TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

KANSREKENING

en

STATISTIEK

Deel I: Kansrekening

Bestemd voor WSK-IV

Voorjaarssemester 1981

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.201
Prijs f. 5,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Jop

Deel I: Kansrekening

Kansrekening en Statistiek

Bestemd voor WSK-IV

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

KANSREKENING EN STATISTIEK

bestemd voor WSK-IV

Deel I: Kansrekening

Voorjaarssemester 1981

Deel 1, KANSREKENING

Inhoudsopgave

APPENDIX

0. INLEIDING

0.1 Geschiedenis

De kansrekening is in de zeventiende eeuw ontstaan uit problemen in verband met het dobbelspel. Vragen van de dobbelende Chevalier de Méré (1610-1685) werden in 1654 aanleiding tot een briefwisseling tussen Pascal (1623-1662) en Fermat (1601-1665). Een van de vragen luidde ongeveer "Wat is waarschijnlijker: met één dobbelsteen in vier worpen minstens één zes te gooien óf met twee dobbelstenen in 24 worpen minstens één dubbel-zes te gooien?". De kansen op deze gebeurtenissen zijn resp. 0,5177 en 0,4914; dat de Méré door ervaring (en tot zijn verbazing) had gekonstateerd dat de eerste kans groter dan een half was en de tweede kleiner dan een half, zegt wel iets over zijn hartstocht voor het dobbelen. De frivole oorsprong van de kansrekening is nog altijd merkbaar in de moderne leerboeken en komt zeer duidelijk tot uiting in de vroegste literatuur.
Het eerste boek over kansrekening werd in 1657 geschreven door Christiaan Huijgens (1629-1695): "De ratiociniis in ludo aleae" (Over berekeningen bij het dobbelspel). Andere boeken uit de begintijd zijn: "Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard in 1708 door de Montmort (1654-1705), "Ars conjectandi" (de kunst van het gissen (gokken?)) in 1713 door Jacob Bernoulli (1654-1701) en "The Doctrine of Chances" in 1716 door de Moivre (1667-1754). Namen van anderen die belangrijk hebben bijgedragen tot het ontstaan van de kansrekening zijn Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) en Poisson (1781-1840). De eerste definitie van het begrip "kans" werd gegeven door Laplace in zijn "Essai philosophique sur les probabilités" (1814).

Van de zeer vele wiskundigen die de kansrekening verder hebben ontwikkeld, noemen we nog (Chebyschev (1821-1899), Markov (1865-1922), Borel (1871-1956), Lévy, Khintchine, Bernstein, Fréchet, Kolmogorov en Feller (1906-1970). De axiomatische opbouw van de kansrekening zoals die tegenwoordig (ook in dit diktaat) wordt gebruik, werd in 1933 gepubliceerd door Kolmogorov in zijn "Grundbegriffe der Warscheinlichtkeitsrechnung."

0.2 Toepassingen

De kansrekening werd het eerst toegepast in de actuariele wetenschap, onder anderen door Johan de Witt (1625-1672). Daarna komen toepassingen in de foutentheorie (o.a. bij sterrekundige waarnemingen) en in de biologie, speciaal de genetika, o.a. door Mendel (1822-1884).
Op het ogenblik wordt de kansrekening in vrijwel alle takken van wetenschap toegepast. Een belangrijke toepassingsvorm hierbij is statistiek[1], met behulp waarvan konklusies worden getrokken uit numerieke waarnemingsresultaten. Andere toepassingsvormen en toepassingsgebieden zijn: statistische mechanika, quantum mechanika, ekonometrie, "operations research" (speciaal wachttijdproblemen en voorraadbeheersing) en problemen van bedrijfszekerheid ("reliability").
Een deel van de bovengenoemde toepassingen kan gerangschikt worden onder de stochastische processen, d.w.z. processen waarvan de ontwikkeling van het "toeval" afhangt. Tot deze kategorie horen de volgende verschijnselen: Brownse beweging, diffusieverschijnselen, ruis (informatietheorie en communicatietechniek), besturings en vervangingsproblemen, de fluktuatie van prijzen (tijdreeksenanalyse), bevolkingsgroei, en vele andere.
Tenslotte wordt de kansrekening incidenteel toegepast op allerlei problemen met een stochastisch[2] (d.w.z. "toevalsafhankelijk") karakter. Voorbeelden hiervan zijn parkeerproblemen, het ontstaan van polymeren, bestrijding van bakteriën en het funktioneren van deeltjestellers.

0.3 Nummering, literatuur.

Hoofdstukken, paragrafen en formules worden in dit diktaat "decimaal" genummerd: formule (1.3.1.2) is de tweede formule in paragraaf 3.1. van hoofdstuk 1. Definities, Stellingen en (sommige voorbeelden worden gezamenlijk genummerd. Zo staan Definitie 1.2.1, Voorbeeld 1.2.2 en Stelling 1.2.3 direkt na elkaar. Hierbij is Voorbeeld 1.2.2 de tweede genummerde uitspraak in §2 van hoofdstuk 1, maar niet het tweede voorbeeld in deze paragraaf.

1) Zie deel 2 van dit dictaat.
2) στοχαζομαι = gissen.

Het diktaat is grotendeels gebaseerd op de boeken

[1] C.R. Heathcote, Probability, Elements of the Mathematical Theory George Allen & Unwin Ltd., London 1973.

[2] H.G. Tucker, An Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, New York, 1962.

[3] K.L. Chung, Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Undergraduate Texts in Mathematics, Springre, New York, etc. 1974.

Een iets minder systematisch, maar bijzonder interessant boek over de beginselen van de kansrekening en haar toepassingen is

[4] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its applications, Vol. 1, Wiley, New York 1957.

Een aardig (en goedkoop) boekje over de geschiedenis van de wiskunde is

[5] D.J. Struik, A Concise History of Mathematics, Dover Publications, New York, 1967.

1. KANSRUIMTEN

1.1. Uitkomstenruimte, gebeurtenissen

In de kansrekening houden we ons bezig met de konstruktie en de studie van *modellen* van verschijnselen waarbij het *toeval* een rol speelt. Hierbij gaan we niet in op het begrip "toeval" zelf en dikwijls blijft ook het mechanisme dat aanleiding geeft tot het model buiten beschouwing. Voor ons is van belang wat er kan gebeuren en met welke kansen.
Centraal hierbij staat een echt of denkbeeldig *experiment*, waarvan de uitkomst van het toeval afhangt. We gaan er van uit dat dit experiment, telkens wanneer het wordt uitgevoerd, aanleiding geeft tot één van een duidelijk gedefinieerde verzameling van mogelijke *uitkomsten*. Deze verzameling noemen we de *uitkomstenruimte* en geven we aan met Ω; een uitkomst, element van Ω, geven we aan met ω. Deze uitkomsten zijn meestal min of meer abstrakte beelden van de werkelijke resultaten. Zo geven we de uitkomst "zes" bij een worp met een dobbelsteen aan met 6 en niet met ⚅. Bij een eenvoudig experiment als het gooien met een munt bestaat de uitkomstenruimte uit slechts twee elementen: "kruis" en "munt", dus $\Omega = \{K,M\}$. Bestaat het experiment uit het waarnemen gedurende één tijdseenheid van de afstand van een deeltje tot een gegeven vast punt (1-dimensionale Brownse beweging), dan is de uitkomstenruimte de verzameling van alle (kontinue) funkties op het interval $[0,1]$.
In veel gevallen zal onze uitkomstenruimte een deel van $\mathbb{R}$ of van $\mathbb{R}^k$ zijn.
Gebeurtenissen met betrekking tot het beschouwde experiment geven we aan met *deelverzamelingen* van Ω. Bij het experiment "gooien" met een dobbelsteen geven we de gebeurtenis "even" aan met de verzameling $\{2,4,6\}$, de gebeurtenis "minstens vier" met $\{4,5,6\}$. Een één-punts-deelverzameling $\{\omega\} \subset \Omega$ noemt men wel een *elementaire gebeurtenis*. Hoe kleiner de verzameling is die de gebeurtenis beschrijft des te gedetailleerder is de informatie die de gebeurtenis over de uitkomst van het experiment geeft. De gebeurtenis $\{\omega\}$ geeft precies aan wat er gebeurd is (bijvoorbeeld het gooien van een zes met een dobbelsteen); een niet-elementaire gebeurtenis A geeft aan dat de uitkomst een bepaalde eigenschap heeft (bijvoorbeeld "oneven" bij een worp met een dobbelsteen: $A = \{1,3,5\}$); de gebeurtenis Ω geeft geen informatie over de uitslag van het experiment.
Een uitvoering van het experiment stellen we ons nu als volgt voor: er is een verzameling Ω van mogelijke uitkomsten, waarvan er door het toeval één, ω, wordt aangewezen; als $\omega \in A \subset \Omega$, dan zeggen we dat A *gebeurt*. De verzameling Ω noemen we de *zékere gebeurtenis*: Ω gebeurt altijd, want elke uitkomst is een element van Ω.

In de onderstaande tabel geven we een overzicht van de corresponderende begrippen in de taal voor verzamelingen en voor gebeurtenissen.

Notatie	VERZAMELINGEN	GEBEURTENISSEN
Ω	willekeurige verzameling (uitkomstenruimte)	zékere gebeurtenis
A	deelverzameling (van Ω)	gebeurtenis A(ook:A gebeurt)
$\omega \in A$	ω is element van A	A gebeurt
$A \cap B$(of AB)	doorsnede van A en B	A en B (gebeuren) beide
$\cap A_j$	doorsnede van de A_j	de A_j (gebeuren) allemaal
$A \cup B$	vereniging van A en B	A of B (gebeurt); minstens één
$\cup A_j$	vereniging van de A_j	minstens één der A_j (gebeurt)
$\emptyset$	lege verzameling (t.o.v. Ω)	onmogelijke gebeurtenis
A^*	complement van A (t.o.v.)	A(gebeurt) niet; niet-A
$A \cap B = \emptyset$	A en B zijn disjunkt	A en B sluiten elkaar uit
$A \subset B$	A is bevat in B	A impliceert B (als A gebeurt, dan gebeurt B ook)

Als A en B disjunkt zijn, dan schrijven we soms $A + B$ i.p.v. $A \cup B$. Evenzo betekent $\Sigma A_j = C$ dat de A_j disjunkt zijn en dat $\cup A_j = C$.
We herinneren aan een aantal belangrijke definities en eigenschappen van verzamelingen; voor details wordt verwezen naar Algebra en Analyse.

$$\omega \in \bigcap_I A_j \text{ betekent } \forall_{j \in I} [\,\omega \in A_j\,]$$

$$\omega \in \bigcup_I A_j \text{ betekent } \exists_{j \in I} [\,\omega \in A_j\,]$$

<u>Enkele eigenschappen:</u>

(1.1.1)

(i) $A = AB + AB^*$

(ii) $A \cup B = A + A^*B$

(iii) $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$; $(\bigcup_I A_n)^* = \bigcap_I A_n^*$ (de Morgan)

(iv) $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$; $(\bigcap_I A_n)^* = \bigcup_I A_n^*$ (de Morgan)

1.2. Kansruimten

We definiëren nu de abstrakte struktuur die ten grondslag ligt aan de moderne kansrekening. Deze struktuur, die we *kansruimte* noemen, is ons *model* voor een (toevals-)experiment.

Definitie 1.2.1 : Een kansruimte is een tripel (Ω, F, P) met de volgende eigenschappen:

I Ω is een niet-lege verzameling (*uitkomstenruimte*)

II F (de verzameling van alle *gebeurtenissen*) is een σ-algebra van deelverzamelingen van Ω, d.w.z. een verzameling deelverzamelingen met de eigenschappen

$$\text{(1.2.1)} \qquad \begin{aligned} &\text{a. } \Omega \in F \\ &\text{b. } A \in F \rightarrow A^* \in F \\ &\text{c. } (\forall_{j \in \mathbb{N}} A_j \in F) \rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in F \end{aligned}$$

III P is een *kans* (kansmaat) op F, d.w.z. P is een funktie $F \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschappen

$$\text{(1.2.2)} \qquad \begin{aligned} &\text{a. } P(\Omega) = 1 \\ &\text{b. } P(A) \geq 0 \quad (\text{alle } A \in F) \\ &\text{c. } \left.\begin{aligned} &\forall_{j \in \mathbb{N}} A_j \in F \\ &A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(\sum_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty P(A_j) \end{aligned}$$

De bovenstaande definities staan bekend als "de axioma's van Kolmogorov" (zie inleiding), die er op neer komen dat een kansruimte wordt ingevoerd als een genormeerde maatruimte.

Voorbeeld 1.2.2 (gooien met een dobbelsteen):

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad , \ F = \text{alle (64) deelverzamelingen van } \Omega,$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} 1_A(j) = \frac{1}{6} \# (A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)},$$

waarbij $\#(A)$ het aantal elementen van A voorstelt en

$$\text{(1.2.3)} \qquad 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ als } \omega \in A \\ 0 \text{ als } \omega \in A^*. \end{cases}$$

Opgave 1.2.3: Ga na dat voorbeeld 1.2.2 voldoet aan definitie 1.2.1. Bereken P("zes"), P("minstens 3") en P("even").

Opmerking 1.2.4: In voorbeeld 1.2.2 is iedere deelverzameling van Ω een gebeurtenis (element van F). In geval van een eindige of aftelbare uitkomstenruimte kan men altijd voor F alle deelverzamelingen nemen. Als de uitkomstenruimte niet aftelbaar is, blijkt het i.h.a. niet mogelijk om aan iedere deelverzameling een kans toe te kennen die aan (1.2.2) voldoet. We geven daarom de volgende definitie.

Definitie 1.2.5: a. De verzameling der Borelverzamelingen van $\mathbb{R}^k$, notatie: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, is de kleinste σ-algebra (van deelverzamelingen van $\mathbb{R}^k$) die alle open verzamelingen van $\mathbb{R}^k$ bevat.
b. Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ een Borel-verzameling. De σ-algebra der Borelverzamelingen van Ω, notatie $\mathcal{B}(\Omega)$ wordt gedefinieerd door $\mathcal{B}(\Omega) = \{\Omega \cap B \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$.

Voorbeeld 1.2.6: ("schijfschieten"):

$$\Omega = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\ ,\ F = \mathcal{B}(\Omega).\ \text{Voor } A \in \mathcal{B}(\Omega) \text{ is}$$

$$P(A) = \frac{1}{\pi}\iint_A dxdy = \frac{1}{\pi}\,\text{Opp}(A) = \frac{\text{Opp}(A)}{\text{Opp}(\Omega)}\ .$$

Opgave 1.2.7: Zij de kansruimte van voorbeeld 1.2.6 ons model voor schieten op een schijf met straal 1 ("missers" doen niet mee). Bereken de kans dat de treffer niet verder dan op afstand $\frac{1}{2}$ van het middelpunt terecht komt. Wat is de kans op afstand precies $\frac{1}{2}$?

We geven nu een aantal belangrijke eigenschappen van kansruimten.

Stelling 1.2.8: $\emptyset \in F$.

Bewijs: volgens (1.2.1)a is $\Omega \in F$ en dus ((1.2.1)b) $\emptyset = \Omega^* \in F$.

Stelling 1.2.9: $[A_j \in F\ (j=1,2,\ldots,n)] \Rightarrow \bigcup_1^n A_j \in F$.

Bewijs: gebruik (1.2.1)c met $A_j = \emptyset$ voor $j \geq n+1$.

Stelling 1.2.10: $(\forall_{j\in\mathbb{N}}\ A_j \in F) \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in F$

Bewijs: $\bigcap A_j = (\bigcup A_j^*)^*$. Gebruik twee maal (1.2.1)b met (1.2.1)c.

Gevolg: $[A_j \in F\ (j=1,2,\ldots,n)] \Rightarrow \bigcap_1^n A_j \in F$.

Stelling 1.2.11: $P(\emptyset) = 0$

Bewijs: Zij $A_j = \emptyset$ voor $j=1,2,\ldots$, dan is $\emptyset = \sum_1^\infty A_j$, en dus o.g.v. (1.2.2)c

$$P(\emptyset) = \sum_1^\infty P(A_j) = \sum_1^\infty P(\emptyset).$$

Omdat $P(\emptyset)$ een eindig getal is, moet $P(\emptyset) = 0$ zijn.

Opmerking 1.2.12: Uit $P(A) = 0$ volgt niet dat $A = \emptyset$ (vergelijk laatste vraag in opgave 1.2.7).

Stelling 1.2.13: $P(\sum_1^n A_j) = \sum_1^n P(A_j)$

Bewijs: kies $A_j = \emptyset$ voor $j \geq n+1$ en gebruik (1.2.2)c met stelling 1.2.11.

Stelling 1.2.14: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Bewijs: Volgens (1.1.1) (i) en (ii) hebben we $A \cup B = A + A^*B$ en $B = A^*B + AB$, zodat $P(A \cup B) = P(A) + P(A^*B)$ en $P(B) = P(A^*B) + P(AB)$. Kombinatie van beide gelijkheden levert $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Gevolg 1 (ongelijkheid van Boole): $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Gevolg 2: $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$

Bewijs: $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$ (vergelijk gevolg 1)

Stelling 1.2.15: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Bewijs: Omdat $A \subset B$, is $AB = A$, zodat (zie(1.1.1)) $B = AB + A^*B = A + A^*B$. Stelling 1.2.13 levert dan $P(B) = P(A) + P(A^*B) \geq P(A)$ (zie(1.2.2)b).

Gevolg: $P(A) \leq 1$ (alle $A \in \mathcal{F}$).

Bewijs: Voor alle $A \in \mathcal{F}$ geldt dat $A \subset \Omega$, zodat $P(A) \leq P(\Omega) \leq 1$.

Stelling 1.2.16: $P(A^*) = 1 - P(A)$.

Bewijs: $A + A^* = \Omega$, dus $P(A) + P(A^*) = 1$.

Opgave 1.2.17: a. Bewijs dat

$$P(\bigcup_1^N A_j) \leq \sum_1^N P(A_j) \quad (N \leq \infty).$$

b. Bewijs dat

(1.2.4) $\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

Definitie 1.2.18: Zij $(A_n)_1^\infty$ een *monotone* rij verzamelingen (gebeurtenissen), dan definiëren we

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_1^\infty A_n \quad \text{als} \quad A_n \subset A_{n+1} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_1^\infty A_n \quad \text{als} \quad A_n \supset A_{n+1} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

Stelling 1.2.19: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

Bewijs: Zij A_n niet-dalend. Definieer $B_1 = A_1$ en $B_k = A_k A_{k-1}^*$ $(k=2,3,\ldots)$. Dan geldt $A_n = \bigcup_1^n A_k = \sum_1^n B_k$ en $\bigcup_1^\infty A_k = \sum_1^\infty B_k$. Nu geldt dus

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_1^\infty A_n) = P(\sum_1^\infty B_n) = \sum_1^\infty P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n P(B_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\sum_1^n B_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_1^n A_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Als A_n niet-stijgend is, dan is A_n^* niet-dalend, zodat geldt

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_1^\infty A_n) = 1 - P((\bigcap_1^\infty A_n)^*) = 1 - P(\bigcup_1^\infty A_n^*) =$$

$$= 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n^*) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^*) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Opgave 1.2.20: Bewijs de bewering in het bewijs van stelling 1.2.19 dat

$$\bigcup_1^n B_k = \bigcup_1^n A_k \text{ en } \bigcup_1^\infty B_k = \bigcup_1^\infty A_k.$$

1.3. Diskrete kansruimten

Definitie 1.3.1: Een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ heet *diskreet* als Ω *eindig* of *aftelbaar* oneindig veel elementen heeft: $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ en als $\mathcal{F}$ bestaat ui alle deelverzamelingen van Ω.

<u>Stelling 1.3.2:</u> Bij een diskreet kansveld heeft de kans de volgende gedaante:

$$(1.3.1) \qquad P(A) = \Sigma\, p_j 1_A(\omega_j),$$

waarbij $p_j = P(\{\omega_j\})$.

Bewijs: alle deelverzamelingen van Ω zijn elementen van F, zodat voor iedere deelverzameling A van Ω de kans P(A) is gedefinieerd. Als we $P(\{\omega_j\})$ aangeven met p_j, dan volgt (1.3.1) uit (1.2.2)c.

<u>Opmerking 1.3.3:</u> Het is duidelijk dat $p_j \geq 0$ $(j=1,2,\ldots)$ en dat $\Sigma\, p_j=1$; het is echter mogelijk dat $p_j = 0$ voor sommige j. Men zou dit laatste kunnen vermijden door de ω_j met $p_j = 0$ uit Ω weg te laten; dat is echter niet altijd praktisch. Men heeft steeds een zekere vrijheid in de keuze van Ω.
In voorbeeld 1.2.6 zouden we ook $\Omega = \mathbb{R}^2$ kunnen kiezen en daarbij P zó aanpassen dat $P(A) = 0$ als $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} = \emptyset$.

Voorbeelden van diskrete kansvelden ontmoeten we in de volgende paragraaf en in hoofdstuk 3.

1.3.1. Symmetrische kansruimten, kombinatoriek

<u>Definitie 1.3.4</u>: Een diskrete kansruimte heet *symmetrisch*, als Ω *eindig* is: $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_K\}$, terwijl

$$p_j := P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{K} \qquad (j=1,2,\ldots,K).$$

<u>Gevolg 1.3.5:</u> In een symmetrische kansruimte wordt de kans op A gegeven door:

$$(1.3.2) \qquad P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)},$$

met $\#(A)$ = aantal elementen van A (vergelijk voorbeeld 1.2.2).

Formule (1.3.2) komt overeen met de al door Laplace (zie inleiding) gegeven (in wezen circulaire, maar toch bruikbare) definitie van het begrip kans: "De kans op een gebeurtenis is de verhouding van het aantal voor die gebeurtenis gunstige gevallen tot het totaal aantal mogelijke gevallen, mits alle gevallen *gelijkelijk mogelijk* zijn".

Het berekenen van kansen in een symmetrische kansruimte komt neer op het *tellen* van mogelijkheden. Alvorens hiervan een aantal voorbeelden te geven poneren we zonder bewijs de volgende, intuïtief duidelijke, telregel.

Telregel: Als men k maal een keuze doet, terwijl het aantal keuzemogelijkheden bij de j-de keuze n_j bedraagt ($j = 1,2,\ldots,k$), dan is het totaal aantal keuzemogelijkheden gelijk aan $n_1 n_2 \ldots n_k$.

Voorbeeld 1.3.6: Wat is de kans om in één worp met twee dobbelstenen minstens 9 ogen te gooien?

Antwoord: Neem als model een symmetrisch kansveld met (zie Telregel) 36 uitkomsten: $\Omega = \{(x,y)\,|\,x=1,2,\ldots,6;\ y=1,2,\ldots,6\}$. De gebeurtenis A:= "minstens 9 ogen" = $\{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$, zodat $\#(A) = 10$ en dus $P(A) = 10/36 = 0{,}2778$.

