Jaf

TH
Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.283
Prijs f. 7,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken bij

Kansrekening en Statistiek

Bestemd voor WSK-IV

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij

KANSREKENING

en

STATISTIEK

Bestemd voor WSK-IV

Voorjaarssemester 1980

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

KANSREKENING EN STATISTIEK

Voorjaarssemester 1980

Dictaatnr. 2.283 Prijs fl. 7,00

Inhoudsopgave

§ 1. Uitkomstenruimte, gebeurtenissen, symmetrisch diskrete kansruimte

1.1. Vier spelers N, O, Z, W spelen bridge.
De gebeurtenis N_k bevat alle mogelijke kaartverdelingen waarin speler N tenminste k azen heeft.
Wat kunt U zeggen over het aantal azen dat speler W in de hand heeft in het geval dat de kaartverdeling element is van de volgende gebeurtenis

a) W_1^* ,

b) $N_2 \cap Z_2$,

c) $N_1^* \cap Z_1^* \cap O_1^*$,

d) $N_1 \cap Z_1 \cap O_1 \cap W_1$,

e) $N_3 \cap W_1$,

f) $(N_2 \cup Z_2) \cap O_2$.

1.2. Men werpt met een muntstuk en een dobbelsteen. E_1 is de verzameling van uitkomsten waarbij het muntstuk kruis geeft en E_2 is de gebeurtenis dat de dobbelsteen 3 of 6 geeft.
Bepaal de elementen van ieder van de volgende gebeurtenissen

a) E_1^* ,

b) E_2^* ,

c) $E_1 \cap E_2$,

d) $E_1 \cup E_2$,

e) $E_1^* \cap E_2$.

1.3. Laat A, B en C gebeurtenissen zijn. Geef uitdrukkingen voor de volgende met behulp van A, B en C gedefinieerde gebeurtenissen

a) alleen A,
b) A en B, maar niet C,
c) alle drie,
d) tenminste één van de drie,
e) tenminste twee,
f) geen enkele,
g) precies één van de drie,
h) niet meer dan twee.

1.4. Bepaal voor de volgende experimenten een geschikte uitkomstenruimte.

a) Het tellen van het aantal defekte artikelen in een serie van 100 stuks.

b) Het registreren van het aantal buigingen dat nodig is om een stuk metaal te scheuren.

c) Het meten van het waterpeil boven of beneden een bepaald gegeven nulniveau.

d) Het meten van de diameter van een asje gemaakt op een draaibank.

1.5. We werpen tweemaal met een dobbelsteen. Als x en y de scores zijn van achtereenvolgens de eerste en tweede worp, maak dan een tabel van alle mogelijke uitkomsten en bepaal door het aantal gunstige mogelijke uitkomsten te tellen de kansen op de volgende gebeurtenissen

a) $\{(x,y) \mid \exists_{n\in N} [x + y = 3n]\}$

b) $\{(x,y) \mid (\exists_{n_1\in N} [x + y = 2n_1]) \vee (\exists_{n_2\in N} [x = 3n_2])\}$

c) $\{(x,y) \mid \exists_{n\in N} [10x + y = 7n]\}$.

1.6. Beschouw een loterij met 10 fiches: een met nummer 1, twee met nummer 2, drie met nummer 3, vier met nummer 4. Men trekt tweemaal, aselekt met teruglegging.

a) Bepaal de verzameling van alle mogelijke uitkomsten en de kans op elk hiervan.

b) Wat is de kans dat de som van de nummers van beide trekkingen groter dan of gelijk is aan 7?

c) Wat is de kans op twee gelijke trekkingen?

1.7. Men werpt tweemaal met een dobbelsteen. Het resultaat van de eerste worp noemen we x, dat van de tweede worp y.

a) Geef in een tekening van de verzameling van mogelijke (x,y) resultaten de volgende gebeurtenissen aan

$$A := \{(x,y) \mid x + y \geq 8\} \quad \text{en} \quad B := \{(x,y) \mid |x - y| \leq 2\} .$$

b) Bepaal de kansen

$$P(A) \ , \ P(B) \ , \ P(A \cap B) \quad \text{en} \quad P(A \cup B) .$$

1.8. Gegeven zijn 8 kaarten, die ieder een uit drie letters bestaand kenmerk hebben en wel: AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB. Men trekt aselekt twee kaarten uit deze acht.

a) Bepaal de kans, dat in het kenmerk van elk der getrokken kaarten minstens één keer de letter A voorkomt.

b) Bepaal de kans, dat in beide kenmerken samen van de getrokken kaarten de letter A precies drie keer voorkomt.

§ 2. Permutaties, kombinaties, variaties, binomium van Newton, binomiaalkoëfficiënten

2.1. Bewijs

a) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad 0 \le k \le n-1,$$

b) $$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}, \quad 0 \le k \le n-2$$

c) $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

d) $$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

e) $$\sum_{m=0}^{n} \binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m} = \binom{N}{n} \qquad 0 \le M \le N, \ \binom{M}{m} = 0 \text{ als } m > M,$$

$$\binom{N-M}{n-m} = 0 \text{ als } (n-m) > N-M .$$

2.2. In het land X bestaat een autonummer uit 3 verschillende letters, gevolgd door 3 cijfers, waarvan het eerste geen nul mag zijn. Hoeveel verschillende autonummers zijn in dit land mogelijk?

2.3. Uit 5 chemici en 7 fysici moet een kommissie worden gevormd bestaande uit 2 chemici en 3 fysici. Op hoeveel verschillende manieren kan dit gedaan worden als

a) elke chemicus en elke fysicus in deze kommissie kan worden opgenomen,
b) een bepaalde fysicus lid moet worden van deze kommissie,
c) een bepaalde chemicus en een bepaalde fysicus niet samen lid mogen zijn van deze kommissie?

2.4. Hoeveel verschillende signalen, elk bestaande uit zes vlaggen onder elkaar aan een vertikale mast, kan men geven als 4 identieke rode en 2 identieke blauwe vlaggen ter beschikking zijn?

2.5. Hoeveel verschillende permutaties kan men vormen uit alle letters van het woord "kraakinstallatie"?

2.6. Er liggen 10 punten in een plat vlak, waaronder A en B. Er liggen hoogstens 2 punten op een rechte. Door elk paar punten wordt een rechte lijn vastgelegd.

a) Hoeveel lijnen worden door de 10 punten vastgelegd?
b) Hoeveel van deze onder a) genoemde lijnen gaan niet door A of B?
c) Hoeveel driehoeken worden door de 10 punten bepaald?
d) Hoeveel driehoeken hebben punt A als hoekpunt?
e) Hoeveel driehoeken hebben AB als zijde?

2.7. Op hoeveel manieren kan een klas met 14 leerlingen in 6 groepjes worden verdeeld, wanneer 2 groepjes 3 leerlingen bevatten en de andere 2 leerlingen?

2.8. a) Op hoeveel manieren kan ik 10 guldens onder 3 personen verdelen?
b) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er bij een worp met 8 identieke dobbelstenen?

2.9. Gegeven zijn een langwerpige doos met 8 naast elkaar liggende vakjes en 6 balletjes. Op hoeveel manieren kunnen deze balletjes over de vakjes verdeeld worden als

a) alle balletjes verschillend zijn en

1) een vakje meer dan één balletje mag bevatten,
2) een vakje hoogstens één balletje mag bevatten,

b) alle balletjes identiek zijn en

1) een vakje meer dan één balletje mag bevatten,
2) een vakje hoogstens één balletje mag bevatten.

§ 3. Diskrete kansruimten

3.1. Van de 10 meisjes in een klas hebben er 3 blauwe ogen. Als twee meisjes aselekt worden gekozen, wat is dan de kans dat

a) beide blauwe ogen hebben,
b) géén van de twee blauwe ogen heeft,
c) tenminste één van de twee blauwe ogen heeft?

3.2. Een club heeft 100 leden waaronder 50 advokaten en 50 leugenaars. Het aantal dat nòch advokaat nòch leugenaar is bedraagt 20. Men kiest door loting met gelijke kans voor elk clublid een comité van 5 man.

a) Bepaal de aantallen leden in de verschillende categorieën.
b) Hoe groot is de kans dat het comité precies 3 advokaten bevat?
c) Hoe groot is de kans dat het comité precies 3 advokaten bevat die tevens leugenaars zijn?

3.3. Hoe groot is de kans, dat van 40 aselekt gekozen personen er minstens 2 op dezelfde dag jarig zijn? (1 jaar = 365 dagen, gebruik tabel 9.3 van het S.C.) Geef een schatting op Uw gevoel alvorens te gaan rekenen.

3.4. In een vaas zitten 7 briefjes die elk één van de letters van het woord "energie" bevatten. Men trekt aselekt drie briefjes. Bereken de kansen dat de voor de woorden "erg" resp. "een" benodigde letters getrokken worden als getrokken wordt

a) met teruglegging,
b) zonder teruglegging.

3.5. In de lift van een gebouw met 10 etages staan 4 personen die elk aselekt één knop van de serie van 10 knoppen (1,2,...,10) indrukken.
Bereken de kans dat de 4 personen

a) op dezelfde verdieping uitstappen,
b) op twee verschillende verdiepingen uitstappen, waarbij 3 op de ene en de 4^e op de andere verdieping,
c) op twee verschillende verdiepingen uitstappen, waarbij een paar op de ene en het andere tweetal op de andere verdieping,
d) op drie verschillende verdiepingen uitstappen,
e) op vier verschillende verdiepingen uitstappen.

(Ga na dat de som van de kansen één is.)

3.6. Vier spelers N, O, Z en W spelen een partij bridge. Elke speler ontvangt 13 van de 52 kaarten. Laat a, b, c en d vier niet negatieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $a + b + c + d = 13$.

i) Toon aan dat de kans $p(a,b,c,d)$ dat de spelers N, O, Z en W respectievelijk a, b, c en d schoppenkaarten in de hand hebben gelijk is aan

$$p(a,b,c,d) = \frac{\binom{13}{a}\binom{39}{13-a}\binom{13-a}{b}\binom{26+a}{13-b}\binom{13-a-b}{c}\binom{13+a+b}{13-c}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} .$$

ii) Bereken de kans dat een van de vier spelers a, een tweede b, een derde c en de vierde d schoppenkaarten in de hand heeft als

$a = 5,\ b = 4,\ c = 3,\ d = 1$,

$a = b = c = 4,\ d = 1$,

$a = b = 4,\ c = 3,\ d = 2$.

3.7. Bereken de kans dat bij het bridgespel een speler a, een ander b, een derde c en een vierde d, azen heeft als

$a = 4,\ b = c = d = 0,$

$a = 3,\ b = 1,\ c = d = 0,$

$a = b = 2,\ c = d = 0,$

$a = 2,\ b = c = 1,\ d = 0,$

$a = b = c = d = 1.$

3.8. We werpen met 3 dobbelstenen. Bereken de kans dat

a) een 3, een 4 en een 5 wordt geworpen,
b) drie opeenvolgende cijfers worden geworpen,
c) het produkt der drie geworpen aantallen ogen even is,
d) het laagste geworpen aantal ogen een 1 is,
e) het laagste geworpen aantal ogen een 3 is.

3.9. Een vaas bevat 7 witte en 8 zwarte ballen. Men trekt aselekt en zonder teruglegging 5 ballen uit deze vaas.

a) Wat is de verzameling van mogelijke aantallen witte ballen in deze trekking?
b) Bepaal de kansen op deze mogelijke aantallen.

3.10. U speelt een partij bridge en ontvangt bij de deling 13 kaarten. Hoe groot is de kans

a) dat U het spel begint met minstens één renonce (d.w.z. geen kaarten van een bepaalde kleur, bv. geen klaveren),
b) dat U het spel begint met zeven kaarten in één kleur.
c) dat, als U één aas hebt, de overige drie azen bij Uw partner zitten?
d) dat U het spel begint met precies één renonce?

3.11. De getallen 1,2,...,n zijn gerangschikt in een willekeurige ordening. Bereken de kans dat

a) de getallen 1 en 2 in deze ordening in opklimmende volgorde naast elkaar voorkomen,
b) de getallen 1,2,...,k (k = 2,...,n) in opklimmende volgorde naast elkaar in deze ordening voorkomen.

3.12. n personen, waaronder de personen A en B, zijn in willekeurige volgorde op een rij gaan staan. Bereken de kans dat er precies r personen tussen A en B staan voor r = 0,1,...,n-2.

§ 4. Voorwaardelijke kansen, stelling van Bayes.

4.1. Uit een volledig spel speelkaarten worden aselekt 13 kaarten getrokken. Bereken de voorwaardelijke kans dat de kleuren in de trekking 3-3-3-4 verdeeld zijn, onder de voorwaarde dat de trekking 7 rode en 6 zwarte kaarten bevat.

4.2. Machine A produceert van een bepaald produkt tweemaal zoveel als machine B. A levert 5% defekte, B 7%. Een klant krijgt een defekt produkt. Hoe groot is de kans dat het afkomstig is van machine A?

4.3. Bereken de kans dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit 3 jongens en 1 meisje als men respektievelijk de keuze beperkt tot

a) gezinnen met tenminste 3 jongens,

b) gezinnen waarin de oudste 3 kinderen jongens zijn,

en aangenomen wordt dat de kans op een jongensgeboorte gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

4.4. Een moeder met bloedgroep A heeft een baby met bloedgroep O. Er zijn drie mannen in het spel. Eén van hen is de vader, maar men weet niet wie. De bloedgroepen van de drie mannen zijn resp. A, O, en AB. Hoe is nu de voorwaardelijke kansverdeling van het vaderschap, als gegeven is dat de kans op een baby met bloedgroep O uit ouders AA, AO, A(AB) gelijk is aan 0,0625; 0,25 en 0.

4.5. Vier personen, Noord, Zuid, Oost, West genaamd, ontvangen ieder 13 kaarten van een spel van 52 kaarten.

a) Als Zuid geen azen heeft, wat is dan de kans dat zijn partner Noord er precies twee heeft?

b) Als Noord en Zuid samen 9 harten hebben, bepaal dan de kans dat Oost en West ieder twee harten bezitten.

4.6. Twee spelers A en B werpen om de beurt een tweetal zuivere dobbelstenen. A wint het spel als hij in een worp een totaal van precies 6 ogen gooit vóórdat B in een worp een totaal van 7 ogen gescoord heeft. B wint het spel als hij in een worp een totaal van 7 ogen gooit vóórdat A in een worp een totaal van 6 gescoord heeft. Als het spel doorgaat tot één van beide het vereiste aantal ogen gooit en A begint wat is dan de kans dat A het spel wint?

4.7. Bij een autoverzekeraar is de all riskspremie in het eerste jaar a. Als geen schade wordt gemeld in het eerste jaar is de premie voor het tweede jaar λa waarbij λ een vaste waarde heeft tussen 0 en 1.
Als geen schade is gemeld in de eerste r jaren ($r \geq 1$), is de premie $\lambda^r a$ voor het $(r + 1)$e jaar.

Als in een jaar een schade gemeld wordt, blijft de premie in dat jaar hetzelfde, maar wordt het jaar daarop weer a. Vanaf dat jaar moet de verzekerde zijn reduktie van voren af aan opbouwen. De kans dat in een jaar geen schade wordt gemeld is konstant en gelijk aan q. Bereken de kans dat in het n^e jaar ($n \geq 2$) de premie gelijk is aan

a) $\lambda^{n-1}a$
b) $\lambda^{n-j-1}a$ $(1 \leq j \leq n - 1)$.

5. Afhankelijke en onafhankelijke deelexperimenten

5.1. Toon aan dat de hieronder staande beweringen a), b), c) en d) twee aan twee equivalent zijn.

a) De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk.
b) De gebeurtenissen A en B^* zijn onafhankelijk.
c) De gebeurtenissen A^* en B zijn onafhankelijk.
d) De gebeurtenissen A^* en B^* zijn onafhankelijk.

5.2. A en B zijn gebeurtenissen waarvoor geldt $P(A) = 1/4$, $P(A \cup B) = 1/3$, $P(B) = p$.

a) Bereken p als A en B elkaar uitsluiten.
b) Bereken p als A en B onafhankelijk zijn.
c) Bereken p als A een deelgebeurtenis van B is.

5.3. Bij een experiment kunnen 3 gebeurtenissen A, B en C optreden die elkaar noch uitsluiten, noch voldoen aan $A \subset B \subset C$. Alle hebben dezelfde kans om op te treden. A is onafhankelijk van $B \cap C$. De voorwaardelijke kans op C onder voorwaarde B is tweemaal de kans op C. De kans op het gelijktijdig optreden van A, B en C is 1/4. Bewijs dat uit het optreden van B volgt dat ook C optreedt en omgekeerd.

5.4. Men werpt twee keer met een zuivere dobbelsteen en beschouwt drie gebeurtenissen A, B en C, waarin x en y het resultaat zijn van resp. de eerste en de tweede worp

$$A = \{(x,y) \mid \exists_{n \in N}[x + y = 2n]\} \quad ,$$

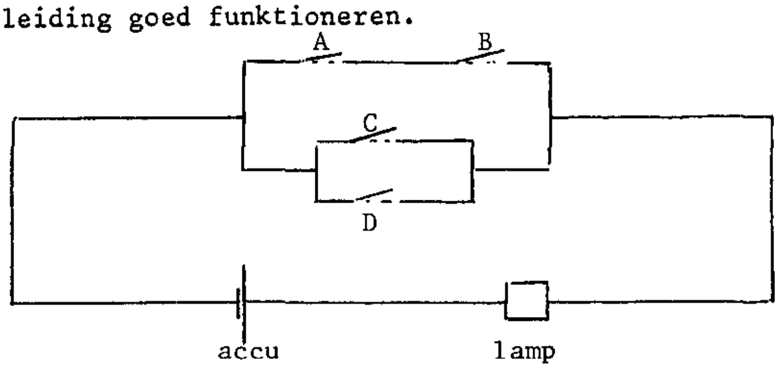
$$B = \{(x,y) \mid \exists_{n \in N} [x + y = 3n]\} ,$$

$$C = \{(x,y) \mid x \geq 4 \vee y \geq 4\} .$$

a) Bereken P(A), P(B) en P(C).

b) Zijn A en B onafhankelijk?

5.5. A, B, C en D zijn onafhankelijke schakelaars. Een open schakelaar onderbreekt de stroom. De kans op open zijn is voor elke schakelaar p de kans op gesloten zijn is 1 - p. Zij E de gebeurtenis "de lamp brandt". Bereken P(E), als accu, lamp en leiding goed funktioneren.



5.6. Een kast heeft 3 laden. In de ene lade liggen 2 gouden munten, in een tweede 2 zilveren en in de derde 1 gouden en 1 zilveren munt. Blindelings wordt een lade opengetrokken en hieruit aselekt 1 munt gepakt die van goud blijkt te zijn. Hoe groot is de kans dat ook de andere munt uit de lade van goud is?

5.7. Drie mannen A, B en C schieten onafhankelijk van elkaar op een bepaald doel. De trefkans van A, B en C is respectievelijk $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$.

a) Bepaal de kans dat precies één van hen het doel treft.

b) Als één van hen raak schiet, wat is dan de kans dat A het was?

5.8. Hoe groot zijn de kansen

a) om bij 4 worpen met 1 dobbelsteen minstens één keer 6 te gooien,

b) om bij 24 worpen met 2 dobbelstenen minstens één keer (6,6) te gooien?

(Probleem van Chevalier de Méré voorgelegd aan Pascal.)

5.9. Men werpt één dobbelsteen driemaal met als resultaten x, y en z ogen en beschouwt twee gebeurtenissen A en B die omschreven kunnen worden met achtereenvolgens

$$\{(x,y,z) \mid x = 5 \vee y = 5 \vee z = 5\}$$

en

$$\{(x,y,z) \mid \exists_{n \in N} [xyz = 2n]\} .$$

a) Bepaal P(A) en P(B).

b) Ga na of A en B onafhankelijk zijn.

5.10. Gegeven zijn drie dozen D_1, D_2 en D_3. D_1 bevat 2 ballen met het getal 2 erop en één met het getal 3. D_2 bevat 3 witte ballen en 1 zwarte bal, D_3 bevat 1 witte bal en 4 zwarte ballen. Er wordt aselekt een bal uit D_1 genomen en daarna aselekt een bal uit de doos met het nummer van de uit D_1 getrokken bal. Hoe groot is de kans dat deze laatste zwart is?

5.11. Uit een vaas die 4 witte en 6 zwarte ballen bevat worden 2 ballen getrokken en opzij gelegd zonder dat naar de kleur gekeken wordt. Daarna wordt een derde bal getrokken. Hoe groot is de kans dat

a) de derde bal wit is,

b) de derde bal wit is als gegeven is dat onder de opzijgelegde ballen minstens 1 witte is?

5.12. Twee vazen V_1 en V_2 bevatten respektievelijk a witte, b zwarte ballen en b witte, a zwarte ballen. Er worden aselekte trekkingen uitgevoerd met inachtneming van de volgende regels·
Elke keer wordt één bal getrokken uit een bepaalde vaas en teruggelegd in dezelfde vaas. Als een getrokken bal wit is, wordt de volgende bal uit V_1 genomen, als een getrokken bal zwart is wordt de volgende bal uit V_2 genomen. De eerste bal wordt uit V_1 getrokken. Bepaal de kans dat bij de n^e trekking een witte bal gevonden wordt.

5.13. Een vaas bevat z zwarte en r rode ballen. Er worden aselekte trekkingen uitgevoerd. De getrokken bal wordt teruggelegd, maar bovendien worden extra c ballen van dezelfde kleur als de getrokken bal aan de inhoud van de vaas toegevoegd. Er wordt driemaal na elkaar getrokken.

a) Bepaal de kansen op de 8 mogelijke resultaten voor de serie van drie trekkingen.

b) Laat zien dat de kans op een zwarte bal bij de eerste, tweede en derde trekking hetzelfde is, namelijk $\frac{z}{z+r}$.

c) Als nu volgens hetzelfde systeem meer dan driemaal getrokken wordt, bewijs dan met volledige induktie dat de kans op een zwarte bal bij de n^e trekking eveneens $\frac{z}{z+r}$ is.

§ 6. De binomiale verdeling

6.1. Bepaal de kans dat er bij de resultaten van 15 worpen met een zuivere dobbelsteen

a) 2 zessen zijn,

b) meer dan 2 zessen zijn,

c) minder dan 2 zessen zijn,

d) 2 of minder zessen zijn,

e) 3 zessen of meer dan 5 zessen zijn.

6.2. In een fabriek ligt gemiddeld 20% van de door een bepaalde machine geproduceerde grote partij bouten buiten de gestelde normen en wordt afgekeurd. Dat wil zeggen dat een aselekt uit deze partij getrokken bout een kans $p = 0.2$ heeft om afgekeurd te worden. Men neemt aselekt 10 bouten uit een dagproduktie. Bepaal de kans dat

a) precies 2 bouten buiten de normen vallen,

b) 2 of meer bouten buiten de normen vallen,

c) meer dan 5 bouten buiten de normen vallen.

6.3. Tweehonderd studenten doen mee aan een meerkeuze toets. Er zijn 20 vraagstukken, elk met 4 antwoorden waaronder precies 1 juist antwoord. Alle studenten wijzen hun antwoord bij een vraagstuk uit de 4 beschikbare antwoorden aan door loting met gelijke kansen voor elk antwoord. Bepaal de kans dat minstens één van deze studenten op deze wijze meer dan 11 goede antwoorden verkrijgt.

6.4. Boven in een Galtonbord worden n kogeltjes geworpen. De onderste rij bevat k spijkertjes, waaronder k + 1 vakjes zijn geplaatst, genummerd 1,2,...,k+1. Bij botsing met een spijkertje is de kans om naar links te vallen p, om naar rechts te vallen q = 1 - p. Het kogeltje botst op elke rij spijkertjes tegen precies één spijkertje en de botsingen op verschillende rijen spijkertjes zijn onafhankelijk. Hoe groot is de kans dat in het vakje i (i = 1,...,k+1) minstens x (x = 0,1,...,n) kogeltjes terechtkomen?

6.5. Uit een grote partij artikelen neemt men een steekproef van 20 stuks. Een partij wordt afgekeurd als in zo'n steekproef 3 of meer foutieve eksemplaren worden aangetroffen.

a) Wat is de kans dat een partij met 25% fouten wordt afgekeurd.
b) Bepaal de kans dat een partij met 15% fouten wordt goedgekeurd (afronden op 2 decimalen) en vervolgens de kans dat van 10 partijen met elk 15% fouten er 8 of meer worden goedgekeurd.

6.6. Een dronken man loopt in een in noord-zuid richting lopende lange straat. Bij iedere dwarsstraat gooit hij met een zuivere munt om te beslissen of hij zijn weg zal vervolgen of om zal keren. Hoe groot is de kans dat hij, na 10 blokken te hebben gelopen, weer op zijn uitgangspunt terug is

a) als hij bij zijn vertrek ook om de richting loot,
b) als hij begint naar het noorden te lopen.

6.7. In een loterij geeft het kopen van een lot een kans van 1/50 op een prijs. Bepaal het kleinste natuurlijk getal n zodanig, dat men bij het kopen van n loten een kans groter dan 0,5 heeft op tenminste één prijs.

6.8. Men doet n onafhankelijke trekkingen uit een Bernoulli-verdeling met kans p op succes. De kans op een even aantal successen wordt u_n genoemd.

a) Leid een betrekking af tussen u_n en u_{n-1}.

b) Toon aan dat

$$u_n = (q-p)^{n-k}u_k + p\sum_{\ell=0}^{n-k-1}(q-p)^{\ell} \ , \quad k = 0,1,2,\ldots,n, \ q = 1-p \ .$$

(Merk op dat $\sum_{\ell=0}^{-1} (q - p)^{\ell} = 0$.)

c) Bepaal een expliciete uitdrukking voor u_n en bereken de genererende funktie van de rij $(u_0,u_1,u_2,\ldots)$.

§ 7. Diskrete kansverdelingen

7.1. Bepaal de kans op

a) tenminste één score van 6 ogen bij 5 worpen met een dobbelsteen,

b) tenminste vier scores van 6 ogen bij 20 worpen met een dobbelsteen,

7.2. De kans dat een persoon een ongewenste reaktie geeft op inenting met een bepaald serum is 0,001. Men ent 2000 onafhankelijke personen in.

a) Wat is de kans dat meer dan 3 personen ongewenst reageren?

b) Wat is de kans dat minder dan 10 personen ongewenst reageren?

