TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

STOCHASTISCHE PROCESSEN I

Syllabus naar het college van

Prof. Dr. J. Wessels

samengesteld door

Drs. K.M. van Hee

Voorjaarssemester 1976

Bibl/ Wsk

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Stochastische Processen I

Syllabus naar het kollege van Prof. dr. J. Wessels
samengesteld door drs. K.M. van Hee.

Dictaatnr. 2.253 Prijs *f* 4,50

Inhoudsbeschrijving

STOCHASTISCHE PROCESSEN I

Voorjaarssemester 1976

JdG, 21 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Stochastische Processen I

Syllabus naar het kollege van
Prof.dr. J. Wessels,
samengesteld door drs. K.M. van Hee

Voorjaarssemester 1976

§ 1. Inleiding.

Algemene omschrijving.

Er wordt een systeem beschouwd dat zich op verschillende tijdstippen in verschillende toestanden kan bevinden en waarvan de voortgang door een kansmechanisme wordt bepaald.

De verzameling S van mogelijke toestanden wordt de toestandsruimte genoemd.

T is de verzameling tijdstippen waarop het systeem beschouwd wordt. Voor elke $t \in T$ is $\underline{x}(t)$ een stochastische grootheid die waarden in S aanneemt en die de toestand van het systeem op tijdstip t voorstelt.

De collectie stochastische grootheden $\{\underline{x}(t) \mid t \in T\}$ heet een stochastisch proces. Het stochastisch proces beschrijft het gedrag van het systeem in de tijd.

Opmerkingen.

1. De stochastische grootheden $\underline{x}(t)$ moeten op hetzelfde kansveld gedefinieerd zijn.
2. De collectie punten $\{(t,x(t)) \mid t \in T\}$ heet een pad van het stochastisch proces. ($x(t)$ is een realisering van $\underline{x}(t)$.)

Klassificatie.

Naar de structuur van de verzamelingen S en T onderscheidt men de stochastische processen.

Indien de verzameling T eindig of aftelbaar is spreken we van discrete tijd. Meestal kiest men dan $T = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Indien T een continuum is spreekt men van een stochastisch proces met continue tijd. Evenzo onderscheidt men discrete en continue toestandsruimte.

Voorbeelden.

1.1. Continue tijd en continue toestandsruimte.

Van een proefpersoon wordt een cardiogram gemaakt. De uitslag van dit experiment is een continue kromme. De toestand van de wijzer van de cardiograaf op tijdstip t is een stochastische grootheid. De waargenomen kromme is een pad van het proces.

1.2. *Continue tijd en discrete toestandsruimte.*
In een spinnerij vinden op door het toeval bepaalde ogenblikken draadbreuken plaats. Het aantal draadbreuken in [0,t) is een stochastische grootheid in $\underline{x}(t)$.

1.3. Discrete tijd en continue toestandsruimte.
Ieder uur wordt door een dijkwacht de waterhoogte bij een sluis gemeten. De waterstand hangt, behalve van de positie van de maan, van de wind af. De waterstand bij de n-de meting, $\underline{x}(n)$, is een stochastische grootheid.

1.4. Discrete tijd en discrete toestandsruimte.
Op de t-de dag van het jaar is $\underline{x}(t)$ de voorraad van een artikel uit een magazijn van reserve onderdelen.

Literatuur.

[1] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I, John Wiley and Sons, New York (1957).

[2] Kemeny, J.G., Snell, J.L., Knapp, A.W., Denumerable Markov Chains, D. Van Nostrand Company, Inc. (1966).

[3] Karlin, S., A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York and London (1969).

[4] Ross, S., Applied Probability Models with Optimization Applications, San Francisco: Holden Day, 1970.

§ 2. Markov-ketens met discrete tijdsparameter.

Alvorens een formele definitie van Markov-ketens te geven wordt eerst een verbale omschrijving gegeven en vervolgens een voorbeeld.
Een Markov-keten is een stochastisch proces met discrete tijdsparameter en discrete toestandsruimte, met de eigenschap dat de voorwaardelijke kansverdeling van de toestandsvariabele op tijdstip n, $\underline{x}(n)$, gegeven de waarden van de toestandsvariabelen op tijdstippen 0 t/m $n-1$, alleen afhangt van $\underline{x}(n-1)$. Dit betekent dat het proces geheugenloos is: gegeven het verleden t/m tijdstip $n-1$ hangt het verdere verloop alleen van $\underline{x}(n-1)$ af. Dit noemt men de Markov-eigenschap.

Voorbeeld 2.1. Stochastische wandeling (Engels: random walk, Duits: Irrfahrt).
Beschouw een rij stochastische grootheden $\{\underline{z}_n \mid n = 1,2,3,\dots\}$ die onderling onafhankelijk zijn met alle dezelfde discrete kansverdeling en beschouw de stochastische grootheid $\underline{x}_0$ die onafhankelijk is van $\{\underline{z}_n \mid n = 1,2,3,\dots\}$ en die ook een discrete kansverdeling heeft. Hieruit wordt een nieuwe rij gevormd:

$$\underline{x}_n = \underline{x}_0 + \sum_{k=1}^{n} \underline{z}_k , \qquad n = 1,2,3,\dots .$$

Er geldt nu:

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} + \underline{z}_n .$$

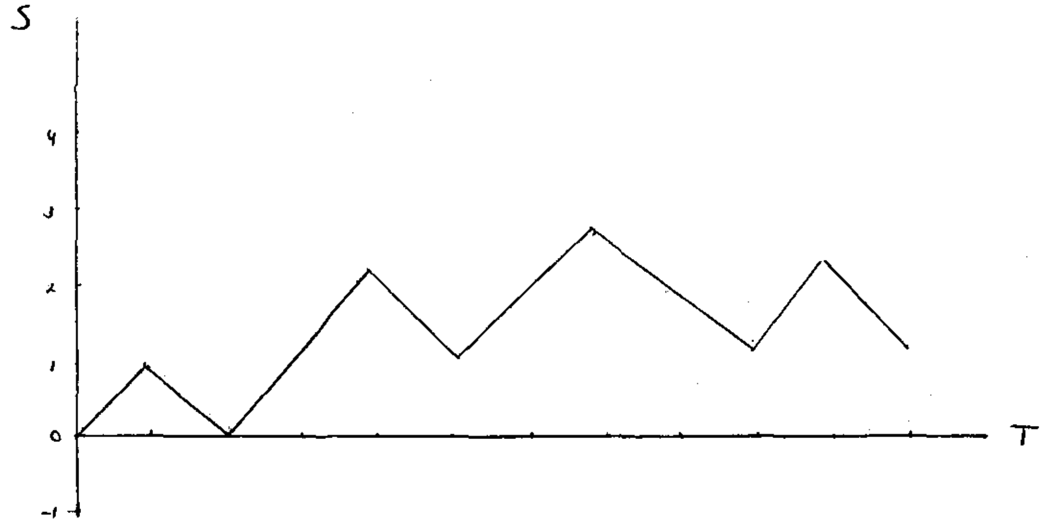
Het stochastisch proces $\{\underline{x}_n \mid n = 0,1,2,\dots\}$ heet een stochastische wandeling.
Als voorbeeld wordt de kansverdeling voor $\underline{z}_n$ als volgt gekozen:

$$\mathbb{P}(\underline{z}_n = 1) = 1 - P\{\underline{z}_n = -1\} = p$$

en voor $\underline{x}_0$:

$$\mathbb{P}(\underline{x}_0 = 0) = 1.$$

De toestandsruimte is de verzameling der gehele getallen ($\mathbb{Z}$).
Een pad van dit proces kan de volgende vorm hebben:



Met behulp van de elementaire kansrekening is het eenvoudig om de kans op alle paden waarvan de eerste n punten gegeven zijn te berekenen (laat $a_1 = \pm 1$; $a_k = a_{k-1} \pm 1$):

$$\mathbb{P}(\underline{x}_1 = a_1 , \underline{x}_2 = a_2 , \underline{x}_3 = a_3 , \dots , \underline{x}_n = a_n) =$$

$$= \mathbb{P}(\underline{x}_n = a_n \mid \underline{x}_1 = a_1 , \dots , \underline{x}_{n-1} = a_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(\underline{x}_1 = a_1 , \underline{x}_2 = a_2 , \dots , \underline{x}_{n-1} = a_{n-1}) .$$

Eenvoudig is in te zien dat

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = a_n \mid \underline{x}_1 = a_1 , \dots , \underline{x}_{n-1} = a_{n-1}) = \mathbb{P}(\underline{z}_n = a_n - a_{n-1}) .$$

Aangezien deze voorwaardelijke kans niet van a_2 t/m a_{n-2} afhangt is hier sprake van de Markov eigenschap.
Hieruit volgt:

$$\mathbb{P}(\underline{x}_1 = a_1 , \dots , \underline{x}_n = a_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\underline{z}_k = b_k) = p^{\frac{n + \Sigma b_k}{2}} (1 - p)^{\frac{n - \Sigma b_k}{2}}$$

waarbij

$$b_1 := a_1 , \quad b_n := a_n - a_{n-1} \quad \text{als } n \geq 2 .$$

De kans dat op tijdstip n toestand x bereikt wordt (waarbij verondersteld wordt dat n en x beide even of oneven zijn) is te berekenen door alle paden die op tijdstip n in x zijn te tellen:

$$(1.1) \qquad \mathbb{P}(\underline{x}_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1 - p)^{\frac{n-x}{2}} .$$

Een interessant probleem is de berekening van de kans dat het proces ooit weer in toestand 0 terechtkomt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\underline{x}_n = 0\}\right) .$$

Om dit te berekenen wordt er gedefinieerd

$$u_0 := 1$$

$$u_n := \mathbb{P}(\underline{x}_n = 0) \quad \text{voor } n \geq 1$$

en

$$f_0 := 0$$

$$f_n := \mathbb{P}(\underline{x}_n = 0,\ \underline{x}_k \neq 0 \text{ voor } 0 < k < n) , \qquad n \geq 1 .$$

Daar

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\underline{x}_n = 0\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

is het voldoende om f_n te berekenen.
De waarden u_n zijn met (1.1) eenvoudig te berekenen. Men kan gebruik maken van de volgende betrekking:

$$(1.2) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot u_{n-k} \qquad (n \geq 1)$$

hetgeen op de volgende wijze is in te zien:

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\underline{x}_n = 0,\ \underline{x}_k = 0,\ \underline{x}_\ell \neq 0 \text{ voor } 0 < \ell < k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\underline{x}_n = 0 \mid \underline{x}_k = 0,\ \underline{x}_\ell \neq 0 \text{ voor } 0 < \ell < k) \cdot f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} \cdot f_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} \cdot f_k ,$$

daar door uitschrijven te verifiëren is dat

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = 0 \mid \underline{x}_k = 0,\ \underline{x}_\ell \neq 0 \text{ voor } 0 < \ell < k) =$$

$$= \mathbb{P}(\underline{x}_n = 0 \mid \underline{x}_k = 0) = \mathbb{P}(\underline{x}_{n-k} = 0) .$$

In een opgave wordt $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ op directe wijze berekend door de paden van het proces te tellen. Hier wordt $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ berekend met behulp van een genererende functie, ook wel z-transformatie genaamd, voor $|s| < 1$:

$$F(s) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n , \qquad U(s) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n .$$

Met (1.2) is in te zien dat

$$U(s) = 1 + F(s)U(s)$$

zodat

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)} . \tag{1.3}$$

Verderop wordt deze methode voor Markov-ketens uitvoerig beschreven. Hier zal volstaan worden met de mededeling dat ook voor $s = 1$ de vergelijking (1.3) juist is, zowel voor $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ convergent als divergent ($= \infty$). Dus, voor $s = 1$ en voor $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ convergent:

$$U(1) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} f_n} .$$

Voor n is oneven is $u_n = 0$, zodat met behulp van (1.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k .$$

Om te onderzoeken of $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ convergent is maken we gebruik van de formule van Stirling:

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} \{p(1-p)\}^k \overset{(as)}{=} \frac{(2k)^{2k}}{(k)^{2k}} (\pi k)^{-\frac{1}{2}} \{p(1-p)\}^k =$$

$$= (\pi k)^{-\frac{1}{2}} \{4p(1-p)\}^k .$$

Dus $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is convergent als $p \neq \frac{1}{2}$. Dus:

Met behulp van de identiteit

$$\binom{2k}{k} = (-4)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$$

volgt er

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \{-4p(1-p)\}^k = \{1 - 4p(1-p)\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|1-2p|} .$$

Dus $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1 - |1-2p|$ voor $p \in [0,1]$.

