TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

VOORTGEZETTE

KANSREKENING

Dr. F.W. Steutel

Najaarssemester 1980

Wsk Bibl

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.280
Prijs f. 6,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Voortgezette kansrekening

Dr. F.W. Steutel

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VOORTGEZETTE KANSREKENING

Dr. F.W. Steutel

Dictaatnr. 2.280
Prijs 6,50

Najaarssemester 1980

Inhoudsopgave

Inleiding

De inhoud van dit dictaat is een aanvulling op en een voortzetting van het deel Kansrekening van het dictaat Kansrekening en Statistiek (dictaat nr. 2.271) dat we verder aanduiden met K & S. De aanvulling betreft de bewijzen van een aantal in K & S behandelde stellingen, zoals de continuiteitsstelling voor karakteristieke functies. De voortzetting betreft de behandeling van een aantal fundamentele en voor verdere studie, van bijvoorbeeld theoretische statistiek of stochastische processen, onontbeerlijke onderwerpen als de stelling van Kolmogorov, de sterke wet van de grote aantallen en een algemener begrip voorwaardelijke verwachting. Verder bevat dit dictaat enkele op de toepassing gerichte onderwerpen, zoals de convergentie van momenten.

Het merendeel van de behandelde stof is ook te vinden in een aantal voortreffelijke boeken (dit maakt het schrijven van een dictaat als dit tot een wat dubieuze bezigheid), zij het dat geen der in de literatuur genoemde boeken alléén alle informatie bevat. Als leidraad is [8] gebruikt; voor een aantal bewijzen is uit de overige boeken geput.

De inhoud van dit dictaat is wat meer dan in twee semester-uren kan worden behandeld, zodat (bijvoorbeeld uit de laatste drie hoofdstukken) een keuze gemaakt zal moeten worden.

Omdat een deel van de bewijzen niet kan worden gegeven zonder een beroep te doen op resultaten uit de maat- en integratietheorie, zijn de voor ons belangrijkste begrippen en stellingen op dit terrein in een appendix opgenomen. Als aanbevolen (niet verplichte) voorkennis noemen we het college dictaat Maattheorie en Lebesgue-integratie (dictaat nr. 2.239).

1. KANSRUIMTEN en σ-ALGEBRA'S

1.1 Kansruimten

Definitie 1.1.1. Een *kansruimte* is een tripel (Ω, F, P) met

a. Ω een willekeurige niet-lege verzameling,

b. F een σ-algebra van deelverzamelingen van Ω, d.w.z. voor F geldt:
$\Omega \in F$; als $A \in F$, dan $A^* \in F$; als $A_j \in F$ $(j=1,2,\ldots)$, dan $\bigcup_1^\infty A_j \in F$,

c. P is een *kans* (ook wel: *kansmaat*) op F, d.w.z.

$P(\Omega) = 1$; $P(A) \geq 0$ voor alle $A \in F$; als $A_j \in F$ $(j=1,2,\ldots)$ en $A_iA_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, dan geldt $P(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty P(A_j)$.

In maattheoretische termen (zie definitie A2.1) kunnen we de definitie als volgt samen vatten.

Definitie 1.1.1. Een kansruimte (Ω, F, P) is een *maatruimte* met $P(\Omega) = 1$.

Een maatruimte is een model voor een experiment of verschijnsel, waarbij het toeval een rol speelt. In dit model representeert Ω de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van het experiment; men noemt Ω in dit verband de *uitkomstenruimte*. De elementen van F representeren de voor het experiment relevante *gebeurtenissen* en voor $A \in F$ interpreteren we $P(A)$ als "de kans op A".

We zullen in het volgende dikwijls stilzwijgend aannemen dat het argument van P een element van F is.

Voorbeeld 1.1.2. ("schijfschieten").

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \ ; \ F = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \cap \Omega \ ; \ P = \frac{1}{\pi}\lambda_2,$$

waarbij λ_2 de Lebesgue-maat voorstelt op $\mathbb{R}^2$ (zie voorbeeld A 2.10 voor de definities van $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ en λ_2).

Voorbeeld 1.1.3. (trekken zonder terugleggen, ongeordende steekproeven).

$$\Omega = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_j \in \{1,2,\ldots,N\} \ (j=1,2,\ldots,n) \ ; \ x_1<x_2<\ldots<x_n\}.$$

$$F = P(\Omega)$$

$$P(A) = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{\Omega} 1_A(\omega) .$$

<u>Stelling 1.1.4.</u> Een kans P heeft de volgende eigenschappen:

a. $P(\emptyset) = 0$

b. $P(A) \leq 1$

c. $P(A) \leq P(B)$ als $A \subset B$

d. $P(\bigcup_1^N A_j) \leq \sum_1^N P(A_j) \quad (1 \leq N \leq \infty)$

e. $P(\bigcup_1^N A_j) = \sum_1^N P(A_j)$ als $A_i A_j = \emptyset$ voor $i \neq j$ $(1 \leq N \leq \infty)$

f. $P(A^*) = 1 - P(A)$

g. Als $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, dan is $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Bewijs: Zie K & S; bewijs g zelf voor het geval dat de rij A_n niet monotoon is.

1.2 Voorwaardelijke kans

<u>Definitie 1.2.1.</u> Als $A \in F$ en $B \in F$ met $P(B) > 0$, dan heet

$$P(A \mid B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

de *voorwaardelijke kans* op A *onder de voorwaarde* (of: *gegeven*)B.

<u>Stelling 1.2.2.</u> Een voorwaardelijke kans heeft de volgende eigenschappen

a. $P(\cdot|B)$ is een kans op F (en ook op $F \cap B$)

b. Als $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$ is, dan geldt

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

c. Als $P(B_n) > 0 \quad (1 \leq n \leq N \leq \infty)$, terwijl $B_m B_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ en $P(\bigcup_1^N B_n) = 1$,

dan geldt

$$P(A) = \sum_1^N P(AB_n) = \sum_1^N P(A|B_n) P(B_n)$$

d. Onder de voorwaarden van c met bovendien $P(A) > 0$ geldt

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_{m=1}^N P(A|B_m)P(B_m)} \qquad \text{(regel van Bayes).}$$

Bewijs: Zie K & S.

1.3 Stochastische grootheden en σ-algebra's

Definitie 1.3.1. Een reële *stochastische grootheid* (ook wel: *stochast*) X op een kansruimte (Ω,F,P) is een functie $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die F-meetbaar is, d.w.z. (zie definitie A 3.1)

$$(1.3.1) \qquad \{\omega \mid X(\omega) \le a\} \in F \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Opmerking 1.3.2. In plaats van $\{\omega|X(\omega) \le a\}$ en $\{\omega|X(\omega) \in B\}$ schrijven we meestal kortweg $X \le a$ en $X \in B$ of $[X \le a]$ en $[X \in B]$. De vrijwel uitsluitend Nederlandse gewoonte om stochastische grootheden met onderstreepte letters aan te geven (zie K & S) volgen we hier niet.

Opmerking 1.3.3. Als (Ω_1,F_1) en (Ω_2,F_2) meetbare ruimten zijn (zie definitie A1.8), dan heet een functie $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ (F_1,F_2)-meetbaar, als $\{\omega_1|f(\omega_1) \in A_2\} \in F_1$ voor alle $A_2 \in F_2$. Blijkens stelling A3.3 komt (1.3.1) overeen met $(F,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-meetbaarheid. Als $F_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dan noemen we f meestal F_1-meetbaar; is bovendien $F_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ dan heet f *Borel-meetbaar*; Zie appendix voor definitie van de borelverzamelingen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

De volgende definitie maakt het o.a. mogelijk om het begrip meetbaarheid kort te formuleren.

Definitie 1.3.4. Zij gegeven een functie $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ en zij $D \subset \Omega_2$. Het *inverse beeld* (ook wel: *volledige origineel*) $f^{-1}(D)$ van D onder f wordt gedefinieerd door

$$f^{-1}(D) = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in D\};$$

Als $\mathcal{D}$ een collectie deelverzameling van Ω_2 is, dan definiëren we

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

Stelling 1.3.5. Zij gegeven een functie $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ en laat D, D_1, D_2 en D_λ $(\lambda \in \Lambda)$ deelverzamelingen zijn van Ω_2. Dan geldt

a. $f^{-1}(D^*) = (f^{-1}(D))^*$

b. $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(D_\lambda)$

c. $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(D_\lambda)$

d. Als $D_1 \subset D_2$, dan $f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$.

e. Als $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, dan $f^{-1}(\mathcal{D}_1) \subset f^{-1}(\mathcal{D}_2)$.

Bewijs: a. $f^{-1}(D^*) = \{\omega_1 | f(\omega_1) \in D^*\} = \{\omega_1 | f(\omega_1) \notin D\} = \{\omega_1 | f(\omega_1) \in D\}^* = (f^{-1}(D$

b. $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = \{\omega_1 \mid f(\omega_1) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda\} = \{\omega_1 \mid \exists_{\lambda\in\Lambda}\ f(\omega_1) \in D_\lambda\}$

$$= \{\omega_1 \mid \exists_{\lambda\in\Lambda}\ \omega_1 \in f^{-1}(D_\lambda)\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(D_\lambda).$$

c. Volgt uit a en b met regel van de Morgan (K & S, p. 2).

d. Volgt uit definitie 1.3.4 ; evenzo e.

<u>Gevolg 1.3.6.</u> *Zij gegeven een functie f:* $\Omega_1 \to \Omega_2$ en zij F_2 een σ-algebra van deelverzamelingen van Ω_2. Dan is ook $f^{-1}(F_2)$ een σ-algebra (van deelverzamelingen van Ω_1).

Bewijs: Omdat $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$, volgt dit uit stelling 1.3.5 en de definitie van σ-algebra (zie definitie 1.1.1).

<u>Definitie 1.3.7.</u> Zij Ω een verzameling en C een collectie deelverzamelingen van Ω. De kleinste σ-algebra die de collectie C bevat, heet de *door* C *voortgebrachte* σ-algebra en wordt aangegeven met $\sigma\{C\}$. (Voor de existentie van $\sigma\{C\}$ zie stelling A1.4.Als $F = \sigma\{C\}$, dan heet C een voortbrengende collectie van F.

<u>Stelling 1.3.8.</u> Zij gegeven een functie f: $\Omega_1 \to \Omega_2$ en zij C een collectie deelverzamelingen van Ω_2. Dan geldt

$$\sigma\{f^{-1}(C)\} = f^{-1}(\sigma\{C\}). \tag{1.3.2}$$

Bewijs: op grond van gevolg 1.3.6 is $f^{-1}(\sigma\{C\})$ een σ-algebra met (zie stelling 1.3.5 e) $f^{-1}(\sigma\{C\}) \supset f^{-1}(C)$, zodat $f^{-1}(\sigma\{C\}) \supset \sigma\{f^{-1}(C)\}$.
Om de omgekeerde inclusie te bewijzen definiëren we

$$\mathcal{D} = \{D \subset \Omega_2 \mid f^{-1}(D) \in \sigma\{f^{-1}(C)\}\}.$$

Nu geldt

(i) $f^{-1}(\mathcal{D}) \subset \sigma\{f^{-1}(C)\}$ (definitie van $\mathcal{D}$)

(ii) $C \subset \mathcal{D}$ (als $C \in C$, dan $f^{-1}(C) \in f^{-1}(C) \subset \sigma\{f^{-1}(C)\}$)

(iii) $\mathcal{D}$ is een σ-algebra (controleer de definitie, zie p. 1).

Uit (ii) en (iii) volgt dat $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, zodat wegens (i) en stelling 1.3.5 e geldt: $f^{-1}(\sigma\{\mathcal{C}\}) \subset f^{-1}(\mathcal{D}) \subset \sigma\{f^{-1}(\mathcal{C})\}$ (definitie van $\mathcal{D}$).
Dit levert de tweede inclusie en (1.3.2) volgt.

Opmerking 1.3.9. De meetbaarheidsdefinitie in opmerking 1.3.3 is equivalent met (zie definitie 1.3.4) $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1$, of als $\mathcal{C}$ een voortbrengende collectie is van $\mathcal{F}_2$:

(1.3.3) $\quad f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$.

Als $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dan kunnen we voor $\mathcal{C}$ kiezen: $\mathcal{O}_n$, de open verzamelingen van $\mathbb{R}^n$, of: $\mathcal{I}_n$, alle intervallen, d.w.z. alle verzamelingen van de vorm

(1.3.4) $\quad (a,b] = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_n \mid a_1 < x_1 \le b_1,\ldots,a_n < x_n \le b_n\}$

$$(a_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}),$$

of: $\mathcal{Q}_n$, alle orthanten, d.w.z. verzamelingen van de vorm $(-\infty,b]$ met $b \in \mathbb{R}^n$. Omdat voor continue $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ geldt dat $f^{-1}(\mathcal{O}_n) \subset \mathcal{O}_m$, zijn continue functies Borel-meetbaar. Zie ook definitie A1.6 en opmerking A1.7.

Definitie 1.3.10. Een n-dimensionale *stochastische vector* (n-dimensionale stochastische grootheid) X op een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ is een functie $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, die $\mathcal{F}$-meetbaar is, d.w.z. waarvoor $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{F}$.

Stelling 1.3.11. Als $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ een Borel-meetbare functie is (zie opmerking 1.3.3) en als $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ een m-dimensionale stochastische vector is op $(\Omega,\mathcal{F},P)$, dan is $f \circ X$ een n-dimensionale stochastische vector.

Bewijs: $f \circ X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ is $\mathcal{F}$-meetbaar, immers $(f \circ X)^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) =$
$= X^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))) \subset X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \subset \mathcal{F}$, omdat $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (zie ook stelling 1.3.5 d).

Stelling 1.3.12. $X = (X_1,\ldots,X_n)$ is d.e.s.d. een (n-dimensionale) stochastische vector als $X_1,X_2,\ldots,X_n$ (1-dimensionale) stochastische grootheden zijn.

Bewijs: (i) Laat $X_1,X_2,\ldots,X_n$ stochastische grootheden zijn en zij $Q \in \mathcal{Q}_n$, de collectie van alle orthanten (zie opmerking 1.3.9), dan geldt $\sigma\{\mathcal{Q}_n\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, en dus $X^{-1}(Q) = \bigcap_1^n X_i^{-1}(-\infty,b_i] \in \mathcal{F}$ o.g.v. (1.3.1), d.w.z. X is $\mathcal{F}$-meetbaar.
(ii) Als X een $\mathcal{F}$-meetbare functie is, dan is $X_i = \pi_i(X)$ een $\mathcal{F}$-meetbare functie (zie stelling 1.3.11).

Definitie 1.3.13. Een stochast X heet *discreet*, als er reële getallen $x_1, x_2, ..$ bestaan zó dat

(1.3.5) $\quad P(\bigcup_1^{\infty} [X = x_n]) = 1.$

Opmerking 1.3.14. Uit (1.3.5) volgt dat X een *trapfunctie* is (zie Appendix):

(1.3.6) $\quad X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 1_{[X=x_n]}(\omega)$

voor *"bijna alle"* ω, d.w.z. er is een $A \in F$ met $P(A) = 1$ en zó dat (1.3.6) geldt voor alle $\omega \in A$ (ga na).

Definitie 1.3.15. Zij X een (1-dimensionale) stochastische grootheid op (Ω, F, P). De *door* X *geïnduceerde* σ-algebra $\sigma(X)$ wordt gedefinieerd door

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Definitie 1.3.16. Zij $X = \{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ een verzameling stochastische grootheden. De door X geïnduceerde σ-algebra $\sigma(X)$ wordt gedefinieerd door

$$\sigma(X) = \sigma\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \sigma(X_\lambda)\}.$$

Opgave 1.3.17. Zij $X = (X_1, X_2, .., X_n)$ een n-dimensionale stochastische vector. Bewijs dat

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Opmerking 1.3.18. $\sigma(X)$ is de kleinste σ-algebra ten opzichte waarvan X (resp. alle X_λ, $\lambda \in \Lambda$) meetbaar zijn; als X een "eenvoudige" functie is, dan heeft $\sigma(X)$ "weinig" elementen.

Opgave 1.3.19. Bepaal $\sigma(X)$ voor X als in (1.3.6).

De volgende stelling geeft een duidelijk verband tussen de ingewikkeldheid van meetbare functies en de grootte van de geïnduceerde σ-algebra's.

Stelling 1.3.20.

a. Als $X: \Omega \to \mathbb{R}$ een stochastische grootheid is en $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een Borel-meetbare functie, dan is $Y := h(X)$ een stochastische grootheid en

(1.3.7) $\quad \sigma(Y) \subset \sigma(X)$.

b. Als X en Y reële stochastische grootheden zijn, waarvoor geldt dat $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, dan bestaat er een Borel-meetbare functie h met de eigenschap dat

(1.3.8) $\quad Y = h(X)$.

Bewijs: a. Voor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ geldt $Y^{-1}(B) = X^{-1}(h^{-1}(B)) \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X) \subset \mathcal{F}$, omdat h Borel-meetbaar is en X een $\mathcal{F}$-meetbare functie. Blijkbaar is nu Y ook $\mathcal{F}$-meetbaar met $\sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \sigma(X)$.

b. We zullen een Borel-meetbare functie h construeren die aan (1.3.8) voldoet. Hiertoe definiëren we

$$A_{j,m} = [j2^{-m}, (j+1)2^{-m})$$

$$(m=1,2,\dots; \ j=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$$

$$B_{j,m} = Y^{-1}(A_{j,m})$$

Uit stelling 1.3.5 volgt dat de $B_{j,m}$ disjunct zijn voor vaste m, terwijl

$$B_{2j,m+1} \cup B_{2j+1,m+1} = B_{j,m}.$$

Omdat $B_{j,m} \in \sigma(Y) \subset \sigma(X)$, zijn er $C_{j,m} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ met de eigenschap dat

(1.3.9) $\quad B_{j,m} = X^{-1}(C_{j,m})$.

Hierbij kunnen we de $C_{j,m}$ zó kiezen dat ze disjunct zijn voor vaste m, terwijl ook geldt

(1.3.10) $\quad C_{2j,m+1} \cup C_{2j+1,m+1} = C_{j,m}$.

We kunnen dit bereiken door eerst $C_{j,m}$ te vervangen door $C'_{j,m} := C_{j,m} \cap \bigcap_{i \neq j} C^*_{i,m}$, die disjunct zijn en ook aan (1.3.9) voldoen (ga na) en vervolgens $C'_{j,m}$ te vervangen door $C''_{j,m}$, die recursief worden gedefinieerd door

$$C''_{j,1} = C'_{j,1} \ ; \ C''_{2j,m+1} = C''_{j,m} \cap C'_{2j,m+1} ; C''_{2j+1,m+1} = C''_{j,m} \cap (C''_{2j,m+1})^*.$$

De $C''_{j,m}$ voldoen triviaal aan (1.3.10) en het is niet moeilijk om met inductie na te gaan dat de $C''_{j,m}$ disjunct zijn en aan (1.3.9) voldoen. Zo is

$$X^{-1}(C''_{2j,m+1}) = X^{-1}(C''_{j,m}) \cap X^{-1}(C'_{2j,m+1}) = B_{j,m} \cap B_{2j,m+1} = B_{2j,m+1}.$$

We schrijven nu weer $C_{j,m}$ i.p.v. $C''_{j,m}$ en definiëren

$$Y_m(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\ 2^{-m}\ 1_{B_{j,m}}(\omega).$$

Dan is $|Y_m(\omega) - Y(\omega)| \le 2^{-m}$ voor alle $\omega \in \Omega$ en dus geldt $Y_m(\omega) \to Y(\omega)$ als $m \to \infty$ voor alle $\omega \in \Omega$. We definiëren verder $h_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$h_m(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\ 2^{-m}\ 1_{C_{j,m}}(x).$$

Dan is h_m Borel-meetbaar, omdat $C_{j,m} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, terwijl o.g.v. (1.3.9)

$$h_m(X) = Y_m,$$

zodat $|h_m(X) - Y| \le 2^{-m}$ op Ω. Wegens $C_{j,m} = C_{2j,m+1} \cup C_{2j+1,m+1}$ geldt nu

$$|h_m(x) - h_{m+k}(x)| \le \sum_{r=1}^{k} |h_{m+r-1}(x) - h_{m+r}(x)| \le \sum_{r=1}^{k} 2^{-m-r} \le 2^{-m}.$$

Blijkbaar is $h_m(x)$ een Cauchy-rij voor iedere $x \in \mathbb{R}$, $h = \lim_{m\to\infty} h_m$ bestaat met de eigenschap dat

$$|h_m(x) - h(x)| \le 2^{-m}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$, terwijl (zie stelling A 3.6) h ook Borel-meetbaar is. Nu geldt voor alle m en alle $\omega \in \Omega$

$$|h(X) - Y| \le |h(X) - h_m(X)| + |Y - Y_m| \le 2^{-m+1},$$

d.w.z. $Y = h(X)$ op Ω.

2. KANSVERDELINGEN

2.1 Eén-dimensionale kansverdelingen

Definitie 2.1.1. Als X een reële stochastische grootheid is, dan wordt de verdelingsfunctie F_X van X gedefineerd door

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

Opmerking 2.1.2. $F_X = F_Y$ impliceert niet dat $X(\omega) \equiv Y(\omega)$. Voorbeeld: kies $\Omega = [0,1]$, $F = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap \Omega$ en $P = \lambda$ (Lebesgue-maat) met $X(\omega) = \omega$ en $Y(\omega) = 1 - \omega$.

Stelling 2.1.3. Als F_X de verdelingsfunctie is van X, dan geldt

a. $F_X(x)$ is niet dalend

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

c. F_X is continu van rechts.

Bewijs: Zie K & S.

Stelling 2.1.4. Een verdelingsfunctie heeft hoogstens aftelbaar veel discontinuïteiten.

Bewijs: Een verdelingsfunctie F is niet-dalend; er zijn dus alleen sprongdiscontinuïteiten. Omdat F van 0 naar 1 stijgt, is er hoogstens één sprong ter grootte 1, zijn er hoogstens 2 sprongen $\geq \frac{1}{2}$ en i.h.a. niet meer dan n sprongen $\geq \frac{1}{n}$. Het aantal sprongen met hoogten in het interval $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ is dus hoogstens n+1, terwijl $\bigcup\limits_{1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] = (0,1]$. Het totaal aantal sprongen is dus hoogstens aftelbaar.

We hebben hierboven gesproken over "verdelingsfuncties" zonder daarbij expliciet een stochastische grootheid te noemen. Dit wordt gerechtvaardigd door stelling 2.1.6. In verband hiermee formuleren we het volgende lemma (zie ook stelling A 2.7 en voorbeeld A 2.8).

Lemma 2.1.5. Laat F een niet-dalende rechtscontinue functie zijn op $\mathbb{R}$ en definieer de maat $\mu_F(a,b]$ van een interval $(a,b]$ door

$$\mu_F(a,b] = F(b) - F(a) \qquad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

Dan kan μ_F eenduidig worden voortgezet tot een maat op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de *door F voortgebrachte Stieltjes-Lesbesgue-maat*. Algemeen geldt: als μ_1 en μ_2 maten zijn op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ met $\mu_1(a,b] = \mu_2(a,b]$ (alle a en b), dan is $\mu_1 = \mu_2$ op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Stelling 2.1.6. Een functie F die voldoet aan de eisen a,b en c van stelling 2.1.3 is de verdelingsfunctie van een stochastische grootheid .

Bewijs: Kies $(\Omega,\mathcal{F},P)$ als volgt: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \mu_F$ (als in lemma 2.1.5) en $X(\omega) = \omega$. Zie ook K & S.

Stelling 2.1.7. Zij X een stochast met verdelingsfunctie F. Dan is P_X op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$P_X(B) := P(X \in B) = P(X^{-1}(B)),$$

een kans op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en $P_X(B) = \mu_F(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.

Bewijs: Dat P_X een kans is volgt uit stelling 1.3.5 en definitie 1.1.1 . Omdat $P_X(a,b] = \mu_F(a,b] = F(b) - F(a)$, is o.g.v. de laatste bewering in lemma 2.1.5 $P_X = \mu_F$ op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Opmerking 2.1.8. De maat P_X op $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wordt de *kansverdeling van* X genoemd

Definitie 2.1.9. Een verdelingsfunctie heet *absoluut continu* als er een Borel-meetbare functie f bestaat met de eigenschap

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

de functie f heet de *(kans-) dichtheid* van F. Als $F = F_X$, dan schrijven we f_X i.p.v. f; f_X heet dan de (kans-)dichtheid van X.

Opmerking 2.1.10. Een verdelingsfunctie is absoluut continu d.e.s.d.a. de maat μ_F absoluut continu is m.b.t. de Lebesgue-maat (vergelijk definitie A 6.2). Absolute continuïteit van verdelingsfuncties is sterker dan continuïteit (zie voorbeeld 2.1.15). Voor een willekeurige functie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieert men: g is absoluut continu op $\mathbb{R}$ als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met de eigenschap dat

$$\sum_1^n |g(y_j) - g(x_j)| < \varepsilon$$

voor elke eindige verzameling disjuncte intervallen $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$, waarvoor $\sum_1^n (y_j-x_j) < \delta$. Deze definitie is equivalent met definitie 2.1.9, als g een verdelingsfunctie is. We bewijzen dit niet.

Definitie 2.1.11. Een verdelingsfunctie F heet *discreet*, als er rijen reële getallen $(p_n)_{-\infty}^{\infty}$ en $(x_n)_{-\infty}^{\infty}$ bestaan met de eigenschappen $\sum_{-\infty}^{\infty} p_n = 1$, $p_n \geq 0$, $x_{n+1} > x_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2,\dots)$ en zó dat

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n \, 1_{[x_n,\infty)}(x).$$

Lemma 2.1.12. Als F_X de verdelingsfunctie is van X, dan is

$$P(X=a) = F_X(a) - F_X(a-0).$$

Bewijs: zie K & S.

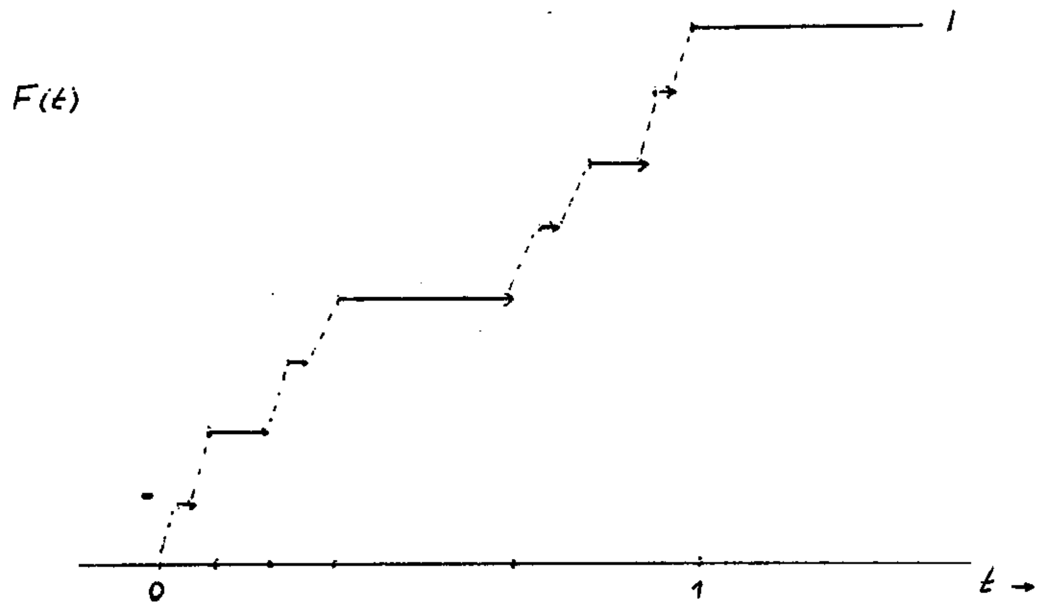
Stelling 2.1.13. F_X is discreet d.e.s.d.a. X discreet is.

Bewijs: Zie definitie 1.3.13.

Definitie 2.1.14. Een continue verdelingsfunctie F heet *singulier*, als er een verzameling $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bestaat met $\lambda(S) = 0$ en $\mu_F(S) = 1$ (λ is Lebesgue-maat, voor μ_F zie lemma 2.1.5).

Voorbeeld 2.1.15 (van een singuliere verdelingsfunctie). We construeren een verdelingsfunctie F als volgt (zie figuur):

$F(x) = 0$ als $x < 0$ en $F(x) = 1$, als $x \geq 1$. Verdeel het interval $[0,1)$ in drie gelijke stukken: $[0,1/3)$, $[1/3,2/3)$ en $[2/3,1)$ en definieer $F(x) = \frac{1}{2}$ als $x \in [1/3,2/3)$. Verdeel de overige twee intervallen in drie gelijke stukken en definieer: $F(x) = 1/4$ als $x \in [1/9,2/9)$ en $F(x) = 3/4$ als $x \in [7/9, 8/9)$. Zo doorgaande krijgt men een continue functie F, die van 0 naar 1 stijgt op $[0,1]$ en die constant is op intervallen van totale lengte (= Lebesgue-maat) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = 1$. Zij nu T de vereniging van deze intervallen en definieer $S = [0,1] \cap T^*$. Dan is $\lambda(S) = 0$, terwijl $\mu_F(S) = \mu_F\,[0,1] - \mu_F(T) = \mu_F[0,1] = F(1) = 1$, omdat $\mu_F(T) = 0$.



Opgave 2.1.16. Geef de preciese definitie van F in voorbeeld 2.1.15 en laat zien dat F continu is.

Definitie 2.1.17. Als F en G verdelingsfuncties zijn, dan wordt de *convolutie* $F * G$ van F en G gedefinieerd door (verg. lemma 2.1.5)

$$(2.1.1) \qquad (F * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)d\mu_G \quad ;$$

meestal noteren we integralen van de vorm $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)d\mu_F$ als

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dF(x),$$

Soms schrijft men $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)F(dx)$ of $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mu_F(dx)$.

Stelling 2.1.18. $F * G$ is een verdelingsfunctie.

Bewijs: We verifiëren de eigenschappen van stelling 2.1.3:

a. In (2.1.1) is de integrand niet dalend, dus is $F * G$ niet dalend.
b. Omdat $F(x-y) \to 0$ (resp. $\to 1$) als $x \to -\infty$ (resp. $x \to \infty$), geldt o.g.v. gemajoreerde convergentie (stelling A 4.10) dat $(F * G)(x) \to 0$ (resp. $\to 1$) als $x \to -\infty$ (resp. $x \to \infty$).
c. Bewijs analoog aan dat van b.