7.3. Op een kantoor komen gemiddeld 3 telefoongesprekken per uur binnen. Het aantal in een uur binnenkomende telefoongesprekken wordt beschreven door een Poisson verdeling. De telefoniste is gedurende 10 minuten afwezig. Hoe groot is de kans dat in die tijd minstens één persoon geen gehoor heeft gekregen?

7.4. In een seinsysteem heeft elk verzonden signaal een kans van 0.95 om goed over te komen. Hoe groot is bij het overzenden van een woord

a) met 10 signalen de kans op hoogstens 1 fout,
b) met 20 signalen de kans op hoogstens 2 fouten,
c) met 40 signalen de kans op hoogstens 4 fouten?

Bij welke woordlengten is de kans op hoogstens 10% fout overgezonden signalen groter dan 0.99?

7.5. Een autoverhuurder bezit twee wagens die per dag worden verhuurd. Het aantal aanvragen per dag heeft een Poisson-verdeling met $\mu = 1,5$. Onder een dag wordt verstaan het tijdvak van 9 - 18 uur. We nemen aan dat een bestelde auto niet dezelfde dag voor 18 uur wordt teruggebracht.

a) Hoe groot is de kans dat hij om twaalf uur nog geen aanvraag heeft gekregen?
b) Wat is de kans dat beide wagens een hele dag thuis zijn?
c) Wat is de kans dat beide wagens een hele dag uit zijn?
d) Indien beide wagens even vaak worden gebruikt, wat is dan de kans dat één bepaalde wagen een hele dag thuis is?

7.6. Gemiddeld passeren 15 auto's per uur een langs de weg gelegen benzinestation. Het aantal auto's dat per uur het benzinestation passeert heeft een Poisson-verdeling. De kans dat een passerende auto daar tankt is 1/5.

a) Wat is de kans dat n auto's in een uur het benzinestation passeren?
b) Wat is de kans dat x auto's in een bepaald uur tanken?

7.7. Een zeer grote partij gloeilampen bestaat voor 50% uit rode, 30% uit blauwe en 20% uit groene lampen. Bepaal de kans dat in een steekproef van 5 lampen uit deze partij, 2 rode, 1 groene en 2 blauwe zitten.

7.8. Een doos bevat 5 rode, 3 witte en 2 blauwe knikkers. Een steekproef ter grootte 6 wordt getrokken met teruglegging. Bepaal de kans dat er in deze steekproef

a) 3 rode, 2 witte knikkers en 1 blauwe knikker zijn,
b) 2 rode, 3 witte knikkers en 1 blauwe knikker zijn,
c) 2 knikkers van elke kleur zijn.

7.9. Er wordt 10 keer met een zuivere munt geworpen. De stochastische grootheid $\underset{\sim}{x}$ heeft de waarde van het rangnummer van de eerste worp die kruis oplevert en de waarde 11 als kruis geen enkele keer optreeedt. Bepaal de kansverdeling van x. Bepaal ook de kansverdeling van het rangnummer $\underset{\sim}{y}$ van de eerste worp die kruis oplevert als net zo lang wordt geworpen tot een keer kruis resulteert. Doe hetzelfde voor het rangnummer van de worp waarbij kruis voor de tweede keer optreedt.

7.10. Een vaas bevat 3 ballen, genummerd 0, 1 en 2. Twee ballen worden na elkaar aselekt en zonder teruglegging getrokken. Het nummer op de eerste bal is $\underset{\sim}{x}$ en het nummer op de tweede bal is $\underset{\sim}{y}$. Bepaal de mogelijke waarden voor en de kansverdeling van de stochastische grootheden: $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}$, $|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}|$.

7.11. Het aantal handelingen dat nodig is om een zeker proces uit te voeren is een stochastische grootheid $\underset{\sim}{k}$, maar het proces is beslist voltooid in ten hoogste 2n handelingen. De processtruktuur suggereert dat de kansverdeling over de mogelijke waarden van $\underset{\sim}{k}$ bepaald wordt door

$$P(\underset{\sim}{k} = k) = \begin{cases} \theta^{k-1}(1 - \theta) & k = 1,2,\ldots,2n-1 \\ \theta^{2n-1} & k = 2n \; . \end{cases}$$

met $0 < \theta < 1$.

Bereken de kansen

a) dat het proces vóór de p^e handeling is voltooid,
b) dat tenminste p en ten hoogste $2n - p$ $(p \leq n)$ handelingen nodig zijn om het proces te voltooien.

Als kontroleur 1 de oneven genummerde handelingen en kontroleur 2 de even genummerde handelingen naloopt, toon dan aan dat kontroleur 1 een grotere kans heeft het proces in één van de door hem gekontroleerde handelingen te zien voltooien dan kontroleur 2, als $2\theta^{2n} + \theta - 1 < 0$ is.

7.12. In een biochemisch eksperiment worden n organismen aan een proef onderworpen en wordt het aantal organismen dat de proef overleeft geteld. Dit aantal is een stochastische grootheid $\underset{\sim}{k}$ met een kansverdeling bepaald door

$$p(k) = 2(k + 1)/(n + 1)(n + 2) \qquad k = 0,1,\ldots,n \; .$$

a) Bereken de kans dat ten hoogste een fraktie $\alpha = m/n$ van de n organismen de vereiste periode overleeft.

b) Toon aan dat de onder a) berekende kans een limietwaarde α^2 heeft als n naar oneindig gaat.

c) Bepaal de kleinste waarde van n, waarvoor de kans dat er tenminste één van de n organismen de vereiste periode overleeft, tenminste 0,95 is.

7.13. In een gezin met n kinderen is voor ieder kind de kans dat het een jongen is gelijk aan p. Het geslacht van een kind is onafhankelijk van het geslacht van de andere kinderen. Bepaal de kans dat

a) alle kinderen hetzelfde geslacht hebben,

b) de eerste k ($\leq$ n) kinderen jongens en de overige meisjes zijn,

c) de eerste k kinderen van hetzelfde geslacht en de overige van het andere geslacht zijn,

d) er tenminste k jongens in het gezin zijn,

e) de eerste s kinderen jongens en in het totaal k ($n \geq k \geq s$) jongens in het gezin zijn.

7.14. De kans dat een boom van een bepaalde soort n bloemen draagt is gelijk aan:

$$(1 - p)p^n \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

Elke bloem aan zo'n boom heeft een kans van $\frac{2}{3}$ om bevrucht te worden en dientengevolge een vrucht voort te brengen, onafhankelijk van de andere bloemen. Elke vrucht heeft een kans van 1/4 om opgegeten te worden door vogels voordat ze rijp is.

a) Toon aan dat de kans om een rijpe vrucht voort te brengen voor een willekeurige bloem van zo'n boom gelijk is aan 1/2.

b) Als een bepaalde boom van deze soort r rijpe vruchten oplevert, toon dan aan dat de kans dat ze in het begin n bloemen droeg gelijk is aan

$$\binom{n}{r} p^{n-r}(2 - p)^{r+1}/2^{n+1} .$$

c) Als een boomgaard met k onafhankelijke bomen van deze soort géén rijpe vruchten voortbrengt toon dan aan dat de kans, dat het totale aantal bloemen aanvankelijk n was, gelijk is aan

$$\binom{n+k-1}{k-1} p^n(2 - p)^k/2^{n+k} .$$

7.15. In een vaas zitten $(2n + 1)$ briefjes, genummerd van 1 tot en met $(2n + 1)$. Drie briefjes worden aselekt en zonder teruglegging getrokken.

a) Bepaal de kans dat de nummers op de drie getrokken briefjes een rekenkundige rij vormen.

b) Bepaal de kans dat de nummers op de drie getrokken briefjes een rekenkundige rij vormen met verschil r $(r = 1,2,3,\ldots,n)$, onder de voorwaarde dat de nummers een rekenkundige rij vormen.

§ 8. Absoluut kontinue kansverdelingen

8.1. Gegeven is een kontinue kansruimte bepaald door $U = [0,\infty)$, $F = \mathcal{B}([0,\infty))$ en kansdichtheid $f(x) = Axe^{-\lambda x}$ voor $x \geq 0$ met $\lambda > 0$.

Bereken de constante A en $P([0,\lambda])$.

8.2. Gegeven is een normale kansverdeling met $\mu = 50$, en $\sigma = 7$.

a) Bepaal de kansen $P((60,\infty))$, $P((-\infty,40))$, $P((42,63))$.

b) Bepaal a, zodat $P((-\infty,a)) = 0{,}025$.

c) Bepaal b, zodat $P((50-b,50+b)) = 0{,}85$.

8.3. Een punt wordt aselekt gekozen binnen een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Bereken de kans dat de afstand van het punt tot elk hoekpunt groter dan 1 is.

8.4. De fraktie zuiver metaal in een vast standaardgewicht aan erts is van het toeval afhankelijk en wordt beschreven door een kontinue kansruimte vastgelegd door $U = [0,1]$, $F = \mathcal{B}([0,1])$ en kansdichtheid $f(x) = 4x(1 - x^2)$.

a) Bereken de kans dat de fraktie zuiver metaal ligt tussen a en b.

b) De ertsleverancier wil een minimum garantie geven voor de fraktie metaal in het erts in de vorm:
"De kans dat een standaardgewicht erts minstens een fraktie c zuiver metaal bevat is 0,75".
Bepaal de fraktie c.

8.5. Gegeven is de kontinue kansruimte bepaald door $U = \mathbb{R}$, $F = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Zij $A_1 = [-6,3]$ en $A_2 = [1,7]$ twee gebeurtenissen, bereken dan de kans op de volgende gebeurtenissen

a) $A_1 \cap A_2$

b) $A_1 \cup A_2$

c) $(A_1 \cap A_2^*) \cup (A_1^* \cap A_2)$.

8.6. In het levensverzekeringsbedrijf worden zgn. sterftetafels gebruikt, waarop de kansen dat een mens op een bepaalde leeftijd sterft genoteerd zijn. Deze kansen heeft men bepaald door in zeer lange waarnemingsperioden het aantal mensen te tellen dat op een bepaalde leeftijd stierf en de verdeling over de leeftijden uit te zetten.
Deze verdeling kan nu in een model door een kontinue kansruimte worden beschreven met $U = [0,\infty)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,\infty))$ en kansdichtheid

$$f(t) = \begin{cases} At^2(100 - t)^2 & 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & t > 100,\ t < 0\ . \end{cases}$$

a) Bereken de waarde van A.
Bereken de kans dat een mens overlijdt tussen de 60 en 70 jaar.

8.7. Een automatische draaibank produceert assen waarvan de diameter $\underline{x}$ normaal verdeeld is met $\mu = 5.010$ mm en $\sigma = 0.006$ mm. De tolerantie-eisen zijn $5.000 \leq x \leq 5.020$ mm.

a) Wat is de kans dat een aselekt getrokken product buiten het tolerantiegebied valt?

b) Wanneer het gemiddelde μ verloopt doch σ constant blijft, hoe zal dan de onder a) genoemde kans met μ veranderen? (Neem bv. μ = 5.006, 5.008, 5.012, 5.014.)

c) Tot welke waarde moet men σ verkleinen opdat bij $\mu = 5.010$ de kans op uitvallen van een produkt tot 1% wordt teruggebracht?

8.8. De levensduur van televisiebuizen is een stochastische grootheid $\underline{x}$. De kansdichtheid die deze levensduur (in jaren) beschrijft wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad \theta > 0,\ x \geq 0 \text{ en } 0 \text{ elders .}$$

a) Een televisiebuis wordt gratis vervangen als ze defekt raakt binnen een tijd t. Als $\theta = 2$, bepaal dan de tijd t zodanig dat de kans op een noodzakelijke vervanging van een televisiebuis 0,1 is.

b) als de fabrikant een garantie van 6 maanden wil geven en de kans dat een televisiebuis eerder defekt raakt 0,1 wil houden, wat is dan de waarde van θ die hij moet bereiken?

8.9. $\underline{x}$ is een stochastische grootheid met kansdichtheid

$$f(x) = e^{-x} \qquad (x > 0).$$

Bepaal de kansdichtheid $g(y)$ van $\underline{y} := \sqrt{\underline{x}}$.

8.10. $\underline{x}$ is een stochastische grootheid met kansdichtheid $f(x)$. Zij $\underline{w} = F(\underline{x})$ met $F(x)$ de verdelingsfunktie van $\underline{x}$. Bepaald de kansdichtheid $g(w)$ van $\underline{w}$.

8.11. De snelheid van gasmolekulen van een massa m is een stochastische grootheid $\underline{v}$ waarvoor geldt

$$f(v) = av^2 e^{-bv^2}, \qquad v > 0, \qquad a \text{ en } b \text{ gaskonstanten.}$$

$\underline{E}$ is de kinetische energie van een molekuul. Er geldt $\underline{E} = \frac{1}{2}m\underline{v}^2$. Bepaal de kansdichtheid g van $\underline{E}$.

8.12. Een experiment bestaat uit 2 onafhankelijke deelexperimenten, die elk door een standaardnormale verdeling worden beschreven. De uitkomstenverzameling van het experiment is dus $\mathbb{R}_2$. De stochastische grootheid $\underline{r}$ geeft de afstand tussen de oorsprong en het resultaat van het experiment. Bereken de kansverdeling van $\underline{r}$. (Rayleigh-verdeling).

8.13. Uit de exponentiële verdeling met $\lambda = 1$ wordt twee keer onafhankelijk getrokken. Hoe groot is de kans dat de kleinste waarneming groter dan 1 is? En hoe groot is de kans dat minstens één waarneming groter dan 1 is?

8.14. $\underline{x}$ is een kontinue stochastische grootheid met kansdichtheid f(x) en verdelingsfunctie F(x). Stel $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$.
De kleinste onder deze waarnemingen noemen we $\underline{y}$.

a) Bepaal $P(\underline{y} > y)$.

b) Als $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met parameter λ, toon aan dat $\underline{y}$ eveneens exponentieel verdeeld is, met parameter $n\lambda$.

§ 9. Twee stochastische grootheden

9.1. Twee stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben als simultane kansdichtheid

$$f(x,y) = \frac{1}{2x^2 y}\ , \quad 1 \le x < \infty, \ \frac{1}{x} \le y \le x\ .$$

a) Bepaal de marginale kansdichtheden van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

b) Bepaal de voorwaardelijke kansdichtheid van $\underline{x}$ onder de voorwaarde $\underline{y} = y$ en de voorwaardelijke kansdichtheid van $\underline{y}$ onder de voorwaarde $\underline{x} = x$.

9.2. De kontinue stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben als simultane kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} (n-1)(n-2)/(1+x+y)^n, & x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases} \qquad (n > 2)$$

a) Bepaal de simultane verdelingsfunktie F(x,y).

b) Bepaal de marginale kansdichtheid en verdelingsfunktie van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

c) Bepaal de voorwaardelijke verdeling van $\underline{y}$ onder de voorwaarde $\underline{x} = x$.

9.3. In een fabriek is de dagelijks benodigde - aan bederf onderhevige - grondstof een stochastische grootheid $\underline{x}$ die beschreven wordt door de kansdichtheid

$$f(x) = e^{-x} \qquad (x > 0)\ .$$

De dagelijkse grondstoftoelevering is - onafhankelijk van de behoefte - een stochastische grootheid $\underline{y}$ met kansdichtheid

$$g(y) = ye^{-y} \qquad 0 \le y < \infty .$$

a) Toon aan dat de kans dat op een bepaalde dag de behoefte groter is dan de toelevering gelijk is aan ¼.

De bedrijfsleider wil deze kans tot $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ verkleinen door een konstante dagelijkse bevoorrading van a eenheden van elders te betrekken.

b) Bepaal de waarde van a.

9.4. Twee personen hebben een afspraak tussen 8 en 9 uur. Hoe groot is de kans dat ze elkaar ontmoeten als ze niet langer dan 10 minuten op elkaar willen wachten en als hun aankomsttijden onafhankelijk en zonder voorkeur voor enig tijdstip tussen 8 en 9 uur zijn?

9.5. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kontinue stochastische grootheden zijn met simultane kansdichtheid $f(x,y)$ bepaal dan de kansdichtheid van $\underline{z}$ als

a) $f(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$ en $\underline{z} = (\underline{x}^2 + \underline{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, $0 \le x, y < \infty$,

b) $f(x,y) = 1$, $0 \le x, y \le 1$ en

$$\underline{z} = \begin{cases} \underline{x} + \underline{y} & \underline{x} + \underline{y} < 1 \\ \underline{x} + \underline{y} - 1 , & \underline{x} + \underline{y} \ge 1 , \end{cases}$$

c) $f(x,y) = a_1 a_2 e^{-(a_1x+a_2y)}$, $0 \le x, y < \infty$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 \ne a_2$ en $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$

9.6. De onafhankelijke kontinue stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn homogeen verdeeld resp. op $(0,\alpha)$ en op $(0,\beta)$ met $\alpha < \beta$.

a) Bepaal de kansdichtheid van $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$.

b) Bepaal de limiet van deze kansdichtheid als α nadert tot β.

9.7. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden met $\underline{x}$ homogeen verdeeld op $1 \leq x \leq 3$ en $\underline{y}$ exponentieel verdeeld op $2 \leq y < \infty$ met $\lambda = 1$.

a) Bepaal de simultane kansdichtheid van $\underline{z}$ en $\underline{w}$ als

$$\underline{z} = \underline{x}/\underline{y} \qquad \underline{w} = \underline{x}\underline{y}\ .$$

b) Bepaal de marginale verdeling van $\underline{z}$.

9.8. Gegeven zijn twee onafhankelijke realisaties $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ van een stochastische grootheid $\underline{x}$ met de kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}}\ , \qquad 0 \leq x < \infty,\ \theta > 0.$$

a) Bepaal de simultane kansdichtheid van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ als

$$\underline{u} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2\ , \qquad \underline{v} = \underline{x}_1/(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

en toon aan dat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ onafhankelijk zijn.

b) Bepaal de simultane kansdichtheid van $\underline{w} = \underline{x}_2/\underline{x}_1$ en $\underline{u}$ en laat zien dat $\underline{w}$ en $\underline{u}$ ook onafhankelijke grootheden zijn.

9.9. De diskrete stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk. In onderstaande tabellen zijn de waarden voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ en de bijbehorende kansen vermeld.

x	$p(\underline{x} = x)$
1	0.3
2	0.2
3	0.5

y	$p(\underline{y} = y)$
0	0.3
3	0.7

Bepaal de kansverdeling van de stochastische grootheid $\underline{t}$ als

a) $\underline{t} = \underline{x} + \underline{y}$,

b) $\underline{t} = 3\underline{x} - \underline{y}$.

9.10. De kansdichtheden van de onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn achtereenvolgens

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0 , 0 < x < \infty$$

$$g(x) = \beta e^{-\beta y}, \qquad \beta > 0 , 0 < y < \infty.$$

a) Bepaal de kansdichtheid van de stochastische grootheid $\underline{z} = \underline{x}/\underline{y}$ en van $\underline{w} = \underline{x} - \underline{y}$.

b) Bepaal de verdelingsfunktie van de stochastische grootheid $\underline{s}$ gegeven door

$$\underline{s} = \begin{cases} \underline{x} - \underline{y} & \underline{x} \geq \underline{y} \\ 0 & \underline{x} < \underline{y} . \end{cases}$$

9.11. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk standaardnormaal verdeeld. Bepaal de kansdichtheid van $\underline{z} = \underline{x}/\underline{y}$.

9.12. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk, $\underline{x}$ heeft een beta-verdeling met parameters r en s, $\underline{y}$ heeft een gamma-verdeling met parameters r + s en $\lambda = 1$. Bepaal de kansdichtheden van de stochastische grootheden $\underline{u}$ en $\underline{v}$ als $\underline{u} = \underline{x}\underline{y}$ en $\underline{v} = (1 - \underline{x})\underline{y}$ en laat zien dat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ onafhankelijk zijn.

9.13. De fraktie defekten in een grote produktie varieert van dag tot dag en mag binnen een dag als konstant worden beschouwd. Ze kan geïnterpreteerd worden als een stochastische grootheid met een beta-verdeling met parameters a en b.
Elke dag wordt een steekproef ter grootte n uit de produktie genomen en wordt het aantal defekten geteld.

Bepaal de kansverdeling van het aantal defekten op een willekeurige dag.

9.14. $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn n onafhankelijke stochastische grootheden elk met dezelfde absoluut continue verdelingsfunktie $F(x)$. Bepaal de verdelingsfunktie en kansdichtheid van

a) $\underline{y} = \max(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$,
b) $\underline{z} = \min(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$,
c) $\underline{r} = \underline{y} - \underline{z}$ ($\underline{r}$ heet wel de range van $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$).

9.15. Laat $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ onafhankelijke homogeen [0,1] verdeelde stochastische grootheden zijn. Het meetkundig gemiddelde is

$$\underline{r} = (\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 \cdot \underline{x}_3 \cdot \ldots \cdot \underline{x}_n)^{1/n} .$$

a) Bepaal de kansdichtheid van $\underline{y}_i = -\log \underline{x}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.
b) Toon aan dat de kansdichtheid $f(r)$ van $\underline{r}$ gelijk is aan

$$f(r) = \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(n-1)!} r^{n-1} (\log r)^{n-1} , \qquad 0 < r \le 1 .$$

§ 10. Verwachting, variantie, momenten

10.1. Gegeven zijn twee vazen V_1 en V_2. V_1 bevat 1 zwarte en 1 witte bal, V_2 bevat 1 zwarte en 2 witte ballen. Uit elke vaas wordt aselekt één bal getrokken. U ontvangt voor elke zwarte bal die U trekt ƒ1,--.

a) Welke bedragen kunt U ontvangen en wat zijn de kansen hierop?
b) Bereken de verwachting en de variantie van het ontvangen bedrag.

10.2. Een onderdeel moet op een bepaalde machine bewerkt worden; als het na de bewerking afgekeurd wordt moet het de bewerking onafhankelijk van de voorgaande keren opnieuw ondergaan. De kans om afgekeurd te worden is elke keer p. Bereken de verwachting van het aantal bewerkingen dat op eenzelfde eksemplaar moet worden uitgevoerd.

10.3. Een droog korrelig poeder bevat deeltjes die zuiver bolvormig zijn en waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\mu = 170$ en $\sigma = 11.6$ mikron. Men wil dit poeder in 3 soorten verdelen, nl. grof, middel en fijn en wel zodanig dat deze drie klassen een gelijke hoeveelheid korrels bevatten. Hoe groot moeten de diameters van de gaten van de benodigde zeven zijn, opdat de gewenste indeling wordt verkregen en wat wordt de gemiddelde diameter der korrels voor elke soort?

10.4. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $\mu = 3$, $\sigma = 1$. Bereken verwachting en variantie van $\underline{y} = e^{\underline{x}}$ ($\underline{y}$ heet lognormaal verdeeld).

10.5. In een kansspel heeft een speler bij iedere poging een kans $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ resp. $\frac{1}{4}$ om 0, 1 of 2 punten te behalen. Het spel eindigt als de speler een 0 scoort.

a) Toon aan dat onder de aanname dat de pogingen onafhankelijk zijn, de kans een totaal van n punten te scoren voor een speler gelijk is aan

$$u_n = \frac{3}{13}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{4}{39}\left(-\frac{1}{3}\right)^n .$$

b) Bepaal de verwachting van de totaalscore.

10.6. De kans dat speler A een wedstrijd wint van speler B is $\frac{1}{2}$. Gelijkspel komt niet voor. A en B spelen een toernooi. De speler die het eerst 2 wedstrijden achter elkaar wint of een totaal van 3 gewonnen wedstrijden heeft, is toernooiwinnaar. Bepaal het verwachte aantal wedstrijden in dit toernooi.

10.7. In een bepaald land betaalt een inwoner alleen inkomstenbelasting als zijn inkomen $\underline{x}$ groter is dan a. Het bedrag van de belasting is $c(x - a)$, waarin $0 < c < 1$.

De verdeling van het inkomen van de voor inkomstenbelasting in aanmerking komende inwoner wordt gegeven door $p(x) = \theta a^{\theta}/x^{\theta+1}$, $\theta > 1$.

a) Toon aan dat de gemiddelde inkomstenbelasting gelijk is aan $ca/(\theta - 1)$.

Een regeringsvoorstel houdt in dat de belasting van iedereen, die een inkomen $\underline{x}$ heeft, dat groter is dan b ($b > a$), verhoogd wordt met een bedrag $c(x - b)$.

b) Toon aan dat de gemiddelde belasting stijgt met 20% als b zo gekozen is dat $(b/a)^{\theta-1} = 5$.

10.8. De levensduur $\underline{x}$ van een type televisiebeeldbuis is een stochastische variabele $\underline{x}$ met kansdichtheid

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0,\ \lambda > 0 .$$

a) Bepaal de gemiddelde levensduur en de variantie.

Een winkelier vervangt een televisiebeeldbuis, die doorbrandt na een tijd x voor een bedrag $c(1 - e^{-\alpha x})$ met $c > 0$, $\alpha > 0$.

b) Toon aan dat het gemiddelde reparatiebedrag gelijk is aan:

$$c - c\{\lambda/(\lambda + \alpha)\}^2 .$$

Om het vervangingssysteem te vereenvoudigen vernieuwt hij defekte buizen, die slechts een levensduur kleiner dan het gemiddelde hebben, gratis en defekte buizen die een levensduur groter dan of gelijk aan het gemiddelde hebben voor een vast bedrag c.

c) Toon aan dat het gemiddelde reparatiebedrag nu gunstiger voor hem is als geldt:

$$\alpha/\lambda < \{e/(e^2 - 3)^{\frac{1}{2}}\} - 1 .$$

10.9. Gegeven is dat de funktie $f(x) = e^{\alpha|x|}$ de kansdichtheid is van $\underline{x}$. Hierin is α een konstante.

a) Bepaal α.

b) Bereken de verwachting en variantie van $\underline{x}$.