We bespreken nu vier symmetrische kansruimten, die model zijn voor het nemen van een *steekproef*. Hierbij kiezen we n maal een element uit een verzameling (in de statistiek wel "populatie" genoemd) van N onderscheidbare elementen, die we eenvoudigheidshalve aangeven met $1,2,3,\ldots,N$. Een steekproef (van de grootte n) uit deze verzameling is dus een n-tal $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ met $x_j \in \{1,2,\ldots,N\}$ voor $j=1,2,\ldots,n$. In ons model bestaat nu de uitkomstenruimte uit de verzameling van al deze steekproeven, terwijl iedere steekproef dezelfde kans heeft om "getrokken" te worden. Zo'n steekproef noemt men wel *aselect*.
We kunnen hierbij vier situaties onderscheiden: we kunnen trekken mét of zonder *terugleggen* en we kunnen *geordende* of ongeordende steekproeven beschouwen. Bij trekken zonder terugleggen kan elk element hoogstens één keer in de steekproef voorkomen, zodat $n \leq N$. Bij trekken met terugleggen wordt een getrokken element weer teruggelegd en kan dus telkens weer gekozen worden. Bij geordende steekproeven wordt gelet op de volgorde waarin de elementen worden getrokken; twee steekproeven die dezelfde elementen bevatten in verschillende volgorden worden als verschillend beschouwd (en geteld). Bij ongeordende steekproeven wordt alleen op de inhoud van de steekproef gelet: twee steekproeven die dezelfde elementen bevatten zijn gelijk.
Voordat we voor de bovenbeschreven situaties de aantallen steekproeven berekenen herinneren we aan de volgende eigenschappen (zie Wiskunde 10).

Lemma 1.3.7: Het aantal *permutaties* (volgorden) van n onderscheidbare objekten is $n!$.

Lemma 1.3.8: Het aantal deelverzamelingen met k elementen van een verzameling met n elementen, het aantal *kombinaties* van k uit n, is $\binom{n}{k}$ $(k=0,1,\dots,n)$.

Opgave 1.3.9: Een verzameling V met n elementen heeft 2^n deelverzamelingen ($\emptyset$ en V meegeteld). Bewijs dit (ook) zonder lemma 1.3.8 te gebruiken.

Stelling 1.3.10: Het aantal steekproeven van de grootte n uit een verzameling van N elementen is:

a. $N^{(n)} := N(N-1)\dots(N-n+1)$ bij trekken *zonder* terugleggen en *geordende* steekproeven

b. $\binom{N}{n}$ bij trekken *zonder* terugleggen en *ongeordende* steekproeven (het aantal *combinaties*)

c. N^n bij trekken *met* terugleggen en *geordende* steekproeven

d. $\binom{N+n-1}{n}$ bij trekken *met* terugleggen en *ongeordende* steekproeven (het aantal *herhalingscombinaties*)

Bewijs: In de gevallen a en c volgt het bewijs uit de Telregel: het aantal keuzemogelijkheden bij de j-de trekking is $N-j+1$ in geval a en N in geval c.

Geval b volgt uit a door op te merken dat ieder n-tal elementen in ieder van de n! permutaties als steekproef onder a voorkomt; al deze steekproeven gelden als dezelfde onder b. Overigens is het antwoord onder b ook: het aantal deelverzamelingen van de grootte n (zie lemma 1.3.8).

De overgang van c naar d is niet zo eenvoudig, omdat het aantal steekproeven met de zelfde elementen onder c afhangt van het aantal gelijke elementen: $\{x,y,z\}$ komt zes maal voor, $\{x,x,z\}$ drie maal. Bij d komt het er alleen op aan hoevaak elk van de elementen (genummerd $1,2,\dots,N$) in de steekproef voorkomt. De vraag is dus: op hoeveel manieren kunnen we de n plaatsen in de steekproef verdelen over de elementen $1,2,\dots,N$ als herhalingen zijn toegestaan, of wat aanschouwelijker: op hoeveel manieren kunnen we n identieke ballen verdelen over N cellen? Iedere verdeling kan worden weergegeven door een rij nullen en enen, waarbij de nullen de ballen voorstellen en de enen de scheidingswanden van de cellen; de rij begint met een 1, de linker wand van cel 1 en eindigt met een 1, de rechter wand van cel N; aangrenzende cellen hebben een gemeenschappelijke wand. Zo is:

voor $N = 7$ en $n = 9$

$$1001000101101001 1 = (2,3,1,0,1,2,0)$$

de verdeling waarbij in de eerste cel 2 ballen terecht komen, in de tweede 3, in de derde 1, etc. De vraag is nu dus: op hoeveel manieren kunnen we de n ballen en de N-1 inwendige scheidingswanden plaatsen? Antwoord: op zoveel manieren als men n plaatsen kan kiezen uit $N + n - 1$, d.w.z. $\binom{N+n-1}{n}$.

Opmerking 1.3.11: evenals bij geval d kunnen de andere drie gevallen "vertaald" worden in problemen waarbij n ballen worden verdeeld over N cellen. Het begrip "met terugleggen" gaat dan over in "meer dan één bal per cel toegestaan" en "geordende steekproef" wordt "de n ballen zijn onderscheidbaar". Model d ligt als steekproef-model niet zo voor de hand, omdat trekken met terugleggen eigenlijk geordende steekproeven (één voor één trekken) veronderstelt. De ballen-cellen interpretatie speelt een rol in de statistische mechanika.

Opgave 1.3.12: De aantallen onder a t.m. d kunnen ook gelezen worden als

(i) het aantal elementen in de uitkomstenruimte Ω, waarbij

$$\Omega = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_j \in\{1,2,\ldots,N\}\ (j=1,2,\ldots,n)\ \underline{\text{en}}\ \ldots\}\ ;$$

maak in alle vier gevallen de voorwaarde volledig.

(ii) het aantal ... funkties $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \to \{1,2,\ldots,N\}$;

vul voor de vier gevallen (waar nodig) het weggelaten bijvoeglijk naamwoord in.

Opgave 1.3.13: Wat is het aantal oplossingen van de vergelijking

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_N = n_1$$

a. Als m_1, m_2, ..., m_N geheel zijn en ≥ 0? b. als m_1, m_2,..., m_N geheel zijn en > 0? Hierbij worden x+y+... en y+x+.. als verschillend beschouwd als x en y verschillend zijn, etc.

We passen de resultaten van stelling 1.3.10 toe op de situatie dat de verzameling bestaat uit elementen van twee soorten, bijvoorbeeld witte en zwarte knikkers (M resp. N-M stuks). We nemen een steekproef van n exemplaren en vragen naar de kans op precies k witte knikkers in elk van de situaties a t.m. d uit stelling 1.3.10 en steeds met de symmetrische kansruimte als model.

Stelling 1.3.14: Men neemt een aselecte steekproef van n stuks uit een verzameling van N knikkers, waarvan M wit en N-M zwart. Zij $p_k^{(x)}$ gedefinieerd door

$$p_k^{(x)} = P\ (\text{steekproef bevat precies k witte knikkers}),$$

waarbij x de situaties a,b,c,d uit stelling 1.3.10 aangeeft. Dan geldt

$$p_k^{(a)} = \binom{n}{k} \frac{M^{(k)} (N-M)^{(n-k)}}{N^{(n)}} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$p_k^{(b)} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$p_k^{(c)} = \binom{n}{k} \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

$$p_k^{(d)} = \frac{\binom{M+k-1}{k} \binom{N-M+n-k-1}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}.$$

Bewijs: we moeten uitrekenen (zie gevolg 1.3.5) $\#(A)/\#(\Omega)$, waarbij $\#(A)$ het aantal mogelijke steekproeven is die precies k witte knikkers bevatten; $\#(\Omega)$ hebben we al uitgerekend in stelling 1.3.10.

In de gevallen b en d vinden we het antwoord direkt met de Telregel: $\#(A)$ is het aantal manieren waarop k witte knikkers kunnen worden gekozen maal het aantal manieren om n-k zwarte knikkers te kiezen.

In de gevallen a en c is ook de plaats van de knikkers in de steekproef van belang. Volgens de Telregel is het antwoord: $\#(A) = n_1 . n_2 . n_3$, waarbij $n_1 = \binom{n}{k}$, het aantal manieren waarop de k witte knikkers over de n plaatsen in de steekproef kunnen worden verdeeld, n_2 is het aantal manieren om de k witte knikkers te kiezen en n_3 het aantal manieren om de n-k zwarte te kiezen.

Opmerking 1.3.15: bij trekken zonder terugleggen vinden we bij geordende en ongeordende steekproeven hetzelfde antwoord; gelukkig maar, want het is niet a priori duidelijk welk model de voorkeur verdient. Bij trekken met terugleggen is er een natuurlijke volgorde en ligt het voor de hand om geordende steekproeven te beschouwen. In de interpretatie waarbij ballen over cellen worden verdeeld (zie opmerking 1.3.13) geven de antwoorden onder b, c en d op blz. 9 aanleiding tot het onderscheid in de modellen van resp. Fermi-Dirac, Maxwell-Boltzmann en Bose-Einstein.

Het getal $\binom{N}{n}$ kunnen we ook interpreteren als het aantal manieren om een verzameling van N elementen te splitsen in twee deelverzamelingen, één van n stuks en één van N-n stuks. Als N=2n dan treedt er een moeilijkheid op in deze interpretatie: we moeten dan de twee deelverzamelingen geordend denken, d.w.z. we moeten een verdeling in (bijv.) (a,b,c) en (x,y,z) onderscheiden van de verdeling in (x,y,z) en (a,b,c). Als we dat niet willen, moeten we het aantal manieren door twee delen. Een soortgelijk probleem treedt op bij de verdeling van een verzameling in meer dan twee deelverzamelingen.

Stelling 1.3.16: Het aantal manieren waarop een verzameling van N elementen kan worden verdeeld in r geordende deelverzamelingen bestaande uit resp. $m_1, m_2, \ldots m_r$ elementen ($m_1+m_2+\ldots+m_r=N$) is gelijk aan

$$\binom{N}{m_1, m_2, \ldots, m_r} = \frac{N!}{m_1!\, m_2!\, \ldots\, m_r!}.$$

Men noemt dit getal een *multinomiaalcoëfficiënt*. Hiervoor geldt

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^N = \sum \binom{N}{m_1, m_2, \ldots, m_r} x_1^{m_1}\, x_2^{m_2} \ldots x_r^{m_r},$$

waarbij gesommeerd wordt over alle gehele, niet-negatieve $m_1, \ldots, m_r$ met $m_1 + \ldots + m_r = N$.

Opgave 1.3.17: bewijs stelling 1.3.16 met de Telregel.

Volledigheidshalve vermelden we nog de formule van Stirling:

Stelling 1.3.18: $n! \sim e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \quad (n \to \infty)$.

Hierbij betekent $a(n) \sim b(n) \quad (n \to \infty)$ dat $\lim_{n\to\infty} a(n)/b(n) = 1$, niet dat $\lim_{n\to\infty} \{a(n) - b(n)\} = 0$.

Opgave 1.3.19: Wat is de kans om in 2n worpen met een dobbelsteen precies n keer even te gooien? Hoe gedraagt deze kans zich voor $n \to \infty$?

2. VOORWAARDELIJKE KANS, ONAFHANKELIJKHEID

2.1 Voorwaardelijke kans

Het komt dikwijls voor dat over de uitkomst van een experiment van te voren al iets bekend is of verondersteld wordt, bijv. dat $\omega \in B$. We kunnen dan vragen wat onder deze omstandigheid (het optreden van B) de "kans" is dat A gebeurt. We kunnen deze "kans" niet uitrekenen met de hulpmiddelen die we tot nu toe hebben; er is een nieuwe definitie nodig voor dit begrip, dat we de *voorwaardelijke kans* op A *onder de voorwaarde* B (ook wel:*gegeven* B) noemen.

Notatie: $P(A|B)$.

Ter introduktie bekijken we het volgende voorbeeld: we gooien met twee dobbelstenen en vragen naar de voorwaardelijke kans dat het totaal aantal ogen een vijfvoud is, gebeurtenis A, gegeven dat dit aantal oneven is, gebeurtenis B. Omdat in ons oorspronkelijke model (zie voorbeeld 1.3.6) alle 36 uitkomsten even waarschijnlijk waren, ligt het voor de hand om nu alle 18 uitkomsten, waarbij B optreedt als even waarschijnlijk te beschouwen, d.w.z. als model een symmetrisch kansveld te nemen, maar nu met B als uitkomstenruimte. We vinden dan

$$(2.1.1) \qquad P(A|B) = \frac{\#(AB)}{\#(B)} .$$

Als we in het rechterlid van (2.1.1) teller en noemer delen door 36 (d.w.z. door $\#(\Omega)$), dan vinden we

$$(2.1.2) \qquad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Voor de gevraagde voorwaardelijke kans vinden we in dit voorbeeld dus $P(A|B) = P\,(\text{vijfvoud}|\text{oneven}) = 4/18$. Voor de (onvoorwaardelijke) kans op A hebben we (ga na) $P(A) = 7/36$.

We geven nu de algemene definitie.

Definitie 2.1.1: Als A en B gebeurtenissen zijn in de kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ met $P(B) > 0$, dan wordt de *voorwaardelijke kans* op A *gegeven* B, notatie $P(A|B)$, gedefinieerd door (2.1.2).

Stelling 2.1.2: De funktie P_B gedefinieerd op $\mathcal{F}$ door $P_B(A) = P(A|B)$, is een kans op $\mathcal{F}$; de funktie P_B is ook een kans op $\mathcal{F} \cap B$ (kort gezegd: een voorwaardelijke kans is een kans).

Opgave 2.1.3: Bewijs stelling 2.1.2 (zie de voorwaarden (1.2.2)).

Stelling 2.1.4: Als $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gebeurtenissen zijn met $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$, dan geldt (n= 2,3,...)

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{2.1.3}$$

bewijs: alle voorwaardelijke kansen zijn gedefinieerd, omdat $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$ is (vergelijk stelling 1.2.15). Voor n=2 volgt (2.1.3) uit (2.1.2). Het bewijs wordt nu gemakkelijk voltooid met volledige induktie en nogmaals (2.1.2).

Stelling 2.1.5: Zij $N \in \{1,2,\ldots \infty\}$. Als de gebeurtenissen $H_1, H_2, \ldots, H_N$ elkaar aansluiten, terwijl $P(H_j) > 0$ $(j=1,2,\ldots,N)$ en $\sum_1^N P(H_j) = 1$ dan geldt voor iedere gebeurtenis A

$$P(A) = \sum_1^N P(A|H_j)P(H_j). \tag{2.1.4}$$

Bewijs: omdat $\sum_1^N P(H_j) = P(\sum_1^N H_j) = 1$, is $P((\sum_1^N H_j)^*) = 0$ en dus(zie (1.1.1))

$$P(A) = P(A \sum_1^N H_j) + P(A \quad (\sum_1^N H_j)^*) = P(\sum_1^N AH_j) = \sum_1^N P(AH_j) =$$

$$= \sum_1^N P(A|H_j)\ P(H_j),$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit (2.1.2).

Stelling 2.1.6 (regel van Bayes): Als $P(A) > 0$ en als $H_1, H_2, \ldots, H_N$ voldoen aan de voorwaarden van stelling 2.1.5 dan geldt

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{j=1}^N P(A|H_j)P(H_j)}.$$

Opgave 2.1.7: Bewijs stelling 2.1.6.

Opmerking 2.1.8: Voorwaardelijke kansen zijn in het algemeen geen grootheden die men wil berekenen, maar grootheden die in het model *gegeven* zijn en die gebruikt worden om onvoorwaardelijke kansen te berekenen. In deze zin wordt stelling 2.1.5 meestal gebruikt.

Voorbeeld 2.1.9: Men trekt zonder terugleggen ballen uit een vaas, die M witte en N-M zwarte ballen bevat. Hierbij heeft steeds iedere nog in de vaas aanwezige bal dezelfde kans om getrokken te worden.
Vraag: wat is de kans dat de tweede bal wit is?
Antwoord: we geven de gebeurtenis "de eerste bal is wit" aan met W_1, en analoog voor de andere gebeurtenissen. We hebben dan (stelling 2.1.5)

$$P(W_2) = P(W_2|W_1)P(W_1) + P(W_2|Z_1)\,P(Z_1) = \frac{M-1}{N-1}\frac{M}{N} + \frac{M}{N-1}\frac{N-M}{N} = \frac{M}{N} = P(W_1).$$

Opgave 2.1.10: Laat zien dat $P(W_2) = \frac{M}{N}$ als we twee ballen trekken uit de vaas in voorbeeld 2.1.9, maar als model gebruiken een symmetrische kansruimte met als uitkomsten geordende steekproeven van de grootte 2 zonder terugleggen. Bereken $P(W_k)$ als we n geordende trekkingen doen zonder terugleggen.

Opgave 2.1.11: Stel dat de ballen in de vaas uit voorbeeld 2.1.9 genummerd zijn van 1 t.m. N. Bereken de kans dat bij de k-de trekking de bal met nummer j gekozen wordt

a. voor het model "trekken met gelijke kansen uit de resterende ballen"

b. voor het model "n geordende trekkingen zonder terugleggen".

Zijn beide modellen equivalent?

2.2 Onafhankelijkheid

Twee gebeurtenissen A en B heten *onafhankelijk* als het optreden van de ene gebeurtenis geen invloed heeft op de kans op het optreden van de andere gebeurtenis, d.w.z. als $P(A|B) = P(A)$ en $P(B|A) = P(B)$. Uit elk van deze gelijkheden volgt dat

(2.2.1) $\quad P(AB) = P(A)P(B)$.

Aan (2.2.1) is voldaan als $P(A) = 0$ of $P(B) = 0$, dus hiervoor hoeven $P(A|B)$ en $P(B|A)$ niet te bestaan. We geven de volgende definitie.

Definitie 2.2.1: Twee gebeurtenissen heten *onafhankelijk* (ook wel:onderling onafhankelijk, afgekort o.o.) als (2.2.1) geldt.

Opgave 2.2.2.: We trekken één kaart uit een spel van 52 met als model de symmetrische kansruimte. De gebeurtenissen "harten", "aas" en "rood" geven we aan met resp. H,A en R. Welke paren gebeurtenissen zijn onafhankelijk?

Definitie 2.2.3: Een verzameling $\mathcal{A}$ van gebeurtenissen heet onafhankelijk (o.o), als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere deelverzameling $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ geldt dat

(2.2.2) $\quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$

Voorbeeld 2.2.4: Drie gebeurtenissen A, B en C zijn onafhankelijk als $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ en $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

Voorbeeld 2.2.5: Zij $(\Omega,\mathcal{F},P)$ een symmetrisch kansveld met $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$. Definieer $A = \{\omega_1,\omega_2\}$, $B = \{\omega_1,\omega_3\}$ en $C = \{\omega_1,\omega_4\}$. Nu zijn A, B en C twee aan twee onafhankelijk, maar niet (met z'n drieën) onafhankelijk: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$, zodat $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq P(ABC)$.

Opgave 2.2.6: Hoeveel voorwaarden moeten vervuld zijn voor het o.o. zijn van n gebeurtenissen?

Stelling 2.2.7: Als A en B onafhankelijk zijn, dan zijn ook A en B^* onafhankelijk (en dus ook de paren A^*,B en A^*,B^*).

Bewijs: $P(A) = P(AB) + P(AB^*)$, zodat $P(AB^*) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) =$
$= P(A)\{1-P(B)\} = P(A)P(B^*)$.

Opgave 2.2.8: Als A,B,C en D onderling onafhankelijk zijn, dan zijn ook de gebeurtenissen AB en $C \cup D$ onderling onafhankelijk. Bewijs dit. (Dit soort, intuïtief duidelijke eigenschappen zullen we soms zonder bewijs gebruiken).

Definitie 2.2.9: De *verzamelingen* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \ldots$ van gebeurtenissen heten onafhankelijk, als voor iedere keuze van $A_j \in \mathcal{A}_j$ de gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots$ onderling onafhankelijk zijn.

Een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ is een model voor een experiment. Het is ook mogelijk om meer dan één experiment op een kansruimte te definiëren. We beschouwen dan een rij kansruimten $(\Omega,\mathcal{F}_j, P)$ met $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$. Ieder experiment $(\Omega,\mathcal{F}_j,P)$ kan dan worden beschouwd als een *deel-experiment* van $(\Omega,\mathcal{F},P)$. We zijn speciaal geïnteresseerd in *onafhankelijke* (deel-) *experimenten*.

Definitie 2.2.10: De experimenten $(\Omega,\mathcal{F}_j,P)$ $(j=1,2,\ldots)$ heten onafhankelijk als de σ-algebra's $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\ldots$ onafhankelijk zijn (zie definitie 2.2.9).

Voorbeeld 2.2.11: Als $A_1, A_2, \ldots$ o.o. gebeurtenissen zijn, dan zijn de σ-algebra's $F_j := \{\Omega, \emptyset, A_j, A_j^*\}$ *onafhankelijk* $(j=1,2,\ldots)$.

In veel gevallen wordt van experimenten *geëist* of verondersteld dat ze onafhankelijk zijn. Dat wil zeggen dat het model zó wordt gekozen of gekonstrueerd dat aan de onafhankelijkheidseisen is voldaan. We geven nu een voorbeeld van zo'n konstruktie.

Voorbeeld 2.2.12: Laat (Ω_j, F_j, P_j) $(j=1,2,\ldots,n)$ diskrete kansruimten zijn (zie definitie 1.3.1). We definiëren nu een nieuwe kansruimte (Ω, F, P) zó dat de experimenten voorgesteld door (Ω_j, F_j, P_j) daarop onafhankelijk zijn. We kiezen

$$(2.2.3)\quad \begin{cases} \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n & \text{(cartesisch produkt),} \\ F \text{ de verzameling van alle deelverzamelingen van } \Omega, & \\ P(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})\ldots P_n(\{\omega_n\}). & \end{cases}$$

Het j-de experiment wordt nu het deel-experiment van (Ω, F, P) voorgesteld door (Ω, F_j', P), waarbij F_j' gedefinieerd is door $(j=1,2,\ldots,n)$

$$F_j' = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times F_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n,$$

d.w.z. F_j' bestaat uit alle deelverzamelingen van Ω waarbij alleen aan de j-de koördinaat restrikties worden opgelegd. Iedere gebeurtenis $A_j \in F_j$ gaat hierbij over in de gebeurtenis $A_j' = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \ldots \times \Omega_n \in F_j' \subset F$.

De kansruimte (Ω, F, P) heet wel *produkt-kansruimte*.

Opgave 2.2.13: Ga na dat de experimenten (Ω, F_j', P) uit voorbeeld 2.2.14 onafhankelijk zijn. Aanwijzing: laat eerst zien dat $P(A_j') = P_j(A_j)$.

Voorbeeld 2.2.14: Een experiment met twee uitkomsten: S (succes) en M (mislukking) kunnen we voorstellen door een diskrete kansruimte, vastgelegd door $\Omega = \{S, M\}$, $P(\{S\}) = p$ en $P(\{M\}) = 1-p$. Als we onafhankelijk van elkaar n van deze experimenten doen, dan is de kans op precies k successen (en dus n-k mislukkingen) gelijk aan

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (0 \le k \le n).$$

Immers P (precies k successen) $= \Sigma P(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}) = \Sigma P_1(\{\omega_1\}) \ldots P_n(\{\omega_n\})$, waarbij we sommeren over alle uitkomsten $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ waarbij precies k van de koördinaten gelijk zijn aan S. Er zijn (zie lemma 1.3.8) $\binom{n}{k}$ van deze uitkomsten, terwijl (zie 2.2.3) voor elk van deze uitkomsten geldt dat $P(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}) = p^k(1-p)^{n-k}$.

In het vervolg zullen we, als we over onafhankelijke experimenten spreken, aannemen dat voldaan is aan definitie 2.2.10, d.w.z. dat gebeurtenissen die betrekking hebben op verschillende experimenten onafhankelijk zijn. We komen hierop in hoofdstuk 3 terug.