2.2 Meer-dimensionale verdelingsfuncties

Definitie 2.2.1. Zij $X = (X_1,\dots,X_n)$ een n-dimensionale stochastische vector. De functie $F_X\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ gedefinieerd door

$$F_X(x_1,\dots,x_n) = P(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j \le x_j])$$

heet de verdelingsfunctie van X of ook wel de *simultane verdelingsfunctie* van $X_1,X_2,\dots,X_n$. We schrijven dikwijls $P(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n)$ i.p.v. $P(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j \le x_j])$.

Stelling 2.2.2. Zij $X' = (X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1},\dots,X_n)$, dan geldt

$$\lim_{x_k\to\infty} F_X(x_1,\dots,x_n) = F_{X'}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots x_n).$$

Bewijs: Zie K & S.

Definitie 2.2.3. Zij $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^n$ met $a < b$ (d.w.z. $\forall_i\ a_i < b_i$). We definiëren

$$\Delta_{k,n}(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = a_j \text{ voor k waarden van j; } x_j = b_j$$

voor n-k waarden van j},

$$\Delta_n(a,b) = \bigcup_{k=0}^{n} \Delta_{k,n}(a,b).$$

Stelling 2.2.4. Zij X een n-dimensionale stochastische vector. Dan geldt

a. $\lim_{x_1\to\infty} \dots \lim_{x_n\to\infty} F_X(x_1,\dots,x_n) = 1$

b. $\lim_{x_j\to-\infty} F_X(x_1,\dots,x_n) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n)$

c. F_X is continu van rechts in elk der $x_1,\dots,x_n$

d. Voor alle $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^n$ met $a < b$ geldt (met $\Delta_{k,n} = \Delta_{k,n}(a,b)$)

$$(2.2.1) \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\Delta_{k,n}} F_X(x) \ge 0.$$

Bewijs: Voor a t.m. c zie K & S. Onderdeel d bewijzen we door aan te tonen dat (zie 1.3.4))

$$(2.2.2)\qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\Delta_{k,n}} F_X(x) = P(X \in (a,b]).$$

Hiertoe bewijzen we met inductie dat voor $k=1,2,\ldots,n$, $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^n$

$$(*)\quad P_{n,k}(a,b) := P(\bigcap_1^k [X_j \in (a_j,b_j]] \bigcap_{k+1}^{n} [X_\ell \le b_\ell]) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{\Delta_{j,k}} F(x_1,\ldots,x_k,b_{k+1},\ldots$$

Voor k=1 is dit juist:

$$P_{n,1}(a,b) = P(X_1 \le b_1,\ldots,X_n \le b_n) - P(X_1 \le a_1, X_2 \le b_2,\ldots,X_n \le b_n).$$

Stel nu dat (*) geldt voor een $k < n$. Dan geldt voor $P_{n,k+1}$

$$P_{n,k+1}(a,b) = P_{n,k}(a,b) - P_{n,k}(a,\hat{b}),$$

waarbij $\hat{b}$ uit b ontstaat door b_{k+1} te vervangen door a_{k+1}. Op grond van de inductieveronderstelling hebben we nu

$$P_{n,k+1}(a,b) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{\Delta_{j,k}} \{F_X(x_1,\ldots,x_k,b_{k+1},\ldots,b_n) -$$

$$- F_X(x_1,\ldots,x_k,a_{k+1},b_{k+2},\ldots,b_n)\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sum_{\Delta_{j,k+1}} F_X(x_1,\ldots,x_{k+1},b_{k+2},\ldots,b_n).$$

Nu geldt (*) dus voor alle $k \le n$ en met name voor $k = n$, d.w.z. (2.2.2) geldt.

Opmerking 2.2.5. Voor n = 1 en n = 2 gaat (2.2.2) over in resp.

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X \in (a,b)) = F_X(b_1,b_2) - F_X(a_1,b_2) - F_X(b_1,a_2) + F_X(a_1,a_2)$$

Analoog aan lemma 2.1.5. hebben we

Lemma 2.2.6. Laat $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een rechtscontinue functie zijn die aan (2.2.1) voldoet en definieer de maat μ_F van het n-dimensionale interval $(a,b]$ door

$$(2.2.3) \qquad \mu_F(a,b] := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\Delta_{k,n}(a,b)} F(x) \qquad (a \in \mathbb{R}^n;\ b \in \mathbb{R}^n;\ a < b).$$

Dan kan μ_F eenduidig worden voortgezet tot een maat op $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, de door F voortgebrachte Stieltjes-Lebesgue-maat. Algemeen geldt: als μ_1 en μ_2 maten zijn op $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die overeenstemmen op de verzameling van alle intervallen, dan is $\mu_1 = \mu_2$ op $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Opmerking 2.2.7. Als X een stochastische vector is met verdelingsfunctie F_X, dan is P_X gedefinieerd door

$$P_X(B) := P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)),$$

een maat op $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ met de eigenschap dat (zie (2.2.2), (2.2.3) en stelling A 2.7 en de daarop volgende voorbeelden)

$$\mu_{F_X}(B) = P_X(B) \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n));$$

P_X heet de *kansverdeling* van X.

Geheel analoog aan stelling 2.1.6 (zie ook K & S) geldt

Stelling 2.2.8. Een functie $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de voorwaarden a t.m. d van stelling 2.2.4 is de verdelingsfunctie van een n-dimensionale stochastische vector.

Opgave 2.2.9. Laat zien dat de functie

$$H(x,y) := 1_{[x+y \geq 0]}(x,y),$$

die voldoet aan a,b en c van stelling 2.2.4, geen verdelingsfunctie is.

Opgave 2.2.10. Als $F_1(x),\dots,F_n(x)$ 1-dimensionale verdelingsfuncties zijn, dan is de functie F, gedefinieerd door

$$F(x_1,\dots,x_n) = \prod_1^n F_j(x_j) ,$$

een verdelingsfunctie en

$$\mu_F(a,b] = \prod_1^n \{F_j(b_j) - F_j(a_j)\}.$$

Opgave 2.2.11 Als *F* een *n-dimensionale verdelingsfunctie is, dan is voor n*=1 ook F^p een verdelingsfunctie, voor iedere $p > 0$. Dit geldt niet voor $n \geq 2$; geef een tegenvoorbeeld voor $n = 2$.

Voor de discontinuïteiten van meer-dimensionale verdelingsfuncties geldt het volgende analogon van stelling 2.1.4.

Stelling 2.2.12. Een verdelingsfunctie $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continu op $\mathbb{R}^n$ met uitzondering van punten in ten hoogste aftelbaar veel hypervlakken van de vorm $x_j = c$ $(1 \leq j \leq n)$.

Bewijs: We bewijzen de stelling alleen voor $n = 2$. Zij $X = (X_1,X_2)$. Volgens stelling 2.1.4 zijn F_{X_1} en F_{X_2} continu op $\mathbb{R} \setminus D_1$ resp. $\mathbb{R} \setminus D_2$, waarbij D_1 en D_2 aftelbare verzamelingen zijn. Nu geldt op $(\mathbb{R} \setminus D_1) \times (\mathbb{R} \setminus D_2) = \mathbb{R}^2 \setminus D$ (ga na) met $D = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in D_1 \text{ of } x_2 \in D_2\}$

$$|F_X(x+h)-F_X(x)| \leq F_X(x+|h|) - F_X(x-|h|) \leq F_{X_1}(x_1+|h_1|) - F_{X_1}(x_1-|h_1|) +$$

$$+ F_{X_2}(x_2+|h_2|) - F_{X_2}(x_2-|h_2|) \to 0 \text{ als } (h_1,h_2) \to (0,0) \text{ o.g.v. de continuïteit}$$

van F_{X_1} en F_{X_2}. Dus F_X is continu op $\mathbb{R}^2 \setminus D$, waarbij D bestaat uit de punten van een aftelbare verzameling hypervlakken van de vorm $x_j = c$. Het bewijs is analoog voor $n > 2$.

Definitie 2.2.13. Een verdelingsfunctie $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heet

a. *absoluut continu* als er een niet-negatieve Borel-meetbare functie $f\colon \mathbb{R}^n \to$ [illegible] bestaat, de *kansdichtheid* van F, zó dat

$$F(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n$$

b. *discreet* als er een *aftelbare* verzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ bestaat zó dat

$$\mu_F(S) = 1$$

c. *singulier* als F continu is op $\mathbb{R}$ en er een Borel-meetbare $S \subset \mathbb{R}$ bestaat zó dat

$$\lambda_n(S) = 0 \text{ en } \mu_F(S) = 1;$$

hierbij stelt λ_n de Lebesgue-maat voor op $\mathbb{R}^n$.

Opgave 2.2.14. Als F absoluut continu is op $\mathbb{R}^n$ met kansdichtheid f, dan geldt voor alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (zie lemma 2.2.6)

$$\mu_F(A) = \int \underset{A}{\cdots} \int f(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n .$$

Stelling 2.2.15 (decompositiestelling van Lebesgue). Als $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een verdelingsfunctie is dan bestaan er verdelingsfuncties F_a, F_d en F_s met de eigenschap dat

$$F = p_1F_a + p_2F_d + p_3F_s,$$

waarbij p_1, p_2 en p_3 niet-negatief zijn met $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ en F_a, F_d en F_s resp. absoluut continu, discreet en singulier zijn.

Bewijs: Zie bijv. [6].

2.3 De stelling van Kolmogorov

De in deze paragraaf behandelde stelling is onder meer van belang i.v.m. met de existentie van stochastische processen.

Definitie 2.3.1. Zij $X = \{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ een verzameling 1-dimensionale stochastische grootheden. Onder de *kansverdeling* van X verstaan we de verzameling van de kansverdelingen van alle eindige deelverzamelingen van X (vergelijk opmerking 2.2.7).

Stelling 2.3.2. Zij $X = \{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ zoals in definitie 2.3.1 en zij $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ de verdelingsfunctie van $(X_{\lambda_1},\ldots,X_{\lambda_n})$. Dan geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ dat $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ voldoet aan de voorwaarden a t.m. d van stelling 2.2.4, terwijl bovendien de volgende *consistentie-eisen* vervuld zijn:

e. $\lim\limits_{x_{\lambda_k}\to\infty} F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_n}) =$

$F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_{k-1}},x_{\lambda_{k+1}},\ldots,x_{\lambda_n}),$

f. $F_{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_n}}(x_{\lambda_{i_1}},\ldots,x_{\lambda_{i_n}}) = F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_n})$

voor iedere permutatie $(i_1,\ldots,i_n)$ van $(1,2,\ldots,n)$.

Bewijs: zie stelling 2.2.2 en definitie 2.2.1.

<u>Stelling 2.3.3</u> *(Stelling van Kolmogorov). Zij Λ een willekeurige indexverzameling. Laat voor $n \in \mathbb{N}$ en $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ functies $F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn die voldoen aan de eisen a t.m. f uit stelling 2.3.2. Dan bestaat er een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ en een verzameling X van stochastische grootheden: $X = \{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ zó dat

$$F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = F_{X_{\lambda_1},\ldots,X_{\lambda_n}} \qquad (n \in \mathbb{N}\ ;\ \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda).$$

Bewijs: Voor het bewijs hebben we de volgende voortzettingsstelling nodig (zie stelling A 2.7.): Zij $\mathcal{F}_0$ een algebra van deelverzamelingen van Ω en zij $\sigma\{\mathcal{F}_0\} = \mathcal{F}$. Zij verder P een kans op $\mathcal{F}_0$ (d.w.z. P voldoet aan voorwaarde c van definitie 1.1.1 *voor zover* $\bigcup\limits_1^\infty A_j \in \mathcal{F}_0$).
Dan kan P op eenduidige wijze worden voortgezet tot een kans op $\mathcal{F}$.

Het bewijs is analoog aan dat van stelling 2.1.6, maar wat gecompliceerder: we kiezen

$$\Omega = \mathbb{R}^\Lambda = \mathop{X}_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R}_\lambda \qquad (\text{met } \mathbb{R}_\lambda = \mathbb{R} \text{ voor } \lambda \in \Lambda)$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda) := \sigma\{\mathcal{F}_0\},$$

met $\mathcal{F}_0$ de verzameling van alle *cylinderverzamelingen* met eindige Borel-meetbare basis :

$$(2.3.1)\quad \mathcal{F}_0 = \{A = B \times \mathbb{R}^{\Lambda\setminus\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}}),\ n \in \mathbb{N},$$

$$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda\}.$$

Voor $A \in \mathcal{F}_0$ definiëren we

$$\text{(2.3.2)} \qquad P(A) = \mu_{F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}(B).$$

Om de voortzettingsstelling te kunnen gebruiken moeten we verifiëren:

a. $\mathcal{F}_0$ is een algebra en P is additief op $\mathcal{F}_0$

b. P is σ-additief op $\mathcal{F}_0$ (voor zover $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{F}_0$)

Uit de voortzettingsstelling volgt dan dat P in (2.3.2) eenduidig voortzetbaar is tot één kans op $\sigma\{\mathcal{F}_0\}$. Als we verder definiëren

$$X = \{X_\lambda \ ; \ \lambda \in \Lambda\} \text{ met } X_\lambda(\omega) = \omega_\lambda \ ,$$

de coordinaat met index λ van $\omega \in \mathbb{R}^\Lambda$, dan geldt

$$\bigcap_{j=1}^{n} [X_{\lambda_j} \le x_j] \in \mathcal{F}_0 \qquad (n \in \mathbb{N} \ ; \ \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda; \ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n),$$

zodat (zie (2.3.1), (2.3.2) en lemma 2.2.6)

$$F_{X_{\lambda_1},\ldots,X_{\lambda_n}}(x_1,\ldots,x_n) = \mu_{F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}\left(\bigtimes_1^n (-\infty,x_j]\right) =$$

$$= F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Om het bewijs te voltooien hebben we nog nodig:

Bewijs van a: ga na

Bewijs van b: equivalent met b is (ga na)

$$\text{(2.3.3)} \qquad (\mathcal{F}_0 \ni A_n \downarrow \emptyset) \Rightarrow (P(A_n) \to 0) \qquad (n \to \infty).$$

We zullen (2.3.3) bewijzen door aan te tonen dat $\bigcap_1^\infty A_n \neq \emptyset$, als $P(A_n) \to p > 0$. Laat dus $A_n \downarrow \emptyset$ met $P(A_n) \to p > 0$ en zij $k_n \in \mathbb{N}$ een stijgende rij met de eigenschap (zie (2.3.1))

$$A_n = B_n \times \mathbb{R}^{\Lambda \setminus \{\lambda_1,\ldots,\lambda_{k_n}\}}$$

met $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{k_n}\}})$; dit kan omdat de $A_n \in F_0$ bepaald worden door eindig veel λ's. Zonder beperking (we kunnen A's toevoegen) nemen we aan dat $k_n = n$, zodat $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nu bestaat er voor iedere *eindige* maat μ op $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, iedere $\varepsilon > 0$ en elke $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ een *begrensde gesloten* verzameling $\tilde{B}$ met de eigenschap dat $\tilde{B} \subset B$ en $\mu(B \setminus \tilde{B}) < \varepsilon$ (zie stelling A 2.15). Er bestaan dus $\tilde{B}_n$ met

$$\tilde{B}_n \subset B_n \subset \mathbb{R}^{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}} \quad \text{en} \quad \mu_{F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}(B_n \setminus \tilde{B}_n) < \varepsilon\, 2^{-n}.$$

Zij nu $\tilde{A}_n$ de met $\tilde{B}_n$ corresponderende verzameling in F_0 (zie (2.3.1)), dan geldt ook

$$P(A_n \setminus \tilde{A}_n) < \varepsilon\, 2^{-n}.$$

Als nu $E_n := \bigcap_1^n \tilde{A}_k$, dan is

$$P(A_n E_n^*) = P(\bigcup_1^n (A_n \tilde{A}_k^*)) \le P(\bigcup_1^n (A_k \tilde{A}_k^*)) < \sum_1^n \varepsilon\, 2^{-k} < \varepsilon.$$

Nu is dus

$$P(E_n) \ge P(E_n A_n) = P(A_n) - P(A_n E_n^*) > P(A_n) - \varepsilon \ge p - \varepsilon > 0,$$

zodat $E_n \neq \emptyset$. Voor iedere n is er dus een $\omega(n) \in \Omega$ met $\omega(n) \in E_n$ en dus $\omega(n) \in \tilde{A}_k$ voor $k \le n$, d.w.z.

$$(\omega_{\lambda_1}(n),\ldots,\omega_{\lambda_k}(n)) \in \tilde{B}_k \qquad (n \ge k).$$

De rij $\omega_{\lambda_1}(n)$ is begrensd ($\tilde{B}_1$ is begrensd) en heeft dus een convergente deelrij (die we na hernummeren aangeven met) $\omega_{\lambda_1}(1,n) \to w_1 \in \tilde{B}_1$ (immers $\tilde{B}_1$ is gesloten). Vervolgens heeft de rij $(\omega_{\lambda_1}(1,n), \omega_{\lambda_2}(1,n))$ een convergente deelrij $(\omega_{\lambda_1}(2,n), \omega_{\lambda_2}(2,n)) \to (w_1,w_2) \in \tilde{B}_2$. Zo vinden we voor iedere k een deelrij $(\omega_{\lambda_1}(k,n),\ldots,\omega_{\lambda_j}(k,n)) \to (w_1,\ldots,w_j) \in \tilde{B}_j$ voor $j=1,2,\ldots,k$. Nu convergeert dus $\omega_{\lambda_k}(n,n) \to w_k$ voor alle k. Zij nu $\omega \in \Omega$ een punt met

$\omega_{\lambda_k} = w_k$ (k=1,2,...). Dan is $\omega \in \tilde{A}_k$ voor k=1,2,... en dus $\omega \in A_k$ voor k=1,2,..., zodat $\bigcap_1^\infty A_k \neq \emptyset$ .Tegenspraak.

Opgave 2.3.4. Geef het bewijs van a op blz. 19 .

Opmerking 2.3.5. $\mathbb{R}^\Lambda$ is de verzameling van alle *reële functies* gedefinieerd op Λ en F is de σ-algebra voortgebracht door alle verzamelingen van de vorm

$$(2.3.4) \qquad \{h \in \mathbb{R}^\Lambda \mid h(\lambda_j) \le x_j \ (1 \le j \le n)\} =: C(\lambda_1,\dots,\lambda_n;x_1,\dots,x_n)$$

met $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ en $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, terwijl

$$P(C(\lambda_1,\dots,\lambda_n;x_1,\dots,x_n)) = F_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(x_1,\dots,x_n)$$

Opmerking 2.3.6. Stelling 2.3.3 maakt het mogelijk om te zeggen:
"$X_1,X_2,\dots$ zijn onafhankelijke stochasten met verdelingsfuncties $F_1,F_2,\dots$," zonder daarbij een kansruimte te specificeren. Immers de verzameling verdelingsfuncties van de vorm

$$F_{k_1,\dots,k_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_1^n F_{k_j}(x_j)$$

voldoet aan de voorwaarden van stelling 2.3.3. Deze stelling maakt het mogelijk om de kansrekening goeddeels te beperken tot de studie van verdelingsfuncties en de bijbehorende kansverdelingen.

2.4. Verwachting

Definitie 2.4.1. Als $X: \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast is op (Ω,F,P) dan wordt de *verwachting* van X, notatie: EX, gedefinieerd door

$$(2.4.1) \qquad E\,X = \int_\Omega X(\omega)dP,$$

als de integraal in (2.4.1) als Lebesgue integraal bestaat.

Opmerking 2.4.2. Als $X = X^+ - X^-$ met $X^+ = \max(0,X)$ en $X^- = -\min(0,X)$, dan betekent het *bestaan* van E X dat $E\,X = E\,X^+ - E\,X^-$, waarbij $E\,X^+ =$ óf $E\,X^- = \infty$ mogen zijn (niet beide). Zie ook definitie A 4.2.

Lemma 2.4.3. Als $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ een stochast is op $(\Omega,\mathcal{F},P)$, dan geldt

$$P_X(B) = \int_{X^{-1}(B)} dP = \int_B d\mu_{F_X} =: \int_B dF_X = \mu_{F_X}(B) \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Bewijs: zie opmerking 2.2.7 en stellingen A 2.7 en A 4.3.

Stelling 2.4.4. Als $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-meetbaar is en als $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ een stochast is op $(\Omega,\mathcal{F},P)$ dan bestaat $E\, h(X)$ d.e.s.d.a. $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dF_X(x)$ bestaat en in dat geval is

$$(2.4.2) \qquad E\, h(X) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dF_X(x)$$

Bewijs: Zij eerst h een niet-negatieve trapfunctie, dus

$$h(x) = \sum_1^N h_k\, 1_{B_k}(x)$$

met $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, disjunct en met $\bigcup_1^N B_k = \mathbb{R}^n$. Dan is ook $h(X)$ een trapfunctie, n.l.

$$h \circ X(\omega) = \sum_1^N h_k\, 1_{X\in B_k}(\omega) = \sum_1^N h_k\, 1_{X^{-1}(B_k)}(\omega).$$

Nu is volgens definitie 2.4.1 (zie ook stelling A 4.3)

$$E\, h(X) = \sum_1^N h_k\, P(X^{-1}(B_k)) = \sum_1^N h_k\, \mu_{F_X}(B_k)$$

o.g.v. lemma 2.4.3. De laatste som is (definitie) gelijk aan de integraal in het rechter lid van 2.4.2.

Als h een niet-negatieve Borel-meetbare functie is, dan bestaan er (zie stelling A 4.4) niet-negatieve trapfuncties $t_k \uparrow h$ met $t_k \circ X \uparrow h \circ X$, waarbij

$$E\, h(X) = \int_\Omega h \circ X\, dP = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega t_k \circ X\, dP = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)dF_X = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)dF$$

Tenslotte geldt voor willekeurige h dat $h = h^+ - h^-$, waarbij voor h^+ en h^- (2.4.2) geldt. Nu geldt (2.4.2) dus ook voor h, als minstens één van $E\, h^+(X)$ en $E\, h^-(X)$ eindig is.

Gevolg 2.4.5. Als $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ een discrete stochast is, dan is (vergelijk definitie 2.2.13),

$$E\, h(X) = \sum_S h(x)P(X=x);$$

als X een absoluut continue verdeling heeft met kansdichtheid f, dan is

$$E\, h(X) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f_X(x)dx.$$

Bewijs: Zie stelling 2.4.4 , lemma 2.4.3 en definitie 2.2.13.

Gevolg 2.4.6. Als X een 1-dimensionale stochast is met $F_X = F$, dan is

$$E\, X = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty} \{1 - F(x)\}dx$$

Bewijs: Zie K & S en stelling A 5.4 (Fubini).

Voorbeeld 2.4.7. Zij $F = F_X$ de verdelingsfunctie in voorbeeld 2.1.15, dan is F symmetrisch t.o.v. $x = \frac{1}{2}$, d.w.z. $F(\frac{1}{2} - x) = 1 - F(\frac{1}{2} + x)$.
Nu is dus o.g.v. gevolg 2.4.6.

$$E\, X = \int_0^1 \{1 - F(x)\}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{1 - F(x + \tfrac{1}{2})\}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \{1 - F(x + \tfrac{1}{2}) + 1 - F(\tfrac{1}{2} - x)\}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \{1 - F(x + \tfrac{1}{2}) + F(x + \tfrac{1}{2})\}dx = \tfrac{1}{2},$$

zoals o.g.v. de symmetrie te verwachten was.

Opgave 2.4.8. Als X en Y 1-dimensionale stochasten zijn, dan geldt

$$E\, XY - E\, X\, EY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{F_{X,Y}(x,y) - F_X(x)F_Y(y)\}\, dxdy.$$

Definitie 2.4.9. Als X en Y 1-dimensionale stochasten zijn, dan definiëren we $Z = X + iY$ $(i^2 = -1)$ door $Z(\omega) = X(\omega) + i\,Y(\omega)$ en

$$E\,Z = E\,X + i\,E\,Y.$$

Definitie 2.4.10. Laat X en Y 1-dimensionale stochasten zijn. Dan heet:

$E\,X^n$ het n-de *moment* van X,
$E|X|^n$ het n-de *absolute moment* van X,
$E(X - EX)^n$ het n-de *centrale moment* van X,
$E(X - EX)^2 =: \mathrm{var}\,X = \sigma^2(X)$ de *variantie* van X
$E((X - EX)(Y - EY)) =: \mathrm{cov}(X,Y)$ de *covariantie* van X en Y
$\mathrm{cov}(X,Y)/(\sigma(X)\sigma(Y)) =: \rho(X,Y)$ de *correlatie coefficient* van X en Y

Definitie 2.4.11. Een functie $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ met $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heet *convex* als er voor iedere $x_0 \in (a,b)$ een lineare functie ℓ bestaat met de eigenschap $h(x_0) = \ell(x_0)$ en $h(x) \geq \ell(x)$ voor alle $x \in (a,b)$, d.w.z. voor iedere $x_0 \in (a,b)$ is er een $\lambda(x_0) \in \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x \in (a,b)$

$$(2.4.3)\qquad h(x) \geq \ell(x) = h(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$$

Opgave 2.4.12. Een convexe functie is Borel-meetbaar en de functie λ in (2.4.3) is niet-dalend en dus Borel-meetbaar (zie bijv. [4]).

Stelling 2.4.13 (ongelijkheid van Jensen). Als $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ een convexe functie is en X een stochast met waarden in (a,b), waarvoor EX en Eh(X) bestaan, dan geldt

$$E\,h(X) \geq h(EX).$$

Bewijs: Kies $x_0 = E\,X$, dan geldt o.g.v. (2.4.3) en de lineariteit van E

$$E\,h(X) \geq E\,\ell(X) = \ell(EX) = h(EX)$$

Stelling 2.4.14. Als Y een niet-negatieve stochastische grootheid is met $E\,Y^b < \infty$, dan is

$$(2.4.4)\qquad \{E\,Y^t\}^{1/t} \quad \text{niet dalend op } (0,b)$$

Bewijs: De functie x^r is voor $r \geq 1$ convex op $(0,\infty)$ (ga na dat (2.4.3) geldt), zodat voor $X \geq 0$ met $E\,X^r < \infty$ o.g.v. stelling 2.4.13 geldt

$$E\,X^r \geq (EX)^r .$$

Substitutie van $X = Y^{t/r}$ levert $EY^t \geq (EY^{t/r})^r$, equivalent met (2.4.4)

<u>Stelling 2.4.15.</u> Als $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positief en niet-dalend is en als X een niet-negatieve stochastische grootheid is met $E\,h(X) < \infty$, dan geldt

$$P(X \geq a) \leq \frac{E\,h(X)}{h(a)} \qquad (a > 0)$$

Bewijs: $E\,h(X) = \int_0^\infty h(x)dF_X \geq \int_{x\geq a} h(x)dF_X \geq h(a)\,P(X \geq a)$

<u>Gevolg 2.4.16</u> (ongelijkheid van Chebyshev). Als $E\,X^2 < \infty$, dan is

$$P(|X - E\,X| \geq a) \leq \frac{\operatorname{var} X}{a^2} \qquad (a > 0)$$

<u>Opgave 2.4.17.</u> De functie $\ell(t) := \log E|X|^t$ is *convex* . Bewijs dat

<u>Opgave 2.4.18.</u> Zij K_n binomiaal verdeeld met $E\,K_n = np$ en $\sigma^2(K_n) = np(1-p)$. Dan is

$$(2.4.5) \qquad P\left(\left|\frac{K_n - np}{\sqrt{n}}\right| \geq x\right) \leq 2\exp(-2x^2).$$ Bewijs dat.

<u>2.5 Karakteristieke functies</u>

<u>Definitie 2.5.1.</u> Als X een stochastische grootheid is, dan heet de functie $\varphi_X: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\varphi_X(t) = E\,e^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_X(x)$$

de *karakteristieke functie* van X (ook wel: van F_X of van f_X).

Opmerking 2.5.2. De functie φ_X, de Fourier-Stieltjes getransformeerde van F_X, bestaat voor iedere X. Voor niet-negatieve X gebruikt men dikwijls

$$\check{F}_X(\tau) = E\, e^{-\tau X} = \int_0^\infty e^{-\tau x}\, dF_X(x) \ ,$$

de Laplace-Stieltjes getransformeerde van F_X. Als $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1$, dan gebruikt men liever

$$P_X(z) = E\, z^X = \sum_{n=0}^\infty P(X = n) z^n ,$$

de *kansengenererende functie* van X. Als f_X bestaat, dan is φ_X de (gewone) Fourier-getransformeerde van f_X (vergelijk opgave 2.2.14 en lemma 2.4.3).

Definitie 2.5.3. Voor een n-dimensionale stochastische grootheid wordt de karakteristieke functie φ_X: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\varphi_X(t) = E\, e^{i<t,X>} = \int e^{i<t,x>}\, dF_X(x)$$

met $<t,x> = \sum_1^n t_j x_j$.

Stelling 2.5.4. Zij X een n-dimensionale stochastische grootheid. Dan geldt

a. $\varphi_X(0) = \varphi_X(0,\ldots,0) = 1$

b. $|\varphi_X(t)| \le 1 \quad (t \in \mathbb{R}^n)$

c. φ_X is uniform continu op $\mathbb{R}^n$.

Bewijs: ga na.

Stelling 2.5.5. Zij X een stochastische n-dimensionale vector en laat a en b in $\mathbb{R}^n$ zijn. Als $Y = a.X + b$, dan is

$$\varphi_Y(t) = e^{i<t,b>}\, \varphi_X(a.t),$$

waarbij $a.X = (a_1X_1,\ldots,a_nX_n)$ en $a.t = (a_1t_1,\ldots,a_nt_n)$.

Bewijs: ga na.

Stelling 2.5.6. $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

Bewijs: ga na.

Gevolg 2.5.7. Als $\varphi_X(t)$ reëel is voor alle t, dan is X symmetrisch t.o.v. 0, d.w.z.: dan hebben X en -X dezelfde kansverdeling (vergelijk gevolg 2.5.12).

Definitie 2.5.8. Zij F een Borel-meetbare functie. De verzameling punten waar F continu is geven we aan met C(F).

