) \in \mathfrak{F}$. Indien $A = \emptyset$ is dit triviaal. Indien $A \ne \emptyset$ geldt $A = (-\infty,a]$ en dan dus $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}((-\infty,a]) = \{f \le a\} \in \mathfrak{F}$.

"$\Rightarrow$": $\{f \le a\} = f^{\leftarrow}((-\infty,a]) \in \mathfrak{F}$ want $(-\infty,a] \in \mathcal{B}$. □

Opmerking.

In plaats van $\{f \le a\}$ mogen we in bovenstaande stelling ook nemen $\{f \ge a\}$, $\{f > a\}$ of $\{f < a\}$. (1.5.10)

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F})$ een meetruimte en $f\colon U \to \mathbb{R}$, dan geldt:

f is $\mathfrak{F}$-meetbaar $\Leftrightarrow$ elke componentfunctie is $\mathfrak{F}$-meetbaar. (1.5.11)

Bewijs.

"$\Rightarrow$": Zij f_i de i-de componentfunctie van f $(1 \le i \le m)$ en $\pi_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\pi_i(x_1,\dots,x_m) := x_i$, dan geldt $f_i = \pi_i \circ f$. π_i is een lineaire functie en dus continu. Volgens (1.5.4) is π_i dan Borelmeetbaar zodat volgens (1.5.5) $f_i = \pi_i \circ f$ $\mathfrak{F}$-meetbaar is.

"$\Leftarrow$": Volgens (1.3.7) en (1.5.2) is het voldoende aan te tonen dat $A \in \{\text{cellen}\} \Rightarrow f^{\leftarrow}(A) \in \mathfrak{F}$.
Zij $A := \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_i < x_i \le b_i,\ i = 1,\dots,m\}$ en $A_i := \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_i < x_i \le b_i\}$ $(i = 1,\dots,m)$ is $\mathfrak{B}_m$-meetbaar (ga na). Daar f_i $\mathfrak{F}$-meetbaar is volgt met (1.5.9) en (1.5.10) dat $f^{\leftarrow}(A_i) = \{a_i < f_i \le b_i\} = \{a_i < f_i\} \cap \{f_i \le b_i\}$ $\mathfrak{F}$-meetbaar is en dus $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) = \bigcap_{i=1}^{m} f^{\leftarrow}(A_i) \in \mathfrak{F}$, want $\mathfrak{F}$ is een σ-algebra en dus ∩-stabiel. □

Definitie.

Zij $f\colon U \to \mathbb{R}$, dan wordt $f^+\colon U \to \mathbb{R}^+$ en $f^-\colon U \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door:

$$f^+ := \max(f,0)$$
$$f^- := \max(-f,0)\ . \qquad (1.5.12)$$

Eigenschappen.

1. $f^+ + f^- = |f|$
2. $f^+ - f^- = f$. (1.5.13)

Stelling.

Als $f,g\colon U \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{F}$-meetbare functies zijn, dan zijn ook de volgende functies $\mathfrak{F}$-meetbaar:

$f + g$	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$ (als g niet nul is)
$\min(f,g)$	$\max(f,g)$	$\lvert f\rvert$
f^+	f^-	

(1.5.14)

Bewijs. Zij $G: U \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $G(u) := (f(u),g(u))$. Daar de componenten van G $\mathcal{F}$-meetbaar zijn is volgens (1.5.11) ook G $\mathcal{F}$-meetbaar.
Zij $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x,y) := x + y$. Daar F lineair is, is F continu en volgens (1.5.4) dus ook $\mathcal{B}_2$-meetbaar.
$f + g = F \circ G$ en dus is volgens (1.5.5) $f + g$ $\mathcal{F}$-meetbaar.
Door F steeds geschikt te kiezen bewijst men analoog dat de andere functies $\mathcal{F}$-meetbaar zijn. □

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F})$ een meetruimte en $f: U \to \bar{\mathbb{R}}$, dan geldt:

f is $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar $\iff \forall_{a\in\bar{\mathbb{R}}}$: $\{f \le a\}$ is een $\mathcal{F}$-meetbare verzameling. (1.5.15)

Bewijs. Analoog aan het bewijs van (1.5.9). □

Stelling.

Zij $f: U \to \bar{\mathbb{R}}$ en $E := \{|f| < \infty\}$ dan is f $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar als:
1. $\{f = \infty\}$ en $\{f = -\infty\}$ $\mathcal{F}$-meetbaar zijn en
2. $f/_E: E \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{F}_E$-meetbaar. (1.5.16)

($\mathcal{F}_E := \{A \in \mathcal{F} \mid A \subseteq E\}$.)

Bewijs. Zelf! (ga na dat $\mathcal{F}_E$ een σ-algebra is op E; gebruik opgave 2).

Stelling.

Zij voor $n = 1,2,\ldots$ $f_n: U \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar dan zijn ook de volgende functies $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar:

$$\begin{array}{ll} \sup f_n & \overline{\lim}\, f_n \\ \inf f_n & \underline{\lim}\, f_n \ . \end{array} \qquad (1.5.17)$$

($\overline{\lim}\, f_n := \lim\sup f_n$; $\underline{\lim}\, f_n := \lim\inf f_n$.)

Bewijs. Volgens (1.5.15) is het voldoende aan te tonen dat $\forall_{a\in\bar{\mathbb{R}}}$: $\{\sup f_n \le a\} \in \mathcal{F}$ indien we willen bewijzen dat $\sup f_n$ $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar is.

$\{\sup f_n \le a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \le a\} \in \mathcal{F}$ want omdat f_n $(\mathcal{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar is, is volgens (1.5.15) $\{f_n \le a\}$ $\mathcal{F}$-meetbaar.
Met behulp van de volgende gelijkheden bewijst men de rest:

$$\inf f_n = -\sup(-f_n)\ ,\quad \overline{\lim}\, f_n = \inf_{n\in N}\sup_{m\geq n} f_m\ ,\quad \underline{\lim}\, f_n = -\overline{\lim}\,(-f_n)$$

(zie Algebra en Analyse 4.1.11 e.v.). □

Gevolg.

Als $\forall_{u\in U}$: $\lim_{n\to\infty} f_n$ bestaat, dan is $\lim_{n\to\infty} f_n$ een $(\mathfrak{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbare functie. (1.5.18)

Voorbeeld.

$\{f_n \to 0\}$ is eveneens $\mathfrak{F}$-meetbaar, immers:

$$\begin{aligned} u \in \{f_n \to 0\} &\iff \lim_{n\to\infty} f_n(u) = 0 \\ &\iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>n_0} : |f_n(u)| < \varepsilon \\ &\iff \forall_{k\in\mathbb{N}}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>n_0} : |f_n(u)| < \frac{1}{k} \\ &\iff u \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\ \bigcap_{n\geq n_0} \{|f_n| < \frac{1}{k}\}\ . \end{aligned}$$

Dus

$$\{f_n \to 0\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\ \bigcap_{n\geq n_0} \{|f_n| < \frac{1}{k}\} \in \mathfrak{F}\ ,$$

immers daar f_n $(\mathfrak{F},\bar{\mathcal{B}})$-meetbaar is, is volgens (1.5.15) $\{|f_n| < \frac{1}{k}\}$ $\mathfrak{F}$-meetbaar. (1.5.19)

Opgave.

3. $\{f_n$ convergent$\}$ is $\mathfrak{F}$-meetbaar.
   Aanwijzing: beschouw $\{f_n$ is een fundamentaalrij$\}$.

Definitie.

Zij $A \subseteq U$ dan wordt $\chi_A: U \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\chi_A(u) := \begin{cases} 1 & \text{als } u \in A \\ 0 & \text{als } u \notin A\ . \end{cases}$$

We noemen dit de indicatorfunctie van A. (1.5.20)

Stelling.

χ_A is $\mathfrak{F}$-meetbaar $\Longleftrightarrow A \in \mathfrak{F}$. (1.5.21)

Bewijs.

$$\{\chi_A \le a\} = \begin{cases} U & \text{als } a > 1 \\ A^* & \text{als } 0 \le a \le 1 \\ \emptyset & \text{als } a < 0 . \end{cases}$$

"$\Longrightarrow$": Als χ_A $\mathfrak{F}$-meetbaar is, geldt volgens (1.5.9): $\forall_{a\in\mathbb{R}} : \{\chi_A \le a\}$ is $\mathfrak{F}$-meetbaar. Neem a vast, $0 \le a \le 1$, dan geldt dus $A^* = \{\chi_A \le a\} \in \mathfrak{F}$ en dus $A = (A^*)^* \in \mathfrak{F}$.

"$\Longleftarrow$": Als $A \in \mathfrak{F}$ is $A^* \in \mathfrak{F}$. Maar ook $U \in \mathfrak{F}$ en $\emptyset \in \mathfrak{F}$ en dus geldt: $\forall_{a\in\mathbb{R}} : \{\chi_A \le a\} \in \mathfrak{F}$. Met (1.5.9) volgt dat χ_A $\mathfrak{F}$-meetbaar is. □

Eigenschappen.

1. $A \subseteq B \Longrightarrow \chi_A \le \chi_B$.

2. $\chi_{A\underline{\cup}B} = \chi_A + \chi_B$.

3. $\chi_{\underline{\cup}_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}$.

4. $\chi_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sup_i \chi_{A_i}$.

5. $\chi_{A^*} = 1 - \chi_A$.

6. $\chi_{\cap_{i=1}^{\infty} A_i} = \inf_i \chi_{A_i}$. (1.5.22)

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte, $(V,\mathfrak{G})$ een meetruimte, $f: U \to V$ $(\mathfrak{F},\mathfrak{G})$-meetbaar, dan induceert f een maat μ_f op $\mathfrak{G}$. (1.5.23)

Bewijs. Zij $A \in \mathfrak{G}$, definieer dan $\mu_f(A) := \mu(f^{\leftarrow}(A))$. (Dit kunnen we opschrijven omdat $A \in \mathfrak{G} \Longrightarrow f^{\leftarrow}(A) \in \mathfrak{F}$.) Er geldt $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{\leftarrow}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

Zij $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{G}$ en $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{G}$, dan geldt:

$$\mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{\leftarrow}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{\leftarrow}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i) \; . \quad \square$$

Opgave.

4. Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte, $(W,\mathfrak{P})$ en $(V,\mathfrak{G})$ meetruimten, $f: U \to W$ $(\mathfrak{F},\mathfrak{P})$-meetbaar, $g: W \to V$ $(\mathfrak{P},\mathfrak{G})$-meetbaar, dan geldt: $\mu_{g \circ f} = (\mu_f)_g$ is een maat op V.

1.6. Integratie.

Definitie.

Zij $(U,\mathfrak{F})$ een meetruimte.
Zij $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0$, $A_1,\ldots,A_n \subseteq U$, onderling disjunct en $\mathfrak{F}$-meetbaar, dan heet

$\varphi := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ een elementaire functie.

$\Phi := \{\varphi \mid \varphi \text{ is een elementaire functie}\}$.

$(A_1,\ldots,A_n)$ heet een representatie van φ. (1.6.1)

(Ga na dat een representatie van φ niet eenduidig is vastgelegd.)

We gaan nu onderzoeken hoe we voor twee elementaire functies eenzelfde representatie kunnen bepalen.

Zij $\varphi := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ en $\psi := \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$, $A_0 := U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$,
$B_0 := U \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_m)$, $D_{ij} := A_i \cap B_j$ $(0 \leq i \leq n;\ 0 \leq j \leq m)$, $\alpha_0 := 0$,
$\beta_0 := 0$, dan geldt:

$$A_i = A_i \cap U = A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^{m} B_j\right) = \bigcup_{j=0}^{m} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{j=0}^{m} D_{ij} \; .$$

Analoog: $B_j = \bigcup_{i=0}^{n} D_{ij}$. Dus:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{\bigcup\limits_{j=0}^{m} D_{ij}} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{j=0}^{m} \chi_{D_{ij}} = \sum_{i,j} \alpha_i \chi_{D_{ij}} .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van eigenschap 2 uit (1.5.22).

Analoog: $\psi = \sum\limits_{i,j} \beta_j \chi_{D_{ij}}$

φ en ψ hebben nu dezelfde representatie. (1.6.2)

Eigenschappen.

Zij $\varphi,\psi \in \Phi$, dan geldt:

1. $\varphi + \psi \in \Phi$.
2. $\varphi\psi \in \Phi$.
3. $\min(\varphi,\psi) \in \Phi$.
4. $\max(\varphi,\psi) \in \Phi$. (1.6.3)

(gebruik (1.6.2)).

Definitie.

Zij $\varphi \in \Phi$, $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ dan is de integraal van φ gelijk aan $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$.

(1.6.4)

Deze definitie is slechts zinvol als $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$ niet afhangt van de gekozen representatie van φ.

Stel $\varphi = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ en $\varphi = \sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(\bigcup_{j=0}^{m} D_{ij}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{j=0}^{m} \mu(D_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(D_{ij}) .$$

Analoog: $\sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \sum\limits_{i,j} \beta_j \mu(D_{ij})$.

Daar $D_{ij} \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_i = \beta_j$ volgt hieruit dat de integraal van φ onafhankelijk is van de gekozen representatie van φ. (1.6.5)

Notatie.

Integraal van φ: $L(\varphi)$ ōf $\int \varphi \, d\mu$ ōf $\int \varphi(u)\mu(du)$. (1.6.6)

Eigenschappen.

1. $L(\chi_A) = \mu(A)$.

2. $L(\varphi + \psi) = L(\varphi) + L(\psi)$.

3. $L(a\psi) = aL(\psi) \quad (a \geq 0)$.

4. $\varphi \leq \psi \Rightarrow L(\varphi) \leq L(\psi)$. (1.6.7)

(Om de eigenschappen 2 en 4 te bewijzen moet men overgaan op gelijke representaties van φ en ψ.)

Opmerkingen.

1. We nemen in het vervolg aan dat een representatie van een elementaire functie zoals deze in (1.6.1) is ingevoerd, een partitie van U is.

2. Voor $\int \varphi \chi_A \, d\mu$ schrijven we $\int_A \varphi \, d\mu \quad (A \in \mathcal{F})$. Merk op dat $L(\varphi) \geq 0$.

3. Als de rij $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puntsgewijs monotoon niet dalend is en naar ψ convergeert, dan geven we dit aan met: $\varphi_n \uparrow \psi$. (1.6.8)

Eigenschappen.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, Φ de verzameling van elementaire functies en $\varphi \in \Phi$, dan geldt:

1. $\int_{A \cup B} \varphi \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu + \int_B \varphi \, d\mu \qquad (A,B \in \mathcal{F})$. (1.6.9)

2. Als $A \subseteq B$ en $A,B \in \mathcal{F}$ dan is $\int_A \varphi \, d\mu \leq \int_B \varphi \, d\mu$. (1.6.10)

3. φ is $\mathcal{F}$-meetbaar
   [immers: $A_i \in \mathcal{F}$ dus (1.5.21) χ_{A_i} is $\mathcal{F}$-meetbaar en (m.b.v. (1.5.9)) ook $\alpha_i \chi_{A_i}$ en derhalve (1.5.14) $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$]. (1.6.11)

Stelling (monotone convergentiestelling van B. Levi).

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en Φ de verzameling van elementaire functies. Zij $\psi \in \Phi$ en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \Phi$ dan geldt:

$$\varphi_n \uparrow \psi \Rightarrow L(\varphi_n) \uparrow L(\psi) . \qquad (1.6.12)$$

Bewijs. Als $\psi \equiv 0$ dan $\varphi_n \equiv 0$ en dan is de stelling triviaal.
Veronderstel nu $\psi \not\equiv 0$. We definiëren nu

$$Q := \{\psi > 0\} \neq \emptyset ,$$

$$\alpha := \min_{u\in Q} \psi(u) \quad \text{[\textit{ga na dat dit minimum bestaat en} > 0 \textit{ is}]}$$

$$\beta := \max_{u\in Q} \psi(u) ,$$

$$\varepsilon \text{ zodanig dat } 0 < \varepsilon < \alpha ,$$

$$A_n := \{u \in Q \mid \varphi_n(u) \geq \psi(u) - \varepsilon\} ,$$

dan geldt:

1. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ [want φ_n monotoon].

2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = Q$ [want $\varphi_n \uparrow \psi$].

3. $A_n \in \mathcal{F}$, $Q \in \mathcal{F}$ [Zij $P := \{u \in U \mid \varphi_n(u) \geq \psi(u) - \varepsilon\}$, dan geldt ((1.6.11), (1.5.10)) dat $P = \{u \in U \mid \varphi_n(u) - \psi(u) \geq -\varepsilon\} \in \mathcal{F}$, $Q \in \mathcal{F}$, en dus $A_n = P \cap Q \in \mathcal{F}$].

Uit 1, 2 en 3 volgt m.b.v. (1.4.4) dat $\mu(A_n) \to \mu(Q)$. We onderscheiden nu:

a) $\mu(Q) = \infty$.
Met behulp van (1.6.7), (1.6.9) e.v. volgt:

$$\int \psi \, d\mu \geq \int_U \varphi_n \, d\mu \geq \int_{A_n} \varphi_n \, d\mu \geq \int_{A_n} (\psi - \varepsilon) d\mu =$$

$$= \int (\psi - \varepsilon)\chi_{A_n} \, d\mu \geq (\alpha - \varepsilon) \int \chi_{A_n} \, d\mu = (\alpha - \varepsilon)\mu(A_n) \qquad (n \to \infty) .$$

Daar $\mu(A_n) \to \mu(Q) = \infty$ kunnen we uit bovenstaande concluderen dat $\int \psi \, d\mu \geq \int \varphi_n \, d\mu \to \infty$ als $n \to \infty$ en dus $L(\varphi_n) \uparrow L(\psi)$.

b) $\mu(Q) < \infty$.

$$\int \psi\, d\mu \ge \int \varphi_n\, d\mu \ge \int_{A_n} \varphi_n\, d\mu \ge \int_{A_n} (\psi - \varepsilon) d\mu =$$

$$= \int_Q (\psi - \varepsilon) d\mu - \int_{Q \setminus A_n} (\psi - \varepsilon) d\mu \ge \int \psi\, d\mu - \varepsilon\, \mu(Q) - \beta\{\mu(Q) - \mu(A_n)\}\ .$$

[we mogen dit opschrijven want $\int_{Q\setminus A_n} (\psi - \varepsilon) d\mu \le \int_Q (\psi - \varepsilon) d\mu \le (\beta - \varepsilon)\mu(Q) < \infty$].

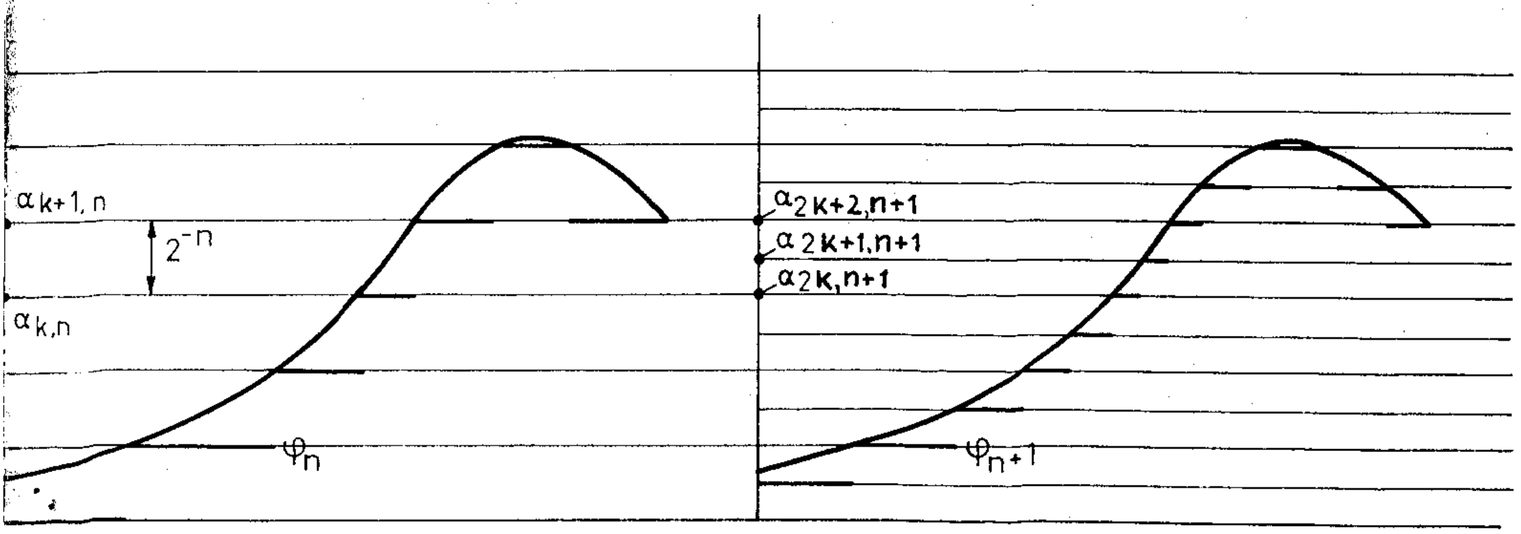
Daar $\mu(A_n) \to \mu(Q)$ als $n \to \infty$ geldt dat $\int \varphi_n\, d\mu \uparrow \int \psi\, d\mu \quad (n \to \infty)$. □

Als $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}^m$ $(\mathcal{B}_n, \bar{\mathcal{B}}_m)$-meetbaar is, noemen we f in het vervolg eveneens Borelmeetbaar.
Indien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dan stemt dit overeen met (1.5.3).
Functies $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}^m$ die $(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{B}}_m)$-meetbaar zijn noemen we in het vervolg eveneens $\mathcal{F}$-meetbaar.
Indien $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ dan stemt dit overeen met (1.5.6).
Analoog wordt het begrip Lebesgue-meetbaar gegeneraliseerd. (1.6.13)

1.7. Integralen van $\mathcal{F}$-meetbare functies.

Stelling.

Zij $(U, \mathcal{F}, \mu)$ een maatruimte, Φ de verzameling van elementaire functies en $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ een $\mathcal{F}$-meetbare functie. Dan bestaat er een monotoon niet dalende rij van functies uit Φ die puntsgewijs naar f convergeert. (1.7.1)



Bewijs. Laat $n \in \mathbb{N}$, n vast, dan definiëren we:

$$N_n := n \cdot 2^n ,$$

$$\alpha_{k,n} := k \cdot 2^{-n} , \qquad k = 0,1,2,\dots,N_n ,$$

$$A_{k,n} := \{\alpha_{k,n} \le f < \alpha_{k+1,n}\} , \qquad k = 0,1,2,\dots,N_n - 1 ,$$

$$A_{N_n,n} := \{f \ge \alpha_{N_n,n} = n\} ,$$

en er geldt:

$$(k \ne \ell) \Rightarrow (A_{k,n} \cap A_{\ell,n} = \emptyset) ,$$

$$A_{k,n} = A_{2k,n+1} \,\underline{\cup}\, A_{2k+1,n+1} \qquad (k < N_n) .$$

Als we nu $\varphi_n := \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{k,n} \chi_{A_{k,n}}$ stellen, dan is:

$\varphi_{n+1} \ge \varphi_n$ en

als $f < n$, dan is $f - \varphi_n \le 2^{-n}$.

Laat $u \in U$.

Als $f(u) < \infty$ dan is er een n zodanig dat $f(u) < n$ en $0 \le f(u) - \varphi_n(u) \le 2^{-n}$.

Als $f(u) = \infty$ dan geldt: $\forall_n$: $u \in A_{N_n,n}$ en $\varphi_n(u) = n$, dus $\varphi_n(u) \to \infty$ als $n \to \infty$.

Dus $\varphi_n \uparrow f$. □

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte, Φ de verzameling van elementaire functies en $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ een $\mathfrak{F}$-meetbare functie.

Als $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotoon niet dalende rijen functies zijn uit Φ die puntsgewijs naar f convergeren, dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} L(\varphi_n) = \lim_{m\to\infty} L(\psi_m) . \qquad (1.7.2)$$

Bewijs. Kies m vast. Als we ω_n definiëren door: $\omega_n := \min\{\varphi_n,\psi_m\}$, dan geldt:

a) $\omega_n \in \Phi$.

b) $\omega_n \uparrow \psi_m$.

a) en de monotonie van $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zijn vrij eenvoudig te verifiëren.
We onderscheiden nu 2 gevallen:

1. $u \in \{\psi_m = f\}$.
Daar $\varphi_n(u) \leq f(u)$ is $\omega_n(u) = \varphi_n(u)$ en $\varphi_n(u) \to f(u)$ dus $\omega_n(u) \to \psi_m(u)$.

2. $u \in \{\psi_m < f\}$.
Daar $\varphi_n \to f$ is op den duur $\varphi_n(u) > \psi_m(u)$ en dus $\omega_n(u) = \psi_m(u)$.

Daar $\psi_m \leq f$ volgt b) uit 1 en 2.

Met behulp van de stelling van Levi (1.6.12) kunnen we nu concluderen dat $L(\omega_n) \uparrow L(\psi_m)$ $(n \to \infty)$ en daar $\varphi_n \geq \omega_n$ geldt dat $L(\varphi_n) \geq L(\psi_m)$ $(n \to \infty)$.