3 STOCHASTISCHE GROOTHEDEN, VERDELINGSFUNKTIES

3.1 Stochastische grootheden

We bekijken de kansruimte die model is voor het kiezen van een "willekeurige" Nederlander, d.w.z. de symmetrische kansruimte met Ω de verzameling van alle Nederlanders. Iedere Nederlander heeft een zekere lengte en als we volgens dit model één Nederlander ω kiezen, dan krijgen we een getal $\ell(\omega)$, de lengte van ω, dat van het toeval afhangt. Zo'n getal noemt men een *stochastische grootheid*, soms ook *toevalsgrootheid*. Het is duidelijk dat de lengte van Nederlanders een *funktie* is op Ω; doordat het argument van de funktie door het toeval wordt bepaald, is ook de funktiewaarde van het toeval afhankelijk. We geven nu een formele definitie.

Definitie 3.1.1: Een *stochastische grootheid* op een kansruimte (Ω, F, P) is een funktie $x: \Omega \to \mathbb{R}$ die F-meetbaar is, d.w.z. dat voor iedere $a \in \mathbb{R}$

(3.1.1) $\quad \{\omega \mid x(\omega) \leq a\} \in F.$

Als $x_1(\omega),\dots,x_n(\omega)$ stochastische grootheden zijn, dan heet $(x_1(\omega),\dots,x_n(\omega))$ wel een *stochastische vektor*.

Opmerking: Meetbaarheid is i.h.a. geen sterke eis. We stellen deze eis om de verzameling van (3.1.1) als een gebeurtenis te kunnen beschouwen.

Opgave 3.1.2 : Op een eindige of aftelbare kansruimte zijn alle funkties meetbaar.

Opgave 3.1.3: Als x een F-meetbare functie is, dan geldt ook $\{\omega \mid x(\omega) < a\} \in F$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

Notatie: We zullen stochastische grootheden aangeven met onderstreepte letters: $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$. We schrijven dan $P(\underline{x} \leq a)$ of $P(\underline{x} \in B)$ i.p.v. $P(\{\omega \mid x(\omega) \leq a\})$ of $P(\{\omega \mid x(\omega) \in B\})$ met $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Het gebruik van onderstreepte letters voor stochastische grootheden is beperkt tot de Nederlandstalige literatuur; in de Engelstalige literatuur gebruikt men meestal X,Y,Z i.p.v. $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$, in de Franstalige soms ξ,η,ζ, etc.

Eenvoudige voorbeelden van stochastische grootheden zijn de volgende

Voorbeeld 3.1.4. (som van de ogen bij een worp met twee dobbelstenen):

$$\Omega = \{(x,y) \mid x=1,2,\dots,6; y=1,2,\dots,6\}\ ,\ \forall_{(x,y)\in\Omega}[P(\{(x,y)\}) = \frac{1}{36}].$$

$$k(x,y) = x+y \quad \text{met (ga na)} \quad P(\underline{k}=k) = \frac{6-|7-k|}{36} \quad (k=1,2,\dots,13).$$

Voorbeeld 3.1.5 (afstand tot de "roos" bij schijfschieten):

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}\ ;\ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)\ \text{(zie definitie 1.2.5)},\ P(A) = \frac{1}{\pi}\,\text{Opp}(A).$$

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\quad \text{met (ga na)}\quad P(\underline{r} \le r) = r^2 \quad (0 \le r \le 1).$$

3.1.1 Funkties van stochastische grootheden

In veel gevallen is men geïnteresseerd in *funkties* van stochastische grootheden. Als bijv. $\underline{d}$ de diameter is van een door het toeval aangewezen bol (bijvoorbeeld een willekeurig gekozen exemplaar uit een partij stalen kogels) dan willen we kunnen spreken over het (stochastische) volume van zo'n bol: $\underline{v} = \pi \underline{d}^3/6$. In feite is een funktie g van een stochastische grootheid $\underline{x}$ niets anders dan de samengestelde funktie $g \circ x$; de enige eis die we stellen is dat $g \circ x$: $\Omega \to \mathbb{R}$ weer meetbaar is, dus (zie definitie 3.1.1) dat voor alle $a \in \mathbb{R}$

$$\{\omega\,|\,g(x(\omega)) \le a\} \in \mathcal{F}.$$

In de praktijk is dit geen probleem: alle funkties g die u kunt bedenken hebben deze eigenschap. Zonder bewijs geven we de volgende stellingen.

Stelling 3.1.1.1: Als $(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ een stochastische vektor is met waarden in $B \subset \mathbb{R}^n$ en als $g\colon B \to \mathbb{R}$ continu is of monotoon in iedere variabele, dan is ook $g(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een stochastische grootheid.

Stelling 3.1.1.2: Als $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ stochastische grootheden zijn en als de rij funkties $x_1,x_2,\ldots$ een limiet x heeft: $\forall_{\omega\in\Omega}[\lim_{n\to\infty} x_n(\omega) = x(\omega)]$, dan is ook $\underline{x}$ een stochastische grootheid.

Gevolg 3.1.1.3: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische grootheden zijn met $y(\omega) \neq 0$, dan zijn ook $\sqrt{\underline{x}}, \underline{x}^7$, $\sin(\underline{x}\,\underline{y})$, $(\underline{x}^2+\underline{y}^4)^{-\frac{1}{2}}$ (etc.,etc.) stochastische grootheden.

Gevolg 3.1.1.4: Als $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ stochastische grootheden zijn, dan zijn ook

$\sum_1^n \underline{x}_k$, $\prod_1^n \underline{x}_k$, $\max(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, $\min(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ en $\sum_1^n 2^{-k}\cos \underline{x}_k t$ stochastische grootheden $(n=1,2,\ldots)$.

Opgave 3.1.1.5: Bewijs dat $\underline{x}^2$ en $\sin \underline{\alpha}$ stochastische grootheden zijn.

3.2 Verdelingsfunkties

In het algemeen is men niet geïnteresseerd in de stochastische grootheid als funktie, maar wil men alleen weten welke waarden de grootheid kan aannemen en met welke kansen dat gebeurt. Uit het volgende voorbeeld blijkt dat twee stochastische grootheden verschillend kunnen zijn terwijl hun "kansgedrag" hetzelfde is.

Voorbeeld 3.2.1: Beschouw de kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ met $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$ en $P(A) = \int_0^1 1_A(\omega)d\omega$. Definieer $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ door $x_1(\omega) = \omega$ en $x_2(\omega)=1-\omega$.

Dan geldt (ga na) $P(a < \underline{x}_i \le b) = b-a$ voor $i=1$ en voor $i=2$ $(0 \le a \le b \le 1)$. Omdat kansen van deze soort het relevante gedrag van een stochastische grootheid bepalen, zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ voor de "waarnemer" niet te onderscheiden. In de praktijk wordt een stochastische grootheid gekarakteriseerd door zijn *verdelingsfunktie*, die als volgt wordt gedefinieerd.

Definitie 3.2.2: Als $\underline{x}$ een stochastische grootheid is, dan heet de funktie $F_{\underline{x}}$, voor alle $z \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door (vergelijk definitie 3.1.1)

(3.2.1) $$F_{\underline{x}}(z) = P(\underline{x} \le z) = P(\{\omega|x(\omega) \le z\})$$

de verdelingsfunktie van $\underline{x}$.

Opgave 3.2.3: Bewijs dat

$$P(a < \underline{x} \le b) = F_{\underline{x}}(b) - F_{\underline{x}}(a)$$

Voorbeeld 3.2.4: Voor de stochastische grootheid $\underline{k}$ uit voorbeeld 3.1.4 geldt

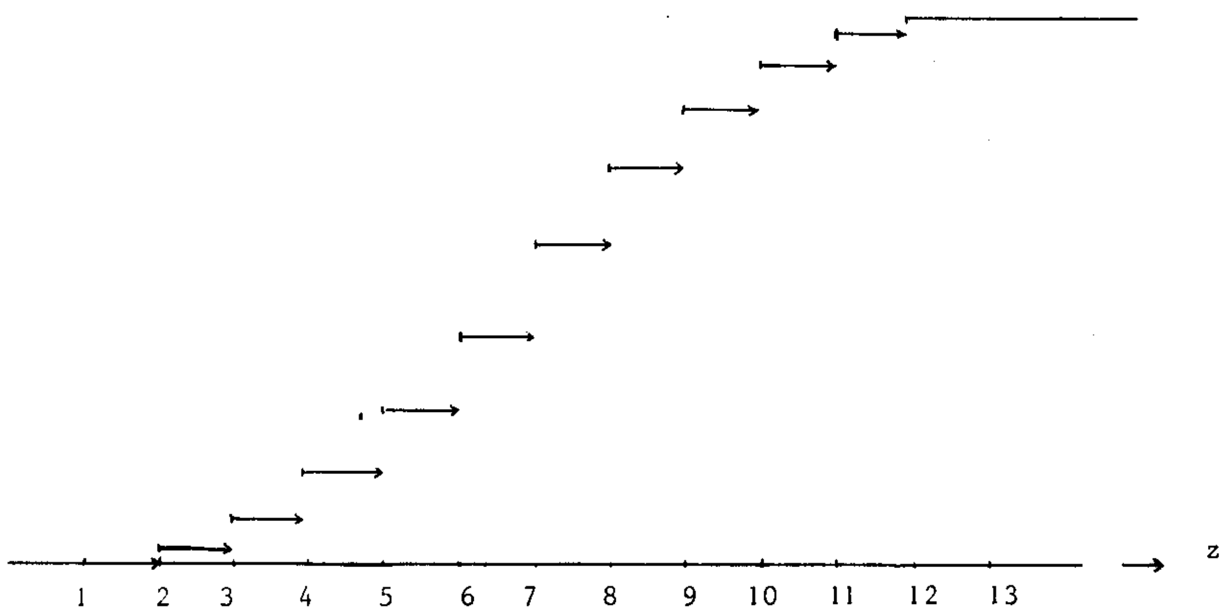
$$F_{\underline{k}}(z) = P(\{(x,y) \mid x+y \le z\}) = \sum_{x+y\le z} P(\{(x,y)\}) =$$

$$= \sum_{j\le z} \sum_{x+y=j} P(\{(x,y)\}) = \sum_{j\le z} P(\underline{k}=j) = \sum_{j\le z} p_j,$$

waarbij

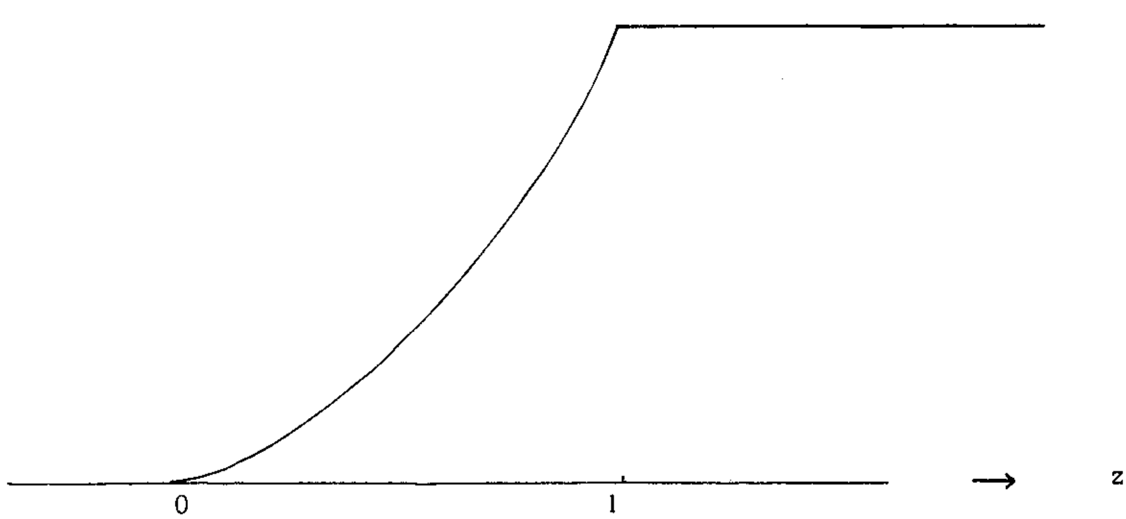
$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{36}(6-|7-j|) & (j=1,2,\ldots,13) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$F_{\underline{k}}$ is dus een trapfunktie zoals hieronder getekend.



Voorbeeld 3.2.5: De verdelingsfunktie van $\underline{r}$ uit voorbeeld 3.1.5 wordt gegeven door (ga na)

$$F_{\underline{r}}(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0 \\ z^2 & (0 \le z < 1) \\ 1 & (z \ge 1) \end{cases}$$



We geven nu een aantal eigenschappen van verdelingsfunkties. Hierbij schrijven we soms gemakshalve F i.p.v. $F_{\underline{x}}$.

Stelling 3.2.6: Zij F de verdelingsfunktie van een stochastische grootheid $\underline{x}$. Dan geldt

a. F is niet-dalend

b. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

c. F is kontinu van rechts: $\lim_{h\downarrow 0} F(x+h) = F(x)$.

Bewijs:

a. Als $y \geq z$ is, dan is $\{\omega|x(\omega)\leq y\}\supset\{\omega|\ x(\omega) \leq z\}$. Gebruik nu definitie 3.2.2. met stelling 1.2.15.

b. De rij verzamelingen $\{\omega|x(\omega)\leq -N\}$ $(N=1,2,\ldots)$ is monotoon met limiet $\emptyset$, zodat wegens stelling 1.2.19 $F(-N) \to P(\emptyset) = 0$ als $N \to \infty$. Omdat F monotoon is, geldt nu ook (ga na) $F(x) \to 0$ als $x \to -\infty$. Geheel analoog bewijst men de tweede bewering in b.

c. De rij verzamelingen $\{\omega|x(\omega)\leq x+\frac{1}{n}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ is monotoon met limiet $\{\omega|x(\omega)\leq x\}$ (gebruik weer de monotonie van F).

Opgave 3.2.7: Bewijs dat voor een (eindige) stochastische grootheid $\underline{x}$ geldt

(i) $\{\omega|x(\omega)\leq -N\}\to\emptyset$, (ii) $\{\omega|x(\omega)\leq N\}\to\Omega$ en

(iii) $\{\omega|x(\omega)\leq x+\frac{1}{N}\}\to\{\omega|x(\omega)\leq x\}$, (iv) $\{\omega|x(\omega)\leq x-\frac{1}{N}\}\to\{\omega|x(\omega)< x\}$ als $N\in\mathbb{N}$ en $N\to\infty$.

Stelling 3.2.8: Zij $F_{\underline{x}}(x-0) := \lim_{h\downarrow 0} F_{\underline{x}}(x-h)$, dan geldt

$$P(\underline{x}<x) = F_{\underline{x}}(x-0).$$

bewijs: zie opgave 3.2.7, (iv) en gebruik weer stelling 1.2.19.

Gevolg: $$P(\underline{x}=x) = F_{\underline{x}}(x) - F_{\underline{x}}(x-0).$$

De volgende stelling is van groot praktisch en theoretisch belang.

Stelling 3.2.9: Als F een funktie $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is met de eigenschappen a,b en c van stelling 3.2.5, dan is er een stochastische grootheid $\underline{x}$ met $F_{\underline{x}}=F$.

Bewijs: We moeten een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ aangeven en daarop een meetbare funktie x, zō dat $F_{\underline{x}}=F$. Kies $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en leg P vast door de eis dat $P((-\infty,a])=F(a)$ voor alle reële a (we bewijzen *niet* dat P hierdoor bepaald is). Definieer nu $\underline{x}$ door $x(\omega) = \omega$. Dan is $F_{\underline{x}}(x) = P(\underline{x} \leq x) =$
$= P(\{\omega | x(\omega) \leq x\}) = P((-\infty,x]) = F(x)$.

Opmerking 3.2.10: De in het bewijs van stelling 3.2.9 gekonstrueerde kansruimte $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),P)$ is *model* voor een *experiment* dat bestaat uit het waarnemen of meten van een grootheid die van het toeval afhangt. De kans P die van $\underline{x}$ afhangt en daarom ook wel met $P_{\underline{x}}$ wordt aangegeven heet de *kansverdeling* van $\underline{x}$. Deze kansverdeling is geheel bepaald door $F_{\underline{x}}$.

Opmerking 3.2.11: Stelling 3.2.9 en analoge stellingen voor verdelingsfunkties van stochastische vektoren (zie volgende §) maken het mogelijk om over stochastische grootheden en hun verdelingsfunkties te spreken zonder dat een kansruimte gegeven is: het is steeds mogelijk om bij een gegeven verdelingsfunktie F een kansruimte te konstrueren en daarop een grootheid $\underline{x}$ met $F_{\underline{x}} = F$. In de toegepaste kansrekening en in de statistiek kan men het daarom vrijwel zonder kansruimten stellen. Ook wij zullen in het vervolg nog slechts sporadisch expliciet van het begrip kansruimte gebruik maken.

3.2.1 Verdelingsfunkties in meer dan één variabele

We behandelen hier de eigenschappen van verdelingsfunkties in twee variabelen en (kort) van verdelingsfunkties in meer dan twee variabelen.

Definitie 3.2.1.1: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische grootheden zijn, dan heet de funktie $F_{\underline{x},\underline{y}}$, gedefinieerd door

$$F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = P(\{\underline{x} \leq x\} \cap \{\underline{y} \leq y\}) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

de *simultane verdelingsfunktie* van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ (of ook: de verdelingsfunktie van de stochastische vektor $(\underline{x},\underline{y})$).

Notatie: In plaats van $P(\{a < \underline{x} \leq b\} \cap \{\underline{y} \leq c\})$ e.d. zullen we dikwijls als afkorting schrijven $P(a < \underline{x} \leq b, \underline{y} \leq c)$ e.d.

Stelling 3.2.1.2: Als F de verdelingsfunktie is van $(\underline{x},\underline{y})$, dan geldt

$$P(a_1 < \underline{x} \leq b_1,\ a_2 < \underline{y} \leq b_2) = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2).$$

Bewijs: $\{a_1<\underline{x}\le b_1\}\cap\{a_2<\underline{y}\le b_2\} = \{\underline{x}\le b_1\}\cap\{\underline{x}\le a_1\}^*\cap\{\underline{y}\le b_2\}\cap\{\underline{y}\le a_2\}^* = B_1B_2(A_1\cup A_2$

met $A_1 = \{\underline{x}\le a_1\}$, $B_1 = \{\underline{x}\le b_1\}$, $A_2 = \{\underline{y}\le a_2\}$, $B_2 = \{\underline{y}\le b_2\}$. Nu is (zie 1.1.1) en stelling 1.2.14)

$P(B_1B_2(A_1\cup A_2)^*) = P(B_1B_2) - P(B_1B_2A_1\cup B_1B_2A_2) = P(B_1B_2) - P(A_1B_2\cup B_1A_2) =$

$= P(B_1B_2) - P(A_1B_2) - P(B_1A_2) + P(A_1A_2)$, waarbij we gebruik hebben gemaakt van de eigenschappen $A_1B_1 = A_1$ en $A_2B_2 = A_2$.

<u>Stelling 3.2.1.3:</u> Als $(\underline{x},\underline{y})$ een stochastische vektor is met verdelingsfunktie $F_{\underline{x},\underline{y}}$, dan geldt

$$\lim_{x\to\infty} F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = F_{\underline{y}}(y),$$

$$\lim_{y\to\infty} F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = F_{\underline{x}}(x).$$

Bewijs: $\{\omega|\underline{x}(\omega)\le N,\ \underline{y}(\omega)\le y\}\uparrow\{\omega|\underline{x}(\omega)\le y\}$ als $N\to\infty$, $N\in\mathbb{N}$, zodat $F_{\underline{x},\underline{y}}(N,y)\to F_{\underline{y}}(y)$. Omdat $F_{\underline{x},\underline{y}}$ monotoon is in x voor iedere y, geldt ook $F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)\to F_{\underline{y}}(y)$ als $x\to\infty$. Zie ook stelling 1.2.19.

<u>Stelling 3.2.1.4:</u> Als F de verdelingsfunktie is van een stochastische vektor $(\underline{x},\underline{y})$, dan geldt

a. $\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0 \qquad (y\in\mathbb{R})$

b. $\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

c. $\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F(x,y) = 1$

d. F is niet-dalend in x voor alle y en in y voor alle x

e. F is kontinu van rechts in x voor alle y en in y voor alle x.

<u>Opgave 3.2.1.5:</u> Bewijs stelling 3.2.1.4.

Verdelingsfunkties in meer dan twee veranderlijken definieert men analoog:

<u>Definitie 3.2.1.6:</u> Als $(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots,\underline{x}_n)$ een stochastische vektor is, dan heet de funktie $F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n}$, gedefinieerd door

$$F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n}(x_1,\dots,x_n) = P(\underline{x}_1 \le x_1,\dots, \underline{x}_n \le x_n)$$

de (simultane) verdelingsfunktie van $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$.

Stelling 3.2.1.7:

$$\lim_{x_j \to \infty} F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{j-1},\underline{x}_{j+1},\dots,\underline{x}_n}(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n).$$

Stelling 3.2.1.8: Als F de verdelingsfunktie is van een stochastische vektor $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$ dan geldt

$$\lim_{x_j \to -\infty} F(x_1,\dots,x_n) = 0 \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1,\dots,x_n) = 1$$

F is niet-dalend en kontinu van rechts in elk der variabelen.

Definitie 3.2.1.9: Als $F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n}(x_1,\dots,x_n)$ de verdelingsfunktie is van $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$, dan heet

$$F_{\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n}(x_1,\dots,x_{j-1},\infty,x_{j+1},\dots,x_n)$$

wel de *marginale verdelingsfunktie* van $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{j-1},\underline{x}_{j+1},\dots,\underline{x}_n)$.

Zonder bewijs noemen we nog een uitbreiding van stelling 3.2.9 (een soortgelijke stelling geldt in meer dan twee variabelen).

Stelling 3.2.1.10: Als een funktie $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ voldoet aan a t.m. e van stelling 3.2.1.4 en als bovendien (dit is eigenlijk het belangrijkste) voor alle $a_1 \le b_1$ en $a_2 \le b_2$ geldt dat (vergelijk stelling 3.2.1.2)

$$F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \ge 0,$$

dan bestaat er een kansruimte en een stochastische vektor $(\underline{x},\underline{y})$ zó dat $F_{\underline{x},\underline{y}} = F$.

3.3 Onafhankelijke stochastische grootheden

Definitie 3.3.1: De stochastische vektoren

$(\underline{x}_{1,1},\ldots,\underline{x}_{1,k_1}),\ldots,(\underline{x}_{n,1},\ldots,\underline{x}_{n,k_n})$ heten *onderling onafhankelijk* (o.o.) als

$$F_{\underline{x}_{1,1},\ldots,\underline{x}_{n,k_n}} = F_{\underline{x}_{1,1},\ldots,\underline{x}_{1,k_1}} \cdots F_{\underline{x}_{n,1},\ldots,\underline{x}_{n,k_n}};$$

speciaal heten de stochastische grootheden $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ o.o.als

$$F_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n} = F_{\underline{x}_1} F_{\underline{x}_2} \cdots F_{\underline{x}_n}.$$

De stochastische grootheden $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ heten o.o, als voor iedere n en iedere deelverzameling $\{k_1,\ldots,k_n\}$ van $\mathbb{N}$ de stochastische grootheden $\underline{x}_{k_1},\ldots,\underline{x}_{k_n}$ o.o. zijn. De onafhankelijkheid van een aftelbare rij stochastische vektoren definieert men analoog. Stochastische grootheden die niet onafhankelijk zijn heten *afhankelijk*.

Opgave 3.3.2: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn, dan zijn ook de gebeurtenissen $\{a_1 < \underline{x} \le b_1\}$ en $\{a_2 < \underline{y} \le b_2\}$ o.o. Bewijs dit (vergelijk stelling 3.2.1.2).

Opgave 3.3.3: Bewijs dat de stochastische grootheden $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ gedefinieerd door $x_1(x,y) = x$ en $x_2(x,y) = y$ op het kansveld van voorbeeld 3.1.5 afhankelijk zijn.