Stelling 2.5.9 (omkeerstelling van Paul Lévy). Zij φ de karakteristieke functie van een 1-dimensionale verdelingsfunctie F.
Zij verder $\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}\{F(x) + F(x-0)\}$. Dan geldt

$$(2.5.1.)\quad \tilde{F}(a+h) - \tilde{F}(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1-e^{-ith}}{it} e^{-ita} \varphi(t)dt.$$

Bewijs: Zij $S(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_x^y \frac{\sin u}{u} du$. Dan is $S(x,y)$ begrensd op $\mathbb{R}^2$ en

$$(2.5.2)\quad \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}} S(x,y) = 1^{1)} ;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} S(x,y) = \tfrac{1}{2} ;\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} S(x,y) = 0$$

Zonder essentiële beperking nemen we $h > 0$. Zij $I_T := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-it(a+h)}}{it} \varphi(t)dt.$
Dan geldt o.g.v. de stelling van Fubini (gevolg A 5.4):

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-a-h)}}{it} dt\} dF(x)$$

Nu is $\int_{-T}^{T} \frac{e^{itv} - e^{it(v-h)}}{it} dt = 2\pi\, S((v-h)T,\ vT)$ (ga na), zodat

$$I_T = \int_{-\infty}^{\infty} S((x-a-h)T\ ,\ (x-a)T) dF(x).$$

Op grond van (2.5.2) en gemajoreerde convergentie (stelling A 4.10) geldt nu

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x),$$

1) Zie Wsk. 30.

met

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (a < x < a+h) \\ \frac{1}{2} & (x=a \text{ of } x=a+h) \\ 0 & (x<a \text{ of } x>a+h) \end{cases}$$

d.w.z. $\lim\limits_{T\to\infty} I_T = F(a+h-0) - F(a) + \frac{1}{2}\{F(a) - F(a-0)\} + \frac{1}{2}\{F(a+h) - F(a+h-0)\} =$

$$= \tilde{F}(a+h) - \tilde{F}(a).$$

Als $a \in C(F)$ en $a + h \in C(F)$, kunnen we $\tilde{F}$ in (2.5.1) vervangen door F.

<u>Gevolg 2.5.10.</u> Als φ de karakteristieke functie is van een 1-dimensionale verdelingsfunctie F en als $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt < \infty$, dan is F absoluut continu met kansdichtheid

$$(2.5.3) \qquad F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\varphi(t)dt$$

Bewijs: Uit (2.5.1) volgt dat

$$(2.5.4) \qquad \frac{\tilde{F}(x+h)-\tilde{F}(x)}{h} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-ith}}{ith}\, e^{-itx}\,\varphi(t)dt,$$

waar de integraal in het rechterlid van (2.5.4) nu absoluut convergeert (zie gegeven) omdat $|(1 - e^{ith}) / (ith)| \le 2$. Voor $h \to 0$ is de integraal begrensd, zodat $\tilde{F}$ en dus ook F continu is, d.w.z. $\tilde{F} = F$. Voor $h \to 0$ vinden we dan m.b.v. gemajoreerde convergentie (stelling A 4.10) (2.5.3). Uit (2.5.3) volgt dat F' (uniform) continu is op $\mathbb{R}$, zodat F' inderdaad een dichtheid is van F (vergelijk stelling 2.5.4.c).
Geheel analoog aan stelling 2.5.9 bewijst men

<u>Stelling 2.5.11.</u> Als F een n-dimensionale verdelingsfunctie is met karakteristieke functie φ, dan geldt voor a,b met $\Delta_n(a,b) \subset C(F)$ vergelijk definitie 2.2.3 en (2.2.3))

$$\mu_F(a,b] = \lim_{\substack{T_1\to\infty \\ \vdots \\ T_n\to\infty}} (2\pi)^{-n} \int_{-T_1}^{T_1} \cdots \int_{-T_n}^{T_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{it_k a_k} - e^{it_k b_k}}{it_k}\, \varphi(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Gevolg 2.5.12 (eenduidigheidsstelling). Als F_1 en F_2 n-dimensionale verdelingsfuncties zijn met karakteristieke functies φ_1 en φ_2, dan is $F_1 = F_2$ dan en slechts dan als $\varphi_1 = \varphi_2$.

Bewijs: Met de omkeerstelling volgt uit $\varphi_1 = \varphi_2$ dat $F_1(x) = F_2(x)$ voor alle $x \in C(F_1) \cap C(F_2)$. Omdat verdelingsfuncties bijna overal continu zijn en overal continu van rechts, is dan $F_1(x) = F_2(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Stelling 2.5.13. Laat F, F_1 en F_2 verdelingsfuncties zijn met karakteristieke functies resp. φ, φ_1 en φ_2. Dan geldt (zie definitie 2.1.17)

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \Leftrightarrow F = F_1 * F_2$$

Bewijs: Zie blz. 34, opmerking 3.2.7.

Gevolg 2.5.14. De operatie * is commutatief en associatief.

Opgave 2.5.15. Als $(X_1,\dots,X_n)$ en $(Y_1,\dots,Y_n)$ stochastische vectoren zijn met de eigenschap dat $\Sigma a_j X_j$ en $\Sigma a_j Y_j$ dezelfde verdeling hebben voor alle $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, dan hebben $(X_1,\dots,X_n)$ en $(Y_1,\dots,Y_n)$ dezelfde verdeling.

3. ONAFHANKELIJKHEID

3.1 Onafhankelijke gebeurtenissen

Zonder dit telkens te vermelden nemen we in het volgende aan dat alle optredende gebeurtenissen en stochastische grootheden gedefinieerd zijn op één kansruimte (Ω, F, P)

Definitie 3.1.1. De gebeurtenissen A en B heten (onderling) onafhankelijk (afkorting: o.o.) als

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Stelling 3.1.2. Als A en B o.o. zijn, dan zijn A en B^* o.o.

Stelling 3.1.3. Als A en B o.o. zijn en $P(B) > 0$ is, dan geldt

$$P(A|B) = P(A)$$

Definitie 3.1.4. De gebeurtenissen $\{B_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ heten o.o. als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ met $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$ geldt

$$P\left(\bigcap_1^n B_{\lambda_j}\right) = \prod_1^n P(B_{\lambda_j}).$$

Stelling 3.1.5. Als de gebeurtenissen $\{A_1,\ldots,A_m, B_1,\ldots,B_n\}$ o.o. zijn, dan zijn ook $\bigcap_1^m A_j$ en $\bigcap_1^n B_j$ o.o.

Stelling 3.1.6. Als $C = C_1 \cup C_2$ een verzameling o.o. gebeurtenissen is, waarbij $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ en als men C_2^* definieert door $C_2^* = \{C^* \mid C \in C_2\}$, dan is ook de verzameling gebeurtenissen $C_1 \cup C_2^*$ o.o.

Bewijs: We moeten bewijzen dat voor $\{A_1,\ldots,A_m, B_1,\ldots,B_n\} \subset C$ geldt dat $\{A_1,\ldots,A_m, B_1^*,\ldots,B_n^*\}$ o.o. zijn. Dit gaat eenvoudig met inductie naar n.

Opgave 3.1.7. Maak het bewijs van stelling 3.1.6 af.

Definitie 3.1.8. De *collecties* gebeurtenissen $\{\mathcal{B}_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ heten o.o. als voor iedere keuze van $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ de *gebeurtenissen* $\{B_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ o.o. zijn.

Definitie 3.1.9. Een collectie $\mathcal{D}$ van gebeurtenissen heet een *Dynkin-systeem* als : (i)$\Omega \in \mathcal{D}$; (ii) $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$ en $A \supset B$, dan $A \setminus B \in \mathcal{D}$; (iii) $A_j \in \mathcal{D}$ $(j = 1,2,\ldots)$ disjunct, dan $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{D}$.

Definitie 3.1.10. Zij $\mathcal{B}$ een collectie gebeurtenissen. Het kleinste Dynkin-systeem dat $\mathcal{B}$ omvat, heet het *door* $\mathcal{B}$ *voortgebrachte* Dynkin-systeem. Dit wordt aangegeven met $\mathcal{D}(\mathcal{B})$.

Opgave 3.1.11. Laat zien dat een Dynkin-systeem dat gesloten is onder de vorming van eindige doorsneden, een σ - algebra is.

Stelling 3.1.12. Laat $\{\mathcal{B}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijke collecties gebeurtenissen zijn. Dan zijn ook de collecties $\{\mathcal{D}(\mathcal{B}_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk.

Bewijs: Voor $\lambda_0 \in \Lambda$ definiëren we $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$ als de verzameling van alle $B \in \mathcal{F}$ met de eigenschap dat $B, B_{\lambda_1}, \ldots, B_{\lambda_n}$ onafhankelijk zijn voor alle $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ en alle $n \in \mathbb{N}$; formeel

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0} = \{B \mid \{\{B\}\} \cup \{\mathcal{B}_\lambda; \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}\} \text{ zijn o.o. collecties}\} .$$

Nu is $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$ een Dynkin-systeem. We verifiëren de eigenschappen in definitie 3.1.9: (i) triviaal; (ii) als $A \in \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$, $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$, $A \supset B$, $B_j \in \mathcal{B}_{\lambda_j}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ met $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$, dan geldt

$$P((A \setminus B) \bigcap_1^n B_j) = P(A \bigcap_1^n B_j) - P(B \bigcap_1^n B_j) = P(A \setminus B) \prod_1^n P(B_j),$$

zodat $A \setminus B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$; (iii) bewijst men analoog. De collecties die ontstaan door in $\{\mathcal{B}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ de colectie $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ door $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$ te vervangen zijn(per definitie) onafhankelijk, dus ook de collecties die ontstaan door vervanging van $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ door $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\lambda_0}) \subset \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$. We kunnen dus willekeurig veel van de $\mathcal{B}_\lambda$ vervangen door $\mathcal{D}(\mathcal{B}_\lambda)$ zonder de onafhankelijkheid te verliezen.Dit betekent (zie definities 3.1.8 en 3.1.4) dat de collecties$\{\mathcal{D}(\mathcal{B}_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk zijn.

Stelling 3.1.13. Als de collecties gebeurtenissen $\{\mathcal{B}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk zijn en gesloten onder de vorming van eindige doorsneden, dan zijn ook de collecties $\{\sigma\{\mathcal{B}_\lambda\}; \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk.

Bewijs: Blijkens stelling 3.1.12 is het voldoende om het volgende lemma te bewijzen.

Lemma 3.1.14. Als een collectie gebeurtenissen $\mathcal{B}$ gesloten is onder de vorming van eindige doorsneden, dan is

$$\sigma\{\mathcal{B}\} = \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

Bewijs: Iedere σ-algebra is een Dynkin-systeem, zodat $\sigma\{\mathcal{B}\} \supset \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Het is dus voldoende om te laten zien dat $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ een σ-algebra is, of (zie opgave 3.1.11) dat $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ gesloten is onder vorming van eindige doorsneden. Definieer hiertoe voor willekeurige $D \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$

$$\mathcal{D}_D = \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) \mid Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{B})\} .$$

Dan is $\mathcal{D}_D$ een Dynkin-systeem (verifieer definitie 3.1.9). Nu geldt o.g.v. het gegeven voor iedere $B \in \mathcal{B}$ dat $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_B$ en dus $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}_B$. Nu is dus $D \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ voor iedere $D \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ en iedere $B \in \mathcal{B}$, zodat $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_D$ en dus $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}_D$ voor iedere $D \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Maar dit betekent dat $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ gesloten is onder eindige doorsnedevorming.

Definitie 3.1.15. Experimenten $\{(\Omega,F_j,P) \; ; \; j \in I\}$ heten o.o. als $\{F_j \; ; \; j \in I\}$ o.o. zijn (hierbij is $F_j \subset F$, $j \in I$).

Experimenten gedefinieerd op afzonderlijke kansruimten kunnen als volgt tot o.o. experimenten worden gemaakt: definieer $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (Cartesische product), $F = F_1 \otimes F_2$ (product σ-algebra) en $P = P_1 \times P_2$ (productmaat; zie definities A 1.9 en A 2.11).

3.2 Onafhankelijke stochastische grootheden

Definitie 3.2.1. De stochastische grootheden (mogelijk met verschillende dimensies) $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ heten o.o. als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ geldt

$$F_{X_{\lambda_1},\ldots,X_{\lambda_n}} = \prod_1^n F_{X_{\lambda_j}} .$$

Stelling 3.2.2. Als $X_1,X_2,\ldots,X_n$ o.o. stochastische grootheden zijn met $X_j\colon \Omega \to \mathbb{R}^{k_j}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ en $h_1,\ldots,h_n$ zijn Borel-meetbare functies, $h_j\colon \mathbb{R}^{k_j} \to \mathbb{C}$ met $E \prod_1^n |h_j(X_j)| < \infty$ (of met $h_j \geq 0$), dan geldt

$$E \prod_1^n h_j(X_j) = \prod_1^n E\, h_j(X_j).$$

Bewijs: We beperken het bewijs tot het geval $k_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Nu is $F := F_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_1^n F_j$ met $F_j := F_{X_j}$, zodat (zie opgave 2.2.10)

$$\mu_F(a,b] = \prod_1^n \{F_j(b_j) - F_j(a_j)\},$$

d.w.z. $\mu_F = \mu_{F_1} \times \mu_{F_2} \times \ldots \times \mu_{F_n}$ (productmaat, zie definitie A. 2.11).
Volgens de stelling van Fubini (gevolg A 5.4) geldt nu

$$E \prod_1^n h_j(X_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_1^n h_j(x_j) d\mu_F = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^n h_j(x_j) dF_1 \cdots dF_n$$

$$= \prod_1^n \int_{-\infty} h_j(x_j) dF_j = \prod_1^n E h_j(X_j).$$

voor algemene k_j is het bewijs analoog.

<u>Gevolg 3.2.3.</u> Als $X_1,\ldots,X_n$ o.o. zijn, dan is var $\sum_1^n X_j = \sum_1^n$ var X_j.

<u>Stelling 3.2.4.</u> De stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zijn d.e.s.d. onafhankelijk als

$$(3.2.1) \qquad \varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t) = \prod_1^n \varphi_{X_j}(t_j) \qquad (t=(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n).$$

(Een analoge stelling geldt voor stochastische vectoren).

Bewijs:

a. Als $X_1,\ldots,X_n$ o.o. zijn, dan geldt o.g.v. stelling 3.2.2 (e^{itx} is continu en dus Borel-meetbaar)

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = E\, e^{i<t,X>} = E \prod_1^n e^{it_jX_j} = \prod_1^n E\, e^{it_jX_j} = \prod_1^n \varphi_{X_j}(t_j).$$

b. Als (3.2.1) geldt, dan is $\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_1^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_jx_j} dF_{X_j}$, zodat o.g.v. de stelling van Fubini

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<t,x>} dF_{X_1,\ldots,X_n} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<t,x>} d \prod_1^n F_{X_j},$$

zodat wegens de eenduidigheid (stelling 2.5.12) $F_{X_1,\ldots,X_n} = \prod_1^n F_{X_j}$, d.w.z. $X_1,\ldots,X_n$ zijn o.o.

Gevolg 3.2.5. Als $X_1,\ldots,X_n$ onafhankelijke stochasten zijn en als $h_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ Borel-meetbare functies zijn, dan zijn ook de stochasten $h_1(X_1),\ldots,h_n(X_n)$ o.o. (Analoog voor vectoren).

Gevolg 3.2.6. Als $X_1,\ldots,X_n$ onafhankelijke stochasten zijn (met dezelfde dimensie), dan geldt

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(u) = \prod_1^n \varphi_{X_j}(u) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

Bewijs: Neem $t_j = u$ $(j=1,2,\ldots,n)$ in (3.2.1) (vergelijk definitie 2.5.3).

Gevolg 3.2.7. Als X en Y o.o. stochasten zijn, dan geldt

$$F_{X+Y} = F_X * F_Y$$

Bewijs: $F_{X+Y}(z) = \iint\limits_{x+y\le z} dF_{X,Y} = \iint\limits_{x+y\le z} dF_X dF_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} dF_X\right) dF_y =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)dF_Y(y) = F_X * F_Y .$$

Opmerking 3.2.8. Het bewijs van 2.5.13 volgt nu uit gevolg 3.2.7 en gevolg 3.2.6: Als $F = F_1 * F_2$, dan bestaan er o.o. X en Y met $F_X = F_1$ en $F_Y = F_2$, zodat $F_{X+Y} = F$ en dus $\varphi_1\varphi_2 = \varphi$. Anderzijds volgt uit $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ dat er o.o. X en Y zijn met $\varphi_X = \varphi_1$ en $\varphi_Y = \varphi_2$, zodat $\varphi = \varphi_{X+Y}$ en dus $F = F_{X+Y} = F_1 * F_2$.

Opgave 3.2.9. Laat aan een voorbeeld zien dat gevolgen 3.2.6 en 3.2.7 niet omkeerbaar zijn. Aanwijzing: beschouw X met

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Stelling 3.2.10. De stochasten $\{X_\lambda;\lambda \in \Lambda\}$ zijn d.e.s.d. onafhankelijk als de σ-algebra's $\{\sigma(X_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$ o.o. zijn.

Bewijs. a. Laat $\{\sigma(X_\lambda);\lambda \in \Lambda\}$ o.o. zijn, dan zijn dus voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \subset \Lambda$ de gebeurtenissen $\{X_{\lambda_j} \le x_{\lambda_j};\ j = 1,2,\ldots,n\}$ o.o., d.w.z. $F_{X_{\lambda_1},\ldots,X_{\lambda_n}} = \prod_1^n F_{X_{\lambda_j}}$.

b. Laat $\{X_\lambda;\lambda \in \Lambda\}$ o.o. zijn en $B_\lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ voor $\lambda \in \Lambda$. Dan zijn de functies 1_{B_λ} Borel-meetbaar, zodat o.g.v. gevolg 3.2.5 de stochastische grootheden $\{1_{B_\lambda}(X_\lambda);\lambda \in \Lambda\}$ o.o. zijn. Nu zijn dus (zie stelling 3.1.6) de gebeurtenissen $\{1_{B_\lambda}(X) > 0;\lambda \in \Lambda\} = \{X^{-1}(B_\lambda);\lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk. Dus zijn de σ-algebra's $\{\sigma(X_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$ onafhankelijk (zie definitie 1.3.15).

Opgave 3.2.11. Bewijs stelling 3.2.10 m.b.v. stelling 3.1.13.

3.3 Nul-een wetten

Definitie 3.3.1. Zij $A_1,A_2,\ldots,$ een rij gebeurtenissen. Men definieert de gebeurtenis $[A_n$ o.v.$]$ (A_n "oneindig vaak") en $[A_n$ o.d.d.$]$ (A_n "op den duur") door

$$[A_n \text{ o.v.}] := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{en } [A_n \text{ o.d.d.}] = [A_n^* \text{ o.v.}]^*.$$

Stelling 3.3.2 ("lemma van Borel-Cantelli") Als $\sum_1^\infty P(A_k)<\infty$, dan is $P(A_n \text{ o.v.}) = 0$.

Bewijs: $P(A_n \text{ o.v.}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \le P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$

voor iedere $n \in \mathbb{N}$, zodat $P(A_n \text{ o.v.}) < \varepsilon$ voor iedere $\varepsilon > 0$ o.g.v. de convergentie van $\sum_1^\infty P(A_k)$.

Opmerking 3.3.3. We kunnen de stelling niet omkeren. Kies (Ω,F,P) met $\Omega = (0,1)$, $F = \mathcal{B}((0,1))$ en P = Lebesgue-maat. Neem nu $A_k = (0,\frac{1}{k})$. Dan is $\sum_1^\infty P(A_k) = \sum_1^\infty k^{-1} = \infty$, terwijl $P(A_n \text{ o.v.}) \le P(\bigcup_N^\infty A_k) = P(A_N) = \frac{1}{N}$ voor iedere $N \in \mathbb{N}$. In feite behoort iedere $\omega \in \Omega$ tot maar eindig veel A_k's.

Gevolg 3.3.4. Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij stochasten en $(c_n)_1^\infty$ een rij reële getallen. Zij $Y_n := X_n\, 1_{|X_n|\le c_n}$. Dan geldt:

Als $P(Y_n \to X) = 1$ en $\sum_1^\infty P(|X_n| > c_n) < \infty$, dan is $P(X_n \to X) = 1$.

Bewijs: Zij $A_n = [|X_n| > c_n]$, $A = [A_n \text{ o.v.}]$ en $B = [Y_n \to X]$. Volgens stelling 3.3.2 is $P(A) = 0$, zodat $P(A^*) = P(X_n = Y_n \text{ o.d.d.}) = 1$. Nu is ook $P(A^*B) = 1$. Omdat $[X_n \to X] \supset A^*B$, is ook $P(X_n \to X) = 1$.

<u>Opmerking 3.3.5.</u> Iets algemener geldt onder de voorwaarden van gevolg 3.3.4: Als $\sum_1^\infty P(|X_n| > c_n) < \infty$, dan is $P(X_n \to X) = P(Y_n \to X)$ en analoog

$$P(\sum_1^\infty X_n \text{ convergeert}) = P(\sum_1^\infty Y_n \text{ convergeert}).$$

<u>Stelling 3.3.6</u> (" lemma's van Borel"). Zij $(A_k)_1^\infty$ een rij o.o. gebeurtenissen. Dan geldt

a. $\sum_1^\infty P(A_k) < \infty \Leftrightarrow P(A_n \text{ o.v.}) = 0$

b. $\sum_1^\infty P(A_k) = \infty \Leftrightarrow P(A_n \text{ o.v.}) = 1$.

Bewijs: Voor a $\Rightarrow$ zie stelling 3.3.2. Om het bewijs af te maken hoeven we alleen nog b $\Rightarrow$ te bewijzen. Zij dus $\sum_1^\infty P(A_k) = \infty$. Dan geldt

$$P(A_n \text{ o.v.}) = P(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k^*) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^\infty A_k^*) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^\infty \{1 - P(A_k)\} = 1,$$

omdat uit $\sum_n^\infty P(A_k) = \infty$ volgt dat $\prod_n^\infty \{1 - P(A_k)\} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$.

<u>Opmerking 3.3.7.</u> Implicatie b $\Rightarrow$ geldt i.h.a. niet voor afhankelijke A_k: neem $A_k = A$ $(k = 1,2,\ldots)$ met $P(A) = p \in (0,1)$. Dan is $\sum_1^\infty P(A_k) = \infty$, terwijl $P(A_n \text{ o.v.}) = P(A) = p < 1$.

<u>Definitie 3.3.8.</u> Laat A en B gebeurtenissen (verzamelingen) zijn. Dan heet

$$A \,\Delta\, B := AB^* \cup A^*B$$

het *symmetrische verschil* van A en B.

Lemma 3.3.9. Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij stochasten. Dan bestaat er voor iedere $B \in \sigma(X_1,X_2,\ldots)$ (vergelijk definitie 1.3.16) en iedere $\varepsilon > 0$ een *eindige* rij $n_1,n_2,\ldots,n_k$ en een $A \in \sigma(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$ zó dat $P(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$.

Bewijs: Beschouw de vereniging, F_0, van alle σ-algebra's van de vorm $\sigma(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$ (voortgebracht door eindig veel X_n). Dan is F_0 een algebra en $\sigma\{F_0\} = \sigma(X_1,X_2,\ldots)$. Nu geldt (zie stellingen A 2.4 en A 2.7) voor iedere $B \in \sigma\{F_0\}$

$$P(B) = \inf\{\sum_1^\infty P(A_j) \mid B \subset \bigcup_1^\infty A_j,\ A_j \in F_0 \quad (j = 1,2,\ldots)\}.$$

Dit betekent dat er een rij $(A_n)_1^\infty$ in F_0 bestaat en een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_1^\infty P(A_n) \le P(B) + \varepsilon/2$ en $\sum_{N+1}^\infty P(A_n) < \varepsilon/2$. Voor $A := \bigcup_1^N A_n$ geldt dan $P(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$, terwijl $A \in F_0$.

Definitie 3.3.10 Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij stochasten. De *staart-σ-algebra* I van $(X_n)_1^\infty$ wordt gedefinieerd door

$$I = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n,X_{n+1},\ldots);$$

de elementen van I heten *staartgebeurtenissen*.

Stelling 3.3.11 ("Nul-één wet van Kolmogorov). Als I de staart-σ-algebra is van een rij *onafhankelijke* stochasten $(X_n)_1^\infty$, dan geldt:

Als $B \in I$, dan is $(P(B))^2 = P(B)$, d.w.z. $P(B) = 0$ of $P(B) = 1$.

Bewijs: Zij $(\varepsilon_n)_1^\infty$ een rij positieve getallen met $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Zij $B \in I$. Dan is ook $B \in \sigma(X_1,X_2,\ldots)$ en dus zijn er o.g.v. lemma 3.3.9 getallen $n_{1,1} < \ldots < n_{1,k_1}$ en een $B_1 \in \sigma(X_{n_{1,1}},\ldots,X_{n_{1,k_1}})$ zó dat $P(B \,\Delta\, B_1) < \varepsilon_1$. Omdat ook $I \subset \sigma(X_{n_1,k_1+1}, X_{n_1,k_1+2},\ldots)$ zijn er getallen $n_{1,k_1} < n_{2,1} < \ldots < n_{2,k_2}$ en een $B_2 \in \sigma(X_{n_{2,1}},\ldots,x_{n_{2,k_2}})$ met $P(B \,\Delta B_2) < \varepsilon_2$.

Voortgaande vinden we getallen $m_1 < m_2 < \ldots$ en gebeurtenissen $B_1, B_2, \ldots$ met $B_k \in \sigma(X_{m_k}, \ldots, X_{m_{k+1}-1})$ en $P(B \,\Delta\, B_k) < \varepsilon_k$, zodat (zie opgave 3.3.15) $P(B_k) \to P(B)$. Omdat $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn, zijn ook de $\sigma(X_{m_k}, \ldots, X_{m_{k+1}-1})$ en dus de B_k onafhankelijk. Nu geldt dus enerzijds (ga na)

$$P(B \,\Delta\, (B_n \cap B_{n+1})) = P(B\, B_n^* \cup B\, B_{n+1}^*) + P(B^* B_n B_{n+1}) \le P(B \,\Delta\, B_n) +$$

$$+ P(B \,\Delta\, B_{n+1}) \to 0,$$

zodat (opgave 3.3.15) $P(B_n \cap B_{n+1}) \to P(B)$, terwijl anderzijds

$$P(B_n \cap B_{n+1}) = P(B_n)P(B_{n+1}) \to P(B)P(B) = (P(B))^2.$$

<u>Gevolg 3.3.12</u> Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn met staart-σ-algebra $\mathcal{I}$ en als X een stochast is met $\sigma(X) \subset \mathcal{I}$, dan is X met kans één gelijk aan een constante.

Bewijs: Wegens stelling 3.3.11 is $F_X(x) := P(X \le x) = 0$ of $F_X(x) = 1$, d.w.z. F_X neemt alleen de waarden 0 en 1 aan, d.w.z. $F_X(x)$ springt in een punt $x = x_0$ van 0 naar 1. Dit betekent dat $P(X = x_0) = 1$ (zie lemma 2.1.12). Voor x_0 geldt: $x_0 = \min\{x \mid F_X(x) = 1\}$.

<u>Gevolg 3.3.13</u> Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn dan geldt

$$P(\sum_1^\infty X_j \text{ convergeert}) \text{ is nul of één.}$$

Bewijs: Zij $B = [\sum_1^\infty X_n \text{ convergeert}]$. Dan is $B \in \mathcal{I}$, immers voor iedere $N \in \mathbb{N}$ geldt: $B = [\sum_N^\infty X_n \text{ convergeert}] \in \sigma(X_N, X_{N+1}, \ldots)$. Volgens stelling 3.3.11 is dan $P(B) = (P(B))^2$.

<u>Gevolg 3.3.14</u> Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn dan is de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_1^\infty X_n z^n$ met kans één gelijk aan een constante (mogelijk oneindig).

Bewijs: Zij $R := (\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n})^{-1}$ de convergentiestraal van de machtreeks. Als R een stochastische grootheid is, d.w.z. als $R < \infty$ is met kans één, dan is $P(R = r_0) = 1$ o.g.v. gevolg 3.3.12, omdat $\sigma(R) \subset \mathcal{I}$.
Als $P(R = \infty) > 0$, dan is $P(R = \infty) = 1$, omdat $[R = \infty] \in \mathcal{I}$ (zie ook stelling A 3.

<u>Opgave 3.3.15</u> Als $\lim_{n\to\infty} P(B \,\Delta\, B_n) = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$.

4. CONVERGENTIEBEGRIPPEN

4.1. Zwakke convergentie

Definitie 4.1.1 Een rij verdelingsfuncties $(F_n)_1^\infty$, $F_n: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, heet *zwak convergent* (met limiet F), als er een functie F bestaat met de volgende eigenschappen (zie definitie 2.5.8 en (2.2.3))

a. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \qquad (x \in C(F))$ en $0 \le F(x) \le 1 \quad (x \in \mathbb{R}^k)$

b. F is niet dalend en continu van rechts in x_j $(j = 1,2,\ldots,k)$

c. $\mu_F(a,b] \ge 0 \qquad (a \in \mathbb{R}^k,\ b \in \mathbb{R}^k,\ a < b)$.

We schrijven dan $F_n \xrightarrow{W} F$ (W van *weak* convergence).

Opmerking 4.1.2 Als $F_n \xrightarrow{W} F$, is F niet noodzakelijk een verdelingsfunctie: neem $F_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < n \\ 1 & x \ge n \end{cases} .$$

Lemma 4.1.3 Als $F_n \xrightarrow{W} F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, dan is F continu op $\mathbb{R}^k$ met uitzondering van punten in aftelbaar veel hypervlakken van de vorm $x_j = c$.

Bewijs: Als dat van stelling 2.2.12; F verschilt maar weinig van een verdelingsfunctie: vervang in dat bewijs $F_{X_i}(u_i)$ door $\mu_F(\{x | x_i \le u_i\})$.

Stelling 4.1.4 Als F: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ een verdelingsfunctie is, of de zwakke limiet van een rij verdelingsfuncties, dan geldt

$$\mu_F(\{x \in \mathbb{R}^k \mid x_j = c\}) = 0$$

voor elk hypervlak dat niet tot de in lemma 4.1.3 genoemde aftelbare verzameling behoort.

Bewijs: Zonder wezenlijke beperking (zie opgave 4.1.5) nemen we aan dat F een verdelingsfunctie is: $F = F_{X_1,\ldots,X_k}$. Dan is $\mu_F(\{x \in \mathbb{R}^k \mid x_j = c\}) =$ $= P(X_j = c)$, zodat F_{X_j} discontinu is in $x_j = c$ als $\mu_F(\{x \in \mathbb{R}^k | x_j = c\}) > 0$ is.