Laat nu $m \to \infty$ dan is $\lim\limits_{n\to\infty} L(\varphi_n) \geq \lim\limits_{m\to\infty} L(\psi_m)$.

Door in het bewijs de rol van φ en m met die van resp. ψ en n te verwisselen verkrijgt men de omgekeerde ongelijkheid en uit beide ongelijkheden volgt hetgeen te bewijzen was. □

Op grond van de twee voorafgaande stellingen is de volgende definitie gerechtvaardigd:

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, Φ de verzameling van elementaire functies en $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{F}$-meetbaar, dan wordt de integraal van f gedefinieerd door:

$$L(f) := \lim_{n\to\infty} L(\varphi_n) \text{ waarbij } \varphi_n \in \Phi \text{ en } \varphi_n \uparrow f. \tag{1.7.3}$$

Notatie.

$$L(f) = \int f\,d\mu = \int f(u)\mu(du). \tag{1.7.4}$$

Eigenschappen.

Laat $f,g: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en $\mathcal{F}$-meetbaar. Dan geldt:

1. $L(f+g) = L(f) + L(g)$. (1.7.5)
2. $L(\alpha f) = \alpha L(f)$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$. (1.7.6)
3. $L(f) \geq L(g)$ als $f \geq g$. (1.7.7)

<u>Definitie</u>.

Zij $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en $\mathcal{F}$-meetbaar. Dan heet f <u>integreerbaar</u> als $L(f) < \infty$. (1.7.8)

<u>Stelling</u>.

Als g_1, h_1, g_2 en h_2 integreerbare niet negatieve functies zijn en $g_1 - h_1 = g_2 - h_2$, dan geldt dat $L(g_1) - L(h_1) = L(g_2) - L(h_2)$. (1.7.9)

<u>Bewijs</u>. Dit volgt direkt uit (1.7.5). □

<u>Definitie</u>.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, Φ de verzameling van elementaire functies en $f: U \to \bar{\mathbb{R}}$ een $\mathcal{F}$-meetbare functie.
Als $L(f^+)$ of $L(f^-)$ eindig is, dan definiëren we $L(f) := L(f^+) - L(f^-)$.
Als $L(f) < \infty$ dan noemen we f <u>integreerbaar</u>. (1.7.10)

In het vervolg zullen we de verzameling van integreerbare functies aangeven met L_1.

<u>Eigenschappen</u>.

Voor de eigenschappen 1 t/m 8 wordt $f,g \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ verondersteld.

1. $f+g \in L_1$.
2. $\alpha f \in L_1$.
3. $L(f+g) = L(f) + L(g)$ (m.b.v. (1.7.9)).
4. $L(\alpha f) = \alpha L(f)$.
5. $f^\pm + g^\pm \geq (f+g)^\pm$ (in het algemeen geldt niet =).
6. $(L(f^\pm) < \infty \wedge L(g^\pm) < \infty) \Rightarrow (L(f+g)^\pm < \infty)$.
7. $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$.
8. $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$.
9. $f \in L_1 \Leftrightarrow |f| \in L_1$. (1.7.11)

Merk op dat L_1 een lineaire ruimte is en L een begrensde lineaire functionaal op L_1.

1.8. Bijna Overal.

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en P een predicaat op U, dan definiëren we:

$$(\underline{P \text{ geldt bijna overal}}) :\Leftrightarrow (\{\neg P\} \text{ is een nulverzameling}). \qquad (1.8.1)$$

Notatie.

We zullen "P geldt bijna overal" afkorten tot: P b.o. en bv. $f = g$ b.o., etc. opschrijven.

(Engels: a.e. = almost everywhere, frans: p.p. = presque partout.) (1.8.2)

Lemma.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en $P_1,P_2,\ldots$ een rij predicaten op U, dan geldt:

$$(P_i \text{ b.o. } i = 1,2,\ldots) \Leftrightarrow (P_i \ (i = 1,2,\ldots) \text{ b.o.}). \qquad (1.8.3)$$

Bewijs.

$$\neg\{P_i \quad i = 1,2,\ldots\} = \{\neg P_1\} \cup \{\neg P_2\} \cup \{\neg P_3\} \ldots$$

en daar een aftelbare vereniging van nulverzamelingen weer een nulverzameling is, volgt hieruit wat te bewijzen was. □

Stelling.

Zij $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}$ een $\mathcal{F}$-meetbare functie, dan geldt:

$$f \in L_1 \Rightarrow (|f| < \infty \text{ b.o.}) . \qquad (1.8.4)$$

Bewijs. Vanwege (1.7.11) mogen we $f \geq 0$ veronderstellen.
Zij $N := \{f = \infty\}$ dan geldt op N dat $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f \geq n$. Dus (zie 1.5.10) $N \in \mathcal{F}$.
Met behulp van (1.6.10) volgt nu:

$$\infty > \int f\,d\mu \geq \int_N f\,d\mu \geq n\,\mu(N) \quad \text{voor alle } n ,$$

dus $\mu(N) = 0$. □

Stelling.

Zij $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en $\mathcal{F}$-meetbaar dan geldt:

$$f = 0 \text{ b.o.} \iff \int f\, d\mu = 0\,. \tag{1.8.5}$$

Bewijs.

"$\Leftarrow$":

$$A_k := \{f > \tfrac{1}{k}\} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$N := \{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f > \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{F}$$

$$0 = \int f\, d\mu \geq \int_{A_k} f\, d\mu \geq \frac{1}{k}\, \mu(A_k) \geq 0 \quad \therefore \quad \mu(A_k) = 0$$

$$\mu(N) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0 \quad \therefore \quad f = 0 \text{ b.o.}$$

"$\Rightarrow$":

$N := \{f > 0\}$ dan is $N^* = \{f = 0\}$ en $\mu(N) = 0$.

$$\int f\, d\mu = \int_N f\, d\mu + \int_{N^*} f\, d\mu = \int_N f\, d\mu\,.$$

Zij $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zodanig dat $\varphi_n \uparrow f$, $\varphi_n \in \Phi$, dan geldt:

$$0 \leq \int_N \varphi_n\, d\mu \leq \beta_n\, \mu(N) = 0 \quad (\text{waarbij } {}_n := \max_{u\in U} \varphi_n)\,.$$

Daar $\varphi_n \uparrow f$ geldt dat $\varphi_n \chi_N \uparrow f\chi_N$ en $0 = \int_N \varphi_n\, d\mu \to \int_N f\, d\mu$.

Dus $\int f\, d\mu = 0$. □

Opmerkingen.

1. Als $f = 0$ b.o., dan is ook $f^+ = 0$ b.o. en $f^- = 0$ b.o.
2. Uit opmerking 1 en (1.8.5) volgt dat "$\Rightarrow$" in 1.8.5 geldt voor $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}$-meetbaar.

Indien $\| \ \| : L_1 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door $\|f\| := L(|f|)$ dan is in het algemeen $\| \ \|$ geen norm, immers er hoeft niet te gelden: $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$.
Om dit bezwaar te ondervangen voeren we de relatie $\sim$ op L_1 in door:
$f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ b.o.
$\sim$ is een equivalentierelatie (ga na).
Als $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L_1$ en $f_1 \sim g_1$ en $f_2 \sim g_2$, dan is $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ en $\alpha f_1 \sim \alpha g_1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, dus $\sim$ is een congruentie.

We geven de equivalentieklasse waartoe $f \in L_1$ behoort aan met $[f]$ en de verzameling van equivalentieklassen met $\mathcal{L}$.
Op $\mathcal{L}$ definiëren we optelling en scalaire vermenigvuldiging, een operator $\mathcal{L}$ en een afbeelding $\| \ \|_{\mathcal{L}}$ van $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$ door:

$$[f+g] := [f] + [g]$$

$$\alpha[f] := [\alpha f]$$

$$\mathcal{L}([f]) := L(f)$$

$$\|[f]\|_{\mathcal{L}} := \mathcal{L}([|f|]) \qquad (f \in L_1,\ g \in L_1,\ \alpha \in \mathbb{R}) .$$

Ga na dat deze definities zinvol zijn, d.w.z. onafhankelijk van de gekozen representant uit de klasse.

Voor de afbeelding $\| \ \|_{\mathcal{L}}$ geldt wèl:

$$\|[f]\|_{\mathcal{L}} = 0 \Rightarrow [f] = [0]$$

en $(\mathcal{L}, \| \ \|_{\mathcal{L}})$ is een genormeerde lineaire ruimte, zelfs een Banachruimte, maar dat bewijzen we hier niet.

<u>Definitie.</u>

Zij $(U, \mathcal{F}, \mu)$ een maatruimte, $A \in \mathcal{F}$ en $\mu(A^*) = 0$.
Een afbeelding $f: A \to \bar{\mathbb{R}}$ heet dan <u>b.o.-gedefinieerd</u>. (1.8.6)

Als

$$g(u) := \begin{cases} f(u) \text{ als } u \in A \\ \text{willekeurig als } u \in A^* \end{cases}$$

zodanig dat g $\mathcal{F}$-meetbaar is, dan definiëren we:

$$\int f\, d\mu := \int g\, d\mu \,.$$

Deze definitie is éénduidig omdat $\mu(A^*) = 0$.

Eigenschappen.

1. Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $N \subseteq U$ een nulverzameling en $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}$.
   Als $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij functies van $N^* \to \bar{\mathbb{R}}$ is die convergeert naar f en we definiëren

$$g_n(u) := \begin{cases} f_n(u) & \text{als } u \in N^* \\ f(u) & \text{als } u \in N \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   dan geldt:
   I. $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n = g_n$ b.o.
   II. De rij $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert puntsgewijs naar f.

2. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, dan geldt:
   f is Lebesgue-meetbaar $\Leftrightarrow$ $\exists_g$: (g is Borel-meetbaar $\wedge$ f = g b.o.).
   Deze eigenschap zullen we hier niet bewijzen. (1.8.7)

Voorbeeld.

Beschouw de maatruimte $(\mathbb{N},P(\mathbb{N}),\mu)$ waarbij $\mu(A)$:= aantal elementen van A $(A \subseteq \mathbb{N})$. Zij $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ dan is f $P(\mathbb{N})$-meetbaar (ga na).
We definiëren:

$$\alpha_i := f(i) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

$$\varphi_n(i) := \begin{cases} \alpha_i & \text{als } 1 \le i \le n \\ 0 & \text{als } i \ge n+1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

en

$$A_i := \{i\} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

zodat geldt:

$$\varphi_n(i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(i)$$

en dus:

$$\int \varphi_n\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,.$$

Omdat $\varphi_n \uparrow f$ geldt met behulp van (1.7.3)

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} L(\varphi_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

en dus

$$f \in L_1 \iff \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \text{ is convergent.} \tag{1.8.8}$$

Als $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dan is volgens (1.7.10), als $L(f^+)$ of $L(f^-)$ eindig is, $L(f) =$ $= L(f^+) - L(f^-)$. Ga na dat dan geldt:

$$f \in L_1 \iff \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \text{ is absoluut convergent.} \tag{1.8.9}$$

<u>Notaties</u>.

Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ met λ de Lebesguemaat (zie (1.4.15)).
Zij $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ een Borel-meetbare functie, dan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int f \, d\lambda$$

$$\int_A f(x)dx := \int_A f \, d\lambda \qquad \text{met } A \in \mathcal{B}$$

$$\int_a^b f(x)dx := \int_A f \, d\lambda \qquad \text{met } A = (a,b]\ . \tag{1.8.10}$$

De aldus gedefinieerde integralen heten <u>Lebesgue-integralen</u>.
Als $\int f \, d\lambda < \infty$ heet f <u>Lebesgue-integreerbaar</u>. (1.8.11)

<u>Opmerkingen</u>.

1. In (1.8.10) kan voor A ook (a,b), $[a,b)$ of $(a,b]$ worden genomen. (1.8.12)
2. Als een functie Riemann-integreerbaar is, is hij eveneens Lebesgue-integreerbaar en zijn de integralen gelijk. Er zijn functies die wel Lebesgue-integreerbaar zijn, maar niet Riemann-integreerbaar, zoals de oneigenlijke Riemann-integreerbare functie:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt \;.$$

Er zijn echter ook oneigenlijke Riemann-integreerbare functies die niet Lebesgue-integreerbaar zijn, zoals:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt \;.$$

Notatie.

Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu_F)$ waarbij $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, rechtscontinu en monotoon niet dalend, en μ_F de Stieltjes-Lebesgue-maat (zie (1.4.16)).
Zij $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ een Borel-meetbare functie, dan:

$$\int_A f(x)dF(x) := \int_A f\, d\mu_F \qquad (A \in \mathcal{B}) \;.$$

Deze integraal heet de Lebesgue-Stieltjes-integraal. (1.8.13)
Verder definiëren we:

$$\int_a^b f(x)dF(x) := \int_A f\, d\mu_F \qquad \text{met } A = (a,b]$$

$$\int_a^{b-} f(x)dF(x) := \int_A f\, d\mu_F \qquad \text{met } A = (a,b) \;.$$

Merk op dat het analogon van (1.8.12) hier niet geldt omdat alleen aangenomen is dat F rechtscontinu is.

Opmerking.

Voor meervoudige integralen gaat de definitie van de Lebesgue-integraal analoog.
Beschouw bv. de maatruimte $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_2,\mu)$ met μ gedefinieerd als in (1.4.17) en $f\colon \mathbb{R}^2 \to \bar{\mathbb{R}}$ Borel-meetbaar, dan:

$$\iint_A f(x,y)dxdy := \int_A f\, d\mu \qquad (A \in \mathcal{B}_2) \;.$$

Opgave.

5. Bewijs dat: $f \in L_1 \Rightarrow \Psi_x \int_0^x f(t)dt$ is continu.

1.9. Convergentiestellingen.

Stelling (monotone convergentiestelling van Levi).

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$. Als $f_n \uparrow f$, dan geldt:

I . f is $\mathcal{F}$-meetbaar.

II. $L(f_n) \uparrow L(f)$. (1.9.1)

Bewijs.

I. f is $\mathcal{F}$-meetbaar volgens (1.5.18).

II. Volgens (1.7.1) is er $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ een rij elementaire functies $\{\varphi_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ waarvoor geldt $\varphi_{kn} \uparrow f_n$:

$$
\begin{array}{cccc}
f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\
\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n}
\end{array}
$$

We definiëren: $\psi_k := \max\{\varphi_{ki} \mid 1 \le i \le k\}$. Dan geldt:

a) ψ_k is een elementaire functie.

b) $\psi_k \le \psi_{k+1}$.

c) $\psi_k \le f_k \le f$, immers $\forall_{1\le i\le k} : \varphi_{ki} \le f_i \le f_k \le f$.

d) $\forall_{k\ge n} : \varphi_{kn} \le \psi_k$.

We definiëren nu: $g := \lim_{k\to\infty} \psi_k$ (dit kan volgens b)). M.b.v. d) geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n \le g$ en dus $f \le g$. Anderzijds geldt volgens c) dat $g \le f$ zodat $f = g$ en dus:

$$L(f) = \lim_{k\to\infty} L(\psi_k) \le \lim_{k\to\infty} L(f_k) \le L(f) \quad \text{en} \quad \lim_{k\to\infty} L(f_k) = L(f)\ . \qquad \square$$

Stelling (Lemma van Fatou).

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}_+$, dan geldt:

$$L(\underline{\lim}\ f_n) \le \underline{\lim}\ L(f_n)\ . \tag{1.9.2}$$

Bewijs. We definiëren $g_n := \inf_{m\ge n} f_m$ dan is volgens (1.5.17) g_n $\mathcal{F}$-meetbaar $(n \in \mathbb{N})$. De rij $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is monotoon niet-dalend zodat:

$$\underline{\lim}\ f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\ge n} f_m = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n\ .$$

Als $f := \lim_{n\to\infty} g_n$ dan geldt volgens de stelling van Levi: $L(g_n) \uparrow L(f)$.
Omdat $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n \ge g_n$ geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}} : L(f_n) \ge L(g_n)$ zodat:

$$\underline{\lim}\ L(f_n) \ge \underline{\lim}\ L(g_n) = \lim_{n\to\infty} L(g_n) = L(f) = L(\underline{\lim}\ f_n)\ . \qquad \square$$

Opmerking.

Zowel in de stelling van Levi als in het lemma van Fatou kan worden volstaan met de eis $\exists_{g\in L_1} \forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n \ge g$ in plaats van $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n \ge 0$.
Dit volgt direkt door (1.9.1) resp. (1.9.2) toe te passen op $f_n - g$. (1.9.3)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}$ met de eigenschap $\exists_{g\in L_1} \forall_{n\in\mathbb{N}} : f_n \le g$, dan geldt:

$$L(\overline{\lim}\ f_n) \ge \overline{\lim}\ L(f_n)\ . \tag{1.9.4}$$

Bewijs. $\forall_{n\in\mathbb{N}} : -f_n \ge -g$ zodat m.b.v. (1.9.2) en (1.9.3) geldt:

$$L(\underline{\lim}\ -f_n) \le \underline{\lim}\ L(-f_n)$$

dus

$$L(-\ \overline{\lim}\ f_n) \le \underline{\lim}\ -L(f_n)$$

dus

$$- L(\overline{\lim}\ f_n) \le - \overline{\lim}\ L(f_n)$$

of

$$L(\overline{\lim}\ f_n) \ge \overline{\lim}\ L(f_n)\ . \qquad \square$$

Stelling (gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue).

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}$ die convergeert naar $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}$.

Als $\exists_{g\in L_1}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} : |f_n| \le g$, dan geldt: (*)

I. $f \in L_1$.

II. $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)$. (1.9.5)

Bewijs.

I. Volgens (1.7.II.8) geldt:

$$\left|\int f\, d\mu\right| \le \int |f|\, d\mu \le \int g\, d\mu < \infty \qquad \text{zodat } f \in L_1\ .$$

II. Volgens het lemma van Fatou, (1.9.3) en (1.9.4) geldt:

$$L(f) = L(\underline{\lim}\ f_n) \le \underline{\lim}\ L(f_n) \le \overline{\lim}\ L(f_n) \le L(\overline{\lim}\ f_n) = L(f)$$

zodat

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)\ . \qquad \square$$

Voorbeelden.

1. Zij

$$f_n(t) := \begin{cases} (1 - \frac{t}{n})^n\, t^{x-1} & \text{als } 0 \le t \le n \\ 0 & \text{als } t > n\ . \end{cases}$$

Dan geldt:

$$\forall_{0\le t\le n} : 0 \le 1 - \frac{t}{n} \le e^{-\frac{t}{n}}$$

dus

$$\forall_{0\le t\le n} : 0 \le (1 - \frac{t}{n})^n \le e^{-t}$$

dus

$$\forall_{0\le t\le n} : 0 \le f_n(t) \le e^{-t}\, t^{x-1} .$$

Omdat $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-t}\, t^{x-1}$ volgt met de stelling van Lebesgue:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)dt = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt .$$

2. Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ met λ de Lebesgue-maat.

a) Als $f_n := -\chi_{[n,\infty)}$ $(n \in \mathbb{N})$ dan geldt:

$\forall_{n\in\mathbb{N}} : L(f_n) = -\infty$ en $L(f) = 0$, immers $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

De stelling van Lebesgue kan niet worden toegepast omdat niet aan de voorwaarde (*) uit de stelling is voldaan.

b) Als $f_n := n\,\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ $(n \in \mathbb{N})$ dan geldt:

$\forall_{n\in\mathbb{N}} : L(f_n) = 1$ en $L(f) = 0$, immers $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Ook hier kan de stelling van Lebesgue niet worden toegepast omdat niet aan de voorwaarde (*) uit de stelling is voldaan.

c) Als $f_n = n^{\frac{1}{2}}\,\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 0 \le f_n(x) \le x^{-\frac{1}{2}}$.

$L(f_n) = n^{-\frac{1}{2}}$ en $L(f) = 0$ omdat $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, hetgeen in overeenstemming is met de stelling van Lebesgue.

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij $\mathcal{F}$-meetbare functies van $U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ waarvoor geldt: $\{\sum_{n=1}^{k} f_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeert naar $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$, dan:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu . \tag{1.9.6}$$

Bewijs. Bewijs dit zelf door (1.9.1) toe te passen op de rij van partiële sommen. □

Definitie.

Zij $f: X \times Y \to Z$ dan:

$$f_{x.} := \forall_y\ f(x,y)$$
$$f_{.y} := \forall_x\ f(x,y)\ . \qquad (1.9.7)$$

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte en $f: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Als geldt:

1) $\forall_{u\in U} : f_{u.}$ continu,

2) $\forall_{x\in \mathbb{R}^n} : f_{.x}$ is $\mathfrak{F}$-meetbaar,

3) $\exists_{g\in L_1} \forall_{x\in \mathbb{R}^n} : |f_{.x}| \le g$,

dan is $\int f_{.x}\, d\mu$ continu. (1.9.8)

Bewijs. Zij $x_0 \in \mathbb{R}^n$ willekeurig en $h(x) := \int f(u,x)\mu(du)$. Dan is het voldoende aan te tonen dat voor alle rijen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uit $\mathbb{R}^n$ waarvoor $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ geldt: $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x_0)$.

Volgens 3) geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}} : |f(u,x_n)| \le g(u)$, zodat m.b.v. de stelling van Lebesgue en 1) volgt: $\lim_{n\to\infty} \int f(u,x_n)\mu(du) = \int f(u,x_0)\mu(du)$.

Omdat x_0 willekeurig was geldt dan $\int f_{.x}\, d\mu$ is continu. □

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte en $f: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continu differentieerbaar t.a.v. x. Als voldaan is aan de voorwaarden van (1.9.8) en als $\exists_{h\in L_1} \forall_{x\in \mathbb{R}^n} : |\nabla_x f(u,x)| \le h(u)$, dan geldt:

1) $\int f(u,x)\mu(du)$ is continu differentieerbaar,

2) $\nabla_x \int f(u,x)\mu(du) = \int \nabla_x f(u,x)\mu(du)$. (1.9.9)

Bewijs. Zelf, m.b.v. het gemiddelde theorema. □

Zij $(U,\mathfrak{F},\mu)$ een maatruimte, $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ en f is $\mathfrak{F}$-meetbaar.

Als we definiëren: $\nu(A) := \int_A f\, d\mu \quad (A \in \mathfrak{F})$, dan is ν een maat, immers:

1) $\nu(\emptyset) = 0$ (triviaal).

2) Als $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ en onderling disjunct, dan geldt m.b.v. (1.5.22) en (1.9.6):

$$\nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{\infty} f \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f \chi_{A_i} d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \; . \tag{1.9.10}$$

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en ν een maat op $\mathcal{F}$.
We noemen ν absoluut continu t.o.v. μ als er een $\mathcal{F}$-meetbare functie $f\colon U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ bestaat zodanig dat

$$\forall_{A\in\mathcal{F}} : \nu(A) = \int_A f \, d\mu \; . \tag{1.9.11}$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte, $g\colon U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ een $\mathcal{F}$-meetbare functie en ν een maat op $\mathcal{F}$ die absoluut continu is t.o.v. μ, dan geldt:

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu$$

met f gedefinieerd als in (1.9.11). (1.9.12)

Bewijs.

1. Als $g = \chi_A$ $(A \subseteq U)$, dan:

$$\int g \, d\nu = \int \chi_A \, d\nu = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

zodat de stelling voor indicatorfuncties geldt.

2. Als g een elementaire functie is volgt de stelling m.b.v. 1 en de lineariteit van de integraal.

3. Als $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij elementaire functies is, waarvoor geldt $\varphi_n \uparrow g$, dan volgt m.b.v. (1.9.1) en 2:

$$\int g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n f\, d\mu = \int gf\, d\mu . \qquad \square$$

Opmerking.

Als $(U,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte en $(V,\mathcal{G})$ een meetruimte is, $f: U \to V$ $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-meetbaar en $g: V \to \bar{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{G}$-meetbaar, dan is:
$\mu_f(A) := \mu(f^{\leftarrow}(A))$ een maat op $\mathcal{G}$ volgens (1.5.23).
Er geldt dan:

$$\int g\, d\mu_f = \int g(v)\mu_f(dv) = \int g(f(u))\mu(du) = \int g\circ f\, d\mu . \tag{1.9.13}$$

(Het bewijs hiervan gaat analoog aan dat van (1.9.12); ga na!)

Stelling (Radon-Nikodym).

Als $(U,\mathcal{F},\mu)$ een σ-finiete maatruimte is en ν een maat op $\mathcal{F}$ dan:
ν is absoluut continu t.o.v. $\mu \iff \forall_{A\in\mathcal{F}} : (\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$.
Op het bewijs hiervan gaan we niet in. (1.9.14)

Voorbeeld.

Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ met λ de Lebesgue-maat en zij $f: \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ integreerbaar en Borel-meetbaar.

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt \quad \text{en} \quad \nu(A) := \int_A f\, d\lambda \qquad (A \in \mathcal{B}) .$$

Op $\mathcal{J}$ (zie vb. 2 uit (1.2.2)) geldt dan $\nu(A) = \mu_F(A)$.
M.b.v. (1.4.29) en (1.4.38) volgt $\nu(A) = \mu_F(A) = \int_A f\, d\lambda$ als $A \in \mathcal{B}$.
De functie F heet absoluut continu als μ_F absoluut continu is t.o.v. λ.
Merk op:

1. Een verdeling V van $[a,b]$ is een rij getallen $a_0,b_0,a_1,b_1,\dots,a_n,b_n$ met $a = a_0 < b_0 \le a_1 < b_1 \le \dots \le a_n < b_n = b$.
   F is absoluut continu op $[a,b]$ als:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_V : \left(\sum_{i=0}^{n} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon\right) .$$

   (Op het bewijs gaan we niet in.)