De volgende stelling is een speciaal geval van stelling 3.2.1.10, als $n=2$.

Stelling 3.3.4: Als $F_1, F_2,\ldots,F_n$ één-dimensionale verdelingsfunkties zijn, dan bestaat er een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ met daarop *onderling onafhankelijke* stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ met de eigenschap dat $F_{\underline{x}_j} = F_j$ $(j = 1,2,\ldots,n;\ n \in \mathbb{N})$.

Bewijs: kies $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ en leg P vast door de eis dat $P(\{z \in \mathbb{R}^n \mid z_1 \le x_1,\ldots, z_n \le x_n\}) = F_1(x_1)\ldots F_n(x_n)$. Tenslotte definiëren we $\underline{x}_j$ door $x_j(z) = z_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Dan geldt $P(\underline{x}_1 \le x_1,\ldots,\underline{x}_n \le x_n) = F_1(x_1)\ldots F_n(x_n)$.

Opmerking 3.3.5: In de kansruimte ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, P) zoals die hier boven is gekonstrueerd zijn nu de experimenten die korresponderen met de grootheden $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ onderling onafhankelijk. Deze experimenten worden (zie opmerking 3.2.1) elk weergegeven door een kansruimte van de vorm ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_{\underline{x}_j}$).

De kansruimte ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, P) is weer de *produktkansruimte* (vergelijk voorbeeld 2.2.12). Deze kansruimte is model voor het doen van n *onafhankelijke waarnemingen* of metingen, of als de F_j gelijk zijn, voor het n maal *onafhankelijk herhalen* van dezelfde waarneming of meting. De kans P ook wel aangeduid met $P_{\underline{x}}$ heet de *kansverdeling* van $\underline{x} = (\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$, deze is geheel bepaald door $F_1,\dots,F_n$.

Zonder bewijs noemen we nog de volgende voor de hand liggende stelling.

Stelling 3.3.6: Als $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots$ o.o. stochastische grootheden (of stochastische vektoren) zijn, dan zijn ook de stochastische grootheden (of vektoren) $f_1(\underline{x}_1)$, $f_2(\underline{x}_2),\dots$ o.o. (hierbij zijn $f_1,f_2,\dots$ functies zoals bedoeld in 3.1.1).

Opmerking 3.3.7: In het vervolg zullen we doorgaans (en dit is mogelijk o.g.v. stellingen als 3.3.4) over stochastische grootheden en vektoren spreken met gegeven kansverdelingen zonder daarbij expliciet een kansruimte aan te geven.

3.4 Diskrete kansverdelingen

Definitie 3.4.1: Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heet *diskreet*, als $\underline{x}$ slechts eindig of aftelbaar veel waarden kan aannemen, d.w.z. als er getallen $x_0,x_1,\dots$ bestaan met de eigenschap dat

$$\sum_0^\infty P(\underline{x} = x_k) = 1.$$

De bijbehorende verdelingsfunktie noemt men ook diskreet; dit is nu een trapfunktie van de vorm

$$(3.4.1) \qquad F_{\underline{x}}(x) = \sum_{x_k \le x} p_k = \sum_0^\infty p_k \, H(x - x_k),$$

met $p_k = P(\underline{x} = x_k)$ en $H(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Twee rijen reële getallen $x_0,x_1,\dots$ en $p_0,p_1,\dots$ met $p_j \ge 0$ en $\sum_0^\infty p_j = 1$ bepalen (zie(3.4.1)) een diskrete kansverdeling op $\mathbb{R}$.

In de volgende vijf voorbeelden is p_k steeds gedefinieerd door

$$p_k = P(\underline{k} = k) \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Voorbeeld 3.4.2 (*diskrete homogene verdeling*):

$$p_k = \frac{1}{n+1} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots);$$

model voor het trekken van een willekeurig getal "tussen" 0 en n.

Voorbeeld 3.4.3 (*binomiale* verdeling):

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots;\ 0 \le p \le 1).$$

Dit is de kansverdeling van het *aantal suksessen* bij n o.o. experimenten elk met kans p op sukses (zie voorbeeld 2.2.14). Vergelijk ook stelling 1.3.14. Als n=1, dan noemt men dit ook wel *Bernoulli-verdeling*.

Voorbeeld 3.4.4 (*geometrische-* of *Pascal-verdeling*):

$$p_k = (1-p)^{k-1} p \qquad (k=1,2,\ldots;\ 0 \le p \le 1).$$

Dit is de kansverdeling van het aantal experimenten dat nodig is om voor het eerst sukses te hebben (zie voorbeeld 2.2.14):

$$P(\{(\omega_1,\ldots,\omega_k) \mid \omega_1=M,\ \omega_2=M,\ldots,\ \omega_{k-1}=M,\ \omega_k=S\}) = (1-p)^{k-1} p.$$

Voorbeeld 3.4.5 (*hypergeometrische verdeling*):

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Deze kansverdeling werd afgeleid in stelling 1.3.14. Voor $M \to \infty$, $N \to \infty$ zó dat $M/N \to p\in(0,1)$ gaat deze verdeling over in de binomiale (voorbeeld 3.4.3); dit is gezien het model niet verwonderlijk.

Voorbeeld 3.4.6 (*Poisson-verdeling*):

$$p_k = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \qquad (k=0,1,2,\ldots;\ \mu > 0).$$

Deze verdeling komt onder andere voor als limiet van (of benadering voor) de binomiale verdeling: voor $n \to \infty$ en $p \to 0$, zó dat $np \to \mu > 0$, geldt

$$(3.4.2) \qquad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Men kan de Poisson-verdeling gebruiken om de binomiale verdeling te benaderen, als n groot is en np niet al te groot (bijvoorbeeld $n \geq 20$ en $np \leq 5$). Dit heeft voordelen, omdat de Poisson-verdeling een parameter minder bevat dan de binomiale en dus makkelijker getabelleerd kan worden. De Poisson-verdeling wordt ook (dit hangt met bovenstaande benadering samen) veel gebruikt als model voor het optreden van "zeldzame" gebeurtenissen en wordt in dit verband wel de "wet van de kleine aantallen" genoemd.

Opgave 3.4.7: Bewijs (3.4.2). Wat gebeurt er als $n(1-p) \to \lambda > 0$ gaat en $np \to \infty$?

Opgave 3.4.8: Bewijs in de voorbeelden 3.4.2 t.m. 3.4.6 dat $\Sigma\, p_k = 1$ is.

Opgave 3.4.9: Bepaal de kansverdeling van $\underline{k}_n$, het aantal experimenten nodig om n suksessen te behalen (zie voorbeeld 3.4.4).

Diskrete kansverdelingen in meer dan één variabele komen (afgezien van het geval van onafhankelijke stochastische grootheden) in de praktijk niet zo veel voor. We behandelen deze niet uitvoerig.

Definitie 3.4.10: Een stochastische vektor $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ heeft een diskrete verdeling, als er een aftelbare (of eindige) verzameling vektoren $(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$ bestaat met de eigenschap dat

$$\sum_k P((\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = (x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})) = 1 .$$

Voorbeeld 3.4.11 (*multinomiale verdeling*):

$$P((\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = (k_1,\ldots,k_n)) = \frac{N!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\, p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}$$

met $k_1 + \ldots + k_n = N$, $k_j + 1 \in \mathbb{N}$, $p_j \geq 0$ $(j=1,2,..,n)$, $\sum_1^n p_j = 1$. We kunnen $\underline{x}_j$ beschouwen als het aantal malen dat uitkomst A_j optreedt als we N o.o. experimenten doen, die elk met kans p_j in uitkomst A_j resulteren (vergelijk stelling 1.3.16).

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende voor de hand liggende stelling.

Stelling 3.4.12: De diskrete stochastische grootheden $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn o.o. dan en slechts dan als voor iedere $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$P((\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = (x_1,\ldots,x_n)) = P(\underline{x}_1=x_1)\ldots P(\underline{x}_n=x_n).$$

Opgave 3.4.13: Bewijs stelling 3.4.12 voor n=2 (zie definities 3.3.1, 3.4.1 en 3.4.10).

Opgave 3.4.14: Als de vektor $(\underline{x},\underline{y})$ een diskrete verdeling heeft, dan hebben ook $\underline{x}$ en $\underline{y}$ elk een diskrete verdeling. Zie stelling 3.2.1.3..

Opgave 3.4.15: Bereken de kansverdeling van $\underline{x}_j$ (d.w.z. $P(\underline{x}_j=k)$) voor $\underline{x}_j$ in voorbeeld 3.4.11.

3.5 Absoluut kontinue verdelingen in één variabele

Definitie 3.5.1: Een verdelingsfunktie $F_{\underline{x}}$ (en de bijbehorende kansverdeling, soms ook $\underline{x}$ zelf) heet *absoluut kontinu* als $F_{\underline{x}}$ geschreven kan worden als

$$(3.5.1) \qquad F_{\underline{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\underline{x}}(u)du;$$

de funktie $f_{\underline{x}}$ heet de *kansdichtheid* van $\underline{x}$.

Opmerking 3.5.2: De voorwaarden die aan $f_{\underline{x}}$ gesteld moeten worden om (3.5.1) zinvol te maken hangen af van het gebruikte integraalbegrip; we zullen hier veronderstellen dat $f_{\underline{x}}$ Riemann-integreerbaar is. In de meeste gevallen zal $f_{\underline{x}}$ stuksgewijze kontinu zijn. De funktie $f_{\underline{x}}$ is in wezen door $F_{\underline{x}}$ bepaald; het is echter mogelijk om $f_{\underline{x}}$ in aftelbaar veel punten te wijzigen zonder dat $F_{\underline{x}}$ daardoor verandert. Wel geldt (zie Algebra en Analyse)

Stelling 3.5.3: Als $f_{\underline{x}}$ kontinu is voor $x = x_0$, dan geldt

$$(3.5.2) \qquad F'_{\underline{x}}(x_0) = f(x_0).$$

Stelling 3.5.4: $P(a < \underline{x} \le b) = \int_a^b f_{\underline{x}}(x)dx.$

Bewijs: ga na.

Algemeen geldt voor absoluut continue verdelingen

Stelling 3.5.5: Als B een eindige of aftelbare vereniging is van disjunkte intervallen, dan geldt

$$(3.5.3) \qquad P(\underline{x} \in B) = \int_B f_{\underline{x}}(x)dx.$$

Bewijs: zij $B = \sum_1^\infty A_n$, waarin de A_n intervallen zijn, en zij $B_n = \sum_1^n A_k$. Dan geld
(zie stelling 1.2.19)

$$P(\underline{x} \in B_n) = P(\underline{x} \in B) - P(\underline{x} \in B^*B_n) \to P(\underline{x} \in B),$$

terwijl anderzijds

$$P(\underline{x} \in B_n) = \sum_1^n P(\underline{x} \in A_k) = \sum_1^n \int_{A_k} f(x)dx \to \sum_1^\infty \int_{A_k} f(x)dx =: \int_B f(x)dx.$$

Uit (3.5.1) en stelling 3.2.6 of stelling 3.5.5 volgt nog

Stelling 3.5.6: Als $f_{\underline{x}}(x)$ een kansdichtheid is, dan geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}}(x)dx = 1. \tag{3.5.4}$$

Als $f_{\underline{x}}$ kontinu is op $\mathbb{R}$, dan is $f_{\underline{x}}(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (in het algemeen is $f_{\underline{x}}(x) \geq 0$ voor "bijna alle" $x \in \mathbb{R}$ - vergelijk opmerking 3.5.2. We kunnen ook zonder bezwaar in definitie 3.5.1 eisen dat $f_{\underline{x}}(x) \geq 0$ is).

Opmerking 3.5.7: Omgekeerd kan iedere niet-negatieve funktie f die aan (3.5.4) voldoet, optreden als de kansdichtheid van een stochastische grootheid (vergelijk stelling 3.2.9).

Opmerking 3.5.8: Verdelingsfunkties van de vorm (3.5.1) noemt men vaak "kontinu"; in feite is absolute kontinuïteit sterker dan kontinuïteit: er zijn kontinue verdelingsfunkties die niet in de vorm (3.5.1) geschreven kunnen worden; deze noemt men *singulier*. We gaan hier niet op in. De belangrijkste typen verdelingsfunkties zijn de diskrete en de absoluut kontinue. Soms komen we ook "mengsels" tegen van de vorm $F = pF_a + (1-p)F_d$ met F_a absoluut kontinu en F_d diskreet, terwijl $0 < p < 1$. Een voordeel van het gebruik van verdelingsfunkties boven het gebruik van kansdichtheden $f_{\underline{x}}$ of afzonderlijke kansen $P(\underline{x} = x_k)$ is dat zowel absoluut kontinue als diskrete (en singuliere) verdelingen hiermee kunnen worden beschreven.

Opmerking 3.5.9: relatie (3.5.3) wordt ook wel gebruikt als *definitie* van een absoluut continue kansverdeling.

Voorbeeld 3.5.9 (*homogene verdeling* op (a,b)):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a < x < b) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

(3.5.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{x-a}{b-a} & (a \le x < b) \\ 1 & (x \ge b) \end{cases}$$

Voorbeeld 3.5.10 (*exponentiële verdeling*):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (\lambda > 0;\ x > 0)$$

(3.5.6) $$F(x) = 1-e^{-\lambda x} \qquad (\ x > 0\ )$$

Afspraak: Kansdichtheden zijn nul waar ze niet expliciet gedefinieerd worden. Verdelingsfunkties zijn nul of één waar ze niet expliciet gedefinieerd worden; door de monotonie liggen ze dan vast.

Voorbeeld 3.5.11 (*Gamma-verdeling*):

(3.5.7) $$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \qquad (\alpha > 0;\ \lambda > 0;\ x > 0),$$

waarbij

(3.5.8) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

Opgave 3.5.12: Bewijs dat $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\ \Gamma(\alpha)$ en dat $\Gamma(n+1) = n!$.

Voorbeeld 3.5.13 (*Beta-verdeling*):

(3.5.9) $$f(x) = \frac{1}{B(\alpha;\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0;\ 0 < x < 1),$$

waarin

$$B(\alpha;\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Opgave 3.5.14: Bewijs dat $B(\alpha;\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.

Voorbeeld 3.5.15 (*normale verdeling*):

$$(3.5.10) \quad f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma > 0;\ \mu \in \mathbb{R}).$$

Voor $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ krijgen we de standaard-normale kansdichtheid:

$$(3.5.11) \quad \Phi'(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/2} .$$

De funktie Φ, de *standaard-normale* verdelingsfunktie (ook wel verdelingsfunktie van Gauss genoemd) is uitvoerig getabelleerd (zie Statistische Tabellen). Deze verdelingsfunktie wordt veel als model gebruikt en komt ook dikwijls voor als limiet van -en benadering voor- ingewikkelder verdelingsfunkties. Ga na dat voor Φ geldt: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Stelling 3.5.16: a. Als $\underline{x}$ kansdichtheid (3.5.10) heeft dan heeft $\underline{z} = (\underline{x} - \mu)/\sigma$ kansdichtheid (3.5.11).

b. Als $\underline{y}$ kansdichtheid (3.5.11) heeft dan heeft $\sigma\underline{y} + \mu$ kansdichtheid (3.5.10).

Bewijs: a. $F_{\underline{z}}(z) = P(\underline{x} \le \sigma z + \mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} \exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}dx$. Substitutie van $x = \sigma u + \mu$ levert $F_{\underline{z}}(z) = \Phi(z)$ en differentiatie geeft $f_{\underline{z}} = \Phi'$. Analoog bewijst men b.

Opgave 3.5.17: Ga in alle voorafgaande voorbeelden na dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Aanwijzing voor (3.5.10): breng dit terug tot $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(x)dx$, beschouw het kwadraat van deze integraal en voer pool-koördinaten in.

Opgave 3.5.18: Bereken $\Gamma(\frac{1}{2})$ (zie (3.5.8)).

3.6 Meerdimensionale absoluut kontinue kansverdelingen

Definitie 3.6.1: De verdelingsfunktie $F = F_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}$ van een stochastische vektor $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ heet absoluut kontinu als

$$(3.6.1) \quad F(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,\ldots,u_n)du_1 \ldots du_n .$$

Hierin heet de funktie $f = f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}$ de (*simultane*) *kansdichtheid* van $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$.

Als f kontinu is, dan is f eenduidig bepaald door

$$(3.6.2) \qquad f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n} F(x_1,\ldots x_n).$$

Analoog aan (3.5.3) geldt

$$(3.6.3) \qquad P((\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)\in B) = \int\!\!\ldots\!\!\int_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

voor iedere $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$[1] (geen bewijs). Uit stelling 3.2.1.8.volgt met (3.6.1)

<u>Stelling 3.6.2</u>: Als $f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}$ een kansdichtheid is, dan is

$$(3.6.4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = 1 \;;$$

als $f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}$ kontinu is op $\mathbb{R}^n$, dan is $f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Analoog aan het één-dimensionale geval (opmerking 3.5.7) geldt ook hier dat iedere niet negatieve funktie f die aan (3.6.4) voldoet kan optreden als kansdichtheid van een stochastische vektor.

Voor de *marginale kansdichtheden* geldt nog

<u>Stelling 3.6.3:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_i = f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{i-1},\underline{x}_{i+1},\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x$$

(i=1,2,...,n). Speciaal geldt dus

[1] Eigenschap (3.6.3) wordt ook wel als *definitie* gebruikt van absolute continuïteit.

Voorbeeld 3.6.9 (2-dimensionale *normale verdeling*):

(3.6.10) $$f_{\underline{x}_1,\underline{x}_2}(x_1,x_2) = \frac{(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\,\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$
$(\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ -1 < \rho < 1)$.

Opgave 3.6.10: Laat zien dat in de bovenstaande voorbeelden $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

Opgave 3.6.11: Bewijs dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in voorbeeld 3.6.7 onafhankelijk zijn en in voorbeeld 3.6.8 afhankelijk (zie opgave 3.3.2).

Opgave 3.6.12: Bereken $f_{\underline{x}_1}$ en $f_{\underline{x}_2}$ in voorbeeld 3.6.9 (zie (3.6.5)). Voor welke waarden van ρ zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijk?

Opgave 3.6.13: De kansdichtheid (3.6.10) kan ook geschreven worden als

$$f_{\underline{x}_1,\underline{x}_2}(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{2\pi}\exp\{-\tfrac{1}{2}(x-\mu)'C^{-1}(x-\mu)\},$$

waarin $x = (x_1,x_2)$ en de matrix C gegeven wordt door

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

terwijl $|C|$ = det C. Op geheel analoge wijze wordt de n-dimensionale normale kansdichtheid gedefinieerd. Wat is C als $\underline{x}_1,\underline{x}_2$ (resp. $\underline{x}_n$)

3.7 Kansverdelingen van funkties van stochastische grootheden

Voorbeeld 3.7.1: $\underline{x}$ heeft een homogene verdeling op (0,1)(zie(3.5.5)). Wat is de kansdichtheid van $\underline{y} = -\log \underline{x}$?

Oplossing: We berekenen *eerst de verdelingsfunktie* van $\underline{y}$, omdat die een kans voorstelt. We hebben (we weten dat $\underline{y} > 0$)

$$F_{\underline{y}}(y) = P(\underline{y} \le y) = P(-\log \underline{x} \le y) = P(\underline{x} \ge e^{-y}) = 1 - e^{-y} \text{ voor } y > 0.$$

Blijkbaar heeft $-\log \underline{x}$ een exponentiële verdeling. Differentiatie levert $f_{\underline{y}}(y) = e^{-y}$ $(y > 0)$.

Opgave 3.7.2: Als $\underline{x}$ een kansdichtheid $f_{\underline{x}}$ heeft die nul is buiten een open interval S en als $g: S \to \mathbb{R}$ een kontinu differenteerbare funktie is met $g' > 0$ op S, dan heeft de stochastische grootheid $\underline{y} = g(\underline{x})$ een kansdichtheid $f_{\underline{y}}$ met

$$(3.7.1) \qquad f_{\underline{y}}(y) = f_{\underline{x}}(h(y))h'(y) \quad (h(y) \in S),$$

waarin h de inverse funktie is van g. Bewijs dit.

Er bestaan algemenere versies van (3.7.1) die we hier niet bespreken. Het is dikwijls het eenvoudigste om eerst, zoals in voorbeeld 3.7.1, de verdelingsfunktie $F_{\underline{y}}$ te berekenen.

Opgave 3.7.3: $\underline{x}$ heeft een homogene verdeling op (0.1). Bereken de kansdichtheden van $\underline{y} = 2\underline{x} - 1$ en van $\underline{z} = |2\underline{x} - 1|$.

Opgave 3.7.4: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een simultane kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{y}}$, die nul is buiten een open rechthoek R. Laat de afbeelding $(u,v):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ één-één duidig zijn, terwijl u en v kontinu differentieerbaar zijn op $\mathbb{R}$, dan heeft de stochastische vektor $(\underline{u},\underline{v})$ gedefinieerd door $\underline{u} = u(\underline{x},\underline{y})$ en $\underline{v}=v(\underline{x},\underline{y})$ een kansdichtheid $f_{\underline{u},\underline{v}}$ met (zie Algebra en Analyse)

$$(3.7.2) \qquad f_{\underline{u},\underline{v}}(u,v) = f_{\underline{x},\underline{y}}(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

waarbij (x,y) de inverse afbeelding is van (u,v) en $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ de Jacobiaan van de afbeelding is (een analoog resultaat geldt in meer variabelen). Ga na

Opgave 3.7.5: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben de kansdichtheid (3.6.10) met $\mu_j = 0$, $\sigma_j = 1$ $(j=1,2)$. Bereken $f_{\underline{u},\underline{v}}$ als $\underline{u} = \underline{x} + \underline{y}$ en $\underline{v} = \underline{x} - \underline{y}$. Wanneer zijn $\underline{u}$ en $\underline{v}$ onafhankelijk?

Stelling 3.7.6: Laat $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ o.o. stochastische grootheden zijn en zij $\underline{M}_n = \max(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ en $\underline{m}_n = \min(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ dan geldt

$$(3.7.3)\qquad \begin{aligned} F_{\underline{M}_n}(x) &= \prod_{1}^{n} F_{\underline{x}_j}(x) \\ F_{\underline{m}_n}(x) &= 1 - \prod_{1}^{n}(1-F_{\underline{x}_j}(x)) \end{aligned}$$

Bewijs: $F_{\underline{M}_n}(x) = P(\max(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \le x) = P(\underline{x}_1 \le x, \underline{x}_2 \le x,\ldots,\underline{x}_n \le x) =$

$= \prod_{1}^{n} F_{\underline{x}_j}(x)$ (zie definitie 3.3.1). Analoog voor $\underline{m}_n$.

3.7.1 Sommen van o.o. stochastische grootheden. Konvoluties

We beschouwen twee belangrijke speciale gevallen: het geval waarin de stochastische grootheden niet-negatief en geheel zijn en het geval dat de grootheden een absoluut kontinue verdeling hebben.

Stelling 3.7.1.1: Als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ o.o. zijn en alleen waarden in $\{0,1,2,\ldots\}$ aannemen, dan geldt

$$(3.7.1.1)\qquad r_k = \sum_{m=0}^{k} p_m q_{k-m} = \sum_{n=0}^{k} p_{k-n} q_n \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

waarbij $p_m = P(\underline{x}_1=m)$, $q_n = P(\underline{x}_2=n)$ en $r_k = P(\underline{x}_1+\underline{x}_2=k)$.