Nu wordt er een constructieve definitie van een Markov-keten besproken. In het vervolg wordt de toestandsruimte S geïdentificeerd met de natuurlijke getallen of een deelverzameling hiervan, nl. $S = \mathbb{N}$ of $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Definitie 2.1.

Een afbeelding P van $S \times S$ naar het eenheidsinterval $[0,1]$ heet een Markov-matrix met elementen p_{ij}, i en $j \in S$, waarbij p_{ij} het beeld van (i,j) onder P is, indien

a) $\forall_{(i,j)\in S\times S}\; p_{ij} \geq 0$;

b) $\forall_{i\in S} \sum_{j\in S} p_{ij} = 1$.

Definitie 2.2.

Beschouw een kansveld $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ met daarop een rij stochastische grootheden $\{\underline{x}_n \mid n = 0,1,2,3,\ldots\}$ die waarden aannemen in S. Indien voor $n = 0,1,2,\ldots$ de kansverdeling van $(\underline{x}_0,\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ bepaald wordt door de Markov-matrix P en de rij $\{p_k \mid k \in S\}$, met $\forall_{k\in S}\; p_k \geq 0$ en $\sum_{k\in S} p_k = 1$, op de volgende wijze

a) $\mathbb{P}(\underline{x}_0 = k) = p_k$, $k \in S$;

b) $\mathbb{P}(\underline{x}_0 = k_0 , \underline{x}_1 = k_1 , \underline{x}_2 = k_2 , \ldots , \underline{x}_n = k_n) = p_{k_0} \prod_{i=0}^{n-1} p_{k_i,k_{i+1}}$,

noemt men het stochastisch proces $\{\underline{x}_n \mid n = 0,1,2,\ldots\}$ een Markov-keten.

Opmerkingen.

1. In de literatuur noemt men een Markov-matrix ook wel een stochastische matrix.

2. De rij kansen p_k, gedefinieerd door $p_k = \mathbb{P}(\underline{x}_0 = k)$ heet de beginverdeling en wordt als rijvector genoteerd: p.

3. Indien S eindig is en n elementen heeft, is P een $n \times n$ matrix in de gebruikelijke zin.

4. Bij een Markov-matrix P behoort voor iedere beginverdeling p een Markov-keten, d.w.z. de simultane kansverdeling van $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ is bepaald door P en p voor alle $n \in \mathbb{N}$.
In een aantal stellingen in dit kollege wordt alleen de Markov-matrix P aangegeven en wordt niet over de beginverdeling gesproken. Zulke stellingen zijn geldig voor de verzameling Markov-ketens met Markov-matrix P.

Stelling 2.1.
Een markov-keten $\{\underline{x}_n;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ met overgangsmatrix P en beginverdeling p heeft de volgende eigenschap:
Voor iedere eindige rij natuurlijke getallen $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t_{m+1} < \ldots < t_n$ geldt, indien $\mathbb{P}(\underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_m} = i_m) > 0$:

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{t_{m+1}} = i_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n \mid \underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_m} = i_m) =$$

$$= \mathbb{P}(\underline{x}_{t_{m+1}} = i_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n \mid \underline{x}_{t_m} = i_m) =$$

$$= \mathbb{P}(\underline{x}_{s_1} = i_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{s_{n-m}} = i_n \mid \underline{x}_0 = i_m)$$

waarbij $s_k = t_{k+m} - t_m$ voor $k = 1,\ldots,n-m$, mits $\mathbb{P}(\underline{x}_0 = i_m) > 0$.

Bewijs.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} p_{a_0} \prod_{k=1}^{t_n} p_{a_{k-1},a_k},$$

waarbij de sommatie genomen moet worden over alle rijtjes $(a_0, a_1, \ldots, a_{t_n})$ met $a_{t_k} = i_k$ voor $k = 1,\ldots,n$ en $a_k \in S$.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{t_{m+1}} = i_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n \mid \underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_m} = i_m) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n)}{\mathbb{P}(\underline{x}_{t_1} = i_1, \ldots, \underline{x}_{t_m} = i_m)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_{m+1},\ldots,i_n} \{ \prod_{k=t_m+1}^{t_n} p_{a_{k-1},a_k} \sum_{i_1,\ldots,i_m} p_{a_0} \prod_{k=1}^{t_n} p_{a_{k-1},a_k} \}}{\sum_{i_1,\ldots,i_m} p_{a_0} \prod_{k=1}^{t_m} p_{a_{k-1},a_k}} =$$

$$= \sum_{i_{m+1},\ldots,i_n} \prod_{k=t_m+1}^{t_n} p_{a_{k-1},a_k} =$$

$$= \mathbb{P}(\underline{x}_{t_{m+1}} = i_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{t_n} = i_n \mid \underline{x}_{t_m} = i_m)$$

waarbij de sommatie $\sum_{i_{m+1},\ldots,i_n}$ over alle rijtjes $(a_{t_m+1},\ldots,a_{t_n})$ met $a_{t_k} = i_k$ voor $k = m+1,\ldots,n$ genomen dient te worden. Hiermee is het eerste gelijkteken aangetoond. Daar ook geldt

$$\prod_{k=t_m+1}^{t_n} p_{a_{k-1},a_k} = \mathbb{P}(\underline{x}_1 = a_{t_m+1}, \underline{x}_2 = a_{t_m+2}, \ldots, \underline{x}_{s_{n-m}} = a_{t_n} \mid \underline{x}_0 = a_{t_m})$$

is ook de laatste gelijkheid aangetoond. □

<u>Gevolg</u>.

Stelling 2.1 zegt dat gebeurtenissen in de "toekomst", uitgedrukt in $\underline{x}_{t_{m+1}},\ldots,\underline{x}_{t_n}$, gegeven het "heden", nl. $\underline{x}_{t_m}$, (stochastisch) onafhankelijk zijn van gebeurtenissen in het "verleden", uitgedrukt in $\underline{x}_{t_1},\ldots,\underline{x}_{t_{m-1}}$.

Voor Markov-matrices wordt een matrixprodukt ingevoerd. Voor het geval S eindig is, sluit deze definitie aan bij het gebruikelijke matrixprodukt.