2. Een functie die absoluut continu is, is continu; andersom in dit in het algemeen niet waar.
3. Als $g: \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ geldt m.b.v. (1.8.13) en (1.9.12): $\mathbb{R}^+$ $dL,$

$$\int g\, dF := \int g(x)dF(x) = \int g\, d\mu_F = \int gf\, d\lambda = \int g(x)f(x)dx . \qquad (1.9.15)$$

1.10. Meervoudige integralen.

Definitie.

U en V zijn willekeurige verzamelingen en $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.
Zij $\mathcal{C}$ een klasse op U, $\mathcal{D}$ een klasse op V, dan definiëren we:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

en

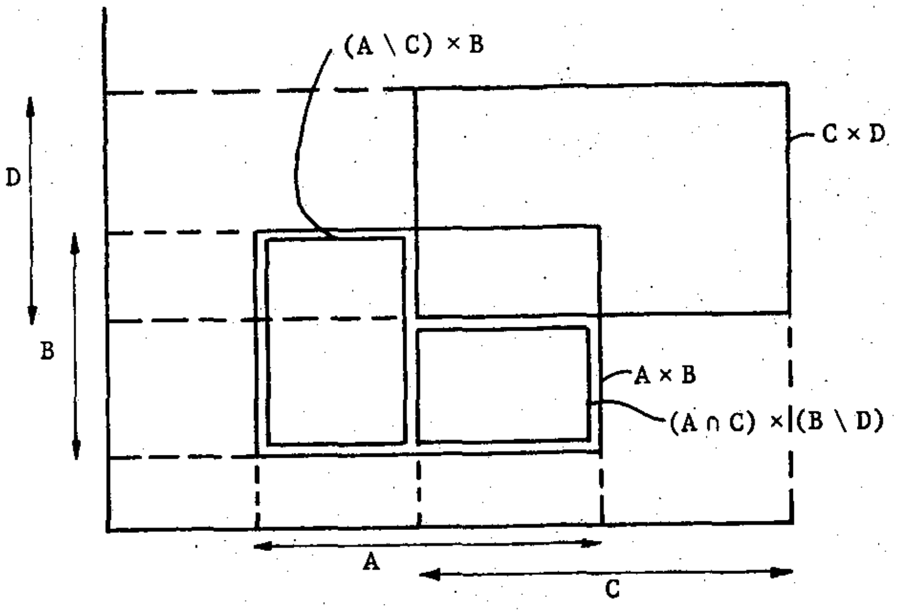
$$\mathcal{C} \dot{\times} \mathcal{D} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{D}\}. \qquad (1.10.1)$$

(Zie ook Algebra en Analyse 1.21.)

Stelling.

Als U en V willekeurige verzamelingen zijn en $\mathcal{S}$ een semiring op U en $\mathcal{T}$ een semiring op V is, dan is $\mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T}$ een semiring op $U \times V$. (1.10.2)

Bewijs. Zij $A \times B \in \mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T}$ en $C \times D \in \mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T}$ dan geldt (zie Algebra en Analyse 1.21.9): $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T}$, dus $\mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T}$ is $\cap$-stabiel. Er geldt eveneens $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B)\ \underline{\cup}\ ((A \cap C) \times (B \setminus D)) \in$ $\in (\mathcal{S} \dot{\times} \mathcal{T})_{\underline{\cup}}$ (ga na). $\square$



Definities.

$(U,\mathcal{F})$, $(V,\mathcal{G})$ zijn meetruimten, dan:
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} := \mathcal{F}(\mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G})$, de produkt-$\sigma$-algebra van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ en $(U \times V, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ heet de produkt-meetruimte van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$. (1.10.3)

Er geldt $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$, immers (zie ook blz. 7):

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{F}(\mathcal{I}_1 \dot{\times} \mathcal{I}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_1 \dot{\times} \mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 .$$

Definities.

U, V zijn willekeurige verzamelingen en $A \subseteq U \times V$, dan:

$$A_{u.} := \{v \in V \mid (u,v) \in A\}$$

en

$$A_{.v} := \{u \in U \mid (u,v) \in A\} . \qquad (1.10.4)$$

Stelling.

$(U,\mathcal{F})$ en $(V,\mathcal{G})$ zijn meetruimten. Als $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ dan geldt:

$$\forall_{u\in U}: A_{u.} \in \mathcal{G} \quad \text{en} \quad \forall_{v\in V}: A_{.v} \in \mathcal{F}. \tag{1.10.5}$$

Bewijs. Zij $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \mid A_{u.} \in \mathcal{G}\}$ dan geldt:

1) $\mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$, immers zij $A = B \times C \in \mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G}$ dan

$$A_{u.} = \begin{cases} \emptyset & \text{als } u \notin B \\ C & \text{als } u \in B \end{cases} \quad \text{dus } \forall_{u\in U}: A_{u.} \in \mathcal{G}.$$

2) $\mathcal{C}$ is $*$-stabiel, immers $(A^*)_{u.} = (A_{u.})^*$.

3) $\mathcal{C}$ is σ-stabiel, immers $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)_{u.} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)_{u.}$.

Uit 1), 2) en 3) volgt dat $\mathcal{C}$ een σ-algebra is die $\mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G}$ omvat. Met de definitie van $\mathcal{C}$ volgt dan $\mathcal{C} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Dus $\forall_{A\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}}\ \forall_{u\in U}: A_{u.} \in \mathcal{G}$.
Analoog bewijzen we $A_{.v} \in \mathcal{F}$. □

Stelling.

$(U,\mathcal{F})$ en $(V,\mathcal{G})$ zijn meetruimten. Als $f: U \times V \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar is, dan geldt:

$$f_{u.} := \curlyvee_v\, f(u,v) \text{ is } \mathcal{G}\text{-meetbaar}$$

en

$$f_{.v} := \curlyvee_u\, f(u,v) \text{ is } \mathcal{F}\text{-meetbaar}. \tag{1.10.6}$$

Bewijs. Zij $A \in \overline{\mathcal{B}}$, dan geldt

$$f_{u.}^{\leftarrow}(A) = \{v \in V \mid f(u,v) \in A\} = \{(u,v) \in U \times V \mid f(u,v) \in A\}_{u.} =$$
$$= f^{\leftarrow}(A)_{u.}.$$

Omdat f $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar is, geldt $f^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ en m.b.v. (1.10.5) volgt dan $f^{\leftarrow}(A)_{u.} \in \mathcal{G}$, dus $f_{u.}^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{G}$.
Analoog bewijzen we dat $f_{.v}$ $\mathcal{F}$-meetbaar is. □

Definitie.

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn maatruimten. We definiëren op $\mathcal{F}\dot{\times}\mathcal{G}$: $\pi(A \times B) :=$
$= \mu(A)\nu(B)$. (1.10.7)

Stelling.

π is een maat op $\mathcal{F}\dot{\times}\mathcal{G}$. (1.10.8)

Bewijs. Ga na dat π welgedefinieerd is op $\mathcal{F}\dot{\times}\mathcal{G}$, d.w.z. onafhankelijk van de "splitsing" $A \times B$ (A of B kan leeg zijn!).

1) $\pi(\emptyset) = 0$ (triviaal).

2) $\forall_{C\in\mathcal{F}\dot{\times}\mathcal{G}}$: $\pi(C) \geq 0$ (triviaal).

3) π is σ-additief, want:

Zij $A \times B \in \mathcal{F}\dot{\times}\mathcal{G}$ en $A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$.

Als $A = \emptyset$ of $B = \emptyset$, dan $\pi(A \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i)$ triviaal.

Laat nu $A \neq \emptyset$ en $B \neq \emptyset$ en definieer: $f_i(u) := \nu(B_i)\chi_{A_i}(u)$ en $f(u) :=$
$= \nu(B)\chi_A(u)$. We beweren:

$$\forall_{u\in U}: \sum_{i=1}^{\infty} f_i(u) = f(u) \ . \qquad (*)$$

Indien $u \notin A$ is dit triviaal. Laat nu $u \in A$ en $I := \{i \mid u \in A_i\}$, dan geldt $B = \bigcup_{i\in I} B_i$, want:

a) Zij $v \in B_i \cap B_j$ $(i,j \in I)$, dan $(u,v) \in A_i \times B_i$ en $(u,v) \in A_j \times B_j$, dus $i = j$ zodat de B_i's disjunct zijn.

b) Zij $v \in B$, dus $(u,v) \in A \times B$ zodat $\exists_{i\in I}$: $(u,v) \in A_i \times B_i$ en dus $\exists_{i\in I}$: $v \in B_i$, zodat $B \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$.

c) Zij $v \in B_i$ $(i \in I)$ dan $(u,v) \in A_i \times B_i \subseteq A \times B$ zodat $v \in B$. Dus $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq B$.

Nu geldt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)\chi_{A_i}(u) = \sum_{i\in I} \nu(B_i) = \nu(\bigcup_{i\in I} B_i) =$$

$$= \nu(B) = \nu(B)\chi_A(u) = f(u) \ .$$

Hiermee is (*) bewezen.

Hieruit volgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \int \chi_{A_i}\, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int \nu(B_i)\chi_{A_i}\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i\, d\mu = \int \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, d\mu =$$

$$= \int f\, d\mu = \nu(B) \int \chi_A\, d\mu = \nu(B)\mu(A) = \pi(A \times B) .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van (1.9.6). □

<u>Stelling</u>.

Als $(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ σ-finiete maatruimten zijn, dan is π een σ-finiete maat op $\mathcal{F} \,\dot{\times}\, \mathcal{G}$. (1.10.9)

<u>Bewijs</u>. Zij $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ $(A_i \in \mathcal{F})$, $\mu(A_i) < \infty$ en $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ $(B_j \in \mathcal{F})$, $\nu(B_j) < \infty$, dan $U \times V = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$ (ga na) en $\pi(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$. □

<u>Definities</u>.

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn σ-finiete maatruimten.

De maat π op de semiring $\mathcal{F} \,\dot{\times}\, \mathcal{G}$ is eenduidig uit te breiden tot een maat $\mu \otimes \nu$ op de σ-algebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ (zie (1.4.38)).

$\mu \otimes \nu$ heet de <u>produktmaat</u> van μ en ν. (1.10.10)

$(U \times V,\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{G},\ \mu \otimes \nu)$ heet de <u>produkt(maat)ruimte</u> (deze is σ-finiet vanwege (1.10.9)). (1.10.11)

<u>Stelling</u>.

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn σ-finiete maatruimten.

Zij $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ dan geldt:

1. $\forall_u\ \nu(A_{u.})$ is $\mathcal{F}$-meetbaar.
2. $\int \nu(A_{u.})\mu(du) = \mu \otimes \nu(A)$.
3. $\forall_v\ \mu(A_{.v})$ is $\mathcal{G}$-meetbaar.
4. $\int \mu(A_{.v})\nu(dv) = \mu \otimes \nu(A)$. (1.10.12)

<u>Bewijs</u>. We bewijzen alleen 1 en 2.

We nemen eerst aan dat $\mu(U) < \infty$ en $\nu(V) < \infty$.

Definieer dan: $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \mid \forall_u\ \nu(A_{u.})$ is $\mathcal{F}$-meetbaar, $\int \nu(A_{u.})\mu(du) = \mu \otimes \nu(A)\}$. Dan geldt:

1) $\mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$.

Zij $A = B \times C \in \mathcal{F} \dot{\times} \mathcal{G}$ dan $A_{u.} = \begin{cases} C & \text{als } u \in B \\ \emptyset & \text{als } u \notin B \end{cases}$, dus $\nu(A_{u.}) = \nu(C)\chi_B(u)$ is $\mathcal{F}$-meetbaar (zie (1.5.21)) en verder:

$$\int \nu(A_{u.})\mu(du) = \nu(C)\mu(B) = \pi(B \times C) = \pi(A) = \mu \otimes \nu(A) .$$

2) $\mathcal{C}$ is $*$-stabiel.

Zij $A \in \mathcal{C}$ dan $(A^*)_{u.} = (A_{u.})^*$ zodat $\nu((A^*)_{u.}) = \nu((A_{u.})^*) = \nu(V) - \nu(A_{u.})$, immers $\nu(V) < \infty$. Daar $\nu(A_{u.})$ $\mathcal{F}$-meetbaar is, is volgens (1.5.14) ook $\nu((A^*)_{u.})$ $\mathcal{F}$-meetbaar. Verder geldt:

$$\int \nu((A^*)_{u.})\mu(du) = \int \nu(V)\mu(du) - \int \nu(A_{u.})\mu(du) =$$

$$= \mu(U)\nu(V) - \mu \otimes \nu(A) = \mu \otimes \nu(U \times V) - \mu \otimes \nu(A) = \mu \otimes \nu(A^*)$$

(immers $\mu \otimes \nu(U \times V) < \infty$).

3) $\mathcal{C}$ is $\sigma\underline{\cup}$-stabiel.

Zij $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, onderling disjunct en $A := \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$, dan $A_{u.} = \underline{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A_i)_{u.}$ (ga na), dus $\nu(A_{u.}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu((A_i)_{u.})$.

Daar $\nu((A_i)_{u.})$ $\mathcal{F}$-meetbaar is, is volgens (1.9.1) ook $\nu(A_{u.})$ $\mathcal{F}$-meetbaar. Bovendien geldt:

$$\int \nu(A_{u.})\mu(du) = \int \sum_{i=1}^{\infty} \nu((A_i)_{u.})\mu(du) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int \nu((A_i)_{u.})\mu(du) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \otimes \nu(A_i) = \mu \otimes \nu(A) .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van (1.9.6).

Uit 1), 2) en 3) en de definitie van $\mathcal{C}$ volgt nu m.b.v. (1.3.8): $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \mathcal{C}$.

Neem nu aan dat U en V σ-finiet zijn.
Zij $P \in \mathcal{F}$, $\mu(P) < \infty$ en $Q \in \mathcal{G}$, $\nu(Q) < \infty$ en definieer

$$\mathcal{C}_{P\times Q} := \{A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \mid A \cap (P \times Q) \in \mathcal{C}\} .$$

Analoog bewijst men dat $\mathcal{C}_{P\times Q}$ aan 1), 2) en 3) voldoet. Er geldt dus ook $\mathcal{C}_{P\times Q} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Zij $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\mu(A_i) < \infty$, $\nu(B_j) < \infty$.

Zij $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, dus $\forall_{i,j}$: $A \in \mathcal{C}_{A_i \times B_j}$, zodat $A \cap (A_i \times B_j) \in \mathcal{C}$, dus $A = \bigcup_{i,j} (A \cap (A_i \times B_j)) \in \mathcal{C}$. Dus $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$. Met de definitie van $\mathcal{C}$ volgt nu dat $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \mathcal{C}$. □

Notaties.

Zij f: $U \times V \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar, dan:

$$\int f(u,v)\mu(du) := \int f_{.v}\, d\mu ,$$

$$\int f(u,v)\nu(dv) := \int f_{u.}\, d\nu ,$$

$$\int_{U\times V} f(u,v)\mu \otimes \nu(du\, dv) := \int f\, d(\mu \otimes \nu) . \tag{1.10.13}$$

Stelling (Fubini).

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn σ-finiete maatruimten.
Zij f: $U \times V \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar, dan geldt

1. $\forall_v \int f(u,v)\mu(du)$ is $\mathcal{G}$-meetbaar.
2. $\forall_u \int f(u,v)\nu(dv)$ is $\mathcal{F}$-meetbaar.
3. $$\int_{U\times V} f(u,v)\mu \otimes \nu(du\, dv) = \int\left(\int f(u,v)\nu(dv)\right)\mu(du) = \int\left(\int f(u,v)\mu(du)\right)\nu(dv) . \tag{1.10.14}$$

Bewijs. Het bewijs verloopt analoog aan het bewijs van (1.9.12).

1. Zij $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ en $f := \chi_A$, dan is f $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar volgens (1.5.21).
   Verder

$$\int f(u,v)\mu(du) = \int f_{.v}\, d\mu = \int (\chi_A)_{.v}\, d\mu = \mu(A_{.v})$$

is $\mathcal{G}$-meetbaar volgens (1.10.12).
Analoog bewijst men dat $\int f(u,v)\nu(dv)$ $\mathcal{F}$-meetbaar is.

$$\int_{U\times V} f(u,v)\mu \otimes \nu(du\, dv) = \int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int \chi_A\, d(\mu \otimes \nu) = \mu \otimes \nu(A) =$$

$$= \text{(volgens (1.10.12))} \int \nu(A_{u.})\mu(du) = \int \left(\int (\chi_A)_{u.}\ \overset{d\nu}{\cancel{\nu(dv)}}\right)\mu(du) =$$

$$= \int \left(\int f_{u.}\ \overset{d\nu}{\cancel{\nu(dv)}}\right)\mu(du) = \int \left(\int f(u,v)\nu(dv)\right)\mu(du)\ .$$

Analoog bewijst men

$$\int_{U\times V} f(u,v)\mu \otimes \nu(du\, dv) = \int \left(\int f(u,v)\mu(du)\right)\nu(dv)\ .$$

Voor indicatorfuncties is hiermee de stelling bewezen.

2. *Als $f \in \Phi$ dan volgt de stelling m.b.v. 1 en de lineariteit van de integraal.*

2. Indien f $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-meetbaar is dan volgt de stelling uit 2, (1.7.1) en (1.9.1). □

Stelling.

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn σ-finiete maatruimten.
Zij $f \in L_1(U \times V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$, dan geldt

1. $\Psi_v \int f(u,v)\mu(du) \in L_1(V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$.

2. $f_{.v} \in L_1(U \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ b.o.

3. $\Psi_u \int f(u,v)\nu(dv) \in L_1(U \to \bar{\mathbb{R}}_+)$

4. $f_{u.} \in L_1(V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ b.o. (1.10.15)

Bewijs. We bewijzen alleen 1 en 2. Definieer $h := \Psi_v \int f(u,v)\mu(du)$, dan $\int h\ \nu(dv) = \int \left(\int f(u,v)\mu(du)\right)\nu(dv) < \infty$ volgens (1.10.14.3). Dus $h \in L_1(V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$.
Hieruit volgt m.b.v. (1.8.4): $\int f_{.v}\, d\mu = h(v) < \infty$ b.o. en dus $f_{.v} \in L_1(U \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ b.o. □

Stelling.

$(U,\mathcal{F},\mu)$ en $(V,\mathcal{G},\nu)$ zijn σ-finiete maatruimten.

Zij $f \in L_1(U \times V \to \bar{\mathbb{R}})$, dan geldt:

1. $Y_v \int f(u,v)\mu(du)$ is b.o. gedefinieerd en $\mathcal{G}$-meetbaar.
2. $Y_u \int f(u,v)\nu(dv)$ is b.o. $\mathcal{F}$-meetbaar.
3. $\int_{U\times V} f(u,v)\mu \otimes \nu(dv) = \int(\int f(u,v)\nu(dv))\mu(du) = \int(\int f(u,v)\mu(du))\nu(dv)$

$$\tag{1.10.16}$$

Bewijs. Daar $f \in L_1(U \times V \to \bar{\mathbb{R}})$ is ook $f^+ \in L_1(U \times V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ en $f^- \in L_1(U \times V \to \bar{\mathbb{R}}_+)$. Volgens (1.10.15) geldt dan $f^+_{.v} \in L_1(U \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ en $f^-_{.v} \in L_1(U \to \bar{\mathbb{R}}_+)$ b.o. Dus $h := Y_v \int f_{.v}\, \mu(du)$ is b.o. gedefinieerd (nl. waar $\int f^+_{.v}\, \mu(du) < \infty$ of $\int f^-_{.v}\, \mu(du) < \infty$). Volgens (1.10.14) zijn $\int f^+_{.v}\, \mu(du)$ en $\int f^-_{.v}\, \mu(du)$ b.o. $\mathcal{G}$-meetbaar, zodat ook h b.o. $\mathcal{G}$-meetbaar is. Hiermee is 1 bewezen. 2 bewijst men analoog.

Uit (1.10.14) volgt ook dat b.o. geldt:

$$\int_{U\times V} f^+\, d(\mu \otimes \nu) = \int(\int f^+_{.v}\, d\mu)d\nu$$

en

$$\int_{U\times V} f^-\, d(\mu \otimes \nu) = \int(\int f^-_{.v}\, d\mu)d\nu\ ,$$

zodat b.o.

$$\int_{U\times V} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_{U\times V} (f^+ - f^-) d(\mu \otimes \nu) = \int(\int f^+_{.v} - f^-_{.v}\, d\mu)d\nu =$$

$$= \int(\int f_{.v}\, d\mu)d\nu\ .$$

Analoog bewijst men de rest van 3. $\square$

Opmerking.

De verwisseling van integratievolgorde zoals in (1.10.16.3) geldt in het algemeen niet voor willekeurige $f: U \times V \to \bar{\mathbb{R}}$, immers:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

en

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \right) dx = +\frac{\pi}{4} . \qquad (1.10.17)$$

Men kan op analoge wijze met inductie de produkt(maat)ruimte

$$(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n,\ \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n,\ \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n)$$

definiëren van de maatruimten $(U_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$, $(U_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$, ..., $(U_n,\mathcal{F}_n,\mu_n)$ en analoge stellingen afleiden.

Als $A_i \in \mathcal{F}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, dan

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \ldots \mu_n(A_n) . \qquad (1.10.18)$$

HOOFDSTUK II.

2.1. Inleidende begrippen.

Als we een experiment uitvoeren, noemen we het resultaat een uitkomst. Een uitkomst zullen we meestal met u aangeven en de verzameling van uitkomsten met U.
Op U definiëren we een σ-algebra $\mathcal{F}$ en de elementen van deze σ-algebra noemen we gebeurtenissen.
De $\emptyset$ heet de onmogelijke gebeurtenis en U de zekere gebeurtenis.
Meestal zullen we ons beperken tot die gevallen waarbij $\mathcal{F}$ een echte deelverzameling van P(U) is, zodat $(U,\mathcal{F})$ een meetruimte is.

Opgave.

6. Wat betekent in termen van gebeurtenissen :

a) $\overline{\lim}\, A_n \quad (:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$

b) $\underline{\lim}\, A_n \quad (:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$.

Bewijs dat:

1) $\chi_{\overline{\lim}\, A_n} = \overline{\lim}\, \chi_{A_n}$

2) $\chi_{\underline{\lim}\, A_n} = \underline{\lim}\, \chi_{A_n}$

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F})$ een meetruimte.
Op $\mathcal{F}$ definiëren we een waarschijnlijkheid (of kans) P als een afbeelding $\mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ met de eigenschappen:

1. $P\emptyset = 0$
2. $PU = 1$
3. P is σ-additief. (2.1.1)

Opmerkingen.

1. Soms zullen we PA noteren als P(A).
2. Een waarschijnlijkheid is een maat met PU = 1. (2.1.2)

Definitie.

$(U,\mathcal{F},P)$ heet een kansruimte (kansveld, waarschijnlijkheidsruimte) als $(U,\mathcal{F},P)$ een maatruimte is met $PU = 1$. (2.1.3)

2.2. Stochastische variabelen.

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F})$ een meetruimte.

Een stochastische variabele is een $\mathcal{F}$-meetbare functie $\underline{x} : U \to \mathbb{R}$. (2.2.1)

Een stochastische vector is een $\mathcal{F}$-meetbare functie $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$. (2.2.2)

Opmerking.

Uit (1.5.11) volgt:

$\underline{x}$ is een stochastische vector $\iff$ $\begin{cases} \text{alle componentfuncties van } \underline{x} \text{ zijn} \\ \text{stochastische variabelen.} \end{cases}$ (2.2.3)

Notatie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$ een stochastische vector en $A \in \mathcal{B}_n$, dan definiëren we:

$P_{\underline{x}}(A) := P\{\underline{x} \in A\} = P(x^{\leftarrow}(A))$. (2.2.4)

Met behulp van (1.5.23) volgt nu:

Lemma.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector, dan is $P_{\underline{x}}$ een waarschijnlijkheid op $\mathcal{B}_n$ en derhalve is $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n,P_{\underline{x}})$ een kansruimte. (2.2.5)

Definitie.

$P_{\underline{x}}$ uit (2.2.5) heet de verdeling van $\underline{x}$. (2.2.6)

We kunnen ook samengestelde functies van stochastische vectoren beschouwen (bijv. $\underline{x}^2, (\underline{x}-\mu)^2, e^{-s\underline{x}}$).

Lemma.

Zij $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^m$ $\mathscr{F}$-meetbaar en $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Borel-meetbaar, dan geldt

1. $g(\underline{x}) := g \circ \underline{x}$ is $\mathscr{F}$-meetbaar,

2. $P_{g(\underline{x})} = (P_{\underline{x}})_g$,

3. $\int g \circ \underline{x} = \int g dP_{\underline{x}}$. (2.2.7)

Bewijs.

1. volgt uit (1.5.5), 2. uit opgave 4 en 3. uit (1.9.13). □

Definitie.