Bewijs: $P(\underline{x}_1+\underline{x}_2=k) = P(\sum_{m=0}^{k} \{\underline{x}_1=m\}\cap\{\underline{x}_2=k-m\}) = \sum_{m=0}^{k} P(\underline{x}_1=m,\underline{x}_2=k-m) =$

$$= \sum_{m=0}^{k} p_m q_{k-m} = \sum_{n=0}^{k} p_{k-n} q_n .$$

Opgave 3.7.1.2: a. $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ zijn o.o. en Poisson-verdeeld met parameters μ_1 en μ_2. Wat is de kansverdeling van $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$?
b. $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ zijn o.o. en binomiaal verdeeld met parameters (n_1,p) en (n_2,p). Wat is de kansverdeling van $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$?

Stelling 3.7.1.3: Als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ o.o. zijn met dichtheden $f_{\underline{x}_1}$ en $f_{\underline{x}_2}$, dan

$$(3.7.1.2)\qquad f_{\underline{x}_1+\underline{x}_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1}(z-y) f_{\underline{x}_2}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1}(x) f_{\underline{x}_2}(z-x)\,dx \qquad (z \in \mathbb{R}).$$

bewijs: We berekenen weer eerst de verdelingsfunktie. Uit (3.6.3) volgt

$$F_{\underline{x}_1+\underline{x}_2}(z) = \iint\limits_{x+y\leq z} f_{\underline{x}_1,\underline{x}_2}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{z}\{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1,\underline{x}_2}(u-v,v)\,dv\}\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}_1}(u-v)f_{\underline{x}_2}(v)\,dv\}\,du,$$ waarbij de substitutie $u=x+y$ en $v=y$

is uitgevoerd. De definitie van kansdichtheid levert de eerste gelijkheid in (3.7.1.2); de tweede volgt door verwisseling van de integratievolgorde.

Opmerking 3.7.1.4: Uit het bewijs van de stellingen 3.7.1.1 en 3.7.1.3 volgt dat analoge resultaten gelden voor afhankelijke $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$; pas aan het einde van het bewijs wordt de onafhankelijkheid gebruikt.

Opmerking 3.7.1.5: Integralen van het type (3.7.1.2) heten konvolutie-integralen.
Men schrijft (3.7.1.2) ook wel als

(3.7.1.3) $f_{\underline{x}_1+\underline{x}_2} = f_{\underline{x}_1} * f_{\underline{x}_2} = f_{\underline{x}_2} * f_{\underline{x}_1}$.

Rekursief definiëren we herhaalde konvoluties:

(3.7.1.4) $f_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_{n+1}} = f_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n} * f_{\underline{x}_{n+1}} = f_{\underline{x}_1} * f_{\underline{x}_2} * \ldots * f_{\underline{x}_{n+1}}$,

waarbij de operatie $*$ kommutatief is.

Opmerking 3.7.1.6: Als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ (met kans 1) positief zijn, dan gaat (3.7.1.2) over in

(3.7.1.5) $f_{\underline{x}_1+\underline{x}_2}(z) = \int_0^z f_{\underline{x}_1}(z-y)f_{\underline{x}_2}(y)\,dy = \int_0^z f_{\underline{x}_1}(x)f_{\underline{x}_2}(z-x)\,dx$.

Als $\underline{x}_1$ of $\underline{x}_2$ alleen waarden kunnen aannemen in een eindig interval, dan moet men deze formules voorzichtig hanteren, d.w.z. zich goed realiseren waar de kansdichtheden nul zijn.

Opgave 3.7.1.7: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn o.o. en homogeen verdeeld op (0,1).
Bereken $f_{\underline{x}+\underline{y}}$.

<u>Opgave 3.7.1.8:</u> $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ zijn o.o. en hebben een absoluut kontinue verdeling. Dan zijn ook $h(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ en $\underline{x}_3$ o.o. (een analoge uitspraak geldt voor n+1 onafhankelijke grootheden; vergelijk opmerking 3.7.1.5).

<u>Opgave 3.7.1.9:</u> $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn o.o. en standaard-normaal verdeeld (zie (3.5.11)).
Bepaal de kansdichtheid van $\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$ $(n=1,2,\ldots)$.

<u>Opgave 3.7.1.10:</u> $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn o.o. en exponentieel verdeeld met parameter λ. Bewijs dat

$$(3.7.1.6)\quad f_{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} \qquad (x > 0);$$

vergelijk voorbeeld 3.5.11. Deze speciale gevallen van de *Gamma*-verdeling noemt men wel Erlang-verdelingen; deze komen veel voor in de wachttijd-theorie.

<u>Opgave 3.7.1.11:</u> $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn o.o., terwijl $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda=1$ en $\underline{y}$ een geometrische verdeling heeft met parameter p (zie voorbeeld 3.4.4). Bereken $F_{\underline{x}+\underline{y}}$ en $f_{\underline{x}+\underline{y}}$.

3.8 <u>Voorwaardelijke kansverdelingen</u>

Als A een gebeurtenis is met $P(A) > 0$ en $\underline{x}$ is een stochastische grootheid (gedefinieerd op dezelfde kansruimte), dan is $F_{\underline{x}}(x|A)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$(3.8.1)\qquad F_{\underline{x}}(x|A) := P(\underline{x} \le x|A) = \frac{P(\{\underline{x} \le x\} \cap A)}{P(A)}.$$

We noemen $F_{\underline{x}}(x|A)$ de *voorwaardelijke verdelingsfunktie* van $\underline{x}$ gegeven A. Als deze verdelingsfunktie een kansdichtheid heeft:

$$(3.8.2)\qquad F_{\underline{x}}(x|A) = \int_{-\infty}^{x} f_{\underline{x}}(u|A)\,du,$$

dan heet $f_{\underline{x}}(.|A)$ de *voorwaardelijke kansdichtheid* van $\underline{x}$ gegeven A.

Het meest voorkomende geval is dat waarbij A de vorm $A = \{\underline{y}=y\}$ heeft.

Als $(\underline{x},\underline{y})$ een diskrete verdeling heeft, dan geldt volgens de definitie van voorwaardelijke kans voor alle y met $P(\underline{y}=y) > 0$:

$$(3.8.3)\qquad P(\underline{x}=x\,|\,\underline{y}=y) = \frac{P(\underline{x}=x, \underline{y}=y)}{P(\underline{y}=y)}$$

en (vergelijk (2.1.4))

$$(3.8.4)\qquad P(\underline{x}=x) = \sum_{y} P(\underline{x}=x\,|\,\underline{y}=y)P(\underline{y}=y).$$

Als $\underline{x}$ een absoluut kontinue verdeling heeft en $\underline{y}$ een diskrete, dan is $F_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y)$ gedefinieerd voor alle y met $P(\underline{y}=y) > 0$ en er geldt

$$(3.8.5)\qquad F_{\underline{x}}(x) = \sum_{y} F_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y)P(\underline{y}=y).$$

Als de bijbehorende kansdichtheden bestaan, dan geldt ook, analoog aan (3.8.4)

$$(3.8.5')\qquad f_{\underline{x}}(x) = \sum_{y} f_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y)P(\underline{y}=y).$$

Als $(\underline{x},\underline{y})$ absoluut kontinu is met kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{y}}$, dan definiëren we voor alle y met $f_{\underline{y}}(y) > 0$ analoog aan (3.8.3)

$$(3.8.6)\qquad f_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y) = \frac{f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)}{f_{\underline{y}}(y)},$$

zodat (vergelijk (3.6.5)) analoog aan (3.8.5)

$$(3.8.7)\qquad f_{\underline{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y)f_{\underline{y}}(y)dy.$$

<u>Opmerking 3.8.1:</u> De notatie in (3.8.6) is symbolisch: de bijbehorende verdelingsfunktie $F_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y)$ kunnen we niet interpreteren als $P(\underline{x}\le x\ |\underline{y}=y)$ in de zin van definitie 2.1.1, omdat $P(\underline{y}=y)=0$ is.
De definitie wordt gemotiveerd door de limietrelatie (als de limieten bestaan):
$f_{\underline{x}}(x|\underline{y}=y) := \lim_{h\downarrow 0} F_{\underline{x}}(x|y<\underline{y}\le y+h)$ met $P(y<\underline{y}\le y+h) > 0$ en

$$F_{\underline{x}}(x|y<\underline{y}\le y+h) = \frac{F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y+h)-F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)}{F_{\underline{y}}(y+h)-F_{\underline{y}}(y)} \to \frac{\frac{\partial}{\partial y}F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)}{f_{\underline{y}}(y)},$$

zodat (formele) differentiatie naar x formule (3.8.6) levert.

Tenslotte, als $\underline{x}$ een diskrete verdeling heeft en $\underline{y}$ een absoluut kontinue, dan hebben we (vergelijk (2.1.4)) voor iedere h > 0

$$P(\underline{x}=x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\underline{x}=x \mid nh<\underline{y}\leq(n+1)h)P(nh<\underline{y}\leq(n+1)h).$$

Onder gunstige omstandigheden (we gaan hier niet op in) gaat voor $h \to 0$ deze relatie over in

$$(3.8.8) \qquad P(\underline{x}=x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\underline{x}=x \mid \underline{y}=y) f_{\underline{y}}(y)dy,$$

waarin $P(\underline{x}=x \mid \underline{y}=y) := \lim_{h\downarrow 0} P(\underline{x}=x \mid y<\underline{y}\leq y+h)$, als deze limiet bestaat.

Opmerking 3.8.2: We zijn niet zo erg precies bij de definitie van $P(\underline{x}=x \mid \underline{y}=y)$ en $f_{\underline{x}}(x \mid \underline{y}=y)$, in de eerste plaats omdat dit met de ter beschikking staande middelen niet goed gaat-speciaal in het laatstgenoemde geval - en vooral, in de tweede plaats omdat deze grootheden meestal *niet berekend* hoeven te worden, maar in de gebruikte modellen *gegeven* zijn. We zijn voornamelijk geïnteresseerd in de relaties (3.8.4), (3.8.5),(3.8.7 en (3.8.8), zoals uit de volgende voorbeelden blijkt.

Voorbeeld 3.8.3: $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met parameter $\underline{\lambda}$, waarbij $\underline{\lambda}$ weer exponentieel verdeeld is met parameter 1. Dit betekent

$$f_{\underline{x}}(x \mid \underline{\lambda}=\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x > 0).$$

We vinden nu $f_{\underline{x}}$ met behulp van (3.8.7)

$$f_{\underline{x}}(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x+1)} d\lambda = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (x > 0).$$

Voorbeeld 3.8.4: Klanten komen aan voor een loket volgens een Poissonproces, dat wil o.a. zeggen dat $\underline{n}(t)$, het aantal klanten dat aankomt in een tijdsinterval van lengte t een Poisson-verdeling heeft (zie Appendix),n.l.:

$$P(\underline{n}(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (n=0,1,\ldots;\ t > 0).$$

Als een willekeurige klant niemand bij het loket aantreft, hoeveel klanten laat hij dan bij zijn vertrek achter, als nog gegeven is, dat zijn bedieningstijd exponentieel verdeeld is met parameter μ?

Oplossing: Zij $\underline{n}$ het gevraagde aantal. Dan geldt (zie (3.8.8))

$$P(\underline{n}=n) = \int_0^\infty P(\underline{n}=n|\underline{y}=y)\ \mu e^{-\mu y} dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^n}{n!}\ \mu e^{-\mu y} dy = \frac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^{n+1}} = (1-p)^n p \quad (n=0,1,\ldots),$$

met $p = \mu/(\lambda+\mu)$ (zie ook (3.5.8) en opgave 3.5.12); $\underline{n}$ heeft dus een geometrische verdeling. We hebben hier de gegevens zo geïnterpreteerd dat

$$P(\underline{n}=n|\underline{y}=y) = e^{-\lambda y}\ \frac{(\lambda y)^n}{n!}\ .$$

<u>Voorbeeld 3.8.5:</u> Men doet o.o. experimenten elk met kans p op sukses. De kosten van het k-de experiment bedragen $\underline{x}_k$ (k=1,2,...), waarbij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. zijn met $f_{\underline{x}_k}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. De totale kosten t.m. het eerste sukses geven we aan met $\underline{u}$. Bereken $f_{\underline{u}}$.

Oplossing: Zij $\underline{n}$ het aantal experimenten t.m. het eerste sukses. Dan geldt (zie voorbeeld 3.4.4 en formule (3.8.5))

$$f_{\underline{u}}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\underline{u}}(u|\underline{n}=n)\ P(\underline{n}=n) = \sum_{n=1}^{\infty} F'_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n}(u)\ (1-p)^{n-1} p =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} (1-p)^{n-1} p = \lambda p e^{-\lambda p u} \qquad (u > 0),$$

d.w.z. een exponentiële kansdichtheid met parameter λp. Voor de vóórlaatste overgang zie opgave 3.7.1.10.

<u>Opmerking 3.8.6:</u> In meer variabelen gelden analoge definities en relaties, bijvoorbeeld:

$$f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_k}(x_1,\ldots,x_k \mid \underline{x}_{k+1} = x_{k+1},\ldots,\underline{x}_n = x_n) = \frac{f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\underline{x}_{k+1},\ldots,\underline{x}_n}(x_{k+1},\ldots,x_n)}\ .$$

Opmerking 3.8.7: Bij voorwaardelijke verdelingsfunkties van de vorm

$$(3.8.9) \qquad F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y|\underline{x}+\underline{y} = t)$$

ontstaan in het absoluut kontinue geval problemen, omdat deze aanleiding geven tot een type verdelingsfunkties dat we niet hebben behandeld: de verdeling die hoort bij (3.8.9) is gekonsentreerd op de rechte x+y=t: de verdeling is singulier (zie opmerking 3.5.8). We kunnen wel vragen naar $F_{\underline{x}}(x|\underline{x}+\underline{y}=t)$.

Opgave 3.8.8: Bereken $f_{\underline{x}}(x|\underline{x}+\underline{y}=1)$, als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn en homogeen verdeeld op (0,1).

4. VERWACHTING

4.1. Definitie en eigenschappen

De *verwachting* (ook wel: mathematische verwachting of verwachtingswaarde) van een stochastische grootheid is een generalisatie van het begrip "gemiddelde"; anderzijds geeft de verwachtingswaarde inderdaad aan wat men (ongeveer) kan verwachten: als ik tien keer met een dobbelsteen gooi, verwacht ik een ogentotaal van ongeveer 35. We zullen in hoofdstuk 5 zien hoe de begrippen verwachting en gemiddelde (van grote aantallen stochastische grootheden) samenhangen. Het rekenkundig gemiddelde van de getallen $y_1, y_2, \ldots, y_N$ is gedefinieerd door $(y_1+y_2+\ldots+y_N)/N$. Als onder deze N getallen er maar n verschillende zijn, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die resp. $r_1, r_2, \ldots, r_n$ keer voorkomen, dan wordt dit gemiddelde $(r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n)/N$ met natuurlijk $r_1+r_2+\ldots+r_n=N$. Als we dit gemiddelde aangeven met m dan hebben we

$$(4.1.1) \qquad m = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k,$$

met $f_k=r_k/N$, zodat $\sum_1^n f_k=1$. De verwachting van een diskrete stochastische grootheid definiëren we naar analogie van (4.1.1); voor een absoluut kontinue grootheid wordt de verwachting weer analoog aan het diskrete geval gedefinieerd.

<u>Definitie 4.1.1:</u> Als $\underline{x}$ een diskrete verdeling heeft met $P(\underline{x}=x_k)=p_{\underline{x}}(x_k)$ voor k=0,1,2,..., dan definieert men $E\underline{x}$, de *verwachting* van $\underline{x}$, door

$$(4.1.2) \qquad E\underline{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_{\underline{x}}(x_k);$$

als $\underline{x}$ een absoluut kontinu verdeling heeft, dan definieert men

$$(4.1.3) \qquad E\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\underline{x}}(x)\,dx;$$

hierbij wordt $E\underline{x}$ alleen dan gedefinieerd, als de som in (4.1.2), resp. de integraal in (4.1.3) *absoluut konvergent* zijn.

Voorbeeld 4.1.2 (zie voorbeelden 3.4.2 t.m. 3.4.6):

a. $p_{\underline{x}}(k) = \frac{1}{n+1}$ $(k=0,1,\ldots,n)$; $E\underline{x} = \frac{n}{2}$, var $\underline{x} = (n^2+2n)/12$

b. $p_{\underline{x}}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\ldots,n)$; $E\underline{x} = np$, var $\underline{x} = np(1-p)$

c. $p_{\underline{x}}(k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$; $E\underline{x} = p^{-1}$, var $\underline{x} = (1-p)p^{-2}$

d. $p_{\underline{x}}(k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $(k=0,1,\ldots,n)$; $E\underline{x} = n\,\frac{M}{N}$, var $\underline{x} = n\,\frac{M}{N}\,(1-\frac{M}{N})\,\frac{N-n}{N-1}$.

e. $p_{\underline{x}}(k) = e^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!}$ $(k=0,1,\ldots)$; $E\underline{x} = \mu$, var $\underline{x} = \mu$.

Opgave 4.1.3: Verifieer de uitkomsten voor $E\underline{x}$ in voorbeeld 4.1.2.

Voorbeeld 4.1.4 (zie voorbeelden 3.5.9 t.m. 3.5.11, 3.5.13 en 3.5.15):

a. $f_{\underline{x}}(x) = (b-a)^{-1}$ $(a < x < b)$; $E\underline{x} = \frac{a+b}{2}$, var $\underline{x} = \frac{(b-a)^2}{12}$

b. $f_{\underline{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$; $E\underline{x} = \lambda^{-1}$, var $\underline{x} = \lambda^{-2}$

c. $f_{\underline{x}}(x) = \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(\alpha)$ $(x > 0)$; $E\underline{x} = \alpha\lambda^{-1}$, var $\underline{x} = \alpha\lambda^{-2}$

d. $f_{\underline{x}}(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta)$ $(0 < x < 1)$; $E\underline{x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, var $\underline{x} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

e. $f_{\underline{x}}(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$; $E\underline{x} = \mu$, var $\underline{x} = \sigma^2$.

Opgave 4.1.5: Verifieer de uitkomsten voor $E\underline{x}$ in voorbeeld 4.1.4.

De formules (4.1.2) en (4.1.3) kunnen op twee manieren tot één formule verenigd worden. We kunnen algemeen definiëren

$$(4.1.4) \qquad E\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_{\underline{x}}(x),$$

waarin (4.1.4) een *Stieltjes-integraal* voorstelt (zie Algebra en Analyse). We gaan hier niet op in. De volgende stelling brengt ook eenheid in het begrip verwachting.

Stelling 4.1.6: Als $E\underline{x}$ bestaat (zie definitie 4.1.1), dan geldt

$$(4.1.5)\qquad E\underline{x} = -\int_{-\infty}^{0} F_{\underline{x}}(x)dx + \int_{0}^{\infty} \{1-F_{\underline{x}}(x)\}dx.$$

Bewijs: We geven het bewijs alleen voor het absoluut kontinu geval, en daarvan bewijzen we alleen dat

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \{1-F(x)\}dx;$$

de rest van het bewijs gaat analoog. We schrijven

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x du\right)f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty f(x)dx\right)du = \int_0^\infty \{1-F(u)\}du,$$

waarbij de tweede overgang juist is o.g.v. de stelling van Fubini (zie A en A).

Opgave 4.1.7: Maak het bewijs van stelling 4.1.6 af voor het absoluut kontinue geval.

De volgende stelling is te beschouwen als een analogon van stelling 4.1.6.

Stelling 4.1.8: Zij $\underline{x}$ een stochastische grootheid die alleen de waarden $0,1,2,\ldots$ kan aannemen en waarvoor $E\underline{x}$ bestaat, dan is

$$(4.1.6)\qquad E\underline{x} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\underline{x} \geq k).$$

Bewijs: $E\underline{x} = \sum_{1}^{\infty} n\, P(\underline{x}=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} 1\, P(\underline{x}=n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P(\underline{x}=n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\underline{x} \geq k).$

Opgave 4.1.9: Laat zien dat (4.1.6) een speciaal geval is van (4.1.5).

Dikwijls zal men de verwachting van een *funktie* van $\underline{x}$ willen berekenen (vergelijk §3.1.1). Intuïtief ligt het voor de hand om te definiëren: $E\, g(\underline{x}) = \int g(x)f_{\underline{x}}(x)dx$ en analoog voor een diskrete stochastische grootheid. Een moeilijkheid die hierbij optreedt is dat, als we schrijven $\underline{y}=g(\underline{x})$, de grootheid $E\underline{y}$ *al gedefinieerd is*, n.l. door $E\underline{y} = \int yf_{\underline{y}}(y)dy$. Zoals uit de volgende stelling blijkt, doet deze moeilijkheid zich niet werkelijk voor.

Stelling 4.1.10: Als $g(\underline{x})$ een stochastische grootheid is, waarvan de verwachting bestaat, dan geldt

$$(4.1.7) \qquad E\, g(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\underline{x}}(x)\,dx$$

als $\underline{x}$ een absoluut kontinue verdeling heeft, waarbij de integraal in (4.1.7) absoluut konvergeert, en

$$(4.1.8) \qquad E\, g(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) P(\underline{x}=x_k),$$

als $\underline{x}$ een diskrete verdeling heeft op $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, waarbij de som in (4.1.8) absoluut konvergeert. Omgekeerd geldt dat $E\, g(\underline{x})$ bestaat, als de integraal in (4.1.7) resp. de som in (4.1.8) absoluut konvergent is.

Bewijs: We beperken het bewijs tot het diskrete geval. Zij $\underline{y} = g(\underline{x})$ en zij $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ de verzameling waarden die $\underline{y}$ kan aannemen. Dan geldt

$$E\,\underline{y} = \sum_{j=0}^{\infty} y_j\, P(\underline{y}=y_j) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j \sum_{g(x_k)=y_j} P(\underline{x}=x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{g(x_k)=y_j} g(x_k) P(\underline{x}=x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) P(\underline{x}=x_k),$$

waarbij de verandering in volgorde van sommatie wordt gerechtvaardigd door de veronderstelde absolute konvergentie.

Opgave 4.1.11: Bewijs stelling 4.1.10 voor het geval dat $\underline{x}$ absoluut kontinu is en g voldoet aan de voorwaarden van opgave 3.7.2.

We geven nog zonder bewijs (de bewijzen van de speciale gevallen zijn analoog) de volgende stelling.

Stelling 4.1.12: Als $g(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ een stochastische grootheid is met een eindige verwachting, dan geldt

$$(4.1.9) \qquad E\, g(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f_{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots d$$

waarbij de integraal in (4.1.9) absoluut konvergeert als $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ een absoluut kontinue verdeling heeft en

$$(4.1.10) \qquad E\, g(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \sum \cdots \sum g(x_1, \ldots, x_n) P(\underline{x}_1=x_1, \ldots, \underline{x}_n=x_n),$$

als $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een diskrete verdeling heeft,waarbij de som in (4.1.10) absoluut konvergeert. Omgekeerd bestaat E $g(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ als de integraal (4.1.9) resp. de som in (4.1.10) absoluut konvergeert.

Opgave 4.1.13: Bewijs stelling 4.1.12 onder de omstandigheden van opgave 3.7.4.

Uit stelling 4.1.12 volgt direkt.

Stelling 4.1.14:

(4.1.11) $E\,(a\underline{x}+b) = aE\underline{x}+b$

(4.1.12) $E \sum_1^n \underline{x}_k = \sum_1^n E\underline{x}_k$

(4.1.11) en (4.1.12) betekenen dat E een *lineaire operator* is; dit is een direkt gevolg van de lineariteit van de integraal-operator, resp. somoperator:

$$E\,(\underline{x}+\underline{y}) = \iint (x+y) f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)dxdy = \iint x f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)dxdy + \iint y f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)dxdy = E\underline{x}+E\underline{y}.$$

Hierbij vatten we $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op als funkties van $(\underline{x},\underline{y})$ en passen (4.1.9) toe. Ook uit (3.6.5) is duidelijk dat bijvoorbeeld

$$E\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\underline{x}}(x)dx.$$

4.2. Momenten

De verwachtingen van een zeer speciaal type funkties van stochastische grootheden worden, naar analogie van de mechanika, *momenten* genoemd.