Uit de discontinuiteit van F_{X_j} volgt dan eenvoudig de discontinuiteit van F in punt $x \in \mathbb{R}^n$ met $x_j = c$ (vergelijk het bewijs van stelling 2.2.12): tegenspraak.

Opgave 4.1.5 Als F de zwakke limiet is van een rij verdelingsfuncties en als $\mu_F(\mathbb{R}^k) > 0$, dan is $\tilde{F}$ gedefinieerd door

$$\tilde{F}(x_1,\ldots,x_k) = \mu_F(-\infty,x]/\mu_F(\mathbb{R}^k)$$

een verdelingsfunctie. Hierbij is $(-\infty,x] = \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_j \le x_j \ (j=1,2,\ldots,k)\}$.

Stelling 4.1.6 Zij $(F_n)_1^\infty$ een rij verdelingsfuncties $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ en zij F_n convergent op een dichte deelverzameling D van $\mathbb{R}^k$. Dan is er precies één functie F zó dat $F_n \overset{W}{\to} F$.

Bewijs: We geven de details van het bewijs voor $k = 2$. Definieer

$$\tilde{F}(y) = \lim_{n\to\infty} F_n(y) \qquad (y \in D)$$

$$F(x) = \inf_{\substack{y\in D\\ y>x}} \tilde{F}(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^2),$$

waarbij $x < y$ betekent $x_1 < y_1$ en $x_2 < y_2$; voor $x \in D$ kan $F(x) > \tilde{F}(x)$ zijn. Blij
baar geldt $0 \le F(x) \le 1$. We zullen verder laten zien (vergelijk definitie 4.1.1):

a. F is niet dalend en continu van rechts, b. $F_n \to F$ op $C(F)$, c. $\mu_F(a,b] \ge 0$ en d. Als $F_n \overset{W}{\to} G$, dan $F = G$.

a. Uit de definitie van F volgt dat F niet-dalend is in x_1 en x_2, terwijl er voor iedere $x \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\varepsilon > 0$ een $y \in D$ is met $y_1 > x_1$, $y_2 > x_2$ en $\tilde{F}(y) < F(x) + \varepsilon/2$. Als $\eta := y-x$, dan geldt dat voor alle $w \in D$ met $x < w < x+\eta = y$ dat $0 \le \tilde{F}(w) - F(x) < \varepsilon/2$. Voor iedere $t \in \mathbb{R}^2$ met $0 \le t < \eta$ geldt dan $0 \le \tilde{F}(w') - F(x+t) < \varepsilon/2$ voor iedere $w' \in D$ met $x+t < w' < x+\eta$. Nu is dus $|F(x+t) - F(x)| \le |F(x+t) - \tilde{F}(w')| + |F(x) - \tilde{F}(w')| <$ en dus ook (F is monotoon) $|F(x_1+t_1,x_2) - F(x_1,x_2)| < \varepsilon$.

b. Als $x \in C(F)$, dan is $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ voor $\|x-y\| := ((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2)^{\frac{1}{2}} <$ $< \delta = \delta(\varepsilon)$. Zij nu $x \in C(F)$, $\|x-y\| < \delta$, $a \in D$ en $b \in D$ zó dat $y < a < x < b$ en $\|y-b\| < \delta$ en dus ook $\|x-b\| < \delta$ en $\|x-a\| < \delta$. Dan is, omdat $\tilde{F}(b) \le F(b)$ en $\tilde{F}(a) \ge F(y)$:

$$\tilde{F}(b) < F(x) + \varepsilon \ ; \quad \tilde{F}(a) > F(x) - \varepsilon.$$

Nu geldt dus: $\limsup_{n\to\infty} (F_n(x) - F(x)) \leq \limsup_{n\to\infty} (F_n(b) - F(x)) = \tilde{F}(b) - F(x) < \varepsilon$,

en anderzijds: $\limsup_{n\to\infty} (F(x) - F_n(x)) \leq \limsup_{n\to\infty} (F(x) - F_n(a)) = F(x) - \tilde{F}(a) < \varepsilon$,

zodat $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

c. Voor *vaste* x is de functie $\varphi(t) = F(x_1+t, x_2+t)$ continu in t voor alle $t \in \mathbb{R}$ met ten hoogste aftelbaar veel uitzonderingen (zie stelling 2.1.4). We laten eerst zien dat F continu voor alle $y \in \mathbb{R}^2$ van de vorm $y_j = x_j + t$ met ten hoogste aftelbaar veel uitzonderingen. Stel dat φ continu is in $t = t_0$ en F discontinu in $x + t_0e = (x_1 + t_0, x_2 + t_0)$, d.w.z. dat

(4.1.1) $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{y\in\mathbb{R}^2} (\|y - (x+t_0e)\| < \delta\ ,\ |F(y) - F(x+t_0e)| > \varepsilon\ )$.

Er is echter een δ_0 zó dat $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = |F(x+te) - F(x+t_0e)| < \varepsilon/2$ voor alle t met $|t-t_0| < 2\delta_0$. Als nu $\delta < \delta_0$, dan is de "bol" $\|y - (x+t_0e)\| < \delta$ bevat in de "kubus" $(x + (t_0-\delta_0)e, x + (t_0+\delta_0)e]$, terwijl in de hoekpunten $u = x+(t_0-\delta_0)e$ en $v = x+(t_0+\delta_0)e$ geldt (o.g.v. de continuïteit van φ)

$$|F(x+t_0e) - F(u)| < \varepsilon/2\ ;\ |F(x+t_0e) - F(v)| < \varepsilon/2;$$

terwijl er binnen de bol en dus binnen de kubus wegens (4.1.1) een punt y bestaat met

$$|F(x+t_0e) - F(y)| > \varepsilon;$$

dit is echter in strijd met de monotonie van F (ga na). Voor iedere $x \in \mathbb{R}^2$ is dus $x + te \in C(F)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ met niet meer dan aftelbaar veel uitzonderingen. Voor iedere interval $(a,b]$ met $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^2$ en $a < b$ is er dus een rij reële getallen $(t_m)_1^\infty$ met $t_m \downarrow 0$ als $m \to \infty$ en zó dat $a + t_me \in C(F)$ en $b + t_me \in C(F)$. Omdat $F_n \to F$ op $C(F)$ geldt nu (zie (2.2.3)) $\mu_{F_n}(a + t_me, b+t_me] \to \mu_F(a+t_me, b+t_me]$, zodat $\mu_F(a+t_me, b+t_me] \geq 0$. Tenslotte is wegens de continuïteit van rechts van F ook $\mu_F(a,b] = \lim_{m\to\infty} \mu_F(a+t_me,\ b+t_me] \geq 0$.

d. Stel dat $F_n \xrightarrow{W} G$. Dan geldt ook voor iedere $x \in \mathbb{R}^2$ dat $x + te \in C(G)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ met aftelbaar veel uitzonderingen (zie definitie 4.1.1 en bewijs van c). Zij nu $x \in \mathbb{R}^2$ en $(t_m)_1^\infty$ een rij met $t_m \downarrow 0$ en $x + t_m e \in C(F) \cap C(G)$. Dan geldt voor alle m

$$F_n(x + t_m e) \to F(x + t_m e) = G(x + t_m e)$$

en dus (F en G zijn continu van rechts) $F(x) = G(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Definitie 4.1.7 Een rij verdelingsfuncties $(F_n)_1^\infty$ (op $\mathbb{R}^k$) heet *volledig* (completely) *convergent* (naar F) als $F_n \xrightarrow{W} F$, waarbij F een verdelingsfunctie is, d.w.z. waarbij $\mu_F(\mathbb{R}^k) = 1$. Notatie $F_n \xrightarrow{C} F$ (vergelijk opgave 4.1.5).

Stelling 4.1.8 (eerste stelling van Helly). Zij $\{F_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ een oneindige verzameling verdelingsfuncties op $\mathbb{R}^k$. Dan bestaat er een rij $(\lambda_n)_1^\infty$ met $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$ en een functie F zó dat $F_{\lambda_n} \xrightarrow{W} F$.

Bewijs: Zij $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ een aftelbare dichte deelverzameling van $\mathbb{R}^k$. Nu heeft de verzameling reële getallen $\{F_\lambda(d_1); \lambda \in \Lambda\}$ een verdichtingspunt c_1 en dus is er een rij $(\lambda_{1,n})_1^\infty$ zó dat $F_{\lambda_{1,n}}(d_1) \to c_1 =: \tilde{F}(d_1)$. De rij $(F_{\lambda_{1,n}}(d_2))_1^\infty$ heeft een verdichtingspunt c_2 en dus is er een deelrij $(\lambda_{2,n})$ van $(\lambda_{1,n})$ met $F_{\lambda_{2,n}}(d_2) \to c_2 =: \tilde{F}(d_2)$, terwijl natuurlijk ook $F_{\lambda_{2,n}}(d_1) \to \tilde{F}(d_1)$. Zo vinden we voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een rij $(\lambda_{k,n})$ met $F_{\lambda_{k,n}}(d_j) \to \tilde{F}(d_j)$ voor $1 \le j \le k$. Voor de rij $(F_n) = (F_{\lambda_{n,n}})$ geldt dus

$$F_n(d_j) \to \tilde{F}(d_j) \qquad (d_j \in D)$$

Op grond van stelling 4.1.6 is er dan een functie F met $F_n \xrightarrow{W} F$.

Opmerking 4.1.9. Stelling 4.1.8 heet ook wel "zwakke-compactheidsstelling" (weak-compactness theorem).

Stelling 4.1.10 (Stelling van Helly-Bray, ook wel: tweede stelling van Helly). Zij $(F_n)_1^\infty$ een rij verdelingsfuncties op $\mathbb{R}^k$ met $F_n \xrightarrow{W} F$. Zij verder $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}^k \mid a_j \le x_j \le b_j \ (j=1,2,\ldots,k)\}$ zó dat de zijvlakken van $[a,b]$ bevat zijn in $C(F)$. Dan geldt voor ieder functie $h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, die continu is op $[a,b]$ dat

$$\int_{[a,b]} h(x)dF_n \to \int_{[a,b]} h(x)dF$$

Bewijs: h is uniform continu op [a,b], zodat we (a,b] kunnen opsplitsen in disjuncte cellen $(a_j,b_j]$ zó dat $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ voor $x \in (a_j,b_j]$ en $y \in (a_j,b_j]$, terwijl de a_j,b_j zo kunnen worden gekozen dat de zijvlakken van de cellen $(a_j,b_j]$ maat nul hebben (zie stelling 4.1.4). Nu geldt voor alle j (zie definitie 4.1.1) dat $\mu_{F_n}(a_j,b_j] \to \mu_F(a_j,b_j]$.

Definieer nu

$$h_\varepsilon(x) = \sum_j h(a_j) 1_{(a_j,b_j]}(x),$$

zodat $|h - h_\varepsilon| \le \varepsilon$ op [a,b]. Dan is $|\int_{(a,b]} h(x)dF_n - \int_{(a,b]} h(x)dF| \le$

$$\le \int_{(a,b]} |h(x) - h_\varepsilon(x)|dF_n + |\int_{(a,b]} h_\varepsilon(x)dF_n - \int_{(a,b]} h_\varepsilon(x)dF| + \int_{(a,b]} |h(x)-h_\varepsilon(x)|dF$$

$$\le 2\varepsilon + \sum_j |h(a_j)|\,|\mu_{F_n}(a_j,b_j] - \mu_F(a_j,b_j]| \le 3\varepsilon$$

voor n voldoende groot, omdat $\mu_{F_n}(a_j,b_j] \to \mu_F(a_j,b_j]$ en omdat h begrensd is op [a,b] ($\sum_j$ is een *eindige* som).

Tenslotte geldt nog $\mu_F[a,b] = \mu_F(a,b]$ (zie st. 4.1.4), zodat ook $\mu_{F_n}[a,b] - \mu_{F_n}(a,b] \to 0$ (zie opgave 4.1.11) en dus $\int_{[a,b]} hdF_n - \int_{(a,b]} hdF_n \to 0$

<u>Opgave 4.1.11.</u> Als $F_n \to F$ en als de hoekpunten van [a,b] tot C(F) behoren, dan geldt $\mu_{F_n}[a,b] - \mu_{F_n}(a,b] \to 0$

<u>Gevolg 4.1.12.</u> Als $F_n \overset{c}{\to} F$ en als $h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ continu is en begrensd op $\mathbb{R}^k$, dan geldt

$$\int_{\mathbb{R}^k} h(x)dF_n \to \int_{\mathbb{R}^k} h(x)dF.$$

Bewijs. Kies [a,b] als in stelling 4.1.10 en bovendien zó dat $\mu_F[a,b] > 1 - \varepsilon$.

Dan is ook $\mu_{F_n}[a,b] > 1 - \varepsilon$ voor alle voldoende grote n. Zie verder het bewijs van stelling 4.1.10.

<u>Opgave 4.1.13.</u> Als $F_n \xrightarrow{c} F$, waarbij F continu is op $\mathbb{R}^k$, dan geldt $F_n(x) \to F(x)$ *uniform* op $\mathbb{R}^k$.

<u>Opmerking 4.1.14.</u> Gevolg 4.1.12 geeft geen uitsluitsel over de convergentie van momenten: als $F_{X_n} \xrightarrow{c} F_X$, geldt dan $E\,X_m \to EX$?
I.h.a. is dit niet zo: Kies F_{X_n} met $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ en $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Dan is $EX_n = 1$ voor alle n, terwijl $F_X(x) = 1_{[0,\infty)}(x)$ met $EX = 0$. Zie sectie 4.3.

Als $F_n \xrightarrow{W} F$, waarbij $\mu_F(\mathbb{R}^k) < 1$, dan "ontsnapt" er kansmassa naar ∞. De volgende stelling geeft aan hoe dit wordt vermeden.

<u>Stelling 4.1.15.</u> Zij $(F_n)_1^\infty$ een rij verdelingsfuncties op $\mathbb{R}^k$ en zij $(-T,T] = \{x \in \mathbb{R}^k \mid -T < x_j \le T\ (j=1,2,\ldots,k)\}$ met $T \in \mathbb{R}$. Laat verder $F_n \xrightarrow{W} F$. Dan geldt

$$(4.1.2) \quad \{\mu_{F_n}(-T,T]^* \to 0 \quad (T \to \infty;\ \text{uniform in } n)\} \Leftrightarrow F_n \xrightarrow{c} F\,.$$

Bewijs: $\Rightarrow$ We moeten bewijzen dat $\mu_F(\mathbb{R}^k) = 1$. Zij T zó dat de zijvlakken van $(-T,T]$ maat nul hebben en zó dat $\mu_{F_n}(-T,T]^* < \varepsilon$ (alle n) en $\mu_F(-T,T]^* < \varepsilon$ voor een $\varepsilon > 0$. Dan geldt

$$|\mu_{F_n}(\mathbb{R}^k) - \mu_F(\mathbb{R}^k)| \le 2\varepsilon + |\mu_{F_n}(-T,T] - \mu_F(-T,T]| < 3\varepsilon$$

voor alle voldoend grote n, omdat $\mu_{F_n}(-T,T] \to \mu_F(-T,T]$. Omdat ε willekeurig is, is $\mu_F(\mathbb{R}^k) = \mu_{F_n}(\mathbb{R}^k) = 1$.

$\Leftarrow$ Stel dat de convergentie in (4.1.2) *niet uniform* is. Dan is er een rij $T_j \to \infty$ en een rij $n_j \to \infty$, zó dat

$$(4.1.3) \quad \mu_{F_{n_j}}(-T_j,T_j]^* \ge \varepsilon \qquad (j=1,2,\ldots),$$

Maar $F_{n_j} \overset{c}{\to} F$, d.w.z. we kunnen $T \in \mathbb{R}$ zó kiezen dat de zijvlakken van $(-T,T]$ maat nul hebben m.b.t. μ_F en de $\mu_{F_{n_j}}$ en zó dat $\mu_F(-T,T]^* < \varepsilon/4$, terwijl $|\mu_F(-T,T] - \mu_{F_{n_j}}(-T,T]| < \varepsilon/4$ voor j voldoende groot. Omdat $(-T,T] \subset (-T_j,T_j]$ voor j voldoende groot betekent dit dat

$$\mu_{F_{n_j}}(-T_j,T_j)^* \le |\mu_{F_{n_j}}(-T,T]^* - \mu_F(-T,T]^*| + \mu_F(-T,T]^* < \frac{\varepsilon}{2},$$

in strijd met (4.1.3)

Opgave 4.1.16 Als $F_n(x,y) \overset{W}{\to}$, terwijl $F_n(x,\infty) \overset{c}{\to} G(x)$ en $F_n(\infty,y) \overset{c}{\to} H(y)$, dan geldt $F_n \overset{c}{\to} F$.

4.2. Continuïteitsstelling

Deze stelling houdt in dat de afbeelding $F \leftrightarrow \varphi$ behalve éénéenduidig ook bi-continu is, d.w.z. dat onder weinig beperkende voorwaarden

$$F_n \overset{c}{\to} F \Leftrightarrow \varphi_n \to \varphi.$$

Stelling 4.2.1 (continuïteitsstelling). Laat $(F_n)_1^\infty$ een rij verdelingsfuncties zijn op $\mathbb{R}^k$ en $(\varphi_n)_1^\infty$ de corresponderende rij karakteristieke functies. Dan geldt

a. Als $F_n \overset{c}{\to} F$, dan is $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, waarbij φ de karakteristieke functie van F is.

b. Zij de rij $(\varphi_n(t))_1^\infty$ convergent op $\mathbb{R}^k$ met $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, waarbij φ continu is in $t = (0,\ldots,0)$. Dan is φ de karakteristieke functie van een verdelingsfunctie F (notatie $\varphi = \varphi_F$) en $F_n \overset{c}{\to} F$.

Bewijs: a. Dit is een speciaal geval van gevolg 4.1.12.

b. Volgens stelling 4.1.8 is er een deelrij (F_{n_j}) met $F_{n_j} \overset{W}{\to} F$. We bewijzen eerst dat $F_{n_j} \overset{c}{\to} F$, d.w.z. dat $\mu_F(\mathbb{R}^k) = 1$. Stel dat $\mu_F(\mathbb{R}^k) = \Delta < 1$ en kies ε met $0 < \varepsilon < 1 - \Delta$. Omdat φ continu is in $(0,\ldots,0)$, geldt voor voldoende kleine h:

$$(\frac{1}{2h})^k \int_{-h}^{h} \cdots \int_{-h}^{h} |\, 1 - \varphi(t_1,\ldots,t_k)\,|\, dt_1 \ldots dt_k < \varepsilon/2,$$

zodat voor $K := (\frac{1}{2h})^k \int_{-h}^{h} \cdots \int_{-h}^{h} \varphi(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k$

geldt dat

(4.2.1) $|K| > 1 - \varepsilon/2 > \Delta + \varepsilon/2.$

Kies nu $T \in \mathbb{R}$ zó dat $\frac{1}{hT} < \varepsilon/4$ en zó dat de de zijvlakken van $(-T,T]$ maat nul hebben m.b.t. μ_F en de μ_{F_n}. Dan geldt (stelling van Fubini)

$$K_j := (\frac{1}{2h})^k \int_{-h}^{h} \cdots \int_{-h}^{h} \varphi_{n_j}(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k =$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} \int_{-h}^{h} \cdots \int_{-h}^{h} \frac{e^{i<t,x>}}{(2h)^k} dt_1 \ldots dt_k \, dF_{nj} = \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{m=1}^{k} \frac{\sin hx_m}{hx_m} dF_{nj} \,.$$

Zij $J(x) = \prod_1^k (\sin h\, x_m)/(hx_m)$. Dan is $|J(x)| \le 1$ voor $x \in [-T,T]$ en $|J(x)| \le \frac{1}{hT}$ voor $x \in [-T,T]^*$, zodat voor voldoende grote j

(4.2.2) $|K_j| \le \int_{\mathbb{R}^k} |\, J(x)| dF_{n_j} \le \mu_{F_{n_j}}[-T,T] + \frac{1}{hT} < \Delta + \varepsilon/2,$

omdat $\mu_{F_{n_j}}[-T,T] \to \mu_F[-T,T] \le \Delta$ voor $j \to \infty$. Anderzijds geldt omdat $\varphi_{n_j} \to \varphi$, o.g.v. gemajoreerde convergentie, dat $K_j \to K$ en dus $|K_j| \to |K| > \Delta + \varepsilon/2$ (zie(4.2.1)). Dit is in strijd met (4.2.2), zodat $\mu_F(\mathbb{R}^k) = 1$ moet zijn.

Stel dat een andere deelrij (F_{m_j}) bestaat met $F_{m_j} \overset{W}{\to} G$. Dan geldt volgens het voorgaande dat $F_{m_j} \overset{c}{\to} G$, zodat volgens stelling 4.2.1 a geldt: $\varphi_{m_j} \to \varphi_G$. Maar $\varphi_n \to \varphi$, zodat $\varphi = \varphi_F = \varphi_G$ en dus (eenduidigheid) $F = G$.

Dus iedere zwak convergente deelrij heeft limiet F en φ is de karakteristieke functie van F.

Stelling 4.2.2 Zij X, $X_1, X_2, \ldots$ een rij stochastische grootheden $\Omega \to \mathbb{R}^k$ met $F_{X_n} \overset{c}{\to} F_X$ en zij g: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ een continue functie. Dan geldt

$$F_{g(X_n)} \overset{c}{\to} F_{g(X)} .$$

Bewijs: $\varphi_{g(X_n)}(t) = \int e^{i<t,g(x)>} dF_{X_n} \to \int e^{i<t,g(x)>} dF_X = \varphi_{g(X)}(t)$

op grond van gevolg 4.1.12. De continuïteitsstelling zegt nu dat $F_{g(X_n)} \overset{c}{\to} F_{g(X)}$

Gevolg 4.2.3 Zij $(X_n)_1^\infty = (X_{n,1},\ldots,X_{n,k})_1^\infty$ een rij stochastische vectoren met $F_{X_n} \overset{c}{\to} F_X$. Dan geldt $F_{X_{n,1}+\ldots+X_{n,k}} \to F_{X_1+\ldots+X_k}$.

Stelling 4.2.4 (centrale limietstelling). Laat $X_1, X_2, \ldots$ o.o.zijn en dezelfde verdeling hebben met E $X_j = \mu$ en var $X_j = \sigma^2 < \infty$. Zij U_n gedefinieerd door

$$U_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_1^n (X_k - \mu).$$

Dan geldt: $\varphi_{U_n}(t) \to e^{-t^2/2}$ en dus $F_{U_n}(u) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2}dx.$

Bewijs: Zie K & S; zie ook hoofdstuk 6.

4.3.a. Convergentie van momenten

Lemma 4.3.1. Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij stochastische grootheden ($\Omega \to \mathbb{R}$) met $F_{X_n} \overset{W}{\to} F$ en $E|X_n|^a \leq M$ voor alle n en een $a > 0$. Dan geldt $F_{X_n} \overset{c}{\to} F$.

Bewijs: Uit stelling 2.4.15 volgt dat voor $T > 0$

$$P(|X_n| \geq T) \leq MT^{-a}$$

zodat $P(|X_n| \geq T) \to 0$ voor $T \to \infty$, uniform in n. Volgens stelling 4.1.15 geldt dan $F_{X_n} \overset{c}{\to} F$.

<u>Stelling 4.3.2.</u> *Zij* $X, X_1, X_2, \ldots$ een *rij stochastische grootheden* $(\Omega \to \mathbb{R})$ met $F_{X_n} \overset{c}{\to} F_X$ en zij $E|X_n|^p \le M$ voor alle n en een $p > 0$. Dan geldt $E|X|^a < \infty$ voor alle a met $0 \le a < p$ en

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n|^a = E|X|^a \qquad (0 \le a < p).$$

Bewijs: We schrijven F_n en F i.p.v. F_{X_n} en F_X Analoog aan het bewijs van stelling 2.4.15 hebben we dan

$$M \ge \int_{\mathbb{R}} |x|^p dF_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^{p-a} |x|^a \, dF_n \ge T^{p-a} \int_{|x|\ge T} |x|^a \, dF_n,$$

zodat

$$\int_{|x|\ge T} |x|^a \, dF_n \le M \, T^{-(p-a)} < \varepsilon$$

voor T voldoende groot en *alle* n. Volgens stelling 4.1.10 geldt nu

$$\int_{T\le|x|\le T+A} |x|^a \, dF_n \to \int_{T\le|x|\le T+A} |x|^a \, dF < \varepsilon$$

voor T voldoende groot, als $\pm T$ en $\pm(T + A)$ tot C(F) behoren. Dit betekent dat

$$\int_{|x|\ge T} |x|^a dF \le \varepsilon$$

en dus dat $E|X|^a < \infty$ *en bovendien dat* (zie stelling 4.1.10)

$$E|X_n|^a = \int_{-T}^{T} |X|^a \, dF_n + \int_{|x|\ge T} |x|^a \, dF_n \to E|X|^a.$$

<u>Opgave 4.3.3</u> Als $F_{X_n} \overset{c}{\to} F_X$ en $E|X_n|^a \to E|X|^a < \infty$, dan $E\, X_n^a \to E\, X^a$.

<u>Stelling 4.3.4.</u> Zij $X, X_1, X_2, \ldots$ een rij stochastische grootheden ($\Omega \to \mathbb{R}$) met verdelingsfuncties $F, F_1, F_2, \ldots$ Als $E|X|^k < \infty$ en $E|X_n|^k \le M_k < \infty$ voor alle n en k en als F de enige verdelingsfunctie is met $\int x^k dF = E\,X^k$ $(k = 1,2,\ldots)$, dan geldt

$$\{E\,X_n^k \to E\,X^k \ (n \to \infty;\ k=1,2,\ldots)\} \Leftrightarrow \{F_n \overset{c}{\to} F\}.$$

Bewijs: $\Leftarrow$ is een speciaal geval van stelling 4.3.2.
$\Rightarrow$ Omdat $E\,X_n^k \to E\,X^k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, is $E|X_n|^k$ begrensd voor iedere *vaste* k en alle n. Op grond van lemma 4.3.1 convergeert iedere zwak convergente deelrij van $(F_n)_1^\infty$ volledig, zeg $F_{n_j} \overset{c}{\to} G$. Volgens stelling 4.3.2. zijn de momenten van G gelijk aan de momenten van F. Omdat F door zijn momenten bepaald is (gegeven!), is dus G = F. Nu convergeert dus iedere zwak convergente deelrij van $(F_n)_1^\infty$ volledig naar F, d.w.z. (zie stelling 4.1.8) $F_n \to F$.

<u>Gevolg 4.3.5.</u> Als $(X_n)_1^\infty$ een rij stochastische grootheden is ($\Omega \to \mathbb{R}$) met $E\,X_n^{2k-1} \to 0$ en $E\,X_n^{2k} \to \frac{(2k)!}{k!}\,2^{-k}$ $(n \to \infty; k = 1,2,\ldots)$, dan geldt

$$F_{X_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

<u>Opgave 4.3.6.</u> Laat zien dat de verdelingsfunctie F_a met kansdichtheid f_a gegeven door

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1}\, e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2} \{1 + a \sin(2\pi \log x)\} \quad (x > 0;\ -1 \le a \le 1)$$

dezelfde momenten heeft als F_0 (de log-normale verdelingsfunctie).

<u>Opgave 4.3.7.</u> Als $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(0 \le k \le n;\ n \in \mathbb{N};\ 0 < p < 1)$ dan geldt: $E\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^k \to E\,U^k$, waarbij U een normale verdeling heeft met $EU = 0$ en var $U = 1$ (zie opgave 2.4.18).

4.3.b Karakteristieke functies en momenten

In het nu volgende is φ steeds de karakteristieke functie van een stochast X met verdelingsfunctie F, φ_n die van X_n met verdelingsfunctie F_n, etc.

Stelling 4.3.8 Als $E|X|^k < \infty$, dan bestaat $\varphi^{(k)}(t)$ en is uniform continu op $\mathbb{R}$, terwijl

$$E\,X^j = (-i)^j\,\varphi^{(j)}(0) \qquad (j = 1,2,\ldots,k)$$

Bewijs. Zie K & S.

Omgekeerd geldt:

Stelling 4.3.9 Als $\varphi^{(2k)}(0)$ bestaat, dan is $E(X)^{2k} < \infty$.

Bewijs: Zij $\Delta^h\,\varphi(t) = \Delta_1^h\,\varphi(t) = \varphi(t+h) - \varphi(t-h)$ en $\Delta_{k+1}^h\,\varphi(t) = \Delta^h\,(\Delta_k^h\varphi(t))$.
Dan geldt (zie stelling A 7.1)

$$\varphi^{(2k)}(0) = \lim_{h\to 0}\,(2h)^{-2k}\,\Delta_{2k}^h\varphi(0)$$

zodat $|(2h)^{-2k}\,\Delta_{2k}^h\varphi(0)|$ begrensd is, zeg door M, als $h \to 0$. Nu is (ga na)

$$|(2h)^{-2k}\,\Delta_{2k}^h\varphi(0)| = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin(hx)}{h}\right\}^{2k} dF(x) \le M$$

zodat voor iedere eindige a en b geldt

$$\int_a^b x^{2k}dF(x) = \lim_{h\to 0}\int_a^b\left\{\frac{\sin(hx)}{h}\right\}^{2k} dF(x) \le M.$$

Gevolg 4.3.10 Als $E|X|^n < \infty$, dan heeft φ de ontwikkeling

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(it)^j}{j!}\,E\,X^j + o(t^n) \qquad (t \to 0).$$

Bewijs: Zie K & S.

<u>Gevolg 4.3.11</u> Als φ analytisch is in een omgeving van $t = 0$, dan bestaan alle momenten en in een omgeving van $t = 0$ geldt (verg.stelling A 7.2):

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{(it)^j}{j!} E X^j.$$

<u>Stelling 4.3.12</u> Als φ_X analytisch is in een omgeving van $t = 0$ en als $(X_n)_1^\infty$ een rij stochasten is, waarvoor geldt dat $E|X_n|^k \le M_k < \infty$ is voor alle k en n, dan geldt

$$\{E X_n^k \to E X^k \ (n \to \infty;\ k = 1,2,\dots)\} \Longleftrightarrow \{F_{X_n} \xrightarrow{c} F_X\}.$$

Bewijs: Zie stelling 4.3.4. en gevolg 4.3.11.