Definitie 2.3.

a) Voor Markov-matrices P en Q behorend bij een toestandsruimte S wordt het produkt R = PQ gedefinieerd door:

$$r_{ij} = \sum_{k\in S} p_{ik}\, q_{kj} \,.$$

b) $P^0 = I$ met I de eenheidsmatrix ($I_{k,j} = 1$ als $k = j$, 0 anders).
$P^n = PP^{n-1}$ voor $n = 1,2,3,\dots$. De elementen worden als $p_{ij}^{(n)}$ aangeduid.

Daar $\sum_{k\in S} p_{ik}\, q_{kj} \le \sum_{k\in S} p_{ik} = 1$, is het matrixprodukt altijd gedefinieerd.

Stelling 2.2.

a) Als P en Q Markov-matrices zijn behorend bij S, dan is R = PQ ook een Markov-matrix voor de toestandsruimte S.

b) Het produkt is associatief: (PQ)R = P(QR).

c) $PP^{n-1} = P^{n-1}P$.

Bewijs: opgave.

Stelling 2.3.

Voor een Markov-keten $\{\underline{x}_n \mid n = 0,1,2,\dots\}$ met beginverdeling p en Markov-matrix P geldt:

a) $\mathbb{P}(\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$, $i,j \in S$, mits $\mathbb{P}(\underline{x}_0 = i) > 0$.

b) Laat $p^{(k)}$ de vector met als i-de component $\mathbb{P}(\underline{x}_k = i)$ zijn. Dan:
$p^{(k)} = p^{(r)}\, P^{k-r}$ voor $k \ge r \ge 0$.

Bewijs.

a) Met inductie. Uiteraard: $p_{ij}^{(1)} = \mathbb{P}(\underline{x}_1 = j \mid \underline{x}_0 = i)$. Stel $p_{ij}^{(n-1)} = \mathbb{P}(\underline{x}_{n-1} = j \mid \underline{x}_0 = i)$.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_0 = i) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(\underline{x}_n = j\,, \underline{x}_{n-1} = k \mid \underline{x}_0 = i) =$$

$$= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_{n-1} = k\,, \underline{x}_0 = i)\, \mathbb{P}(\underline{x}_{n-1} = k \mid \underline{x}_0 = i) =$$

$$= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(\underline{x}_1 = j \mid \underline{x}_0 = k)\, \mathbb{P}(\underline{x}_{n-1} = k \mid \underline{x}_0 = i) =$$

$$= \sum_{k\in S} p_{kj}^{(1)}\, p_{ik}^{(n-1)} = p_{ij}^{(n)} .$$

b) $$\mathbb{P}(\underline{x}_k = j) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(\underline{x}_k = j \mid \underline{x}_r = i)\, \mathbb{P}(\underline{x}_r = i) =$$

$$= \sum_{i\in S} p_{ik}^{(k-r)}\, \mathbb{P}(\underline{x}_r = i) . \qquad \square$$

Voorbeeld 2.2. Het Ehrenfest diffusiemodel.

Er wordt een eenvoudig stochastisch model gegeven voor diffusie door een membraan (nl. een stochastische wandeling met reflecterende grenzen). Beschouw twee dozen met tezamen a deeltjes. Op ieder tijdstip t, t = 1,2,..., wordt een willekeurig deeltje (uit de a deeltjes) geloot en naar de andere doos gebracht. Noem de toestand, dit is het aantal deeltjes in de eerste doos, $\underline{x}_n$ na de n-de trekking.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_{n-1} = i) = \begin{cases} \frac{a-i}{a} & \text{als } j = i+1 \\ \frac{i}{a} & \text{als } j = i-1 \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

dit alles onder de voorwaarde dat $\mathbb{P}(\underline{x}_{n-1} = i) > 0$.
De Markov-matrix P heeft a + 1 rijen en kolommen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{a-2}{a} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \frac{a-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \cdots\cdots & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Volgens stelling 2.3: $p^{(n)} = p^{(n-1)} P$ (n = 1,2,3,...), ofwel $p^{(n)} = p^{(0)} P^n$ waarbij $p^{(0)}$ de beginverdeling is.

Als er een limietverdeling $p^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} p^{(n)}$ bestaat, dan geldt daarvoor:

$$p^{(\infty)} = p^{(\infty)} P .$$

Dus $p^{(\infty)}$ is rij-eigenvector van de matrix bij eigenwaarde 1. De componenten van de rij-eigenvector $p = (p_0,p_1,\ldots,p_a)$ voldoen aan

$$p_1 = ap_0$$

$$p_k = \frac{a-k+1}{a} p_{k-1} + \frac{k+1}{a} p_{k+1} , \qquad 1 < k < a$$

$$p_a = \frac{1}{a} p_{a-1} .$$

Eenvoudig is te verifiëren dat

$$p_k = \binom{a}{k} p_0 , \qquad 1 \le k \le a .$$

Daar $\sum_{k=0}^{a} p_k = 1$ geldt

$$p_k = \binom{a}{k} 2^{-a} .$$

Dus de limietverdeling is binomiaal met parameters a en $\frac{1}{2}$.
Men kan met dit model verklaren dat in de limietsituatie aan beide zijden even grote concentraties voorkomen.

$$\mathbb{P}(-\beta a \le \underline{x}_\infty - \tfrac{1}{2}a \le \beta a) \approx \mathbb{P}(-2\beta\sqrt{a} \le \underline{u} \le 2\beta\sqrt{a})$$

waarbij $\underline{u}$ de standaard normale verdeling heeft en de benadering juist is voor grote waarden van a. Voor concrete waarden van a (de orde van het getal van Avogadro) is deze laatste kans praktisch gelijk aan 1.

Er zal nu een <u>klassificatie van de toestanden</u> van een Markov-keten besproken worden.

<u>Definitie 2.4.</u>

a) Een toestand $j \in S$ heet <u>bereikbaar</u> vanuit toestand $i \in S$ indien er een $n \ge 0$ bestaat zodanig dat $p_{ij}^{(n)} > 0$. (Dit wordt genoteerd als $i \to j$.)

b) De toestanden i en $j \in S$ heten verbonden indien $i \to j$ en $j \to i$. (Dit wordt genoteerd als $i \leftrightarrow j$.)

Eenvoudig is de juistheid van de volgende stelling te bewijzen:

Stelling 2.4.

a) De relatie $\to$ is transitief en reflexief.

b) De relatie $\leftrightarrow$ is een equivalentie relatie.