10.10. Zij $\underline{x}$ een gamma-verdeelde stochastische grootheid met parameters $\lambda = 10$ en $\alpha = 100$.

a) Bereken $E(\underline{x})$ en $\sigma^2(\underline{x})$.

b) Bepaal de waarden van $\underline{x}$ zodanig dat $P(\underline{x} \leq x) = 0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}975;\ 0{,}99;\ 0{,}995;\ 0{,}999$.

10.11. Zij de vraag per maand ($\underline{y}$) naar een artikel in het magazijn gamma-verdeeld met $E(\underline{y}) = 300$ en $\sigma(\underline{y}) = 200$.

a) Bepaal y_1 zodat $P(\underline{y} < y_1) = 0{,}9$.

b) Als de beginvoorraad in een maand 800 stuks bedraagt, wat is dan de kans dat de voorraad in die maand opraakt?

10.12. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft een lognormale verdeling bepaald door

$$f(x) = K \cdot \frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - m)^2} \qquad m,\ \sigma^2 \text{ konstant},\ x > 0 .$$

a) Bereken het r^e moment van $\underline{x}$ om de oorsprong en bepaal K.

b) Bepaal $E(\underline{x})$ en $\sigma^2(\underline{x})$.

c) Druk m en σ^2 uit in $\alpha_1 := E(\underline{x})$ en $\alpha_2 := \sigma^2(\underline{x})$.

10.13. De Paretoverdeling is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & x > \beta \\ 0 & \text{elders} . \end{cases} \qquad (\alpha > 0), \beta > 0)$$

a) Toon aan dat het r^e moment om de oosprong alleen bestaat als $\alpha > r$.

b) Bepaal $E\underline{x}$ en $\sigma^2(\underline{x})$ als $\alpha > 2$.

).14. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een simultane kansverdeling bepaald door de volgende tabel van mogelijke waarden voor $(\underline{x},\underline{y})$ en de kansen erop.

(x,y)	p(x,y)
(0,0)	0.08
(0,1)	0.17
(1,1)	0.26
(-1,0)	0.34
(-1,-1)	0.15

a) Bereken $E\underline{x}$, $E\underline{y}$, $\sigma^2(\underline{x})$, $\sigma^2(\underline{y})$.

b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk?

c) Bereken $E(2\underline{x} - \underline{y})$, $\sigma^2(2\underline{x} - \underline{y})$.

1.15. Bereken $E(\underline{x})$, $E(\underline{y})$, $E(\underline{y}|\underline{x} = x)$, $E(\underline{x}|\underline{y} = y)$ met $\underline{x}$ en $\underline{y}$ gedefinieerd als in opgave 9.2.

1.16. Bereken de verwachting en de variantie van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ zoals gedefinieerd als in vraagstuk 9.8.

1.17. Bereken de verwachting en de variantie van $\underline{s}$ zoals gedefinieerd als in vraagstuk 9.10.

1.18. Bereken de verwachting en de variantie van het aantal defecte zoals gedefinieerd in vraagstuk 9.13.

10.19. Men doet n o.o. experimenten elk met onbekende kans p op succes. Om toch iets te kunnen zeggen over de kans, dat er k successen optreden, hanteert men het volgende model: de kans op succes is een stochastische grootheid $\underline{p}$ met een homogene verdeling op (0,1).
Zij $\underline{k}$ het aantal successen. Bereken $P(\underline{k} = k)$, $E\underline{k}$, $\mathrm{var}(\underline{k})$.

10.20. Gegeven is $P(\underline{k} = k) = (1 - \alpha)\alpha^k \quad (0 < \alpha < 1;\ k = 0,1,2,\ldots)$.
We definiëren $\underline{x} := \sin(\frac{\pi}{2}\,\underline{k})$.

a) Bepaal de kansverdeling van $\underline{x}$.

b) Bereken $E(\underline{x})$ en $\mathrm{var}(\underline{x})$.

10.21. De simultane kansdichtheid van de stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ wordt gedefinieerd door

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) := \begin{cases} C(e^{-x-y} + e^{-2x-2y}) & \text{voor } x > 0 \text{ en } y > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

a) Bereken C.

b) Bereken de marginale kansdichtheden van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

c) Bereken $E(\underline{x})$, $E(\underline{y})$, $\mathrm{var}(\underline{x})$ en $\mathrm{var}(\underline{y})$.

d) Bereken $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

10.22. Laat $\underline{x}$ een stochastische grootheid zijn met absoluut kontinue verdelingsfunctie F, dan geldt

$$E(|\underline{x}|) = \int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))dx .$$

Bewijs dit.

10.23. Laat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ niet-negatieve stochastische grootheden zijn met absoluut kontinue simultane verdelingsfunctie $F_{\underline{x},\underline{y}}$ en marginale verdelingsfuncties $F_{\underline{x}}$ en $F_{\underline{y}}$, dan geldt

$$\operatorname{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \{F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) - F_{\underline{x}}(x)F_{\underline{y}}(y)\}dxdy\ .$$

Bewijs dit.

10.24. Laat $\underline{x}$ een stochastische grootheid met absoluut kontinue verdelingsfunctie F. Bereken $E(F(\underline{x}))$ en $\operatorname{var}(F(\underline{x}))$.

§ 11. Karakteristieke functies

11.1. Waarom zijn de volgende functies geen karakteristieke functies:

$$\sin t,\ \frac{1}{1-t}\ ,\ \frac{1}{1+t^4}\ ?$$

11.2. Gegeven is dat

$$\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{2}{(1+it)(2+it)}\ .$$

Bereken $E(\underline{x}^k)$, $\quad k = 1,2,\ldots$.

11.3. Bereken de kansdichtheden behorende bij de volgende karakteristieke functies:

$$e^{-t^2+it};\ e^{-2t^2};\ \tfrac{1}{2}(e^{-t^2} + e^{-2t^2});\ \tfrac{1}{4}(e^{-t^2} + e^{-2t^2})^2\ .$$

11.4. Gegeven zijn de volgende twee o.o. stochastische grootheden met kansdichtheden $f_{\underline{x}}(x) = e^{-x}$ $(x > 0)$ en $f_{\underline{y}}(y) = 2e^{-2y}$ $(y > 0)$.

a) Bereken de kansdichtheid $f_{\underline{x}+\underline{y}}$.

b) Bereken $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}$.

c) Verifieer dat $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}} = \varphi_{\underline{x}}.\varphi_{\underline{y}}$.

11.5. Gegeven is dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn, terwijl $\underline{x}$ normaal verdeeld is met $E(\underline{x}) = 0$ en $\operatorname{var}(\underline{x}) = 3$; $\underline{x} + \underline{y}$ is normaal verdeeld met $E(\underline{x} + \underline{y}) = -1$ en $\operatorname{var}(\underline{x} + \underline{y}) = 4$. Bepaal de kansdichtheid van $\underline{y}$.

11.6. Gegeven is dat φ een karakteristieke functie is. Bewijs dat $|\varphi|^2$ weer een karakteristieke functie is.

11.7. Gegeven is dat φ een karakteristieke functie is, $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(u_k - u_j) z_k \bar{z}_j \geq 0 .$$

11.8. Gegeven is dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ onafhankelijke stochastische grootheden zijn met een Cauchy-verdeling, d.w.z. met kansdichtheid $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Bewijs dat $\underline{x}_1$ en $\bar{\underline{x}}$ dezelfde verdeling hebben.
(Aanwijzing: Bewijs dat de Cauchy-verdeling karakteristieke functie $e^{-|u|}$ heeft.)

11.9. Laat $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ en $\underline{x}_4$ o.o. standaardnormaal verdeelde stochastische grootheden zijn. Bepaal de verdeling van $\underline{x}_1\underline{x}_2 + \underline{x}_3\underline{x}_4$.
(Aanwijzing: Gebruik karakteristieke functies.)

11.10. De diskrete stochastische grootheid $\underline{k}$ kan de waarden 0,1,2,... aannemen. De voorbrengende functie van de rij kansen $\{p_k\}$ met $p_k := P(\underline{k} = k)$ $k = 0,1,2,\ldots$ is $P(s)$. Wat zijn dan de voortbrengende functies van

a) de rij $\{q_k\}$ met $q_k := P(\underline{k} + 1 = k)$ en
b) de rij $\{r_k\}$ met $r_k := P(2\underline{k} = k)$?

11.11. $P(s)$ is de voortbrengende functie van de rij $\{P(\underline{x} = j),\ j = 0,1,2,\ldots\}$. Wat is dan de voortbrengende functie van

a) $\{P(\underline{x} \leq j)\}$,

b) $\{P(\underline{x} < j)\}$,

c) $\{P(\underline{x} \geq j)\}$,

d) $\{P(\underline{x} > j + 1)\}$,

e) $\{P(\underline{x} = 2j)\}$?

11.12. Bij een reeks trekkingen uit een alternatief met kans p op sukses (S) en q op mislukking (M) is u_n de kans dat de kombinatie SM voor de eerste maal voorkomt in de $(n-1)^e$ en n^e trekking. Bepaal de voortbrengende functie van de rij $\{u_n\}$.

§ 12. Wet van de grote aantallen, Centrale limietstelling, Benadering van de binomiale- en Poisson-verdeling door een normale verdeling

12.1. Het gewicht van een pakje boter is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 3 gram. Een regeringsinstantie neemt ter controle af en toe een steekproef van 25 pakjes. De fabrikant krijgt een boete als de gemiddelde gewichtsinhoud van deze steekproef minder is dan 250 gram. Op welke gemiddelde moet de verpakkingsmachine worden ingesteld om het risiko van een boete tot 1% te reduceren?

12.2. Een leverancier van flessen slaolie vermeldt als netto inhoud van zijn flessen 350 gram. Een winkelier wenst deze bewering te controleren zonder de flessen te openen. Hij weegt daartoe een zeer groot aantal gevulde flessen en hij vindt voor dit gewicht een normale verdeling met verwachting 585 2 gram en standaardafwijking $\sigma = 12{,}8$ gram. Vervolgens weegt hij een groot aantal lege flessen die hij van zijn klanten teruggekregen heeft met bijbehorende sluitcapsules. Voor dit gewicht vindt hij eveneens een normale verdeling met $\mu = 228{,}3$ en $\sigma = 11{,}3$ gram. Gevraagd het percentage der flessen olie die minder dan 350 gram olie bevatten.

12.3. Men wil een afstand van 100 meter afzetten door 100 maal achtereen een afstand van 1 meter af te passen. De fout die daarbij elke keer gemaakt wordt, is een stochastische grootheid, die normaal verdeeld is met $\mu = 0$ en $\sigma = 0.05$ m.

a) Bereken de kans dat de afgezette afstand meer dan een halve meter van de gewenste 100 meter verschilt.

b) Deze kans onder a) is tamelijk groot. Tot hoever zou men de standaardafwijking van de fout in iedere afgezette meter moeten reduceren opdat de kans onder a) ten hoogste 10% is?

12.4. Bij een machinaal weefgetouw treden gemiddeld 60 draadbreuken op in een tijdsinterval van lengte T. Als de machine ontregeld raakt neemt het aantal draadbreuken toe en men wenst dan zo snel mogelijk in te grijpen. De kans om ten onrechte in te grijpen dient echter bij iedere kontrole niet groter dan 0,01 te zijn. Bereken een getal x_0 zodanig, dat de regel "ingrijpen als $x > x_0$" voldoet aan de gestelde eisen.

12.5. Bereken het aantal malen dat men met een zuivere dobbelsteen moet gooien opdat de frequentie van de score van 6 ogen met een kans van ten minste 95% tussen 9/60 en 11/60 ligt gebruik makend van

a) de normale benadering van de binomiale verdeling.
b) de ongelijkheid van Cebysev.

12.6. Het gewicht $\underline{g}$ van de mannelijke studenten is een normaal verdeelde grootheid met $\mu = 155$ en $\sigma = 20$ pond.

a) Bepaal de kans dat een willekeurige student een gewicht heeft tussen de 120 en 130 pond.
b) Gegeven is een groep van 2000 mannelijke studenten. Hoe groot is het verwachte aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen 120 en 130 pond?
c) Zij $\underline{x}$ het aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen de 120 en 130 pond, bepaald dan $P(\underline{x} > 142)$.

12.7. Gegeven is dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{100}$ o.o. Poisson-verdeeld zijn met verwachting 2. Geef een benadering voor de kans

$$P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_{100} > 225)$$

met behulp van de normale verdelingsfunctie.

12.8. $\underline{x}$ is een stochastische grootheid met $E(\underline{x}^4) < \infty$.
Bewijs dat $P(|\underline{x} - \mu_1| \geq c) \leq \frac{1}{c^4} E(\underline{x} - \mu_1)^4$.

§ 13. Schatters

13.1. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn twee onafhankelijke waarnemingen uit een homogene verdeling op (a,b).
Toon aan dat $3|\underline{x} - \underline{y}|$ een zuivere schatter is voor $b - a$.

13.2. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef uit een populatie met een homogene verdeling op $(0,\theta)$. Laat zien dat $\frac{n+1}{n} \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ een zuivere schatter is voor θ.

13.3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een populatie met een homogene verdeling op $(0,2\mu)$. Dan is $\bar{\underline{x}} = \frac{1}{2}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$ een zuivere schatter voor μ. Stel $\underline{x}_1 > \underline{x}_2$, dan is $\frac{3}{4}\underline{x}_1$ ook een zuivere schatter voor μ en wel met kleinere variantie: $\frac{3}{4}\sigma^2_{\bar{\underline{x}}}$. Toon dit aan.

13.4. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden. Er worden n onafhankelijke paren waarnemingen $(\underline{x}_i, \underline{y}_i)$ gedaan. Men wil een schatting maken van de parameter $E(\underline{x}\underline{y})$. Toon aan dat $\frac{1}{n} \Sigma \underline{x}_i \underline{y}_i$ en $\bar{\underline{x}}\bar{\underline{y}}$ zuivere schatters zijn en dat de laatste nauwkeuriger is.

13.5. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een normale verdeling met $\mu = 0$ en een onbekende σ.
Toon aan dat $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$ een zuivere schatter is voor σ.

13.6. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een exponentiële verdeling met een onbekende parameter λ.
Toon aan dat $\frac{1}{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}$ een zuivere schatter is voor λ.

13.7. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is homogeen verdeeld op het interval $[0,\theta]$. De onbekende parameter θ wordt geschat met de meest aannemelijke schatter op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$.

a) Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ voor θ.
b) Welke van de volgende beweringen zijn juist?
   - De schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ is zuiver.
   - De rij schatters $\{\hat{\underline{\theta}}_n\}$ is asymptotisch nauwkeurig, asymptotisch raak, asymptotisch zuiver.

13.3. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met $\lambda = \frac{1}{\beta}$.
De onbekende parameter β wordt geschat met de meest aannemelijke schatter op grond van een steekproef $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$.

a) Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\beta}}_n$ voor β.
b) Welke van de volgende beweringen zijn juist?
  - De schatter $\hat{\underline{\beta}}_n$ voor β is zuiver.
  - De schatter $\hat{\underline{\beta}}_n$ voor β is een zuivere schatter met minimale variantie.
  - De rij schatters $\{\hat{\underline{\beta}}_n\}$ is asymptotisch nauwkeurig.

13.9. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld op $[\theta,\infty)$ met $\lambda = 1$. Op basis van een steekproef $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ wordt de onbekende parameter θ geschat met de meest aannemelijke schatter.

a) Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ voor θ.
b) Bepaal verwachting en variantie van $\hat{\underline{\theta}}_n$.
c) Welke van de volgende beweringen zijn juist?
  - De schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ is zuiver.
  - De rij schatters $\{\hat{\underline{\theta}}_n\}$ is asymptotisch nauwkeurig.

13.10. Er wordt n keer geschoten op een cirkelvormige schijf met straal a. Het middelpunt van de schijf is de oorsprong van een xy assenstelsel. De koördinaten van het trefpunt zijn twee o.o. stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ die beide $N(0,\sigma^2)$-verdeeld zijn. Men noteert na afloop <u>alleen</u> hoe vaak de schijf is geraakt. Gevraagd wordt de meest aannemelijke schatting voor σ^2 op basis van dit aantal treffers.

13.11. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft kansdichtheid

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, e^{x-\theta} & x \le \theta \\ \frac{1}{3} & \theta < x < \theta + 1 \\ \frac{1}{3}\, e^{-(x-\theta-1)} & x \ge \theta + 1 \;. \end{cases}$$

a) Er wordt één waarneming $\underline{x}$ verricht.
Laat zien dat de meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}$ van θ op grond van de realisatie $\underline{x}$ niet éénduidig is.

b) Er worden twee waarnemingen $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ verricht. Naar opklimmende grootte gerangschikt worden deze $\underline{x}_{(1)}$ en $\underline{x}_{(2)}$. De gerealiseerde range $x_{(2)} - x_{(1)}$ is kleiner dan 1. Toon aan dat $\hat{\theta}$ nu het interval $[x_{(2)} - 1, x_{(1)}]$ bestrijkt en dus niet eenduidig is.

c) Opnieuw worden er twee waarnemingen gedaan, maar nu is de range groter dan 1.
Laat zien dat $\hat{\theta}$ nu elke waarde uit het interval $[x_{(1)}, x_{(2)} - 1]$ kan aannemen en dus niet éénduidig is.

13.12. Een exponentieelbestaatuit het tweemaal werpen met een munt. Kans per worp op kruis is p, op munt 1 - p. In N onafhankelijke herhalingen van dit experiment is λN het waargenomen verschil tussen het aantal malen dat tweemaal kruis en dat tweemaal munt is opgetreden.
Laat zien dat de meest aannemelijke schatting voor p gelijk is aan

$$\hat{p} = (1 + \lambda)/2.$$

13.13. Laat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ n onafhankelijke trekkingen zijn uit een Bernoulli-verdeling met kans p op succes.

a) Bewijs dat de meest aannemelijke schatter voor p zuiver is en onder de zuivere schatters voor p de kleinste variantie heeft.

b) Bewijs dat $\underline{t} := \dfrac{\underline{k}(\underline{k} - 1)}{n(n - 1)}$ met $\underline{k} := \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$ zuiver is voor p^2 maar dat geldt var $\underline{t}$ > MVB (minimum variance bound).

13.14. Laat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_n$ onafhankelijke trekkingen zijn uit $N(0,\sigma^2)$-verdeling. Zoek een zuivere schatter voor σ^2 die onder de zuivere schatters minimale variantie heeft.

13.15. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is homogeen verdeeld op het interval $[\theta_1,\theta_2]$. Het paar parameters (θ_1,θ_2) wordt geschat met de meest aannemelijke schatter op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$.

a) Bepaal de meest aannemelijke schatter $(\hat{\underline{\theta}}_1,\hat{\underline{\theta}}_2)$.

b) Bewijs dat de schatter $(\hat{\underline{\theta}}_1,\hat{\underline{\theta}}_2)$ voldoende is.

13.16. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met $\lambda = \frac{1}{\beta}$. De onbekende parameter β wordt geschat met de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\beta}}_n$ op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ (vergelijk opgave 13.8).

a) Bewijs dat de klasse van mogelijke kansverdelingen van $\hat{\underline{\beta}}_n$ volledig is.

b) Bewijs dat de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\beta}}_n$ de zuivere schatter is met de kleinste variantie.

13.17. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld op (θ,∞) met $\lambda = 1$. De onbekende parameter θ wordt geschat met de meest aannemelijke schatter op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ (vergelijk opgave 13.9).

Bewijs dat de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ voldoende is.

13.18. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is geometrisch verdeeld met parameter p. De onbekende parameter p wordt geschat op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$.

a) Bepaal een voor p voldoende schatter.

b) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor p.

c) Bepaal nu de meest aannemelijke schatter voor $\frac{p}{1-p}$ (vergelijk a)).

13.19. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is homogeen verdeeld op cirkelschijf in $\mathbb{R}^2$ met onbekend middelpunt en onbekende straal.

a) Bepaal op grond van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots\underline{x}_n$ de meest aannemelijke schatter voor $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ met (θ_1,θ_2) middelpunt en θ_3 straal van de cirkel.

b) Toon aan dat deze meest aannemelijke schatter voldoende is voor θ_3 bij gegeven middelpunt (m_1,m_2).

13.20. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is Bernoulli-verdeeld met parameter p.

a) Bepaal op grond van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{p}}_n$ voor p.

b) Bewijs dat $\hat{\underline{p}}_n$ de zuivere schatter is met de kleinste variantie.

13.21. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie σ^2. De onbekende parameter σ^2 wordt geschat met de meest aannemelijke schatter op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$.

a) Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\sigma}}_n^2$ voor σ^2.

b) Bewijs dat de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\sigma}}_n^2$ de zuivere schatter is met de kleinste variantie.

§ 14. Toetsen van hypothesen

14.1. Bepaal de kans op een fout van de 2^e soort bij de toetsing van $H_0 : \mu_0 = 10.00$ tegen het alternatief $H_1 : \mu_1 = 7{,}36$ voor een normale verdeling met variantie $\sigma^2 = 9$ door een aselekte steekproef ter grootte n = 9. Kies de kans op de fout van de eerste soort gelijk aan $\alpha = 0{,}05$ en gebruik het meest onderscheidende kritieke gebied.

14.2. In het geval van een normale verdeling met variantie $\sigma^2 = 100$ wordt de hypothese $H_0 : \mu = 20$ met de meest onderscheidende toets getoetst tegen het alternatief $H_1 : \mu = 26$. Hoe groot moet de aselekte steekproef uit deze normale verdeling worden om te bereiken dat de kansen op de fouten van de 1^e en 2^e soort beide hoogstens gelijk zijn aan 0,10?

14.3. Ten aanzien van de gemiddelde levensduur van een machineonderdeel zijn er twee verschillende meningen. Deskundige A beweert dat de gemiddelde levensduur 1 jaar is, terwijl deskundige B de gemiddelde levensduur op 1,5 jaar schat. A wenst zijn bewering te toetsen tegen die van B en onderzoekt 25 van deze machineonderdelen onafhankelijk van elkaar, op hun levensduur. De levensduur mag als een exponentieel verdeelde stochastische grootheid $\underline{x}$ beschouwd worden.

a) Bepaal het kritieke gebied van de meest onderscheidende toets. (Onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$.)

b) Laat zien dat, als het steekproefgemiddelde 1,30 jaar bedraagt, de nulhypothese van A niet verworpen kan worden.

c) Deskundige A zegt, dat met het onder b) genoemde steekproefgemiddelde alle alternatieve waarden voor de gemiddelde levensduur, die B tegenover zijn waarde stelt en die groter zijn dan 1 jaar verworpen worden.
Is dit juist?

14.4. Ten aanzien van de parameter μ van de Poisson-verdeling wordt de veronderstelling $H_0 : \mu = 0,8$ getoetst tegen een alternatief $H_1 : \mu = 0,3$. Daartoe wordt een aselekte steekproef ter grootte $n = 10$ uit de Poisson-verdeling genomen.

a) Laat zien dat de meest onderscheidende toets H_0 niet verwerpt bij een steekproefgemiddelde gelijk aan 0,4 (Onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0,05$).
b) Bepaal de eksakte waarde van de onbetrouwbaarheid en het onderscheidingsvermogen van de meest onderscheidende toets.
c) Als de alternatieve hypothese $H_1 : \mu < 0,8$ luidt, is er dan één kritiek gebied aan te wijzen dat voor alle alternatieve μ-waarden het meest onderscheidend is?
d) Wat gebeurt er met het onderscheidingsvermogen als μ het interval (0;0,8) doorloopt?

14.5. Een handelaar koopt een grote partij eieren. Bekend wordt verondersteld dat de gewichten in een homogene partij eieren normaal verdeeld is. Er wordt aangenomen dat de spreiding in de gewichten der eieren 6 gram bedraagt. De verkoper garandeert dat het gemiddelde gewicht in deze partij boven de 60 gram ligt. De handelaar neemt een steekproef van 5 eieren, deze wegen samen 275 gram.
Heeft de handelaar reden tot klagen (onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$)?

14.6. In een fabrikageproces maakt men grote partijen platen waarvan de dikte normaal verdeeld is met $\mu = 50$ mm en $\sigma = 0,9$ mm. Verkoopbaar zijn platen met een dikte die ligt tussen 48,9 en 51,1 mm. Onbruikbaar zijn platen, waarvan de dikte kleiner is dan 47,9 of groter dan 52,1. De rest is tweede keus.

a) Bepaal het percentage dat onbruikbaar is.
b) Bepaal het percentage tweede keus (afronden).
c) Bepaal de kans dat in een produktie van 150 stuks 6 of meer platen onbruikbaar zijn.
d) In een partij van 150 stuks vindt men 42 stuks tweede keus. Is dat voldoende reden om aan te nemen dat de instelling slechter is geworden? Onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,01$.

14.7. In een zeker eksperiment is de kans op uitkomst A onbekend. Er is echter een theorie die deze kans op minstens 0,95 stelt. Bij n onafhankelijke herhalingen van hetzelfde eksperiment wordt in 90% van de gevallen uitkomst A waargenomen. Is dit aanleiding om aan het door de theorie gestelde te gaan twijfelen? (Onbetrouwbaarheid α = 0,025 en steekproef grootte n = 10, 100, 250.)

14.8. Ik heb een vrij groot aantal blikjes vis nodig, die ik voordelig kan krijgen omdat, zo zegt de winkelier, er wel eens een slecht blikje tussenzit, gemiddeld één op de twintig. Ik overweeg op deze voorwaarde de koop, maar koop er eerst 6 op proef. Hiervan blijken er 2 bedorven. Heb ik nu reden aan de uitspraak van de winkelier te twijfelen? Onbetrouwbaarheidsdrempel α = 0.05.

14.9. Van een stochastische grootheid $\underline{x}$ is bekend dat $E\underline{x} = 0$. Men wil ten aanzien van de verdeling f(x) van $\underline{x}$ de volgende hypothese toetsen

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

tegen het alternatief

$$H_1 : f(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Er wordt één waarneming gedaan.

a) Druk de likelihood ratio λ uit in de uitkomst x.

b) Schets de grafiek van λ als functie van x.

c) Indien $\underline{x}$ als toetsingsgrootheid gebruikt wordt, hoe ziet dan bij de meest onderscheidende toets het kritieke gebied eruit als funktie van de onbetrouwbaarheid α.