Zij $(U,\mathscr{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector en $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_n,P_{\underline{x}})$ de daardoor geïnduceerde kansruimte (zie (2.2.5)).
Dan heet $\underline{x}$ continu indien $P_{\underline{x}}$ absoluut continu is t.a.v. λ_n (n-dimensionale Lebesguemaat), d.w.z.:

$\exists f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+$, Borel-meetbaar z.d.d.: $\forall A \in \mathscr{B}_n : P_{\underline{x}}(A) = \int_A f d\lambda_n$. (2.2.8)

Opgave.

7. Zij $(U,\mathscr{F},\mu)$ een maatruimte en $f \in L_1$ $(f : U \to \bar{\mathbb{R}})$.
Bewijs dat:

$$(\forall A \in \mathscr{F} : \int_A f d\mu = 0) \Rightarrow f = 0 \quad \text{b.o.}$$

Aanwijzing:
Beschouw o.a. $A = \{f > 0\}$ en pas (1.8.5) toe.

Definitie.

Zij $(U,\mathscr{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector.
Dan heet $f_{\underline{x}} : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+$ een dichtheid van $\underline{x}$ indien

$P_{\underline{x}}(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{x}} \, d\lambda_n = 1.$ (2.2.9)

Opmerkingen.

1. Ga m.b.v. opgave 7 na dat f b.o. eenduidig bepaald is, zodat het gerechtvaardigd is $f_{\underline{x}}$ op te schrijven. (2.2.10)

2. Met behulp van (2.2.7.3) en (1.9.12) volgt:
   als $\underline{x}$ continu is en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ Borel-meetbaar, dan geldt:

$$\int_U g \circ \underline{x}\, dP = \int_{\mathbb{R}^n} g dP_{\underline{x}} = \int_{\mathbb{R}^n} g f_{\underline{x}}\, d\lambda_n \,. \qquad (2.2.11)$$

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.
Een stochastische variabele $\underline{x}$ heet discreet als $\underline{x}$ slechts eindig of aftelbaar veel waarden kan aannemen. (2.2.12)

Als $\underline{x}$ een discrete stochastische variabele is, is $\underline{x}(U)$ eindig of aftelbaar en dus is $\underline{x}(U)$ te schrijven als $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\}$ met α_i onderling verschillend.
Indien $A_i := \{\underline{x} = \alpha_i\}$ dan is $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ en $\underline{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \chi_{A_i}$.

Een discrete stochastische variabele lijkt dus op een elementaire functie (verschil: α_i kan ook kleiner dan nul zijn en $\underline{x}$ kan ook een lineaire combinatie van oneindig veel indicatorfuncties zijn).
Merk op: $P\{\underline{x} \in A\} = \sum_{\alpha_i \in A} PA_i$.

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$ en $\underline{y} : U \to \mathbb{R}^m$ stochastische vectoren, dan is $(\underline{x},\underline{y}) : U \to \mathbb{R}^{n+m}$ (zie (2.2.3)) eveneens een stochastische vector.
$P_{\underline{x}}$ en $P_{\underline{y}}$ heten de marginale verdelingen van $P_{(\underline{x},\underline{y})}$. (2.2.13)

Eigenschappen.

1. $P_{\underline{x}} A = P_{(\underline{x},\underline{y})} (A \times \mathbb{R}^m) \qquad (A \in \mathcal{B}_n)$. (2.2.14)

2. $P_{\underline{y}} B = P_{(\underline{x},\underline{y})} (\mathbb{R}^n \times B) \qquad (B \in \mathcal{B}_m)$. (2.2.15)

Opmerking.

Uit $P_{(\underline{x},\underline{y})}$ zijn $P_{\underline{x}}$ en $P_{\underline{y}}$ te bepalen, maar niet omgekeerd. (2.2.16)

Opgave.

8. Als $P_{(\underline{x},\underline{y})}$ dichtheid $f_{(\underline{x},\underline{y})}$ heeft, dan zijn de dichtheden $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$ van resp. $P_{\underline{x}}$ en $P_{\underline{y}}$ hieruit te bepalen.
Aanwijzing: gebruik de stelling van Fubini.

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele, dan definiëren we de verdelingsfunctie

$$F_{\underline{x}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ door: } F_{\underline{x}}(x) := P_{\underline{x}}((-\infty,x]) = P\{\underline{x} \le x\}. \tag{2.2.17}$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele, dan geldt:

1. $F_{\underline{x}}$ is monotoon niet dalend.
2. $F_{\underline{x}}$ is rechts continu.
3. $F_{\underline{x}}(x) \to 1$ als $x \to \infty$.
4. $F_{\underline{x}}(x) \to 0$ als $x \to -\infty$.
5. $P_{\underline{x}} = \mu_{F_{\underline{x}}}$ op $\mathcal{B}$. (2.2.18)

Bewijs.

1. volgt uit het feit dat $P_{\underline{x}}$ een maat is.
2. m.b.v. (1.4.5) volgt:

$$F_{\underline{x}}(x) = P_{\underline{x}}((-\infty,x]) = P_{\underline{x}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty,x+\tfrac{1}{n}]\right) = \lim_{n\to\infty} P_{\underline{x}}((-\infty,x+\tfrac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} F_{\underline{x}}(x+\tfrac{1}{n}).$$

3. m.b.v. (1.4.4) volgt:

$$\lim_{x\to\infty} F_{\underline{x}}(x) = \lim_{x\to\infty} P_{\underline{x}}((-\infty,x]) = \lim_{n\to\infty} P_{\underline{x}}((-\infty,n]) = P_{\underline{x}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty,n]\right) = P_{\underline{x}}(\mathbb{R}) = 1.$$

4. m.b.v. (1.4.5) volgt:

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\underline{x}}(x) = \lim_{n\to\infty} P_{\underline{x}}((-\infty,-n]) = P_{\underline{x}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty,-n]\right) = P_{\underline{x}}\, \emptyset = 0.$$

5. op grond van 1. en 2. is het mogelijk over $\mu_{F_{\underline{x}}}$, de Stieltjes-Lebesguemaat te praten (zie (1.4.16)).
Er geldt:

$$\mu_{F_{\underline{x}}}((a,b]) = F_{\underline{x}}(b) - F_{\underline{x}}(a) = P_{\underline{x}}(-\infty,b] - P_{\underline{x}}(-\infty,a] = P_{\underline{x}}(a,b].$$

Dus $P_{\underline{x}} = \mu_{F_{\underline{x}}}$ op $\mathcal{S}$ (de verzameling der spelden) en derhalve

volgens (1.4.38) ook op $\mathcal{B}$. □

Gevolgen.

1. Als $\underline{x}$ een continue stochastische variabele is, is $F_{\underline{x}}$ absoluut continu en omgekeerd.
2. Als $\underline{x}$ een discrete stochastische variabele is, die slechts eindig veel waarden kan aannemen, dan is $F_{\underline{x}}$ een monotoon niet dalende elementaire functie. (2.2.19)

Opgave.

9. Bewijs dat $F_{\underline{x}}(x) - F_{\underline{x}}(x-) = P\{\underline{x} = x\}$.

2.3. Verwachtingswaarde.

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$ een stochastische vector, dan definiëren we de verwachtingswaarde (of het gemiddelde) $E\underline{x}$ van $\underline{x}$ door:

$$E\underline{x} := \int \underline{x} \; dP . \tag{2.3.1}$$

Eigenschappen.

1. $E(\underline{x} + \underline{y}) = E\underline{x} + E\underline{y}$.
2. $E(\alpha\underline{x}) = \alpha \, E\underline{x} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
3. $E\chi_A = PA \quad (A \in \mathcal{F})$.
4. $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \Rightarrow E\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i PA_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{F})$. (2.3.2)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-meetbaar en $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector, dan geldt:

$$E\, g(\underline{x}) = \int g(x) \, P_{\underline{x}}(dx) . \tag{2.3.3}$$

Bewijs.

Met behulp van (2.3.1), (2.2.7.1), (2.2.7.3) en (1.7.4) volgt:

$$Eg(\underline{x}) = \int g(\underline{x})\, dP = \int g \circ \underline{x}\, dP = \int g dP_{\underline{x}} = \int g(x)\, P_{\underline{x}}(dx). \quad \square$$

Gevolgen.

1. Passen we (2.3.3) toe op $g(\underline{x}) = \underline{x}$ met $n = 1$ dan volgt m.b.v. (2.2.18.5) en (1.9.15):

$$E\underline{x} = \int x dP_{\underline{x}} = \int x d\mu_{F_{\underline{x}}} = \int x dF_{\underline{x}}(x) .$$

2. Als $\underline{x}$ continu is, dan volgt m.b.v. (2.2.11):

$$Eg(\underline{x}) = \int g dP_{\underline{x}} = \int g f_{\underline{x}} d\lambda_n$$

en dus in het bijzonder als $g(x) = x$ en $n = 1$

$$E\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\underline{x}}(x)\, dx . \qquad (2.3.4)$$

Opmerkingen.

1. De verwachtingswaarde van een stochastische vector hoeft niet altijd te bestaan of eindig te zijn. ($L(\underline{x}^+)$ en/of $L(\underline{x}^-)$ kunnen/kan ∞ zijn). (2.3.5)

2. Wel geldt, dat als $(U, \mathscr{F}, P)$ een kansruimte is en $\underline{x}$ een stochastische vector dat:

$$\underline{x} \in L_1 \iff E|\underline{x}| < \infty \text{ (zie 1.7.11.9).} \qquad (2.3.6)$$

Definitie.

Zij $(U, \mathscr{F}, \mu)$ een maatruimte.
Voor $p \in \{x \geq 1\}$ definiëren we:

$$L_p := \{f \mid f : U \to \mathbb{R},\ \mathscr{F}\text{-meetbaar en } L(|f|^p) < \infty\}. \qquad (2.3.7)$$

Opmerking.

Voor $p = 1$ stemt de definitie van L_p overeen met die van L_1 (zie (1.7.10)). (2.3.8)

<u>Stelling</u>.

Zij $(U,\mathscr{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$ een stochastische vector. Dan geldt:

1. $\underline{x} \in L_p \Rightarrow \underline{x} \in L_1 \quad (p \in \mathbb{N})$.
2. $(\underline{x},\underline{y} \in L_p,\ \alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\underline{x} + \underline{y} \in L_p,\ \alpha\underline{x} \in L_p)$. (2.3.9)

<u>Bewijs</u>.

1. Met behulp van (1.7.11) en de ongelijkheid $|\underline{x}| < 1 + |\underline{x}|^p$ (ga na) volgt:
   als $\underline{x} \in L_p$ dan is $L|x| \le L(1+|\underline{x}|^p) = 1 + L|\underline{x}|^p < \infty$, dus $\underline{x} \in L_1$.
2. Als $\underline{x},\underline{y} \in L_p$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan is $\alpha\underline{x} \in L_p$ (triviaal) en m.b.v. de ongelijkheid $|\underline{x} + \underline{y}|^p \le c_p\,(|\underline{x}|^p + |\underline{y}|^p)$ (ga na) volgt dat $\underline{x} + \underline{y} \in L_p$. □

Indien $\|\ \|_p : L_p \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt door: $\|f\|_p := (\int |f|^p\, dP)^{\frac{1}{p}}$ dan is $\|\ \|_p$ in het algemeen geen norm. Analoog aan het geval $p = 1$ (zie blz. 38) kunnen we voor $p > 1$ een verzameling van equivalentieklassen $\mathcal{L}_p$ en hierop een norm $\|\ \|_{\mathcal{L}_p}$ definiëren.

Als we het inproduct van twee stochastische vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ definiëren door: $(\underline{x},\underline{y}) := E\langle\underline{x},\underline{y}\rangle$ dan is $\mathcal{L}_2$ een Hilbertruimte.
Op de volledigheid van deze IP-ruimte gaan we niet in.

$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle$ inproduct in $\mathbb{R}^n$

<u>Definitie</u>.

De <u>variantie</u> σ^2 van $\underline{x}$ wordt gedefinieerd door: $\sigma^2(\underline{x}) := E(\underline{x} - E\underline{x})^2$. (2.3.10)

<u>Eigenschap</u>.

Als $\underline{x} \in L_2$ is $\sigma^2(\underline{x})$ gedefinieerd en eindig en $\sigma^2(\underline{x}) = E\underline{x}^2 - (E\underline{x})^2$. (2.3.11)

<u>Bewijs</u>.

Dit volgt direct m.b.v. (2.3.9). □

In de volgende tabel zijn overeenkomstige begrippen uit de maattheorie en de waarschijnlijkheidsleer aangegeven.

maattheorie	waarschijnlijkheidsleer
meetbare verzameling	gebeurtenis
lege verzameling	onmogelijke gebeurtenis
hele verzameling	zekere gebeurtenis
maat	kans
meetbare functie	stochastische variabele
bijna overal (b.o.)	bijna zeker (b.z.)
integraal	verwachtingswaarde

2.4. Onafhankelijkheid

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

$A,B \in \mathcal{F}$ heten onafhankelijk als $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (2.4.1)

Een rij gebeurtenissen $\{A_i\}_{i\in I}$ heet onafhankelijk als voor iedere eindige verzameling $\{i_1,\ldots,i_n\} \subseteq I$ met i_j's onderling verschillend geldt:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n}) .$$

(I hoeft niet eindig te zijn.) (2.4.2)

Eigenschappen.

1. $\{A_i\}_{i\in I}$ is onafhankelijk $\iff$ iedere eindige deelrij van $\{A_i\}_{i\in I}$ is onafhankelijk. (2.4.3)
2. $\{A_i\}_{i\in I}$ is onafhankelijk $\iff$ $\{A_i^*\}_{i\in I}$ is onafhankelijk. (2.4.4)

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

Twee klassen $\mathcal{C},\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ heten onafhankelijk als:

$$\forall_{A\in\mathcal{C}} \forall_{B\in\mathcal{D}} : \text{A en B zijn onafhankelijk.} \qquad (2.4.5)$$

Een rij klassen $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ waarvoor $\forall_{i\in I} : \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{F}$ heet onafhankelijk als voor iedere eindige verzameling $\{i_1,\ldots,i_n\} \subseteq I$ met i_k's onderling verschillend geldt:

$$\forall_{A_{i_1}\in\mathcal{C}_{i_1}} \cdots \forall_{A_{i_n}\in\mathcal{C}_{i_n}} : P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n})$$

(I hoeft niet eindig te zijn). (2.4.6)

Eigenschap.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ een rij onafhankelijke klassen waarvoor $\forall_{i\in I} : \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{F}$. Dan geldt:

$$\forall_{i\in I} : \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{C}_i \Rightarrow \{\mathcal{D}_i\}_{i\in I} \text{ is onafhankelijk.} \qquad (2.4.7)$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n)$ een rij klassen waarvoor $\forall_{1\le i\le n} : \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ een semiring en $(\mathcal{S},\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n)$ onafhankelijk, dan is ook $(\mathcal{F}(\mathcal{S}),\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n)$ onafhankelijk. (2.4.8)

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $U \in \mathcal{S}$.
Zij $A_{i_1} \in \mathcal{C}_{i_1},\ldots,A_{i_k} \in \mathcal{C}_{i_k}$ met $\forall_{1\le j\le k} : 1 \le i_j \le n$ en de i_j's onderling verschillend. Dan definiëren we op $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ twee eindige maten:

$$\mu_1(B) := P(B)P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$$

en

$$\mu_2(B) := P(B \cap A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \qquad (B \in \mathcal{F}(\mathcal{S}))$$

(ga na dat μ_1 en μ_2 inderdaad eindige maten zijn).
Uit het gegeven volgt:

$\forall_{B\in\mathcal{S}} : \mu_1(B) = \mu_2(B)$ zodat m.b.v. (1.4.38) volgt:

$\forall_{B\in\mathcal{F}(\mathcal{S})} : \mu_1(B) = \mu_2(B)$ oftewel:

$$\forall_{B\in\mathcal{F}(\mathcal{S})} : P(B \cap A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(B)P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}) . \qquad \square$$

Gevolg.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $(\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_n)$ een rij semiringen waarvoor $\forall_{1\le k\le n} : \mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{F}$ en $(\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_n)$ onafhankelijk, dan is ook $(\mathcal{F}(\mathcal{S}_1),\ldots,\mathcal{F}(\mathcal{S}_n))$ onafhankelijk.
Dit volgt door herhaald toepassen van (2.4.8). (2.4.9)

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$ een stochastische vector en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_n$ een klasse, dan geldt:

$$\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{C}) := \{\underline{x}^{\leftarrow}(A) \mid A \in \mathcal{C}\} . \tag{2.4.10}$$

Opgave.

10. Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$ een stochastische vector en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_n$ een klasse. Bewijs dat:

 a) $\mathcal{C}$ is een semiring $\Longrightarrow$ $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{C})$ is een semiring.

 b) $\mathcal{C}$ is een σ-algebra $\Longrightarrow$ $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{C})$ is een σ-algebra.

 c) $\mathcal{C}$ is een semiring $\Longrightarrow$ $(\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{F}(\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{C})))$. Aanwijzing: beschouw $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \mid \underline{x}^{\leftarrow}(A) \in \mathcal{F}(\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{C}))\}$ en pas (1.3.8) toe.

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

Twee stochastische vectoren $\underline{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ en $\underline{y}\colon U \to \mathbb{R}^m$ heten onafhankelijk als $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$ en $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_m)$ onafhankelijk zijn. (2.4.11)

Een rij stochastische vectoren $\{\underline{x}_i\colon U \to \mathbb{R}^{n_i}\}_{i\in I}$ heet onafhankelijk als de rij $\{\underline{x}_i^{\leftarrow}(\mathcal{B}_{n_i})\}_{i\in I}$ onafhankelijk is. (2.4.12)

Opmerkingen.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ en $\underline{y}\colon U \to \mathbb{R}^m$ twee stochastische vectoren.

1. M.b.v. (2.4.5) volgt dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ d.e.s.d. onafhankelijk zijn als:

$$\forall_{A\in\mathcal{B}_n} \forall_{B\in\mathcal{B}_m} : P(\underline{x}^{\leftarrow}(A) \cap \underline{y}^{\leftarrow}(B)) = P(\underline{x}^{\leftarrow}(A))P(\underline{y}^{\leftarrow}(B)) .$$

 Dit laatste is equivalent met:

$$\forall_{A\in\mathcal{B}_n} \forall_{B\in\mathcal{B}_m} : P\{\underline{x} \in A, \underline{y} \in B\} = P\{\underline{x} \in A\}\, P\{\underline{y} \in B\} . \tag{2.4.13}$$

2. Zij $\mathcal{I}_n$ en $\mathcal{I}_m$ respectievelijk de verzamelingen van n- en m-dimensionale cellen.

Ga m.b.v. (2.4.9) en opgave 10c na dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn als $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{S}_n)$ en $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{S}_m)$ onafhankelijk zijn. (2.4.14)

3. Beschouw de stochastische vector $(\underline{x},\underline{y})\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$.
M.b.v. (2.4.13) volgt:
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk $\Longleftrightarrow \forall_{A\times B\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m} : P_{(\underline{x},\underline{y})}(A\times B) = P_{\underline{x}}(A)P_{\underline{y}}(B)$.
Volgens (1.10.10) is $P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}$ een maat op $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$ en $\forall_{A\times B\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m}$:
$P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}(A\times B) = P_{\underline{x}}(A)P_{\underline{y}}(B)$.
Verder geldt $P_{(\underline{x},\underline{y})}$ is een maat op $\mathcal{B}_{n+m}$.
Uit bovenstaande volgt:
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk $\Longleftrightarrow \forall_{A\times B\in\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_m} : P_{(\underline{x},\underline{y})}(A\times B) = P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}(A\times B)$.
M.b.v. (1.4.38) volgt dan
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk $\Longleftrightarrow \forall_{C\in\mathcal{B}_{n+m}} : P_{(\underline{x},\underline{y})}(C) = P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}(C)$ en dus
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk $\Longleftrightarrow P_{(\underline{x},\underline{y})} = P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}$. (2.4.15)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ en $\underline{y}\colon U \to \mathbb{R}^m$ onafhankelijke stochastische vectoren, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Borel-meetbaar en $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ Borel-meetbaar.
Dan zijn $g(\underline{x})$ en $h(\underline{y})$ onafhankelijke stochastische vectoren. (2.4.16)

Bewijs. Zij $A \in \mathcal{B}_k$ en $B \in \mathcal{B}_\ell$.
Er geldt m.b.v. (2.4.13):

$$P\{g(\underline{x}) \in A,\ h(\underline{y}) \in B\} = P\{\underline{x} \in g^{\leftarrow}(A),\ \underline{y} \in h^{\leftarrow}(B)\} =$$
$$= P\{\underline{x} \in g^{\leftarrow}(A)\}\ P\{\underline{y} \in h^{\leftarrow}(B)\} = P\{g(\underline{x}) \in A\}\ P\{h(\underline{y}) \in B\}$$

zodat $g(\underline{x})$ en $h(\underline{y})$ onafhankelijk zijn. □

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen en $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ een permutatie van $(1,2,\ldots,n)$. Dan zijn $\underline{x} := (\underline{x}_{i_1},\ldots,\underline{x}_{i_k})$ en $\underline{y} := (\underline{x}_{i_{k+1}},\ldots,\underline{x}_{i_n})$ onafhankelijke stochastische vectoren. (2.4.17)

Bewijs. Uit (2.2.3) volgt dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische vectoren zijn.
Zij $\mathcal{S}_k$ en $\mathcal{S}_{n-k}$ respectievelijk de verzamelingen van k- en (n-k)-dimensionale

cellen, $A \in \mathcal{I}_k$ en $B \in \mathcal{I}_{n-k}$. Dan zijn A en B te schrijven als

$$A = C_1 \times \ldots \times C_k \quad \text{en} \quad B = C_{k+1} \times \ldots \times C_n \quad \text{met } C_i = (c_i, d_i] \;.$$

Nu geldt:

$$P\{\underline{x} \in A, \underline{y} \in B\} = P\{\underline{x}_{i_1} \in C_1, \ldots, \underline{x}_{i_n} \in C_n\} =$$

$$= P\{\underline{x}_{i_1} \in C_1\}\, P\{\underline{x}_{i_2} \in C_2\} \ldots P\{\underline{x}_{i_n} \in C_n\} =$$

$$= P\{\underline{x}_{i_1} \in C_1, \underline{x}_{i_2} \in C_2, \ldots, \underline{x}_{i_k} \in C_k\}\, P\{\underline{x}_{i_{k+1}} \in C_{k+1}, \ldots, \underline{x}_{i_n} \in C_n\} =$$

$$= P\{\underline{x} \in A\}\, P\{\underline{y} \in B\} \;.$$

Dus $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{I}_k)$ en $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{n-k})$ zijn onafhankelijk en dus zijn volgens (2.4.9) ook $\mathcal{F}(\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{I}_k))$ en $\mathcal{F}(\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{I}_{n-k}))$ onafhankelijk.
M.b.v. opgave 10c volgt dan dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn. □

Opmerking.

Uit (2.4.16) en (2.4.17) volgt:
Als $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen is en $\underline{x}$ en $\underline{y}$ $\mathcal{F}$-meetbare functies van respectievelijk $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k)$ en $(\underline{x}_{k+1}, \ldots, \underline{x}_n)$ $(k < n)$ dan zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk. (2.4.18)

Stelling.

Zij $(U, \mathcal{F}, P)$ een kansruimte, $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijke stochastische variabelen, $\underline{x} \in L_1$ en $\underline{y} \in L_1$, dan geldt:

1. $E(\underline{x}\underline{y}) = E\underline{x}\; E\underline{y}$
2. $\underline{x}\underline{y} \in L_1$. ← $\boxed{|\underline{x}|\,|\underline{y}|}$ 1.10.14 (2.4.19)

Bewijs.

1. Er geldt:

$$E\underline{x}\underline{y} = \int_U \underline{x}\,\underline{y}\; dP = ((2.3.3) \text{ met } g((\underline{x},\underline{y})) = \underline{x}\underline{y}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} xy\; P_{(\underline{x},\underline{y})}(dx\,dy) = (\text{zie } (2.4.15)) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\; P_{\underline{x}} \otimes P_{\underline{y}}(dx\,dy) =$$

$$(\text{zie } (1.10.16)) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} xy \; P_{\underline{x}}(dx) \right) P_{\underline{y}}(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} x \; P_{\underline{x}}(dx) \right) P_{\underline{y}}(dy) = \left(\int x \; P_{\underline{x}}(dx) \right) \left(\int y \; P_{\underline{y}}(dy) \right) = E\underline{x} \; E\underline{y}.$$

2. Analoog aan 1. □

Gevolg.

Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geldt:

$$\sigma^2(\underline{x} + \underline{y}) = E(\underline{x} + \underline{y})^2 - (E(\underline{x} + \underline{y}))^2 = E\underline{x}^2 + 2E\underline{x}\underline{y} + E\underline{y}^2 - (E\underline{x} + E\underline{y})^2 =$$

$$= E\underline{x}^2 + 2\,E\underline{x}\,E\underline{y} + E\underline{y}^2 + (E\underline{x})^2 - 2\,E\underline{x}\,E\underline{y} - (E\underline{y})^2 = \sigma^2(\underline{x}) + \sigma^2(\underline{y}) \; . \tag{2.4.20}$$

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},P)$ een kansruimte en $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen, dan geldt:

$$E(\underline{x}_1 \, \underline{x}_2 \ldots \underline{x}_n) = E(\underline{x}_1)E(\underline{x}_2) \ldots E(\underline{x}_n) \; . \tag{2.4.21}$$

Bewijs. Volgens (2.4.18) zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2 \, \underline{x}_3 \ldots \underline{x}_n$ twee onafhankelijke stochastische variabelen, zodat m.b.v. (2.4.19) geldt:

$$E(\underline{x}_1 \, \underline{x}_2 \ldots \underline{x}_n) = E(\underline{x}_1)E(\underline{x}_2 \, \underline{x}_2 \ldots \underline{x}_n) \; .$$

Pas (2.4.19) nu weer toe op $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3 \, \underline{x}_4 \ldots \underline{x}_n$, etc.
Na $n-1$ stappen volgt het gestelde. □

Gevolg.

Als $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen is, geldt analoog aan (2.4.20):

$$\sigma^2(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n) = \sigma^2(\underline{x}_1) + \ldots + \sigma^2(\underline{x}_n) \; . \tag{2.4.22}$$

Opgave.

11. Zij $(U,\mathfrak{F},P)$ een kansruimte. Bewijs dat als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijke stochastische vectoren zijn met dichtheden respectievelijk $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$, dat dan $(\underline{x},\underline{y})$ een stochastische vector is met dichtheid $f_{\underline{x}}(x)\overline{f}_{\underline{y}}(y)$.
Aanwijzing: gebruik de stelling van Fubini.

Als we een eindig aantal experimenten uitvoeren, zodanig dat de resultaten onderling fysisch onafhankelijk zijn kunnen we het volgende model opstellen:
Zij $(U_1,\mathcal{F}_1,P_1),\ldots,(U_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ een eindig aantal kansruimten.
Als $U = U_1 \times \ldots \times U_n$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$ en $P = P_1 \otimes \ldots \otimes P_n$, dan is volgens (1.10.18) $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.
Resultaten $u \in U$ hebben de gedaante $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ met $\forall_{1\le i\le n} : u_i \in U_i$.
Volgens (1.10.18) geldt:

$$\forall_{1\le i\le n} : A_i \in \mathcal{F}_i \Rightarrow P(A_1 \times \ldots \times A_n) = P_1(A_1) \ldots P_n(A_n) . \qquad (2.4.23)$$

Als $\tilde{\underline{x}}_1,\tilde{\underline{x}}_2,\ldots,\tilde{\underline{x}}_n$ stochastische variabelen zijn op respectievelijk $U_1,U_2,\ldots,U_n$ dan definiëren we de rij $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ door $\underline{x}_k(u) := \tilde{\underline{x}}_k(u_k)$, met $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in U$.
Dan geldt: $\underline{x}_n : U \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{F}$-meetbaar,hetgeen volgt uit (1.5.9) en het feit dat: $\{u \in U \mid \underline{x}_k(u) \le a\} = U_1 \times \ldots \times U_{k-1} \times \{u_k \in U_k \mid \tilde{\underline{x}}_k(u_k) \le a\} \times \times U_{k+1} \times \ldots \times U_n$. De rij $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ is dus een rij stochastische variabelen.
(Merk op dat $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ dezelfde dichtheid kunnen hebben.) (2.4.24)

De stochastische variabelen $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn bovendien onafhankelijk. Voor $n = 2$ volgt dit uit:
$(A \in \mathcal{F}_1,\ B \in \mathcal{F}_2) \Rightarrow A\times U_2$ en $U_1 \times B$ zijn onafhankelijk. Dit volgt uit:

$$P((A\times U_2) \cap (U_1\times B)) = P(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = P(A\times U_2)P(U_1\times B) . \qquad (2.4.25)$$

Voor het geval dat het aantal experimenten niet eindig is kunnen we het volgende model opstellen:
Zij $\forall_{i\in\mathbb{N}} : (U_i,\mathcal{F}_i,P_i)$ een kansruimte. Dan definiëren we:

$$\prod_{i=1}^{\infty} U_i := \{(u_1,u_2,\ldots) \mid u_i \in U_i\} .$$

$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ is de σ-algebra voortgebracht door de klasse $\mathcal{I}$ van verzamelingen van de vorm $(A_1 \times \ldots \times A_n \times U_{n+1} \times U_{n+2} \times \ldots)$ met $A_i \in \mathcal{F}_i$.
$\bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$ is de uitbreiding tot $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ van de maat P op $\mathcal{I}$ gedefinieerd door:

$$P(A_1 \times \ldots \times A_n \times U_{n+1} \times U_{n+2} \times \ldots) = P_1(A_1) \ldots P_n(A_n) \quad \text{met } A_i \in \mathcal{F}_i.$$

Dan geldt weer dat $(\prod_{i=1}^{\infty} U_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i)$ een kansruimte is.
Ook generalisatie van (2.4.24) is mogelijk (ga na).

Opgave.

12. Bewijs dat:

$$\forall_{i\in\mathbb{N}} : A_i \in \mathcal{F}_i \Rightarrow P(A_1 \times A_2 \times \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} P_i(A_i) .$$

Stelling (Borel-Cantelli).

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ en $A = \overline{\lim}\, A_n$. Dan geldt:

1. $PA = 0$ als $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i < \infty$.

2. $PA = 1$ als $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i = \infty$ en de rij $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ onafhankelijk is. (2.4.26)

Bewijs. Definieer $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, dan geldt $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.
Omdat $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ volgt m.b.v. (1.4.5): $PA = \lim_{n\to\infty} PB_n$.

1. $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i < \infty$.

Dan geldt:

$$PA = \lim_{n\to\infty} PB_n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} PA_k = 0 .$$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i = \infty$ en de rij $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is onafhankelijk.

Dan geldt m.b.v. (1.4.5):

$$PB_n^* = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^*) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^*) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} PA_k^* = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - PA_k) = 0 ,$$

immers: $\sum_{i=1}^{\infty} PA_i = \infty$ en $\forall_{k\geq n} : 0 \leq 1-PA_k \leq 1$ zodat het produkt naar 0 divergeert (zie Voortgezette Functietheorie stelling 6.4.2).
Nu volgt:

$$PA = \lim_{n\to\infty} PB_n = 1 - \lim_{n\to\infty} PB_n^* = 1$$ □

2.5. Convergentie van stochastische variabelen.

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$, $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stochastische variabelen.

1. $\underline{x}_n \to \underline{x}$ $(n\to\infty)$ (b.z.) als $P\{\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\} = 1$ (zie (1.5.19)).

2. $\underline{x}_n \to \underline{x}$ $(n\to\infty)$ (stoch) als $\forall_{\varepsilon>0} : P\{|\underline{x}_n - \underline{x}| \geq \varepsilon\} \to 0$ $(n\to\infty)$.

3. $\underline{x}_n \to \underline{x}$ $(n\to\infty)$ (L_1) als $E(|\underline{x}_n - \underline{x}|) \to 0$ $(n\to\infty)$.

4. $\underline{x}_n \to \underline{x}$ $(n\to\infty)$ (L_2) als $E(|\underline{x}_n - \underline{x}|^2) \to 0$ $(n\to\infty)$. (2.5.1)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$, $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stochastische variabelen, dan geldt:

1. $(\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (L_2)) \Rightarrow (\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (L_1))$.
2. $(\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (L_1)) \Rightarrow (\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (\text{stoch}))$. (2.5.2)

Bewijs. Zonder verlies van de algemeenheid mogen we aannemen dat $\underline{x} = 0$ (beschouw anders $\underline{y}_n := \underline{x}_n - \underline{x}$).

1. Zij $\varepsilon > 0$. $\forall_{a\in\mathbb{R}} : |a| \leq 1 + a^2$, dus in het bijzonder (puntsgewijs):
$\frac{|\underline{x}_n|}{\varepsilon} \leq 1 + \frac{\underline{x}_n^2}{\varepsilon^2}$, oftewel $|\underline{x}_n| \leq \varepsilon + \frac{\underline{x}_n^2}{\varepsilon}$ zodat $E|\underline{x}_n| \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}E(\underline{x}_n^2) < 2\varepsilon$ als n voldoende groot is.

2. Zij $\varepsilon > 0$ en $A_n := \{|\underline{x}_n| \geq \varepsilon\}$. Dan geldt:

$$E|\underline{x}_n| = \int |\underline{x}_n|\,dP \geq \int_{A_n} |\underline{x}_n|\,dP \geq \varepsilon \int_{A_n} dP = \varepsilon P(A_n)\ ,$$

zodat $P(A_n) \leq \frac{E|\underline{x}_n|}{\varepsilon} < \varepsilon$ als n voldoende groot is. □

Opgave.

13. Voor $p \geq 1$ definiëren we: $\underline{x}_n \to \underline{x}$ $(n\to\infty)$ (L_p) als $E|\underline{x}_n - \underline{x}|^p \to 0$ $(n\to\infty)$.
Bewijs nu: $(p \geq q \wedge \underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (L_p)) \Rightarrow (\underline{x}_n \to \underline{x}\ (n\to\infty)\ (L_q))$.

Stelling. $\boxed{\text{even heel } \infty}$

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon niet stijgende rij van (niet-negatieve) stochastische variabelen, dan geldt: ( ) via x^+, x^-

$$(\underline{x}_n \to 0 \ (n\to\infty) \ (\text{b.z.})) \iff (\underline{x}_n \to 0 \ (n\to\infty) \ (\text{stoch})) \ . \qquad (2.5.3)$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ en $A_n := \{\underline{x}_n \geq \varepsilon\}$, dus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$.
Zij $\underline{x} := \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$ (in de zin van (2.5.1.1)) en $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\underline{x} \geq \varepsilon\}$. Uit (1.4.5) volgt dan dat $PA = \lim_{n\to\infty} PA_n$.

"$\Longrightarrow$": Er geldt $\forall_{\varepsilon>0} : PA = 0$, zodat $\forall_{\varepsilon>0} : \lim_{n\to\infty} PA_n = 0$ en dus $\forall_{\varepsilon>0} : P\{|\underline{x}_n| \geq \varepsilon\} \to 0 \ (n\to\infty)$.

"$\Longleftarrow$": Er geldt $\forall_{\varepsilon>0} : \lim_{n\to\infty} PA_n = 0$, zodat $\forall_{\varepsilon>0} : PA = 0$.
Neem $\varepsilon = \frac{1}{k}$ dan volgt in het bijzonder: $\forall_{k\in\mathbb{N}} : P\{\underline{x} \geq \frac{1}{k}\} = 0$.
$\{\underline{x} \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\underline{x} \geq \frac{1}{k}\}$ zodat volgens (1.4.4) geldt:

$$P\{\underline{x} \neq 0\} = \lim_{k\to\infty} P\{\underline{x} \geq \tfrac{1}{k}\} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \ .$$

Dus $P\{\underline{x} = 0\} = 1$. □

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$, $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stochastische variabelen, dan geldt:

$$(\underline{x}_n \to \underline{x} \ (n\to\infty) \ (\text{b.z.})) \Longrightarrow (\underline{x}_n \to \underline{x} \ (n\to\infty) \ (\text{stoch})) \ . \qquad (2.5.4)$$

Bewijs. Zonder verlies van de algemeenheid mogen we aannemen dat $\underline{x} = 0$.
Zij $\underline{w}_n := \sup_{k\geq n} |\underline{x}_k|$ dan is $\{\underline{w}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon niet stijgende rij van niet-negatieve stochastische variabelen en $\underline{w}_n \to 0 \ (n\to\infty)$ (b.z.), zodat volgens (2.5.3) geldt: $\underline{w}_n \to 0 \ (n\to\infty)$ (stoch). Daar $|\underline{x}_n| \leq \underline{w}_n$ geldt: $\forall_{\varepsilon>0} : P\{|\underline{x}_n| \geq \varepsilon\} \leq P\{|\underline{w}_n| \geq \varepsilon\}$, zodat ook geldt: $\underline{x}_n \to 0 \ (n\to\infty)$ (stoch). □

Opmerkingen.

1. Het voorafgaande kunnen we schematisch als volgt weergeven:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{L_2 conv.}} \arrow[r, Rightarrow, "(2.5.2.1)"] & \boxed{\text{L_1 conv.}} \arrow[dr, Rightarrow, "(2.5.2.2)"] & \\
& & \boxed{\text{stoch conv.}} \\
& \boxed{\text{b.z. conv.}} \arrow[ur, Rightarrow, "(2.5.4)"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij uit $\mathbb{R}$, dan geldt:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een fundamentaalrij $:\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n,k\geq N} : |a_n - a_k| < \varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}} : \sup_{k,n\geq N} |a_k - a_n| < \varepsilon \Longleftrightarrow \sup_{k,n\geq N} |a_k - a_n| \to 0 \ (N \to \infty). \qquad (2.5.5)$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij stochastische variabelen, dan geldt:

$$\left(\sup_{n,k\geq N} |\underline{x}_n - \underline{x}_k| \to 0 \ (N \to \infty) \ (\text{stoch})\right) \Rightarrow (\underline{x}_n \text{ convergeert b.z.}). \qquad (2.5.6)$$

Bewijs. Zij $\underline{y}_N := \sup_{n,k\geq N} |\underline{x}_n - \underline{x}_k|$, dan is $\{\underline{y}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ een monotoon niet stijgende rij van niet-negatieve stochastische variabelen (ga na) met de eigenschap $\underline{y}_N \to 0 \ (N \to \infty)$ (stoch). Volgens (2.5.3) geldt dan $\underline{y}_N \to 0 \ (N \to \infty)$ (b.z.). Voor die $u \in U$ waarvoor $\underline{y}_N(u) \to 0 \ (N \to \infty)$ is volgens (2.5.5.2) $\{\underline{x}_N(u)\}_{N\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij, zodat voor die u $\{\underline{x}_N(u)\}_{N\in\mathbb{N}}$ een convergente rij is (zie Algebra en Analyse 4.1.14). Dus $\underline{x}_n$ convergeert b.z. □

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij stochastische variabelen. dan geldt:

$$\sup_{k,n\geq N} |\underline{x}_k - \underline{x}_n| \to 0 \ (N \to \infty) \ (\text{stoch}) \Longleftrightarrow \sup_{k\geq N} |\underline{x}_k - \underline{x}_N| \to 0 \ (N \to \infty) \ (\text{stoch}). \qquad (2.5.7)$$

Bewijs. Dit volgt rechtstreeks uit:

$$\sup_{k \geq N} |\underline{x}_k - \underline{x}_N| \leq \sup_{n,k \geq N} |\underline{x}_k - \underline{x}_n| \leq$$

$$\leq \sup_{n,k \geq N} (|\underline{x}_k - \underline{x}_N| + |\underline{x}_n - \underline{x}_N|) \leq 2 \sup_{k \geq N} |\underline{x}_k - \underline{x}_N| \, . \qquad \square$$

Voorbeelden.

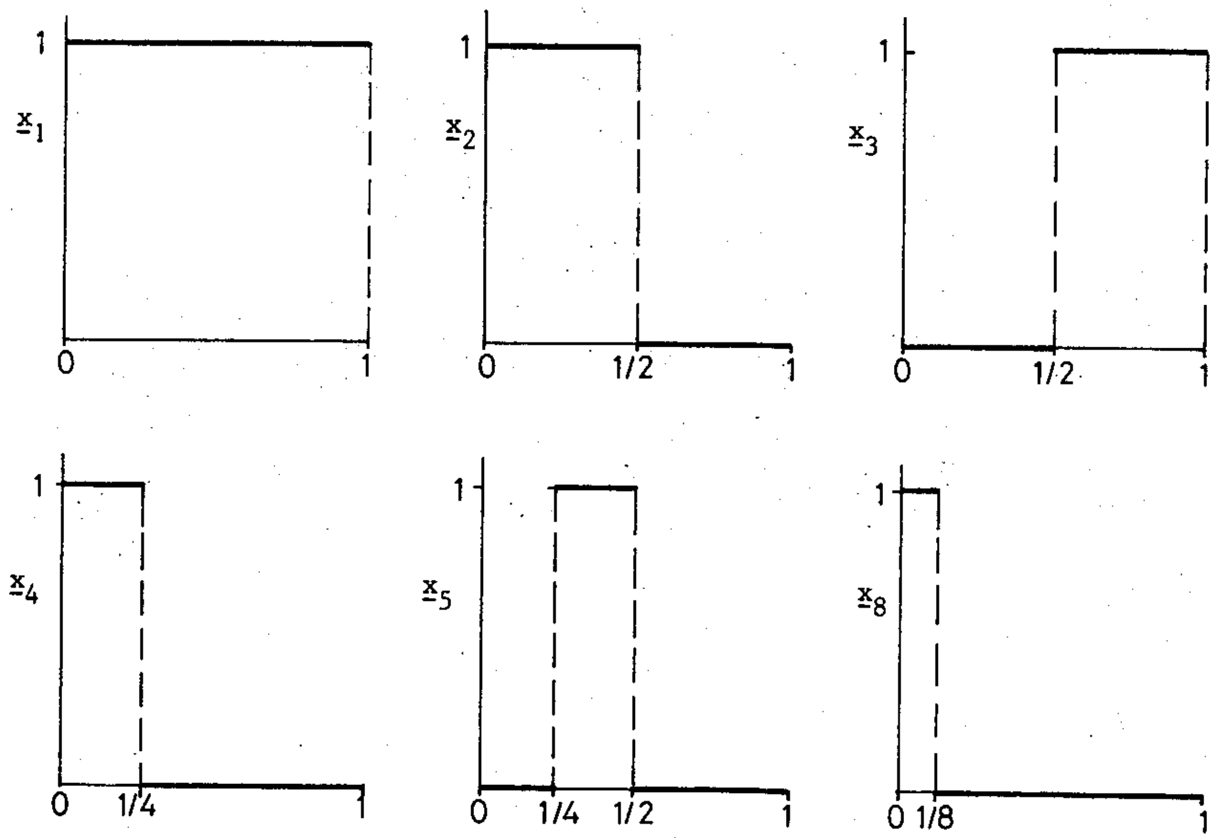
1. $U := [0,1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}_{[0,1]}$ (Borelverzamelingen op $[0,1]$), $P := \lambda$ (Lebesguemaat).

$$\underline{x}_n(u) := \begin{cases} n & 0 < u < \frac{1}{n} \\ 0 & u \in \{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1] \, . \end{cases}$$

Dan geldt $\forall_{u \in U} : \underline{x}_n(u) \to 0 \; (n \to \infty)$, dus $\underline{x}_n$ is b.z. convergent.
Verder geldt $\forall_{n \in \mathbb{N}} : E|\underline{x}_n| = 1$, dus $\underline{x}_n$ is niet L_1 convergent.

2. $(U,\mathcal{F},P)$ als in het vorige voorbeeld.
Voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en $0 \leq m < 2^n$ definiëren we:

$$\underline{x}_{2^n+m}(u) := \begin{cases} 1 & \frac{m}{2^n} \leq u \leq \frac{m+1}{2^n} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$



Er geldt $\underline{x}_n \to 0$ $(n \to \infty)$ (L_1) maar $\forall_{u \in U} \forall_{N \in \mathbb{N}} \exists_{n>N} : \underline{x}_n(u) = 1$, zodat $\underline{x}_n$ niet b.z. convergeert.

HOOFDSTUK III. SOMMEN VAN ONAFHANKELIJKE STOCHASTISCHE VARIABELEN.

3.1. Wetten van de grote aantallen.

Notatie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte met onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$, dan $\underline{s}_n := \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - E\underline{x}_i)$. (3.1.1)

We zullen dikwijls aannemen dat $E\underline{x}_i = 0$, hetgeen geen essentiële beperking is (immers beschouw anders $\underline{y}_i := \underline{x}_i - E\underline{x}_i$).

Opmerking.

$\underline{s}_n$ is een stochastische variabele (ga na). Als $P_{\underline{x}_1} = P_{\underline{x}_2} = \ldots$ (gelijke verdelingen) dan geldt $\mu := E\underline{x}_1 = E\underline{x}_2 = \ldots$ en dus geldt dan $\underline{s}_n = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n - \mu n$. (3.1.2)

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen.

$\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de zwakke wet van de grote aantallen als $\frac{\underline{s}_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (stoch).

$\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de sterke wet van de grote aantallen als $\frac{\underline{s}_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (b.z.). (3.1.3)

Opmerkingen. Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

1. Zij $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met gelijke verdelingen, met $E\underline{x}_n = 0$ en $\underline{x}_n \in L_2$. Zij $\sigma^2 := \sigma^2(\underline{x}_1) = \sigma^2(\underline{x}_2) = \ldots = E\underline{x}_1^2 = E\underline{x}_2^2 = \ldots$. Volgens (2.4.22) geldt dan dat $\sigma^2(\underline{s}_n) = \sigma^2(\underline{x}_1) + \ldots + \sigma^2(\underline{x}_n) = n\sigma^2$, zodat

$$E\left(\frac{\underline{s}_n}{n}\right)^2 = \sigma^2\left(\frac{\underline{s}_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \ (n \to \infty). \quad (E\underline{s}_n = 0) .$$

Dus $\frac{\underline{s}_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (L_2) en derhalve, volgens (2.5.2), $\frac{\underline{s}_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (stoch), zodat $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de zwakke wet van de grote aantallen. $\mathcal{X}$

2. Als $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen is, niet noodzakelijk met gelijke verdelingen, maar wel $E\underline{x}_n = 0$, $\underline{x}_n \in L_2$ en $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(\underline{x}_k) \to 0$ $(n \to \infty)$, dan kan men analoog bewijzen dat $\{\underline{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de zwakke wet van de grote aantallen.

3. Uit (2.5.4) volgt: $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de sterke wet van de grote aantallen $\Rightarrow$ $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de zwakke wet van de grote aantallen.

(3.1.4)

<u>Stelling</u> (ongelijkheid van Kolmogorov).

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m$ onafhankelijke stochastische variabelen met $E\underline{x}_n = 0$ en $\sigma_n^2 := \sigma^2(\underline{x}_n) < \infty$ $(n = 1,\ldots,m)$ (dus $\underline{x}_n \in L_2$), dan geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0} : P\{\max_{1\le n\le m} |\underline{s}_n| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{m} \sigma_n^2 . \tag{3.1.5}$$

<u>Bewijs</u>. Zij $\varepsilon > 0$, $A_1 := \{|\underline{s}_1| \ge \varepsilon\}$ en $A_n := \{|\underline{s}_1| < \varepsilon, \ldots, |\underline{s}_{n-1}| < \varepsilon, |\underline{s}_n| \ge \varepsilon\}$ $(n = 2,\ldots,m)$. De A_i's zijn dan disjunct.

Zij $A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{\max_{1\le n\le m} |\underline{s}_n| \ge \varepsilon\}$. Zij $n \in \{1,\ldots,m-1\}$ dan is $\underline{s}_m - \underline{s}_n = \underline{x}_{n+1} + \ldots + \underline{x}_m$ $\mathcal{F}$-meetbaar en $\underline{s}_n\,\chi_{A_n}$ is dan een $\mathcal{F}$-meetbare functie die uitsluitend van $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ afhangt. Volgens (2.4.18) zijn $\underline{s}_m - \underline{s}_n$ en $\underline{s}_n\,\chi_{A_n}$ dan onafhankelijk zodat:

$$\int_{A_n} \underline{s}_n(\underline{s}_m - \underline{s}_n)dP = \int (\underline{s}_m - \underline{s}_n)\underline{s}_n\,\chi_{A_n}\,dP =$$

$$= E((\underline{s}_m - \underline{s}_n)\underline{s}_n\,\chi_{A_n}) = E(\underline{s}_m - \underline{s}_n).\ E(\underline{s}_n\,\chi_{A_n}) = 0$$

immers $E(\underline{s}_m - \underline{s}_n) = E\underline{x}_{n+1} + \ldots + E\underline{x}_m = 0$. Dus

$$\forall_{n\in\{1,\ldots,m\}} : \int_{A_n} \underline{s}_n(\underline{s}_m - \underline{s}_n)dP = 0 .$$

Nu geldt $\forall_{n\in\{1,\dots,m\}}$:

$$\int_{A_n} \underline{s}_m^2 \, dP = \int_{A_n} (\underline{s}_m - \underline{s}_n + \underline{s}_n)^2 dP = \int_{A_n} (\underline{s}_m - \underline{s}_n)^2 dP +$$

$$+ 2 \int_{A_n} \underline{s}_n(\underline{s}_m - \underline{s}_n) dP + \int_{A_n} \underline{s}_n^2 \, dP = \int_{A_n} (\underline{s}_m - \underline{s}_n)^2 dP +$$

$$+ \int_{A_n} \underline{s}_n^2 \, dP \geq \int_{A_n} \underline{s}_n^2 \, dP \, .$$

Hieruit volgt tenslotte:

$$\sum_{n=1}^{m} \sigma_n^2 = \sigma^2(\underline{s}_m) \text{ (zie (2.4.22))} = \int \underline{s}_m^2 \, dP \geq \int_A \underline{s}_m^2 \, dP =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \int_{A_n} \underline{s}_m^2 \, dP \geq \sum_{n=1}^{m} \int_{A_n} \underline{s}_n^2 \, dP \geq \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^2 \int_{A_n} dP = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^2 \, PA_n = \varepsilon^2 \, PA \, . \quad \square$$

Opmerking.