Gevolg.

De toestandsruimte S is m.b.v. deze equivalentie relatie in disjuncte deelverzamelingen van onderling verbonden toestanden te splitsen.

Definitie 2.5.

a) Een Markov-keten die slechts uit één equivalentieklasse t.o.v. $\leftrightarrow$ bestaat heet irreducibel.

b) Een equivalentieklasse C t.o.v. $\leftrightarrow$ met de eigenschap dat er geen toestand j in $S|C$ bestaat zodanig dat $i \to j$ voor een $i \in C$ heet een fuik.

c) Als een fuik bestaat uit één toestand i, noemt men deze toestand absorberend.

Stelling 2.5.

Als S eindig veel toestanden heeft, dan bestaat er tenminste één fuik.

Bewijs: opgave.

Definitie 2.6.

Indien er een $n > 0$ is zodanig dat $p_{ii}^{(n)} > 0$ voor toestand $i \in S$, dan heet $d_i := \text{ggd}\{n \mid n > 0, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ de periode van i.

Voorbeelden.

1. In voorbeeld 2.2, het Ehrenfest model, bestaat de Markov-keten uit één equivalentieklasse en de periode van elke toestand is 2.

2. Ook in voorbeeld 2.1, de stochastische wandeling, bevat de Markov-keten een equivalentieklasse en ook hier is de periode van elke toestand 2.

Stelling 2.6.

Verbonden toestanden hebben dezelfde periode. (Dus: periodiciteit is een klasse-eigenschap.)

Bewijs.

Stel $i \leftrightarrow j$ en $d_i = d$. Laat $p_{ij}^{(k)} > 0$ en $p_{ji}^{(m)} > 0$. Dan geldt: $d \mid (k+m)$. Bovendien $d \mid (k+\ell+m)$ als $p_{jj}^{(\ell)} > 0$, dus dan $d \mid \ell$. Hieruit volgt $d_i \le d_j$. Analoog bewijst men $d_j \le d_i$. □

Er wordt voortaan gesproken over de periode van een klasse. Als deze 1 is spreken we van een aperiodieke klasse.

Stelling 2.7.

Indien $i \leftrightarrow j$ dan geldt voor alle m, n, waarvoor geldt $p_{ij}^{(n)} > 0$ en $p_{ij}^{(m)} > 0$, dat $m \equiv n \pmod d$ met d de periode van de klasse die i en j bevat.

Bewijs.

Daar $j \to i$ $\exists_k$ $p_{ji}^{(k)} > 0$ zodanig dat $p_{ji}^{(k)} > 0$. Dus $d \mid m+k$ en $d \mid n+k$ dus $d \mid m-n$. □

Voor $\forall_{i,j}$ met $i \leftrightarrow j$ bestaat er één geheel getal $0 \le t_{ij} < d$ zodanig dat voor iedere $n > 0$ met $p_{ij}^{(n)} > 0$ geldt $n \equiv t_{ij} \pmod d$.
Beschouw nu één klasse. Voor de toestanden uit deze klasse wordt de relatie R tussen twee toestanden ingevoerd: $i R j$ dan en alleen dan als $t_{ij} = 0$.

Stelling 2.8.

De relatie R is een equivalentierelatie.

Bewijs.

Laat de periode van de beschouwde klasse d zijn. Indien $p_{ii}^{(n)} > 0$ dan $d \mid n$ en dus $t_{ii} = 0$, zodat R reflexief is.
Laat $p_{ij}^{(n)} > 0$ en $p_{ji}^{(m)} > 0$ en $t_{ij} = 0$. Dan geldt $n \equiv t_{ij} \pmod d$ en $m \equiv t_{ji} \pmod d$, echter $t_{ij} + t_{ji} \equiv m + n \equiv 0 \pmod d$. Dus $t_{ji} = 0$, zodat R symmetrisch is. Laat nu $t_{ij} = t_{jk} = 0$ en laat $p_{ij}^{(n)} > 0$ en $p_{jk}^{(m)} > 0$. Dan $p_{ik}^{(n+m)} > 0$ dus $n + m \equiv t_{ik} \pmod d$. Daar $n + m \equiv t_{ij} + t_{jk} \equiv 0 \pmod d$ is $t_{ik} = 0$. □

Dankzij deze equivalentierelatie valt iedere klasse van verbonden toestanden uiteen in een aantal equivalentieklassen die men cyclische deelverzamelingen noemt. Tussen de toestanden uit een cyclische deelverzameling zijn alleen overgangen mogelijk waarbij het aantal stappen een veelvoud van de periode van die klasse is.

Stelling 2.9.
Er zijn in een klasse van verbonden toestanden met periode d precies d cyclische deelverzamelingen.

Bewijs: opgave.

Stelling 2.10.
Als toestand i periode d heeft dan is er een getal N zodat voor $\nu \geq N$ geldt

a) $$p_{ii}^{(\nu d)} > 0 \,,$$

en als voor j geldt $p_{ji}^{(m)} > 0$ dan ook

b) $$p_{ji}^{(m+\nu d)} > 0 \,.$$

Alvorens deze stelling te bewijzen wordt er een hulpstelling uit de getaltheorie besproken.

Hulpstelling.
Beschouw de verzameling natuurlijke getallen $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ met ggd = d.
Laat

$$W = \{ \sum_{i=1}^{k} a_i n_i \mid a_i \text{ geheel (eventueel } < 0)\} \,.$$

Dan geldt $nd \in W$ voor alle natuurlijke getallen n.