14.10. In een fabriek staan twee vulmachines, A en B, waarmee flessen worden gevuld met slaolie. Bij een juiste instelling van een machine is de gemiddelde inhoud van een fles 250 gram. Van beide machines mag worden aangenomen dat de gedoseerde hoeveelheden normaal verdeeld zijn met een standaardafwijking van 2,5 gram. Om te kontroleren of de machines goed zijn ingesteld wordt van elke machine de inhoud van 4 flessen nauwkeurig bepaald. De gemiddelde inhoud van de 4 flessen van machine A bedraagt 251,68 gram en het gemiddelde van machine B is 252,68 gram.

a) Toets of machine A op het juiste gemiddelde van 250 gram is ingesteld. Onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$.

b) Doe hetzelfde voor machine B.

c) Toets of de instellingen van de machine A en B onderling verschillen. Onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$.

14.11. Bij een levensduurprobleem wenst men de nulhypothese $H_0 : \lambda = 1$ waarbij λ de schaalparameter is in de exponentiële verdeling op $(0,\infty)$ te toetsen tegen het alternatief $H_1 : 0 < \lambda < 1$, op grond van één waarneming.

a) Onderzoek of er een uniform meest onderscheidende toets is voor dit geval.

b) Schets het onderscheidingsvermogen als funktie van de alternatieve λ-waarde.

14.12. Bij een wachttijdprobleem is de bedieningstijd aan een loket eksponentieel verdeeld op $(0,\infty)$ met parameter λ. De gemiddelde bedieningstijd is 1 tijdseenheid. Er worden nieuwe bedieningsvoorschriften gegeven, waarvan men nog niet weet of de gemiddelde bedieningstijd korter of langer zal worden. Men wil dan ook toetsen of de gemiddelde bedieningstijd nog steeds 1 tijdseenheid is.

a) Bepaal de likelihood ratio als funktie van één waarneming $\underline{x}$ en schets deze funktie.

b) In hoeverre kunt U iets zeggen over de vorm van het kritieke gebied als $\underline{x}$ als toetsingsgrootheid wordt gebruikt?

14.13. Men heeft twee onafhankelijke steekproeven uit twee gamma-verdelingen. Steekproef: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m$ uit

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, \qquad 0 < x < \infty,\ \lambda > 0 .$$

Steekproef: $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n$ uit

$$g(y) = \frac{\mu^q}{\Gamma(q)} y^{q-1} e^{-\mu y}, \qquad 0 < y < \infty,\ \mu > 0 .$$

De hypothese $H_0 : \lambda = \mu$ wordt getoetst tegen het alternatief $H_1 : \lambda \neq \mu$, waarbij p en q bekend mogen worden verondersteld.

a) Druk de likelihood ratio uit in de grootheid

$$\underline{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i}{\sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i} .$$

b) Laat zien dat de kansdichtheid van $\underline{t}$, onder H_0 gelijk is aan

$$h(t) = \frac{\Gamma(nq + mp)}{\Gamma(nq)\Gamma(mp)} \frac{t^{nq-1}}{(1 + t)^{mp+nq}} \qquad 0 \leq t < \infty ,$$

c) Indien $\underline{t}$ als toetsingsgrootheid genomen wordt welke waarden van t vormen (globaal aangegeven) het kritieke gebied?

14.14. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft als mogelijke waarden 0, ± 1, $\pm$ 2. De kansen op deze waarden zijn:

x	0	$\pm$ 1	+2	−2
$p(x;\theta_1,\theta_2)$	$\alpha(\frac{1-\theta_1}{1-\alpha})$	$(\frac{1}{2} - \alpha)(\frac{1-\theta_1}{1-\alpha})$	$\theta_1\theta_2$	$\theta_1(1 - \theta_2)$

waarin α een bekende konstante is,

$$0 \leq \theta_1 \leq \alpha < \tfrac{1}{2} , \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1 .$$

Er wordt één waarneming $\underline{x}$ gedaan.

a) Bepaal bij elk van de mogelijke waarnemingsresultaten de meest aannemelijke schatting voor θ_1 en θ_2.

Men wenst op basis van deze ene waarneming de hulhypothese $H_0 : \theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$, te toetsen tegen het alternatief $H_1 : \theta_1 \neq \alpha \vee \theta_2 \neq \frac{1}{2}$.

b) Laat zien dat de gegeneraliseerde likelihood ratio λ gelijk is aan:

$$\lambda = 1 - \alpha , \text{ als } x = 0, \pm 1$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \qquad , \text{ als } x = \pm 2 .$$

c) Bepaal bij de gegeneraliseerde likelihood ratio toets het kritieke gebied voor x, met onbetrouwbaarheid α.

d) Bereken het onderscheidingsvermogen.

e) Voor welke waarden van α is deze toets zuiver?

14.15. Gegeven een steekproef van 10 waarnemingen uit een normale verdeling met onbekende μ en σ

12,05	12,94
12,71	12,00
12,25	12,40
12,40	12,49
12,15	12,33

a) Toets tweezijdig de hypothese $H_0 : \mu = 12,20$.

b) Toets tweezijdig de hypothese $H_0 : \sigma = 0,3$.

Neem in beide gevallen onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$.

14.16. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn normaal verdeeld en wel achtereenvolgens $N(\mu_1,\sigma^2)$ en $N(\mu_2,\sigma^2)$. Er worden twee aselecte steekproeven genomen ter grootte $n = 8$.
Uit

$N(\mu_1,\sigma^2)$	$N(\mu_2,\sigma^2)$
50	53
41	55
57	58
55	58
33	42
63	56
54	67
56	68

a) Toets de nulhypothese $H_0 : \mu_2 = \mu_1$ bij onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$ aannemende dat beide series onafhankelijk zijn.

b) Toets $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ bij onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$ onder de zwakkere aanname dat het 8 onafhankelijk paren van metingen $(\underline{x}_i,\underline{y}_i)$ zijn met normaal verdeeld verschil $\underline{x}_i - \underline{y}_i$.

§15. Betrouwbaarheidsintervallen

15.1. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is homogeen verdeeld op $(0,\theta)$. Er wordt een aselekte steekproef $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ genomen.

a) Laat zien dat uit het likelihood ratio principe als toetsingsgrootheid voor het toetsen van $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$, de grootheid $\underline{y} = \max_i \underline{x}_i$ volgt. Toon vervolgens aan dat als een realisatie van $\underline{y}$ aangeduid wordt met y, het kritieke gebied bij een onbetrouwbaarheid α gegeven wordt door $\{y \mid 0 \le y \le \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \vee y > \theta_0\}$.

b) Bepaal nu op grond van een realisatie y van deze toetsingsgrootheid een betrouwbaarheidsinterval voor θ met onbetrouwbaarheid α.

15.2. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld op $\theta \le x < \infty$ met $\lambda = 1$. Een aselekte steekproef $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ wordt getrokken.

a) Bepaal met het likelihood ratio principe een toetsingsgrootheid $\underline{y}$ en een kritiek gebied voor $\underline{y}$ met onbetrouwbaarheid α voor de toets $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

b) Bepaal op grond van een realisatie van deze toetsingsgrootheid een betrouwbaarheidsinterval voor θ (onbetrouwbaarheid α).

15.3. Men bepaalt met een chemische methode het percentage onzuiverheid van een kleurstof, die in voedingsmiddelen wordt gebruikt. Het gemeten percentage $\underline{x}$ is normaal verdeeld. De variantie van een bepaling is 0,8. Drie bepalingen van het percentage in één bepaald produkt geven een gemiddelde van 4,2%. Bepaal een intervalschatting van het verwachte percentage onzuiverheid $p := E(\underline{x})$, waarbij U alleen wilt weten of dat te hoog is volgens Uw normen. ($\alpha = 0,05$).

15.4. In een aselekte steekproef van 300 flessen melk heeft men bij 80% een voldoende vetgehalte gekonstateerd. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor het percentage flessen met voldoende vetgehalte in de produktie ($\alpha = 0.05$).

15.5. Van een Bernoulli-verdeelde grootheid geven n waarnemingen x suksessen. Bepaal een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$ voor de kans p op sukses als

a) $n = 10$ en $x = 6$,

b) $n = 100$ en $x = 60$,

c) $n = 1000$ en $x = 600$.

15.6. Op een kantoor valt geen regelmaat in de binnenkomende telefoontjes te bekennen. Hun aantal $\underline{x}$ wordt gedurende een uur geteld. Geef een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$ voor het gemiddelde aantal telefoontjes per uur μ als $\underline{x}$ als een Poisson-verdeelde stochastische grootheid met parameter μ mag worden beschouwd en

a) als $x = 4$,

b) als $x = 40$.

15.7. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft een exponentiële verdeling met schaalparameter $1/\beta$ op $0 \leq x < \infty$. Er wordt een aselekte steekproef $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ genomen.

a) Bepaal met het likelihood ratio principe een toetsingsgrootheid $\underline{y}$ voor $H_0 : \beta = \beta_0$ tegen $H_1 : \beta \neq \beta_0$. Welke waarden van $\underline{y}$ vormen het kritieke gebied (onbetrouwbaarheid α)?

b) Bepaal op grond van een gegeven realisatie van dit toetsingskriterium $\underline{y}$ een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α voor β. Gebruik hierbij de grootheid $\underline{u} = \frac{2}{\beta}\,\underline{y}$. Laat zien dat $\underline{u}$ een χ^2 verdeling heeft onafhankelijk van β.

c) Zou U zonder de grootheid $\underline{u}$ maar met tabellen van de gammaverdeling in staat zijn een onbetrouwbaarheidsinterval op te stellen?

15.8. Gegeven een steekproef van 10 waarnemingen uit een normale verdeling met onbekende μ en σ

12,05	12,94
12,71	12,00
12,25	12,40
12,40	12,49
12,15	12,33

a) Bepaal $\bar{x}$ en s^2, de steekproefvariantie.

b) Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ, voor σ^2 en voor (μ,σ^2).

c) Indien bekend is $\sigma = 0{,}3$ hoe wordt dan het betrouwbaarheidsinterval voor μ.

15.9. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn normaal verdeeld en wel achtereenvolgens $N(\mu_1,\sigma^2)$ en $N(\mu_2,\sigma^2)$. Er worden twee aselekte steekproeven genomen ter grootte n = 8.

Uit

$N(\mu_1,\sigma^2)$	$N(\mu_2,\sigma^2)$
50	53
41	55
57	58
55	58
33	42
63	56
54	67
56	68

a) Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_2 - \mu_1$, aannemende dat beide series onafhankelijk zijn.

b) Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_2 - \mu_1$, aannemende dat het 8 onafhankelijke paren metingen zijn met normaal verdeeld verschil.

ANTWOORDENLIJST

§ 1. Uitkomstenruimte, gebeurtenissen, symmetrisch diskrete kansruimte

1.1. a) 0 d) 1

b) 0 e) 1

c) 4 f) 0

1.2. $P(E_1^*) = 1/2$ $P(E_2^*) = 2/3$

$P(E_1 \cap E_2) = 1/6$ $P(E_1 \cup E_2) = 2/3$

$P(E_1^* \cap E_2) = 1/6$

1.3. a) $A \cap B^* \cap C^*$

b) $A \cap B \cap C^*$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

f) $A^* \cap B^* \cap C^*$

g) $(A \cap B^* \cap C^*) \cup (A^* \cap B \cap C^*) \cup (A^* \cap B^* \cap C)$

h) $(A \cap B \cap C)^*$

1.4. a) $\Omega = \{0,1,2,\ldots,100\}$, diskreet

b) $\Omega = \{1,2,3,\ldots\}$, diskreet

c) $\Omega = \mathbb{R}$, kontinu

d) $\Omega = \{x : x > 0\}$, kontinu.

1.5. a) 1/3

b) 2/3

c) 1/6

1.6. a) 4/10

b) 3/10

1.7. $P(A) = 5/12$

$P(B) = 2/3$

$P(A \cap B) = 11/36$

$P(A \cup B) = 7/9$

1.8. a) 3/4

b) 5/14

§ 2. Permutaties, kombinaties, variaties, binomium van Newton, binomiaalkoëfficiënten

2.2. 14.040.000

2.3. a) 350

b) 150

c) 290

2.4. $\frac{6!}{4!2!}$

2.5. $\frac{16!}{2!1!4!2!1!1!2!2!1!}$

2.6. a) $\binom{10}{2} = 45$

b) $\binom{8}{2} = 28$

c) $\binom{10}{3} = 120$

d) $\binom{9}{2} = 36$

e) 8

2.7. $\frac{14!}{3!3!2!2!2!2!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4!} = 3.153.150$

2.8. a) $\binom{12}{10} = 66$

b) $\binom{13}{8} = 1287$

2.9. a1) $8^6 = 262144$, elk balletje 8 mogelijkheden

a2) $\frac{8!}{2!} = 20160$

b1) $\binom{13}{6} = 1716$

b2) $\binom{8}{6} = 28$

§ 3. Diskrete kansvelden

3.1. a) $$\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$$

b) $$\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

c) $$\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$$

3.2. a) 20 leden nòch advokaat, nòch leugenaar
20 leden advokaat èn leugenaar
30 leden advokaat, géén leugenaar
30 leden geen advokaat, leugenaar

b) $\binom{50}{3}\binom{50}{2} \;/\; \binom{100}{5}$

c) $\binom{20}{3}\binom{80}{2} \;/\; \binom{100}{5}$

3.3. $1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \ldots \frac{326}{365} = 1 - \frac{365!}{325!} \;/\; (365)^{40} \approx 89\%$

3.4. a) 18/343 27/343

b) $$\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{3}} = 3/35 \quad \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{7}{3}} = 3/35$$

3.5. a) $(\frac{1}{10})^4 \; \frac{4!}{4!} \cdot \binom{10}{1} = 0.001$

b) $(\frac{1}{10})^4 \; \frac{4!}{3!1!} \binom{10}{2} . 2! = 0.036$

c) $(\frac{1}{10})^4 \; \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{2!} \binom{10}{2} . 2! = 0.027$

d) $(\frac{1}{10})^4 \frac{4!}{2!1!1!} \cdot \frac{1}{2!} \binom{10}{3} .3! = 0.432$

e) $(\frac{1}{10})^4 \frac{4!}{1!1!1!1!} \cdot \frac{1}{4!} \binom{10}{4} .4! = 0,504$

3.6. b) i) $4! \quad p(5,4,3,1)$ iii) $\frac{4!}{2!1!1!} p(4,4,3,2)$

ii) $\frac{4!}{3!1!} p(4,4,4,1)$

3.7. $4\binom{48}{9} / \binom{52}{13}$

$12.4\binom{48}{10}\binom{38}{12} / \binom{52}{13}\binom{39}{13}$

$6.6\binom{48}{11}\binom{37}{11} / \binom{52}{13}\binom{39}{13}$

$4.3.12\binom{48}{11}\binom{37}{12}\binom{25}{12} / \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$

$4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12} / \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$

3.8. a) 1/36

b) 1/9

c) 7/8

d) 91/216

e) 37/216

3.9. a) x is het aantal witte ballen, $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$

b) $P(x) = \binom{7}{x}\binom{8}{5-x} / \binom{15}{5}$, $x = 0,1,\dots,5$

3.10. a) $[4\binom{39}{13} - 6\binom{26}{13} + 4\binom{13}{13}] / \binom{52}{13}$

b) $4\binom{13}{7}\binom{39}{6} / \binom{52}{13}$

c) $\binom{3}{3}\binom{36}{10} / \binom{39}{13}$

d) $4[\binom{39}{13} - 3\binom{26}{13} + 3\binom{13}{13}] / \binom{52}{13}$

3.11. a) $\frac{1}{n}$

b) $\frac{1}{n(n - 1) \ldots (n - k + 2)}$

3.12. $\frac{2(n - r - 1)}{n(n - 1)}$

§ 4. Voorwaardelijke kansen, stelling van Bayes

4.1. $2\binom{13}{3}^3\binom{13}{4}/\binom{26}{7}\binom{26}{6}$

4.2. 10/17

4.3. a) 4/5

b) 1/2

4.4. 0.2; 0.8; 0

4.5. a) $\frac{\binom{4}{2}\binom{35}{11}}{\binom{39}{13}}$

b) $\frac{\binom{4}{2}\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}}$

4.6. 30/61

4.7. q^{n-1}

$(1 - q)q^{n-j-1}$

§ 5. Afhankelijke en onafhankelijke deelexperimenten

5.2. a) 1/12

b) 1/9

c) 1/3

5.4. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 3/4$, A en B onafhankelijk

5.5. $P(E) = 1 - (1 - p_2^2)p_1^2$.

5.6. 2/3

5.7. a) 31/72

b) 6/31

5.8. a) $P(k \geq 1) = 1 - (5/6)^4$ als k het aantal zessen is

b) $P(\ell \geq 1) = 1 - (35/36)^{24}$ als ℓ het aantal worpen dubbelzes is

5.9. a) $P(A) = 91/216$, $P(B) = 7/8$

b) A en B afhankelijk

5.10. $P(z) = 13/30$

5.11. a) $P(E) = 2/5$ als E de gebeurtenis dat de 3^e wit is voorstelt.

b) $P(E \mid F) = 7/20$ als F de uitkomst dat er minstens een witte is voorstelt

5.12. $p_n = \frac{1}{2}[1 + (\frac{a-b}{a+b})^n]$

5.13. a)
$$P(ZZZ) = z(z+c)(z+2c)/N$$
$$P(ZZR) = P(ZRZ) = P(RZZ) = z(z+c)r/N$$
$$P(ZRR) = P(RZR) = P(RRZ) = z(r+c)r/N$$
$$P(RRR) = r(r+c)(r+2c)/N$$
met $N = (z+r)(z+r+c)(z+r+2c)$

§ 6. Het binomiale kansveld

6.1. a) 0.2726

b) 0.4678

c) 0.2596

d) 0.5322

e) 0.2637

6.2. a) 0.3020

b) 0.6242

c) 0.0064

6.3. 0.17

6.4. $P(k \geq x) = \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} P_i^k (1 - P_i)^{n-k}$ als k het aantal kogeltjes in vakje i is,

met $P_i = \binom{k}{i-1} p^{k-i+1} q^{i-1}$

6.5. a) 0.9087

b) 0.4049

0.0123

6.6. a) $\binom{10}{5}(\frac{1}{2})^{10}$

b) $\binom{9}{4}(\frac{1}{2})^9 = \binom{10}{5}(\frac{1}{2})^{10}$

6.7. 35

6.8. a) $u_n = (q - p)u_{n-1} + p \ (n \geq 1)$

$u_0 = 1$

c) $u_n = \frac{1}{2}[1 + (q - p)^n]$; $U(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1 - qz}{(1 - z)(1 - (q - p)z)}$.

§ 7. Diskrete kansverdelingen

7.1. a) 0.5981

b) 0.4335

7.2. a) 0.1429

b) 1

7.3. 0.3935

7.4. a) 0.9139

b) 0.9245

c) 0.9473

d) $n \approx 120$

7.5. a) 0.6065

b) 0.2231

c) 0

d) 0.3905

7.6. a) $P(n) = \frac{e^{-15}15^n}{n!}$

b) $P(x) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$

7.7. $\frac{5!}{2!1!2!}(0.5)^2(0.3)^2(0.2) = 0{,}135$

7.8. a) 0.135

b) 0.0810

c) 0.0810

7.9. $\begin{cases} x = 1,2,\ldots \quad , \quad 10 \quad , \quad 11 \\ P(\underline{x} = x) = 1/2, 1/4, \ldots \; , \quad (1/2)^{10} \; , \quad (1/2)^{10} \end{cases} ; \quad \sum_{1}^{11} p(x) = 1$

$\begin{cases} x = 1,2,3,\ldots \\ P(\underline{x} = x) = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots \sum_{1}^{\infty} p(x) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2,3,4,\ldots \\ P(\underline{x} = x) = \binom{x-1}{1} 1/2^x \end{cases}$

7.10. $\underline{x} = 0,1,2,$

$p(\underline{x} = i) = 1/3, \; i = 0,1,2$

$\underline{y}$ idem

$\underline{x} + \underline{y} = 1,2,3,$

$p(\underline{x} + \underline{y} = i) = 1/3, \; i = 1,2,3$

$\underline{x} - \underline{y} = -2,-1,1,2$

$P(\underline{x} - \underline{y} = i) = 1/6, \; i = \pm 2$

$= 1/3, \; i = \pm 1$

$|\underline{x} - \underline{y}| = 1,2$

$P(|\underline{x} - \underline{y}| = i) = 2/3, \; i = 1$

$= 1/3, \; i = 2$

7.11. a) $1 - \theta^{p-1}$

b) $\theta^{p-1} - \theta^{2n-p}$ voor $p \geq 1$; 1 voor $p = 0$.

7.12. a) $(m + 1)(m + 2)/(n + 1)(n + 2)$

$m/n = \alpha$

c) $n = 5$

7.13. a) $p^n + (1 - p)^n$

b) $p^k(1 - p)^{n-k}$

c) $p^k(1 - p)^{n-k} + (1 - p)^k p^{n-k}$

d) $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$

e) $\binom{n-s}{k-s} p^k q^{n-k}$

7.15. a) $\dfrac{3n}{(4n^2 - 1)}$

b) $P(\underline{x} = r) = \dfrac{(2n + 1) - 2r}{n^2}$; $r = 1,2,\ldots,n$

§ 8. Absoluut kontinue kansverdelingen

8.1. $A = \lambda^2$; $P([0,\lambda]) = 1 - e^{-\lambda^2}(1 + \lambda^2)$

8.2. a) 0.0764

0.0764

0.8415

b) $a = 36.28$

c) $b = 10.08$

8.3. $1 - 2\pi/9\sqrt{3}$

8.4. a) $(b^2 - a^2)(2 - a^2 - b^2)$

b) 0.366

8.5. a) 1/4
b) 7/8
c) 5/8

8.6. a) 3.10^{-9}
b) 0.154

8.7. a) 9.5%
b) $\mu = 5.006$; 16,86%
$\mu = 5.008$; 11,46%
$\mu = 5.012$; 11,46%
$\mu = 5.014$; 16.86%
c) $\sigma = 0.004$

8.8. a) 0.21 jaar
b) $\theta = 4.75$

8.9. $g(y) = e^{-y^2}.2y, \qquad y > 0$

8.10. $g(w) = 1, \qquad 0 < w < 1$

8.11. $g(x) = a\sqrt{2x}\; e^{-2bx/m}/m\sqrt{m}, \qquad x > 0$

8.12. $f(r) = re^{-\frac{1}{2}r^2}, \qquad 0 < r < \infty$

8.13. $e^{-2} = 0.135$
$1 - (1 - 1/e)^2 = 0.60$

8.14. a) $[1 - F(y)]^n$

§ 9. Twee stochastische grootheden

9.1. a) $\frac{1}{x^2} \log x \;, \qquad 1 \le x < \infty$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2y^2} & 1 \le y < \infty \\ \dfrac{1}{2} & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

b) bij vaste $\underline{x} = x$ $\quad \dfrac{1}{2y \log x}$, $\dfrac{1}{x} \le y \le x$

bij vaste $\underline{y} = y$ $\quad y/x^2$; $y \le x < \infty$, $1 \le y < \infty$

$1/x^2 y$; $1/y \le x < \infty$, $0 \le y \le 1$

9.2. a) $\quad F(x,y) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^{n-2}} - \dfrac{1}{(1+y)^{n-2}} + \dfrac{1}{(1+x+y)^{n-2}}$

b) $\quad F_{\underline{x}}(x) = F(x,\infty) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^{n-2}}$

$F_{\underline{y}}(y) = F(\infty,y) = 1 - \dfrac{1}{(1+y)^{n-2}}$

c) $\quad$ bij vaste $\underline{x} = x$: $\dfrac{(n-1)(1+x)^{n-1}}{(1+x+y)^n}$

9.3. b) $\quad a = -\log 4\mathcal{E}$.

9.4. 11/36

9.5. a) $\quad 2z^3 e^{-z^2}$, $\quad 0 < z < \infty$

b) $\quad 1$, $\quad 0 < z < 1$

c) $\quad \dfrac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} [e^{-a_1 z} - e^{-a_2 z}] \quad 0 < z < \infty$

9.6. a) $\quad z/\alpha\beta \qquad 0 \le z \le \alpha$

$1/\beta \qquad \alpha \le z \le \beta$

$(\alpha + \beta - z)/\alpha\beta \qquad \beta \le z \le \alpha + \beta$

b) $\quad z/\beta^2 \qquad 0 \le z \le \beta$

$(2\beta - z)/\beta^2 \qquad \beta \le z \le 2\beta$

9.7. a) $\quad \dfrac{e^2 . e^{-\sqrt{w/z}}}{4z}$

Definitiegebied: tussen hyperbolen $wz = 9$ en $wz = 1$ en rechts van $z = \frac{1}{4}w$, dus $\frac{1}{z} \le w \le \frac{9}{z}$, $4z \le w \le \frac{9}{z}$.

b) $\frac{e^2}{2z}[e^{-\frac{1}{z}}(1+z) - (3+z)e^{-\frac{3}{z}}], \quad 0 \le z \le \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} - \frac{e^2}{2z}(3+z)e^{-\frac{3}{z}} \qquad \frac{1}{2} \le z \le \frac{3}{2}$.