<u>Opmerking 4.3.13</u> Als $\varphi^{(2k+1)}(0)$ bestaat, dan is niet noodzakelijk $E|X|^{2k+1} < \infty$ (wel geldt dan ook dat $E X^{2k} < \infty$ is).

<u>4.4 Vier soorten convergentie</u>

<u>Definitie 4.4.1</u> Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij stochastische grootheden $\Omega \to \mathbb{R}^k$, dan definieert men:

1. X_n convergeert *zwak* (of: *in verdeling*) naar X, notatie: $X_n \xrightarrow{W} X$, als

$$F_{X_n} \xrightarrow{c} F_X ;$$

2. X_n convergeert *in waarschijnlijkheid* naar X, notatie: $X_n \xrightarrow{P} X$, als voor iedere $\varepsilon > 0$ (en met $\|x\| = (\sum_1^k x_j^2)^{\frac{1}{2}}$)

$$\lim_{n\to\infty} P(\|X_n - X\| \ge \varepsilon) = 0;$$

3. X_n convergeert *bijna zeker* (of: *met kans één*, afgekort m.k. 1 of b.z) naar X, notatie $X_n \xrightarrow{b.z.} X$, als

$$P(X_n \to X) := P(\{\omega | X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1;$$

4. X_n convergeert *in* het r-de *gemiddelde* ($r > 0$) naar X, notatie $X_n \xrightarrow{r} X$, als

$$\lim_{n\to\infty} E\|X_n - X\|^r \to 0,$$

waarbij verondersteld is dat $E\|X_n\|^r$ en $E\|X\|^r$ eindig zijn.

Opmerking 4.4.2. In de gevallen 2 t/m 4 definieert men ook *convergentie* van (X_n) (zonder een limiet te noemen) door te eisen dat (X_n) een Cauchy-rij is in de bijbehorende metriek. Ga in de gevallen 2 t/m 4 na dat een Cauchy-rij een *limiet* heeft. Als de rij $(X_n)_1^\infty$ convergeert schrijven we wel: $X_n \stackrel{P}{\to}$, $X_n \stackrel{b.z.}{\to}$ en $X_n \stackrel{r}{\to}$.

Opmerking 4.4.3. In de gevallen 2 t/m 4 is $X_n \to X$ equivalent met $X_n - X \to 0$; in geval 1 geldt dit niet: bij verdelingsconvergentie spelen de stochastische grootheden een symbolische rol; X en X_n hoeven niet op dezelfde kansruimte te zijn gedefinieerd.

We zullen in de volgende stellingen laten zien dat tussen de convergentiebegrippen de volgende relaties bestaan. We beperken de bewijzen tot het geval $k = 1$.

$$\begin{array}{ccccc} (X_n \stackrel{b.z.}{\to} X) & \Rightarrow & (X_n \stackrel{P}{\to} X) & \Rightarrow & (X_n \stackrel{W}{\to} X) \\ & & \Uparrow & & \\ & & (X_n \stackrel{r}{\to} X) & & \end{array}$$

Stelling 4.4.4. $(X_n \stackrel{b.z.}{\to} X) \Rightarrow (X_n \stackrel{P}{\to} X)$

Bewijs: Volgens de stelling van Egorov (Stelling A 3.8) is er voor iedere $\delta > 0$ een verzameling A_δ met $P(A_\delta) > 1 - \delta$ zó dat $X_n(\omega)$ op A_δ uniform naar $X(\omega)$ convergeert. Zij dus $\varepsilon > 0$ en $N = N(\varepsilon)$ zó dat

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \qquad (n \geq N \text{ en } \omega \in A_\delta),$$

dan geldt voor $n \geq N$ dat $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(A_\delta^*) < \delta$, d.w.z. $X_n \stackrel{P}{\to} X$.

Stelling 4.4.5. Als $X_n \stackrel{P}{\to} X$, dan is er een deelrij n_k met $X_{n_k} \stackrel{b.z.}{\to} X$.

Bewijs: Kies $(\delta_k)_1^\infty$ met $\delta_k > 0$ $(j=1,2,\ldots)$ en $\sum_1^\infty \delta_k < \infty$. Omdat $X_n \stackrel{P}{\to} X$, is er voor iedere k een $n_k \in \mathbb{N}$ zó dat

$$(4.4.1) \quad P(|X_n - X| \geq \tfrac{1}{k}) < \delta_k \qquad (\text{alle } n \geq n_k).$$

Definieer nu $A_k = [|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}]$. Dan is $\sum_1^\infty P(A_k) \leq \sum_1^\infty \delta_k < \infty$, zodat (stelling 3.3.2, lemma van Borel-Cantelli) $P(A_k$ o.v.$) = 0$, d.w.z. $P(|X_{n_k} - X| < \frac{1}{k}$ o.d.d.$) = 1$ voor iedere $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt ook $P(X_{n_k} \to X) = P(\forall_m [|X_{n_k} - X| < \frac{1}{m}$ o.d.d.$]) = 1$ d.w.z. $X_{n_k} \xrightarrow{b.z.} X$.

<u>Opgave 4.4.6.</u> Als $P(A_k) = 1$ voor $k \in \mathbb{N}$, dan is $P(\bigcap_1^\infty A_k) = 1$.

<u>Lemma 4.4.7.</u> $P(\|X + Y\| \geq \varepsilon) \leq P(\|X\| \geq \varepsilon/2) + P(\|Y\| \geq \varepsilon/2)$.

<u>Stelling 4.4.8.</u> X_n convergeert dan en slechts dan in waarschijnlijkheid naar X als iedere deelrij van (X_n) een deelrij bevat die bijna zeker naar X convergeert.

Bewijs: Als $X_n \xrightarrow{P} X$, dan geldt voor iedere deelrij (X_{n_k}) dat $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$. Op grond van stelling 4.4.5 bevat (X_{n_k}) een deelrij die bijna zeker naar X convergeert.

Als X_n niet in waarschijnlijkheid naar X convergeert, dan is er (zie definitie 4.4.1) een $\varepsilon > 0$ en een $\delta > 0$ met

$$\limsup_{n\to\infty} P(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) = \delta > 0$$

en dus is er een deelrij n_k met $\lim_{k\to\infty} P(\|X_{n_k} - X\| \geq \varepsilon) = \delta$. Dit betekent dat (X_{n_k}) geen deelrij bevat die in waarschijnlijkheid naar X convergeert en dus (stelling 4.4.5) ook geen deelrij die bijna zeker naar X convergeert.

<u>Gevolg 4.4.9.</u> Als $X_n \xrightarrow{P} X: \Omega \to \mathbb{R}^k$ en $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ is Borel-meetbaar en bovendien continu op B met $P(X \in B) = 1$, dan geldt ook $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Bewijs: Zij (X_{n_k}) een willekeurige deelrij van (X_n). Dan moeten we bewijzen dat er een deelrij (r_k) van (n_k) bestaat zó dat $f(X_{r_k}) \xrightarrow{b.z.} f(X)$.

Omdat $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$, is er een deelrij (r_k) met $X_{r_k} \xrightarrow{b.z.} X$. Zij nu $A = [X_{r_k} \to X] \cap [X \in B]$. Dan is $P(A) = 1$ en voor $\omega \in A$ geldt $X_{r_k}(\omega) \to X(\omega)$ en dus, omdat f continu is op B, ook $f(X_{r_k}(\omega)) \to f(X(\omega))$.

Gevolg 4.4.10. Als $X_n \xrightarrow{P} X: \Omega \to \mathbb{R}^{k_1}$ en $Y_n \xrightarrow{P} Y: \Omega \to \mathbb{R}^{k_2}$ en als $f: \mathbb{R}^{k_1+k_2} \to \mathbb{R}^k$ Borel-meetbaar is, terwijl $P((X,Y) \in C(f)) = 1$ (zie definitie 2.5.8), dan geldt

$$f(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} f(X,Y).$$

Bewijs: Volgt uit lemma 4.4.7 en gevolg 4.4.9.

Gevolg 4.4.11. Als $X_n \xrightarrow{P} X: \Omega \to \mathbb{R}$ en $Y_n \xrightarrow{P} Y: \Omega \to \mathbb{R}$, dan geldt

(i) $a\, X_n + b\, Y_n \xrightarrow{P} a\, X + b\, Y$

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$

(iii) $X_n^{-1} \xrightarrow{P} X^{-1}$ (als $P(X_n = 0) = P(X = 0) = 0$).

Stelling 4.4.12. $(X_n \xrightarrow{P} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{W} X)$.

Bewijs: Voor iedere $t \in \mathbb{R}^k$ is $\exp(i<t,x>)$ continu in x ($\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$), zodat op grond van gevolg 4.4.10 ook

$$(4.4.2) \quad \exp(i < t,X_n>) \xrightarrow{P} \exp(i < t,X >).$$

Nu is dus $|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \le \int |\exp(i<t,X_n(\omega)>) - \exp(i<t,X(\omega)>)|dP \le$

$$\le 2P(|\exp(i<t,X_n>) - \exp(i<t,X>)| \ge \varepsilon) + \varepsilon \qquad \text{voor iedere } \varepsilon > 0,$$

omdat $|\exp(i<t,x>)| \le 1$. Door eerst ε voldoende klein te kiezen en vervolgens n voldoende groot zien we hier uit met (4.4.2) dat $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ voor alle $t \to \mathbb{R}^k$, d.w.z. dat $X_n \to X$ (continuïteitsstelling).

Gevolg 4.4.13. $(X_n \xrightarrow{b.z.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{W} X)$.

Bewijs: Zie stelling 4.4.12 en stelling 4.4.4.

Stelling 4.4.14. $(X_n \xrightarrow{r} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{P} X)$

Bewijs: $P(\|X_n - X\| \ge \varepsilon) = P(\|X_n - X\|^r \ge \varepsilon^r) \le \varepsilon^{-r} E\|X_n - X\|^r \to 0$ voor iedere vaste $\varepsilon > 0$ en $n \to \infty$ (zie definitie 4.4.1 en stelling 2.4.15).

Opgave 4.4.15. Als $X_n \xrightarrow{W} X$ en als $Y_n \xrightarrow{P} Y$ met $P(Y = y_0) = 1$, dan geldt

$$X_n Y_n \xrightarrow{W} y_0 X.$$

Opgave 4.4.16. Als $X_n \xrightarrow{r} X$, dan $E\|X_n\|^a \to E\|X\|^a$ $(a \leq r)$.

5. STERKE LIMIETSTELLINGEN

Onder *sterke* limietstellingen worden verstaan limietstellingen die *bijna zeker* gelden, zoals de sterke wet van de grote aantallen (zie stelling 5.2.6).

5.1. Convergentie van sommen van stochastische grootheden

We beperken ons tot het een-dimensionale geval.

Lemma 5.1.1 Als $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ stochasten zijn waarvan de verwachting bestaat, en met $P(Z_n \geq 0) = 1$, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$

$$(5.1.1) \qquad P(\max_{1\leq j\leq n} Z_j \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \int_{B_j} (Z_j - Z_{j-1})dP,$$

waarbij $Z_0 := 0$ (bijna zeker) en $B_j = \bigcap_{k=0}^{j-1} [Z_k < \varepsilon]$ $(j=1,2,\ldots,n+1)$.

Bewijs Zij $A_j = [Z_j \geq \varepsilon]$, zodat $A := [\max_{1\leq j\leq n} Z_j \geq \varepsilon] = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ en $B_j^* = \bigcup_{k=0}^{j-1} A_k$. We laten zien dat

$$(5.1.2) \qquad 1_A(\omega) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} (Z_j - Z_{j-1})\, 1_{B_j}(\omega).$$

1. Als $\omega \in A$, dan is er een kleinste index, $j = j_0$ met $\omega \in A_j$, zodat $\omega \in B_{j_0} = \bigcap_1^{j_0} B_j$ en $\omega \notin \bigcup_{j=j_0+1}^{n} B_j$. Nu geldt inderdaad (5.1.2), immers:

$$\sum_1^n (Z_j(\omega) - Z_{j-1}(\omega))\, 1_{B_j}(\omega) = \sum_{j=1}^{j_0} (Z_j(\omega) - Z_{j-1}(\omega)) = Z_{j_0}(\omega) \geq \varepsilon = \varepsilon\, 1_A(\omega).$$

2. Als $\omega \notin A$, dan is $\omega \in \bigcap_1^{n+1} B_j$, zodat $0 = 1_A(\omega) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} (Z_j - Z_{j-1})\, 1_{B_j}(\omega) = \frac{1}{\varepsilon} Z_n$.

We krijgen nu (5.1.1) door in (5.1.2) verwachtingen te nemen (ga na).

Stelling 5.1.2 (Ongelijkheid van Hajek-Rényi). Als $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. stochasten zijn met var $X_j < \infty$ $(j=1,\ldots,n)$, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$ en elke rij $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$

$$(5.1.3)\quad P(\max_{m\le j\le n} c_j|S_j - ES_j| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\{c_m^2 \sum_1^m \text{var } X_j + \sum_{m+1}^n c_j^2 \text{ var } X_j\}$$

$$(m=1,\ldots,n)$$

waarbij $S_j = \sum_1^j X_k$.

Bewijs: Zonder essentiële beperking nemen we $EX_j = ES_j = 0 \quad (j=1,2,\ldots,n)$.

Definieer: $Z_j = c^2_{m+j-1}\, S^2_{m+j-1} \quad (j=1,2,\ldots,n-m+1)$, zodat

$$P(\max_{1\le j\le n-m+1} Z_j \ge \varepsilon^2) = P(\max_{m\le j\le n} c_j|S_j| \ge \varepsilon).$$

In de notatie van lemma 5.1.1 geldt nu voor $j=2,3,\ldots,n-m+1$

$$(5.1.4)\quad \int_{B_j} (Z_j - Z_{j-1})dP = (c^2_{m+j-1} - c^2_{m+j-2}) \int_{B_j} S^2_{m+j-2}dP +$$

$$+ c^2_{m+j-1}\int_{B_j} X^2_{m+j-1}\, dP + 2c^2_{m+j-1}\int_{B_j} X_{m+j-1}S_{m+j-2}dP,$$

en voor $j=1$ $(B_1 = \Omega)$

$$(5.1.5)\quad \int_{B_1} (Z_1 - Z_0)dP = c_m^2 \int_\Omega S_m^2 dP = c_m^2 \sum_1^m \text{var } X_j.$$

Omdat 1_{B_j} en S_{m+j-2} onafhankelijk zijn van X_{m+j-1} is $\int_{B_j} X_{m+j-1}\, S_{m+j-2}dP =$

$= E\, 1_{B_j}\, S_{m+j-2}\, EX_{m+j-1} = 0$. Nu volgt uit (5.1.4) en de monotonie van de c_j dat voor $j = 2,3,\ldots,n-m+1$ geldt

$$(5.1.6)\quad \int_{B_j} (Z_j - Z_{j-1})dP \le c^2_{m+j-1}\int_{B_j} X^2_{m+j-1}dP \le c^2_{m+j-1} \text{ var } X^2_{m+j-1}.$$

O.g.v. lemma 5.1.1 volgt (5.1.3) nu uit (5.1.5) en (5.1.6).

Gevolg 5.1.3. (Ongelijkheid van Kolmogorov). Als $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. stochasten zijn met var $X_j < \infty$ $(j=1,\ldots,n)$, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$:

$$P\Big(\max_{1\le j\le n} \Big|\sum_1^j (X_k - EX_k)\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_1^n \operatorname{var} X_j .$$

Bewijs: Neem $c_j = 1$ $(j=1,2,\ldots,n)$ en $m=1$ in (5.1.3).

Omgekeerd geldt

Stelling 5.1.4. Als $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. stochasten zijn, waarvoor een K bestaat met $P(|X_j| \le K) = 1$ $(j=1,2,\ldots,n)$, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$

$$(5.1.7)\qquad P\Big(\max_{1\le j\le n} \Big|\sum_1^j (X_k - EX_k)\Big| \ge \varepsilon\Big) \ge 1 - \frac{(K+\varepsilon)^2}{(K+\varepsilon)^2 + \sum_1^n \operatorname{var} X_j - \varepsilon^2} .$$

Bewijs: Zij weer (zonder wezenlijke beperking) $EX_k = 0$ en zij $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$. Dan geldt (zie lemma 5.1.1 en stelling 5.1.2 voor notatie; we hebben hier het speciale geval $m = 1$ en $c_j = 1$ $(j=1,2,\ldots,n)$, zodat $Z_j = S_j^2$):

$$(5.1.8)\qquad \int_{B_j} S_j^2 dP = \int_{B_j} S_{j-1}^2 dP + \int_{B_j} X_j^2 dP = \int_{B_j} S_{j-1}^2 dP + \int_{\Omega} 1_{B_j} X_j^2 dP = \int_{B_j} S_{j-1}^2 dP + P(B_j) \operatorname{var} X_j ,$$

omdat X_j en 1_{B_j} o.o. zijn. Anderzijds geldt, omdat $B_j = B_{j+1} \cup A_j B_j$

$$(5.1.9)\qquad \int_{B_j} S_j^2 dP = \int_{B_{j+1}} S_j^2 dP + \int_{A_j B_j} S_j^2 dP \le \int_{B_{j+1}} S_j^2 dP + (K+\varepsilon)^2 P(A_j B_j),$$

dit laatste omdat $|S_j| 1_{A_j B_j} \le |S_{j-1}| 1_{A_j B_j} + |X_j| 1_{A_j B_j} \le (\varepsilon + K) 1_{A_j B_j}$. Omdat de B_j niet-stijgend zijn volgt nu uit (5.1.8) en (5.1.9) dat voor $j = 1,\ldots,n$

$$(5.1.10)\qquad \int_{B_j} S_{j-1}^2 dP + P(B_{n+1}) \operatorname{var} X_j \le \int_{B_{j+1}} S_j^2 dP + (K+\varepsilon)^2 P(A_j B_j).$$

Sommatie van (5.1.10) levert nu de gevraagde ongelijkheid: omdat $A = \bigcup_1^n A_j B_j$ en $A^* = B_{n+1}$, vinden we ($S_0 = 0$)

$$\{1 - P(A)\} \sum_1^n \text{var } X_j \le \int_{A^*} S_n^2 dP + (K + \varepsilon)^2 P(A) \le \varepsilon^2(1 - P(A)) + (K + \varepsilon)^2 P(A),$$

equivalent met (5.1.7).

Stelling 5.1.5 Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn en als $\sum_1^\infty \text{var } X_j < \infty$, dan geldt

$$P\left(\sum_1^\infty (X_j - EX_j) \text{ convergeert}\right) = 1.$$

Bewijs: Zij $S_n = \sum_1^n (X_j - EX_j)$. Dan geldt: $P(\limsup_{n\to\infty} |S_n| \ge M) \le P(\sup_n |S_n| \ge M) \le$

$$\le P\left(\bigcup_{n=1}^\infty [|S_n| \ge \tfrac{M}{2}]\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\max_{1\le n\le N} |S_n| \ge \tfrac{M}{2}\right) \le \frac{4}{M^2} \sum_1^\infty \text{var } X_n ,$$

o.g.v. gevolg 5.1.3. Nu is dus $P(\limsup_{n\to\infty} |S_n| = \infty) = P\left(\bigcap_{M=1}^\infty [\limsup_{n\to\infty} |S_n| \ge M]\right) = 0$,

zodat limsup S_n en liminf S_n bijna zeker eindig zijn. We laten nu zien dat ze met kans 1 gelijk zijn: Voor iedere $\varepsilon > 0$ en iedere $m \in \mathbb{N}$ geldt

$$[\limsup S_n - \liminf S_n \ge 4\varepsilon] \subset [\sup_{n\ge m} S_n - \inf_{n\ge m} S_n \ge 4\varepsilon] \subset [\sup_{n\ge m} S_n - S_m \ge 2\varepsilon] \cup$$

$$\cup [S_m - \inf_{n\ge m} S_n \ge 2\varepsilon] \subset [\sup_{n\ge m} |S_n - S_m| \ge 2\varepsilon], \text{ zodat}$$

$$P(\limsup S_n - \liminf S_n \ge 4\varepsilon) \le P(\sup_{n\ge m} |S_n - S_m| \ge 2\varepsilon) \le P\left(\bigcup_{n\ge m} [|S_n - S_m| \ge \varepsilon]\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} P\left(\max_{m\le n\le N} |S_n - S_m| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=m+1}^\infty \text{var } X_n$$ o.g.v. gevolg 5.1.3. Omdat $\sum_{n=m+1}^\infty \text{var } X_n \to 0$ als $m \to \infty$, is nu $P(\limsup S_n - \liminf S_n \ge 4\varepsilon) = 0$ vóór ieder $\varepsilon > 0$. Dit betekent (ga na) dat $P(\limsup S_n = \liminf S_n) = 1$.

Gevolg 5.1.6. Als $X_1, X_2, \ldots,$ o.o. stochasten zijn en als $\sum_1^\infty \text{var } X_n < \infty$, dan geldt

(5.1.11) $\left[\sum_1^\infty EX_n \text{ convergeert}\right] \Rightarrow \left[P\left(\sum_1^\infty X_n \text{ convergeert}\right) = 1\right].$

Bewijs: Als $\sum_{1}^{\infty} EX_n$ convergeert, dan is de convergentie van $\sum_{1}^{\infty} (X_n - EX_n)$ equivalent met de convergentie van $\sum_{1}^{\infty} X_n$, zie verder stelling 5.1.5.

Opgave 5.1.7. Als $X_1, X_2, \dots$ o.o. stochasten zijn en als $\sum_{1}^{\infty} E|X_n| < \infty$, dan is $\sum_{1}^{\infty} X_n$ met kans één convergent.

Opgave 5.1.8. Bewijs de inverse implicatie in (5.1.11) (zie stelling 5.1.5)

Stelling 5.1.9. Als $X_1, X_2, \dots$ o.o. stochasten zijn, waarvoor een K bestaat met $P(|X_n| \le K) = 1$ $(n=1,2,\dots)$ en waarvoor geldt $P(\sum_{1}^{\infty} X_n \text{ convergeert}) = 1$, dan zijn de reeksen

$$\sum_{1}^{\infty} \operatorname{var} X_n \text{ en } \sum_{1}^{\infty} EX_n \text{ beide convergent.}$$

Bewijs: Kies stochastische grootheden $(X_n')_1^{\infty}$ zó dat $X_1, X_1', X_2, X_2', \dots$ o.o. zijn, terwijl $F_{X_n'} = F_{X_n}$ (dit kan o.g.v. stelling 2.3.3; ga na).
Zij nu $\tilde{X}_n := X_n - X_n'$, zodat $P(|\tilde{X}_n| \le 2K) = 1$ $(n=1,2,\dots)$ en $E\tilde{X}_n = 0$. Omdat $\sum_{1}^{\infty} X_n$ b.z. convergeert, convergeren ook $\sum_{1}^{\infty} X_n'$ en $\sum_{1}^{\infty} \tilde{X}_n$ b.z. Als we definiëren $S_n = \sum_{1}^{n} \tilde{X}_k$, dan volgt uit stelling 5.1.4 dat voor elke $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ en $r \in \mathbb{N}$

$$P\Big(\max_{m \le k \le r} |S_k - S_m| \ge \frac{1}{N}\Big) \ge 1 - \frac{(2K + N^{-1})^2}{\sum_{m+1}^{r} \operatorname{var} \tilde{X}_k + (2K + N^{-1})^2 - N^{-2}} .$$

Stel nu dat $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{var} X_k = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \operatorname{var} \tilde{X}_k = \infty$. Dan geldt (voor iedere $N \in \mathbb{N}$)

$$P\Big(\sum_{1}^{\infty} \tilde{X}_n \text{ divergeert}\Big) = P\Big(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \ge n} \bigcup_{k \ge m} [|S_k - S_m| \ge \frac{1}{N}]\Big) \ge$$

$$\ge \lim_{n \to \infty} P\Big(\bigcup_{m \ge n} \bigcup_{k \ge m} [|S_k - S_m| \ge \frac{1}{N}]\Big) \ge \lim_{n \to \infty} \lim_{r \to \infty} P\Big(\max_{n \le m \le k \le r} |S_k - S_m| \ge \frac{1}{N}\Big) = 1,$$

d.w.z. $P(\sum_{1}^{\infty} X_n \text{ divergeert}) = 1$: tegenspraak. Dus $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{var} X_n < \infty$ en dus (zie opgave 5.1.8) $\sum_{1}^{\infty} EX_n$ convergeert.

Gevolg 5.1.10. (drie reeksen stelling van Kolmogorov). Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij o.o. stochasten. De reeks $\sum_1^\infty X_n$ convergeert dan en slechts dan bijna zeker als er een $c > 0$ bestaat zó dat de volgende drie reeksen alle convergeren:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq c)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n 1_{|X_n|<c})$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}(X_n 1_{|X_n|<c})$;

als (i), (ii) en (iii) voor één $c > 0$ convergeren, dan convergeren ze voor alle $c > 0$.

Bewijs: Stel dat (i), (ii) en (iii) convergeren en zij $Y_n := X_n 1_{|X_n|} < c$. Dan volgt uit de convergentie van (ii) en (iii) via gevolg 5.1.6 dat $\sum_1^\infty Y_n$ b.z. convergeert. Uit de convergentie van (i) volgt (Borel-Cantelli, stelling 3.3.2) dat $P(X_n \neq Y_n \text{ o.v.}) = 0$ zodat ook $\sum_1^\infty X_n$ b.z. convergeert (vergelijk opmerking 3.3.5).

Stel nu dat $\sum_1^\infty X_n$ b.z. convergeert, dan geldt $X_n \overset{b.z.}{\to} 0$, zodat $P(|X_n| \geq c \text{ o.v.}) = 0$ voor iedere $c > 0$. Hieruit volgt o.g.v. stelling 3.3.6 a dat (i) convergeert voor alle $c > 0$ en tevens dat $P(X_n \neq Y_n \text{ o.v.}) = 0$. Nu is dus ook $\sum_1^\infty Y_n$ b.z. convergent, zodat ook (ii) en (iii) convergeren o.g.v. stelling 5.1.9.

5.2. Sterke wet van de grote aantallen

In K & S hebben we de zwakke wet van de grote aantallen bewezen: als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn met $EX_j = \mu$ en $\mathrm{var}\, X_j = \sigma^2$ $(j=1,2,\ldots)$, dan geldt

$$(5.2.1) \qquad \frac{1}{n}\sum_1^n X_j \overset{P}{\to} \mu.$$

Nu zal blijken dat in (5.2.1) $\overset{P}{\to}$ vervangen mag worden door $\overset{b.z.}{\to}$, terwijl het bestaan van var X_j niet nodig is; we zullen daarentegen wel eisen dat alle X_j *dezelfde verdeling* hebben.

Lemma 5.2.1. Als $(a_n)_1^\infty$ een rij reële getallen is met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_1^n a_k = a$.

Bewijs: Ga na.

Lemma 5.2.2 (lemma van Kronecker). Als $(b_n)_1^\infty$ een rij reële getallen is waarvoor $\sum_1^\infty b_n$ convergeert, dan is

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_1^n k\, b_k = 0.$$

Bewijs: Zij $a_n = \sum_{k=1}^n b_k$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^\infty b_k = a$. Dan geldt o.g.v. lemma 5.2.1 dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k b_j \to a,$$

zodat (verwisseling van sommatievolgorde) $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (n-j+1) b_j = \frac{n+1}{n} \sum_1^n b_j - \frac{1}{n} \sum_1^n j b_j \to$

Omdat $\sum_1^n b_j \to a$, geldt nu

$$\frac{1}{n} \sum_1^n j b_j \to 0.$$

Lemma 5.2.3. Laat $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met $\frac{1}{n} \sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.} X$, dan is er een constante c met de eigenschap

$$P(X = c) = 1.$$

Bewijs: Omdat $X_k/n \xrightarrow{b.z.} 0$ als $n \to \infty$ voor iedere $k \in \mathbb{N}$, geldt $\frac{1}{n} \sum_{j=k}^n X_j \xrightarrow{b.z.} X$, zodat X meetbaar is m.b.t. $\sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$ voor iedere $k \in \mathbb{N}$. Dit betekent dat $\sigma(X) \subset \mathcal{I}$, zodat X b.z. constant is (zie gevolg 3.3.12).

Lemma 5.2.4. $E|X| < \infty \Leftrightarrow \sum_1^\infty P(|X| \geq n) < \infty$.

Bewijs: We hebben (zie gevolg 2.4.6) $E|X| = \int_0^\infty P(|X| > x)dx$, terwijl

$$P(|X| \geq n+1) \leq \int_{[n,n+1)} P(|X| > x)dx \leq P(|X| \geq n),$$

zodat $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| \geq n)$.

Stelling 5.2.5. Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met $EX_k^2 < \infty$ $(k=1,2,\ldots)$ en $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$ var $X_k < \infty$, dan geldt

$$\frac{1}{n} \sum_1^n (X_k - EX_k) \xrightarrow{b.z.} 0 \qquad (n \to \infty).$$

Bewijs: Uit het gegeven volgt met stelling 5.1.5 dat

$$P(\sum_1^{\infty} \frac{1}{k} (X_k - EX_k) \text{ convergeert}) = 1,$$

zodat o.g.v. lemma 5.2.2 geldt dat $P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n (X_k - EX_k) = 0) = 1$.

Stelling 5.2.6 (Sterke wet van de grote aantallen, stelling van Kolmogorov). Laat $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met *dezelfde verdeling*. Dan geldt (zie opmerking 4.4.2 voor notatie)

$$(5.2.1) \qquad (\frac{1}{n} \sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.}) \Longleftrightarrow (E|X_1| < \infty);$$

als $E|X_1| < \infty$ dan geldt $\frac{1}{n} \sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.} E X_1$.

Bewijs: Als $\frac{1}{n} \sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.}$ dan geldt (met $S_n = \sum_1^n X_k$)

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{b.z.} 0 ,$$

zodat $P(\frac{|X_n|}{n} \geq 1 \text{ o.v.}) = P(|X_n| \geq n \text{ o.v.}) = 0$. Nu geldt o.g.v. lemma 3.3.6 a

dat $\sum_1^{\infty} P(|X_n| \geq n) < \infty$ en dus (X_1 en X_n hebben dezelfde verdeling)

$\sum_1^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty$, zodat wegens lemma 5.2.4 $E|X_1| < \infty$.