Bewijs.
Laat

$$e := \min \{ \sum_{i=1}^{k} a_i n_i \mid \sum_{i=1}^{k} a_i n_i > 0\} \,.$$

Voor elke $w \in W$ zijn er natuurlijke getallen r en q zodat

$$w = qe + r \quad \text{met } e > r \geq 0 \ .$$

Dus $r = w - qe$ en dus is r een lineaire combinatie van $n_1, n_2, \dots, n_k$. Daar e de kleinste positieve is moet $r = 0$ zijn. Dus elke w is deelbaar door e, zodat ook $e \mid n_i$, $i = 1,2,\dots,k$. Hieruit volgt $e|d$ en dus $nd \in W$. □

Nu het bewijs van stelling 2.10:

Laat

$$V := \{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\} = \{n_1, n_2, n_3, \dots\} \ .$$

Er bestaat een k zodat $d := \text{ggd}(V) = \text{ggd}\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Op grond van de hulpstelling is er een rij gehele getallen $a_1, a_2, \dots, a_k$ zodat $d = \sum_{i=1}^{k} a_i n_i$. Laat

$$a_i^+ = \max\{0, a_i\} \ , \qquad a_i^- = -\min\{0, a_i\}$$

en

$$A^+ = \sum_{i=1}^{k} a_i^+ n_i \ , \qquad A^- = \sum_{i=1}^{k} a_i^- n_i \ .$$

Dus $d = A^+ - A^-$. Laat $n = qA^- + r$ met $0 \leq r \leq A^- - 1$. Dan

$$nd = qdA^- + rd = qdA^- + r(A^+ - A^-) = (qd - r)A^- + rA^+ \ .$$

Indien $qd - r \geq 0$, dan is nd op deze wijze geschreven als een lineaire combinatie van $n_1, \dots, n_k$ met uitsluitend positieve coëfficiënten, dus geldt dan $nd \in V$. De voorwaarde die aan n opgelegd dient te worden om $qd \geq r$ te laten zijn is $n \geq \frac{A^- - 1}{d} A^-$. Hiermee is a) bewezen. Deel b) volgt rechtstreeks uit a). □

Beschouw een irreducibele Markov-keten met periode d en start-toestand i. Na ieder voldoende groot veelvoud van d tijdseenheden is het systeem met positieve kans in toestand i terug en is in elk geval in de cyclische deelverzameling welke i bevat.

Er zal nu een nieuwe karakterisering van de toestanden worden besproken, nl. naar de kans om ooit in een toestand terug te keren indien het systeem gestart wordt in die toestand.

Definitie 2.7.

Zij $\{\underline{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een Markov-keten.

$$f_{ii}^{(k)} := \mathbb{P}(\underline{x}_k = i,\ \underline{x}_\ell \neq i,\ 0 < \ell < k \mid \underline{x}_0 = i)\ , \qquad k \geq 1\ ,$$

$$f_{ii}^{(0)} := 0\ ,$$

$$f_{ii} := \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\underline{x}_n = i\} \mid \underline{x}_0 = i)\ .$$

a) Een toestand i heet een terugkeertoestand als $f_{ii} = 1$.

b) Een toestand i heet een doorgangstoestand als $f_{ii} < 1$.

(Dit noemt men ook wel recurrent, respectievelijk transiënt.)

Eenvoudig is in te zien dat $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ en dat een toestand recurrent òf transiënt is.

Stelling 2.11.

$$p_{ii}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} f_{ii}^{(k)}\ p_{ii}^{(m-k)} \qquad \text{voor } m \geq 1\ .$$

Bewijs: opgave.

Beschouw de genererende functies $F_i(s)$ en $P_i(s)$ voor de rijen $\{f_{ii}^{(k)}\}$ en $\{p_{ii}^{(k)}\}$, respectievelijk:

$$F_i(s) := \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\ s^k\ , \qquad |s| < 1$$

$$P_i(s) := \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}\ s^k\ , \qquad |s| < 1\ .$$

Stelling 2.12.

Voor $|s| < 1$ geldt $P_i(s) = \dfrac{1}{1 - F_i(s)}$.

Bewijs: als bij het voorbeeld van de stochastische wandeling.

Om het gedrag van de functies $F_i(s)$ en $P_i(s)$ te bestuderen wordt een versie van de stelling van Abel, bekend uit de analyse, hier opnieuw bewezen.

Stelling 2.13.

Indien $a_k \geq 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, en $A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, dan geldt $\lim_{s \uparrow 1} A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, zowel als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergent is als wanneer deze reeks divergeert.

Bewijs.

1. Indien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$.

$$A(s) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{voor } s \in [0,1] .$$

Dus $A(s)$ is uniform convergent op $[0,1]$ en daarom is $A(s)$ continu, zodat

$$\lim_{s \uparrow 1} A(s) = A(1) .$$

2. Indien de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergeert, is er voor iedere M een N zodat $\sum_{k=0}^{N} a_k > M$, dus

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k \geq \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right) s^N \geq M$$

als s dicht genoeg bij 1 ligt. Dus

$$\lim_{s \uparrow 1} A(s) = \infty . \qquad \square$$

Stelling 2.14.

De toestand i is een doorgangstoestand dan en slechts dan als $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Bewijs.

$$\lim_{s\uparrow 1} F_i(s) = F_i(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}^{(k)} = f_{ii} ,$$

evenzo

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = P_i(1) .$$

Met behulp van de stelling van Abel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} ,$$

waaruit de bewering volgt. □

Gevolg.

Het verwachte aantal bezoeken in een doorgangstoestand is eindig en in een terugkeertoestand is ∞ als de keten in die toestand begint.

Stelling 2.15.

De toestanden van een klasse van verbonden toestanden zijn òf alle doorgangstoestand òf allemaal terugkeertoestanden.

Bewijs.

Laat $i \leftrightarrow j$ en i een terugkeertoestand. Dan $\exists_{n,m}$ zodat $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{ji}^{(m)} > 0$.

$$p_{jj}^{(k)} \geq p_{ji}^{(m)} \, p_{ii}^{(k-m-n)} \, p_{ij}^{(n)} \qquad \text{voor } k > m+n .$$

Dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq p_{ji}^{(m)} \, p_{ij}^{(n)} \sum_{k=m+n}^{\infty} p_{ii}^{(k-m-n)} = \infty .$$

Dus j is een terugkeertoestand. □

Analoog aan definitie 2.6:

Definitie 2.8.

$$f_{ij}^{(k)} := \mathbb{P}(\underline{x}_k = j,\ \underline{x}_\ell \neq j,\ 0 < \ell < k \mid \underline{x}_0 = i)\ , \qquad k \geq 1\ ,$$

$$f_{ij}^{(0)} := 0\ ,$$

$$f_{ij} := \mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{\underline{x}_k = j\} \mid \underline{x}_0 = i)\ .$$

Stelling 2.16.

a) Indien j een doorgangstoestand is geldt $\forall_{i \in S}: \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$.

b) Als $i \leftrightarrow j$ en de klasse die i en j bevat is een terugkeerklasse, dan is $f_{ij} = 1$.