9.8. a) $(\underline{u},\underline{v}) : \theta^{-2}e^{-u/\theta}u \,, \quad 0 < v < 1,\ 0 < u < \infty$

$f_{\underline{u}}(u)\theta^{-2}ue^{-u/\theta} \,, \quad 0 < u < \infty$

$f_{\underline{v}}(v) = 1 \,, \quad 0 < v \le 1$

$\underline{u},\underline{v}$ onafhankelijk

b) $f_{\underline{w}}(w) = (1+w)^{-2} \quad 0 \le w < \infty$

$(\underline{v} = 1/(1+\underline{w}))$ en ($\underline{u},\underline{v}$ onafhankelijk) dus ($\underline{u},\underline{w}$ onafhankelijk)

9.9. a)

t(x,y)	p
1	0.09
2	0.06
3	0.15
4	0.21
5	0.14
6	0.35

b)

t(x,y)	p
0	0.21
3	0.23
6	0.41
9	0.15

9.10. a) $f_{\underline{z}}(z) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha z + \beta)^2} \qquad 0 \le z < \infty$

$$f_{\underline{w}}(w) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta e^{-\alpha w}}{\alpha + \beta} & w \ge 0 \\ \frac{\alpha\beta e^{\beta w}}{\alpha + \beta} & w < 0 \end{cases}$$

b) $$F_{\underline{s}}(s) = \begin{cases} 1 - \frac{\beta e^{-\alpha s}}{\alpha + \beta} & s \ge 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

9.11. Cauchy: $\frac{1}{\pi(1+z^2)}$

9.12. $\underline{u} : \gamma(u;\ r,\ \lambda = 1)$
$\underline{v} : \gamma(v;\ s,\ \lambda = 1)$

9.13. $\binom{n}{x} \dfrac{B(a + x,\ b + n - x)}{B(a,b)}$, $x = 0,1,\ldots,n$

9.14. a) $F_{\underline{y}}(y) = \{F(y)\}^n$
$f_{\underline{y}}(y) = nf(y)\{F(y)\}^{n-1}$
b) $F_{\underline{z}}(z) = 1 - (1 - F(z))^n$
$f_{\underline{z}}(z) = nf(z)(1 - F(z))^{n-1}$

c) $f_{\underline{r}}(r) = n(n - 1) \int_{-\infty}^{\infty} (F(r + z) - F(z))^{n-2} f(z)f(r + z)dz$

9.15. a) $f_{\underline{y}_i}(y) = e^{-y}$, $0 < y < \infty$

§ 10. Verwachting, variantie, momenten

10.1. a) ƒ2,--; ƒ1,--; ƒ0,--
b) $\mu = 5/6$
$\sigma^2 = 17/36$

10.2. $1/(1 - p)$

10.3. $d_1 = 165$
$d_2 = 175$
$\mu_1 = 157.7$
$\mu_2 = 170$
$\mu_3 = 182.5$
(alles in mikron)

10.4. $E(\underline{y}) = e^{3\frac{1}{2}}$
$\mathrm{var}(\underline{y}) = e^7(e - 1) = 1884.4$

10.5. b) 11/4

10.6. 23/8

10.8. a) gamma-verdeling

10.9. a) $\alpha = -2$

b) $E(\underline{x}) = \mu = 0$

$\sigma^2(\underline{x}) = \sigma^2 = 1/2$

$\sigma = (1/2)\sqrt{2}$

10.10. a) $E(\underline{x}) = 10$

$\sigma^2(\underline{x}) = 1$

b) 11.7, 12.1, 12.5, 12.8, 13.4

10.11. a) 568

b) 0.025

10.12. a) $\mu'_r = e^{mr + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$

b) $\alpha_1 = E(\underline{x}) = \mu'_1 = e^{m + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$\alpha_2 = \sigma^2(\underline{x}) = e^{2m + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

c) $m = \log[\alpha_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2)^{-\frac{1}{2}}]$

$$\sigma^2 = \log\left[\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2}{\alpha_1^2}\right]$$

10.13. b) $\alpha\beta/(\alpha - 1)$

$\alpha\beta^2/[(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)]$

10.14. a) $E(\underline{x}) = -0.23$

$E(\underline{y}) = 0.28$

$\sigma^2(\underline{x}) = 0.6971$

$\sigma^2(\underline{y}) = 0.5016$

b) afhankelijk $E(\underline{xy}) \neq E(\underline{x})E(\underline{y})$

c) $E(2\underline{x} - \underline{y}) = -0.74$ $\quad\sigma^2(2\underline{x} - \underline{y}) = 1.3924$

10.15. $E(\underline{x}) = E(\underline{y}) = \frac{1}{n-3}$

$E(\underline{y}|\underline{x} = x) = \frac{1}{n-2}(1 + x)$

$E(\underline{x}|\underline{y} = y) = \frac{1}{n-2}(1 + y)$

10.16. $E(\underline{u}) = 2\theta \qquad \sigma^2(\underline{u}) = 2\theta^2$

$E(\underline{v}) = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2(\underline{v}) = \frac{1}{12}$

10.17. $E(\underline{s}) = \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)}$

$\sigma^2(s) = \frac{\beta(2\alpha + \beta)}{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}$

10.18. $E(\underline{x}) = \frac{na}{a+b}$, $\mathrm{var}(\underline{x}) = \frac{nab(a + b + n)}{(a+b)^2(a+b+1)}$

10.19. $P(\underline{k} = k) = \frac{1}{n+1}$, $\quad k = 0,1,\dots,n$

$E(\underline{k}) = \frac{1}{2}n$

$\mathrm{var}(\underline{k}) = \frac{1}{12}n(n+2)$

10.20. a) $P(\underline{x} = 1) = \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}$;

$P(\underline{x} = -1) = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}$;

$P(\underline{x} = 0) = \frac{1}{1+\alpha}$.

b) $E(\underline{x}) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha^2}$; $\mathrm{var}(\underline{x}) = \frac{\alpha^4 + 3\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}$.

10.22. $\frac{1}{2}$

10.23. a) $\frac{4}{5}$

b) $f_{\underline{x}}(x) = \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{2}{5}e^{-2x}$

$f_{\underline{y}}(y) = \frac{4}{5}e^{-y} + \frac{2}{5}e^{-2y}$.

c) $E(\underline{x}) = E(\underline{y}) = 0{,}9$

$\mathrm{var}(\underline{x}) = \mathrm{var}(\underline{y}) = 0{,}89.$

d) $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \frac{4}{89}$.

10.26. $E(F(\underline{x})) = \frac{1}{2}$; $\mathrm{var}(F(\underline{x})) = \frac{1}{12}$.

§ 11. Karakteristieke functies

11.2. $2(-1)^k k!\{1 - (\frac{1}{2})^{k+1}\}$

11.3. e^{-t^2+it}: $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$ $\quad \frac{1}{2}(e^{-t^2} + e^{-2t^2})$: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}})$.

e^{-2t^2} : $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$. $\quad \frac{1}{4}(e^{-t^2} + e^{-2t^2})^2$: $\frac{1}{4}(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}} + \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{x^2}{12}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{16}})$

11.4. a) $2e^{-x} - 2e^{-2x}$, $\quad x > 0$.

b) $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = \frac{2}{1 - it} - \frac{2}{2 - it}$.

c) $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = 2\{\frac{1}{1-it} - \frac{1}{2-it}\} = \frac{2}{(1-it)(2-it)} = \frac{1}{1-it} \cdot \frac{2}{2-it} = \varphi_{\underline{x}}(t)\varphi_{\underline{y}}(t).$

11.5. $f_{\underline{y}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}$.

11.9. $f_{\underline{x}_1\underline{x}_2 + \underline{x}_3\underline{x}_4}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

11.10. a) $sP(s)$

b) $P(s^2)$

11.11. a) $\frac{P(s)}{1-s}$

b) $\frac{sP(s)}{1-s}$

c) $\frac{1 - sP(s)}{1-s}$

d) $\frac{1}{1-s}[1 - \frac{1}{s}P(s)] + \frac{p_0}{s}$

e) $\frac{1}{2}[P(\sqrt{s}) + P(-\sqrt{s})]$.

11.12. $\dfrac{pqs^2}{(1 - ps)(1 - qs)}$.

12.1. 251.4 gram

12.2. a) flessen worden gevuld met konstant volume, dan leeggewicht en inhoudsgewicht onafhankelijk, 12.5%

b) flessen worden gevuld tot bepaald totaalgewicht, dan leeggewicht en inhoudsgewicht afhankelijk, 34%

12.3. a) 0.3174

b) $\sigma \leq 0.03$ m

12.4. 78

12.5. a) 1921

b) 10^4

12.6. a) 0.0655

b) 131

c) 0.16

12.7. totaalstroom $\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$

$P[\underline{y} = y] = \text{Poisson } (y, \mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

12.8. 0,0384.

13.7. a) $\hat{\underline{\theta}}_n = \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$

b) onjuist, juist.

13.8. a) $\hat{\underline{\beta}}_n = \bar{\underline{x}}$.

b) juist, juist, juist.

13.9. a) $\hat{\underline{\theta}}_n = \min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$

b) $E(\hat{\underline{\theta}}_n) = \theta + \frac{1}{n}$; $\mathrm{var}(\hat{\underline{\theta}}_n) = \frac{1}{n^2}$.

c) onjuist, juist.

13.10. $$\hat{\underline{\sigma}}^2 = \frac{a^2}{2[\ln {}^n/n - \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i]} .$$

13.14. $\underline{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i^2$.

13.15. a) $(\min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n), \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n))$.

13.18. a) $\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$

b) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i + n}$$

c) $\bar{\underline{x}}$.

13.19. a) $(\hat{\underline{\theta}}_1, \hat{\underline{\theta}}_2, \hat{\underline{\theta}}_3)$ zodat $(\hat{\underline{\theta}}_1, \hat{\underline{\theta}}_2)$ is middelpunt en $\hat{\underline{\theta}}_3$ straal van omgeschreven cirkel van $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

13.20. a) $\hat{\underline{p}}_n = \bar{\underline{x}}$.

13.21. a) $\hat{\underline{\sigma}}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i^2$.

§ 14. Toetsen van hypothesen

14.1. 0,16

14.2. 19

14.3. a) $\bar{x} \geq 1,35$

14.4. b) 0.0424
0.6472

d) μ neemt af dan neemt het onderscheidingsvermogen toe

14.5. $P(\underline{y} \leq 275;\ \mu_y = 300) = 0.0314 < \alpha$, dus reden tot klagen
Of linkergrens = 277.9 > 275 (linkseenzijdig gebied).

14.6. a) 1,98%
b) 20%
c) 0,0839
d) ja

14.7. 0.4013 binomiaal, geen twijfel
0.0318 Poisson , geen twijfel
0.0002 normaal , wel twijfel

14.8. ja

14.9. a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(\frac{1}{2}x^2 - |x|)}$

14.10. a) Kritiek gebied: $\{\bar{x} \mid \bar{x} \leq 247.55 \vee \bar{x} \geq 252.45\}$

A kan juist ingesteld zijn

b) B is onjuist ingesteld, $H : \mu = 250$ verwerpen

c) $H : \mu(A) = \mu(B)$ niet verwerpen

14.13. a) $C \cdot \dfrac{t^{nq}}{(1 + t)^{mp+nq}}$

c) grote en kleine t-waarden

14.14. a) $x = 0$ dan $\hat{\theta}_1 = 0$, $\hat{\theta}_2$ kan niet geschat worden

$x = \pm 1$ dan $\hat{\theta}_1 = 0$, $\hat{\theta}_2$ kan niet geschat worden

$x = 2$ dan $\hat{\theta}_1 = \alpha$, $\hat{\theta}_2 = 1$

$x = -2$ dan $\hat{\theta}_1 = \alpha$, $\hat{\theta}_2 = 0$

c) $x = \pm 2$

d) θ_1

e) nee

14.15. a) Niet verwerpen.

b) Niet verwerpen.

14.16. a) Niet verwerpen.

b) Niet verwerpen.

§ 15. Betrouwbaarheidsintervallen

15.1. b) $y < \theta < \dfrac{y}{\sqrt[n]{\alpha}}$

15.2. a) toetsingsgrootheid: $\min\limits_i \underline{x}_i = \underline{y}$

kritiek gebied $(\underline{y} \geq \theta_0 - \frac{1}{n}\log\alpha) \vee (\underline{y} < \theta_0)$

b) $y + \frac{1}{n}\log\alpha < \theta < y$

15.3. $0{,}505 > p$

15.4. $0{,}75 < p < 0{,}84$

15.5. a) $0.26 < p < 0.88$

b) $0.50 < p < 0.69$

c) $0.57 < p < 0.63$

15.6. a) $1 < \mu < 10$

b) $29 < \mu < 55$

15.7. a) $\underline{y} = \Sigma \underline{x}_i$

$\underline{y} \geq b(\alpha) \vee \underline{y} \leq a(\alpha)$ waarbij voor $a(\alpha)$ en $b(\alpha)$ geldt

$$\left(\frac{a(\alpha)}{\beta_0}\right)^n e^{-(a(\alpha)\beta_0^{-n})} = \left(\frac{b(\alpha)}{\beta_0}\right)^n e^{-(b(\alpha)\beta_0^{-n})}$$

en

$$P(\underline{y} \geq b(\alpha);\beta_0) = \alpha_2,\ P(\underline{y} \leq a(\alpha);\beta_0) = \alpha_1 \text{ met } \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

b) $\left\{\beta \,\middle|\, \dfrac{2y}{\chi^2_{2n}(\frac{1}{2}\alpha)} < \beta < \dfrac{2y}{\chi^2_{2n}(1 - \frac{1}{2}\alpha)}\right\}$

c) (β_1, β_2) met $P(\underline{y} \geq y \mid \beta = \beta_1) = P(\underline{y} \leq y \mid \beta = \beta_2) = \frac{1}{2}\alpha$

15.8. a) $\bar{x} = 12.37$

$s^2(\underline{x}) = 0.083$

$s = 0.29$

b) $12.16 < \mu < 12.58$

$0.20 < \sigma < 0.53$

c) $12.19 < \mu < 12.55$

15.9. a) $-3.6 < \mu_2 - \mu_1 < 15.6$

b) $-0.11 < \mu_2 - \mu_1 < 12.1$

Tentamen 21 januari 1974.

1. Een bak bevat n lootjes genummerd 1,2,...,n.
   Er worden k ($k \le n$) lootjes uitgetrokken.
   Hoeveel verschillende mogelijke uitkomsten zijn er als we

   a) trekken zonder teruglegging en niet letten op de volgorde van trekken.
   b) trekken met teruglegging en niet letten op de volgorde van trekken.
   c) trekken zonder teruglegging en wel letten op de volgorde van trekken.
   d) trekken met teruglegging en wel letten op de volgorde van trekken.

   Veronderstel dat de uitkomsten in vraag b) alle gelijke kansen hebben.

   e) Bereken de kans dat zowel lot nummer 1 als lot nummer 2 niet meer dan één keer voorkomt in de uitkomst.

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden met een exponentiële verdeling:

$$f_{\underline{x}}(x) = e^{-x} \quad \text{en} \quad f_{\underline{y}}(y) = e^{-y} .$$

   Verder is

$$\underline{u} = \underline{x} + \underline{y}$$
$$\underline{v} = \underline{x} + \alpha\underline{y}$$

   a) Voor welke waarde(n) van α is de correlatiecoëfficiënt van $\underline{u}$ en $\underline{v}$ gelijk aan 0?
   b) Bereken de simultane kansdichtheid van $\underline{u}$ en $\underline{v}$.
   c) Voor welke waarde(n) van α zijn $\underline{u}$ en $\underline{v}$ onafhankelijke stochastische grootheden?
   d) Beantwoord de vragen a), b) en c) voor het geval dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ standaard normaal verdeeld zijn.

3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden elk met verdelingsfunctie

$$F_{\underline{x}_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ x^\theta & \text{voor } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{voor } x \ge 1 \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$.

a) Laat zien dat er een uniform meest onderscheidende toets bestaat voor het toetsingsprobleem

$$H_0 : \theta = \theta^0 \text{ tegen } H_1 : \theta > \theta^0$$

en geef het kritieke gebied aan.

b) Laat zien dat $\underline{y}_i = -\log \underline{x}_i$ exponentieel verdeeld is en bereken de kansdichtheid van

$$\underline{t} = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i \quad \text{en} \quad \underline{z} = \prod_{i=1}^{n} \underline{x}_i .$$

Tentamen 8 april 1974

1. a) Men gooit éénmaal met vijf dobbelstenen. Wat is de kans op een totaal van precies acht ogen?

   b) A, B en C zijn gebeurtenissen waarvoor geldt: $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0{,}2$ en $P(A \cap B \cap C) = 0{,}1$.
   Bereken $P(A \mid B^* \cup C^*)$.

   c) A, B en C zijn gebeurtenissen waarvoor geldt: $P(A) = P(B) = 0{,}4$ en $P(A \cap C) = 0{,}2$.
   Bereken $P(B \cap C)$ als nog gegeven is dat A, B en C onderling onafhankelijk zijn.

   d) $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ zijn onderling onafhankelijke stochastische grootheden met $E\underline{x}_j = j$ en var $\underline{x}_j = j^2$ $(j = 1,2,3)$ en $\underline{y}$ is gedefinieerd door
   $\underline{y} = \frac{1}{2}(\underline{x}_1 - 2\underline{x}_2 + 3\underline{x}_3)$.
   Bereken $E\underline{y}$ en $\sigma^2(\underline{y})$.

2. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een simultane kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{y}}$ die gegeven wordt door

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{als } x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   a) Bereken $P(\underline{x} + \underline{y} > 0) \cdot P(\underline{x} + \underline{y} \ge 0)$.

   b) Bereken $E\underline{x}$, $\sigma^2(\underline{x})$ en $\rho(\underline{x},\underline{y})$ (aanwijzing: poolcoördinaten).

   c) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk? Motiveer Uw antwoord.

3. De karakteristieke functies van de stochastische grootheden $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ worden gegeven door respectievelijk

$$\varphi_{\underline{x}_1}(t) = \frac{1}{5}(4 + e^{it}) \,,$$

$$\varphi_{\underline{x}_2}(t) = e^{-2t^2} \,.$$

$$\varphi_{\underline{x}_3}(t) = \frac{2}{(1-it)(2-it)} \,.$$

   a) Bereken $\sigma^2(\underline{x}_2)$ (Gegeven: als $F_{\underline{x}}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, dan is $\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.)

   b) Bereken $F_{\underline{x}_3}(x)$.

   c) Bereken $P(\underline{y} \le 25)$, als $\varphi_{\underline{y}}(t) = \{\varphi_{\underline{x}_1}(t)\}^{100}$.

Opmerking: Zij die liever werken met momentengenererende functies dan met karakteristieke functies, kunnen de eerste uit de laatste verkrijgen door substitutie van $t = -is$.

Tentamen 10 juni 1974

1. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen die exponentieel verdeeld zijn met $E\underline{x}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

   a) Bereken de kansdichtheid van $\underline{x}_{(n)} := \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$.

   b) Bereken de kansdichtheid van $\underline{y} := \sum_{k=1}^{3} \underline{x}_k/k$. (Aanwijzing: gebruik momentenvoortbrengende functies.)

   c) Bereken $E\underline{x}_{(3)}$.

   d) Bereken $\lim_{n\to\infty} P(\underline{x}_{(n)} - \log n \leq z)$.

2. $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\}$ is een aselecte steekproef uit een populatie met kansdichtheid $f(x;\theta)$ gegeven door

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^{-1} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad (\theta > 0) .$$

   a) Laat zien dat de kansdichtheid van $\underline{x}_{(1)} = \min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ gegeven wordt door

$$f_{\underline{x}_{(1)}}(x) = \begin{cases} n/\theta(1 - x/\theta)^{n-1} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   b) Veronderstel dat alleen de grootheid $\underline{x}_{(1)}$ wordt waargenomen. Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ gebaseerd op deze grootheid.

   c) Is deze schatter asymptotisch zuiver?

   d) Is deze schatter asymptotisch nauwkeurig?

   e) Is deze schatter voldoende?

3. $\underline{k}$ is binomiaal verdeeld met parameters n en p, waarbij n bekend is en p onbekend.

   a) Laat zien dat de toets met een kritiek gebied R van de vorm

   $$R = \{k \mid k \leq k(\alpha)\}$$

   uniform meest onderscheidend is voor het toetsingsprobleem H_0: $p = p_0$ tegen H_1: $p < p_0$.

   b) Laat zien dat de gegeneraliseerde likelihood ratio toets voor H_0: $p \geq 0{,}5$ tegen H_1: $p < 0{,}5$ hetzelfde kritieke gebied oplevert als de toets onder a) met $p_0 = 0{,}5$.

   c) Zij $n = 1000$ en $k = 450$ (waargenomen waarde van $\underline{k}$). Bepaal een linkseenzijdig betrouwbaarheidsinterval voor p met betrouwbaarheid 0,9875, en toets de hypothese $p = 0{,}5$ tegen het alternatief $p < 0{,}5$ met onbetrouwbaarheid 0,0125.

Tentamen 20 januari 1975.

1. Gegeven is het volgende continue kansveld: $U = (0,1]$ en

$$P(A) = \int_A dx ,$$

voor alle $A \subset U$ waarvoor de integraal gedefinieerd is. Op dit kansveld zijn twee stochastische grootheden $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ gedefinieerd door

$$x_1(u) = \begin{cases} 1 & \text{als } u \in (0,1/3] \\ 0 & \text{als } u \in (1/3,1] \end{cases}$$

$$x_2(u) = \begin{cases} 1 & \text{als } u \in (0,1/9] \cup (3/9,4/9] \cup (6/9,7/9] \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

a) Bepaal de kansverdeling van $\underline{x}_1$. [1]

b) Bewijs dat $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijk zijn. [2]

c) Definieer $\underline{x}_3$ op U zō dat $\underline{x}_3$ de zelfde kansverdeling heeft als $\underline{x}_1$ (en als $\underline{x}_2$) en zō dat $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ onderling onafhankelijk zijn (alleen een schets van $x_3(u)$ geven, geen bewijzen). [2]

d) Bereken

$$\mathrm{var}\left(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3}{3}\right) .$$ [2]

e) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{36}$ zijn onderling onafhankelijk en hebben alle dezelfde kansverdeling als $\underline{x}_1$ onder a). Geef een benadering voor de kans

$$P\left(\frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{36}}{28} > \tfrac{1}{2}\right) .$$ [3]

2. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een simultane kansdichtheid $f(x,y)$, gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x - y| < \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } |x + y| < \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

a) Bereken $f_{\underline{x}}$. [2]

b) Bereken $f_{\underline{x}+\underline{y}}$ (aanwijzing: beschouw eerst $F_{\underline{x}+\underline{y}}$). [2]

c) Bereken $P(\underline{x} - \underline{y} > 0 \mid \underline{x} > 0)$. [2]

d) Bereken $E|\underline{x}\ \underline{y}|$. [2]

e) Bewijs dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ niet onafhankelijk zijn.

(Aanwijzing: maak een plaatje van $f(x,y)$.) [2]

3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{2n+1}$ vormen een aselecte steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x-\lambda|} ,$$

waarbij λ onbekend is. De geordende steekproef geven we aan met

$$\underline{x}_{(1)}, \underline{x}_{(2)}, \ldots, \underline{x}_{(2n+1)} \quad (\underline{x}_{(1)} \le \underline{x}_{(2)} \le \ldots \le \underline{x}_{(2n+1)}) .$$

a) Bepaal de maximum likelihood schatter $\hat{\underline{\lambda}}_1$ voor λ. Aanwijzing: schets een grafiek van $|x - \lambda|$ en laat zien dat

$$\sum_{1}^{2n+1} |\underline{x}_{(j)} - \lambda|$$

minimaal is voor $\lambda = \underline{x}_{(n+1)}$ door λ te variëren. [3]

b) Bepaal de momentenschatter $\hat{\underline{\lambda}}_2$ voor μ. [2]

c) Bewijs dat $\hat{\underline{\lambda}}_2$ zuiver is. De schatter $\hat{\underline{\lambda}}_1$ is ook zuiver; waarom? (Geen bewijs, wel <u>korte</u> argumentatie.) [2]

d) Bewijs dat $\hat{\underline{\lambda}}_2$ asymptotisch raak is. [3]

4. Men doet n onafhankelijke experimenten, telkens met een (onbekende) kans p op succes.

a) Laat zien dat het totaal aantal successen $\underline{k}$ een voldoende statistische grootheid is voor p. [3]

b) In een concreet geval neemt men $n = 100$ en krijgt 60 successen. Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor p ($\alpha = 0{,}0456$) en toets de hypothese $p = 0{,}45$ tegen het alternatief $p \neq 0{,}45$. [4]

c) Laat zien dat het kritieke gebied R bij de gegeneraliseerde likelihood ratio toets voor de hypothese $p = 0{,}5$ tegen het alternatief $p \neq 0{,}5$ de vorm heeft $R = \{k \mid |k - \frac{n}{2}| \ge c\}$. [3]

Tentamen 10 april 1975.

1. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden die exponentieel verdeeld zijn met $E\underline{x}_i = 1/\lambda$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. De geordende grootheden geven we aan met $\underline{x}_{(1)} \le \underline{x}_{(2)} \le \ldots \le \underline{x}_{(n)}$.

   a) Bereken P (minstens k onder $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ zijn groter dan 1), en geef de numerieke waarde van deze kans voor $n = 15$, $k = 7$ en $\lambda = \log 3$.

   b) Bereken $F_j(x) := P(\underline{x}_{(j)} \le x)$.

   c) Als $\underline{x}$ een stochastische variabele is, waarvoor geldt dat $P(\underline{x} \ge 0) = 1$, dan is

$$E\underline{x} = \int_0^\infty \{1 - F_{\underline{x}}(x)\}dx .$$

   Bewijs dit onder de aanname dat $\underline{x}$ een kansdichtheid $f_{\underline{x}}$ heeft.

   d) Bereken $E\underline{x}_{(j)}$. (Aanwijzing:

$$\int_0^1 y^a(1-y)^b dy = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}) .$$

2. $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ zijn onafhankelijk en homogeen verdeeld op (0,1). We definiëren

$$\underline{x} := \frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_1 + \underline{x}_2} \quad \text{en} \quad \underline{y} := \frac{\underline{x}_2}{\underline{x}_1 + \underline{x}_2} .$$

   a) Bereken $P(\underline{x}_2 \le \alpha \underline{x}_1)$ voor $0 \le \alpha < \infty$ (aanwijzing: gebruik figuur).

   b) Bereken $F_{\underline{x}}$, de verdelingsfunctie van $\underline{x}$.

   c) Bereken $F_{\underline{x},\underline{y}}$, de simultane verdelingsfunctie van $\underline{x}$ en $\underline{y}$. (Aanwijzing: merk op dat $P(\underline{x} + \underline{y} = 1) = 1$.)

   d) Bereken de correlatie-coëfficiënt $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

3. $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ en $\underline{x}_3$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x}_j = j$ $(j = 1,2,3)$. We definiëren $\underline{z} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3$.

   a) Bereken $\varphi_{\underline{z}}(t)$, de karakteristieke functie van $\underline{z}$.

   b) Bereken $E\underline{z}$, var $\underline{z}$ en $E\underline{z}^2$.

   c) Bereken $f_{\underline{z}}$, de kansdichtheid van $\underline{z}$.