Voor $m = 1$ gaat (3.1.5) over in de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\forall_{\varepsilon>0} : P\{|\underline{x}_1| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2(\underline{x}_1) \, . \qquad (3.1.6)$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen, $\underline{x}_n \in L_2$, $\sigma_n^2 := \sigma^2(\underline{x}_n)$ en

1. $\sum_{n=1}^{\infty} |E\underline{x}_n| < \infty$,

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$,

dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{x}_n$ b.z. (3.1.7)

<u>Bewijs</u>. Zonder verlies van de algemeenheid mogen we aannemen dat $\forall_{n\in\mathbb{N}}: E\underline{x}_n = 0$ (ga na).
Zij $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ en $k \in \{1,\dots,m-1\}$. Op $\underline{x}_{k+1},\dots,\underline{x}_m$ kunnen we (3.1.5) toepassen, zodat

$$(*)\qquad P\{\max_{k\le n\le m} |\underline{s}_n - \underline{s}_k| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=k+1}^{m} \sigma_j^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=k+1}^{\infty} \sigma_j^2 .$$

Definieer $A_m := \{\max_{k\le n\le m} |\underline{s}_n - \underline{s}_k| \ge \varepsilon\} = \{\max_{k\le n\le m} |\underline{x}_{k+1} + \dots + \underline{x}_n| \ge \varepsilon\}$ $(m \ge k+1)$. Dan geldt: $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq \dots$ en $\forall_{i\ge m}: A_i \in \mathcal{F}$ (ga na). Volgens (1.4.4) geldt dan: $P(\bigcup_{m=k+1}^{\infty} A_m) = \lim_{m\to\infty} PA_m$.

Uit (*) volgt $\forall_{m\in\mathbb{N}}: PA_m \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sigma_j^2$. Er geldt nu:

$$P\{\sup_{n\ge k} |\underline{s}_n - \underline{s}_k| \ge \varepsilon\} = P(\bigcup_{m=k+1}^{\infty} A_m) = \lim_{m\to\infty} PA_m \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=k+1}^{\infty}\sigma_j^2 \to 0 \quad (k\to\infty) .$$

Dus $\sup_{n\ge k} |\underline{s}_n - \underline{s}_k| \to 0$ $(k\to\infty)$ (stoch). Volgens (2.5.7) geldt dan ook $\sup_{n,k\ge N} |\underline{s}_n - \underline{s}_k| \to 0$ $(N\to\infty)$ (stoch), zodat m.b.v. (2.5.6) volgt dat $\underline{s}_n$ b.z. convergeert.

□

<u>Opgave</u>.

14. Als $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij stochastische variabelen is (niet noodzakelijk onafhankelijk) met $\underline{x}_n \in L_1$ en $\sum_{j=1}^{\infty} E|\underline{x}_j| < \infty$, dan convergeert $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ b.z.

Aanwijzing: gebruik (1.9.6) en (1.8.4).

<u>Lemma</u> (Kronecker).

Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij reële getallen, dan geldt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ is convergent} \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \to 0 \quad (n\to\infty) . \tag{3.1.8}$$

Bewijs. Uit Algebra en Analyse 4.3.17 (Cesaro) volgt:

$$(*) \qquad (b_n \to b \ (n \to \infty)) \Rightarrow \left(\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} \to b \ (n \to \infty)\right) .$$

Zij $b_0 := 0$, $b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ en $b := \lim_{n\to\infty} b_n$, dan geldt: $\forall_{k\in\mathbb{N}} : \frac{a_k}{k} = b_k - b_{k-1}$, dus $a_k = k(b_k - b_{k-1})$ zodat

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} kb_k - \sum_{k=1}^{n} kb_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kb_k - \sum_{k=2}^{n} kb_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kb_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)b_k = \sum_{k=1}^{n} (kb_k - (k+1)b_k) + (n+1)b_n =$$

$$= (n+1)b_n - \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Dus geldt:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n+1}{n} b_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k \to 1 \cdot b - b = 0 \ (n \to \infty) .$$

(Hierbij is gebruik gemaakt van (*).) □

Stelling (Kolmogorov).

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met $\underline{x}_n \in L_2$, $\sigma_n^2 := \sigma^2(\underline{x}_n)$, dan geldt:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \Rightarrow \{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan de sterke wet van de grote aantallen. (3.1.9)

Bewijs. Zonder verlies van de algemeenheid mogen we aannemen dat $E\underline{x}_n = 0$. Zij $\underline{y}_n := \frac{\underline{x}_n}{n}$, dan geldt $E\underline{y}_n = 0$ en $\sigma^2(\underline{y}_n) = \frac{\sigma_n^2}{n^2}$. Als nu $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(\underline{y}_n) < \infty$, dan volgt uit (3.1.7) dat $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{y}_n$ b.z. convergeert. Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\underline{x}_n}{n}$ convergeert b.z. Voor die $u \in U$, waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\underline{x}_n(u)}{n}$ convergeert, kunnen we (3.1.8) toepassen zodat voor die u geldt: $\frac{\underline{x}_1(u) + \ldots + \underline{x}_n(u)}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$ en dus geldt: $\frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$ (b.z.). □

Gevolg.

Als $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen is met dezelfde verdeling, $\underline{x}_n \in L_2$, $\mu := E\underline{x}_n$ en $\sigma^2 := \sigma^2(\underline{x}_n)$, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} = \sigma^2 \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

zodat

$$\frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}{n} \to \mu \quad (n \to \infty) \text{ (b.z.).} \tag{3.1.10}$$

Lemma.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$ een stochastische variabele en A_n gedefinieerd door: $A_n := \{|\underline{x}| \geq n\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, dan geldt:

$$\underline{x} \in L_1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} PA_n < \infty . \tag{3.1.11}$$

Bewijs. Zij $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, dan geldt:

1) op B_k is $k \leq |\underline{x}| < k+1$;

2) $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$, i.h.b. $A_0 = U = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$;

3) $PA_n = \sum_{k=n}^{\infty} PB_k$, i.h.b. $\sum_{k=0}^{\infty} PB_k = 1$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} PA_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} PB_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} PB_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)PB_k$,

zodat

$$\sum_{n=0}^{\infty} PA_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} kPB_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k} |\underline{x}|\,dP = \int_U |\underline{x}|\,dP =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k} |\underline{x}|\,dP \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)PB_k = \sum_{n=0}^{\infty} PA_n ,$$

waaruit het gestelde volgt. □

Stelling (Kolmogorov).

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke gelijkverdeelde stochastische variabelen, dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x}_n \in L_1\\ E\underline{x}_n = \mu\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}{n} \to \mu \quad (n \to \infty)\ (\text{b.z.}). \tag{3.1.12}$$

Bewijs. Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we:

$$A_n := \{|\underline{x}_1| \geq n\}$$

$$B_n := \{|\underline{x}_n| \geq n\}$$

$$f_n(x) := \begin{cases} x & \text{als } |x| < n\\ 0 & \text{als } |x| \geq n\end{cases}$$

$$\underline{y}_n := f_n(\underline{x}_n) = \begin{cases} \underline{x}_n & \text{als } |\underline{x}_n| < n\\ 0 & \text{als } |\underline{x}_n| \geq n\end{cases}$$

$$\underline{z}_n := f_n(\underline{x}_1) = \begin{cases} \underline{x}_1 & \text{als } |\underline{x}_1| < n\\ 0 & \text{als } |\underline{x}_1| \geq n\end{cases}.$$

"$\Longrightarrow$": We bewijzen eerst dat:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(\underline{y}_n)}{n^2} < \infty$.

2. $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k(u) \text{ convergeert} \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k(u) \text{ convergeert}\right)$ (b.z.) en als de reeksen convergeren, dan convergeren ze naar dezelfde limiet.

3. $E\underline{y}_k \to \mu \quad (k \to \infty)$.

ad 1): Uit (2.3.11) en het feit dat $\underline{y}_n$ en $\underline{z}_n$ gelijkverdeeld zijn, volgt:

$$\sigma^2(\underline{y}_n) = E\underline{y}_n^2 - (E\underline{y}_n)^2 \leq E\underline{y}_n^2 = E\underline{z}_n^2$$

en derhalve kunnen we hieruit m.b.v. (1.9.6) concluderen dat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(\underline{y}_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\underline{z}_n^2}{n^2} = E\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\underline{z}_n^2}{n^2}.$$

Definieer $\underline{z} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\underline{z}_n^2}{n^2}$.

Laat $u \in U$ en kies $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat:

$$m-1 \leq |\underline{x}_1(u)| < m$$

dan is

$$\underline{z}_k(u) = \begin{cases} 0 & \text{voor } k = 1,2,\ldots,m-1 \\ \underline{x}_1(u) & \text{voor } k = m,m+1,\ldots \end{cases}$$

en dus:

$$\underline{z}(u) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\underline{z}_n^2(u)}{n^2} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\underline{x}_1^2(u)}{n^2} = \underline{x}_1^2(u) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{m}\,\underline{x}_1^2(u) \leq 2|\underline{x}_1(u)| .$$

$(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{m-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{m-1}$ dus $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{m}$, $m \in \mathbb{N}$). Derhalve geldt:

$\forall_{u \in U} : |\underline{z}(u)| \leq 2|\underline{x}_1(u)|$, dus $E|\underline{z}| < \infty$ waaruit 1 direct volgt.

ad 2):

$$B_n = \{|\underline{x}_n| \geq n\} = \{\underline{x}_n \neq \underline{y}_n\} .$$

B definiëren we door:

$$B := \overline{\lim}\, B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k .$$

Daar $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een rij stochastische variabelen is met gelijke verdeling, geldt dat $PB_n = PA_n$. Daar $\underline{x}_1 \in L_1$ volgt m.b.v. (3.1.11) dat $\sum_{n=1}^{\infty} PA_n < \infty$ en derhalve dat $\sum_{n=1}^{\infty} PB_n < \infty$, zodat we m.b.v. (2.4.26) kunnen concluderen dat $PB = 0$.

Er geldt:

$$u \notin B \Rightarrow u \notin B_n \text{ o.d.d.}$$

en derhalve dat

$$u \notin B \Rightarrow \underline{y}_n(u) - \underline{x}_n(u) = 0 \text{ o.d.d.}$$

Met Algebra en Analyse 4.3.17 volgt nu:

$$u \notin B \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{y}_k(u) - \underline{x}_k(u)}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

waaruit het onder 2 gestelde direct volgt.

<u>ad 3)</u>: $\underline{y}_k$ en $\underline{z}_k$ zijn gelijkverdeeld dus $E\underline{y}_k = E\underline{z}_k$. M.b.v. het bewijs van (2.3.3), (2.2.18.5) en (1.9.15) volgt nu:

$$E\underline{z}_k = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f_k \, dP_{\underline{x}_1} = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dF_{\underline{x}_1}(x) \, . \qquad \mathbb{R}$$

Toepassing van (1.9.5) levert dat:

$$E\underline{y}_k \to \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_{\underline{x}_1}(x) = (2.3.4.1) = E\underline{x}_1 = \mu \quad (k \to \infty) \, .$$

M.b.v. (2.4.16) volgt dat $\{\underline{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke, tot L_2 behorende, stochastische variabelen is.

M.b.v. (3.1.9) volgt uit 1 dat:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\underline{y}_k - E\underline{y}_k) \to 0 \quad (n \to \infty) \ (\text{b.z.}) \, .$$

Uit 3 volgt m.b.v. Algebra en Analyse 4.3.17 dat

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\underline{y}_k \to \mu \quad (n \to \infty)$$

zodat

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k \to \mu \quad (n \to \infty) \ (\text{b.z.})$$

waaruit m.b.v. 2 volgt:

$$\frac{\underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n}{n} \to \mu \quad (n \to \infty) \ (\text{b.z.}) \, .$$

"$\Leftarrow$": Zij $\underline{t}_n := \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$, dan geldt:

$$\frac{\underline{t}_n}{n} \to \mu \quad (n \to \infty) \ (\text{b.z.})$$

zodat

$$\frac{\underline{x}_n}{n} = \frac{\underline{t}_n - \underline{t}_{n-1}}{n} = \frac{\underline{t}_n}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{\underline{t}_{n-1}}{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty) \ (\text{b.z.}) \ .$$

Hieruit kunnen we concluderen (vgl. het bewijs van (2.5.4)) dat:

$$(*) \qquad \sup_{m \geq n} \{|\frac{\underline{x}_m}{m}|\} \to 0 \quad (n \to \infty) \ (\text{stoch}) \ .$$

$$\overline{\lim}\, B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|\frac{\underline{x}_m}{m}| \geq 1\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\sup_{m \geq n} |\frac{\underline{x}_m}{m}| \geq 1\} \ .$$

M.b.v. (1.4.5) en (*) volgt dat:

$$P(\overline{\lim}\, B_n) \leq \lim_{n \to \infty} P\{\sup_{m \geq n} \left|\frac{\underline{x}_m}{m}\right| \geq 1\} = 0 \ .$$

De veronderstelling dat $\sum_{n=1}^{\infty} PB_n = \infty$ leidt m.b.v. (2.4.26) tot de tegenspraak: $P(\overline{\lim}\, B_n) = 1$, zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} PB_n < \infty$$

en derhalve dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} PA_n < \infty$$

waaruit m.b.v. (3.1.11) volgt dat $\underline{x}_n \in L_1$.
Als $E\underline{x}_n = \mu_1$, dan volgt m.b.v. "$\Rightarrow$" dat $\mu = \mu_1$. □

3.2. Karakteristieke functies.

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

$\underline{z}$: $U \to \mathbb{C}$ heet een complexe stochastische variabele als $\underline{z}(u)$ te schrijven is als: $\underline{z}(u) = \underline{x}(u) + i\underline{y}(u)$, waarbij $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische variabelen zijn. (3.2.1)

De verwachtingswaarde $E\underline{z}$ van een complexe stochastische variabele $\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y}$ is gedefinieerd door: $E\underline{z} := E\underline{x} + iE\underline{y}$. (3.2.2)

Een complexe stochastische variabele $\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y}$ heet integreerbaar ($\underline{z} \in L_1$) als $\underline{x} \in L_1 \wedge \underline{y} \in L_1$. (3.2.3)

Twee complexe stochastische variabelen $\underline{z}_1 = \underline{x}_1 + i\underline{y}_1$ en $\underline{z}_2 = \underline{x}_2 + i\underline{y}_2$ heten onafhankelijk als de stochastische vectoren $(\underline{x}_1,\underline{y}_1)$ en $(\underline{x}_2,\underline{y}_2)$ onafhankelijk zijn. (3.2.4)

Opmerkingen.

1. Een groot aantal van de reeds behandelde stellingen zijn uit te breiden tot stellingen over complexe stochastische variabelen, zoals de gemajoreerde convergentiestelling van Lebesgue (1.9.5) en de stelling van Fubini (1.10.16). Het lemma van Fatou (1.9.2) echter niet. (3.2.5)
2. Als niet expliciet vermeld wordt dat $\underline{z}$ een complexe stochastische variabele is, dan dient $\underline{z}$ reëel te worden verondersteld. (3.2.6)

Opgave.

15. Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{z}_1$ en $\underline{z}_2$ onafhankelijke complexe stochastische vectoren.
Bewijs dat: $E\underline{z}_1\underline{z}_2 = E\underline{z}_1.E\underline{z}_2$.
Aanwijzing: gebruik (2.4.16).

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$ een stochastische variabele met verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}$. De karakteristieke functie van $\underline{x}$ wordt gedefinieerd door:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) := Ee^{i\underline{x}t} \qquad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, dF_{\underline{x}}(x) \right) \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2.7}$$

Eigenschappen.

1. $\varphi_{\underline{x}}(0) = 1.$
2. $|\varphi_{\underline{x}}(t)| \leq 1.$
3. $\varphi_{\underline{x}}$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.
4. $\underline{x} \in L_1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\underline{x}} \text{ is continu differentieerbaar naar } t \\ \varphi_{\underline{x}}'(0) = iE\underline{x}. \end{cases}$
5. $\underline{x} \in L_2 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\underline{x}} \text{ is } 2\times \text{ continu differentieerbaar naar } t \\ \varphi_{\underline{x}}''(0) = -E\underline{x}^2. \end{cases}$ (3.2.8)

Bewijs.

1. Triviaal.
2. Triviaal.
3. Voor $\tau \in \mathbb{R}$ geldt dat:

$$|\varphi_{\underline{x}}(t+\tau) - \varphi_{\underline{x}}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\underline{x}\tau} - 1|\,dP\,.$$

M.b.v. (1.9.8) volgt dat

$$\forall_{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\underline{x}\tau} - 1|\,dP$$

een continue functie van τ is, waaruit voor $\tau \to 0$ 3 volgt.
4. Volgt uit (1.9.9).
5. Volgt uit (1.9.9). □

Opmerking.

Als $\underline{x}$ een continue stochastische variabele is, dan geldt (zie (2.2.17) en (2.2.9)):

$$F_{\underline{x}}(x) = P_{\underline{x}}((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} f_{\underline{x}}(\xi)d\xi \ .$$

M.b.v. (2.3.4) volgt dat:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\underline{x}}(x)dx \ . \qquad (3.2.9)$$

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische variabelen.
Als $\underline{x} = \mu + \sigma\underline{y}$ $(\mu,\sigma \in \mathbb{R},\ \sigma > 0)$ en $\underline{y}$ dichtheid $f_{\underline{y}}$ en verdelingsfunctie $F_{\underline{y}}$ heeft, dan geldt:

1. $F_{\underline{x}}(x) = F_{\underline{y}}(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

2. $f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{\underline{y}}(\frac{x-\mu}{\sigma})$ (b.o.) als $\underline{y}$ continu is.

3. $\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{it\mu} \varphi_{\underline{y}}(\sigma t)$ als $\underline{y}$ continu is. (3.2.10)

Bewijs.

1. $$F_{\underline{x}}(x) = P\{\underline{x} \le x\} = P\{\underline{y} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\} = F_{\underline{y}}(\frac{x-\mu}{\sigma}) \ .$$

2. $$\int_{-\infty}^{x} f_{\underline{x}}(\xi)d\xi = F_{\underline{x}}(x) = F_{\underline{y}}(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} f_{\underline{y}}(\eta)d\eta = (\xi = \sigma\eta + \mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma} f_{\underline{y}}(\frac{\xi-\mu}{\sigma})d\xi \ .$$

M.b.v. (1.8.5) volgt derhalve dat:

$$\frac{1}{\sigma} f_{\underline{y}}(\frac{\xi-\mu}{\sigma}) = f_{\underline{x}}(\xi) \ \text{(b.o.)} \ .$$

3. M.b.v. 1 volgt:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{\underline{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{\underline{y}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \left(\frac{x-\mu}{\sigma} = y\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\mu+\sigma y)}\, dF_{\underline{y}}(y) = e^{it\mu}\, \varphi_{\underline{y}}(\sigma t)\ . \qquad \Box$$

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ onafhankelijke stochastische variabelen, dan geldt:

$$\varphi_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n} = \varphi_{\underline{x}_1} \cdot \varphi_{\underline{x}_2} \cdot \ldots \cdot \varphi_{\underline{x}_n}\ . \tag{3.2.11}$$

Bewijs. Voor $n = 2$ volgt m.b.v. (2.4.16) en (2.4.19) dat:

$$\varphi_{\underline{x}_1+\underline{x}_2}(t) = Ee^{i(\underline{x}_1+\underline{x}_2)t} = (Ee^{i\underline{x}_1 t})\cdot(Ee^{i\underline{x}_2 t}) = \varphi_{\underline{x}_1}(t)\varphi_{\underline{x}_2}(t)\ ,$$

waaruit door herhaald toepassen het gestelde volgt. $\Box$

Voorbeelden van karakteristieke functies.

1. De Cauchy-verdeling heeft als dichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

en als karakteristieke functie:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+x^2}\, dx = e^{-|t|}$$

(ga dit na m.b.v. contourintegratie).
Algemener geldt dat als

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\ ,$$

dan is

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{-a|t|}\ .$$

2. De normale verdeling heeft als dichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

en als karakteristieke functie:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, e^{ixt}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\, dx = (x - it = z) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = (\text{ga na}) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = e^{-\frac{1}{2}t^2}\,.$$

3. Een discrete verdeling ~~heeft als dichtheid:~~ verdelingsfunctie

$$\underline{x} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, \chi_{A_n}(x)$$

$A_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n)\,(x)$

$\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$

en als karakteristieke functie:

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \sum_{n=1}^{N} e^{it\alpha_n}\, PA_n\,.$$

In het bijzonder geldt dat:

a) voor de singuliere verdeling, gedefinieerd door $P\{\underline{x} = \mu\} = 1$, dat $\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{i\mu t}$.

b) voor de binomiale verdeling, gedefinieerd door $P\{\underline{x} = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $(k = 0,1,2,\ldots,n)$ dat $\varphi_{\underline{x}}(t) = (q + pe^{it})^n$. (3.2.12)

Opgaven.

16. Bewijs dat, als $f_{\underline{x}}$ even is, $\varphi_{\underline{x}}$ reëel is.

17. Bewijs dat de karakteristieke functie van

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + i\mu t}$ is.

3.3. Continuïteitsstelling.

Zij $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ met:

1. F is monotoon niet-dalend,
2. F is rechtscontinu,
3. $F(x) \to 0$ als $x \to -\infty$,
4. $F(x) \to 1$ als $x \to \infty$,

dan is volgens (1.4.16) en (1.4.38) μ_F een maat op $\mathcal{B}$ met $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$, zodat $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ een kansruimte is.
Een functie $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ met de eigenschappen 1 t/m 4 heet een verdelingsfunctie en $\varphi(t) := \int e^{ixt}\, dF(x)$ de bijbehorende karakteristieke functie (vgl. (2.2.17), (2.2.18) en (3.2.7)). (3.3.1)

Als we de stochastische variabele $\underline{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiëren door $\underline{x}(u) := u$ $(u \in \mathbb{R})$, dan geldt: $F_{\underline{x}}(x) = \mu_F\{\underline{x} \le x\} = \mu_F((-\infty, x]) = F(x)$ zodat de in 3.2 voor $F_{\underline{x}}$ en $\varphi_{\underline{x}}$ geformuleerde stellingen ook voor F en φ gelden.

Definities.

1. Zij F een verdelingsfunctie, dan definiëren we:

$$\tilde{F}(x) := \tfrac{1}{2}(F(x-) + F(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}) . \tag{3.3.2}$$

2. De functie $\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ is gedefinieerd door:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases} . \tag{3.3.3}$$

Stelling.

Zij $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ een verdelingsfunctie en $\varphi(t)$ de bijbehorende karakteristieke functie. Dan geldt:

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \varphi(t)dt \qquad (a,b \in \mathbb{R}) \tag{3.3.4}$$

<u>Bewijs</u>. Zonder beperking van de algemeenheid nemen we aan dat $a < b$.
We definiëren:

$$J_T := \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \varphi(t)dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)\right)dt .$$

M.b.v. (1.10.16) volgt:

$$J_T = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} \frac{e^{i(x-b)t} - e^{i(x-a)t}}{t} dt\right)dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0}^{T} \frac{e^{i(x-b)t} - e^{i(x-a)t}}{t} dt + \int_{-T}^{0} \frac{e^{i(x-b)t} - e^{i(x-a)t}}{t} dt\right)dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0}^{T} \frac{e^{i(x-b)t} - e^{i(x-a)t} - e^{-i(x-b)t} + e^{-i(x-a)t}}{t} dt\right)dF(x) =$$

(*) $$= 2i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0}^{T} \frac{\sin(x-b)t - \sin(x-a)t}{t} dt\right)dF(x) .$$

Zij $S(\alpha) := \int_0^{\alpha} \frac{\sin u}{u} du$, dan geldt:

$$\lim_{\alpha\to\infty} S(\alpha) = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \lim_{\alpha\to-\infty} S(\alpha) = -\frac{\pi}{2}$$

(zie Algebra en Analyse 7.6.22) en dus

(**) $$\exists_{M\in\mathbb{R}_+} \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} : |S(\alpha)| \le M .$$

Tevens geldt:

$$\int_0^T \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{aT} \frac{\sin u}{u} du = S(aT) .$$

Substitutie in (*) levert:

$$\frac{i}{2\pi} J_T = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S((x-b)T) - S((x-a)T) dF(x) \; .$$

M.b.v. (**) en (1.9.5) volgt:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi} J_T = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} (S((x-b)T) - S((x-a)T)) dF(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(x-b) - \operatorname{sgn}(x-a)) dF(x) \; .$$

Nu geldt:

$$\operatorname{sgn}(x-b) - \operatorname{sgn}(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < a \text{ of } x > b \\ -1 & \text{als } x = a \text{ of } x = b \\ -2 & \text{als } a < x < b \end{cases}$$

en dus

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi} J_T = \tfrac{1}{2}\Big(\int_{\{a\}} dF(x) + 2 \int_{(a,b)} dF(x) + \int_{\{b\}} dF(x)\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\mu_F(\{a\}) + 2\mu_F((a,b)) + \mu_F(\{b\})) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(F(a) - F(a-) + 2F(b-) - 2F(a) + F(b) - F(b-)) =$$

$$= \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) \; . \qquad \square$$

Gevolg.