Bewijs: opgave.

Stelling 2.17.

In een irreducibele Markov-keten met een eindige toestandsruimte zijn alle toestanden terugkeertoestanden.

Bewijs.

Veronderstel dat alle toestanden doorgangstoestanden zijn, dan

$$\forall_{j \in S}: \sum_{m=0}^{\infty} p_{ij}^{(m)} < \infty\ .$$

Laat $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Dan

$$\infty > \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} p_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \infty\ .$$

Dit is een contradictie. □

Stelling 2.18.

Iedere klasse van terugkeertoestanden is een fuik.

Bewijs: opgave.

Indien S aftelbaar veel toestanden bevat en irreducibel is, kan elke toestand een doorgangstoestand zijn; beschouw als voorbeeld de volgende stochastische wandeling van voorbeeld 2.1 met $p < \frac{1}{2}$. Voor toestand 0 geldt: $f_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n < 1$, zodat in deze keten elke toestand een doorgangstoestand is.

Stelling 2.19.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = i \text{ voor } \infty \text{ veel } n \mid \underline{x}_0 = i) = \begin{cases} 1 & \text{als } i \text{ een terugkeertoestand is,} \\ 0 & \text{als } i \text{ een doorgangstoestand is.} \end{cases}$$

Bewijs.

$$q_{ii}^{(N)} := \mathbb{P}(\underline{x}_n = i \text{ voor tenminste } N \text{ waarden } n \mid \underline{x}_0 = i) , \quad N \geq 0$$

$$q_{ii}^{(N)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} q_{ii}^{(N-1)} = q_{ii}^{(N-1)} f_{ii} = (f_{ii})^N q_{ii}^{(0)} .$$

Merk op dat $q_{ii}^{(0)} = 1$. Dus:

$$q_{ii}^{(N)} = (f_{ii})^N .$$

Daar

$\{\underline{x}_n = i \text{ voor minstens } N \text{ waarden } n\} \supset \{\underline{x}_n = i \text{ voor minstens } N+1 \text{ waarden } n\}$

geldt:

$$q_{ii}^{(N)} \to \mathbb{P}(\underline{x}_n = i \text{ voor } \infty \text{ veel } n \mid \underline{x}_0 = i)$$

zodat deze kans 0 is indien $f_{ii} < 1$ en 1 indien $f_{ii} = 1$. □

Er zal nu aandacht besteed worden aan het limietgedrag van P^n en $\mathbb{P}(\underline{x}_n = j)$ voor $n \to \infty$. Eerst een voorbeeld.

Voorbeeld.

Beschouw een Markov-keten met Markov-matrix

$$P := \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} .$$

Is er een $p^{(\infty)}$ zodat $p^{(\infty)} = p^{(\infty)} P$ en $p_i^{(\infty)} \geq 0$, $p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1$?
Er is een unieke oplossing:

$$p_1^{(\infty)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,, \quad p_2^{(\infty)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,.$$

De tweede eigenwaarde van P is: $1-\alpha-\beta$. De eigenvector hierbij is: $\lambda(1,-1)$ (indien $\alpha+\beta > 0$). Men kan P herleiden tot de vorm

$$P = Q^{-1}\Lambda Q$$

met

$$Q = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}\,.$$

Dan wordt

$$Q^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}\,.$$

Hiermee is P^m eenvoudig te bepalen:

$$P^m = Q^{-1}\Lambda^m Q$$

met

$$\Lambda^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^m \end{pmatrix}$$

dus

$$P^m = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^m}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}\,.$$

Dus

$$P^\infty := \lim_{m\to\infty} P^m = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} \\ p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} \end{pmatrix}\,.$$

P^∞ is dus weer een Markov-matrix.
Voor iedere beginverdeling $p = (p_1,p_2)$ met $p_1,p_2 \geq 0$, $p_1+p_2 = 1$, geldt:

$$\lim_{m\to\infty} pP^m = pP^\infty = p^{(\infty)}\,.$$

De convergentiesnelheid is geometrisch met reductiefactor $(1-\alpha-\beta)$.

Van nu af aan wordt een keten waarin alle klassen van terugkeertoestanden uit één absorberende toestand bestaan, een <u>transiënte keten</u> genoemd. (Dus ook een keten die alleen doorgangstoestanden bevat wordt een transiënte keten genoemd.)

Om het limietgedrag van Markov-ketens te onderzoeken kunnen we volstaan met het beschouwen van transiënte ketens en irreducibele ketens bestaande uit een terugkeerklasse. Dit wordt op de volgende wijze aannemelijk.
Beschouw een willekeurige Markov-keten met Markov-matrix P en klassen van terugkeertoestanden $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i \subset S$ voor $i = 1,2,\ldots$, en laat de doorgangstoestanden de verzameling $\tilde{E}$ vormen.
Beschouw nu een nieuwe Markov-keten met Markov-matrix Q en toestandsverzameling $\tilde{S} = \tilde{E} \cup E$, waarbij $E = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$. Laat Q de volgende gedaante hebben:

$$q_{ij} = p_{ij} \qquad \text{als } i,j \in \tilde{E}$$

$$q_{ii} = 1 \qquad \text{als } i \in E$$

$$q_{ij} = \sum_{k \in C_j} p_{ik} \qquad \text{als } i \in \tilde{E} \text{ en } j \in E\,.$$

Het gedrag van de beide ketens t.a.v. de toestanden $\tilde{E}$ is identiek totdat $\tilde{E}$ verlaten wordt, d.w.z. de overgangskansen binnen $\tilde{E}$ zijn gelijk. Elke klasse C_i, $i = 1,2,\ldots$, is op te vatten als een irreducibele keten daar het proces C_i nooit meer verlaten kan worden als het er eenmaal inzit (vgl. stelling 2.18).

<u>Transiënte ketens.</u>

Laat E de verzameling der absorberende toestanden zijn en laat $\tilde{E}$ de verzameling der doorgangstoestanden zijn. Rangschik de toestanden zó dat de Markov matrix de volgende vorm krijgt:

$$P := \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} E & \tilde{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ \tilde{E} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}$$

Stelling 2.20.
P^k heeft de gedaante

$$P^k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (\sum_{n=0}^{k-1} Q^n)R & Q^k \end{pmatrix} .$$

Bewijs: met inductie is dit direct te verifiëren.