Stel, omgekeerd dat $E|X_1| < \infty$, en definieer

$$Y_n = X_n 1_{|X_n| < n} .$$

Dan is $P(X_n \neq Y_n) = P(|X_n| \geq n) = P(|X_1| \geq n)$ en met (lemma 5.2.4)
$\sum_1^\infty P(|X_1| \geq n) = \sum_1^\infty P(X_n \neq Y_n) < \infty$, zodat (lemma 3.3.6 b) $P(X_n \neq Y_n \text{ o.v.}) = 0$

Nu geldt dus

$$(5.2.2) \quad \left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.} EX_1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_1^n (X_k - EX_k) \xrightarrow{b.z.} 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_1^n (Y_k - EY_k) \xrightarrow{b.z.} 0\right).$$

Voldoende voor de laatste uitspraak in (5.2.2) is (lemma 5.2.2) dat $\sum_1^n \frac{1}{k}(Y_k - EY_k) \xrightarrow{b.z.}$, en voldoende hiervoor is weer (stelling 5.1.5) $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \operatorname{var} Y_k < \infty$. Het is dus voldoende om te bewijzen dat

$$(5.2.3) \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} EY_n^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} E(X_1^2 \, 1_{|X_1|<n}) < \infty .$$

We hebben achtereenvolgens (stelling van Fubini) en gebruik makend van $\sum_m^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{2}{m}$ (vergelijkingsstelling):

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} E(X_1^2 \, 1_{|X_1|<n}) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} E(X_1^2 \, 1_{|X_1|<n} \, 1_{m-1\leq|X_1|<m}) =$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{n^2} E(X_1^2 \, 1_{m-1\leq|X_1|<m}) \leq 2 \sum_{m=1}^\infty m \, P(m-1\leq|X_1| < m) \leq$$

$$\leq 2 \, E(|X_1| + 1) < \infty.$$

Nu geldt dus $\frac{1}{n}\sum_1^n X_k \xrightarrow{b.z.} E X_1$.

Het volgende begrip is van belang voor de statistiek:

<u>Definitie 5.2.7.</u> Laat $X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn met verdelingsfunctie F. De *empirische verdelingsfunctie* $\hat{F}_n$ (schatter voor F, gebaseerd op $X_1, \ldots, X_n$) wordt gedefinieerd door

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_1^n 1_{X_k \leq x}(x) = \frac{1}{n} \;\#\; (\{k \mid X_k \leq x\}).$$

<u>Lemma 5.2.8.</u> Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met verdelingsfunctie F, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{F}_n(x) \overset{b.z.}{\to} F(x) \quad \text{en} \quad \hat{F}_n(x-0) \overset{b.z.}{\to} F(x-0) \qquad (n \to \infty).$$

Bewijs: $F(x) = E\, 1_{X_1 \le x}$ en $F(x-0) = E\, 1_{X_1 < x}$. Het bewijs volgt nu direct uit de definitie van $\hat{F}_n(x)$ ($\hat{F}_n(x-0) = \frac{1}{n}\sum_1^n 1_{X_n < x}$) en uit stelling 5.2.6.

<u>Stelling 5.2.9</u> (Glivenko-Cantelli). Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met verdelingsfunctie F, dan geldt

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0) = 1.$$

Bewijs: Definieer: $x_{r,0} = -\infty$, $x_{r,r} = \infty$ en (F is continu van rechts)

$$x_{r,k} = \min\{x \mid F(x) \ge \tfrac{k}{r}\} \qquad (r = 2,3,4,\ldots;\ k = 1,2,\ldots,r-1).$$

Zij $[x_{r,k}, x_{r,k+1}) \neq \emptyset$, dan is $\frac{k}{r} \le F(x_{r,k}) \le F(x_{r,k+1} - 0) \le \frac{k+1}{r}$. Voor $x \in [x_{r,k}, x_{r,k+1})$ geldt dan

$$\hat{F}_n(x) - F(x) \le \hat{F}_n(x_{r,k+1} - 0) - F(x_{r,k}) = \hat{F}_n(x_{r,k+1} - 0) - F(x_{r,k+1} - 0) +$$

$$+ F(x_{r,k+1} - 0) - F(x_{r,k}) \le \hat{F}_n(x_{r,k+1} - 0) - F(x_{r,k+1} - 0) + \frac{1}{r},$$

$$\hat{F}_n(x) - F(x) \ge \hat{F}_n(x_{r,k}) - F(x_{r,k+1} - 0) = \hat{F}_n(x_{r,k}) - F(x_{r,k}) + F(x_{r,k}) +$$

$$- F(x_{r,k+1} - 0) \ge \hat{F}_n(x_{r,k}) - F(x_{r,k}) - \frac{1}{r}.$$

Nu geldt dus voor alle $x \in \mathbb{R}$, alle $r \in \mathbb{N}$ en alle $\omega \in \Omega$ ($\hat{F}_n$ is een functie van ω):

$$|\hat{F}_n(x) - F(x)| \le \max_{0\le k\le r-1} |\hat{F}_n(x_{r,k+1} - 0) - F(x_{r,k+1} - 0)| +$$

$$+ \max_{1\le k\le r-1} |\hat{F}_n(x_{r,k}) - F(x_{r,k})| + \frac{1}{r},$$

zodat o.g.v. lemma 5.2.8 voor alle $r \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \le \frac{1}{r} \qquad \text{(met kans 1)}$$

en dus ook $P(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0) = 1$.

Opgave 5.2.10. Als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met dezelfde verdeling en met $E|X_1| < \infty$ en als $Y_1, Y_2, \ldots$ o.o. stochasten zijn met dezelfde verdeling (niet noodzakelijk die van X_1) met $E|Y_1| < \infty$ en $E\, Y_1 \neq 0$, dan geldt

$$\frac{\sum_1^n X_j}{\sum_1^n Y_j} \xrightarrow{\text{b.z.}} \frac{EX_1}{EY_1} \quad ;$$

als $EX_1 + EY_1 \neq 0$, dan geldt

$$\frac{\sum_1^n X_j}{\sum_1^n (X_j+Y_j)} \xrightarrow{\text{b.z.}} \frac{EX_1}{EX_1+EY_1}.$$ Bewijs dit.

6. CENTRALE LIMIETSTELLING

6.1. De stelling van Lindeberg

We geven hier een algemenere versie van de centrale limietstelling (zie stelling 4.2.4). Voor de notatie zie ook sectie 4.3.b.

Stelling 6.1.1 (Lindeberg). Zij $(X_k)_1^\infty$ een rij o.o. stochasten met $EX_k = m_k$ en var $X_k = v_k^2 < \infty$ $(k=1,2,\ldots)$. Zij verder $M_n = \sum_1^n m_k$ en $V_n^2 = \sum_1^n v_k^2$. Definieer

$$X_{n,k} = \frac{X_k - m_k}{V_n} \quad ; \; X_n = \sum_1^n X_{n,k} \; ,$$

(6.1.1)

$$F_{n,k}(x) = F_{X_{n,k}}(x), \; F_n(x) = F_{X_n}(x).$$

Dan geldt: als voor iedere $\tau > 0$

$$(6.1.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{n,k}(x) = 0,$$

$$\text{dan is} \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy =: \Phi(x).$$

Bewijs: We moeten bewijzen dat $\varphi_n(t) := \prod_1^n \varphi_{n,k}(t) \to e^{-t^2/2}$. We bewijzen eerst dat $\varphi_{n,k}(t) \to 1$ $(n \to \infty;\; 1 \le k \le n)$. We hebben $(E\, X_{n,k} = 0)$

$$(6.1.3) \qquad |\varphi_{n,k}(t) - 1| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{n,k}\right| \le \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF_{n,k},$$

omdat (ga na) $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le \alpha^2/2$. Zij $\varepsilon > 0$, dan geldt

$$(6.1.4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF_{n,k} \le \varepsilon^2 + \int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, dF_{n,k} \le 2\varepsilon^2$$

als n voldoende groot en voor alle $k \le n$; de laatste ongelijkheid o.g.v. (6.1.2). Uit (6.1.3) volgt dan dat (voor willekeurige $T > 0$ en geschikt gekozen ε)

$$|\varphi_{n,k}(t) - 1| \le \varepsilon^2 T^2 < \tfrac{1}{2}$$

voor alle $|t| \le T$, alle voldoend grote n en alle $k \le n$. Voor $|t| \le T$ geldt dan

$$(6.1.5)\quad \log \varphi_n(t) = \sum_1^n \log \varphi_{n,k}(t) = \sum_1^n \log(1 + \varphi_{n,k}(t)-1) = \sum_1^n(\varphi_{n,k}(t)-1) + R_n,$$

$$\text{met } |R_n| = \Big|\sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^\infty \frac{(-1)^j}{j}\{\varphi_{n,k}(t) - 1\}^j\Big| \le \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{|\varphi_{n,k}(t)-1|^2}{1-|\varphi_{n,k}(t)-1|} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n |\varphi_{n,k}(t) - 1|^2.$$

Wegens (6.1.3) en het feit dat $\operatorname{var} X_n = \sum_1^n \operatorname{var} X_{n,k} = \sum_1^n EX_{n,k}^2 = 1$, hebben we

$$\sum_1^n |\varphi_{n,k}(t) - 1| \le \frac{t^2}{2}\sum_1^n \int_{-\infty}^\infty x^2\, dF_{n,k} = \frac{t^2}{2}, \text{ zodat}$$

$$|R_n| \le \frac{t^2}{2} \max_{1\le k\le n} |\varphi_{n,k}(t) - 1|.$$

Uit (6.1.3) en (6.1.4) volgt dat $\varphi_{n,k}(t) \to 1$ als $n \to \infty$, uniform in t voor $|t| \le T$ voor $0 \le k \le n$, zodat $R_n \to 0$ uniform in t voor $|t| \le T$ voor iedere vaste $T > 0$. Anderzijds geldt (vergelijk 6.1.3)

$$(6.1.6)\quad \sum_1^n (\varphi_{n,k}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2} + \rho_n\,,$$

met (we hebben $\sum_1^n E\,X_{n,k}^2 = 1$ en (ga na) $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2}| \le \frac{\alpha^3}{6}$ en $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le \alpha^2/2$ voor $\alpha > 0$):

$$|\rho_n| = \Big|\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^\infty (e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2})dF_{n,k}\Big| \le \frac{|t|^3}{6}\sum_1^n \int_{|x|\le\varepsilon} |x|^3 dF_{n,k} +$$

$$+ t^2 \sum_1^n \int_{|x|>\varepsilon} x^2\, dF_{n,k} \le \frac{|t|^3}{6}\varepsilon \sum_1^n \int_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_{n,k} + t^2 \sum_1^n \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{n,k} =$$

$$= \frac{|t|^3}{6}\varepsilon + t^2 \left(1 - \frac{|t|\varepsilon}{6}\right) \sum_1^n \int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, dF_{n,k} \; .$$

Voor een willekeurige $\eta > 0$ en een vaste $T > 0$ kunnen we ε zo klein kiezen en vervolgens (zie (6.1.2)) n_0 zo groot, dat $|\rho_n| < \eta$ voor alle $n \geq n_0 = n_0(\eta, \varepsilon T)$ en alle $|t| \leq T$. Dit betekent dat $\rho_n \to 0$ uniform op $|t| \leq T$ en dus, met (6.1.5) en (6.1.6), dat $\log \varphi_n(t) \to -\frac{t^2}{2}$ en dus

$$\varphi_n(t) \to e^{-t^2/2} \qquad (n \to \infty),$$

uniform op elk eindig interval $|t| \leq T$. Dit betekent (continuïteitsstelling) dat $F_n(x) \to \Phi(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ als $n \to \infty$.

Opgave 6.1.2. Bewijs dat voor $\alpha > 0$ geldt

$$| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \alpha^2/2 \quad \text{en} \quad |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2}| \leq \frac{\alpha^3}{6} .$$

Opgave 6.1.3. Ga na dat de Lindeberg voorwaarde (6.1.2) vervuld is als $X_1, X_2, \ldots$ o.o. zijn en dezelfde verdeling hebben met $0 < \text{var}\, X_1 < \infty$.

6.2. De wet van de geïtereerde logarithme

We zagen in stelling 5.2.6 dat voor onafhankelijke $X_1, X_2, \ldots$ met dezelfde verdeling en $E|X_1| < \infty$ geldt

$$\text{(6.2.1)} \qquad \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,EX_1}{n} \xrightarrow{b.z.} 0 \qquad (n \to \infty)$$

Formule (6.2.1) suggereert dat delen door n te grof is; het is inderdaad niet moeilijk om in te zien (gebruik makend van de centrale limietstelling, dus als var X_1 bestaat) dat ook

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,EX_1}{\sqrt{n}\,\log n} \xrightarrow{b.z.} 0 \qquad (n \to \infty).$$

Anderzijds volgt uit de centrale limietstelling dat niet geldt:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,EX_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{b.z.} 0.$$

Hoe groot $X_1 + \dots + X_n - n\,EX$ wordt (met kans 1) is de inhoud van de volgende stelling, die we bewijzen voor het speciale geval dat $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$ met $0 < p < 1$ (zie [3]).

Stelling 6.2.1 (wet van de geitereerde logarithme): Als $X_1, X_2, \dots$ o.o. stochasten zijn met dezelfde verdeling en met var $X_1 = \sigma^2 < \infty$, dan geldt

$$(6.2.2) \qquad P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_1+\dots+X_n - n\,EX}{(2n\sigma^2 \operatorname{loglog} n)^{\frac{1}{2}}} = 1\right) = 1$$

Bewijs: We geven het bewijs voor Bernoulli verdeelde X_1. Nu is (6.2.2) equivalent met (we schrijven $X_1+\dots+X_n = S_n$ en $1-p=q$) (6.2.3) én (6.2.4):

$$(6.2.3) \qquad P(S_n > np + \lambda(2npq \operatorname{loglog} n)^{\frac{1}{2}} \text{ o.v.}) = 1 \qquad (\lambda < 1),$$

$$(6.2.4) \qquad P(S_n > np + \lambda(2npq \operatorname{loglog} n)^{\frac{1}{2}} \text{ o.v.}) = 0 \qquad (\lambda > 1).$$

We maken gebruik van het feit (ga na) dat er een constante c bestaat, onafhankelijk van n, met de eigenschap:

$$(6.2.5) \qquad P(S_n > np) > c \qquad (n = 1,2,\dots)$$

Verder hebben we de volgende lemma's nodig.

Lemma 6.2.2. Zij $x \in \mathbb{R}$ en zij $A = [S_k - kp > x$ voor een $k \le n]$. Dan is

$$P(A) \le c^{-1} P(S_n - np > x).$$

Lemma 6.2.3. $P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} > x_n\right) \sim \frac{1}{x_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2} \qquad (x_n = o(n^{1/6});\ n \to \infty).$

We bewijzen eerst (6.2.4). Zij γ zó dat $1 < \gamma < \lambda$, $n_r = [\gamma^r]$ en zij

$$B_r = \{S_n - np > \lambda(2n_r pq \operatorname{loglog} n_r)^{\frac{1}{2}} \text{ voor een } n \in (n_r, n_{r+1}]\}.$$

Het is nu voldoende om te bewijzen dat $P(B_r$ o.v.$) = 0$, dus (zie stelling 3.3.2, lemma van Borel-Cantelli) dat $\Sigma P(B_r) < \infty$. Volgens lemma 6.2.2 geldt (we schrijven $\tilde{S}_n = (S_n - np)(npq)^{-\frac{1}{2}}$):

$$P(B_r) \le c^{-1} P(S_{n_{r+1}} - n_{r+1}p > \lambda(2n_r pq \text{ loglog } n_r)^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= c^{-1} P(\tilde{S}_{n_{r+1}} > \lambda(2\frac{n_r}{n_{r+1}} \text{ loglogn}_r)^{\frac{1}{2}}) \le c^{-1} P(\tilde{S}_{n_{r+1}} > (2\lambda \text{ loglogn}_r)^{\frac{1}{2}},$$

omdat $\sqrt{\lambda} > n_{r+1}/n_r \sim \gamma$ voor r voldoende groot. Nu is dus (zie lemma 6.2.3)

$$P(B_r) < c^{-1} e^{-\lambda \text{loglogn}_r} = c^{-1} (\log n_r)^{-\lambda} \sim c^{-1}(r \log \gamma)^{-\lambda}$$

zodat $\Sigma P(B_r) < \infty$, omdat $\lambda > 1$.

Zij nu $\lambda < 1$. We kiezen nu $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat

$$(6.2.6) \qquad \frac{N-1}{N} > \eta > \lambda,$$

waar $\eta < 1$ nog geschikt gekozen zal worden, en schrijven $n_r = N^r$. Omdat het lemma van Borel (lemma 3.3.6.b) alleen voor onafhankelijke gebeurtenissen geldt, beschouwen we

$$D_r = S_{n_r} - S_{n_{r-1}},$$

zodat D_r een binomiale verdeling heeft met parameters $n_r - n_{r-1}$ en p. Omdat $\eta > \lambda$, is het voor (6.2.3) voldoende om te laten zien dat

$$(6.2.7) \qquad P(A_r \text{ o.v.}) = 1,$$

waarin $A_r = [D_r - (n_r - n_{r-1})\, p > \eta(2pqn_r \text{ loglogn}_r)^{\frac{1}{2}}]$, als we nog aantonen dat de vervanging van S_{n_r} door D_r geen wezenlijke invloed heeft. We hebben voor (grote r, zie lemma 6.2.3) met $\frac{n_r}{n_r - n_{r-1}} = \frac{N}{N-1} < \frac{1}{\eta}$:

$$P(A_r) = P(\frac{D_r-(n_r-n_{r-1})p}{((n_r-n_{r-1})pq)^{\frac{1}{2}}} > \eta(2\frac{n_r}{n_r-n_{r-1}} \text{ loglogn}_r)^{\frac{1}{2}}) \ge$$

$$\ge P(\frac{D_r-(n_r-n_{r-1})p}{((n_r-n_{r-1})pq)^{\frac{1}{2}}} > (2\eta \text{ loglogn}_r)^{\frac{1}{2}}) > \frac{1}{\text{loglogn}_r} e^{-\eta \text{loglogn}_r} =$$

$$= \frac{1}{\text{loglogn}_r (\text{logn}_r)^{\eta}} > \frac{1}{r} \text{ voor grote r, omdat } \eta < 1.$$

Nu is dus $\sum_{1}^{\infty} P(A_r) = \infty$. We laten nu nog zien dat vergeleken met S_{n_r} het "beginstuk" $S_{n_{r-1}}$ te verwaarlozen is. Op grond van (6.2.4) met $\lambda = 2$, is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N = N(\varepsilon)$ zó dat

$$(6.2.8) \qquad P(|S_{n_{r-1}} - n_{r-1}p| < 2(2n_{r-1}pq \log\log n_{r-1})^{\frac{1}{2}}) > 1 - \varepsilon$$

voor alle $r > N$. Kies nu η zó dat $1 - \eta < (\frac{\eta-\lambda}{2})^2$. Dan volgt uit (6.2.6) dat

$$4n_{r-1} = 4n_r N^{-1} < n_r(\eta - \lambda)^2,$$

zodat o.g.v. (6.2.8) voor alle $r > N$

$$P(S_{n_{r-1}} - n_{r-1}p > (\eta - \lambda)(2pqn_r \log\log n_r)^{\frac{1}{2}}) > 1 - \varepsilon.$$

Omdat $D_r + S_{n_{r-1}} - n_{r-1}p = S_{n_r} - n_r p$ volgt dan dat

$$P(S_{n_r} - n_r p > \lambda(2pqn_r \log\log n_r)^{\frac{1}{2}} \text{ o.v.}) > 1 - \varepsilon.$$

voor iedere $\varepsilon > 0$, d.w.z. (6.2.3) geldt.

Opgave 6.2.6. Bewijs (6.2.5)

Opgave 6.2.7. Bewijs lemma 6.2.2.

Opmerking 6.2.8. Voor een bewijs van lemma 6.2.3. verwijzen we naar [3]. Voor de normale verdelingsfunctie Φ geldt

$$(6.2.9) \qquad 1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (x \to \infty);$$

Het bewijs van stelling 6.2.1 voor normaal verdeelde X_1 kan op dezelfde manier worden gegeven. Dit bewijs kan dan worden gebruikt om de stelling algemener te bewijzen door de verdelingsfunctie van S_n^* met Φ te vergelijken, zoals in lemma 6.2.3.

Opgave 6.2.9. Bewijs (6.2.9).

7. VOORWAARDELIJKE VERWACHTING EN MARTINGALEN

7.1. Voorwaardelijke verwachting

In deze paragraaf voeren we een abstract begrip *voorwaardelijke verwachting* in. We zullen daarna het verband aangeven tussen dit begrip en de voorwaardelijke verwachting berekend m.b.v. de voorwaardelijke kansverdeling, zoals die werd ingevoerd in K & S. Een belangrijk hulpmiddel in deze paragraaf is de stelling van Radon-Nikodym (gevolg A 6.4); deze stelling maakt de volgende definitie mogelijk (zie ook opmerking A 6.5).

Definitie 7.1.1. Zij X een reële stochast op $(\Omega,\mathcal{F},P)$, waarvan de verwachting bestaat (zie opmerking 2.4.2) en zij $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ een σ-algebra. De *voorwaardelijke verwachting* van X *onder de voorwaarde* (of: *gegeven*) $\mathcal{B}$, notatie $E(X|\mathcal{B})$ wordt gedefinieerd als die eenduidig op Ω(met uitzondering van een verzameling $B \in \mathcal{B}$ met $P(B) = 0$) bepaalde $\mathcal{B}$-meetbare stochast Z, die voldoet aan

$$(7.1.1) \qquad \int_B Z dP = \int_B X dP \qquad (B \in \mathcal{B}),$$

d.w.z.

$$(7.1.2) \qquad \int_B E(X|\mathcal{B}) dP = \int_B X dP \qquad (B \in \mathcal{B}).$$

Definitie 7.1.2. We zeggen voor $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en $U: \Omega \to \mathbb{R}$ dat $U \in A$ $\mathcal{B}$- b.z., als er een $B \in \mathcal{B}$ bestaat met $P(B) = 1$ en met de eigenschap dat $U(\omega) \in A$ voor alle $\omega \in B$.

Stelling 7.1.3. De voorwaardelijke verwachting heeft de volgende eigenschappen:

(i) $E\ (E(X|\mathcal{B})) = EX$

(ii) Als $\mathcal{B} = \{\emptyset,\Omega\}$, dan is $E(X|\mathcal{B}) = EX$ (alle $\omega \in \Omega$)

(iii) Als $P^2(B) = P(B)$ voor alle $B \in \mathcal{B}$ dan is $E(X|\mathcal{B}) = EX$ $\mathcal{B}$ - b.z.

(iv) $E(aX + bY|\mathcal{B}) = aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ - b.z.; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$)

(v) Als $X \le Y$ b.z., dan is $E(X|\mathcal{B}) \le E(Y|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ - b.z.

(vi) Als $E(X|\mathcal{B}) \le EX$ b.z. dan is $E(X|\mathcal{B}) = EX$ $\mathcal{B}$ - b.z.

Bewijs: (i) Neem $B = \Omega$ in (7.1.2); (ii) EX voldoet aan (7.1.2) en $\emptyset$ is de enige gebeurtenis in $\mathcal{B} = \{\emptyset,\Omega\}$ met kans nul; (iii) Omdat $P(B) = 0$ of $P(B) = 1$, voldoet EX aan (7.1.2); (iv) $aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B})$ is $\mathcal{B}$-meetbaar en voldoet aan (7.1.2); (v) Stel dat $E(X|\mathcal{B}) > E(Y|\mathcal{B})$ op $B \in \mathcal{B}$ met $P(B) > 0$, dan is ook $\int_B XdP > \int_B YdP$: tegenspraak; (vi) Bewijs analoog aan dat van (v) (zie (i)).

Definitie 7.1.4. Als $X, Y_1, Y_2, \ldots$ stochasten zijn en als EX bestaat, dan definieert men

$$E(X|Y_1,Y_2,\ldots) := E(X|\sigma(Y_1,Y_2,\ldots)).$$

Stelling 7.1.5. Laat X en Y stochasten zijn en laat EX bestaan. Dan is er een Borel-meetbare functie h zó dat

$$E(X|Y) = h(Y).$$

Bewijs: $E(X|Y)$ is $\sigma(Y)$-meetbaar. Zie verder stelling 1.3.20.

Stelling 7.1.6. Zij X een stochast waarvoor EX bestaat en zij $(B_n)_0^\infty$ een rij disjuncte gebeurtenissen met $\bigcup_0^\infty B_n = \Omega$. Zij verder $P(B_0) = 0$, $P(B_j) > 0$ $(j=1,2,\ldots)$ en $\mathcal{B} = \sigma\{B_0, B_1, \ldots\}$ (zie definitie 1.3.7).
Dan geldt

$$(7.1.3) \qquad E(X|\mathcal{B})(\omega) = W(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\,X\,1_{B_n}}{P(B_n)} 1_{B_n}(\omega)\ (\omega \in B_j\ ;\ j = 1,2,\ldots).$$

Bewijs: De functie W is ten duidelijkste $\mathcal{B}$-meetbaar en voor iedere $B \in \mathcal{B}$, d.w.z. voor iedere B van de vorm (zie opgave 1.3.19) $B = \bigcup_m B_{j_m}$, geldt

$$\int_B WdP = \sum_m \int_{B_{j_m}} WdP = \sum_m E(X\,1_{B_{j_m}}) = \sum_m \int_{B_j} XdP = \int_B XdP$$

Omdat B_0 het enige niet lege element van $\mathcal{B}$ is met kans nul, is $W = E(X|\mathcal{B})$, d.w. (7.1.3) is juist.

Opmerking 7.1.7. Voor $\omega \in B_j$ $(j=1,2,\ldots)$ geldt nu (zie K & S)

$$E(X|\mathcal{B}) = E(X|B_j) := \sum_n x_n\, P(X = x_n | B_j),$$

als $\sum_1^\infty P(X = x_n) = 1$.

Immers $\sum_n x_n \, P(X = x_n | B_j) = \sum_n x_n \, P([X = x_n] \cap B_j)/P(B_j) = E(X \, 1_{B_j})/P(B_j)$.

$E(X|\mathcal{B})$ interpreteren we als de verwachting van X gegeven het (deel-) experiment $\mathcal{B}$. Zie ook definitie 7.1.12 voor verdere aansluiting van dit nieuwe begrip voorwaardelijke verwachting bij het oude.

Stelling 7.1.8. Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ σ-algebra's zijn met $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, dan is

$$E(X|\mathcal{B}) = E(E(X|\mathcal{C})|\mathcal{B}) \qquad (\mathcal{B} - \text{b.z.}) .$$

Bewijs: Beide leden zijn $\mathcal{B}$-meetbaar. Voor $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ geldt o.g.v. definitie 7.1.2

$$\int_B E(E(X|\mathcal{C}) \mid \mathcal{B})dP = \int_B E(X|\mathcal{C})dP = \int_B X \, dP.$$

Stelling 7.1.9. Laat X en Y stochasten zijn waarvoor EY en E(XY) bestaan en zij X meetbaar m.b.t. $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Dan geldt (b.z.)

$$E(XY|\mathcal{B}) = X \, E(Y|\mathcal{B})$$

Bewijs: Laat X en Y niet-negatief zijn. Dan is er een rij trapfuncties (X_n) van de vorm $X_n = \sum_1^N b_k \, 1_{B_k}$ met $B_k \in \mathcal{B}$ zó dat $X_n \uparrow X$. Voor iedere vaste X_n geldt dan

$$\int_B X_n \, E(Y|\mathcal{B})dP = \sum_1^N b_k \int_{B \cap B_k} E(Y|\mathcal{B})dP = \sum_1^N b_k \int_{B \cap B_k} YdP = \int_B X_n YdP.$$

Op grond van de monotone convergentiestelling (stelling A 4.7) geldt dan

$$\int_B X \, E(Y|\mathcal{B})dP = \lim_{n\to\infty} \int_B X_n \, E(Y|\mathcal{B})dP = \lim_{n\to\infty} \int_B X_n YdP = \int_B XYdP ,$$

zodat $X \, E(Y|\mathcal{B}) = E(XY|\mathcal{B})$ (zie ook stelling 7.1.3.(v)). Het algemene geval volgt nu door X en Y te splitsen in $X = X^+ - X^-$ en $Y = Y^+ - Y^-$ en het bovenstaande op elk van de vier termen toe te passen (vergelijk opmerking 2.4.2).

Stelling 7.1.10. Als X en Y onafhankelijk zijn en EX bestaat, dan is

$$E(X|Y) = EX \quad (\text{b.z.}).$$

Bewijs: Zij $B \in \sigma(Y)$ (vergelijk definitie 7.1.4). Dan zijn X en 1_B onafhankelijk, zodat

$$\int_B E(X|Y)dP = \int_B XdP = \int_\Omega 1_B XdP = E\,1_B EX = \int_B EXdP.$$

omdat de constante EX meetbaar is m.b.t. tot $\sigma(Y)$, is nu $E(X|Y) = EX$ b.z.

Stelling 7.1.11. Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ σ-algebra's zijn, waarvoor $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, dan is

$$E(X|\mathcal{B}) = E(E(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) \qquad (\mathcal{C} - \text{b.z.}).$$

Bewijs: $E(X|\mathcal{B})$ is meetbaar m.b.t. $\mathcal{B}$ en dus m.b.t. $\mathcal{C}$. Op grond van stelling 7.1.9 (met $Y = 1$) geldt dan

$$E(E(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = E(X|\mathcal{B})E(1|\mathcal{C}) = E(X|\mathcal{B}) \qquad \mathcal{C} - \text{b.z.},$$

omdat $E(1|\mathcal{C}) = 1$ $\mathcal{C}$ - b.z.

We geven nu een *afzonderlijke definitie* van $E(X|Y = y)$, en laten zien dat deze definitie aansluit bij definitie 7.1.1 en bij de elementaire definities in K & S.