Tentamen 7 juni 1975.

1. Als $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met $E\underline{x}_j = \lambda^{-1}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, dan heeft de grootheid

$$\frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_k}{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n} \qquad (k < n)$$

een Beta-verdeling. Bewijs dit in de volgende drie stappen, als nog gegeven is dat voor $m = 1,2,\ldots,n$ en $z > 0$

$$f_{\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_m}(z) = \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\, z^{m-1}\, e^{-\lambda z} \; .$$

a) Een positieve stochastische grootheid $\underline{w}$ heeft kansdichtheid $f_{\underline{w}}$. Bereken de kansdichtheid van $\frac{\underline{w}}{1+\underline{w}}$.

b) Bereken de kansdichtheid van $\underline{w} := \underline{u}/\underline{v}$, waarbij $\underline{u} := \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_k$ en $\underline{v} := \underline{x}_{k+1} + \ldots + \underline{x}_n$. Aanwijzing: geef eerst een uitdrukking voor $F_{\underline{w}}$ en gebruik op het juiste moment de relatie $f_{\underline{w}} = F'_{\underline{w}}$.

c) Bereken de kansdichtheid van $\frac{\underline{u}}{\underline{u}+\underline{v}}$ met $\underline{u}$ en $\underline{v}$ als in b).

2. In een vijver zitten N vissen $(N \geq 200)$. Men vangt 100 vissen, merkt deze en zet ze terug. Vervolgens vangt men weer 100 vissen en vindt daaronder $\underline{k}$ gemerkte.

a) Het tweede 100-tal vissen wordt (in tegenstelling tot het eerste 100-tal) één voor één en met terugleggen gevangen.

i) Wat is $P(\underline{k} = k)$ (geen afleiding vereist).

ii) Bereken $E\underline{k}$, $E\{\underline{k}(\underline{k}-1)\}$ en var $\underline{k}$.

b) Het tweede 100-tal wordt (evenals het eerste) zonder terugleggen gevang

   i) Wat is $P(\underline{k} = k)$ (geen afleiding vereist).

   ii) Bereken $E\underline{k}$, $E\{\underline{k}(\underline{k}-1)\}$ en var $\underline{k}$.

3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ vormen een aselecte steekproef van een stochastische grootheid $\underline{x}$ met kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-d)}\, U(x-d) ,$$

waarin $\lambda > 0$ en

$$U(z) = \begin{cases} 0 & \text{als } z < 0 \\ 1 & \text{als } z \geq 0 . \end{cases}$$

a) Beschouw λ als bekend en bereken de meest aannemelijke schatter voor d. Geef deze aan met $\underline{u}_n$.

b) Is de onder a) gevraagde schatter (i) zuiver, (ii) asymptotisch raak, (iii) voldoende voor d?

c) Beschouw λ en d beide onbekend en bewijs dat de meest aannemelijke schatt voor het paar parameters $\theta := (\lambda, d)$ gegeven wordt door $\underline{t} := (\hat{\underline{\lambda}}, \hat{\underline{d}})$, waarbi $\hat{\underline{\lambda}} := n\{\sum_{1}^{n} (\underline{x}_j - \hat{\underline{d}})\}^{-1}$ en $\hat{\underline{d}} = \min(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$.

4. Een deeltjesteller telt binnenkomende deeltjes. Elk binnenkomend deeltje wor onafhankelijk van alle andere deeltjes, met kans p geteld. In een zekere per komt een onbekend aantal, zeg n, deeltjes binnen, waarvan er $\underline{k}$ worden geteld Een realisatie van $\underline{k}$ geven we aan met k.

a) Geef het kritieke gebied voor de grootheid $\underline{k}$ bij toetsing van de hypothes $H_0 : n = 625$ tegen $H_a : n \neq 625$, als nog gegeven is dat $p = \frac{1}{5}$ (gebruik $\alpha = 0{,}0456$).

b) Men heeft waargenomen $k = 100$. Geef een (tweezijdig) betrouwbaarheids-interval voor n, als weer $p = \frac{1}{5}$ ($\alpha = 0{,}0456$).

c) Veronderstel nu ook p onbekend. Geef op grond van de waarneming $k = 100$ (weer m.b.v. een toets als onder a)) een betrouwbaarheidsgebied voor het <u>paar</u> parameters (n,p), d.w.z. geef de ongelijkheid, die dit gebied karakteriseert.

Tentamen 19 januari 1976.

1. Men doet onafhankelijke worpen met een dobbelsteen. Voor $n = 1,2,\ldots$ is $\underline{k}_n$ gedefinieerd door

$$P(\underline{k}_n = k) = P(\text{de } n\text{-de zes wordt gegooid bij de } (n+k)\text{-de worp})$$
$$(k = 0,1,2,\ldots) .$$

   a) Bereken $P(\underline{k}_1 = k)$.
   b) Bereken $P(\underline{k}_n = k)$.
   c_1) Bereken $E\underline{k}_1$ en var $\underline{k}_1$.
   c_2) Het blijkt dat $E\underline{k}_n = nE\underline{k}_1$ en var $\underline{k}_n = n$ var $\underline{k}_1$. Hoe komt dat? (Geef een korte verklaring, geen rekenwerk.)
   d) Geef een benadering voor de numerieke waarde van $P(\underline{k}_{120} \leq 720)$.

2. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x} = E\underline{y} = 1$. We definiëren $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$.

   a) Bereken de kansdichtheid $f_{\underline{z}}$ van $\underline{z}$.
   b) Bereken de karakteristieke functies $\varphi_{\underline{x}}$, $\varphi_{-\underline{y}}$ en $\varphi_{\underline{z}}$ van $\underline{x}$, van $-\underline{y}$ en van $\underline{z}$.
   c) $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ en $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n$ zijn alle onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x}_j = E\underline{y}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Definieer

$$\underline{w}_n = \sum_1^n \underline{x}_j - \sum_1^n \underline{y}_j .$$

   Bereken de karakteristieke functie $\varphi_{\underline{w}_n}$ van $\underline{w}_n$.
   d) We schrijven φ_n voor de karakteristieke functie van $\underline{w}_n/\sqrt{2n}$.
   Bereken $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

3. Men doet n onafhankelijke experimenten, elk met (onbekende) kans p op succes. Het aantal successen bij het j-de experiment (0 of 1) geven we aan met $\underline{x}_j$. Verder definiëren we $\underline{k}_n = \sum_1^n \underline{x}_j$ en $\hat{\underline{p}}_n = \underline{k}_n/n$.

   a) Bewijs dat de schatter $\hat{\underline{p}}_n$ asymptotisch raak is voor p.
   b) Bewijs dat $\hat{\underline{p}}_n$ voldoende is voor p (bereken hiertoe $f(x_1,\ldots,x_n;p) = P(\underline{x}_1 = x_1,\ldots,\underline{x}_n = x_n)$ voor $x_j = 0,1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$).

c) Bewijs dat er geen <u>zuivere</u> schatter voor p bestaat met een kleinere variantie dan $\hat{\underline{p}}_n$.

d) Bedenk een schatter voor p met een kleinere variantie dan $\hat{\underline{p}}_n$.

4. a) Zij $\underline{x}$ normaal verdeeld met $E\underline{x} = \mu$ en var $\underline{x} = \sigma^2$.
Bewijs dat $p(\mu) := P(|\underline{x}| \geq c;\mu)$ een niet-dalende functie is van μ voor (vaste) $c > 0$ en $\mu \geq 0$.

b) Men neemt een aselecte steekproef van de grootte n uit een normale verdeling met onbekende verwachting μ en variantie 1. Men vindt $x_1,\ldots,x_n$.
Bereken de likelihood ratio $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ bij de gegeneraliseerde likelihood ratio toets voor de hypothese

$$H_0\colon\ |\mu| \leq 1$$

tegen het alternatief

$$H_1\colon\ |\mu| > 1$$

en schrijf $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ als functie van $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_1^n x_j$. Laat zien dat het kritieke gebied R voor de toetsingsgrootheid $\bar{x}$ de gedaante

$$R = \{\bar{x} \mid |\bar{x}| \geq c\}$$

heeft.

c) Men doet 100 waarnemingen en vindt $\bar{x} = 1{,}20$. Voer de onder b) beschreven toets uit voor $\alpha = 0{,}01$.

Tentamen 31 maart 1976.

1. $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \ldots, \underline{k}_n$ zijn onderling onafhankelijk en geometrisch verdeeld, d.w.z.

$$p_k := P(\underline{k}_j = k) = p^k(1-p) \quad (k=0,1,2,\ldots;\ j=1,2,\ldots,n;\ 0<p<1).$$

a) Bereken $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad (|z| \leq 1)$.

b) Bereken $E\underline{k}_1$, $E\underline{k}_1(\underline{k}_1 - 1)$ en var $\underline{k}_1$ m.b.v. $P(z)$.

c) Gegeven is

$$P(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \ldots + \underline{k}_n = k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n .$$

Bereken

$$P(\underline{k}_1 = 0 \mid \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \ldots + \underline{k}_n = N) .$$

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben een simultane normale verdeling:

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\} .$$

a) Bereken de kansdichtheden $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$ van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

b) Bereken var$(\underline{x} + \underline{y})$ (gebruik $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \rho$).

c) Bereken $\rho(\underline{x} + \underline{y}, \underline{y})$.

d) Gegeven: $\underline{x} + \underline{y}$ is weer normaal verdeeld. Wat is $f_{\underline{x}+\underline{y}+1}$?

3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$.

a) Bereken de verdelingsfunctie van $\underline{x}_{(n)} := \max(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$.

b) Bereken de karakteristieke functie van $\underline{x}_{(n)}$.

c) Bereken de karakteristieke functie van $\underline{y}_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{x}_j}{j}$.

d) Bewijs dat $\underline{x}_{(2)}$ en $\underline{y}_{(2)}$ dezelfde kansverdeling hebben.

Tentamen 12 juni 1976.

1. Twee spelers K en L spelen het volgende spel: K betaalt 7 gulden aan L en gooit vervolgens twee maal met een dobbelsteen. Daarna betaalt L aan K een aantal guldens gelijk aan het aantal gegooide ogen. De winst van K geven we aan met $\underline{k}$, die van L met $\underline{\ell}$ ("winst" kan ook negatief zijn).

   a) Bereken $P(\underline{k} = k)$ $\quad (k = 0,\pm 1,\ldots)$. (2)

   b) Bereken $E\underline{k}$ en var $\underline{k}$. (2)

   K en L spelen n onafhankelijke spelletjes zoals boven beschreven. De totale winst van $\underline{k}$ geven we aan met $\underline{k}_n$, die van L met $\underline{\ell}_n$.

   c) Bereken $E\underline{k}_n$, var $\underline{k}_n$ en $\mathrm{cov}(\underline{k}_n,\underline{\ell}_n)$. (3)

   d) Geef een benadering voor $P(\underline{k}_{100} \leq 50)$. (3)

2. a) Zij $\underline{k}$ een stochastische grootheid met $P(\underline{k} \in \{0,1,2,..\}) = 1$ en met $E\underline{k} < \infty$.

   Bewijs dat $E\underline{k} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\underline{k} > k)$. (2)

   Op de tijdstippen $\underline{x}_1$, $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$, $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3,\ldots$ gebeuren ongelukken (telkens één). Hierbij zijn $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ onderling onafhankelijke positieve stochastische grootheden met dezelfde verdelingsfunctie. Voor $k = 1,2,\ldots$ geven we de verdelingsfunctie van $\underline{x}_1 +\ldots+ \underline{x}_k$ aan met F_k. Als F_k een dichtheid heeft, dan geven we deze aan met f_k. Het aantal ongelukken dat gebeurt in het interval $(0,x]$ wordt aangegeven met $\underline{k}(x)$.

   b) Druk $E\underline{k}(x)$ uit in de F_k's. (3)

   $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ zijn gamma-verdeeld met parameters λ en 2, d.w.z. F_1 heeft een kansdichtheid f_1 gegeven door

$$f_1(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \qquad (x > 0).$$

   c) Wat is $f_k(x)$? (Aanwijzing: als $\underline{x}$ een gammaverdeling heeft met parameters λ en r dan is $\varphi_{\underline{x}}(t) = \lambda^r/(\lambda - it)^r$.) (2)

   d) Bereken $E\underline{k}(x)$. (3)

3. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft de volgende kansverdeling:

$$P(\underline{x} = -1) = P(\underline{x} = 1) = p/2, \quad P(\underline{x} = 0) = 1 - p \qquad (0 \leq p \leq 1).$$

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van $\underline{x}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een realisatie daarvan. Het aantal nullen in de steekproef (resp. de realisatie) geven we aan met $\underline{k}$ (resp. k), het aantal enen met $\underline{\ell}$ (resp. ℓ).

a) Bereken de meest aannemelijke schatter voor p. (3)

b) Is $\underline{k}$ voldoende voor p ? (2)

c) Is $\underline{\ell}$ voldoende voor p ? (Gebruik de definitie.) (2)

d) $(n - \underline{k})/n$ en $(2\underline{\ell})/n$ zijn zuivere schatters voor p. Welke van deze twee is de nauwkeurigste ? (3)

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is de realisatie van een aselecte steekproef $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ van $\underline{x}$ met

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

waarbij θ een onbekende parameter is met $\theta > 0$.

a) Bepaal een geschikte toetsingsgrootheid en de gedaante van het daarbij horende kritieke gebied bij gebruik van de gegeneraliseerde likelihood-ratio toets voor de hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen het alternatief $H_1 : \theta \neq \theta_0$. (5)

b) Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor θ met een betrouwbaarheid van 0,95 met behulp van de toetsingsgrootheid

$$\underline{t} = - \sum_{k=1}^{n} \log \underline{x}_k$$

en op grond van een steekproef van de grootte 1000, waarbij de waarde $t = 500$ werd gevonden. (Aanwijzing: gebruik een benadering!) (5)

Tentamen 24 januari 1977.

1. Men verdeelt n identieke (niet te onderscheiden) ballen over N cellen (genummerd 1,2,...,N); hierbij is meer dan één bal per cel toegestaan.

   a) Op hoeveel manieren kunnen de ballen over de cellen worden verdeeld? (Er wordt geen bewijs gevraagd.)

   b) Hoe groot is het aantal manieren om de ballen te verdelen onder de restrictie dat geen der cellen leeg mag blijven? ($n \geq N$)

   Men beschouwt alle verdelingen (zonder de restrictie onder b)) als even waarschijnlijk.

   c) Wat is de kans op precies k lege cellen? ($n \geq N - k$)
   d) Wat is de kans dat cel 1 leeg blijft?
   e) Bereken de verwachting van het aantal lege cellen (gebruik c) of d)).

2. $\underline{x}$ is een stochastische grootheid met verdelingsfunctie F en kansdichtheid f. Verder is $P(\underline{x} > 0) = 1$.

   a) Bewijs dat $E\underline{x} = \int_0^\infty \{1 - F(x)\}dx$.

   $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden met dezelfde verdeling als $\underline{x}$. Zij $\underline{M}_n = \max(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ en $\underline{m}_n = \min(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$.
   b) Bewijs dat $E\underline{M}_n$ dan en slechts dan eindig is als $E\underline{x}$ eindig is.
   c) Zij $f(x) = e^{-x}$ $(x > 0)$. Bereken $E\underline{M}_n$ en geef de getalwaarde van $E\underline{M}_{11}$ in drie decimalen.
   d) Geef een voorbeeld van een verdelingsfunctie F met $E\underline{x} = \infty$ en $E\underline{m}_n < \infty$.

3. $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \ldots, \underline{m}_n$ vormen een aselecte steekproef uit een Poisson-verdeling met onbekende verwachting μ. Een realisatie van de steekproef geven we aan met $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

   a) Bereken de meest aannemelijke schatter $\underline{\hat{\mu}}$ voor μ.
   b) Bereken $E\underline{\hat{\mu}}$ en var $\underline{\hat{\mu}}$ ($E\underline{m}_1$ en var $\underline{m}_1$ worden bekend verondersteld).
   c) Bereken $P(\underline{m}_1 = m_1, \underline{m}_2 = m_2, \ldots, \underline{m}_n = m_n \mid \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \ldots + \underline{m}_n = m)$.
   d) Is $\underline{\hat{\mu}}$ voldoende voor μ?
   e) Men doet 225 waarnemingen (d.w.z. $n = 225$) en vindt $\hat{\mu} = 4{,}00$. Geef een (benaderd) tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor μ met betrouwbaarheid 0,9544 en toets de hypothese $\mu = 4{,}50$.

Tentamen 31 maart 1977.

1. a. Geef de definitie van onafhankelijkheid van drie gebeurtenissen: A, B en C.

   A, B en C zijn onafhankelijke gebeurtenissen met $P(A) = a$, $P(B) = b$ en $P(C) = c$.

   b. Bewijs dat A^*, B^* en C^* onafhankelijk zijn.

   c. Bereken $P(A\,B\,C \mid A \cup B \cup C)$.

2. $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $E\,\underline{x} = 0$ en $\operatorname{var}\,\underline{x} = 1$. De grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk met dezelfde verdeling als $\underline{x}$.

   a. Bewijs dat $E\,\underline{x}^4 = 3$.

   b. Bereken $\operatorname{var}(\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \ldots + \underline{x}_n^2)$.

   c. Zij $n = 100$. Geef een benadering voor $P(75 < \underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \ldots + \underline{x}_{100}^2 < 125)$ met behulp van de normale verdeling.

   d. Geef een ondergrens voor de kans onder c. met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev.

3. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\,\underline{x} = E\,\underline{y} = 1$. Zij $\underline{u} = \max(\underline{x},\underline{y})$ en $\underline{v} = \min(\underline{x},\underline{y})$.

   a. Bereken $f_{\underline{u}}(u)$ voor $u > 0$ en $f_{\underline{v}}(v)$ voor $v > 0$.

   b. Bereken $\varphi_{\underline{u}}(t)$.

   c. Bereken $E\,\underline{u}^k \quad (k = 1,2,\ldots)$.

   d. Bereken $\operatorname{cov}(\underline{u},\underline{v})$.

Tentamen 18 juni 1977.

1. Het interval (0,1) wordt in twee stukken verdeeld door een willekeurig in dit interval gekozen punt: de coördinaat $\underline{x}$ van dit punt is homogeen verdeeld op (0,1). De lengte van het grootste stuk geven we aan met $\underline{u}$, die van het kleinste stuk met $\underline{v}$.

   a) Wat zijn de kansdichtheden van $\underline{u}$ en van $\underline{v}$?

   b) Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(\underline{u},\underline{v})$.

   c) Bereken $P(\underline{u} \geq 3/4 \mid \underline{x} \geq 1/2)$.

   d) Zijn $\underline{u}$ en $\underline{x}$ onafhankelijk ? (Motivering vereist)

2. $\underline{k}$ en $\underline{m}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden, die alleen de waarden 0,1,2,... kunnnen aannemen. We schrijven $P(\underline{k} = k) = p_k$, $P(\underline{m} = m) = q_m$ en $P(\underline{k} + \underline{m} = n) = r_n$. Zij verder

$$P(z) = \sum_0^\infty p_k z^k \ , \quad Q(z) = \sum_0^\infty q_m z^m \quad \text{en} \quad R(z) = \sum_0^\infty r_n z^n \quad \text{voor } |z| \leq 1 \ .$$

   a) Zij $E\underline{k}^2 < \infty$. Druk $E\underline{k}$ en var $\underline{k}$ uit in P.

   b) Zij $Q(z) = \frac{1-p}{1-pz}$ $(0 < p < 1)$. Bereken q_m $(m = 0,1,\ldots)$.

   c) Druk R uit in P en Q.

   d) Zij $\underline{\ell} = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \ldots + \underline{k}_{\underline{m}}$ (met $\underline{\ell} = 0$ als $\underline{m} = 0$), waarbij $\underline{m},\underline{k}_1,\underline{k}_2,\ldots$ onafhankelijk zijn en $\underline{k}_1,\underline{k}_2,\ldots$ dezelfde verdeling hebben als $\underline{k}$. Zij verder $s_\ell = P(\underline{\ell} = \ell)$ en

$$S(z) = \sum_0^\infty s_\ell z^\ell .$$

   Druk S uit in P en Q.

3. $\underline{k}$ is een realisatie van een binomiaal verdeelde grootheid $\underline{k}$ met $p = \frac{1}{2}$ en n *onbekend* $(n \in \{0,1,2,\ldots\})$.

   a) Laat zien dat 2k en 2k - 1 meest aannemelijke schattingen zijn voor n.

   b_1) Bewijs dat de verzameling kansverdelingen $\{P(\underline{k} = k;n);\ n = 0,1,\ldots\}$ volledig is.

   b_2) Bewijs dat $2\underline{k}$ de nauwkeurigste zuivere schatter is voor n. Hoe groot is de onnauwkeurigheid van deze schatter?

   c) Zij ℓ één waarneming van een binomiaal verdeelde grootheid $\underline{\ell}$ met onbekende n en p. Wat is een meest aannemelijke schatting voor (n,p) ?

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is de realisatie van een aselecte steekproef uit een homogene verdeling op $[0,\theta]$ met $\theta > 0$.

   a) Wat is het kritieke gebied behorende bij de (gegeneraliseerde) likelihood-ratio-toets voor de hypothese $H_0 : \theta = 1$ tegen het alternatief $H_1 : \theta \neq 1$ met onbetrouwbaarheid α ?

   b) Zij $n = 10$ en zij $(x_1;\ldots;x_{10}) = (0,73;\ 0,45;\ 0,17;\ 0,57;\ 0,91;\ 0,63;\ 0,80;\ 0,13;\ 0,29;\ 0,87)$. Toets H_0 tegen H_1 met $\alpha = (2/3)^{10}$.

   c) Bereken het onderscheidingsvermogen van deze toets voor $\theta = 1,1$ in twee cijfers nauwkeurig.

Tentamen 20 januari 1978.

1. We doen n onafhankelijke trekkingen uit de verzameling $\{0,1,\sqrt{2}\}$; bij iedere trekking heeft elk element kans 1/3 om getrokken te worden. Het resultaat van de k-de trekking geven we aan met $\underline{y}_k$ en we definiëren $\underline{x}_n = \sum_1^n \underline{y}_k$.
   a. Hoeveel (verschillende) waarden kan $\underline{x}_n$ aannemen?
   b. Bereken E $\underline{x}_n$ en var $\underline{x}_n$.

   We trekken op dezelfde manier uit de verzameling $\{0,1,2\}$ en geven de korresponderende grootheden aan met $\underline{y}_k'$ en $\underline{x}_n'$.
   c. Hoeveel waarden kan $\underline{x}_n'$ aannemen?
   d. Bereken $P(\underline{x}_{10}' = 5)$.

2. De grootheid $\underline{n}_t$ is Poisson-verdeeld met E $\underline{n}_t$ = t en $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met E $\underline{x}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots)$.
   a. Wat is het verband tussen de verdelingsfuncties van $\underline{n}_t$ en $\sum_1^n \underline{x}_k$?
   b. Zoals bekend, is $\sum_1^n \underline{x}_k$ voor $n \to \infty$ asymptotisch normaal verdeeld. Geef een formule voor deze limietrelatie.
   c. Gebruik het verband onder a. en de relatie onder b. om te bewijzen dat $\underline{n}_t$ voor $t \to \infty$ asymptotisch normaal verdeeld is. Aanwijzing: gebruik (zonder dit te bewijzen) het feit dat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[t + x\sqrt{t}] + 1 - t}{\sqrt{[t + x\sqrt{t}] + 1}} = x,$$

   waarbij [a] de entier van a voorstelt.

3. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van een stochastische grootheid $\underline{x}$ die normaal verdeeld is met E $\underline{x}$ = 0 en var $\underline{x} = \theta$.
   a. Wat is de nauwkeurigste zuivere schatter voor θ van de vorm $\sum_1^n a_j \underline{x}_j^2$?
   b. Is de verzameling verdelingsfuncties $\{F_{\underline{x}}(x;\theta) \mid \theta > 0\}$ volledig?
   c. Bestaat er een zuivere schatter voor θ die een kleinere variantie heeft dan de onder a. gevonden schatter?

4. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van een stochastische grootheid $\underline{x}$ die exponentieel verdeeld is op (θ, ∞), d.w.z.

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & (x > \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases} \qquad (\lambda > 0;\ \theta \in \mathbb{R}).$$

a. Bepaal de meest aannemelijke schatter $(\hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{\lambda}})$ voor het paar (θ, λ).

b. Is $\hat{\underline{\theta}}$ zuiver voor θ?

c. Veronderstel λ bekend en gelijk aan 1. Bepaal het kritieke gebied behorende bij de (gegeneraliseerde) likelihood-ratio toets van de hypothese H_0: $\theta = 0$ tegen H_1: $\theta \neq 0$. Neem $n = 100$ en $\alpha = e^{-4}$.

Tentamen 5 april 1978.

1. Men doet n onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen; het totaal aantal ogen wordt aangegeven met $\underline{k}_n$ $(n = 1,2,\ldots)$.

   a. Bereken $P(\underline{k}_n > n)$.

   b. Bereken $P(\underline{k}_n = n + 1)$.

   c. Bereken $P(\underline{k}_n = n + 3)$.

   d. Geef een benadering voor $P(\underline{k}_{144} \leq 475)$.

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden die normaal verdeeld zijn met $E\underline{x} = E\underline{y} = 0$ en var $\underline{x}$ = var $\underline{y}$ = 1.

   a. Bereken $F_{\underline{u}}(u)$ en $f_{\underline{u}}(u)$ voor $u \in \mathbb{R}$, waarbij $\underline{u} = \underline{x}^2 + \underline{y}^2$.

   b. Bewijs dat $f_{\underline{x},\underline{x}+\underline{y}}(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(2u^2-2uv+v^2)}$ $\qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$.

   (Aanwijzing: gebruik transformatieformule).

   c. Bereken $f_{\underline{x}+\underline{y}}(v|\underline{x} = u)$ en bereken $E(\underline{x} + \underline{y}|\underline{x} = 1)$.

3. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ zijn onderling onafhankelijk met $E\underline{x}_j = 1$ en var $\underline{x}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots)$.
We definiëren

$$\underline{y}_n = \sum_{j=1}^{n} \underline{x}_j \ .$$

   a. Bereken $\lim_{n\to\infty} P(\underline{y}_n > n + \sqrt{n})$.

   b. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} P(\underline{y}_n \geq n + \sqrt{n} \log n) = 0$.
   (Aanwijzing: gebruik de ongelijkheid van Chebyshev).

Laat speciaal $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ exponentieel verdeeld zijn met $E\underline{x}_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots)$.

   c. Bereken de karakteristieke functie $\varphi_{\underline{x}_1}(t)$. Wat is nu $\varphi_{\underline{y}_n}(t)$?

   d. De grootheid $\underline{y}'_n$ is onafhankelijk van $\underline{y}_n$ en heeft dezelfde verdeling als $\underline{y}_n$. Laat (met behulp van karakteristieke functies) zien dat de grootheid $\underline{z}_n := (\underline{y}_n - \underline{y}'_n)/\sqrt{n}$ asymptotisch normaal verdeeld is met verwachting nul en variantie 2.

Tentamen 8 juni 1978.

1. $(\underline{x},\underline{y})$ is een stochastische vector waarvoor geldt

$$P((\underline{x},\underline{y}) = (j,k)) = \tfrac{1}{4} \qquad (j = \pm 1,\ k = \pm 1)\ .$$

Een deeltje beschrijft een "pad" over het rooster $\mathbb{Z}^2$ van $\mathbb{R}^2$. Hierbij wordt de positie op tijdstip n van het deeltje gegeven door $(\underline{u}_n,\underline{v}_n)$ met $\underline{u}_0 = \underline{v}_0 = 0$, $\underline{u}_n = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$ en $\underline{v}_n = \underline{y}_1 + \ldots + \underline{y}_n$ $(n = 1,2,\ldots)$, waarbij de n stappen $(\underline{x}_1,\underline{y}_1),\ldots,(\underline{x}_n,\underline{y}_n)$ onafhankelijke stochastische vectoren zijn met dezelfde verdeling als $(\underline{x},\underline{y})$.

a) Bewijs dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn en dat $\underline{x}_1,\underline{y}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n,\underline{y}_n$ onafhankelijk zijn.

b) Bereken $E\underline{u}_n$ en var $\underline{u}_n$. Zij $\underline{r}_n = (\underline{u}_n^2 + \underline{v}_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Bewijs dat $E\underline{r}_n \leq \sqrt{2n}$.

c) Hoeveel paden zijn er van precies n stappen?

d) Bereken $P((\underline{u}_n,\underline{v}_n) = (0,0)) \qquad (n = 1,2,\ldots)$.

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x} = E\underline{y} = \lambda^{-1}$. Zij $\underline{v} = \underline{x} + \underline{y}$.

a) Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(\underline{x},\underline{v})$ van $\underline{x}$ en $\underline{v}$.

b) Bereken de simultane kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{v}}$ van $\underline{x}$ en $\underline{v}$ en $P(\underline{x} \leq x \mid \underline{v} = 1)$.

c) Het is bekend dat voor exponentieel verdeelde $\underline{x}$ geldt $P(\underline{x} > x + a \mid \underline{x} > a) = P(\underline{x} > x) \quad (x > 0,\ a > 0)$. Geef een voorbeeld van een stochastische grootheid $\underline{z}$, die maar twee waarden kan aannemen, waarvoor geldt $P(\underline{z} > 3 \mid \underline{z} > 1) = 10P(\underline{z} > 2)$.

3. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van een gamma-verdeelde $\underline{x}$:

$$f_{\underline{x}}(x) = a^{-2}xe^{-x/a} \qquad (a > 0;\ x > 0)\ .$$

a) Bereken de meest aannemelijke schatter $\underline{\hat{a}}$ voor a.

b) Is deze schatter voldoende voor a?

c) Wat is de kansdichtheid van $\underline{t} := 2n\underline{\hat{a}}$? (geen rekenwerk; wel een korte argumentatie). Laat zien dat $\underline{\hat{a}}$ zuiver is voor a.

d) Bewijs dat iedere andere zuivere schatter voor a een grotere variantie heeft dan $\underline{\hat{a}}$.

4\. a) Wat is het lemma van Neyman en Pearson? (alleen formulering, geen bewijs).

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van $\underline{x}$ met $P(\underline{x} = 1) = 1 - P(\underline{x} = 0) = p$.

b) Laat zien dat de toets met kritiek gebied R van de vorm

$$R = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_1^n x_j \geq c(\alpha)\}$$

uniform meest onderscheidend is voor $H_0 : p = p_0$ tegen $H_1 : p > p_0$.

c) Bij een steekproef van 400 stuks vindt men $\Sigma_1^{400}\ x_j = 200$. Construeer een (eenzijdig) betrouwbaarheidsinterval voor p gebaseerd op de toets onder b) met betrouwbaarheid 0,9772 (benaderen; geen continuïteitscorrectie).

d) Toets (met behulp van c)) de hypothese $p = 0{,}40$ met onbetrouwbaarheid 0,0228.

Tentamen 19 januari 1979

-.-

1. Bij een tentamen zijn drie uitslagen mogelijk: voldoende, herkansing en onvoldoende; deze uitslagen worden weergegeven met respectievelijk (1,0), (0,1) en (0,0). n kandidaten, genummerd 1,2,...,n, doen onafhankelijk van elkaar dit tentamen. De uitslag is voor kandidaat i een stochastische vector $(\underline{j}_i,\underline{k}_i)$ met

$$P((\underline{j}_i,\underline{k}_i) = (1,0)) = x, \quad P((\underline{j}_i,\underline{k}_i) = (0,1)) = y,$$
$$P((\underline{j}_i,\underline{k}_i) = (0,0)) = 1 - x - y \;,$$

voor $i = 1,2,\dots,n$ en met $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Het totaal aantal voldoenden geven we aan met $\underline{u}$, het aantal herkansingen met $\underline{v}$.

a) Bereken $P(\underline{u} = \ell, \underline{v} = m)$ $(\ell = 0,1,2,\dots,n;\ m = 0,1,2,\dots,n)$.

b) Bereken de marginale verdelingen van $\underline{u}$ en $\underline{v}$.

c) Bereken $\rho(\underline{j}_1,\underline{k}_1)$.

d) Bereken $\rho(\underline{u},\underline{v})$ (aanwijzing: gebruik c).

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onderling onafhankelijk en normaal verdeeld met $E\underline{x} = E\underline{y} = 0$ en var $\underline{x}$ = var $\underline{y}$ = 1.

a) Bereken $E\underline{x}^4$.

b) Zij $\underline{z} = \underline{x}\underline{y}$. Bewijs dat $\underline{z}$ *niet* normaal verdeeld is (zonder de kansverdeling van $\underline{z}$ te berekenen).

c) Bereken de kansdichtheid van $(\underline{x} + \underline{y})^2$.

d) Bereken $E(\underline{x} \mid \underline{x} > 0)$.

3. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots,\underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk met verdelingsfunctie $F(x;\theta)$, gegeven door

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^\theta & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad (\theta > 0) \;.$$

a) Bereken de meest aannemelijke schatter $\hat{\underline{\theta}}_n$ voor θ.

b) Is deze schatter voldoende?

c) Laat zien dat $1/\hat{\underline{\theta}}_n$ zuiver is en asymptotisch raak met betrekking tot $1/\theta$.

-.-

d) Bepaal het kritieke gebied behorende bij de likelihood-ratio toets voor de hypothese H_0: $\theta = 1$ tegen het alternatief H_1: $\theta \neq 1$.
<u>Aanwijzing</u>: bepaal de verzameling van y waarden met $y := -\log(x_1 \ldots x_n)$, waarvoor $(x_1,\ldots,x_n)$ in het kritieke gebied ligt (de waarde van α wordt hier niet gespecificeerd).

e) Toets de hypothese H_0: $\theta = 1$ tegen H_1: $\theta \neq 1$, als nog gegeven is dat $n = 900$, $-\log(x_1 \ldots x_n) = 954$ (waargenomen realisatie) en $\alpha = 0{,}05$.
<u>Aanwijzingen</u>: U hoeft niet de toets onder a te gebruiken; gebruik een benadering.

-.-

Tentamen mei 1979

-.-

1. Men gooit met een dobbelsteen tot er voor het eerst een zes boven komt. Zij $\underline{M}$ het totaal aantal worpen en zij $\underline{x}_j$ het aantal ogen dat gegooid wordt bij de j-de worp ($j = 1,2,\ldots$).

   a) Wat is $p_m := P(\underline{M} = m)$? Bereken $E\underline{M}$.

   b) Bepaal de voorwaardelijke kansverdeling van $\underline{x}_j$ onder de voorwaarde dat $\underline{M} = m$ en bereken $E(\underline{x}_j \mid \underline{M} = m)$ voor $j = 1,2,\ldots,m-1$.

   c) Bereken $E(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_{\underline{M}})$. Aanwijzing: $P(\underline{x}_{\underline{M}} = 6) = 1$.

2. a) $\underline{y}$ is exponentieel verdeeld met $E\underline{y} = 1$. Bereken de karakteristieke functie $\varphi_{\underline{y}}(t)$.

   b) Zij $\underline{x}$ een stochastische grootheid met $E\underline{x} = 1$ en karakteristieke functie $\varphi_{\underline{x}}$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ is $\underline{z}_n$ een stochastische grootheid met karakteristieke functie $\varphi_{\underline{z}_n}$ gegeven door

$$\varphi_{\underline{z}_n}(t) = \frac{\varphi_{\underline{x}}(t)}{n - (n-1)\varphi_{\underline{x}}(t)} .$$

   Laat zien dat $\underline{y}_n := \underline{z}_n/n \xrightarrow{d} \underline{y}$ (zie onderdeel a) voor $n \to \infty$, d.w.z. dat $\lim_{n\to\infty} F_{\underline{y}_n}(y) = 1 - e^{-y}$ $(y \geq 0)$.
   Aanwijzing: gebruik $\varphi_{\underline{x}}(t) = 1 + itE\underline{x} + o(t)$ $(t \to 0)$.

3. a) Zij $\underline{x}$ Poisson-verdeeld met parameter μ. Bereken $E\underline{x}$, $E\underline{x}^2$ en var $\underline{x}$.

   b) Laat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn en Poisson-verdeeld met parameters μ resp. ν. Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(\underline{x},\underline{x}+\underline{y})$.

   c) Zij $\underline{n}_t$ een *Poisson-proces met intensiteit* λ. Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(\underline{n}_t,\underline{n}_{t+h})$ $(t > 0,\ h \geq 0)$.

Tentamen 8 juni 1979

---

1. $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ hebben een simultane kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{y},\underline{z}}$. We definiëren $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ door

$$\underline{u} := \underline{x},\ \underline{v} := \underline{y},\ \underline{w} := \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}\ .$$

a) Bereken de simultane kansdichtheid $f_{\underline{u},\underline{v},\underline{w}}$ van $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$.

b) Laat, meer speciaal, $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$.
Bereken de simultane kansdichtheid van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onder de voorwaarde dat $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z} = w$.

c) Laat $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$ onafhankelijk zijn elk met verdelingsfunctie F en laat $\underline{m}_1$, $\underline{m}_2$ en $\underline{m}_3$ resp. de kleinste, de middelste en de grootste zijn van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$. Bereken de marginale verdelingsfuncties van $\underline{m}_1$, $\underline{m}_2$ en $\underline{m}_3$.

2. a) Bewijs de volgende variant van de ongelijkheid van Chebyshev: Als $h: [0,\infty) \to (0,\infty)$ niet dalend is en als $\underline{x}$ een stochastische grootheid is met $E(h(|\underline{x}|)) < \infty$, dan geldt voor $c \geq 0$ dat

$$P(|\underline{x}| \geq c) \leq \frac{1}{h(c)} E(h(|\underline{x}|))\ .$$

Zij $\underline{x}$ normaal verdeeld met $E(\underline{x}) = 0$ en $\mathrm{var}(\underline{x}) = 1$.

b) Bewijs dat $P(|\underline{x}| \geq c) \leq \sqrt{2}e^{-c^2/4}$ voor $c \geq 0$.

c) Laat $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ o.o. zijn en $N(0,1)$-verdeeld.
Bewijs dat

$$\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n}{\sqrt{n \log n}} \overset{P}{\to} 0\ .$$

d) Bewijs (zonder van a) gebruik te maken) dat

$$P(|\underline{x}| \geq c) \leq \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-c^2/2} \qquad \text{voor } c > 0\ .$$

---

3. Men doet n onafhankelijke experimenten, elk met kans p op succes. Het totaal aantal successen geven we aan met $\underline{k}$, een realisatie daarvan met k.

   a) Construeer het kritieke gebied behorende bij de meest onderscheidende toets voor de hypothese H_0: $p = 0,30$ tegen het alternatief H_1: $p = 0,20$; kies $n = 400$ en $\alpha = 0,0456$.

   b) Bereken het onderscheidingsvermogen van de toets onder a).

   c) Zij behalve p ook n onbekend; dat wil zeggen: men beschikt over een waarneming uit een binomiale verdeling met (onbekende) parameter (n,p). Men neemt waar $k = 100$. Welke van beide hypothesen ($n = 200$, $p = \frac{1}{2}$) en ($n = 1000$, $p = \frac{1}{10}$) is het meest aannemelijk?

4. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ is de realisatie van een aselecte steekproef van een geometrische verdeelde grootheid $\underline{k}$ met onbekende parameter p, d.w.z.

(1) $$P(\underline{k} = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1,2,\ldots .$$

   a) Bereken de meest aannemelijke schatter $\underline{\hat{p}}$ voor p en laat zien dat deze gelijk is aan de momentenschatter.

   b) Is $\underline{\hat{p}}$ voldoende?

   c) Bewijs dat $\frac{1}{\underline{\hat{p}}}$ zuiver is voor $\frac{1}{p}$ en bewijs met behulp hiervan en van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz dat

$$E(\underline{\hat{p}}) > p .$$

   d) Is de verzameling kansverdelingen van de vorm (1) met $p \in (0,1)$ volledig?

ANTWOORDLIJST TENTAMENS

21 januari 1974

1a) $\binom{n}{k}$.

b) $\binom{n+k-1}{k}$.

c) $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

d) n^k

e) $$\frac{\binom{n+k-3}{k} + 2\binom{n+k-4}{k-1} + \binom{n+k-5}{k-2}}{\binom{n+k-1}{k}}$$.

2a) $\alpha = -1$.

b) $f_{\underline{u},\underline{v}}(u,v) = \dfrac{e^{-u}}{|1-\alpha|}$, $\alpha \neq 1$.

c) voor geen enkele waarde van α.

d) $\alpha = -1$; $\dfrac{1}{2\pi} \exp\{-\dfrac{(\alpha^2+1)u^2 - 2(\alpha+1)uv + 2v^2}{2(1-\alpha)^2}\}$, $\alpha \neq 1$; $\alpha = -1$.

3a) Kritieke gebied: $\{t \leq c_1 \vee t \geq c_2\}$ met $t = -\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ en

$P(\{\underline{t} \leq c_1 \vee \underline{t} \geq c_2\}) = \alpha$.

b) $f_{\underline{t}}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n)} \theta^n t^{n-1} e^{-\theta t}$, $t \geq 0$.

$f_{\underline{z}}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(n)} \theta^n . z^{\theta-1}(-\log z)^{n-1}$, $z > 0$.

8 april 1974

1a) $\dfrac{35}{6^5}$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{1}{5}$.

d) $E(\underline{y}) = 3, \quad \sigma^2(\underline{y}) = \frac{49}{2}$.

2a) $\frac{1}{4}$.

b) $E(\underline{x}) = 0, \ \sigma^2(\underline{x}) = \frac{1}{4}$; $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$.

c) nee.

3a) $\sigma^2(\underline{x}_2) = 4$.

b) $1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$.

c) 0,8944.

<u>10 juni 1974</u>

1a) $n\ e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$.

b) $3e^{-y}(1 - e^{-y})^2$.

c) $\frac{11}{6}$

d) $e^{-e^{-z}}$.

2b) $\underline{\hat{\theta}}_n = n\ \underline{x}_{(1)}$.

c) Ja.

d) Nee.

e) Nee.

3c) $0 \le p < 0{,}485$

H_0 verwerpen.

<u>20 januari 1975</u>

1a) $P(\underline{x}_1 = 0) = \frac{2}{3}$; $P(\underline{x}_1 = 1) = \frac{1}{3}$.

c) $$x_3(u) = \begin{cases} 1 \text{ als } u \in \bigcup_{i=0}^{8} \left(\frac{3i}{27}, \frac{3i+1}{27}\right) \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

d) $\frac{2}{27}$.

e) 0,240.

2a) $$f_{\underline{x}}(z) = \begin{cases} \sqrt{2} - |x| \ , & |x| \le \frac{1}{2}\sqrt{2}. \\ 0 \ , & \text{elders} \end{cases}$$

b) $$f_{\underline{x}+y}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \ , & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \le z \le \frac{1}{2}\sqrt{2} \ . \\ 0 \ , & \text{elders} \end{cases}$$

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{1}{24}$

3a) $\hat{\underline{\lambda}}_1 = \underline{x}_{(n+1)}$.

b) $\hat{\underline{\lambda}}_2 = \underline{m}_1 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \underline{x}_i$.

4b) $0{,}50 < p < 0{,}69$.

<u>10 april 1975</u>

1a) $\sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} e^{-\lambda l}(1 - e^{-\lambda})^{n-l}$

0,2030.

b) $\sum_{l=j}^{n} \binom{n}{l}(1 - e^{-\lambda x})^{l} e^{-\lambda x(n-l)}$.

d) $\frac{n}{\lambda} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{n - l}$.

2a) $\frac{1}{2}\alpha, \quad 0 \le \alpha < 1$

$1 - \frac{1}{2\alpha} \quad , \alpha \ge 1.$

b) $x < 0: P(\underline{x} \le x) = 0$

$0 \le x < \frac{1}{2}: P(\underline{x} \le x) = \frac{1}{2}\frac{x}{1-x}$

$\frac{1}{2} \le x < 1: P(\underline{x} \le x) = \frac{3x-1}{2x}$

$x \ge 1: P(\underline{x} \le x) = 1.$

c) $$P(\underline{x} \le x, \underline{y} \le y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1-y}{y}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le y \le 1, x + y \ge \\ \frac{3x-1}{2x} - \frac{1-y}{2y}, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \frac{1}{2} \le y \le 1 \\ \frac{3x-1}{2x} - \frac{3y-1}{2y}, & \frac{1}{2} \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{2}, x + y \ge 1. \end{cases}$$

d) $-1.$

3a) $\frac{1}{(1 - it)(1 - 2it)(1 - 3it)}$.

b) 6, 14, 50.

c) $\frac{1}{2}e^{-x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}x}$.

<u>7 juni 1975</u>

1a) $f_{\frac{\underline{w}}{1+\underline{w}}}(x) = f_{\underline{w}}(\frac{x}{1-x}) \cdot \frac{x}{(1-x)^2}, \quad 0 < x < 1.$

b) $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \quad \frac{x^{k-1}}{(x+1)^n}, \quad x > 0.$

c) $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\ (n-k)} \quad x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}, \quad 0 < x < 1.$

2a) i) $P(\underline{k} = k) = \binom{100}{k}(\frac{100}{N})^k(1 - \frac{100}{N})^{100-k}.$

ii) $E(\underline{k}) = \frac{10^4}{N}, \ E(\underline{k}(\underline{k}-1)) = \frac{99 \cdot 10^6}{N^2}, \quad \mathrm{var}(\underline{k}) = \frac{10^4}{N}(1 - \frac{100}{N}).$

b) i) $P(\underline{k} = k) = \frac{\binom{100}{k}\binom{N-100}{100-k}}{\binom{N}{100}}$

ii) $E(\underline{k}) = \frac{10^4}{N}, \ E(\underline{k}(\underline{k}-1)) = \frac{10^4 \cdot 99^2}{N(N-1)}, \quad \mathrm{var}\ (\underline{k}) = \frac{10^4}{N}\ \frac{(N-100)^2}{N(N-1)}$

3a) $\min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$.

b) i) nee.
ii) ja.
iii) ja.

4a) $\{k \le 105 \vee k \ge 145\}$.

b) (328, 688).

<u>19 januari 1976</u>

1a) $\frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^k.$

b) $\binom{n+k-1}{n-1}(\frac{5}{6})^k(\frac{1}{6})^n.$

c) $E\underline{k}_1 = 5, \quad \mathrm{var}(\underline{k}_1) = 30.$

d) 0,9772.

2a) $f_{\underline{z}}(z) = \frac{1}{2} e^{-|z|}$

b) $\varphi_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{1 - it}$, $\varphi_{-\underline{y}}(t) = \frac{1}{1 + it}$, $\varphi_{\underline{z}}(t) = \frac{1}{1 + t^2}$.

c) $\varphi_{\underline{w}_n}(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^n}$.

d) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3d) $\underline{t} = 0$.

4b) $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , |\bar{x}| \le 1 \\ e^{-\frac{n}{2}(|\bar{x}| - 1)^2} & , |\bar{x}| \ge 1 \end{cases}$

c) Kritiek gebied: $\{\bar{x} \ge 1{,}233\} \cup \{\bar{x} \le -1{,}233\}$

<u>31 maart 1976</u>

1a) $P(z) = \frac{1 - p}{1 - pz}$, $|z| \le 1$.

b) $E\,\underline{k}_1 = \frac{p}{1 - p}$, $E(\underline{k}_1(\underline{k}_1 - 1)) = \frac{2p^2}{(1 - p)^2}$, $\operatorname{var}(\underline{k}_1) = \frac{p}{(1 - p)^2}$.

c) $\frac{n - 1}{n + N - 1}$.

2a) $f_{\underline{x}}(x) = f_{\underline{y}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) $\operatorname{var}(\underline{x} + \underline{y}) = 2(1 + \rho)$.

c) $\rho(\underline{x} + \underline{y}, \underline{y}) = \sqrt{\frac{\rho + 1}{2}}$.

d) $f_{\underline{x} + \underline{y} + 1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(1 + \rho)}} e^{-\frac{(x - 1)^2}{2(1 + \rho)}}$.

3a) $(1 - e^{-x})^n$, $x \ge 0$.

b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k - it}$.

c) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k - it}$.

<u>12 juni 1976</u>

1a) $P(\underline{k} = k) = \frac{6 - |k|}{36}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 5$.

b) $E\,\underline{k} = 0$, $\mathrm{var}\,\underline{k} = \frac{35}{6}$.

c) $E\,\underline{k}_n = n\,\frac{35}{6}$, $\mathrm{var}(\underline{k}_n) = -\mathrm{cov}(\underline{k}_n, \underline{1}_n) = \frac{35n}{6}$.

d) 0,98.

2b) $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x)$.

c) $f_k(x) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}\, e^{-\lambda x}$, $(x > 0)$.

d) $E\,\underline{k}(x) = \frac{\lambda x}{2} - \frac{(1 - e^{-2\lambda x})}{4}$.

3a) $\hat{\underline{p}} = 1 - \frac{\underline{k}}{n}$.

b) ja.

c) nee.

d) $\frac{n - \underline{k}}{n}$.

4a) $\underline{t} = -\log \prod_{i=1}^{n} \underline{x}_i$.

$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (\frac{\theta_0}{n})^n\, e^{-\theta_0 t}\, t^n\, e^{-n} \leq k(\alpha)\}$.

b) (1,876, 2,124).

24 januari 1977

1a) $\binom{N+n-1}{n}$.

b) $\binom{n-1}{N-1}$.

c) $\binom{N}{k}\dfrac{\binom{n-1}{N-k-1}}{\binom{N+n-1}{n}}$.

d) $\dfrac{N-1}{N+n-1}$.

e) $N\dfrac{N-1}{N+n-1}$.

2c) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, $E\,\underline{M}_{11} = 3{,}019$.

d) $F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, $x > 0$.

3a) $\hat{\underline{\mu}} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{m}_j$.

b) $E\,\hat{\underline{\mu}} = \mu$, var $\hat{\underline{\mu}} = \dfrac{\mu}{n}$.

c) 0, $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq m$

$\dfrac{m!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}\;\dfrac{1}{n^m}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$.

d) ja.

e) (3,742; 4,2757).

31 maart 1977

1c) $P(ABC\,|\,A\cup B\cup C) = \dfrac{abc}{a+b+c-ab-ac-bc+abc}$.

2b) 2n.

c) 0,9232.

d) 0,68.

3a) $f_{\underline{u}}(u) = 2e^{-u}(1 - e^{-u}), \quad u > 0.$

$f_{\underline{v}}(v) = 2e^{-2v} \qquad , \quad v > 0.$

b) $\dfrac{2}{(1 - it)(2 - it)}$.

c) $2k!\ (1 - (\frac{1}{2})^{k+1})$.

d) 0.

18 juni 1977

1a) $f_{\underline{u}}(u) = 2 \quad (\frac{1}{2} \le u \le 1)$

$f_{\underline{v}}(v) = 2 \quad (0 \le v \le \frac{1}{2})$.

b) $\rho(\underline{u},v) = -1$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) Nee.

2a) $E(\underline{k}) = P'(1), \quad var(\underline{k}) = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2$.

b) $q_m = (1 - p)p^m, \quad m = 0,1,2,\ldots$

c) $R = P \cdot Q$

d) $S = Q \circ P$.

3c) Voor $l = 0$: $(n,0)$
Voor $l > 0$: $(1,1)$

4a) $R = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le \sqrt[n]{\alpha} \vee \max(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 1\}$.

b) Niet verwerpen.

c) 0,62 .

20 januari 1978

1a) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

b) $E\,\underline{x}_n = \frac{n(1+\sqrt{2})}{3}$, var $\underline{x}_n = \frac{n(6-2\sqrt{2})}{9}$.

2a) $F_{\underline{n}_t}(n) = 1 - F_{\sum_{k=1}^{n+1}\underline{x}_k}(t)$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\underline{x}_k - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \le t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

3a) $\hat{\underline{\theta}}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_j^2$.

b) Nee.

c) Nee.