Definitie 4.2.1: Het n-de *moment*, μ_n, van een stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt gedefinieerd door

(4.2.1) $\mu_n = E\,\underline{x}^n$,

als deze verwachting bestaat, d.w.z. als $E|\underline{x}^n|$, het zgn. *absolute* n-de *moment*, eindig is. We schrijven soms ook $\mu_n(\underline{x})$. In plaats van μ_1 of $\mu_1(\underline{x})$ schrijft men wel $\mu(\underline{x})$, of $\mu_{\underline{x}}$.

<u>Opgave 4.2.2:</u> Als μ_{n+1} bestaat, dan bestaat μ_k $(k=1,2,\ldots,n)$.

<u>Definitie 4.2.3:</u> Zij $\underline{x}$ een stochastische grootheid met $E\underline{x} = \mu_1$. Dan heet

$$c_n := E(\underline{x} - \mu_1)^n$$

het centrale n-de moment van $\underline{x}$. Men noemt c_2 de *variantie*, die meestal wordt aangeduid met var $\underline{x}$ of $\sigma^2\underline{x}$, dus

$$(4.2.2) \qquad \text{var } \underline{x} = \sigma^2\underline{x} = E(\underline{x} - \mu_1)^2 = E(\underline{x} - E\underline{x})^2.$$

Men noemt $\sigma\underline{x} = (\text{var}\underline{x})^{\frac{1}{2}}$ wel de *standaarddeviatie* of *standaardafwijking* (soms ook "spreiding"). De grootheid $\sigma\underline{x}$ is een maat voor de concentratie van de verdeling van $\underline{x}$ in de omgeving van $\mu_1(\underline{x})$: de konsentratie is groot als $\sigma\underline{x}$ klein is (vergelijk gevolg 4.2.7).

<u>Definitie 4.2.4:</u> De covariantie $\text{cov}(\underline{x},\underline{y})$ van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ wordt gedefinieerd door

$$(4.2.3) \qquad \text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = E(\underline{x}-E\underline{x})(\underline{y}-E\underline{y}).$$

<u>Opgave 4.2.5:</u> Bewijs dat

$$(4.2.4) \qquad \text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = E\underline{x}\underline{y} - E\underline{x}E\underline{y}$$

en dat

$$(4.2.5) \qquad \text{var } \underline{x} = E\underline{x}^2 - (E\underline{x})^2.$$

<u>Stelling 4.2.6:</u> Als $\underline{x} \geq 0$ is met kans 1, d.w.z. als $P(\underline{x} \geq 0) = 1$ en als bovendien $E\underline{x} = 0$, dan is $P(\underline{x} = 0) = 1$.

Bewijs: Stel $P(\underline{x} > 0) = \delta > 0$. Dan is $F_{\underline{x}}(0) = P(\underline{x} \leq 0) = 1-\delta < 1$. Omdat $F_{\underline{x}}$ kontinu van rechts is (zie stelling 3.2.6) is er een $\varepsilon > 0$ zó dat $F_{\underline{x}}(\varepsilon) < 1-\delta/2$. Nu is dus wegens de monotonie van $F_{\underline{x}}$ en wegens stelling 4.1.6

$$E\underline{x} = \int_0^\infty \{1-F_{\underline{x}}(x)\}dx \geq \int_0^\varepsilon \{1-F_{\underline{x}}(x)\}dx \geq \delta\varepsilon/2 > 0,$$

in tegenspraak met het gegeven, dus $P(\underline{x} > 0) = 0$.

Gevolg 4.2.7: Als var $\underline{x} = 0$, dan is $P(\underline{x} = \mu_1(\underline{x})) = 1$.

Stelling 4.2.8 (ongelijkheid van Schwarz): Als $E\underline{x}^2$ en $E\underline{y}^2$ bestaan, dan bestaat $E\underline{xy}$ en

$$(4.2.6) \qquad (E\,\underline{xy})^2 \le E\underline{x}^2 E\underline{y}^2;$$

gelijkheid geldt in (4.2.6) dan en slechts dan als er een $t_0 \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $P(\underline{x} = t_0\underline{y}) = 1$ of zó dat $P(\underline{y} = t_0\underline{x}) = 1$.

Bewijs: Omdat $|xy| \le (x^2+y^2)/2$ bestaat $E\underline{xy}$ als $E\underline{x}^2$ en $E\underline{y}^2$ bestaan. We bekijken nu de niet-negatieve kwadratische vorm

$$(4.2.7) \qquad 0 \le E(\underline{x}-t\underline{y})^2 = E\underline{x}^2 - 2tE\underline{xy} + t^2E\underline{y}^2.$$

De diskriminant van het rechterlid van (4.2.7) is niet-positief, d.w.z. (4.2.6) geldt. Als $\underline{x} = 0$ met kans 1 of $\underline{y} = 0$ met kans 1, dan geldt gelijkheid in (4.2.6). In het eerste geval is $\underline{x} = 0.\underline{y}$ met kans 1, in het tweede geval $\underline{y} = 0.\underline{x}$ met kans 1. Zij verder dus $E\underline{x}^2 > 0$ en $E\underline{y}^2 > 0$. Als in (4.2.6) gelijkheid geldt, dan heeft de kwadratische vorm in (4.2.7) een nulpunt $t_0 = E\underline{xy}/E\underline{y}^2$. Nu is $E(\underline{x}-t_0\underline{y})^2 = 0$, zodat o.g.v. stelling 4.2.6 geldt dat $P(\underline{x} = t_0\underline{y})=1$. Omgekeerd, als $P(\underline{x}=t_0\underline{y})=1$, dan is $(E\underline{xy})^2 = t_0^2(E\underline{y}^2)^2 = E\underline{x}^2E\underline{y}^2$.

Definitie 4.2.9: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische grootheden zijn met eindige tweede momenten, terwijl $\sigma\underline{x} > 0$ en $\sigma\underline{y} > 0$, dan heet

$$(4.2.8) \qquad \rho(\underline{x},\underline{y}) := \frac{\operatorname{cov}(\underline{x},\underline{y})}{\sigma\underline{x}\cdot\sigma\underline{y}}$$

de korrelatiekoëfficiënt van $(\underline{x},\underline{y})$.

Stelling 4.2.10: Als $(\underline{x},\underline{y})$ een stochastische vektor is waarvoor $\rho(\underline{x},\underline{y})$ bestaat, dan geldt

$$(4.2.9) \qquad -1 \le \rho(\underline{x},\underline{y}) \le 1;$$

als $\rho(\underline{x},\underline{y}) = -1$, dan is er een $t_0 < 0$ met $P(\underline{x}-E\underline{x}=t_0(\underline{y}-E\underline{y}))= 1$; als $\rho(\underline{x},\underline{y})=1$, dan is er een $t_0 > 0$ met $P(\underline{x}-E\underline{x} = t_0(\underline{y}-E\underline{y}))=1$.

Bewijs: Pas stelling 4.2.8 toe met $\underline{x} - E\underline{x}$ en $\underline{y} - E\underline{y}$ in plaats van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Omdat als $|\rho| = 1$, $E(\underline{x}-E\underline{x})(\underline{y}-E\underline{y}) = t_0\, E(\underline{y}-E\underline{y})^2$, is het duidelijk dat t_0 het teken van ρ heeft.

Opmerking 4.2.11: De grootte van $\rho(\underline{x},\underline{y})$ geeft een indikatie voor de *mate van afhankelijkheid* van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Dit is het duidelijkst in het geval van de normale verdeling (zie voorbeeld 3.6.9). Het is i.h.a. niet zo dat $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$ impliceert dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn. Het omgekeerde is wel juist (zie stelling 4.2.16).

Voor o.o. stochastische grootheden gelden de volgende stellingen. We zullen verder stilzwijgend aannemen dat de verwachtingen die we opschrijven bestaan.

Stelling 4.2.12: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn, dan geldt

$$E \prod_1^n \underline{x}_j = \prod_1^n E\underline{x}_j. \tag{4.2.10}$$

Bewijs: Als $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ een diskrete verdeling heeft dan geldt

$$\begin{aligned} E \prod_1^n \underline{x}_j &= \sum\ldots\sum x_1\ldots x_n \; P(\underline{x}_1 = x_1, \ldots, \underline{x}_n = x_n) \\ &= \sum\ldots\sum x_1\ldots x_n \; P(\underline{x}_1 = x_1)\ldots P(\underline{x}_n = x_n) \\ &= \sum x_1 P(\underline{x}_1 = x_1)\ldots \sum x_n P(\underline{x}_n = x_n) = \prod_1^n E\underline{x}_j; \end{aligned}$$

het bewijs voor het absoluut kontinue geval is analoog.

Definitie 4.2.13: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ (reële) stochastische grootheden zijn, dan definiëren we $\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y}$ door $z(\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$ en $E\underline{z}$ door

$$E\underline{z} = E\underline{x} + iE\underline{y}.$$

Stelling 4.2.14: Als $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ o.o. zijn, en $\underline{z}_j = a_j(\underline{x}_j) + ib_j(\underline{x}_j)$, dan geldt

$$E \prod_1^n \underline{z}_j = \prod_1^n E\underline{z}_j.$$

Bewijs: Voor n=2 hebben we $\underline{z}_1\underline{z}_2 = \underline{a}_1\underline{a}_2 - \underline{b}_1\underline{b}_2 + i(\underline{a}_1\underline{b}_2+\underline{a}_2\underline{b}_1)$, waarin de $\underline{a}_j := a_j(\underline{x}_j)$ en $\underline{b}_j := b_j(\underline{x}_j)$ met verschillende indices o.o. zijn. O.g.v. stelling 4.2.12 geldt dus

$$E\underline{z}_1\underline{z}_2 = E\underline{a}_1 E\underline{a}_2 - E\underline{b}_1 E\underline{b}_2 + i(E\underline{a}_1 E\underline{b}_2 + E\underline{a}_2 E\underline{b}_1) = E\underline{z}_1 E\underline{z}_2.$$

Opgave 4.2.15: Maak het bewijs van stelling 4.2.14 af.

Stelling 4.2.16: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn en eindige tweede momenten hebben, dan is

$$\operatorname{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \rho(\underline{x},\underline{y}) = 0.$$

Bewijs: Zie (4.2.4) en stelling 4.2.12.

Opgave 4.2.17: Bereken $\operatorname{cov}(\underline{x},\underline{y})$ in het geval van voorbeeld 3.6.8 (vergelijk opgave 3.6.11 en opmerking 4.2.11).

Stelling 4.2.18:

$$(4.2.11)\quad \operatorname{var} \sum_1^n \underline{x}_k = \sum_1^n \operatorname{var} \underline{x}_k + 2 \sum_{j<k} \operatorname{cov}(\underline{x}_j,\underline{x}_k).$$

Bewijs: $\operatorname{var} \sum_1^n \underline{x}_k = E\{\sum_1^n(\underline{x}_k - E\underline{x}_k)\}^2 = E\{\sum_1^n (\underline{x}_k - E\underline{x}_k)^2 + \sum_{j\neq k} (\underline{x}_k - E\underline{x}_k)(\underline{x}_j - E\underline{x}_j)\}.$

Gevolg 4.2.19: Als $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ o.o. zijn, dan geldt

$$(4.2.12)\quad \operatorname{var} \sum_1^n \underline{x}_j = \sum_1^n \operatorname{var} \underline{x}_j .$$

Opgave 4.2.20: Bewijs dat $\operatorname{var}(a\underline{x}+b) = a^2 \operatorname{var} \underline{x}$.

Opgave 4.2.21: Verifieer de uitkomsten voor var $\underline{x}$ zoals aangegeven in voorbeeld 4.1.2 en voorbeeld 4.1.4 op blz. 48.

Voorbeeld 4.2.22 (zie voorbeeld 3.6.9): als $(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ de kansdichtheid heeft gegeven in (3.6.10), dan is

$E\underline{x}_j = \mu_j$, var $\underline{x}_j = \sigma_j^2$ $(j=1,2)$ en $\rho(\underline{x}_1,\underline{x}_2)=\rho$. We kunnen dit als volgt inzien: de momenten die we moeten uitrekenen zijn van de vorm

$E(\frac{\underline{x}_1-\mu_1}{\sigma_1})^j(\frac{\underline{x}_2-\mu_2}{\sigma_2})^k$; we moeten bewijzen dat voor $j=1$, $k=0$ of $j=0$, $k=1$ de uitkomst gelijk aan 0 is, voor $j=2$, $k=0$ of $j=0$, $k=2$ gelijk aan 1 en voor $j=1$, $k=1$ gelijk aan ρ. Substitutie van $x_1-\mu_1=\sigma_1 x$ en $x_2-\mu_2=\sigma_2 y$ in de betreffende integralen levert een integrand die symmetrisch is in x en y:

$$E(\frac{\underline{x}_1-\mu_1}{\sigma_1})^j(\frac{\underline{x}_2-\mu_2}{\sigma_2})^k = \frac{1}{2\pi}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\}dxdy$$

We vinden nu de gevraagde resultaten gemakkelijk door $x^2 - 2\rho xy + y^2$ te herschrijven als $(x-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2$; subsitutie van $u=(x-\rho y)(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ en $v=y$ levert dan bijvoorbeeld

$$E(\frac{\underline{x}_2-\mu_2}{\sigma_2})^k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v^k\, e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv.$$

<u>Opmerking 4.2.23:</u> De n-dimensionale normale verdeling wordt gekarakteriseerd door de kansdichtheid

$$(4.2.13)\quad f_{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n}(x_1,\ldots,x_n) = (2\pi)^{-n/2}(\det C)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(x-\mu)'C^{-1}(x-\mu)\},$$

waarbij C een symmetrische positief definite matrix is. Evenals in voorbeeld 4.2.22 blijkt nu dat het element c_{ij} van C gegeven wordt door

$$c_{ij} = \mathrm{cov}\,(\underline{x}_i,\underline{y}_j);$$

de matrix C heet daarom ook wel *covariantie-matrix*.

<u>Opgave 4.2.24:</u> Laat $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ o.o. zijn met $E\underline{x}_j=\mu$ en var $\underline{x}_j = \sigma^2$ $(j=1,2,\ldots)$. Zij $\underline{S}_k = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_k$. Bereken $\rho(\underline{S}_m,\underline{S}_{m+n})$ $(m=1,2,\ldots;n=1,2,\ldots)$.

4.3. Voorwaardelijke verwachting

Definitie 4.3.1: De voorwaardelijke verwachting van $g(\underline{x})$ onder de voorwaarde $\underline{y} = y$ is de verwachting van g behorende bij de voorwaardelijke kansverdeling van $\underline{x}$ gegeven $\underline{y} = y$, d.w.z.

$$(4.3.1) \qquad E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y) = \sum_x g(x)P(\underline{x} = x \mid \underline{y} = y) ,$$

in het diskrete geval, en analoog in het absoluut continue geval:

$$(4.3.2) \qquad E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{\underline{x}}(x \mid \underline{y} = y)dx .$$

Voor diskrete $\underline{y}$ volgt uit (4.3.1) met (3.8.4) dat

$$(4.3.3) \qquad Eg(\underline{x}) = \sum_y E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y)P(\underline{y} = y) .$$

Analoge relaties volgen m.b.v. (4.3.2), (3.8.5'), (3.8.7) en (3.8.8). Als we de afkorting $\psi(y) = E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y)$ invoeren, dan kunnen we de *stochastische grootheid* $\psi(\underline{y})$ beschouwen. Voor $\psi(\underline{y})$ schrijft men meestal weer $E(g(\underline{x}) \mid \underline{y})$. De relatie (4.3.3) en haar analogons kunnen we nu als volgt samenvatten:

Stelling 4.3.2:

$$(4.3.4) \qquad Eg(\underline{x}) = E\psi(\underline{y}) = E\,E(g(\underline{x}) \mid \underline{y}) .$$

Voor functies van twee (en net zo voor meer dan twee) variabelen definiëren we

$$E(g(\underline{x},\underline{y}) \mid \underline{z} = z) = \sum_x \sum_y g(x,y)P(\underline{x} = x, \underline{y} = y \mid \underline{z} = z) ,$$

en analoog voor $(\underline{x},\underline{y})$ met een absoluut continue verdeling (zie opmerking 3.8.6)

$$E(g(\underline{x},\underline{y}) \mid \underline{z} = z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y \mid \underline{z} = z)dxdy .$$

We geven nog enkele, voor de hand liggende, rekenregels, die we later, speciaal bij de statistiek, nodig zullen hebben. De bewijzen worden alleen gegeven voor het geval dat zowel $\underline{x}$ als $\underline{y}$ diskreet zijn.

Stelling 4.3.3: Voor voorwaardelijke verwachtingen gelden de volgende rekenregels:

1. $E(ag(\underline{x}) + b \mid \underline{y}) = aE(g(\underline{x}) \mid \underline{y}) + b$.

2. $E(g(\underline{x}) + h(\underline{y}) \mid \underline{z}) = E(g(\underline{x}) \mid \underline{z}) + E(h(\underline{y}) \mid \underline{z})$.

3. $E(h(\underline{y})g(\underline{x}) \mid \underline{y}) = h(\underline{y})E(g(\underline{x}) \mid \underline{y})$.

4. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ *onafhankelijk* zijn, dan is $E(g(\underline{x}) \mid \underline{y}) = Eg(\underline{x})$.

Bewijs: 1, en 2, volgen direct uit de definitie. Voor 3 geldt, als $P(\underline{y} = y_\ell) > 0$

$$E(h(\underline{y})g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y_\ell) = \sum_j \sum_k h(y_k)g(x_j)P(\underline{x} = x_j, \underline{y} = y_k \mid \underline{y} = y_\ell) =$$

$$= h(y_\ell) \sum_j g(x_k)P(\underline{x} = x_j \mid \underline{y} = y_\ell) = h(y_\ell)E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y_\ell) .$$

Tenslotte geldt voor 4, (vergelijk begin van § 2.2):

$$E(g(\underline{x}) \mid \underline{y} = y_\ell) = \sum_j g(x_j)P(\underline{x} = x_j \mid \underline{y} = y_\ell) = \sum_j g(x_j)P(\underline{x} = x_j) = Eg(\underline{x}$$

Opgave 4.3.4: Laat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn en binomiaal verdeeld met parameters n en p (zie voorbeeld 3.4.3).
Bereken $E(\underline{x} \mid \underline{x}+\underline{y}=m)$.

Voorbeeld 4.3.5: Laat $\underline{n}$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. stochastische grootheden zijn, waarbij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ dezelfde verdeling hebben als een grootheid $\underline{x}$ met $E\underline{x}^2 < \infty$ en $\underline{n}$ alleen (met positieve kansen) de waarden 0,1,2,... aanneemt met $E\,\underline{n}^2 < \infty$. Definieer

$$\underline{z} = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{\underline{n}},$$

waarbij een lege som als nul wordt geïnterpreteerd.

Gevraagd: $E\underline{z}$ en var $\underline{z}$.

Oplossing: Uit het gegeven volgt (ga na) dat $P(\underline{z} \leq z|\underline{n}=n) = P(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n \leq z)$, zodat $E(\underline{z}|\underline{n}) = \underline{n}\, E\, \underline{x}$ en dus (stelling 4.3.2)

$$(4.3.5) \qquad E\ \underline{z} = E\ \underline{n}\ E\ \underline{x}.$$

Omdat $E(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n)^2 = \mathrm{var}(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n)+(E(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n))^2 = n\ \mathrm{var}\ \underline{x} + n^2(E\underline{x})^2$ (vergelijk (4.1.12), (4.2.5) en (4.2.12)), is $E(\underline{z}^2|\underline{n}) = \underline{n}\ \mathrm{var}\ \underline{x} + \underline{n}^2(E\underline{x})^2$ en dus

$$(4.3.6) \qquad E\ \underline{z}^2 = E\ \underline{n}\ \mathrm{var}\ \underline{x} + E\ \underline{n}^2(E\underline{x})^2.$$

Kombinatie van (4.3.5) en (4.3.6) levert

$$(4.3.7) \qquad \mathrm{var}\ \underline{z} = E\ \underline{n}\ \mathrm{var}\ \underline{x} + (E\ \underline{x})^2\ \mathrm{var}\ \underline{n}.$$

Men noemt $E(\underline{x}^2|\underline{n}) - (E(\underline{x}|\underline{n}))^2$ wel de voorwaardelijke variantie van $\underline{x}$ onder de voorwaarde $\underline{n}$.

4.4 Karakteristieke funkties

Kansverdelingen kunnen behalve door hun verdelingsfuncties of kansdichtheden worden gekarakteriseerd door hun *karakteristieke functies*.

Definitie 4.4.1: De *karakteristieke functie* $\varphi_{\underline{x}}$ van een stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt gedefinieerd door

$$(4.4.1) \qquad \varphi_{\underline{x}}(t) = E\ e^{it\underline{x}} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Deze definitie is mogelijk omdat $E\ e^{it\underline{x}}$ voor iedere $\underline{x}$ bestaat: $E\ e^{it\underline{x}} = E \cos t\underline{x} + iE \sin t\underline{x}$ met $E\ |\cos t\underline{x}| \leq 1$ en $E|\sin t\underline{x}| \leq 1$. Voor de speciale gevallen die we hebben behandeld in § 3.4 en 3.5 gaat (4.4.1) over in

$$(4.4.2) \qquad \varphi_{\underline{x}}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k e^{itx_k}\ P(\underline{x} = x_k) & \text{(diskrete verdeling)} \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\ f_{\underline{x}}(x)dx & \text{(abs. continue verdeling).} \end{cases}$$

We zullen met sommen en integralen van complexe functies op de bekende wijze rekenen (zie wiskunde 10).

Opgave 4.4.2: Bewijs dat

(4.4.3) $\quad \varphi_{\underline{ax}+b}(t) = e^{itb}\ \varphi_{\underline{x}}(at).$

Stelling 4.4.3: Voor iedere stochastische grootheid $\underline{x}$ geldt

a. $\quad \varphi_{\underline{x}}(0) = 1$

b. $\quad |\varphi_{\underline{x}}(t)| \leq 1 \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $\quad \varphi_{\underline{x}}(-t) = \overline{\varphi_{\underline{x}}(t)} = \varphi_{-\underline{x}}(t).$

Bewijs: a en c volgen direct uit definitie 4.4.1 (zie ook (4.4.3) voor c). Eigenschap b volgt uit de driehoeksongelijkheid:

$$|E\, e^{it\underline{x}}| \leq E|e^{it\underline{x}}| = 1;$$

de driehoeksongelijkheid geldt zowel voor sommen als voor integralen, en dus voor verwachtingen.

Uit de volgende twee stellingen, die we niet bewijzen, blijkt het belang van karakteristieke functies.

Stelling 4.4.4 (*eenduidigheidsstelling*): Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische grootheden zijn, dan geldt

$$F_{\underline{x}} = F_{\underline{y}} \text{ dan en slechts dan als } \varphi_{\underline{x}} = \varphi_{\underline{y}}.$$

Stelling 4.4.5 (*continuïteitsstelling*): a. Als $F, F_1, F_2, \ldots$ verdelingsfuncties zijn met karakteristieke functies $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en als

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \text{(voor alle } x \text{ waar } F \text{ continu is),}$$

dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \qquad (t \in \mathbb{R});$$

b. Als $F_1, F_2, \ldots$ verdelingsfuncties zijn met karakteristieke functies $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en als $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ bestaat, terwijl φ kontinu is in $t = 0$, dan is φ de karakteristieke funktie van een verdelingsfunktie F en $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ voor alle x waar F kontinu is.