Definitie 7.1.12. Laat X en Y stochasten zijn en laat EX bestaan. De voorwaardelijke verwachting van X *onder de voorwaarde dat* $Y = y$, notatie: $E(X|Y = y)$ is die P_Y-eenduidig bepaalde Borel-meetbare functie z, die voor alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ voldoet aan

$$\int_B z(y)dF_Y = \int_{Y\in B} XdP. \tag{7.1.4}$$

Deze definitie is weer mogelijk o.g.v. de stelling van Radon-Nikodym (stelling A 6.3), omdat de verschil-maat ν gedefinieerd door

$$\nu(B) = \int_{Y\in B} XdP$$

absoluut continu is t.o.v. de maat P_Y (zie opmerking 2.2.7): als $P(Y \in B) = 0$, dan is $\nu(B) = 0$. We kunnen $E(X|Y=y)$ dus P_Y - b.z. definiëren door

$$(7.1.5) \qquad \int_B E(X|Y=y)dF_Y = \int_{Y\in B} XdP. \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Het verband tussen de definities 7.1.1 en 7.1.12 blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 7.1.13. Als $z(y) = E(X|Y=y)$, dan geldt

$$z(Y) = E(X|Y) \qquad \sigma(Y) \text{ - b.z.}$$

Bewijs: Omdat z Borel-meetbaar is, is $z(Y)$ meetbaar m.b.t. $\sigma(Y)$. Zij nu $C \in \sigma(Y)$, dan is er een $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ met $C = [Y \in B] = Y^{-1}(B)$. Dan geldt (zie lemma 2.4.3 en stelling 2.4.4):

$$\int_C z(Y)dP = \int_\Omega z(Y)1_{Y\in B}dP = \int_\Omega z(Y)1_B(Y)dP = \int_B z(y)dF_Y =$$

$$= \int_{Y\in B} XdP = \int_C XdP ,$$

d.w.z. $z(Y) = E(X|Y)$ (b.z.).

Voorbeeld 7.1.14. Laat (X,Y) een discrete verdeling hebben met

$$P((X,Y) = (x,y)) = p_{x,y}$$

en $E|X| < \infty$. Dan geldt volgens de elementaire definitie (zie K & S):

$$\tilde{z}(y) := \tilde{E}(X|Y=y) = \sum_x x\, P(X=x|Y=y) = \sum_x x\, p_{x,y}/P(Y=y),$$

zodat met $B = \{y\} \subset \mathbb{R}$ geldt (vergelijk bewijs stelling 7.1.3):

$$(7.1.6) \qquad \int_B \tilde{z}(y)dF_Y = \tilde{z}(y)P(Y=y) = \sum_x x\, p_{x,y} = \int_{y\in B} x\, dF_{X,Y} = \int_{Y\in B} X\, dP.$$

Omdat iedere $B \in \sigma(Y)$ een aftelbare vereniging is van verzamelingen van de vorm $[Y = y]$ geldt (7.1.6) voor alle $B \in \sigma(Y)$, zodat P_Y - b.z. geldt dat $\tilde{z}(y) = z(y) = E(X|Y = y)$.

Voorbeeld 7.1.15. Laat (X,Y) absoluut continu zijn met kansdichtheid f, en zij $E|X| < \infty$. Dan geldt op het kansveld $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{X,Y})$(zie (7.1.4)) P_Y - b.z. dat voor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int_B z(y) f_Y(y)dy = \iint_{y \in B} x\, f(x,y)dxdy = \int_B (\int_{\mathbb{R}} x\, f(x,y)dx)dy = \int_B (\int_{\mathbb{R}} x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx) f_Y(y)$$

zodat P_Y - b.z. geldt $z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)/f_Y(y)dx$ zoals gedefinieerd in K & S

Opmerking 7.1.16. Om voorwaardelijke verwachtingen te berekenen is het soms handig om, zoals in voorbeeld 7.1.15 reële kansvelden van de vorm $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_{X_1,\ldots,X_n})$ te beschouwen.

Opgave 7.1.17. Laat X en Y o.o. zijn en exponentieel verdeeld.
Bereken

$$E(X \mid X + Y).$$

Definitie 7.1.18. De *voorwaardelijke kansverdeling* van een stochastische vector X gegeven $\mathcal{B}$, notatie $P_X(\cdot|\mathcal{B})$ wordt gedefinieerd door (vergelijk opmerking 2.2.7)

$$P_X(A|\mathcal{B}) = E(1_A(X)|\mathcal{B}) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$$

Gevolg 7.1.19. Laat X en Y stochastische vectoren zijn met $Y \in \mathbb{R}^k$, dan geldt

$$P_X(A) = \int_\Omega P_X(A|Y)dP = \int_{\mathbb{R}^k} P_X(A|Y = y)dP_Y$$

Bewijs: $P_X(A) := P(X \in A) = E\, 1_A(X)$. Zie verder stelling 7.1.3 (i)

Opgave 7.1.20. Laat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o.o. zijn en $N(\mu,1)$ verdeeld. Bewijs dat voor $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(A \mid X_1 + \ldots + X_n)$$

niet afhangt van μ (d.w.z. dat $X_1 + \ldots + X_n$ voldoende is voor μ; zie K & S).

We bewijzen nu een aantal eigenschappen van voorwaardelijke verwachtingen, die we al kennen voor "gewone" verwachtingen (d.w.z. voor integralen; zie ook Appendix, paragraaf A 4).

Stelling 7.1.21 (monotone convergentiestelling). Zij $0 \le X_1 \le X_2 \le \ldots$ een rij stochasten met $X_n \overset{b.z.}{\to} X$ met $EX < \infty$, dan geldt voor iedere σ-algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$:

$$E(X_n \mid \mathcal{B}) \overset{b.z.}{\to} E(X \mid \mathcal{B}).$$

Bewijs: Omdat $E(X_n|\mathcal{B}) \le E(X_{n+1}|\mathcal{B}) \le E(X|\mathcal{B})$ b.z. o.g.v. stelling 7.1.3 (v), bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{B})$ b.z. Nu geldt wegens (twee maal) de "gewone" montone convergentiestelling (A 4.7) voor iedere $B \in \mathcal{B}$

$$\int_B \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{B})dP = \lim_{n\to\infty} \int_B E(X_n|\mathcal{B})dP = \lim_{n\to\infty} \int_B X_n dP = \int_B XdP.$$

Stelling 7.1.22 (lemma van Fatou). Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij niet-negatieve stochasten met $EX_n < \infty$ en $E \liminf\limits_{n\to\infty} X_n < \infty$, dan geldt b.z.

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{B}) \le \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{B}).$$

Bewijs: $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ met $Y_n = \inf\limits_{k\ge n} X_k$, waarbij Y_n een niet-dalende rij is. Wegens de voorgaande stelling is dus

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{B}) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n|\mathcal{B}) \le \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{B}),$$

omdat $E(Y_n|\mathcal{B}) \le E(X_k|\mathcal{B})$ voor iedere $k \ge n$ en dus $E(Y_n|\mathcal{B}) \le \inf\limits_{k\ge n} E(X_k|\mathcal{B})$.

Stelling 7.1.23 (ongelijkheid van Jensen). Als $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ een convexe functie is en als X een stochast is met waarden in (a,b), terwijl $E\,X$ en $Eh(X)$ bestaan, dan geldt voor iedere σ-algebra $\mathcal{B} \subset F$

$$E(h(X)\,|\,\mathcal{B}) \ge h(E(X|\mathcal{B})) \qquad \text{b.z.}$$

Bewijs: We hebben (zie(2.4.3)) $h(x) \ge \ell(x) = h(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$, waarbij λ niet-dalend is. Substitutie van $x = X(\omega)$ en $x_0 = E(X|\mathcal{B})(\omega)$ levert

$$h(X) \ge h(E(X|\mathcal{B})) + \lambda(E(X|\mathcal{B}))(X - E(X|\mathcal{B})),$$

zodat o.g.v. stelling 7.1.3 (v) $E(h(X)|\mathcal{B}) \ge h(E\,(X|\mathcal{B}))$, omdat

$$E(\lambda(E(X|\mathcal{B}))(X - E(X|\mathcal{B}))|\mathcal{B}) = \lambda(E(X|\mathcal{B}))\,E(X - E(X|\mathcal{B})|\mathcal{B}) = 0;$$

vergelijk stelling 7.1.9 en stelling 7.1.3 (iv).

7.2. Martingalen

De martingalen vormen een klasse stochastische processen (in geval van discrete tijd: van rijen stochastische grootheden) met speciale convergentie-eigenschappen (zie stelling 7.2.15). Martingalen spelen daarom de laatste tijd een belangrijke rol in de kansrekening. We beperken ons hier tot het geval van discrete tijd.

Definitie 7.2.1. Een rij stochasten $(X_n)_1^\infty$ heet een *martingaal*, als $E\,X_n$ bestaat voor alle n en als met kans 1

$$(7.2.1) \qquad E(X_{n+m}\,|\,\sigma(X_1,\dots,X_n)) = X_n \qquad (n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}).$$

$(X_n)_1^\infty$ heet een *sub-martingaal* als $E(X_{n+m}\,|\sigma(X_1,\dots,X_n)) \ge X_n$ (met kans 1) en een *super martingaal* als $E(X_{n+m}|\sigma(X_1,,,,X_n)) \le X_n$ (met kans 1).

Definitie 7.2.2. $(X_n)_1^\infty$ heet een achterwaartse(sub/super) martingaal, als $,\dots,X_2,X_1$ een (sub/super) martingaal is, d.w.z. als (met kans 1)

$$E(X_n|\sigma(X_{m+n},X_{m+n+1},\dots)) \overset{(\ge)}{\underset{(\le)}{=}} X_{m+n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}).$$

Voorbeeld 7.2.3. Als $(X_n)_1^\infty$ een rij o.o. stochasten is met $E\,X_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, en als $S_n = \sum_1^n X_k$, dan is $(S_n)_1^\infty$ een martingaal.

Voorbeeld 7.2.4. Als $Y, X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn en als EY bestaat, dan is $Z_n := E(Y|X_n, X_{n+1}, \ldots)$ een achterwaartse martingaal.

Opgave 7.2.5. Verifieer de beweringen in voorbeelden 7.2.3 en 7.2.4.

Stelling 7.2.6. Als $(X_n)_1^\infty$ een (sub)-martingaal is, dan is

$$(X_n^+)_1^\infty := (\max(X_n, 0))_1^\infty$$

een submartingaal.

Bewijs: De functie $g(x) := x^+$ is niet-dalend en convex, terwijl natuurlijk $\sigma(X_1^+, \ldots, X_n^+) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Nu geldt (ongelijkheid van Jensen; zie ook stelling 7.1.8) met kans 1

$$E(X_{n+m}^+ | X_1^+, \ldots, X_n^+) = E(E(g(X_{n+m}) | X_1, \ldots, X_n) | X_1^+, \ldots, X_n^+) \geq$$

$$\geq E(g(E(X_{n+m} | X_1, \ldots, X_n)) | X_1^+, \ldots, X_n^+) \geq E(g(X_n) | X_1^+, \ldots, X_n^+) = X_n^+.$$

Stelling 7.2.7. Als $(X_n)_1^\infty$ een martingaal is, dan is $(|X_n|)_1^\infty$ een submartingaal.

Bewijs: Als dat van stelling 7.2.6. De functie $|x|$ is convex (niet niet-dalend).

Stelling 7.2.8. Als $\{(X_n)_1^\infty, X\}$ een martingaal is, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_n |X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sup_n |X_n| > \varepsilon} |X| dP.$$

Bewijs: Volgens stelling 7.2.7 is $\{(|X_n|)_1^\infty, |X|\}$ een submartingaal, zodat

$$(7.2.1) \qquad E(|X| \,\big|\, |X_1|, \ldots, |X_n|) \geq |X_n| \qquad (\text{b.z.};\ n \in \mathbb{N}).$$

Zij $A_j = [|X_j| > \varepsilon] \bigcap_1^{j-1} [|X_k| \leq \varepsilon]$ en $B = [\sup_n |X_n| > \varepsilon]$, dan is $B = \bigcup_1^\infty A_j$, terwijl de A_j disjunct zijn. Nu geldt (zie definitie 7.1.1 en (7.2.1)):

$$\int_B |X|dP = \sum_1^\infty \int_{A_n} |X|dP = \sum_1^\infty \int_{A_n} E(|X| \mid |X_1|,\ldots,|X_n|)dP$$

$$\geq \sum_1^\infty \int_{A_n} |X_n|dP \geq \varepsilon \sum_1^\infty P(A_n) = \varepsilon\, P(B).$$

Stelling 7.2.9. Als $(X_n)_1^\infty$ een achterwaartse martingaal is, dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_n |X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sup_n |X_n| > \varepsilon} |X_1|dP.$$

Bewijs: Volgt uit stelling 7.2.8 door op te merken dat voor iedere n de rij X_n, $X_{n-1},\ldots,X_1$ een martingaal d.w.z.aan (7.2.1)voldoet is en $n \to \infty$ te laten gaan.

De volgende definities zijn voorbereiding voor de convergentie-stelling voor (sub-)martingalen (stelling 7.2.15).

Definitie 7.2.10. Zij $(x_n)_1^\infty$ een rij reële getallen en zij $-\infty < a < b < \infty$. Definieer

$$k_1 = \min\,\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \leq a\} \quad ^{1)}$$

$$k_2 = \min\,\{i \in \mathbb{N} \mid i > k_1, x_i \geq b\}$$

$$\vdots$$

$$k_{2j+1} = \min\,\{i \in \mathbb{N} \mid i > k_{2j},\ x_i \leq a\}$$

$$k_{2j+2} = \min\,\{i \in \mathbb{N} \mid i > k_{2j+1},\ x_i \geq b\},$$

$$h_n = \max\,\{j \in \mathbb{N} \mid k_{2j} \leq n\} \quad ^{1)}$$

en

$$i_k = \begin{cases} 1 & \text{als } k_{2j} < k \leq k_{2j+1} \text{ voor een } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

We noemen h_n het aantal *"upcrossings"* van het interval [a,b] in de rij $x_1,\ldots,x_n$: het aantal malen dat de rij boven b komt na eerst onder a geweest te zijn.

1) $k_1 = \infty$ als $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \leq a\} = \emptyset$, analoog voor $k_2, k_3, \ldots$; $h_n = 0$ als $\{j \in \mathbb{N} \mid k_{2j} \leq n\}$

<u>Lemma 7.2.11.</u> i_k wordt bepaald door $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Precieser:

$$[i_k = 1] \Leftrightarrow \exists_{j \le k-1} \exists_{j < r \le k-1} [x_j \le a,\ x_r \ge b\ ,\ \ x_{r+1} > a, \ldots, x_{k-1} > a]$$

$$[i_k = 0] \Leftrightarrow \exists_{j \le k-1} [x_j \le a,\ x_{j+1} < b, \ldots, x_{k-1} < b] \vee \forall_{1 \le j \le k-1} [x_j > a].$$

Bewijs: Ga na.

<u>Lemma 7.2.12.</u>

$$(7.2.2) \qquad \sum_{r=3}^{n} i_r (x_r - x_{r-1}) \le (a-b) h_n + (x_n - a)^+ .$$

Bewijs: We beschouwen drie gevallen: (i) $h_n = 0$. Dan zijn alle $i_r = 0$, zodat (7.2.2) triviaal geldt. (ii) $h_n > 0$, $k_{2h_n} \le n$, $k_{2h_n+1} > n$. Dan geldt (zie definitie van i_r en merk op dat $x_{k_{2n}} \ge b$ en $x_{k_{2n+1}} \le a$)

$$\sum_{r=3}^{n} i_r (x_r - x_{r-1}) = i_{k_2+1}(x_{k_2+1} - x_{k_2}) + \ldots + i_{k_3}(x_{k_3} - x_{k_3-1}) + \ldots +$$

$$+ i_{k_{2h_n-2}+1}(x_{k_{2h_n-2}+1} - x_{k_{2h_n-2}}) + \ldots + i_{k_{2h_n-1}}(x_{k_{2h_n-1}} - x_{k_{2h_n-1}-1}) +$$

$$+ i_{k_{2h_n}+1}(x_{k_{2h_n}+1} - x_{k_{2h_n}}) + \ldots + i_n (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= x_{k_3} - x_{k_2} + \ldots + x_{k_{2h_n-1}} - x_{k_{2h_n-2}} + x_n - x_{k_{2h_n}} \le$$

$$\le h_n(a-b) + x_n - a = h_n(a-b) + (x_n - a)^+ .$$

(iii) $h_n > 0$, $k_{2h_n+1} \le n$, $k_{2h_n+2} > n$. Dan geldt op dezelfde manier

$$\sum_{r=3}^{n} i_r (x_r - x_{r-1}) = x_{k_3} - x_{k_2} + \ldots + x_{k_{2h_n+1}} - x_{2h_n} \le h_n(a-b) \le h_n(a-b) + (x_n - a)^+ .$$

We definiëren nu (gegeneraliseerde) stochasten K_j, H_n en I_r, door in definitie 7.2.10 de rij $(x_n)_1^\infty$ te vervangen door een rij stochasten $(X_n)_1^\infty$. Hierbij is K_j mogelijk gegeneraliseerd geheelwaardig (vergelijk definities A 3.1 en A 4.2), d.w.z. dat $P(K_j = \infty) > 0$. We kunnen K_1 voluit schrijven als

$$K_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \, 1_{[X_n \le a] \bigcap_1^{n-1} [X_j > a]} + \infty \, 1_{\bigcap_1^\infty [X_n > a]},$$

waaruit blijkt dat K_1 meetbaar is m.b.t. $\sigma(X_1, X_2, \ldots)$; dit laatste geldt net zo voor K_j met $j > 1$.

Lemma 7.2.13. (i) $\sigma(I_k) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_{k-1})$

(7.2.3) (ii) $\sum_{r=3}^{n} I_r(X_r - X_{r-1}) \le (a - b)H_n + (X_n - a)^+.$

Bewijs: Zie lemma 7.2.11 en 7.2.12.

Stelling 7.2.14. Als $(X_n)_1^\infty$ een submartingaal is, dan geldt (in de hierboven ingevoerde notatie)

(7.2.4) $(b - a)\, E\, H_n \le E(X_n - a)^+$;

Als $(\tilde{X}_n)_1^\infty$ een achterwaartse martingaal is, dan geldt voor het aantal "upcrossings" H_n' van $\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1}, \ldots, \tilde{X}_1$:

$$(b - a) E\, H_n' \le E(X_1 - a)^+.$$

Bewijs: Zij $(X_n)_1^\infty$ een submartingaal. Dan is (definitie)

$$E(X_k - X_{k-1} \mid X_1, \ldots, X_{k-1}) = E(X_k \mid X_1, \ldots, X_{k-1}) - X_{k-1} \ge 0 \quad \text{(b.z.)}$$

en dus, omdat $I_k \ge 0$ (b.z.) en $\sigma(I_k) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_{k-1})$ (lemma 7.2.13):

$$E\, I_k(X_k - X_{k-1}) = E\, E(I_k(X_k - X_{k-1}) \mid X_1, \ldots, X_{k-1}) = E(I_k E\, (X_k - X_{k-1} \mid X_1, \ldots, X_{k-1}))$$

Nu is dus wegens (7.2.3): $(a - b)E\, H_n + E(X_n - a)^+ \ge E \sum_3^n I_k(X_k - X_{k-1}) \ge 0$, equivalent met (7.2.4).

<u>Stelling 7.2.15</u> (convergentiestelling voor submartingalen). Zij $(X_n)_1^\infty$ een submartingaal waarvoor $\sup_n E|X_n| < \infty$. Dan bestaat er een stochast X met de eigenschap dat

$$X_n \overset{b.z.}{\to} X,$$

terwijl $E|X| \le \sup_n E|X_n|$

Bewijs: Definieer $A := [(X_n)$ is niet convergent]. Dan geldt (ga na)

$$A = \overset{\bullet}{\bigcup_{r,s}} A_{r,s} := \bigcup_{r,s} [\liminf_{n\to\infty} X_n \le r < s \le \limsup_{n\to\infty} X_n],$$

waarbij de vereniging wordt genomen over alle rationale r en s. We bewijzen dat $P(A_{r,s}) = 0$. Zij H_n het aantal "upcrossings" van $[r,s]$ (zie definitie 7.2.10). Omdat $0 \le H_n \le H_{n+1}$ is er een (gegeneraliseerd reëel-waardige) H met $H_n \overset{b.z.}{\to} H$. Op grond van monotone convergentie (Stelling A 4.7) en stelling 7.2.14 geldt dan

$$E\,H = \int H dP = \sup_n E\,H_n \le \sup_n \frac{E(X_n - r)^+}{s-r} \quad .$$

Omdat $E(X_n - r)^+ \le E|X_n - r| \le E|X_n| + |r| \le \sup_n E|X_n| + |r|$, is $EH < \infty$, zodat $P(H < \infty) = 1$. Dit betekent dat $P(A_{r,s}) = 0$ voor iedere r en s; immers $A_{r,s} \subset [H = \infty]$. Nu is ook $P(A) = 0$, zodat (X_n) bijna zeker convergeert: $X_n \overset{b.z.}{\to} X$. Voor X geldt dan (lemma van Fatou; stelling A 4.8):

$$E|X| = E \lim_{n\to\infty} |X_n| = E \liminf_{n\to\infty} |X_n| \le \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \le \sup_n E|X_n| < \infty.$$

<u>Stelling 7.2.16</u>. Zij $(\tilde{X}_n)_1^\infty$ een achterwaartse submartingaal. Dan is er een (gegeneraliseerd reeel-waardige) X met $\tilde{X}_n \overset{b.z.}{\to} X$.

Bewijs: Analoog aan dat van stelling 7.2.15 voor eindige rijen $\tilde{X}_n, \ldots, \tilde{X}_1$. Dan geldt voor H_n' (zie stelling 7.2.14)

$$E\,H_n' \le \frac{E(X_1 - r)^+}{s-r} \le \frac{E|X_1| + |r|}{s-r} \,.$$

Nu is X niet noodzakelijk eindig met kans 1, omdat niet geëist is dat $E|X_n|$ begrensd is.

Definitie 7.2.17. Een rij stochasten $(X_n)_1^\infty$ heet *uniform integreerbaar*, als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{K_\varepsilon>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ E(|X_n|1_{|X_n|\geq K_\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Lemma 7.2.18. Als de rij $(X_n)_1^\infty$ uniform integreerbaar is, dan geldt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta_\varepsilon>0}\ \forall_{B\in F}\ [(P(B) < \delta_\varepsilon) \Rightarrow (\forall_{n\in\mathbb{N}} \int_B |X_n|dP < \varepsilon)].$$

Bewijs: Ga na.

Lemma 7.2.19. Laat $X_n \xrightarrow{b.z.} X$, waarbij $P(|X| < \infty) = 1$, terwijl $(X_n)_1^\infty$ uniform integreerbaar is. Dan geldt (zie definitie 4.4.1 4)

$$X_n \xrightarrow{1} X.$$

Bewijs: Op grond van lemma 7.2.18 is $E(|X_n|\ 1_A) < \varepsilon$ voor alle n en iedere A met $P(A) < \delta_\varepsilon$. Volgens de stelling van Egorov (Stelling A 3.8) is er een A met $P(A) < \delta_\varepsilon$ zô dat $X_n \to X$ uniform op A^*. Nu is dus

$$E|X_n-X_m| \leq E(|X_n-X_m|1_{A^*}) + E(|X_n|1_A) + E(|X_m|1_A) \leq E(|X_n-X_m|1_{A^*}) + 2\varepsilon.$$

Omdat $X_n \to X$ uniform op A^* is dan $E|X_n - X_m| \leq 3\varepsilon$ voor n en m voldoende groot. Er is dus een X' met de eigenschap dat $E|X'| < \infty$ en $X_n \xrightarrow{1} X' = X$ (b.z.)

Opgave 7.2.20. Bewijs dat $(E|X_n|)$ begrensd is als $(X_n)_1^\infty$ uniform integreerbaar is.

Opgave 7.2.21. Bewijs dat $E|X'| < \infty$ en dat $X' = X$ (b.z.) in het bewijs van lemma 7.2.19.

Stelling 7.2.22. Als $(X_n)_1^\infty$ een submartingaal of een achterwaartse submartingaal is, die uniform integreerbaar is, dan is er een X met $X_n \xrightarrow{b.z.} X$ en $X_n \xrightarrow{1} X$ met $P(|X| < \infty) = 1$.

Bewijs: Zij $(X_n)_1^\infty$ een submartingaal, dan is (zie opgave 7.2.20) $\sup E|X_n| < \infty$, zodat er (stelling 7.2.15) een X bestaat met $X_n \xrightarrow{b.z.} X$

en $E|X| \le \sup_n E|X_n|$. Lemma 7.2.19 zegt dan dat ook $X_n \xrightarrow{1} X$.
Zij nu $(X_n)_1^\infty$ een achterwaartse submartingaal. Uit stelling 7.2.16 volgt dat $X_n \xrightarrow{b.z.} X$, waarbij mogelijk $P(|X| < \infty) < 1$. Om lemma 7.2.19 (en de stelling van Egorov) te kunnen toepassen, moeten we bewijzen dat $P(|X| < \infty) = 1$. Zij $A = [|X| = \infty]$ met $P(A) = \alpha > 0$.
Dan geldt $X_n^{-1} \to 0$ met kans 1 op A, zodat (stelling van Egorov) $X_n^{-1} \to 0$ uniform op $\tilde{A}$ met $P(\tilde{A}) > \alpha/2$. Dit betekent dat er voor iedere K een N bestaat met $X_n(\omega) > K$ voor alle $n \ge N$ en alle $\omega \in \tilde{A}$. Dit is in strijd met de uniforme integreerbaarheid van $(X_n)_1^\infty$ (ga na).

<u>Gevolg 7.2.23.</u> Als $(X_n)_1^\infty$ een achterwaartse martingaal is, dan is er een X met $X_n \xrightarrow{b.z.} X$ en $X_n \xrightarrow{1} X$.

Bewijs: We bewijzen dat $(X_n)_1^\infty$ uniform integreerbaar is. Zij $K > 0$ en $B_n = [|X_n| > K]$ en dus $B := \bigcup_1^\infty B_n = [\sup_n |X_n| > K]$. Omdat (stelling 7.2.7) $(|X_n|)_1^\infty$ een achterwaartse submartingaal is, geldt met kans 1

$$|X_n| \le E(|X_{n-k}| \mid |X_n|, |X_{n+1}|, \ldots) \qquad (1 \le k \le n-1;\ n \in \mathbb{N}).$$

Nu is $B_n \in \sigma(|X_n|, |X_{n+1}|, \ldots)$ en $B_n \subset B$, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{B_n} |X_n|\,dP \le \int_{B_n} E(|X_1| \mid |X_n|, |X_{n+1}|, \ldots)\,dP = \int_{B_n} |X_1|\,dP \le \int_B |X_1|\,dP, \tag{7.2.5}$$

en dus wegens stelling 7.2.9.

$$P(B) \le \frac{1}{K} \int_B |X_1|\,dP \le \frac{E|X_1|}{K} \to 0 \qquad (K \to \infty).$$

Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er dus een $K(\varepsilon)$ met bijbehorende $B_n(\varepsilon)$ en $B(\varepsilon)$ zó dat $\int_B |X_1|\,dP < \varepsilon$ en dus (zie (7.2.5))

$$\int_{B_n(\varepsilon)} |X_n|\,dP \le \int_{B(\varepsilon)} |X_1|\,dP < \varepsilon,$$

d.w.z. $(X_n)_1^\infty$ is uniform integreerbaar. We kunnen nu stelling 7.2.22 toepassen.

Opgave 7.2.24. Als $E|X_1| < \infty$ en als $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 0$, dan is ook

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} |X_1|\,dP = 0.$$

Opgave 7.2.25. Bewijs gevolg 5.1.3 m.b.v. stelling 7.2.8.

Opgave 7.2.26. Bewijs stelling 5.2.6 ($\Leftarrow$) m.b.v. martingalen. Aanwijzing: $\frac{1}{n}\sum_1^n (X_k - EX_1)$ is geen martingaal, $\sum_1^n \frac{1}{k} (X_k - E\,X_1)$ wel.

Stelling 7.2.27. Laat Z, $Y_1, Y_2, \ldots$ stochasten zijn met $E|Z| < \infty$, dan is de rij $(X_n)_1^\infty$, gedefinieerd door

$$X_n = E(Z|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

een uniform integreerbare martingaal met $X_n \xrightarrow{b.z.} E(Z|Y_1,Y_2,\ldots)$ en $X_n \xrightarrow{1} E(Z|Y_1,Y_2,\ldots)$.

Bewijs: $(X_n)_1^\infty$ is een martingaal (ga na) en $E|X_n| \le E|Z|$ (zie stelling 7.1.23), zodat $X_n \xrightarrow{b.z.} X$ met $E|X| \le E|Z|$ (zie stelling 7.2.15).
Analoog aan het bewijs van stelling 7.2.8 (p.82) geldt met $B_n = [|X_n| > K]$ en $B = \bigcup_1^\infty B_n$

$$\int_{B_n} |X_n|\,dP \le \int_{B_n} |Z|\,dP \le \int_B |Z|\,dP,$$

terwijl $P(B) \to 0$ als $K \to \infty$. De rij $(X_n)_1^\infty$ is dus uniform integreerbaar, zodat (stelling 7.2.22) $X_n \xrightarrow{1} X$. We bewijzen nog dat $X = E(Z|Y_1,Y_2,\ldots)$ (b.z.). Zij $A \in \sigma(Y_1,\ldots,Y_N)$, dan geldt (omdat $X_n \xrightarrow{1} X$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n\,dP = \int_A X\,dP,$$

terwijl (definitie voorwaardelijke verwachting) $\int_A X_n dP = \int_A Z\, dP$ voor $n \geq N$, zodat $\int_A X\, dP = \int_A Z\, dP$ voor alle $A \in \sigma(Y_1,\ldots,Y_N)$ en alle $N \in \mathbb{N}$. Dit betekent (omdat $\sigma(Y_1,Y_2,\ldots)$ wordt voortgebracht door $\{\sigma(Y,\ldots Y_N) | N \in \mathbb{N}\}$) dat

$$\int_C X dP = \int_C Z\, dP$$

voor alle $C \in \sigma(Y_1,Y_2,\ldots)$, d.w.z. $X = E(Z|Y_1,Y_2,\ldots)$.

Analoog geldt

Stelling 7.2.28. Laat $Z,Y_1,Y_2,\ldots$ stochasten zijn met $E|Z| < \infty$, en zij $\mathcal{I}$ de staart-σ-algebra van $(Y_n)_1^\infty$, dan is de rij $(\tilde{X}_n)_1^\infty$ gedefinieerd door

$$\tilde{X}_n = E(Z|Y_n,Y_{n+1},\ldots)$$

een uniform integreerbare achterwaartse martingaal, waarvoor geldt

$$\tilde{X}_n \overset{b.z.}{\to} E(Z|\mathcal{I}) \text{ en } \tilde{X}_n \overset{1}{\to} E(Z|\mathcal{I}).$$

Bewijs: Analoog aan dat van 7.2.27.