4a) $\hat{\underline{\lambda}} = [\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_j - \min(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)]^{-1}$, $\hat{\underline{\theta}} = \min(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$.

b) Nee.

c) $R = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid \min(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0$ of $\min(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0{,}04\}$.

5 april 1978

1a) $P(\underline{k}_n > n) = 1 - P(\underline{k}_n = n) = 1 - (\frac{1}{6})^n$.

b) $P(\underline{k}_n = n+1) = \binom{n}{1}(\frac{1}{6})^n$.

c) $P(\underline{k}_n = n+3) = \{\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\}(\frac{1}{6})^n$.

d) $P(\underline{k}_{144} \le 475) = 0{,}0764$.

2a) $F_{\underline{u}}(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \geq 0$

$f_{\underline{u}}(u) = ue^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \geq 0$.

c) $f_{\underline{x}+\underline{y}}(v \mid \underline{x} = u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}(u-v)^2}$.

$E(\underline{x} + \underline{y} \mid \underline{x} = 1) = \int_{-\infty}^{\infty} v \; f_{\underline{x}+\underline{y}}(v \mid \underline{x} = 1)dv = 1$

3a) 0,1587.

c) $\varphi_{\underline{x}_1}(t) = \frac{1}{1 - it}$, $\varphi_{\underline{y}_n}(t) = \frac{1}{(1 - it)^n}$.

<u>8 juni 1978</u>

1b) $E\underline{u}_n = 0$, var $\underline{u}_n = n$.

c) 4^n .

d) $P((\underline{u}_n,\underline{v}_n) = (0,0)) = \begin{cases} \binom{2m}{m}^2 \frac{1}{2^{4m}} & \text{voor } n = 2m \,. \\ 0 & \text{voor } n = 2m + 1. \end{cases}$

2a) $\rho(\underline{x},\underline{v}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $f_{\underline{x},\underline{v}}(x,v) = \lambda^2 \; e^{-\lambda v}$, $0 < x < v$.

$P(\underline{x} \leq x \mid \underline{v} = 1) = 1$, $0 < x < 1$.

c) $P(\underline{z} = 1) = 0{,}9$, $P(\underline{z} = 4) = 0{,}1$.

3a) $\underline{\hat{a}} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \underline{x}_j$.

b) Ja.

c) $f_{2n\underline{\hat{a}}}(z) = \frac{1}{\Gamma(2n)} \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} z^{2n-1} e^{-\frac{z}{a}}$, $z > 0$.

4a) zie diktaat.

c) $(0{,}45{,}1]$.

d) H_0 verwerpen.

19 januari 1979

1a) $P(\underline{u} = l, \underline{v} = m) = \binom{n}{l}\binom{n-l}{m} x^l y^m (1 - x - y)^{n-l-m}$, $l + m \le n$.

b) $P(\underline{u} = l) = \binom{n}{l} x^l (1 - x)^{n-l}$, $0 \le l \le n$.

$P(\underline{v} = l) = \binom{n}{l} x^l (1 - x)^{n-l}$, $0 \le l \le n$.

c) $\rho(\underline{j}_1, \underline{k}_1) = -\sqrt{\frac{xy}{(1 - x)(1 - y)}}$.

d) $\rho(\underline{u}, \underline{v}) = \rho(\underline{j}, \underline{k}_1)$.

2a) 3.

c) $f_{(\underline{x}+\underline{y})^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{v}{4}}$, $v > 0$.

d) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3a) $\underline{\hat{\theta}}_n = -\frac{n}{\log \prod_{i=1}^{n} \underline{x}_i}$.

b) Ja.

d) $R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid y^n e^{-y} \le c_n(\alpha)\}$ met $y = -\log \prod_{i=1}^{n} x_i$.

e) H_0 niet verwerpen.

2 mei 1979

1a) $P(\underline{M} = m) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}$, $E\,\underline{M} = 6$.

b) $P(\underline{x}_j = k \mid \underline{M} = m) = \frac{1}{5}$

$E(\underline{x}_j \mid \underline{M} = m) = 3$, $j = 1,2,\ldots,m-1;\ k = 1,2,3,4,5.$

c) $E(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_{\underline{M}}) = 21.$

2a) $\frac{1}{1 - it}$.

3a) $E\,\underline{x} = \mu,\ E\,\underline{x}^2 = \mu + \mu^2,\ \mathrm{var}(\underline{x}) = \mu.$

b) $\rho(\underline{x}\ ,\ \underline{x} + \underline{y}) = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + v}}$.

c) $\rho(\underline{n}_t,\ \underline{n}_{t+k}) = \sqrt{\frac{t}{t + k}}$.

8 juni 1979

1a) $f_{\underline{u},\underline{v},\underline{w}}(u,v,w) = f_{\underline{x},\underline{y},\underline{z}}(u,v,w - u - v).$

b) $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y \mid \underline{x} + \underline{y} + \underline{z} = w) = \frac{2}{w^2}$, $w \geq x + y,\quad x \geq 0,\ y \geq 0.$

c) $P(\underline{m}_1 \leq m_1) = 3F(m_1) - 3F^2(m_1) + F^3(m_1)$.

3a) $\{k \leq 104\}.$

b) 0,9989.

c) $n = 1000,\ P = \frac{1}{100}$.

4a) $\hat{\underline{p}} = \frac{1}{\bar{\underline{k}}}$.

b) Ja.

d) Ja.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op dinsdag 15 januari 1980, 9.00-12.00 uur.

-.-

1. In een vaas zitten 8 ballen waarvan 4 rode en 4 zwarte. Deze worden achtereenvolgens zonder teruglegging getrokken. Voordat deze trekkingen plaats vinden wordt een gok gedaan naar de volgorde van de kleur waarin de ballen getrokken worden. Bij deze gok wordt 4 maal rood en 4 maal zwart genoteerd. $\underline{x}$ geeft het aantal goed genoteerde gissingen aan.

   a) Bereken de kansverdeling van $\underline{x}$.

   b) Bereken de verwachting en de variantie van $\underline{x}$.

   c) Los de problemen van a) en b) ook op voor het geval dat de trekkingen met teruglegging plaats vinden.

2. Zij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ een rij onderling onafhankelijke Poisson-verdeelde stochasten met parameter μ, $\mu > 0$.

   a) Bepaal de kansverdeling van $\underline{y}_n := \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$.

   b) Bereken de karakteristieke functie van

   $$\underline{z}_n := \frac{\underline{y}_n - n\mu}{\sqrt{n\mu}}$$

   c) Bewijs hieruit dat $\lim_{n\to\infty} P(\underline{z}_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

3. De stochasten $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ zijn onderling onafhankelijk en uniform verdeeld op $[\theta_1, \theta_2], \theta_1 < \theta_2$.

   a) Bewijs dat de meest aannemelijke schatter $\underline{\hat{\theta}}_n$ van $\theta_2 - \theta_1$ op basis van de steekproef $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ gelijk is aan $\underline{M}_n - \underline{m}_n$ met $\underline{M}_n := \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ en $\underline{m}_n := \min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$.

   b) Is de schatter $\underline{\hat{\theta}}_n$ zuiver voor $\theta_2 - \theta_1$?

   c) Is de rij schatters $\underline{\hat{\theta}}_1, \underline{\hat{\theta}}_2, \ldots$ asymptotisch zuiver?

   d) Is de rij schatters $\underline{\hat{\theta}}_1, \underline{\hat{\theta}}_2, \ldots$ asymptotisch raak?

Zie blz. 2.

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek, 15 januari 1980.

-.-

4. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van een stochast $\underline{x}$ met kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) := \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0, \ \theta > 0 .$$

a) Bepaal de vorm van het uniform meest onderscheidend kritiek gebied voor het toetsingsprobleem

$$H_0 : \theta = \theta_0, \ H_1 : \theta > \theta_0$$

bij onbetrouwbaarheid α.

b) Laat zien dat de gegeneraliseerde likelihood-ratio toets voor het toetsingsprobleem

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \ H_1 : \theta > \theta_0$$

bij gelijke onbetrouwbaarheid α hetzelfde kritiek gebied oplevert als de toets onder a).

c) Zij nu $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 110$, $\alpha = 0{,}025$.

Bepaal de onder a) genoemde toets voor het toetsingsprobleem

$$H_0 : \theta = 1, \ H_1 : \theta > 1$$

bij onbetrouwbaarheid α en ga na of de nulhypothese verworpen moet worden.

-.-

Waardering:

Vraagstuk 1	a):	4 punten	Vraagstuk 3	a):	3 punten
	b):	2 "		b):	2 "
	c):	4 "		c):	1 "
				d):	4 "
2	a):	2 "	4	a):	3 "
	b):	3 "		b):	3 "
	c):	5 "		c):	4 "

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Proeftentamen Kansrekening en Statistiek op dinsdag 15 april 1980, 8.30-10.30 uur.

.-

1. Een vaas bevat N knikkers, M witte en N-M zwarte. Men trekt er aselect en zonder terugleggen $n \le N$ maal één knikker uit. Zij $\underline{x}_j$ het aantal witte knikkers getrokken bij de j-de trekking $(j = 1,2,\dots,n)$ en zij $\underline{k}$ het totaal aantal getrokken witte knikkers.

   a. Bereken $E\underline{x}_j$ en var $\underline{x}_j$.

   b. Bereken $E\underline{k}$.

   c. Bewijs dat $\operatorname{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j) = -\dfrac{(N-M)M}{N^2(N-1)} \quad (i \neq j)$.

   d. Bereken var $\underline{k}$.

2. $\underline{x}_1,\underline{y}_1,\underline{x}_2,\underline{y}_2,\dots,\underline{x}_n,\underline{y}_n$ zijn onderling onafhankelijk en homogeen verdeeld op (0,1).

   a. Bereken $E(\underline{x}_1-\underline{y}_1)^2$ en var $(\underline{x}_1-\underline{y}_1)^2$.

   b. Geef een benadering voor grote n van de verdelingsfunctie van

   $$\underline{d}_n := \{\sum_1^n (\underline{x}_j-\underline{y}_j)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

   c. Bereken (met behulp van b.) $P(\underline{d}_{100} \le 4)$.

3. Gegeven is $\varphi_{\underline{x}}(t) = \dfrac{1}{1-it} \cdot \dfrac{2}{2-it} \cdot \dfrac{3}{3-it}$.

   a. Bereken $f_{\underline{x}}(x)$ en $F_{\underline{x}}(x)$.

   b. Bereken $E\underline{x}^k \quad (k = 0,1,2,\dots)$.

   c. Bewijs dat $\underline{x}$ dezelfde verdeling heeft als $\max(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3)$, waarbij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3$ onafhankelijk zijn met $f_{\underline{x}_j}(x) = e^{-x} \quad (x > 0;\ j = 1,2,3)$.

.-

Normering:

1		2		3	
a	3	a	4	a	4
b	1	b	3	b	3
c	3	c	3	c	3
d	3				

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op dinsdag 13 januari 1981,
9.00 - 12.00 uur.

---

1. De stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{4n}$ zijn onderling onafhankelijk en homogeen verdeeld op $(0,1)$.
   Zij
   $$\underline{k}_n = \sum_{j=1}^{4n} 1_{(0,\frac{1}{4})}(\underline{x}_j),$$
   het aantal $\underline{x}$-en dat kleiner is dan $\frac{1}{4}$.
   a) Bereken $E\,\underline{k}_n$ en var $\underline{k}_n$.
   b) Geef twee (numerieke) benaderingen voor $P(\underline{k}_{100} = 100)$, één m.b.v. de centrale limietstelling en één m.b.v. de formule van Stirling.
   c) Bereken
   $$\lim_{n\to\infty} P(\max(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{4n}) > 1 - \tfrac{1}{n}).$$

2. De stochastische grootheden $\underline{n}, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ zijn onderling onafhankelijk, $\underline{n}$ heeft een geometrische verdeling: $P(\underline{n} = n) = (1-p)p^n$ $(0 < p < 1;\ n = 0,1,\ldots)$ en $\underline{x}_j$ is exponentieel verdeeld met verwachting $1/\lambda$. Zij $\underline{z} = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{\underline{n}}$ (lege som is nul).

   a) Bereken $F_{\underline{z}}(z|\underline{n} = n)$ $(n = 0,1,\ldots)$ en $f_{\underline{z}}(z|\underline{n} = n)$ $(n = 1,2,\ldots)$.
   b) Bereken $E\,\underline{z}$ en $E\,e^{it\underline{z}}$.
   c) Bereken $F_{\underline{z}}(z)$ en $f_{\underline{z}}(z|\underline{z} > 0)$.

3. De stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ vormen een aselecte steekproef van $\underline{x}$ met
   $$f_{\underline{x}}(x;\lambda,r) = \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(r) \qquad (x > 0;\ \lambda > 0;\ r > 0).$$
   a) Bepaal de momentenschatters $\underline{\tilde{\lambda}}$ en $\underline{\tilde{r}}$ voor λ en r.
   b) Bepaal een paar stochastische grootheden $(\underline{u},\underline{v})$ dat voldoende is voor het paar (λ, r).
   c) Zij $r = 2$. Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\lambda}_n$ voor λ en laat zien dat $\underline{\hat{\lambda}}_n$ asymptotisch zuiver is voor $n \to \infty$.

Z.O.Z.

Examen/tentamen Kanrekening en Statistiek op dinsdag 13 januari 1981, 9.00 - 12.00 uur.

---

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is een realisatie van een aselecte steekproef van $\underline{x}$. Aangaande de verdeling van $\underline{x}$ zijn er twee hypothesen:

$$H_0 : \underline{x} \sim N(0,1) \text{ en } H_1 : \underline{x} \sim N(0,\sigma^2 = 2).$$

a) Bepaal het kritieke gebied (in een hanteerbare vorm) behorende bij de meest onderscheidende toets voor H_0 tegen H_1 met onbetrouwbaarheid α.

b) Voer de toets uit op grond van de volgende gegevens:

$$n = 25; \sum_1^n x_j = 2{,}13; \sum_1^n x_j^2 = 44{,}3 ; \alpha = 0{,}05.$$

c) Bereken op grond van de gegevens onder b) en uitgaande van de veronderstelling dat $\underline{x} \sim N(0,\sigma^2)$ $(\sigma^2 > 0)$ een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor σ^2 met een betrouwbaarheid van 0,95.

Normering

1.		2.		3.		4.	
a)	3	a)	4	a)	4	a)	3
b)	5	b)	4	b)	2	b)	2
c)	2	c)	2	c)	4	c)	5

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op vrijdag 11 juni 1982, 9.00 - 12.00 uur.

---

1. Een toevalsmechaniek produceert op de tijdstippen 1,2,... een 0 of een 1: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden met $P(\underline{x}_j = 1) = 1 - P(\underline{x}_j = 0) = P$ $(j = 1,2,\ldots)$. Op tijdstip $\underline{k}(1)$ verschijnt de eerste 1, op tijdstip $\underline{k}(1,0)$ is voor het eerst de combinatie (1,0) verschenen en op tijdstip $\underline{k}(1,0,1)$ voor het eerst (1,0,1).

   a) Bereken $P(\underline{k}(1) = k)$.

   b) Bereken $P(\underline{k}(1,0) = k)$.

   c) Gegeven: de kansenvoortbrengende functie $P_{\underline{k}(1,0,1)}(z) = \dfrac{z^3}{2(2-z)^2 - z^3}$.
   Bereken $P(\underline{k}(1,0,1) = 4)$ en $E\underline{k}(1,0,1)$.

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk en homogeen verdeeld op (0,1). Door de punten met coördinaat $\underline{x}$ resp. $\underline{y}$ wordt het interval (0,1) in drie stukken verdeeld; het grootste noemen we $\underline{u}$, het kleinste $\underline{v}$.

   a) Bereken $P(|\underline{x} - \underline{y}| > \frac{1}{2})$.

   b) Bereken $P(\underline{u} > \frac{1}{2})$.

   c) Bereken $P(\underline{v} > v)$ en $E\underline{v}$.

Z.O.Z.

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op vrijdag 11 juni 1982, 9.00 - 12.00 uur.

---

3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef van $\underline{x}$ met $P(\underline{x} = -1) = p > 0$, $P(\underline{x} = 0) = 1 - p - q > 0$ en $P(\underline{x} = 1) = q > 0$; een realisatie van de steekproef is $x_1, \ldots, x_n$.

   a) Bewijs dat de aanneemlijkheidsfunctie L van $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ gegeven wordt door

$$L(x_1, \ldots, x_n ; p, q) = p^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_j(1-x_j)} (1-p-q)^{\sum_1^n (1-x_j^2)} q^{\frac{1}{2}\sum_1^n x_j(1+x_j)} .$$

   b) Zij $\underline{m}_k = n^{-1} \sum_1^n \underline{x}_j^k$. Laat zien dat het paar $(\underline{m}_1, \underline{m}_2)$ voldoende is voor (p,q).

   c. Bepaal de momentenschatters voor p en q.

   d. Bepaal de meest aanneemlijke schatting $(\hat{p}, \hat{q})$ voor (p,q).

4. $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ is een realisatie van een aselecte steekproef van $\underline{x}$ met kansdichtheid $f_{\underline{x}}$.

   a) Bepaal het kritieke gebied behorende bij de meest onderscheidende toets voor hypothese H_0: $f_{\underline{x}}(x) = 1$ $(0 < x < 1)$ tegen het alternatief H_1: $f_{\underline{x}}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $(0 < x < 1)$ bij een onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}01$.

   b) Bereken het onderscheidingsvermogen van de toets.

   c) Men vindt $\sum_1^{100} x_j = 45{,}2$ en $\prod_1^{100} x_j = 1{,}17\ 10^{-31}$. Toets de hypothese H_0 (zie a)) bij $\alpha = 0{,}01$.

<u>Aanwijzing</u>: gebruik bij de berekeningen de centrale limietstelling.

Zie blz. 3

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op vrijdag 11 juni 1982,

9.00 - 12.00 uur.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk 1	a)	: 2 punten
	b)	: 4 punten
	c)	: 4 punten
2	a)	: 3 punten
	b)	: 3 punten
	c)	: 4 punten
3	a)	: 3 punten
	b)	: 2 punten
	c)	: 2 punten
	d)	: 3 punten
4	a)	: 5 punten
	b)	: 3 punten
	c)	: 2 punten .

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op zaterdag 18 september 1982, 9.00 - 12.00 uur.

---

1. Men doet onafhankelijke worpen met een geldstuk; de kans op "kruis" (K) is p, de kans op "munt" (M) is q = 1 - p.

(3) a) Zij $\underline{k}$ het aantal worpen tot en met de tweede keer dat kruis optreedt. Bereken $P(\underline{k} = k)$ voor $k = 2,3,\ldots$.

(5) b) Zij $\underline{\ell}$ het aantal worpen tot en met de worp waarbij voor het eerst KK of MM ontstaat (d.w.z. tot en met de laatste van die twee worpen waarbij voor het eerst twee maal achtereen hetzelfde wordt gegooid). Bereken $P(\underline{\ell} = \ell)$ voor $\ell = 2,3,\ldots$ en laat zien dat $\sum_{\ell=2}^{\infty} P(\underline{\ell} = \ell) = 1$.

(2) c) Zij $p = \frac{1}{2}$. Wat is de kans dat KK optreedt vóór dat MM optreedt?

2. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\,\underline{x}_k = 1$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Definieer $\underline{y}_n := \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k/k$.

(3) a) Geef formules voor de kansdichtheid en voor de karakteristieke functie van $\underline{x}_k/k$ (geen berekeningen gevraagd).

b) Bereken $E\,\underline{y}_n$ en $\operatorname{var}\underline{y}_n$.

c) Bereken de kansdichtheid $f_{\underline{y}_n}(y)$ van $\underline{y}_n$ voor $n = 2$ en $n = 3$.

Z.O.Z.

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op zaterdag 18 september 1982, 9.00 - 12.00 uur.

---

3. Als $x_1,\dots,x_n$ een realisatie is van een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ van een stochastische grootheid $\underline{x}$ die waarden aanneemt in een eindige of aftelbare verzameling V, en als P_1 en P_2 kansverdelingen zijn op V, dan heet P_1 aannemelijker dan P_2 als $\prod_1^n P_1(\underline{x}_k = x_k) > \prod_1^n P_2(\underline{x}_k = x_k)$.

a) Gegeven is de volgende steekproef-realisatie: 0 (k maal), 1 (ℓ maal), 2 ($n-k-\ell$ maal).

(4) 1. Wat is de meest aannemelijke verdeling op $\{0,1,2\}$?

(2) 2. Wat is de meest aannemelijke verdeling op $\mathbb{Z}$?

(4) b) Welke verdeling op $\{0,1,2\}$ vindt men op grond van het gegeven onder a) met behulp van momentenschatters?

4. $x_1,\dots,x_m$ en $y_1,\dots,y_n$ zijn realisaties van $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_m$ en $\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n$, waarbij $\underline{x}_1,\dots,\underline{y}_n$ onderling onafhankelijk zijn, de $\underline{x}_j$ $N(\mu_1,\sigma^2)$-verdeeld en de $\underline{y}_k$ $N(\mu_2,\sigma^2)$-verdeeld; μ_1, μ_2 en σ^2 zijn onbekend.

(4) a) Op grond van welke overwegingen (geen rekenwerk gevraagd) heeft

$$\underline{t}_{m+n-2} := \frac{\bar{\underline{x}} - \bar{\underline{y}} - \mu_1 + \mu_2}{\underline{s}\{(m+n)/(mn)\}^{\frac{1}{2}}},$$

waarbij $\underline{s}^2 = (m+n-2)^{-1}\{\sum_1^m (\underline{x}_j - \bar{\underline{x}})^2 + \sum_1^n (\underline{y}_k - \bar{\underline{y}})^2\}$, een studentverdeling met $m+n-2$ vrijheidsgraden?

Men heeft $m = 36$, $n = 64$ en vindt $\bar{x} = 1{,}20$, $\bar{y} = 1{,}30$, $\sum_1^{36} x_j^2 = 72{,}64$ en $\sum_1^{64} y_k^2 = 123{,}36$.

(4) b) Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_1 - \mu_2$ met een betrouwbaarheid van 0,90.

(2) c) Toets tweezijdig de hypothese $\mu_1 = \mu_2 + 0{,}20$ met onbetrouwbaarheid 0,10.

Zie blz. 3

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op zaterdag 18 september 1982,

9.00 - 12.00 uur.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave 1	a)	: 3 punten
	b)	: 5 punten
	c)	: 2 punten
2	a)	: 3 punten
	b)	: 2 punten
	c)	: 5 punten
3	a) 1.	: 4 punten
	2.	: 2 punten
	b)	: 4 punten
4	a)	: 4 punten
	b)	: 4 punten
	c)	: 2 punten .

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op donderdag 13 januari 1983, 9.00 - 12.00 uur.

1\. a) Iemand doet onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen tot hij een zes gooit. Het aantal hiervoor gebruikte worpen is $\underline{k}$.
Wat is $P(\underline{k} = k)$ (geen berekening gevraagd), wat is $E\,\underline{k}$?

b) n personen gooien elk iedere seconde met een dobbelsteen (na één seconde elk de eerste worp, na twee seconden de tweede, etc.). Na precies $\underline{k}_n$ seconden verschijnt de eerste zes.
Bereken $P(\underline{k}_n > k)$, $P(\underline{k}_n = k)$ en $E\,\underline{k}_n$.

c) In de situatie onder b) gooit iedereen door tot hij een zes gegooid heeft. De laatste zes verschijnt na precies $\underline{\ell}_n$ seconden.
Bereken $P(\underline{\ell}_n = \ell)$.

2\. a) Bewijs de regel van Bayes:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_k P(A \mid B_k)P(B_k)}$$

en geef aan onder welke voorwaarden deze regel geldt.

b) Leidt een analoge regel af voor de voorwaardelijke kansdichtheid $f_{\underline{x}}(x \mid \underline{y} = y)$ in termen van $f_{\underline{y}}(y \mid \underline{x} = x)$ en $f_{\underline{x}}(x)$.

c) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\,\underline{x}_j = 1/\lambda$ $(j=1,2,\ldots,n)$ en $\underline{s}_n = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n$. Het is intuïtief duidelijk dat $f_{\underline{s}_n}(s \mid \underline{x}_n = x) = f_{\underline{s}_{n-1}}(s-x)$ (geen bewijs gevraagd).
Bereken $f_{\underline{x}_n}(x \mid \underline{s}_n = s)$.

zie bladz. 2

Examen/tentamen Kansrekening en Statistiek op donderdag 13 januari 1983.

---

3. x is één waarneming van $\underline{x} := \max(\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n)$ met $\underline{y}_1,\dots,\underline{y}_n$ onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\,\underline{y}_j = 1$ $(j=1,2,\dots,n)$. Hierbij is $n \in \mathbb{N}$, maar verder <u>onbekend</u>.

   a) Bepaal de meest aannemelijke schatting $\hat{n}$ voor n op grond van de waarneming x.

   b) Is de schatter $\underline{\hat{n}}$ voldoende (met betrekking tot de verdeling van $\underline{x}$)?

   c) Bepaal de momentenschatter $\underline{\hat{\hat{n}}}$ voor n.
   Aanwijzing: $E\,\underline{x} = \int_0^\infty \{1 - F_{\underline{x}}(x)\}dx$.

4. $k_1,k_2,\dots,k_n$ is de realisatie van een aselecte steekproef van een Poisson-verdeelde grootheid $\underline{k}$ met $E\,\underline{k} = \mu$.

   a) Bepaal het kritieke gebied behorende bij de gegeneraliseerde likelihood-ratio-toets voor de hypothese $\mu = \mu_0$ tegen het alternatief $H_1 : \mu \neq \mu_0$ met onbetrouwbaarheid α.

   b) Zij $n = 16$ en laat waargenomen zijn $k_1 + \dots + k_{16} = 6$.
   Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor μ met betrouwbaarheid 0,90. Aanwijzing: gebruik de (eventueel) onder a) gevonden toetsingsgrootheid, maar niet de daar gevonden toets.

Puntenwaardering:				
	1a: 2 punten	2a: 3 punten	3a: 4 punten	4a: 5 punten
	1b: 5 "	2b: 3 "	3b: 2 "	4b: 5 "
	1c: 3 "	2c: 4 "	3c: 4 "	

Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.