Opmerking 4.4.6: De naam "kontinuïteitsstelling" duidt op de kontinuïteit van de afbeelding $F \leftrightarrow \varphi$, niet op de kontinuïteitseis in deel b van de stelling.

Definitie 4.4.7: Als $F_{\underline{x}_n}(x) \to F_{\underline{x}}(x)$ voor alle x, waar F kontinu is, dan zegt men dat de rij$(\underline{x}_n)_1^\infty$ *zwak* (of: *in verdeling*) naar $\underline{x}$ *konvergeert*.

Opmerking 4.4.8: Als $F_{\underline{x}}$ absoluut kontinu is met kansdichtheid $f_{\underline{x}}$, dan is $\varphi_{\underline{x}}$ blijkens (4.4.2) de *Fourier-getransformeerde* van $f_{\underline{x}}$. Als $|\varphi_{\underline{x}}|$ integreerbaar is, dan geldt de volgende *omkeerformule* (zie wiskunde 30)

$$(4.4.4) \qquad f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{\underline{x}}(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Opmerking 4.4.9: Als $\underline{x}$ niet-negatief is dan gebruikt men liever de *Laplace-getransformeerde*:

$$\tilde{f}_{\underline{x}}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau x} f_{\underline{x}}(x)dx \qquad (\mathrm{Re}\ \tau \geq 0);$$

als er geen kansdichtheid is definieert men $\tilde{f}_{\underline{x}}(\tau)$ algemener door

$$\tilde{f}_{\underline{x}}(\tau) = E\ e^{-\tau \underline{x}}.$$

Als $\underline{x}$ alleen de waarden 0,1,2,... aanneemt, met kansen $p_0(\underline{x})$, $p_1(\underline{x}),\ldots$, dan gebruikt men de *kansengenererende funktie* $P_{\underline{x}}$ gedefinieerd door

$$P_{\underline{x}}(z) = E\ z^{\underline{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\underline{x} = k)z^k = \sum_{u=0}^{\infty} p_k(\underline{x})z^k \quad (|z| \leq 1).$$

De eigenschappen van $\tilde{f}_{\underline{x}}$ en $P_{\underline{x}}$ zijn analoog aan die van $\varphi_{\underline{x}}$. We beperken ons verder voornamelijk tot karakteristieke functies.

Karakteristieke functies zijn soms handig om momenten te berekenen; in practische gevallen is soms wel de karakteristieke functie bekend, maar niet de verdelingsfunctie of de kansdichtheid.

Stelling 4.4.10: Als $k \in \{1,2,\ldots\}$ en als $E|\underline{x}|^k < \infty$ is, dan geldt

$$(4.4.5) \qquad E\ \underline{x}^k = (-i)^k\ \varphi_{\underline{x}}^{(k)}(0).$$

Bewijs: We bewijzen (4.4.5) door differentiatie van (4.4.2) binnen het integraal-teken (in het diskrete geval is het bewijs analoog):

$$|\varphi'(t) - \int_{-\infty}^{\infty} ix\, e^{itx}\, f(x)dx| = |\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} - \int_{-\infty}^{\infty} ix\, e^{itx}\, f(x)dx| \;;$$

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \{\frac{e^{i(t+h)x}-e^{itx}}{h} - ixe^{itx}\}f(x)dx| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{e^{ihx}-1-ihx}{ihx}|\,|x|f(x)dx \le$$

$$\int_{|x|>X} |\frac{e^{ihx}-1-ihx}{ihx}|\; |x|f(x)dx + \int_{-X}^{X} |\frac{e^{ihx}-1}{ihx} - 1|\; |x|f(x)dx < \varepsilon .$$

Hierbij kiezen we eerst X zo groot, dat de eerste integraal kleiner is dan ε; dit kan omdat $(e^{ihx} - 1 - ihx)/(ihx)$ begrensd is voor alle x en h in $\mathbb{R}$ en omdat $E|\underline{x}| < \infty$ is. Vervolgens laten we $h \to 0$ in de tweede integraal, waarbij we gebruik maken van het feit dat $(e^{ihx}-1)/(ihx) \to 1$ gaat als $h \to 0$, uniform op $[-X,X]$. We hebben nu dus bewezen dat

$$(4.4.6) \qquad \varphi'_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ix\, e^{itx} f_{\underline{x}}(x)dx.$$

Door herhaald differentiëren bewijst men geheel analoog met inductie dat

$$(4.4.7) \qquad \varphi^{(k)}_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k\, e^{itx} f_{\underline{x}}(x)dx.$$

Substitutie van $t = 0$ levert dan (4.4.5).

<u>Gevolg 4.4.11:</u> Als $\varphi_{\underline{x}}(t)$ in de omgeving van t=0 door een machtreeks kan worden voorgesteld, dan geldt

$$(4.4.8) \qquad \varphi_{\underline{x}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E\, \underline{x}^k .$$

Men noemt $\varphi_{\underline{x}}(z/i) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} \mu_k$ wel de *momenten-genererende* funktie van $\underline{x}$.

<u>Opgave 4.4.12:</u> Bereken alle momenten van $\underline{x}$ met

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Opgave 4.4.13: Als $E|\underline{x}|^k < \infty$, dan is $\varphi_{\underline{x}}^{(k)}(t)$ uniform kontinu op $\mathbb{R}$. Bewijs dit voor $k=0,1,\ldots$.

In veel toepassingen wordt de volgende eigenschap van karakteristieke funkties gebruikt.

Stelling 4.4.14: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn, dan geldt

$$\varphi_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n} = \varphi_{\underline{x}_1} \cdots\cdots \varphi_{\underline{x}_n}.$$

Bewijs: Dit volgt direct uit stelling 4.2.14: $\varphi_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n}(t) =$

$$= E\, e^{it(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n)} = E \prod_j^n e^{it\underline{x}_j} = \prod_1^n E\, e^{it\underline{x}_j} = \prod_1^n \varphi_{\underline{x}_j}(t).$$

Voorbeeld 4.4.15: a. Als $\underline{x}$ binomiaal verdeeld is met parameters n en p, dan is

(4.4.9) $\quad \varphi_{\underline{x}}(t) = (pe^{it}+1-p)^n,$

en dus (met $e^{it} = z$)

(4.4.9a) $\quad P_{\underline{x}}(z) = (1-p+pz)^n.$

Immers $E\, e^{it\underline{x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{itk} = (pe^{it} + 1-p)^n.$

b. Als $\underline{x}$ Poisson-verdeeld is met parameter μ, dan is (ga na)

(4.4.10) $\quad \varphi_{\underline{x}}(t) = e^{\mu(e^{it}-1)},$

en dus

(4.4.10a) $\quad P_{\underline{x}}(z) = e^{\mu(z-1)}.$

Voorbeeld 4.4.16: a. Als $\underline{x}$ een exponentiële verdeling heeft met parameter λ, dan is

(4.4.11) $\quad \varphi_{\underline{x}}(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda-it},$

en dus ($-it=\tau$)

(4.4.11a) $\quad \tilde{f}_{\underline{x}}(\tau) = \frac{\lambda}{\lambda+\tau} \qquad (\mathrm{Re}\ \tau > -\lambda).$

Immers $E\, e^{it\underline{x}} = \int_0^\infty \lambda e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda-it)x} dx = -\frac{\lambda}{\lambda-it}\, e^{-(\lambda-it)x} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-it}$,

waarbij $\left|\lim_{x\to\infty} e^{-(\lambda-it)x}\right| = \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0.$

b. Als $\underline{x}$ een gamma-verdeling heeft (zie voorbeeld 3.5.11) dan geldt

(4.4.12) $\quad \varphi_{\underline{x}}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^\alpha,$

en dus

(4.4.12a) $\quad \tilde{f}_{\underline{x}}(\tau) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\tau}\right)^\alpha .$

Opgave 4.4.17: Bewijs (4.4.12) voor $\alpha = n$ ($n=2,3,\ldots$). Vergelijk opgave 3.7.1.10 en stelling 4.4.14.

Voorbeeld 4.4.18: Als $\underline{x}$ normaal verdeeld is met $E\,\underline{x} = 0$ en var $\underline{x} = 1$, dan geldt

(4.4.13) $\quad \varphi_{\underline{x}}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$

Bewijs: $\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \cos tx \;\; e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$, dus $\varphi'_{\underline{x}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin tx\, dx$.

Partieel integreren levert $\varphi'_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin tx \Big|_{-\infty}^\infty - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \cos tx\; e^{-x^2/2} dx$,

zodat $\varphi'_{\underline{x}}(t) = -t\, \varphi_{\underline{x}}(t)$ met natuurlijk $\varphi_{\underline{x}}(0) = 1$. Deze differentiaalvergelijking heeft (4.4.13) als enige oplossing.

Opgave 4.4.19: Als $\underline{x}$ normaal verdeeld is met E $\underline{x}$ = μ en var $\underline{x} = \sigma^2$, dan is

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

(vergelijk stelling 3.5.16 en stelling 4.4.3).

Stelling 4.4.20: Als $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \ldots, \underline{k}_m$ o.o. zijn en binomiaal verdeeld met parameters $(n_1,p), (n_2,p), \ldots, (n_m,p)$, dan is $\underline{k}_1+\ldots+\underline{k}_m$ binomiaal verdeeld met parameter $(n_1+\ldots+n_m, p)$.

Stelling 4.4.21: Als $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \ldots, \underline{k}_m$ o.o. zijn en Poisson-verdeeld met parameters $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, dan is $\underline{k}_1 + \ldots + \underline{k}_m$ Poisson-verdeeld met parameter $\mu_1 + \ldots + \mu_m$.

Stelling 4.4.22: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn en normaal verdeeld met parameters $(\mu_1, \sigma_1^2), \ldots, (\mu_n, \sigma_n^2)$, dan is $\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n$ normaal verdeeld met parameter $(\mu_1+\ldots+\mu_n, \sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2)$.

Opgave 4.4.23: Bewijs de stellingen 4.4.20 t.m. 4.4.22 met behulp van karakteristieke funkties. Welke stellingen spelen hier een belangrijke rol?

Opgave 4.4.24: Wat zijn de kansverdelingen die corresponderen met de volgende karakteristieke funkties?

$$e^{ait} \; ; \; \cos t; \; \frac{1-p}{1-pe^{it}} \; ; \; \frac{2}{(1-it)(2-it)} \; ; \; \frac{1}{1+t^2}.$$

Opgave 4.4.25: Bereken de momenten behorende bij de volgende karakteristieke funkties:

$$\tfrac{1}{2}(1+e^{it}) \; ; \; \frac{\sin t}{t} \; ; \; \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \; ; \; \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^2.$$

5. LIMIETSTELLINGEN

5.1 Convergentie van rijen stochastische grootheden

Men onderscheidt verschillende soorten van convergentie van rijen stochastische grootheden. We noemen er hier drie.

Definitie 5.1.1: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ convergeert *bijna zeker* (of: *met kans* 1) naar $\underline{x}$, notatie: $\underline{x}_n \overset{a.s.}{\to} \underline{x}$, als $P(\underline{x}_n \to \underline{x}) = 1$, dus als

$$P(\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} x_n(\omega) = x(\omega)\}) = 1.$$

Definitie 5.1.2: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ convergeert *in waarschijnlijkheid* naar $\underline{x}$, notatie: $\underline{x}_n \overset{P}{\to} \underline{x}$, als

$$\lim_{n\to\infty} P(|\underline{x}_n - \underline{x}| > \varepsilon) = 0 \qquad \text{(alle } \varepsilon > 0).$$

Definitie 5.1.3: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ convergeert *in verdeling* naar $\underline{x}$, notatie $\underline{x}_n \overset{d}{\to} \underline{x}$, als

$$\lim_{n\to\infty} F_{\underline{x}_n}(x) = F_{\underline{x}}(x) \qquad \text{(alle x waar } F_{\underline{x}} \text{ kontinu is)},$$

of als (vergelijk stelling 4.4.5)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\underline{x}_n}(t) = \varphi_{\underline{x}}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Opmerking 5.1.4: De notaties $\overset{a.s.}{\to}$, $\overset{P}{\to}$ en $\overset{d}{\to}$ zijn afgeleid van de engelse termen "*almost surely*", "*in Probability*" en "*in distribution*". Tussen de drie soorten convergentie bestaat de volgende hierarchie (geen bewijs):

$$[\underline{x}_n \overset{as}{\to} \underline{x}] \Rightarrow [\underline{x}_n \overset{P}{\to} \underline{x}] \Rightarrow [\underline{x}_n \overset{d}{\to} \underline{x}].$$

We beperken ons verder tot de laatste twee soorten van convergentie.

5.2 Zwakke wet van de grote aantallen

We bewijzen eerst de volgende eenvoudige, maar belangrijke ongelijkheid.

Stelling 5.2.1 (ongelijkheid van Chebyshev): Als $\underline{x}$ een stochastische grootheid is met $E\,\underline{x}^2 < \infty$ en $E\,\underline{x} = \mu$, dan geldt voor iedere $c > 0$

(5.2.1) $\quad P(|\underline{x} - \mu| \geq c) \leq c^{-2} \operatorname{var} \underline{x}.$

Bewijs: Om het absoluut kontinue geval en het diskrete geval tegelijk te kunnen behandelen, gebruiken we (zie(1.2.3) met $1_{\underline{x}\in A} := 1_A(\underline{x})$).

$$E\,1_{[\underline{x}\in B]} = P(\underline{x} \in B) \qquad\qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Nu is $\operatorname{var} \underline{x} = E\,(\underline{x} - \mu)^2 \geq E(\underline{x} - \mu)^2\, 1_{[|\underline{x}-\mu|\geq c]} \geq$

$$\geq c^2\, E\, 1_{[|\underline{x}-\mu|\geq c]} = c^2\, P(|\underline{x}-\mu|\geq c).$$

Opgave 5.2.2: Als $E\,\underline{x}^{2n} < \infty$ is, dan geldt $P(|\underline{x} - \mu| \geq c) \leq c^{-2n}\, E(\underline{x} - \mu)^{2n}$.

Opgave 5.2.3: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn met $E\,\underline{x}_j = \mu$ en $\operatorname{var} \underline{x}_j = \sigma^2$ voor $j=1,2,\ldots,n$, dan geldt

(5.2.2)
$$E\,\frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j = \mu$$
$$\operatorname{var} \frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j = \sigma^2/n.$$

Stelling 5.2.4 (*zwakke wet van de grote aantallen*): Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. zijn met $E\,\underline{x}_j = \mu$ en $\operatorname{var} \underline{x}_j = \sigma^2 < \infty$ $(j=1,2,\ldots)$, dan geldt (zie definitie 5.1.

(5.2.3) $\quad \frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j \xrightarrow{P} \mu.$

Bewijs: We moeten bewijzen dat voor $n \to \infty$ en iedere $\varepsilon > 0$

(5.2.4) $\quad P(|\frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j - \mu| \geq \varepsilon) \to 0.$

Op grond van (5.2.2) en stelling 5.2.1 is het linkerlid van (5.2.4) hoogstens gelijk aan $\sigma^2/(n\varepsilon^2)$.

Gevolg 5.2.5: Als $\underline{k}_n$ het aantal successen is bij n o.o. experimenten, elk met kans p op succes, dan geldt voor $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\underline{k}_n \xrightarrow{P} p.$$

Bewijs: $\underline{k}_n = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$, waarbij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn met $E\,\underline{x}_j = p$ en var $\underline{x}_j = p(1-p)$ (zie voorbeeld 4.1.2). Pas nu stelling 5.2.4 toe.

Opmerking 5.2.6: Naast de *zwakke wet* van de grote aantallen die zegt dat $(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n)/n \xrightarrow{P} \mu$, bestaat een *sterke wet* van de grote aantallen: als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. zijn met dezelfde verdeling en met $E\,\underline{x}_j = \mu$ $(j=1,2,\ldots)$, dan geldt $(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n)/n \xrightarrow{a.s.} \mu$. Het bestaan van var $\underline{x}_j$ is in beide gevallen niet nodig, maar vereenvoudigt wel de bewijzen.

Opmerking 5.2.7: De wetten van de grote aantallen rechtvaardigen de interpretatie van het kansbegrip als fractie: als een experiment n maal wordt uitgevoerd (telkens onder dezelfde omstandigheden en zonder dat de uitkomsten elkaar beïnvloeden - dus onafhankelijk van elkaar) en het aantal malen dat verschijnsel (gebeurtenis) A optreedt is $\underline{k}_n(A)$, dan zal voor grote n gelden dat $\underline{k}_n(A)/n \approx P(A)$. Immers $\underline{k}_n(A)$ voldoet aan de eisen van gevolg 5.2.5, zodat voor $n \to \infty$ geldt $\underline{f}_n(A) := \underline{k}_n(A)/n \xrightarrow{P} P(A)$ (vergelijk ook (1.3.2)).

Opgave 5.2.8: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. zijn en dezelfde verdeling hebben met $E\,\underline{x}_j^4 < \infty$ en $E\,\underline{x}_j^2 = \mu_2$ $(j = 1,2,\ldots)$, dan geldt

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j^2 \xrightarrow{P} \mu_2.$$

Opgave 5.2.9: Laat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ o.o. zijn en exponentieel verdeeld met verwachting μ. Dan geldt

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \underline{x}_j \xrightarrow{d} \mu.$$

Bewijs dit m.b.v. karakteristieke functies. Zie definitie 5.1.3 en vergelijk ook het slot van opmerking 5.1.4.

5.4 Centrale limietstelling

De "centrale limietstelling" zoals we die hier behandelen is een speciaal geval van een aantal stellingen die inhouden dat sommen van stochastische grootheden onder bepaalde voorwaarden bij benadering normaal verdeeld zijn. Dit soort stellingen wordt veel toegepast in de practische statistiek. We bewijzen eerst twee lemma's.

Lemma 5.4.1: Als $\underline{x}$ een eindig k-de moment heeft, dan geldt

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(it)^j}{j!} \mu_j + o(t^k) \qquad (t \to 0);$$

voor k=2 geldt dus: als $\mu_2 < \infty$, dan geldt

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = 1 + i\,\mu_1 t - \tfrac{1}{2}\mu_2 t^2 + o(t^2) \qquad (t \to 0).$$

Bewijs: Dit volgt uit stelling 4.4.10 en de Taylor-reeks met "integraal-restterm" (zie Algebra en Analyse; zie ook opgave 4.4.13).

Lemma 5.4.2: Als $h(n) = o(\frac{1}{n})$ voor $n \to \infty$ en als $a \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n} + h(n)\right)^n = e^a.$$

Bewijs: We bewijzen eerst dat $(1+h(n))^n \to 1$: omdat $|h(n)| < \varepsilon/n$ voor iedere $\varepsilon > 0$ en n voldoende groot en omdat $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ voor iedere $\alpha \geq -1$, hebben we

$$1 - \varepsilon \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^n \leq (1 + h(n))^n \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\right)^n \leq e^{\varepsilon},$$

waarin voor $\varepsilon \to 0$ de uiterste leden naar één gaan. Verder geldt

$$\left(1 + \frac{a}{n} + h(n)\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^a.1 = e^a.$$

Stelling 5.4.3(*centrale limietstelling*): Als $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$,... o.o. zijn en dezelfde verdeling hebben met E $\underline{x}_j = \mu$ en var $\underline{x}_j = \sigma^2$ (j=1,2,...), dan geldt voor $x \in \mathbb{R}$

$$(5.4.1) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}du =: \Phi(x).$$

Bewijs: Laat $\tilde{\underline{x}}_j = (\underline{x}_j - \mu)/\sigma$ en $\underline{u}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \tilde{\underline{x}}_j$. Dan geldt (lemma 5.4.1)

$$\varphi_{\tilde{\underline{x}}_j}(t) = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) \qquad (t \to 0),$$

en dus wegens (4.4.3) en stelling 4.4.14

$$\varphi_{\underline{u}_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad (t \text{ vast};\ n \to \infty).$$

Volgens lemma 5.4.2 geldt nu $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\underline{u}_n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$, zodat o.g.v. de continuïteitsstelling

$$F_{\underline{u}_n}(x) \to \Phi(x),$$

equivalent met (5.4.1).

Definitie 5.4.4: Als $\{\underline{y}_t;\ t \in T\}$ met $T = \mathbb{Z}$ of $T = (0,\infty)$ een verzameling stochastische grootheden is met de eigenschap dat

$$\lim_{t\to\infty} P((\underline{y}_t - a_t)/b_t \le x) = \Phi(x),$$

dan heet $\underline{x}_t$ voor $t \to \infty$ "*asymptotisch normaal* (verdeeld) met (asymptotische) verwachting a_t en (asymptotische) variantie b_t^2 ".

Gevolg 5.4.5: Als $\underline{k}_n$ binomiaal verdeeld is met parameter (n,p), waarbij $0 < p < 1$, dan is $\underline{k}_n$ voor $n \to \infty$ asymptotisch normaal met verwachting np en variantie np(1-p).

Bewijs: $\underline{k}_n = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$ (zie gevolg 5.2.5); gebruik stelling 5.4.3.

Gevolg 5.4.6: Als $\underline{x}(\mu)$ een Poisson-verdeling heeft met verwachting μ, dan is $\underline{x}(\mu)$ voor $\mu \to \infty$ asymptotisch normaal met verwachting μ en variantie μ.

Bewijs: $\varphi_{\underline{x}(\mu)}(t) = \{\varphi_{\underline{x}(1)}(t)\}^{\mu}$ (zie voorbeeld 4.4.15b) en dus (ga na)

$$\varphi_{(\underline{x}(\mu)-\mu)/\sqrt{\mu}}(t) = \{\varphi_{\underline{x}(1)-1}(t/\sqrt{\mu})\}^{\mu} = (1 - \frac{t^2}{2\mu} + o\,(\frac{1}{\mu}))^{\mu} \to e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (\mu \to \infty).$$

Opmerking 5.4.7: De gevolgen 5.4.5 en 5.4.6 van stelling 5.4.3 worden gebruikt om de binomiale- en de Poisson-verdeling te benaderen met de normale verdeling. Zij $\underline{k}_n$ binomiaal verdeeld met parameters (n,p) en $\underline{k}(\mu)$ Poisson-verdeeld met parameter μ. Dan hebben we

$$P(\underline{k}_n \le k) = P(\frac{\underline{k}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}) \approx \Phi(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}),$$

(5.4.2)

$$P(\underline{k}(\mu) \le k) = P(\frac{\underline{k}(\mu) - \mu}{\sqrt{\mu}} \le \frac{k-\mu}{\sqrt{\mu}}) \approx \Phi(\frac{k-\mu}{\sqrt{\mu}}).$$

Om kansen van de vorm $P(\underline{k}_n = k)$ te kunnen benaderen schrijven we

$$P(\underline{k}_n = k) = P(k-\tfrac{1}{2} < \underline{k}_n \le k+\tfrac{1}{2}) \approx \Phi(\frac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{k-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}).$$

Analoog hieraan worden de kansen hierboven ook wel benaderd door

$$P(\underline{k}_n \le k) \approx \Phi(\frac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}})$$

(5.4.3)

$$P(\underline{k}(\mu) \le k) \approx \Phi(\frac{k-\mu+\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}}).$$

Men noemt deze procedure "continuïteitscorrectie; benadering (5.4.3) is dikwijls wat beter dan (5.4.2).

Opgave 5.4.8: Geef een benadering voor $P(\underline{k}_n \geq k)$. Wat is (bij benadering) de kans om in 1000 onafhankelijke worpen met een dobbelsteen minstens 150 zessen te gooien?