Bij een gegeven functie φ is F éénduidig bepaald, immers: Uit (3.3.4) volgt dat bij gegeven φ de functie $\tilde{F}$ op een constante na bepaald is. Door de voorwaarde $\lim_{x\to\infty} \tilde{F}(x) = 1$ is $\tilde{F}$ dan éénduidig bepaald. Omdat $F(x) = \tilde{F}(x+)$ is dan ook F éénduidig bepaald. (3.3.5)

Voorbeelden.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte.

1. Zij $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee onafhankelijke stochastische variabelen met

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{en} \quad f_{\underline{y}}(y) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\nu)^2}{2\tau^2}}$$

(d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een normale verdeling). Dan geldt volgens opgave 17 en (3.2.11):

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

$$\varphi_{\underline{y}}(t) = e^{i\nu t-\frac{1}{2}\tau^2 t}$$

$$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = e^{i(\mu+\nu)t-\frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t} .$$

Dan is volgens (3.3.5) $\underline{x} + \underline{y}$ normaal verdeeld en geldt:

$$E(\underline{x} + \underline{y}) = \mu + \nu \quad \text{en} \quad \sigma^2(\underline{x} + \underline{y}) = \sigma^2 + \tau^2 .$$

2. Zij $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee onafhankelijke stochastische variabelen met

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2} \quad \text{en} \quad f_{\underline{y}}(y) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + y^2}$$

(d.w.z. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een Cauchy-verdeling). Dan geldt volgens (3.2.12.1) en (3.2.11):

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{-a|t|} , \quad \varphi_{\underline{y}}(t) = e^{-b|t|} \quad \text{en} \quad \varphi_{\underline{x}+\underline{y}} = e^{-(a+b)|t|} ,$$

zodat volgens (3.3.5) ook $\underline{x} + \underline{y}$ een Cauchy-verdeling heeft.

3. Zij F een verdelingsfunctie en $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$. Dan volgt m.b.v. (3.2.9):

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx .$$

Als $\varphi \in L_1$ volgt met (3.3.4):

$$F(b) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - 1}{t} \varphi(t)dt = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibt} - 1}{t} \varphi(t)dt .$$

Omdat

$$-i \int_0^b e^{-i\xi t} \, d\xi = \frac{e^{-ibt} - 1}{t}$$

geldt:

$$F(b) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^b e^{-i\xi t} \, d\xi \right) \varphi(t)dt .$$

M.b.v. (1.10.16) volgt:

$$F(b) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} \, \varphi(t)dt \right) d\xi .$$

Als

$$g(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} \, \varphi(t)dt \qquad \frac{1}{2\pi}$$

geldt:

$$\int_0^b f(\xi)d\xi = F(b) - F(0) = \int_0^b g(\xi)d\xi .$$

M.b.v. opgave 7 volgt $f = g$ b.o. (3.3.6)

Definitie.

Als F een verdelingsfunctie is definiëren we:

$$F^{\delta}(x) := \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} F(u)du . \qquad (3.3.7)$$

Omdat F monotoon niet-dalend is geldt:

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} F(x-\delta)du \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} F(u)du \le \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} F(x+\delta)du$$

en dus

$$F(x-\delta) \le F^{\delta}(x) \le F(x+\delta). \tag{3.3.8}$$

Lemma.

Zij F een verdelingsfunctie en φ de bijbehorende karakteristieke functie, dan geldt:

$$F^{\delta}(b) - F^{\delta}(a) = \frac{i}{2\pi\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{t}\,\frac{\sin \delta t}{t}\,\varphi(t)dt \qquad (a,b \in \mathbb{R})\ . \tag{3.3.9}$$

Bewijs.

$$F^{\delta}(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} F(u)du = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} F(u+x)du = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \tilde{F}(u+x)du$$

zodat geldt

$$F^{\delta}(b) - F^{\delta}(a) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} (\tilde{F}(u+b) - \tilde{F}(u+a))du\ .$$

Volgens (3.3.4) geldt:

$$\tilde{F}(u+b) - \tilde{F}(u+a) = \lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t}\, e^{-iut}\, \varphi(t)\, dt$$

en dus

$$F^{\delta}(b) - F^{\delta}(a) = \frac{i}{4\pi\delta}\int_{-\delta}^{\delta} (\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t}\, e^{-iut}\, \varphi(t)dt)du\ .$$

M.b.v. (1.9.5) volgt (immers met (**) uit het bewijs van (3.3.4) volgt $|J_T| \le 4M$):

$$F^{\delta}(b) - F^{\delta}(a) = \frac{i}{4\pi\delta}\lim_{T\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} (\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t}\, e^{-iut}\, \varphi(t)dt)du =$$

$$= \frac{i}{4\pi\delta} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} e^{-iut} \varphi(t) du \right) dt =$$

$$= \frac{i}{4\pi\delta} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \varphi(t) \left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-iut} du \right) dt =$$

$$= \frac{i}{2\pi\delta} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \frac{\sin \delta t}{t} \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{i}{2\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{t} \frac{\sin \delta t}{t} \varphi(t) dt \quad \text{(ga na).} \qquad \square$$

Stelling (Helly).

Zij $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij verdelingsfuncties en F een verdelingsfunctie met de eigenschap $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $F(x)$ continu is. Zij $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde continue functie, dan geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \quad (n \to \infty) . \tag{3.3.10}$$

(Deze stelling geldt ook voor $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.)

Bewijs. Zij M z.d.d. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : |g(x)| \le M$ en zij $\varepsilon > 0$.
Kies $S > 0$ en $T > 0$ z.d.d. F continu is in T en $-S$ en $F(T) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{M}$ en $F(-S) \le \frac{\varepsilon}{M}$. (Dit is mogelijk daar F hoogstens aftelbaar veel discontinuïteitspunten heeft; zie Algebra en Analyse 5.7.18.)
Kies nu α_i, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0,\ldots,m)$ z.d.d. $-S = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = T$, F continu is in a_i en voor de functie φ gedefinieerd $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ met $A_i := (a_{i-1}, a_i]$ geldt dat $\forall_{x\in[-S,T]} : |\varphi(x) - g(x)| \le \varepsilon$. (Dit is mogelijk vanwege de uniforme continuïteit van g op $[-S,T]$.)
Er geldt:

$$\int_{-S}^{T} \varphi dF_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{-S}^{T} \chi_{A_i} dF_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \{F_n(a_i) - F_n(a_{i-1})\} \to$$

$$\to \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \{F(a_i) - F(a_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{-S}^{T} \chi_{A_i} dF = \int_{-S}^{T} \varphi dF \ (n \to \infty) .$$

Bovendien geldt:

$$\left|\int gdF - \int_{-S}^{T} \varphi dF\right| \le \left|\int gdF - \int_{-S}^{T} gdF\right| + \left|\int_{-S}^{T} gdF - \int_{-S}^{T} \varphi dF\right| \le$$

$$\le M\left(\int_{T}^{\infty} dF + \int_{-\infty}^{-S} dF\right) + \varepsilon \int_{-S}^{T} dF \le M\left(\frac{\varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{M}\right) + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

(Dit geldt ook voor F_n.)

En dus

$$\left|\int gdF_n - \int gdF\right| \le \left|\int gdF_n - \int_{-S}^{T} \varphi dF_n\right| + \left|\int_{-S}^{T} \varphi dF_n - \int_{-S}^{T} \varphi dF\right| +$$

$$+ \left|\int_{-S}^{T} \varphi dF - \int gdF\right| \le 3\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon = 7\varepsilon$$

als n voldoende groot is. □

Opgave.

18. Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ twee begrensde rijen reële getallen. Bewijs dat geldt: $\underline{\lim}\,(a_n - b_n) \le \overline{\lim}\, a_n - \overline{\lim}\, b_n$.

Stelling (Continuïteitsstelling).

Zij $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij verdelingsfuncties met bijbehorende karakteristieke functies $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Als $\forall_{t\in\mathbb{R}} : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ en φ is continu in 0 dan bestaat er een verdelingsfunctie F z.d.d.

1. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ voor alle x waarvoor F continu is;

2. φ is de karakteristieke functie behorend bij F. (3.3.11)

Bewijs. We merken eerst op dat:

I. $\varphi(0) = 1$, immers $\forall_{n\in\mathbb{N}}: \varphi_n(0) = 1$ (zie (3.2.8.1));

II. $\forall_{t\in\mathbb{R}}: |\varphi(t)| \leq 1$, immers $\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{t\in\mathbb{R}}: |\varphi_n(t)| \leq 1$ (zie (3.2.8.2)).

We definiëren nu:

$$F_0(x) := \overline{\lim}\, F_n(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Dan geldt:

a) $F_0(x)$ is monotoon niet-dalend, immers $\forall_{n\in\mathbb{N}}: F_n(x)$ is monotoon niet-dalend.

b) $0 \leq F_0(x) \leq 1$, immers $\forall_{n\in\mathbb{N}}: 0 \leq F_n(x) \leq 1$.

c) Zij $D > 0$, dan geldt volgens (3.3.8):

$$F_n(-2D) \leq F_n^D(-\cancel{2}D) \quad \text{en} \quad F_n^D(D) \leq F_n(2D)$$

en dus

$$F_n(2D) - F_n(-2D) \geq F_n^D(D) - F_n^D(-D)$$

en volgens (3.3.9):

$$F_n(2D) - F_n(-2D) \geq \frac{-1}{2\pi D}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itD} - e^{itD}}{it}\,\frac{\sin Dt}{t}\,\varphi_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi D}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Dt}{t^2}\,\varphi_n(t)dt \ .$$

Toepassing van opgave 18 levert:

$$\overline{\lim}\, F_n(2D) - \overline{\lim}\, F_n(-2D) \geq \underline{\lim}\,(F_n(2D) - F_n(-2D)) \geq$$

$$\geq \underline{\lim}\,\frac{1}{\pi D}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Dt}{t^2}\,\varphi_n(t)dt \ .$$

Zodat m.b.v. (1.9.5) $(g(t) := \min(D^2, \frac{1}{t^2}))$ geldt:

$$F_0(2D) - F_0(-2D) \geq \frac{1}{\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Dt}{t^2} \varphi(t)dt = (s = Dt) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2} \varphi(\tfrac{s}{D})ds$$

en m.b.v. (1.9.5), a), b) en I:

$$\lim_{D\to\infty} (F_0(2D) - F_0(-2D)) \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2} \varphi(0)ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2} ds = 1 .$$

M.b.v. b) volgt dan:

$$\lim_{x\to\infty} F_0(x) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x\to-\infty} F_0(x) = 0 .$$

Als nu $F(x) := F_0(x+)$ dan is F rechtscontinu (i.h.a. is F_0 niet rechtscontinu). M.b.v. a) en c) volgt dan dat F een verdelingsfunctie is.

We zullen nu bewijzen dat F ook de eigenschappen 1. en 2. heeft.

1. Zij $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ en a z.d.d. $F_0(a+\delta) < \varepsilon$. Omdat $F_0(a+\delta) = \overline{\lim}\, F_n(a+\delta)$ geldt:

$$\exists_{N_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>N_0} : F_n(a+\delta) \leq 2\varepsilon$$

zodat m.b.v. (3.3.8) volgt:

$$\exists_{N_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>N_0} : F_n^\delta(a) \leq 2\varepsilon .$$

Enerzijds geldt:

$$\overline{\lim}\, F_n^\delta(x) \leq \overline{\lim}\, (F_n^\delta(x) - F_n^\delta(a) + 2\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} (F_n^\delta(x) - F_n^\delta(a) + 2\varepsilon)$$

(ga na dat de limiet bestaat op grond van (3.3.9) toegepast op F_n^δ en (1.9.5)) en anderzijds:

$$\underline{\lim}\ F_n^\delta(x) \geq \underline{\lim}\ (F_n^\delta(x) - F_n^\delta(a)) = \lim_{n\to\infty} (F_n^\delta(x) - F_n^\delta(a))$$

en dus

$$\overline{\lim}\ F_n^\delta(x) - \underline{\lim}\ F_n^\delta(x) \leq 2\varepsilon$$

zodat $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^\delta(x)$ bestaat.

Volgens (3.3.8) geldt voor $\delta > 0$:

$$F_0(x-2\delta) = \overline{\lim}\ F_n(x-2\delta) \leq \overline{\lim}\ F_n^\delta(x-\delta) =$$

$$= \underline{\lim}\ F_n^\delta(x-\delta) \leq \underline{\lim}\ F_n(x) \leq \overline{\lim}\ F_n(x) = F_0(x)\ .$$

Als x een continuïteitspunt van F is geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : |F_0(x-2\delta) - F_0(x)| < \varepsilon$$

en dus:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : |\underline{\lim}\ F_n(x) - \overline{\lim}\ F_n(x)| < \varepsilon$$

of

$$\forall_{\varepsilon>0} : |\underline{\lim}\ F_n(x) - \overline{\lim}\ F_n(x)| < \varepsilon$$

zodat: $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ bestaat en $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x) = F(x)$.

2. Dit volgt rechtstreeks uit (3.3.10) met $g(t) := e^{ixt}$. □

Eigenschappen.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke gelijkverdeelde stochastische variabelen met $\underline{x}_n \in L_2$, $E\underline{x}_n = 0$ en $\sigma^2 := E\underline{x}_n^2$.

Zij $\underline{t}_n := \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$, $\underline{z}_n := \frac{\underline{t}_n}{n}$ en $\underline{y}_n := \frac{\underline{t}_n}{\sqrt{n}}$, dan geldt:

1. $\forall_{x>0} : F_{\underline{z}_n}(x) \to 1\ (n \to \infty)$.
2. $\forall_{x<0} : F_{\underline{z}_n}(x) \to 0\ (n \to \infty)$.
3. $\sigma^2(\underline{z}_n) \to 0\ (n \to \infty)$.

4. $\sigma^2(\underline{y}_n) = \sigma^2$. (3.3.12)

Bewijs.

1. Volgens (3.1.10) geldt:

$$\underline{z}_n \to E\underline{x}_n = 0 \ (n \to \infty) \ (\text{b.z.})$$

en volgens (2.5.4) dus ook:

$$\underline{z}_n \to 0 \ (n \to \infty) \ (\text{stoch}) ,$$

m.a.w.

(*) $$\forall_{\varepsilon>0} : P(|\underline{z}_n| \geq \varepsilon) \to 0 \ (n \to \infty) .$$

En dus geldt in het bijzonder:

$$\forall_{\varepsilon>0} : F_{\underline{z}_n}(\varepsilon) = P(\underline{z}_n \leq \varepsilon) = 1 - P(\underline{z}_n > \varepsilon) \to 1 \ (n \to \infty) .$$

2. Uit (*) volgt ook:

$$\forall_{\varepsilon>0} : F_{\underline{z}_n}(-\varepsilon) = P(\underline{z}_n \leq -\varepsilon) \to 0 \ (n \to \infty) .$$

3. $$\sigma^2(\underline{z}_n) = \sigma^2(\frac{\underline{t}_n}{n}) = \frac{\sigma^2(\underline{t}_n)}{n^2} = (2.4.22) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \ (n \to \infty) .$$

4. $$\sigma^2(\underline{y}_n) = \sigma^2(\frac{\underline{t}_n}{\sqrt{n}}) = \frac{\sigma^2(\underline{t}_n)}{n} = (2.4.22) = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2 .$$ □

Stelling (Centrale limietstelling).

Zij $(U,\mathfrak{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke gelijkverdeelde stochastische variabelen met $\underline{x}_n \in L_2$, $E\underline{x}_n = 0$ en $\sigma^2 := E\underline{x}_n^2$.

Zij $\underline{t}_n := \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$ en $\underline{y}_n := \frac{\underline{t}_n}{\sqrt{n}}$, dan geldt:

$$F_{\underline{y}_n}(x) \to \Phi_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} d\xi . \tag{3.3.13}$$

Bewijs. Zij $\varphi(t) := E(e^{i\underline{x}_1 t})$ (dus $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \varphi_{\underline{x}_n}(t) = \varphi(t))$.
Volgens (3.2.8.5) is φ 2× continu differentieerbaar met $\varphi'(0) = iE\underline{x}_1 = 0$ en $\varphi''(0) = -E\underline{x}_1^2 = -\sigma^2$, zodat (Taylor):

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \tfrac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0) .$$

Er geldt: $\forall_{a\in\mathbb{R}} : \varphi_{a\underline{x}}(t) = \varphi_{\underline{x}}(at)$ en dus

$$\varphi_{\underline{y}_n}(t) = \varphi_{\frac{\underline{t}_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\underline{t}_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = (3.2.10) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (n \to \infty) \quad \text{(ga na)}.$$

Volgens opgave 17 is $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ de karakteristieke functie behorende bij de verdelingsfunctie Φ_σ.
Daar Φ_σ overal continu is volgt met (3.3.11) de bewering. □

Stelling.

Zij $(U,\mathfrak{F},P)$ een kansruimte en $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met $\underline{x}_n \in L_2$ en $E\underline{x}_n = 0$.

Zij $\underline{t}_n := \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$, $\tau_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \sigma^2(\underline{x}_k) = \sigma^2(\underline{t}_n)$ en $\underline{y}_n := \dfrac{\underline{t}_n}{\tau_n}$.
Als voldaan is aan de Lindebergse voorwaarde:

$$\forall_{\varepsilon>0} : \frac{1}{\tau_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq\varepsilon\tau_n} x^2 dF_{\underline{x}_k}(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

dan geldt:

$$F_{\underline{y}_n} \to \Phi_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi . \tag{3.3.14}$$

Op het bewijs hiervan gaan we niet in.

Opmerking.

Als de stochastische variabelen bovendien gelijkverdeeld zijn geldt:

$$\sigma^2(\underline{y}_n) = \sigma^2\left(\frac{\underline{t}_n}{\tau_n}\right) = \frac{\sigma^2(\underline{t}_n)}{\tau_n^2} = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1 \; .$$

Er is ook voldaan aan de Lindebergse voorwaarde, want

$$\frac{1}{\tau_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq\varepsilon\tau_n} x^2 dF_{\underline{x}_k}(x) = \frac{1}{\sigma^2 n}\, n \int_{|x|\geq\varepsilon\sigma\sqrt{n}} x^2 dF_{\underline{x}_1}(x) \to 0 \;\; (n\to\infty) \; ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $\underline{x}_1 \in L_2$. (3.3.15)

Zodat (3.3.14) en (3.3.13) dan overeenkomen.

HOOFDSTUK IV. VOORWAARDELIJKE VERWACHTINGEN.

4.1. Voorwaardelijke verwachtingen.

Definities.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $B \in \mathcal{F}$ met $PB > 0$.
We definiëren nu voor alle $A \in \mathcal{F}$ de voorwaardelijke kans door:

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{PB} . \tag{4.1.1}$$

Zij $\forall_{A\in\mathcal{F}} : Q_B(A) := P(A \mid B)$ dan is Q_B een kans op $\mathcal{F}$ (ga na).
Zij $\underline{x}$ een stochastische tot L_1 behorende variabele dan definiëren we de voorwaardelijke verwachting $E(\underline{x} \mid B)$ van $\underline{x}$ door

$$E(\underline{x} \mid B) := \int \underline{x}\, dQ_B , \tag{4.1.2}$$

hetgeen we noteren als: $\int \underline{x}(u)P(du \mid B)$.

Eigenschap.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $B \in \mathcal{F}$ met $PB > 0$ en $\underline{x} \in L_1$ een stochastische variabele, dan geldt:

$$E(\underline{x} \mid B) = \frac{1}{PB} \int_B \underline{x}\, dP . \tag{4.1.3}$$

Bewijs. Het bewijs gaat analoog aan dat van (1.9.12).

1. Als $\underline{x} = \chi_A$ $(A \in \mathcal{F})$ dan geldt:

$$E(\underline{x} \mid B) = \int \chi_A(u)P(du \mid B) = \int \chi_A dQ_B = \int_A dQ_B = Q_B(A) = P(A \mid B) =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{PB} = \frac{1}{PB} \int_{A\cap B} dP = \frac{1}{PB} \int_B \chi_A dP .$$

2. Als $\underline{x}$ een elementaire functie is volgt de eigenschap uit 1 en de lineariteit van de integraal.

3. Als $\underline{x} \geq 0$ volgt de eigenschap uit (1.7.1), (1.9.1) en 2.

4. Als $\underline{x}$ willekeurig is geldt $\underline{x} = \underline{x}^+ - \underline{x}^-$ met $\underline{x}^+, \underline{x}^- \in L_1$ daar $\underline{x} \in L_1$, zodat de eigenschap nu m.b.v. 3 volgt. □

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $U = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ $(B_i \in \mathcal{F})$ met $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} : PB_i > 0$ en $\mathcal{C} := \{\emptyset, B_1, \dots, B_n\}$, dan definiëren we bij een stochastische variabele $\underline{x} \in L_1$ de stochastische variabele $E(\underline{x} \mid \mathcal{C})$ door:

$$E(\underline{x} \mid \mathcal{C}) := \sum_{k=1}^{n} E(\underline{x} \mid B_k)\chi_{B_k} \; . \tag{4.1.4}$$

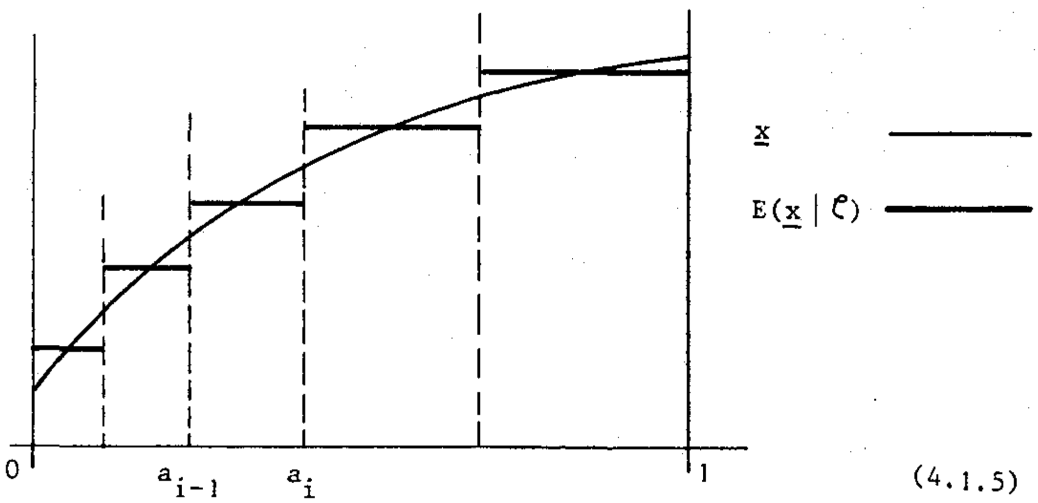
Voorbeeld.

Zij $U := (0,1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}_{(0,1]}$, $P = \lambda$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ en $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} : B_i := (a_{i-1}, a_i]$.
Als nu $\underline{x} \in L_1$ een stochastische variabele is, dan geldt als $i \in \{1,\dots,n\}$:

$$\forall_{u \in B_i} : E(\underline{x} \mid \mathcal{C}) = E(\underline{x} \mid B_i) = (4.1.3) = \frac{1}{PB_i} \int_{B_i} \underline{x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{a_i - a_{i-1}} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \underline{x}(u)\, du$$

hetgeen gelijk is aan het gemiddelde van $\underline{x}$ op het interval $(a_{i-1}, a_i]$, zodat $E(\underline{x} \mid \mathcal{C})$ dan uitziet als in onderstaande figuur.



(4.1.5)

Zij $\mathcal{G} := \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\{\emptyset, B_1, \ldots, B_n\}) = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid I \subseteq \{1,\ldots,n\}\}$. (4.1.6)

(Ga dit na m.b.v. (1.3.8).)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $U = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \in \mathcal{F}$, $PB_i > 0$ en $\mathcal{G}$ gedefinieerd als boven, dan geldt voor een stochastische variabele $\underline{x}$:

$$\underline{x} \text{ is } \mathcal{G}\text{-meetbaar} \iff \underline{x} \text{ is constant op elke } B_i. \qquad (4.1.7)$$

Bewijs.

"$\Leftarrow$": Zij $\underline{x} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i}$ dan is $\underline{x}$ $\mathcal{G}$-meetbaar, daar χ_{B_i} $\mathcal{G}$-meetbaar is.

"$\Rightarrow$": Zij $j \in \{1,\ldots,n\}$ en $u_1, u_2 \in B_j$ en α z.d.d. $\underline{x}(u_1) < \alpha < \underline{x}(u_2)$. Definieren we nu $A := \{\underline{x} \le \alpha\}$ dan geldt $A \in \mathcal{G}$ volgens (1.5.9). Uit (4.1.6) volgt dan dat er een $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ is z.d.d. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Daar $u_1 \in A$ geldt $j \in I$ en daar $u_2 \notin A$ geldt $j \notin I$. Tegenspraak. □

Gevolgen.

1. $\underline{y} := E(\underline{x} \mid \mathcal{C})$ is $\mathcal{G}$-meetbaar.