Literatuur

[1] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1974.

[2] L. Breiman, Probability, Addison - Wesley, Reading Massachusetts, etc. 1968.

[3] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 3-rd, edition, Wiley, New York, 1968.

[4] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol 2, 2-nd. edition, Wiley, New York, 1971.

[5] B.V. Gnedenko, The theory of probability, 4-th edition, Chelsea, New York, 1967.

[6] M. Loève, Probability theory, 3-rd, edition, Van Nostrand Princeton, N.J., 1963.

[7] J. Neveu, Mathematical Foundations of probability theory, Holden-Day, San Francisco, 1965.

[8] H.G. Tucker, A graduate course in probability, Academic Press, New York and London, 1967.

APPENDIX: OVERZICHT MAAT EN INTEGRATIETHEORIE

In deze appendix geven we een aatal definities en stellingen (zonder bewijs) om een indruk geven van een opbouw van de maat- en integratietheorie. De voor ons belangrijkste stellingen zijn aangegeven met *. Voor de bewijzen verwijzen we naar [2] ; een deel van de informatie kan, in een iets andere vorm, ook in [1] worden gevonden. De notatie is enigszins aangepast aan die in de rest van dit dictaat.

A 1. Algebra's en σ-algebra's

We gaan uit van een niet-lege verzameling Ω met elementen ω. De verzameling van alle deelverzamelingen van Ω geven we aan met $\mathcal{P}(\Omega)$. We schrijven soms $\Omega \setminus A$ voor A^* en $B \setminus A$ voor BA^*, speciaal als $B \supset A$.

Definitie A 1.1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heet een *algebra* als geldt:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) Als $A \in \mathcal{F}$, dan $A^* \in \mathcal{F}$, (iii) Als $A_1 \in \mathcal{F},\dots,A_n \in \mathcal{F}$, dan $\bigcup_1^n A_j \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$.

$\mathcal{F}$ heet een *σ-algebra*, als i.p.v. (iii) geldt:

(iii) Als $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F},\dots$, dan $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{F}$.

Opgave A 1.2. Als $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F},\dots$ dan $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$, $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$ en dus (eventueel) $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Stelling A 1.3. Als $\mathcal{F}_\lambda$ voor iedere $\lambda \in \Lambda$ een σ-algebra is, dan is

$$\bigcap_\Lambda \mathcal{F}_\lambda \text{ een } \sigma\text{-algebra.}$$

Stelling A 1.4. Zij $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Er is precies één σ-algebra $\mathcal{A}$ met de eigenschappen: a. $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, b. Als $\mathcal{B}$ een σ-algebra is met $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, dan $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Definitie A 1.5. De σ-algebra $\mathcal{A}$ uit stelling A 1.4 noemen we de *door* $\mathcal{C}$ *voortgebrachte* σ-algebra. Notatie: $\sigma\{\mathcal{C}\}$.

Definitie A 1.6. Zij $\Omega = \mathbb{R}^n$ en C_n de collectie van deelverzamelingen van de vorm $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \le a_i \ (i = 1,2,\dots,n)\} =: (-\infty,a]$. Dan heet $\sigma\{C_n\}$ σ-algebra der Borelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$. Notatie $\sigma\{C_n\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Opmerking A 1.7. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wordt ook voortgebracht door de collectie van alle open verzamelingen van $\mathbb{R}^n$. In een topologische ruimte T worden de Borelverzamelingen $\mathcal{B}(T)$ op deze wijze gedefinieerd.

Definitie A 1.8. Een *meetbare ruimte* is een paar $(\Omega,\mathcal{F})$, waarbij $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ een σ-algebra is.

Definitie A 1.9. Laat $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ en $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ meetbare ruimten zijn. Voor $A \in \mathcal{F}_1$ en $B \in \mathcal{F}_2$ heet het Cartesisch Product $A \times B$ een *meetbare rechthoek*. De door de klasse van meetbare rechthoeken voortgebrachte σ-algebra, notatie $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, heet de *product-σ-algebra*.

Zij voor $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ en voor $\omega_1 \in \Omega$ de verzameling $A_{\omega_1} \subset \Omega_2$ gedefinieerd door $A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1,\omega_2) \in A\}$. We noemen A_{ω_1} dan een Ω_1*-sectie van* A. Analoog definiëren we Ω_2-secties A^{ω_2} van A voor $\omega_2 \in \Omega_2$.

Stelling A 1.10. Laat $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ en $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ meetbare ruimten zijn. De klasse van eindige verenigingen van disjuncte meetbare rechthoeken is een algebra van deelverzamelingen van $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Opgave A 1.11. Ga na dat de klasse van "rechthoeken" van de vorm $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ de σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ voortbrengt (zie definitie A 1.6) en dat $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Evenzo is $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_1^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Stelling A 1.12. Laat $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ en $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ meetbare ruimten zijn en zij $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Dan is $A_{\omega_1} \in \mathcal{F}_2$ voor alle $\omega_1 \in \Omega_1$ en $A^{\omega_2} \in \mathcal{F}_1$ voor alle $\omega_2 \in \Omega_2$.

A. 2. Maten

Definitie A 2.1. Een *maatruimte* is een drietal (Ω,F,μ), waarbij Ω een niet-lege verzameling is, $F \subset P(\Omega)$ een σ-algebra en μ een afbeelding $F \to \bar{\mathbb{R}}$ (de gegeneraliseerde reële getallen (zie bijv.[1]) met de volgende eigenschappen: (i) $\mu(A) \geq 0$ voor alle $A \in F$; (ii) Als $A_1 \in F$, $A_2 \in F,\ldots$ en $A_iA_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, dan is $\mu(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu(A_j)$; (iii) $\mu(\emptyset) = 0$. De functie μ heet dan een *maat* op F.
Eigenschap (ii) heet *σ-additiviteit*. Als F_0 een *algebra* is, dan heet μ een maat op F_0 als (ii) geldt voor rijen (A_j) met $\bigcup_1^\infty A_j \in F_0$.
Een maat μ heet *σ-eindig* (of: *σ-finiet*) als er een rij $(B_j)_1^\infty$ bestaat met $B_j \in F$, $B_iB_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup_1^\infty B_j = \Omega$ en $\mu(B_j) < \infty$ $(j=1,2,\ldots)$; μ heet *eindig* als $\mu(\Omega) < \infty$ en μ heet een *kansmaat* als $\mu(\Omega) = 1$. We nemen in het vervolg steeds aan dat de beschouwde maten σ-finiet zijn.

Stelling A 2.2. Zij (Ω,F,μ) een maatruimte en zij $A_1 \in F$, $A_2 \in F,\ldots$. Dan geldt

$$\mu\,(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

$$\mu\,(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n), \quad \text{mits } \mu(\Omega) < \infty$$

$$\mu\,(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Definitie A 2.3. Een afbeelding $\bar{\mu}\colon P(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ heet een *uitwendige maat*, als geldt: (i) $\bar{\mu}(A) \geq 0$ voor alle $A \subset \Omega$: (ii) $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$, (iii) Als $A \subset B$, dan is $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$; (iv) $\bar{\mu}(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \bar{\mu}(A_j)$.

Stelling A 2.4. Zij $F_0 \subset P(\Omega)$ een algebra en μ een maat op F_0. Dan is $\bar{\mu}$, op $P(\Omega)$ gedefinieerd door

$$\text{(A 2.1)} \qquad \bar{\mu}(A) = \inf \{\sum_1^\infty \mu(A_n) \mid A \subset \bigcup_1^\infty A_j,\ A_j \in F_0 \quad (j=1,2,\ldots)\},$$

een uitwendige maat met de eigenschap $\bar{\mu}(A_0) = \mu(A_0)$ voor alle $A_0 \in F_0$.

Definitie A 2.5. Zij $\bar{\mu}$ een uitwendige maat op $P(\Omega)$. Een verzameling $A \subset \Omega$ heet *$\bar{\mu}$-meetbaar*, als voor alle $B \in P(\Omega)$ geldt: $\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(AB) + \bar{\mu}(A^*B)$.

Stelling A 2.6. Zij $\bar{\mu}$ een uitwendige maat op $P(\Omega)$ en zij F de verzameling van $\bar{\mu}$-meetbare verzamelingen. Dan is F een σ-algebra en $\bar{\mu}$ is een maat op F.

De nu volgende stelling speelt een belangrijke rol bij de constructie van kansmaten (zie bijv. stelling 2.3.3).

* Stelling A 2.7 (Voortzettingsstelling voor maten). Zij $F_0 \subset P(\Omega)$ een algebra, μ een maat op F_0 en $\bar{\mu}$ de in (A 2.1) gedefinieerde uitwendige maat. Zij tenslotte $F_1 = \sigma\{F_0\}$. Dan is $\bar{\mu}$ de enige maat op F_1 die op F_0 met μ overeenstemt, d.w.z.: als ν een maat is op F_1 en als voor alle $A_0 \in F_0$ geldt dat $\nu(A_0) = \mu(A_0)$, dan is $\nu(A) = \bar{\mu}(A)$ voor alle $A \in F_1$.

Voorbeeld A 2.8. Zij $\Omega = \mathbb{R}^2$ en zij F_0 de algebra bestaande uit alle eindige verenigingen van rechthoeken $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a_i < x_i \leq b_j, \ i=1,2\}$. Zij $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ een functie, die continu van rechts is, niet-dalend in beide argumenten en met de eigenschap dat

$$\mu_F(a,b] := F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \geq 0$$

voor alle $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^2$ met $a_i \leq b_i$ $(i=1,2)$. Definieer μ op F_0 door $\mu(a,b] = \mu_F(a,b]$. Dan wordt door (A 2.1) een maat op $B(\mathbb{R}^2) = \sigma\{F_0\}$ gedefinieerd. Deze maat noemen we de *door* F *geïnduceerde* Stieltjes-Lebesgue-maat, die we aangeven met μ_F.

Opgave A 2.9. Hoe definiëren we Stieltjes-Lebesgue maten op $B(\mathbb{R}^n)$ (Vergelijk lemma 2.2.6)?

Voorbeeld A 2.10. Als we op F_0 (zie voorbeeld A 2.8) μ vastleggen door $\mu(a,b) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ dan krijgen we door voortzetting de Lebesgue-maat, λ_2 op $B(\mathbb{R}^2)$. Analoog definieert men λ_n op $B(\mathbb{R}^n)$.

Definitie A 2.11. Laat (Ω_1,F_1,μ_1) en (Ω_2,F_2,μ_2) σ-finiete maatruimten zijn. Zij F_0 de algebra bestaande uit eindige disjuncte verenigingen van meetba rechthoeken. Definieer voor zo'n rechthoek (vergelijk definitie A 1.9) $\mu_1 \times \mu_2$ door $(\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$. De voortzetting van $\mu_1 \times \mu_2$ tot $F_1 \otimes F_2 = \sigma\{F_0\}$ noemen we de *productmaat* van μ_1 en μ_2. De maatruimte $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ F_1 \otimes F_2,\ \mu_1 \times \mu_2)$ heet *productmaatruimte*. (Vergelijk stelling A 1.10)

Opgave A 2.12. Ga na dat de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$ de product maat is van de Lebesgue-maten op twee copieën van $\mathbb{R}$.

Opmerking A 2.13. Men noemt een maatruimte (Ω,F,μ) *volledig*, als uit $A \in F$, $B \subset A$ en $\mu(A) = 0$ volgt dat $B \in F$ (met natuurlijk $\mu(B) = 0$).
We kunnen een niet-volledige maatruimte volledig maken door F via de uitwendige maat $\bar{\mu}$ (zie (A 2.1)) uit te breiden tot een maat op de daarbij behorende σ-algebra (zie stelling A 2.6). De uitbreidingsprocedure levert altijd een volledige maat (niet noodzakelijk op $\sigma\{F_0\}$). De σ-algebra F, die ontstaat door completering van $B(\mathbb{R}^n)$ noemt men de algebra der Lebesgue-verzamelingen. Omgekeerd noemt men de Lebesgue maat beperkt tot $B(\mathbb{R}^n)$ wel de Borel-maat.

We besluiten deze paragraaf met twee stellingen over het benaderen van Borelverzamelingen door open, gesloten, resp. compacte verzamelingen.

Stelling A 2.14. Voor alle $A \in B(\mathbb{R}^n)$ en alle $\varepsilon > 0$ zijn er U_ε open en C_ε gesloten zodat $C_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$ en $P(U_\varepsilon \backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Bewijs : Laat

$A := B \in B(\mathbb{R}^n) | \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{C_\varepsilon \text{gesloten}}\ \exists_{U_\varepsilon \text{open}}\ [C_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon \wedge P(U\varepsilon \backslash C_\varepsilon < \varepsilon]\}$ dan geldt:

i) $\emptyset \in A$, $\mathbb{R}^n \in A$

ii) $A \in A$, dan $A^c \in A$.

Immers laat $\varepsilon > 0$ en kies C_ε gesloten, $U\varepsilon$ open zodat $C_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$ en $P(U_\varepsilon \backslash C_\varepsilon)$, dan $U_\varepsilon^c \subset A^c \subset C_\varepsilon^c$, $C_\varepsilon^c \backslash U_\varepsilon^c = U_\varepsilon \backslash C_\varepsilon$, U_ε^c gesloten en C_ε^c open.

iii) $A_1, A_2, \ldots \in A$, dan $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$.

Immers laat $\varepsilon > 0$ en kies voor $n = 1,2 \ldots$ $C_{n,\varepsilon}$ gesloten, $U_{n,\varepsilon}$ open zó dat $C_{n,\varepsilon} \subset A_n \subset U_{n,\varepsilon}$ en $P(U_{n,\varepsilon} \backslash C_{n,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Laat $U_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,\varepsilon}$ en $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,\varepsilon}$

Kies h zodat $P(C \bigcup_{n=1}^{h} C_{n,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2}$ en laat $C_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{h} C_{n,\varepsilon}$, dan geldt

U_ε open, C_ε gesloten, $C_\varepsilon \subset A \in U_\varepsilon$ en

$$P(U_\varepsilon \backslash C_\varepsilon) \le P(U_\varepsilon \backslash C) + P(C \backslash C_\varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(U_{n,\varepsilon} \backslash C_{n,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dus $\mathcal{A}$ is een σ-algebra.
Zij $F \subset \mathbb{R}^n$ gesloten, dan $F = \{x \mid d(x,F) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid d(x,F) < \frac{1}{n}\}$ en omdat d continu is geldt voor $n = 1,2,\ldots$ $U_n := \{x \mid d(x,F) < \frac{1}{n}\}$ is open.
Laat nu $\varepsilon > 0$. Kies $C_\varepsilon = F$ en $U_\varepsilon = U_{n_0}$ zodat $P(U_{n_0} \backslash F) < \varepsilon$. Dus $F \in \mathcal{A}$.
Conclusie: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Stelling A 2.15. Er is voor alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ en $\varepsilon > 0$ een compacte $K \subset A$ zodat $P(A\backslash K) < \varepsilon$.

Bewijs: Merk op dat $\mathbb{R}^n = \lim_{k\to\infty} \uparrow K_k$ met K_k compact. Kies dus K_k compact zodat $P(\mathbb{R}^n \backslash K_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ en $C_\varepsilon \subset A$ gesloten zodat $P(A\backslash C_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan $C_\varepsilon \cap K_k$ compact en

$$P(A\backslash C_\varepsilon \cap K) \le P(A\backslash C_\varepsilon) + P(\mathbb{R}^n \backslash K) < \varepsilon.$$

A.3. Meetbare functies

In het volgende is $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ een vaste σ-finiete maatruimte.

Definitie A 3.1. Een functie $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ (de gegeneraliseerde reële getallen) heet *meetbaar* (of: $\mathcal{F}$-meetbaar) als

$$\{\omega \mid X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F} \qquad (\text{alle } a \in \mathbb{R})$$

Opmerking A 3.2. We korten $\{\omega \mid X(\omega) \le a\}$, $\{\omega \mid X(\omega) \in B\}$ e.d. meestal af tot $[X \le a]$ en $[X \in B]$ e.d.

Stelling A 3.3. $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ is d.e.s.d. meetbaar als $X^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en bovendien $[X = -\infty] \in \mathcal{F}$ en $[X = \infty] \in \mathcal{F}$.

Lemma A 3.4. Als X en Y meetbare functies zijn, dan geldt $[X > Y] \in \mathcal{F}$, $[X \ge Y] \in \mathcal{F}$ en (dus) $[X = Y] \in \mathcal{F}$.

Stelling A 3.5. Als X en Y meetbare functies zijn, dan geldt
(i) $X + \alpha$ is meetbaar voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$
(ii) αX is meetbaar voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$
(iii) $X + Y$ is meetbaar
(iv) XY is meetbaar
(v) X/Y is meetbaar als $Y \ne 0$ op Ω.

Stelling A 3.6. Als $(X_n)_1^\infty$ een rij meetbare functies is, dan zijn ook de functies $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\liminf_{n\to\infty} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ en (eventueel) $\lim_{n\to\infty} X_n$ meetbaar.

Opmerking A 3.7. Het komt dikwijls voor dat relaties als $X = Y$ of $X_n \to X$ niet voor alle $\omega \in \Omega$ gelden, maar op een verzameling $A \in F$ met $P(A^*) = 0$. We schrijven dan $X = Y$ μ-b.z. of $X_n \to X$ μ-b.z. (b.z. voor "bijna zeker"). Als (Ω,F,μ) een volledige maatruimte is, dan volgt uit de meetbaarheid van Y of die van $X_1,X_2,\ldots$ de meetbaarheid van X. Omdat we de maatruimte altijd kunnen completeren, geeft dit geen problemen.

*Stelling A 3.8 (stelling van Egorov). Zij (Ω,F,μ) een eindige maatruimte en zij $(X_n)_1^\infty$ een rij meetbare functies die b.z. eindig zijn en waarvoor geldt dat $X_n \to X$ b.z. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $A_\varepsilon \in F$ met $P(A_\varepsilon^*) < \varepsilon$ en zó dat $X_n \to X$ *uniform* op A_ε.

A 4. Lebesgue-integralen

Definitie A 4.1. Een (eindige meetbare) *trapfunctie* X op Ω is een functie van de vorm

$$X = \sum_1^n \alpha_k 1_{A_k} ,$$

waarbij $\alpha_k \in \mathbb{R}$ en $A_1,A_2,\ldots,A_n$ disjuncte elementen van F zijn met $\bigcup_1^n A_k = \Omega$. We noemen $A_1,\ldots,A_n$ een (eindige) *partitie* van Ω.

Definitie A 4.2. Zij X een niet negatieve functie $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. We definiëren de Lebesgue-integraal $\int X d\mu = \int_\Omega X d\mu$ door

$$\int X d\mu = \sup[\sum_1^n \inf\{X(\omega) \mid \omega \in A_k\}\, \mu(A_k) \mid A_1,\ldots,A_n \text{ partitie van } \Omega].$$

Voor een willekeurige functie $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiëren we

$$\int X d\mu = \int X^+ d\mu - \int X^- d\mu,$$

waarbij verondersteld wordt dat minstens een van de integralen in het rechter lid eindig is. We definiëren verder $\int_A X d\mu = \int 1_A X d\mu$.

<u>Stelling A 4.3.</u> Als X een trapfunctie is, dan is $\int X d\mu = \sum_1^n \alpha_k \mu(A_k)$.

<u>Stelling A 4.4.</u> Als $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meetbaar, dan is er een rij trapfuncties $(X_n)_1^\infty$ met de eigenschap $|X_1| \le |X_2| \le \dots$ en $X_n \to X$ op Ω. Als X begrensd is, kunnen de X_n zó gekozen worden dat $X_n \to X$ uniform op Ω. Als $X \ge 0$ kunnen de X_n zo gekozen worden dat $0 \le X_1 \le X_2 \le \dots \le X$.

<u>Stelling A 4.5.</u> Als X en Y niet-negatief en meetbaar zijn, dan geldt

(i) $$\int (X + Y) d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu$$

(ii) $$\int X d\mu = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \quad \text{b.z.}).$$

<u>Stelling A 4.6</u> (Stelling van Lesbesgue). Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij niet-negatieve meetbare functies $\Omega \to \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\int \sum_1^\infty X_n \, d\mu = \sum_1^\infty \int X_n \, d\mu \, .$$

*<u>Stelling A 4.7</u> (monotone-convergentiestelling). Zij $(X_n)_1^\infty$ een niet-dalende rij meetbare functies $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ met de eigenschap dat $\int X_n d\mu > -\infty$ voor alle $n \ge n_0 \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} X_n d\mu \, .$$

*<u>Stelling A 4.8</u> (Lemma van Fatou). Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij niet-negatieve meetbare functies $\Omega \to \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\int \liminf_{n\to\infty} X_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int X_n d\mu \, .$$

Definitie A 4.9. $L_1 = L_1(\Omega,F,\mu)$ is de klasse van meetbare functies X waarvoor $\int X d\mu$ bestaat en eindig is (dan is ook $\int |X| d\mu < \infty$); de deelklasse van niet-negatieve $X \in L_1$ geven we aan met L_1^+.

*Stelling A 4.10 (gemajoreerde-convergentiestelling). Zij $(X_n)_1^\infty$ een rij meetbare functies $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ en zij $Y \in L_1^+$ zó dat $|X_n| \le Y$ $(n=1,2,\ldots)$.
Dan geldt

(i) $$\int \liminf_{n\to\infty} X_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int X_n d\mu ,$$

(ii) $$\int \limsup_{n\to\infty} X_n d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int X_n d\mu,$$

(iii) $$\int \lim_{n\to\infty} X_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu \qquad \text{(als } (X_n)_1^\infty \text{ convergeert).}$$

A 5. De stelling van Fubini

In deze paragraaf zijn (Ω_1,F_1,μ_1) en (Ω_2,F_2,μ_2) σ-finiete maatruimten; de productmaatruimte (zie definitie A 2.11) geven we aan met $(\Omega_1 \times \Omega_2, F_1 \otimes F_2, \mu_1 \times \mu_2)$ en de secties van A (zie definitie A 1.9) met A_{ω_1} resp A^{ω_2}.

Stelling A 5.1. Als $A \in F_1 \otimes F_2$, dan geldt

(i) $\mu_2(A_{\omega_1})$ is F_1-meetbaar

(ii) $\mu_1(A^{\omega_2})$ is F_2-meetbaar

(iii) $$\int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{\omega_2}) d\mu_2.$$

Stelling A 5.2. Zij $A \in F_1 \otimes F_2$, dan geldt

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2}) d\mu_2 .$$

Stelling A 5.3. Zij $X: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ niet-negatief en meetbaar. Dan geldt

(i) $X(\omega_1,\omega_2)$ is F_1-meetbaar voor alle $\omega_2 \in \Omega_2$,

(ii) $X(\omega_1,\omega_2)$ is F_2-meetbaar voor alle $\omega_1 \in \Omega_1$,

(iii) $\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)d\mu_1$ is F_2-meetbaar,

(iv) $\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)d\mu_2$ is F_1-meetbaar,

(v) $$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} Xd(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} Xd\mu_1)d\mu_2 = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} Xd\mu_2)d\mu_1 .$$

*Gevolg A 5.4 (Stelling van Fubini). Zij $X \in L_1(\Omega_1 \times \Omega_2, F_1 \otimes F_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Dan geldt

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} Xd(\mu_1\times \mu_2) = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} Xd\mu_2)d\mu_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} Xd\mu_1)d\mu_2 .$$

A 6. De stelling van Radon-Nikodym

Definitie A 6.1. Een functie $\nu: F \to \overline{\mathbb{R}}$ heet een *verschilmaat*, als $\nu(\emptyset) = 0$ en als voor disjuncte $A_1 \in F$, $A_2 \in F, \ldots$ geldt dat

$$\nu(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \nu(A_j) ,$$

waarbij of voor iedere keuze van de A_j de som $\sum_1^\infty (\nu(A_j))^- < \infty$ of voor iedere keuze van de A_j de som $\sum_1^\infty (\nu(A_j))^+ < \infty$

Definitie A 6.2. Een maat (of een verschilmaat) ν heet *absoluut continu* m.b.t. een maat μ, notatie $\nu << \mu$ als geldt

$$(\mu(A) = 0) \Rightarrow (\nu(A) = 0) , \; A \in F;$$

als $\mu << \nu$ en $\nu << \mu$, dan heten μ en ν *equivalent*.

Stelling A 6.3 (Stelling van Radon-Nikodym). Laat μ en ν (σ-finiete) maten zijn op (Ω,F) en zij $\nu \ll \mu$. Dan bestaat er een niet-negatieve, meetbare functie $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ met de eigenschap

$$\text{(A 6.1)} \qquad \nu(A) = \int_A Z \, d\mu \qquad (\text{alle } A \in F);$$

als (A 6.1) voor een tweede functie Z' geldt, dan is $Z' = Z$ b.z.

*Gevolg A 6.4 (Stelling van Radon-Nikodym). Zij (Ω,F,μ) een (σ-finiete) maatruimte en zij ν een (σ-finiete) verschilmaat met $\nu \ll \mu$. Dan is er een meetbare functie $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ met de eigenschap

$$\text{(A 6.2)} \qquad \nu(A) = \int_A Z \, d\mu \qquad (\text{alle } A \in F);$$

als (A 6.2) geldt voor een tweede functie Z', dan is $Z' = Z$ b.z.

Opmerking A 6.5 Men noemt Z wel de Radon-Nikodym afgeleide naar μ van ν en schrijft dan $Z = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Opmerking A 6.6 Bij de definitie van voorwaardelijke verwachting (Zie definitie 7.1.1) kunnen we of stelling A 6.3 toepassen of gevolg A 6.4 op zowel X^+ als X^-.

Literatuur

[1] N.G. de Bruijn, Maattheorie en Lebesgue-integratie (collegedictaat 2.239).

[2] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer, Berlin-Heidelberg, 1965.

A 7. Differenties en Differentiaalquotiënten

Stelling A 7.1. Zij $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ en zij I een omgeving van t. Laat de functies $f : I \to \mathbb{C}$ in het punt t een eindige n-de afgeleide $f^{(n)}t$ hebben.
Dan geldt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^n f(t)}{(2h)^n} = f^{(n)}(t),$$

waarin Δ_h^k gedefinieerd wordt door $\Delta_h^1 f(t) = f(t+h) - f(t-h)$ en $\Delta_h^{k+1} f(t) = \Delta_h^1(\Delta_h^k f(t))$.

Bewijs: Voor $n = 1$ geldt: $(2h)^{-1}\Delta_h^1 f(t) = \frac{1}{2}(f(t+h) - f(t))/h +$

$$\tfrac{1}{2}(f(t-h) - f(t))/(-h) \to f'(t).$$

Als $n \geq 2$, dan bestaat $f^{(n-1)}(x)$ in een omgeving van $x = t$, terwijl $f^{(n-2)}$ in die omgeving differentieerbaar is en dus continu en (Borel-) meetbaar. Dan is ook $f^{(n-1)}(x) = \lim_{h\to 0}(f^{(n-2)}(x+h) - f^{(n-2)}(x-h)/(2h)$ meetbaar, zodat tenslotte $(f^{n-1)}(t+u) - f^{(n-1)}(t-u)/(2u)$ meetbaar is en bovendien, o.g.v. het gegeven, begrensd in een omgeving van $u = 0$.
De Taylor-reeks (met integraal-restterm; partieel integreren) levert

$$(1) \qquad f(t+\alpha h) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(\alpha h)^j}{j!} f^{(j)}(t) + \frac{(\alpha h)^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 (1-v)^{n-2} f(^{(n-1)}(t+\alpha hv)dv.$$

Voor $\Delta_h^n f(t)$ geldt (volledige inductie)

$$(2) \qquad \Delta_h^n f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t+(n-2k)h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(t-(n-2k)h)$$

Voor $f(t) = e^t$ geldt enerzijds $(2h)^{-n}\Delta_h^n e^t\{(e^h - e^{-h})/(2h)\}^n \to e^t$; anderzijds (zie (2)):

$$(2h)^{-n}\Delta_h^n e^t = (2h)^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} e^{t+(n-2k)} =$$

$$= (2h)^{-n} e^t \sum_{k=0}^{n} (-1)^n\binom{n}{k} \{\sum_{k=0}^{n} \frac{h^j}{j!}(n-2k)^j + o(h^n)\},$$

voor $h \to 0$. Dit betekent dat

(3) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^n = 2^n\, n!\ ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^j = 0 \quad (j=0,1,\dots,n-1).$$

Uit (1), (2) en (3) volgt nu (zie ook de tweede gelijkheid in (1)):

$$\frac{\Delta_h^n f(t)}{(2h)^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^{-n}}{(n-2)!} (n-2k)^{n-1} h^{-1} \int_0^1 (1-v)^{n-2} f^{(n-1)}(t+(n-2k)hv)\,dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^{-n}}{(n-2)!} (n-2k)^n \times$$

$$\times \int_0^1 (1-v)^{n-2}\, v\, \frac{f^{(n-1)}(t+(n-2k)hv) - f^{(n-1)}(t-(n-2k)hv)}{2(n-2k)hv}\,dv$$

zodat $\dfrac{\Delta_h^n f(t)}{(2h)^n} \to f^{(n)}(t)$ wegens gedomineerde convergentie, omdat (geval $n = 1$)

$$\{f^{(n-1)}(t+\alpha hv) - f^{(n-1)}(t-\alpha hv)\}/(2\alpha hv) \to f^{(n)}(t)\ .$$

Stelling A 7.2. Zij X een stochast met $\mu_k = EX^k$ eindig $(k = 1,2,\dots)$. Zij verder $(\mu_k)_0^\infty$ zó dat $\sum_0^\infty \frac{\mu_k}{k!} z^k$ een positieve convergentiestraal ρ heeft.

Dan geldt

(4) $$\varphi_X(t) = \sum_0^\infty \frac{\mu_k}{k!} (it)^k \quad (|t| < \rho)\ ,$$

d.w.z. φ_X is door de rij $(\mu_k)_0^\infty$ bepaald.

Bewijs: Omdat $E|X|^{2m} = \mu_{2m}$ en $E|X|^{2m-1} \le (\mu_{2m})^{\frac{2m-1}{m}} \le \max(1,\mu_{2m})$, is ook $\sum_0^\infty E|X|^k \frac{z^k}{k!}$ convergent voor $|z| < \rho$. Nu geldt o.g.v. de stelling van Fubini

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\, dF_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\ \mu_k\ .$$