Opmerking 5.4.9: Voor het benaderen van de binomiale verdeling hanteren we de volgende regel: we gebruiken tabel 3.2 van de Statistische Tabellen (S.T.) voor de waarden van n die in de tabel voorkomen, waarbij we, zo nodig lineair interpoleren voor de waarde van p. Voor waarden van n die niet in de tabel voorkomen benaderen we met de normale verdeling (S.T. 1.1) als $np \geq 5$ ĕn $n(1-p) \geq 5$ en met de Poisson-verdeling (zie(3.4.2)) als $np < 5$ of $n(1-p) < 5$ waarbij in het eerste geval $\mu = np$ en in het tweede geval $\mu = n(1-p)$ (tabel S.T. 4.2). In dit laatste geval gebruiken we de eigenschap dat $n - \underline{k}_n$ binomiaal verdeeld is met parameter $(n, 1-p)$. Voor de Poisson-verdeling geldt: gebruik tabel S.T. 4.2 als $\mu \leq 10$, zo nodig met lineaire interpolatie, en benader met de normale verdeling als $\mu > 10$.

Opgave 5.4.10: Wat is de kans om in 100 worpen met een tweetal dobbelstenen meer dan 2 keer "dubbel zes" te gooien? Wat is de kans op meer dan 20 keer dubbel zes in 1000 worpen?

APPENDIX

A 1. Poisson-proces

Een zeer veel gebruikt model voor allerlei verschijnselen is het *Poisson-proces*. Hierbij treden op stochastische tijdstippen $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots$ gebeurtenissen op , bijvoorbeeld: emissie van een α-deeltje, een auto-ongeluk, een aanvraag voor een telefoongesprek, een geboorte. We zijn geïnteresseerd in de stochastische grootheid $\underline{n}_t$, voor $t > 0$ gedefinieerd door

$$\underline{n}_t = \text{"het aantal gebeurtenissen dat optreedt in } (0,t]\text{."}$$

De *stochastische functie* $\underline{n}_t$ heet een Poisson-proces, als voldaan is aan de onderstaande eisen.

Definitie A 1.1: $\underline{n}_t$ heet een Poisson-proces met intensiteit λ als voldaan is aan

(A 1.1) als $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, dan zijn $\underline{n}_{t_1}, \underline{n}_{t_2} - \underline{n}_{t_1}, \underline{n}_{t_3} - \underline{n}_{t_2}, \ldots$ o.o.

(A 1.2) $P(\underline{n}_{t+h} - \underline{n}_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \qquad (h \downarrow 0)$

(A 1.3) $P(\underline{n}_{t+h} - \underline{n}_t = 1) = \lambda h + o(h) \qquad (h \downarrow 0)$

(A 1.4) $P(\underline{n}_{t+h} - \underline{n}_t \geq 2) = o(h) \qquad (h \downarrow 0)$

voor een $\lambda > 0$ en alle $t > 0$. Voor $t=0$ is $\underline{n}_t$ gedefinieerd door

(A 1.5) $P(\underline{n}_0 = 0) = 1.$

Stelling A 1.2: Als $\underline{n}_t$ een Poisson-proces is en als

$$P_n(t) := P(\underline{n}_t = n),$$

dan geldt

(A 1.6) $$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (n=0,1,2,\ldots;\ t \geq 0),$$

waarbij $P_0(0) = 1.$

Bewijs: Uit definitie A 1.1 volgt dat voor $h \downarrow 0$

(A 1.7) $\quad P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h+o(h)),$

en (vergelijk 3.7.1.1) $P_n(t+h) = \sum_{k=0}^{n} P(\underline{n}_t=k)P(\underline{n}_{t+h}-\underline{n}_t = n-k) =$

$= P_n(t)(1-\lambda h+o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h)) + o(h)$, zodat

(A 1.8) $P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h) \quad (n=1,2,\ldots).$

Uit (A 1.7) en (A 1.8) volgt door limietovergang $h \downarrow 0$ dat P_n voor $t \geq 0$ een rechter-afgeleide heeft; door t te vervangen door t-h blijkt P_n voor $t > 0$ ook een linker-afgeleide te hebben, zodat P_n een afgeleide heeft op $[0,\infty)$ voor $n=0,1,2,\ldots$. Deze afgeleiden voldoen aan

(A 1.9) $$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \\ P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (n=1,2,\ldots) \end{cases} \qquad (t \geq 0),$$

met de randvoorwaarden $P_0(0) = 1$ en $P_n(0) = 0 \quad (n=1,2,\ldots)$.

Dit stelsel differentiaalvergelijkingen lossen we op met volledige inductie. We vinden direct dat

(A 1.10) $\quad P_0(t) = e^{-\lambda t}.$

Substitutie van (A 1.10) in (A 1.9) met n=1 levert

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t},$$

met $P_1(0) = 0$. De oplossing hiervan is

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Als we nu (A 1.6) als inductieveronderstelling in (A 1.9) substitueren (met n vervangen door n+1) dan vinden we

$$P_{n+1}'(t) = -\lambda P_{n+1}(t) + \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

met $P_{n+1}(0) = 0$. Dit levert $P_{n+1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ en het bewijs is klaar.

We kijken nu naar de tijd die verloopt tussen de (n-1)-ste en de n-de gebeurtenis: $\underline{t}_n - \underline{t}_{n-1}$. Voor n=1 hebben we ($\underline{t}_0=0$)

(A 1.11) $P(\underline{t}_1 \le z) = 1 - P(\underline{t}_1 > z) = 1 - P(\underline{n}_z = 0) = 1 - e^{-\lambda z}$,

d.w.z. $\underline{t}_1$ heeft een exponentiële verdeling. Voor $\underline{t}_n$, het tijdstip van de n-de gebeurtenis, geldt (ga na!)

(A 1.12) $P(\underline{t}_n \le z) = P(\underline{n}_z \ge n)$,

zodat

$$F_{\underline{t}_n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda z}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = \int_0^z \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx,$$

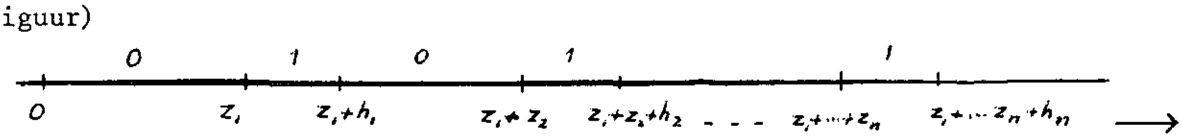
zoals gemakkelijk wordt geverifieerd door partiële integratie. In verband met (A 1.11) en opgave 3.7.1.10 suggereert dit resultaat de volgende stelling.

<u>Stelling A 1.3</u>: Als $\underline{n}_t$ een Poisson-proces is met intensiteit λ dan zijn de tijdsduren $\underline{t}_1, \underline{t}_2 - \underline{t}_1, \underline{t}_3 - \underline{t}_2, \ldots$ tussen opvolgende gebeurtenissen o.o. en exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$. (We nemen hierbij zonder bewijs aan dat $(\underline{t}_1, \ldots, \underline{t}_n)$ een continue dichtheid $f_{\underline{t}_1, \ldots, \underline{t}_n}$ heeft).

Bewijs: voor $z_1 > 0$, $z_2 > 0, \ldots, z_n > 0$ en $h_1 > 0, \ldots, h_n > 0$ (h_j klein) bekijken we

$$\begin{aligned} & P(\underline{t}_1 \in (z_1, z_1 + h_1], \underline{t}_2 \in (z_1 + z_2, z_1 + z_2 + h_2], \ldots \\ & \ldots, \underline{t}_n \in (z_1 + \ldots + z_n, z_1 + \ldots + z_n + h_n]) = \\ & = P(\underline{n}_{z_1} = 0, \underline{n}_{z_1+h_1} - \underline{n}_{z_1} = 1, \underline{n}_{z_1+z_2} - \underline{n}_{z_1+h_1} = 0, \ldots \\ & \ldots, \underline{n}_{z_1+\ldots+z_n+h_n} - \underline{n}_{z_1+\ldots+z_n} = 1) . \end{aligned}$$

Op grond van stelling A 1.2 en definitie A 1.1 is deze kans gelijk aan (zie figuur)



$$e^{-\lambda z_1}(\lambda h_1 + o(h_1))e^{-\lambda(z_2-h_1)}(\lambda h_2 + o(h_2))\dots e^{-\lambda(z_n-h_{n-1})}(\lambda h_n + o(h_n)) =$$
$$= e^{-\lambda(z_1 + \dots + z_n)}\lambda^n h_1\dots h_n + o(h_1\dots h_n) .$$

Dit betekent (zie opgave A 1.10) dat voor $z_1 > 0,\dots, z_n > 0$:

$$f_{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_n}(z_1,z_1+z_2,\dots,z_1+\dots+z_n) = \lambda^n e^{-\lambda(z_1+\dots+z_n)},$$

en dus dat, voor $0 < t_1 < t_2 <\dots < t_n$:

(A 1.13) $$f_{\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_n}(t_1,\dots,t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}.$$

Uit (A 1.13) volgt nu (vergelijk (3.7.2)) dat voor $z_1 > 0$, $z_2 > 0,\dots,z_n > 0$

$$f_{\underline{z}_1,\underline{z}_2,\dots,\underline{z}_n}(z_1,z_2,\dots,z_n) = \lambda^n e^{-\lambda(z_1+\dots+z_n)},$$

als $\underline{z}_1 = \underline{t}_1$, $\underline{z}_2 = \underline{t}_2 - \underline{t}_1,\dots, \underline{z}_n = \underline{t}_n - \underline{t}_{n-1}$. Dit betekent dat $\underline{z}_1,\underline{z}_2,\dots,\underline{z}_n$ onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$.

Omgekeerd wordt door een rij onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{z}_1,\underline{z}_2,\dots$ die een exponentiële verdeling hebben met $E\,\underline{z}_j = 1/\lambda$ $(j=1,2,\dots)$ een Poisson-proces gedefinieerd, als we de tijdstippen $\underline{t}_1,\underline{t}_2,\dots$ definiëren door $\underline{t}_1 = \underline{z}_1$ en $\underline{t}_n - \underline{t}_{n-1} = \underline{z}_n$ $(n=1,2,\dots)$. We geven de volgende stelling zonder bewijs.

<u>Stelling A 1.4</u>: Als de grootheden $\underline{z}_1,\underline{z}_2,\dots$ o.o. zijn en exponentieel verdeeld met $E\,\underline{z}_n = 1/\lambda$ $(n=1,2,\dots)$, dan wordt door de tijdstippen $\underline{z}_1$, $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$, $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 + \underline{z}_3,\dots$ een Poisson-proces bepaald.

Een andere eenvoudige manier om het Poisson-proces te beschrijven hangt samen met de volgende stelling, die we in een speciaal geval al stilzwijgend hebben gebruikt in het bewijs van stelling A 1.3.

<u>Stelling A 1.5:</u> Als $\underline{n}_t$ een Poisson-proces is met intensiteit λ, dan zijn voor $0 = t_0 < t_1 < t_2 <\dots$ de grootheden $\underline{n}_{t_1}, \underline{n}_{t_2}-\underline{n}_{t_1}, \underline{n}_{t_3}-\underline{n}_{t_2},\dots$ o.o. en Poisson verdeeld met

$$E(\underline{n}_{t_j} - \underline{n}_{t_{j-1}}) = \lambda(t_j-t_{j-1}) \qquad (j=1,2,\dots).$$

Bewijs: De onafhankelijkheid volgt uit definitie A 1.1. We hoeven alleen te bewijzen dat voor s > 0 en t > 0 de grootheid $\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s$ een Poisson-verdeling heeft met verwachting λt. We doen dit m.b.v. karakteristieke functies. We weten dat $\underline{n}_s$ en $\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s$ o.o. zijn en (Stelling A 1.2) Poisson-verdeeld met verwachting λs resp. λt. Nu geldt (zie stelling 4.4.14 en voorbeeld 4.4.15 b)

$$\exp\{\lambda(s+t)(e^{iu}-1)\} = \varphi_{\underline{n}_{s+t}}(u) = \varphi_{\underline{n}_s} \cdot \varphi_{\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s} = \varphi_{\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s}(u)\exp\{\lambda s(e^{iu}-1)\},$$

waaruit volgt dat $\varphi_{\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s}(u) = \exp\{\lambda t(e^{iu}-1\}$. Op grond van de eenduidigheids-stelling is $\underline{n}_{s+t}-\underline{n}_s$ dus Poisson-verdeeld met verwachting λt.

Gevolg A 1.6: Zij gegeven een Poisson-proces met intensiteit λ. Zij t > 0 en zij $\underline{w}_t$ + t het tijdstip van de eerste gebeurtenis die optreedt ná t, dan geldt (*onafhankelijk van* t):

$$F_{\underline{w}_t}(w) = 1 - e^{-\lambda w}.$$

Bewijs: volgt direct uit stelling A 1.5 en de relatie

$$P(\underline{w}_t > w) = P(\underline{n}_{t+w}-\underline{n}_t=0) = e^{-\lambda w}.$$

Gevolg A 1.7: Als $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is, dan geldt

$$P(\underline{x} \le a + x \mid \underline{x} > a) = P(\underline{x} \le x) \qquad (a > 0;\ x > 0).$$

Bewijs: volgt uit voorgaande, maar kan ook eenvoudig direct bewezen worden (ga na).

Toepassing: Drie personen A, B en C komen een postkantoor binnen en vinden de twee aanwezige loketten vrij. A en B worden direct geholpen, terwijl C wacht tot de eerste van A en B klaar is. We nemen aan dat de bedieningstijden $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ van A, B en C o.o. zijn en exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$.

Vragen: a. Wat is de kans dat C het laatste klaar is?

b. Na hoeveel tijd verlaat C het postkantoor?

Oplossing: a. Als C aan de beurt komt, dan heeft o.g.v. gevolg A 1.6 of A 1.7 de resterende bedieningstijd van degene die nog niet klaar is dezelfde verdeling als $\underline{z}$. De situatie is dus symmetrisch en de gevraagde kans is 1/2.

b. De gevraagde tijd is gelijk aan $\min(\underline{x},\underline{y})+\underline{z}$. Hierbij zijn $\min(\underline{x},\underline{y})$ en $\underline{z}$ onafhankelijk, $\min(\underline{x},\underline{y})$ is exponentieel verdeeld met verwachting $1/(2\lambda)$ en $\underline{z}$ exponentieel verdeeld met $E\underline{z} = 1/\lambda$.

Opgave A 1.8: Bereken de kansdichtheid van $\min(\underline{x},\underline{y})+\underline{z}$ zoals hierboven gedefinieerd.

Opgave A 1.9: Bussen vertrekken van een halte vanaf tijdstip 0 met exponentieel verdeelde tussenpozen met verwachting $1/\mu$. Wat is de wachttijd van iemand die op tijdstip $t > 0$ bij de bushalte aankomt, als nog gegeven is dat deze tussenpozen o.o. zijn?

Opgave A 1.10: Zij $(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ een stochastische vector met een continue kansdichtheid en zij f een niet-negatieve functie die continu is op $\mathbb{R}^n$. Als

$$P(\underline{x}_1 \in (x_1,x_1+h_1),\ldots,\underline{x}_n \in (x_n,x_n+h_n)) =$$
$$= h_1\ldots h_n f(x_1,\ldots,x_n) + o(h_1\ldots h_n) \quad (h_1 \downarrow 0,\ldots,h_n \downarrow 0) \;,$$

voor alle $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, dan is f de kansdichtheid van $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$. Bewijs dit voor $n = 1$ en $n = 2$.

Opmerking A 1.11: Met wat meer moeite kan stelling A 1.3 bewezen worden *zonder* de aanname dat $(\underline{t}_1,\underline{t}_2,\ldots,\underline{t}_n)$ een kansdichtheid heeft.

A2 Enkele kansverdelingen uit de statistiek

We leiden de kansdichtheden af van een aantal grootheden die samenhangen met de normale verdeling en die veel in de statistiek worden gebruikt.

A 2.1 De Chi-kwadraat verdeling

Definitie A 2.1.1: Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ o.o. zijn en N(0,1)-verdeeld, dan heeft de grootheid

$$(A\ 2.1.1)\quad \underline{\chi}_n^2 := \sum_1^n \underline{x}_k^2$$

een *Chi-kwadraat verdeling* met n *vrijheidsgraden* (afgekort: χ_n^2-verdeling).

Stelling A 2.1.2: Zij

$$(A\ 2.1.2)\quad \gamma(x;\lambda;\alpha) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \qquad (x > 0),$$

dan geldt

$$(A\ 2.1.3)\quad f_{\underline{\chi}_n^2}(x) = \gamma(x;\tfrac{1}{2};\tfrac{n}{2}).$$

Bewijs 1: Uit de definitie volgt direct

$$(A\ 2.1.4)\quad F_{\underline{\chi}_n^2}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int \cdots \int_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \le x} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 \ldots dx_n.$$

We gaan over op hyperbol-coördinaten(vergelijk Wiskunde 20): $x_k = x_k(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ $(k=1,2,\ldots,n)$, waarvan we alleen hoeven te weten dat $\sum_1^n x_k^2 = r^2$ en dat de Jacobiaan de vorm $J(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} h(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ heeft. Nu gaat formule (A 2.1.4) over in

$$F_{\underline{\chi}_n^2}(x) = c_n \int_0^{\sqrt{x}} r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr.$$

Omdat $\lim\limits_{x\to\infty} F_{\underline{\chi}_n^2}(x)=1$, volgt hieruit dat $c_n^{-1} = 2^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u}du = \frac{\Gamma(n/2)}{2^{n/2-1}}$.

Door differentiatie vinden we dan voor $x > 0$

$$f_{\underline{\chi}_n^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\tfrac{1}{2})^{n/2}x^{n/2-1}e^{-x/2}.$$

Bewijs 2: We berekenen eerst $f_{\underline{\chi}_1^2}(x) = f_{\underline{x}_1^2}(x)$ en vinden (ga na)

$$f_{\underline{x}_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\frac{1}{2}}e^{-x/2} = \gamma(x;\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}),$$

met (zie (4.4.12))

$$\varphi_{\underline{x}_1^2}(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-it}\right)^{\frac{1}{2}},$$

zodat (zie (A.2.1.1))

$$\varphi_{\underline{\chi}_n^2}(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-it}\right)^{n/2},$$

waaruit met nogmaals (4.4.12) formule (A 2.1.3) volgt.

<u>Opmerking A 2.1.3:</u> De Chi-kwadraat verdeling is getabelleerd in tabel 2.2 van de statistische tabellen. Voor grote n is $\underline{\chi}_n^2$ asymptotisch normaal met (ga na)

$$E\underline{\chi}_n^2 = n,\quad \mathrm{var}\,\underline{\chi}_n^2 = 2n.$$

<u>Gevolg A 2.1.4:</u>

$$f_{\underline{\chi}_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, 2^{1-\frac{n}{2}}\, x^{n-1}e^{-x^2/2} \qquad (x > 0).$$

A 2.2. De student-verdeling (t-verdeling) en de F-verdeling

Definitie A 2.2.1: Als $\underline{x}$, $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ o.o. zijn en N(0,1)-verdeeld, dan heeft

$$\text{(A 2.2.1)} \quad \underline{t}_n := \frac{\underline{x}\sqrt{n}}{\sqrt{\underline{x}_1^2+\ldots+\underline{x}_n^2}}$$

een *student-verdeling* (ook wel: t-verdeling) met n *vrijheidsgraden* (afgekort: t_n-verdeling).

Definitie A 2.2.2: Als $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2,\ldots$, $\underline{x}_n$, $\underline{y}_1$, $\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n$ o.o. zijn en N(0,1)-verdeeld, dan heeft

$$\text{(A 2.2.2)} \quad \underline{F}_{m,n} := \frac{(\underline{x}_1^2+\ldots+\underline{x}_m^2)/m}{(\underline{y}_1^2+\ldots+\underline{y}_n^2)/n} = \frac{\underline{x}_m^2/m}{\underline{x}_n^2/n}$$

een F-*verdeling* met (m,n) *vrijheidsgraden* (afgekort $F_{m,n}$-verdeling).

We zullen nu de kansdichtheden van $\underline{t}_n$ en $\underline{F}_{m,n}$ afleiden.

Lemma A 2.2.3: Als $\underline{u}$ en $\underline{v}$ o.o. zijn en $\underline{v} > 0$ (met kans 1), dan geldt

$$\text{(A 2.2.3)} \quad f_{\underline{u}/\underline{v}}(z) = \int_0^\infty v\, f_{\underline{u}}(vz) f_{\underline{v}}(v)dv.$$

Bewijs: volgens (3.8.7) geldt

$$f_{\underline{u}/\underline{v}}(z) = \int_0^\infty f_{\underline{u}/\underline{v}}(z|\underline{v}=v)f_{\underline{v}}(v)dv = \int_0^\infty f_{\underline{u}/v}(z)f_{\underline{v}}(v)dv = \int_0^\infty v\, f_{\underline{u}}(vz)f_{\underline{v}}(v)dv.$$

Opgave A 2.2.4: Bewijs (A. 2.2.3) zonder voorwaardelijke kansverdelingen.

Stelling A 2.2.5:

$$\text{(A 2.2.4)}\quad f_{\underline{t}_n}(z) = (n\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{(A 2.2.5)}\quad f_{\underline{F}_{m,n}}(z) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} z^{m/2-1} (n+mz)^{-(m+n)/2} \qquad (z > 0).$$

Bewijs: We bewijzen alleen (A 2.2.5) en we gebruiken daarbij lemma A 2.2.3 met $\underline{u} = \underline{\chi}^2_m/m$ en $\underline{v} = \underline{\chi}^2_n/n$, zodat

$$f_{\underline{u}}(u) = m\, f_{\underline{\chi}^2_m}(mu), \quad f_{\underline{v}}(v) = n\, f_{\underline{\chi}^2_n}(nv).$$

We krijgen dan

$$f_{\underline{F}_{m,n}}(z) = c_{m,n} \int_0^\infty v(vz)^{m/2-1} e^{-mvz/2} v^{n/2-1} e^{-nv/2}\, dv =$$

$$= c_{m,n}\, z^{m/2-1} \int_0^\infty v^{(m+n)/2-1} e^{-v(n+mz)/2}\, dv =$$

$$= c^*_{m,n}\, z^{m/2-1} (n+mz)^{-(m+n)/2},$$

waarbij $c^*_{m,n}$ volgt uit het feit dat $\int_0^\infty f(z)dz = 1$. We vinden dan

$$\frac{1}{c^*_{m,n}} = \int_0^\infty z^{m/2-1}(n+mz)^{-(m+n)/2} dz = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}} n^{-(m+n)/2} \int_0^\infty w^{m/2-1}(1+w)^{-(m+n)/2} dw =$$

$$= m^{-m/2} n^{-n/2} \int_0^1 y^{m/2-1} (1-y)^{n/2-1} dy = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} m^{-m/2} n^{-n/2}.$$

We vinden natuurlijk dezelfde uitkomst als we aldoor alle constanten "meeslepen".

Opgave A 2.2.6: Bewijs (A 2.2.4).

Opgave A 2.2.7: Bereken verwachting en variantie van $\underline{t}_n$ en $\underline{F}_{m,n}$.

Opgave A 2.2.8: Laat zien dat $\underline{t}_n$ voor $n \to \infty$ asymptotisch normaal is. Wat kunt u van de verdeling van $\underline{F}_{m,n}$ zeggen voor grote m en/of n?

Opmerking A 2.2.9: Voor tabellen van de t_n-verdeling en de $F_{m,n}$-verdeling zie Statistisch Compendium of Statistische Tabellen.