2. Als $\underline{x} \in L_1$ dan geldt:

$$\int_{B_i} \underline{y}\, dP = \int_{B_i} \sum_{k=1}^{n} E(\underline{x} \mid B_k)\chi_{B_k}\, dP = E(\underline{x} \mid B_i) PB_i = (4.1.3) = \int_{B_i} \underline{x}\, dP$$

en dus volgt met (4.1.7) en de lineariteit van de integraal:

$$\forall_{B \in \mathcal{G}} : \int_B \underline{y}\, dP = \int_B \underline{x}\, dP . \qquad (4.1.8)$$

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x} \in L_1$ een stochastische variabele, $\mathcal{G}$ een σ-algebra met $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Een stochastische variabele $\underline{y}$ heet een voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ als geldt:

1. $\underline{y}$ is $\mathcal{G}$-meetbaar.

2. $\forall_{B \in \mathcal{G}} : \int_B \underline{y}\, dP = \int_B \underline{x}\, dP$. (4.1.9)

Uit (1.9.14) en (1.9.11) volgt: zij $(U,\mathcal{F},\mu)$ een σ-finiete maatruimte, ν een maat op $\mathcal{F}$. Als $\forall_{A \in \mathcal{F}} : (\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$ dan bestaat er een $\mathcal{F}$-meetbare functie $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ z.d.d.

(*) $\forall_{A \in \mathcal{F}} : \nu(A) = \int_A f d\mu$.

Als bovendien μ en ν eindige maten zijn dan kunnen we een $g: U \to \mathbb{R}_+$ en $g \in L_1$ vinden die aan (*) voldoet, immers er is een $f: U \to \bar{\mathbb{R}}_+$ die $\mathcal{F}$-meetbaar is en aan (*) voldoet en $\nu(U) = \int f d\mu < \infty$ zodat volgens (1.8.4) f b.o. eindig is. g kunnen we dan definiëren door: $\forall_{x \in \{f \neq \infty\}} : g(x) := f(x)$ en $\forall_{x \in \{f = \infty\}} : g(x) := a\ (a \in \mathbb{R})$. g is dan ook $\mathcal{F}$-meetbaar (ga na dat $\{f = \infty\}$ $\mathcal{F}$-meetbaar is en pas (1.5.9) toe). (4.1.10)

Zij nu $\underline{x} \geq 0$ en $\underline{x} \in L_1$. Zij ν gedefinieerd door: $\forall_{A \in \mathcal{F}} : \nu(A) := \int_A \underline{x}\, dP$. Daar $\underline{x} \in L_1$ volgt m.b.v. (1.9.10) dat ν een eindige maat is op $\mathcal{F}$, dus ook op $\mathcal{G}$. $(U,\mathcal{G},P)$ is een σ-finiete maatruimte. P is zelfs een eindige maat. Bovendien geldt: $\forall_{A \in \mathcal{G}} : (P(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$.
Uit (4.1.10) toegepast op $(U,\mathcal{G},P)$ volgt dan dat er een $\mathcal{G}$-meetbare functie $\underline{y}: U \to \mathbb{R}_+$ bestaat z.d.d.

$$\forall_{A \in \mathcal{G}} : \nu(A) = \int_A \underline{y}\, dP , \quad \text{oftewel} \quad \forall_{A \in \mathcal{G}} : \int_A \underline{x}\, dP = \int_A \underline{y}\, dP .$$

Indien $\underline{x} \geq 0$ ($\underline{x} \in L_1$) bestaat de voorwaardelijke verwachting $\underline{y}$ dus altijd. Voor willekeurige $\underline{x} \in L_1$ dus ook, hetgeen volgt uit het voorafgaande en het feit dat $\underline{x} = \underline{x}^+ - \underline{x}^-$. (4.1.11)

Als $\underline{y}$ en $\underline{z}$ voorwaardelijke verwachtingen zijn van $\underline{x}$ dan geldt volgens (1.5.14) dat $\underline{y} - \underline{z}$ $\mathcal{G}$-meetbaar is en $\forall_{B \in \mathcal{G}} : \int_B (\underline{y} - \underline{z})dP = 0$, zodat volgens (1.8.5) geldt: $\underline{y} = \underline{z}$ b.z. De voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ is dus bijna ~~overal~~ zeker eenduidig bepaald. (4.1.12)

Eigenschap.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\mathcal{G}$ een σ-algebra met $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ en $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ tot L_1 behorende stochastische variabelen waarvoor geldt: $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ b.~~o~~z.
Als $\underline{y}$ een voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}_1$ is, is $\underline{y}$ ook een voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}_2$. (4.1.13)

Bewijs. Laat $B \in \mathcal{G}$. Dan volgt het gestelde uit opmerking 2 bij (1.8.5) toegepast op $(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)\cdot\chi_B$. □

Notatie.

Zij $\mathcal{F}$ een σ-algebra.
Op de verzameling van de tot L_p $(p \in \mathbb{N})$ behorende $\mathcal{F}$-meetbare functies, die we met $L_p(\mathcal{F})$ zullen aangeven, voeren we de relatie $\sim$ in door:

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; f = g \text{ b.o.}$$

De verzameling van de bij $\sim$ behorende equivalentieklassen geven we aan met $\mathcal{L}_p(\mathcal{F})$. (4.1.14)

Opmerkingen.

1. Het toevoegen van een voorwaardelijke verwachting $\underline{y}$ aan een stochastische vector $\underline{x}$ is niet eenduidig (zie (4.1.12)). Dit niet eenduidig zijn is te ondervangen door een voorwaardelijke verwachtingsoperator $E^{\mathcal{G}} : \mathcal{L}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}_1(\mathcal{G})$ te introduceren, die equivalentieklassen op elkaar afbeeldt. We noteren dit (slordig!) als $\underline{y} = E^{\mathcal{G}}\,\underline{x} = E(\underline{x} \mid \mathcal{G})$.

2. Bekijken we nu het bijzondere geval (zie (2.3.9)) dat $\underline{x} \in L_2(\mathcal{F})$.
Als $(\underline{x}_1,\underline{x}_2) := \int_U \underline{x}_1\,\underline{x}_2\,dP$, dan zijn $\mathcal{L}_2(\mathcal{F})$ en $\mathcal{L}_2(\mathcal{G})$ Hilbertruimten [zie ook blz. 66].
Het is duidelijk dat $\mathcal{L}_2(\mathcal{G})$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{L}_2(\mathcal{F})$ is, en dat op grond van de volledigheid $\mathcal{L}_2(\mathcal{G})$ gesloten is.
Als S een gesloten lineaire deelruimte van de Hilbertruimte R is, dan heet $h \in S$ de projectie van $f \in R$ op S indien $\forall_{r\in S} : (r,f-h) = 0$. [Zie voor resp. de eenduidigheid en de existentie van de projectie blz. 25 en blz. 40 van het diktaat Lineaire Analyse I uitgave 1969.]
We willen aantonen dat $E^{\mathcal{G}}$ de projectie van $\mathcal{L}_2(\mathcal{F})$ op $\mathcal{L}_2(\mathcal{G})$ is. We definiëren begrippen zoals $\mathcal{G}$-meetbaarheid van een equivalentieklasse en de integraal van een equivalentieklasse op de volgende wijze:

Zij $\underline{x}$ een equivalentieklasse.

$\underline{x}$ heeft eigenschap E: $\iff$ iedere representant van $\underline{x}$ heeft eigenschap E.

Verder zij opgemerkt dat we een equivalentieklasse en een representant van die equivalentieklasse met dezelfde symbolen zullen aangeven.

Als $\underline{y}$ de projectie van $\underline{x} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F})$ op $\mathcal{L}_2(\mathcal{G})$ is, dan geldt:

a. $\underline{y}$ is $\mathcal{G}$-meetbaar [want $\underline{y} \in L_2(\mathcal{G})$].

b. $\forall_{B\in\mathcal{G}}: \int_B \underline{x}\,dP = \int_B \underline{y}\,dP$. [Immers m.b.v. (1.5.21) volgt dat $\chi_B \in L_2(\mathcal{G})$ en daar $\forall_{h\in L_2(\mathcal{G})}: (\underline{y}-\underline{x},h) = 0$ geldt dat $(\underline{y}-\underline{x},\chi_B) = 0$.]

Uit a en b volgt het gestelde. (4.1.15)

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}: U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele en $\mathcal{G}$ een σ-algebra met $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

$\underline{x}$ heet onafhankelijk van $\mathcal{G}$ als: $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{B}) = \{\underline{x}^{\leftarrow}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ en $\mathcal{G}$ onafhankelijke klassen zijn. (4.1.16)

Eigenschappen.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\mathcal{G}$ een σ-algebra met $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ en $\underline{x}$ een tot L_1 behorende stochastische variabele, dan geldt:

1. $E^{\mathcal{G}}: \mathcal{L}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}_1(\mathcal{G})$ is een lineaire operator.
2. Als $\underline{x}$ $\mathcal{G}$-meetbaar is, dan is $E^{\mathcal{G}}\underline{x} = \underline{x}$.
3. Als $\mathcal{H}$ een σ-algebra is, zodanig dat $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, dan is $E^{\mathcal{H}}E^{\mathcal{G}} = E^{\mathcal{G}}E^{\mathcal{H}} = E^{\mathcal{H}}$.
   In het bijzonder geldt: $EE^{\mathcal{G}}\underline{x} = E\underline{x}$.
4. Als $\overset{\mathcal{H}}{\cancel{\mathcal{A}}} = \{\emptyset,U\}$ (de triviale σ-algebra) dan is $E^{\mathcal{H}}\underline{x} = E\underline{x}$.
5. Als $\underline{x} \geq 0$, dan is $E^{\mathcal{G}}\underline{x} \geq 0$ b.z.
6. Als $\underline{x}$ $\mathcal{G}$-meetbaar en begrensd is en $\underline{y}$ een tot L_1 behorende $\mathcal{F}$-meetbare stochastische variabele, dan is $E^{\mathcal{G}}(\underline{x}\underline{y}) = \underline{x}E^{\mathcal{G}}\underline{y}$.
7. Zij $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij niet negatieve tot L_1 behorende stochastische variabelen waarvoor geldt: $\underline{x}_n \uparrow \underline{x} \in L_1$, dan geldt: $E^{\mathcal{G}}\underline{x}_n \to E^{\mathcal{G}}\underline{x}$ b.z.
8. Als $\underline{x}$ onafhankelijk van $\mathcal{G}$ is, geldt: $E^{\mathcal{G}}\underline{x} = E\underline{x}$. (4.1.17)

Bewijs.

1. Laat $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ tot L_1 behorende stochastische vectoren zijn, $E^{\mathcal{G}}\underline{x}_1 =: \underline{y}_1$ en $E^{\mathcal{G}}\underline{x}_2 =: \underline{y}_2$. Dan zijn $\underline{y}_1$ en $\underline{y}_2$ $\mathcal{G}$-meetbaar en voor alle $B \in \mathcal{G}$ geldt:

$$\int_B \underline{y}_1\, dP = \int_B \underline{x}_1\, dP \quad \text{en} \quad \int_B \underline{y}_2\, dP = \int_B \underline{x}_2\, dP\ .$$

M.b.v. (1.5.14) volgt nu dat $\underline{y}_1 + \underline{y}_2$ en $\lambda\underline{y}_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\mathcal{G}$-meetbaar zijn.
Verder geldt voor alle $B \in \mathcal{G}$:

$$\int_B (\underline{y}_1 + \underline{y}_2)dP = \int_B (\underline{x}_1 + \underline{x}_2)dP \quad \text{en} \quad \int_B \lambda\,\underline{y}_1\, dP = \int_B \lambda\,\underline{x}_1\, dP\ .$$

Derhalve kunnen we concluderen dat: $E^{\mathcal{G}}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$ en $E^{\mathcal{G}}(\lambda\underline{x}_1) = \lambda\underline{y}_1$.

2. Triviaal.

3. Zij $\underline{y} := E^{\mathcal{G}}\underline{x}$. Dan is $\underline{y}$ $\mathcal{G}$-meetbaar, $\underline{y} \in L_1$ en $\forall_{B\in\mathcal{G}} : \int_B \underline{x}\, dP = \int_B \underline{y}\, dP$.

   Zij $\underline{z} := E^{\mathcal{H}}\underline{y}$. Dan is $\underline{z}$ $\mathcal{H}$-meetbaar en $\forall_{C\in\mathcal{H}} : \int_C \underline{z}\, dP = \int_C \underline{y}\, dP$.

   Daar $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ geldt dat $\forall_{D\in\mathcal{H}} : \int_D \underline{z}\, dP = \int_D \underline{x}\, dP$. Derhalve is $\underline{z} = E^{\mathcal{H}}\underline{x}$ zodat

   $E^{\mathcal{H}}E^{\mathcal{G}} = E^{\mathcal{H}}$.

   Analoog bewijst men dat $E^{\mathcal{G}}E^{\mathcal{H}} = E^{\mathcal{H}}$.

4. Zij $\underline{y} := E^{\mathcal{H}}\underline{x}$. Dan is $\underline{y}$ $\mathcal{H}$-meetbaar en o.g.v. (4.1.7) constant.

   Laat $\underline{y} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). $\forall_{B\in\mathcal{H}} : \int_B \underline{y}\, dP = \int_B \underline{x}\, dP$ en dus geldt: $\int_U \underline{x}\, dP = \int_U \underline{y}\, dP =$

   $= \int_U \alpha\, dP = \alpha$, zodat $E\underline{x} = \int_U \underline{x}\, dP = \alpha = \underline{y} = E^{\mathcal{H}}\underline{x}$.

5. Dit hebben we reeds ingezien bij (4.1.11).

6. Zij $E^{\mathcal{G}}\underline{y} = \underline{z}$. Dan is $\underline{z}$ $\mathcal{G}$-meetbaar, $\underline{x}$ is $\mathcal{G}$-meetbaar en dus (1.5.14) is $\underline{xz}$ $\mathcal{G}$-meetbaar.

   Verder geldt dat $\forall_{B\in\mathcal{G}} : \int_B \underline{z}\, dP = \int_B \underline{y}\, dP$.

We moeten nu nog aantonen dat $\forall_{B \in \mathcal{G}} : \int_B \underline{x}\underline{z}\, dP = \int_B \underline{x}\underline{y}\, dP$. We doen dit analoog aan het bewijs van (4.1.3).

Als $\underline{x} = \chi_A$ met $A \in \mathcal{G}$, dan geldt voor alle $B \in \mathcal{G}$:

$$\int_B \underline{x}\underline{z}\, dP = \int_B \chi_A \underline{z}\, dP = \int_{B\cap A} \underline{z}\, dP = \int_{B\cap A} \underline{y}\, dP = \int_B \chi_A \underline{y}\, dP = \int_B \underline{x}\underline{y}\, dP .$$

De rest van het bewijs is identiek aan 2, 3 en 4 van het bewijs van (4.1.3).

7. Zij $\underline{y}_n := E^{\mathcal{G}} \underline{x}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\underline{y} := E^{\mathcal{G}} \underline{x}$.
Uit 5 kunnen we concluderen dat: $\underline{x}_2 \geq \underline{x}_1 \Rightarrow E^{\mathcal{G}} \underline{x}_2 \geq E^{\mathcal{G}} \underline{x}_1$. Derhalve geldt: $0 \leq \underline{y}_1 \leq \underline{y}_2 \leq \ldots \leq \underline{y}_n \leq \ldots \leq \underline{y}$.
Laat $\underline{z}$ zodanig zijn dat $\underline{y}_n \uparrow \underline{z}$, dan geldt dat $\underline{z} \leq \underline{y}$. Daar $E\underline{y}_n = E\underline{x}_n$ volgt m.b.v. (1.9.1) en (1.9.3) dat $E\underline{z} = E\underline{x}$.
Uit $\underline{y} = E^{\mathcal{G}} \underline{x}$ volgt m.b.v. 2 dat $EE^{\mathcal{G}} \underline{x} = E\underline{x}$. Dus $E\underline{z} = E\underline{y}$ en m.b.v. (1.8.5) volgt dat $\underline{z} = \underline{y}$ b.a.z.

8. Uiteraard is $E\underline{x}$ $\mathcal{G}$-meetbaar. Laat $B \in \mathcal{G}$. Daar $\chi_B^{\leftarrow}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, B, B^*, U\} \subseteq \mathcal{G}$ volgt uit het feit dat $\underline{x}$ en $\mathcal{G}$ onafhankelijk zijn dat $\underline{x}$ en χ_B onafhankelijke stochastische variabelen zijn. M.b.v. (2.4.19) volgt nu:

$$\forall_{B\in\mathcal{G}} : \int_B \underline{x}\, dP = E(\underline{x}\,\chi_B) = (E\underline{x})(E\chi_B) = (E\underline{x})PB = \int_B E\,\underline{x}\, dP . \qquad \Box$$

Definitie.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$: $U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele, $\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector en $\mathcal{G} := \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n) \subseteq \mathcal{F}$. [Eenvoudig is nu in te zien dat $\mathcal{G}$ een σ-algebra is.] Dan definiëren we: $E(\underline{x} \mid \underline{y}) := E^{\mathcal{G}} \underline{x}$. (4.1.18)

Stelling.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een maatruimte.
Als $\underline{z}$: $U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele is, die $\mathcal{F}$-meetbaar is, en
$\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector is, die $\mathcal{F}$-meetbaar is, dan geldt

$\underline{z}$ is $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar $\Longleftrightarrow$ $\exists_g$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Borelmeetbaar, $\underline{z} = g(\underline{y})$. (4.1.19)

Bewijs.

"$\Leftarrow$".

Laat $P \in \mathcal{B}$, $\underline{z}^{\leftarrow}(P) = \underline{y}^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(P))$. Daar g Borelmeetbaar is, geldt dat $g^{\leftarrow}(P) \in \mathcal{B}_n$ zodat $\underline{z}^{\leftarrow}(P) \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$ dus $\underline{z}$ is $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar.

"$\Rightarrow$".

1. Stel $\underline{z} = \chi_B$ met $B \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$, dan is B te schrijven als $B = \underline{y}^{\leftarrow}(A)$ met $A \in \mathcal{B}_n$.
   Daar: $u \in B \iff \underline{y}(u) \in A$ geldt dat $\chi_B = \chi_A(\underline{y})$.
   Daar $A \in \mathcal{B}_n$ volgt m.b.v. (1.5.21) dat $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borelmeetbaar is en $\underline{z} = \chi_A(\underline{y})$ zodat voor $\underline{z} = \chi_B$ "$\Rightarrow$" is aangetoond.

2. Stel $\underline{z} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{B_i}$ met $B_i \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$ $(i = 1,\ldots,m)$. M.b.v. 1 volgt dan dat $\underline{z}$ te schrijven is als: $\underline{z} = (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i})(\underline{y})$ met $A_i \in \mathcal{B}_n$, $B_i = \underline{y}^{\leftarrow}(A_i)$ en $g := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ is o.g.v. (1.5.21) en (1.5.14) Borelmeetbaar, zodat "$\Rightarrow$" tevens voor elementaire functies bewezen is.

3. Laat $\underline{z} \geq 0$ $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar zijn. O.g.v. (1.7.1) bestaat er een rij elementaire functies $\{\underline{z}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ z.d.d. $\underline{z}_m \uparrow \underline{z}$. Volgens 2 geldt dat:

   $$\forall_{m\in\mathbb{N}} \exists_{g_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\text{Borelmeetbaar}}: \underline{z}_m = g_m(\underline{y})$$

   en

   $$(*) \qquad g_m(\underline{y}(u)) = \underline{z}_m(u) \to \underline{z}(u) \ .$$

   Als we g definiëren door: $g(\underline{y}) := \chi_{\underline{y}(U)} \lim_{m\to\infty} g_m(\underline{y})$, kunnen we i.h.a. niet laten zien dat g Borelmeetbaar is, omdat $\underline{y}(U)$ i.h.a. niet $\mathcal{B}_n$-meetbaar is.
   Om dit te ondervangen bedden we $\underline{y}(U)$ in een $\mathcal{B}_n$-meetbare verzameling in.
   Zij $A := \{g_n \text{ is convergent}\}$, dan is A (zie opgave 3) $\mathcal{B}_n$-meetbaar.
   Op $\underline{y}(U)$ is (zie $*$) g_n zeker convergent, dus $\underline{y}(U) \subseteq A$.
   Definieer nu g door $g(\underline{y}) := \chi_A \lim_{m\to\infty} g_m(\underline{y})$.
   O.g.v. (1.5.21), (1.5.18) en (1.5.14) is $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borelmeetbaar en o.g.v. ($*$) is $g(\underline{y}) = \underline{z}$.

4. Als $\underline{z}$ $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar is, schrijven we $\underline{z}$ als $\underline{z} = \underline{z}^+ - \underline{z}^-$ en volgt het gestelde m.b.v. 3. $\square$

Gevolg.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector en $\mathcal{G} := \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$. Dan bestaat er een Borelmeetbare functie g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zodanig dat $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = g(\underline{y})$. (4.1.20)

Notatie.

$E(\underline{x} \mid \underline{y} = y) := g(y)$. (4.1.21)

Voorbeelden.

Beschouw $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Laat $\underline{y}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stochastische $\mathcal{B}$-meetbare variabele zijn en $\underline{z}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stochastische $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B})$-meetbare variabele.
Dan volgt m.b.v. (4.1.19) dat:

1. Als $\underline{y}(u) := u^2$, dan is $\underline{z}$ even.
2. Als $\underline{y}(u) := \sin u$, dan is $\underline{z}$ ~~oneven~~ periodiek met periode 2π. (4.1.22)

Opgave.

19. Ga bij (4.1.22.1) en (4.1.22.2) na, wat $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B})$ is.

Eigenschappen.

Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x} := U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele en $\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector. Dan geldt:

1. $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = \underline{x} \iff \exists_{g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\text{Borelmeetbaar}}: \underline{x} = g(\underline{y})$.
2. Als $\underline{x} \in L_1$ dan geldt: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk $\Rightarrow E(\underline{x} \mid \underline{y}) = E\underline{x}$. (4.1.23)

Bewijs.

1. "$\Rightarrow$". Uit $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = \underline{x}$ volgt dat $\underline{x}$ $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar is zodat o.g.v. (4.1.19) $\exists_{g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\text{Borelmeetbaar}}: \underline{x} = g(\underline{y})$.

   "$\Leftarrow$". Laat $P \in \mathcal{B}$. Daar g Borelmeetbaar is, geldt $g^{\leftarrow}(P) \in \mathcal{B}_n$ en dus $\underline{x}^{\leftarrow}(P) = \underline{y}^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(P)) \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$. Derhalve is $\underline{x}$ $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$-meetbaar, zodat (zie (4.1.17.2)) $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = \underline{x}$.

2. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn, zijn $\underline{x}^{\leftarrow}(\mathcal{B})$ en $\underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$ onafhankelijk zodat met (4.1.17.8) volgt dat $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = E\underline{x}$. $\square$

Voorbeelden.

1. Zij $\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $\underline{y} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ met $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \subseteq U$ en $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$.

$$E(\underline{x} \mid \mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} E(\underline{x} \mid A_i)\chi_{A_i} \qquad (\text{vgl.}(4.1.4)).$$

Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat de α_i's verschillend zijn.
Definieer g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(\alpha_i) := E(\underline{x} \mid A_i)$. Hoe g elders gedefinieerd wordt is in zoverre willekeurig dat g Borelmeetbaar moet blijven. Dan geldt:

$$E(\underline{x} \mid \underline{y} = \alpha_i) = g(\alpha_i) = E(\underline{x} \mid A_i)$$

$$E(\underline{x} \mid \mathcal{G}) = g(\underline{y}) \ .$$

2. Zij $(U,\mathcal{F},P)$ een kansruimte, $\underline{x}$: $U \to \mathbb{R}$ een stochastische variabele en $\underline{y}$: $U \to \mathbb{R}^n$ een stochastische vector, zodanig dat

$(\underline{x},\underline{y})$: $U \to \mathbb{R}^{n+1}$ continu verdeeld is met dichtheid $f_{(\underline{x},\underline{y})}$.

Dan geldt (zie ook opgave 8):

$\underline{x}$ is continu verdeeld met dichtheid $f_{\underline{x}}$
$\underline{y}$ is continu verdeeld met dichtheid $f_{\underline{y}}$.

Op grond van (4.1.20) bestaat er een Borelmeetbare functie g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zodanig dat $E(\underline{x} \mid \underline{y}) = g(\underline{y})$.
Voor alle $B \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$ geldt dan: $\int_B \underline{x}\, dP = \int_B g(\underline{y})\, dP$.
Laat $B \in \underline{y}^{\leftarrow}(\mathcal{B}_n)$, dan is er een $A \in \mathcal{B}_n$ zodanig dat $B = \underline{y}^{\leftarrow}(A)$ en derhalve is $\chi_B = \chi_A(\underline{y})$.
Met behulp van (2.3.4) volgt nu:

$$\int_B g(\underline{y})\, dP = \int_U g(\underline{y})\chi_A(\underline{y})\, dP = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\chi_A(y) P_{\underline{y}}(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\chi_A(y) f_{\underline{y}}(y)\, dy = \int_A g(y) f_{\underline{y}}(y)\, dy$$

en met behulp van Fubini:

$$\int_B \underline{x}\,dP = \int_U \underline{x}\,\chi_A(\underline{y})dP = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} x\,\chi_A(y)f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}} x\,\chi_A(y)f(x,y)dx\Big)dy = \int_A\Big(\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)dx\Big)dy\ .$$

Als we aannemen dat $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \neq 0$, kunnen we nu concluderen dat

$$g(y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx}\ . \tag{4.1.24}$$

Register