Stelling 2.21.
Voor de matrix Q geldt:

$$\lim_{k\to\infty} Q^k = 0 .$$

Bewijs.
Volgens stelling 2.16 geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \quad \text{voor } i,j \in \tilde{E}$$

en dus moet

$$\lim_{k\to\infty} q_{ij}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} p_{ij}^{(k)} = 0 . \qquad \square$$

Stelling 2.22.
De matrix $(I - Q)$ is inverteerbaar en

$$(I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k .$$

Bewijs.

$$(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k)(I - Q) = (\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Q^k)(I - Q) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Q^k(I - Q) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (I - Q^{n+1}) = I . \qquad \square$$

Laat B de absorptiematrix zijn, gedefinieerd door

$$b_{ij} := \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\underline{x}_n = j\} \mid \underline{x}_0 = i\Big) \quad \text{met } i \in \tilde{E} \text{ en } j \in E .$$

<u>Stelling 2.23.</u>
Voor de absorptiematrix geldt:

$$B = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} Q^n\Big)R = (I-Q)^{-1} R .$$

<u>Bewijs.</u>

$$b_{ij} = f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} ,$$

$$f_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell\in\tilde{E}} q_{i\ell}^{(k-1)} r_{\ell j} .$$

Dus

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell\in\tilde{E}} q_{i\ell}^{(k-1)} r_{\ell j}$$

en hieruit volgt: $B = (I-Q)^{-1} R$. □

<u>Gevolg.</u>
De limiet van de P^n voor $n \to \infty$ bij een transiënte keten heeft de vorm

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad B = (I-Q)^{-1} R .$$

Als de beginverdeling p is, dan geldt voor de limietverdeling

$$p_i^{(\infty)} = 0 \qquad \text{als } i \in \tilde{E} ,$$

$$p_i^{(\infty)} = p_i + \sum_{j\in\tilde{E}} p_j\, b_{ji} \quad \text{als } i \in E .$$

Irreducibele recurrente ketens.

Voor het algemene geval worden de eigenschappen van P^n voor $n \to \infty$ alleen genoemd. De stellingen worden bewezen voor het geval er slechts eindig veel toestanden zijn. Op het algemenere geval wordt in de paragraaf vernieuwingstheorie teruggekomen.

Voor een aperiodieke irreducibele recurrente keten geldt:

a) De limiet $P = \lim_{n\to\infty} P^n$ bestaat en

$$\forall_{j,i\in S}: \; p_{ji}^{(\infty)} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)}} .$$

(Merk op dat de noemer de verwachte terugkeertijd tot toestand i is.)

b) Of voor alle $i \in S$ geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)} < \infty$, in welk geval men de keten positief recurrent noemt,

of voor alle $i \in S$ geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)} = \infty$, zodat $\forall_{i,j}: p_{ij}^{(\infty)} = 0$, in welk geval men de keten nulrecurrent noemt. (De symmetrische stochastische wandeling is hier een voorbeeld van.)

c) In een positief recurrente keten geldt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = p_i^{(\infty)}$$

met

$$p_j^{(\infty)} = \sum_{i\in S} p_i^{(\infty)}\, p_{ij} \quad \text{en} \quad \sum_{j\in S} p_j^{(\infty)} = 1 .$$

Opmerking. In een doorgangstoestand komt de keten slechts eindig vaak voor; in een nulrecurrente toestand ∞ vaak alleen het duurt "heel lang".

Van nu af aan bevat S slechts eindig veel toestanden, nl. n.

Stelling 2.24.

Een eindige Markov-keten is dan en slechts dan irreducibel en aperiodiek als er een M is zodat P^M uitsluitend positieve componenten heeft.

Bewijs: combinatie van stellingen 2.15 en 2.10.

Stelling 2.25.

Stel de matrix P van een eindige Markov-keten heeft als kleinste component $\varepsilon > 0$. Laat x een n-kolomvector zijn met grootste en kleinste componenten respectievelijk M_0 en m_0. Dan geldt voor M_1 en m_1, de grootste en kleinste componenten van Px:

$$m_0 \le m_1 \le M_1 \le M_0$$

en

$$M_1 - m_1 \le (1-2\varepsilon)(M_0 - m_0) \ .$$

Bewijs.

$$M_1 \le \varepsilon m_0 + (1-\varepsilon)M_0 = M_0 - \varepsilon(M_0 - m_0) \ ;$$

toegepast op $-x$ levert deze redenering:

$$-m_1 \le -m_0 - \varepsilon(-m_0 + M_0) \ .$$

Door optelling van deze ongelijkheden wordt het bewijs verkregen. □

Stelling 2.26.

Voor een eindige irreducibele aperiodieke Markov-keten geldt:

1) Er is een matrix P^∞ met $\lim_{r\to\infty} P^r = P^\infty$.

2) P^∞ heeft identieke rijen die elk een kansverdeling op $\{1,\ldots,n\}$ vormen.

3) P^∞ heeft uitsluitend positieve componenten.

4) Er zijn constanten b en ρ met $0 \le \rho < 1$, zodat voor elke i, j, r:

$$|p_{ij}^{(r)} - p_{ij}^{(\infty)}| \le b\rho^r \ .$$

5) $\lim_{r\to\infty} p^{(r)}$ bestaat, hangt niet af van $p^{(0)}$ en is gelijk aan een rij uit P^∞.

6) Precies één kansverdeling op $\{1,\ldots,n\}$ is rijeigenvector van P bij de eigenwaarde 1.

Bewijs.
De j-de kolom van P^r is gelijk aan $P^r e_j$, met e_j de j-de kolom-eenheidsvector. Noem de grootste en kleinste componentwaarden M_r en m_r; $d_r := M_r - m_r$. Uit stelling 2.25 volgt dat de limieten van M_r, m_r en d_r bestaan voor r (begrensdheid, monotonie). De d_r naderen naar 0 als P maar een positief kleinste component heeft. Stel P bevat een 0. Dan is er een N zodanig dat P^N geen nullen meer bevat (stelling 2.24). Dus de deelrij d_{rN} nadert naar 0. Daar de rij d_n monotoon niet-stijgend is geldt dus dat d_n naar 0 nadert. Dus iedere kolom van P^r heeft een limiet bestaande uit een constante vector. De overige beweringen zijn eenvoudig na te gaan. □

Opmerking. Punt 3) van stelling 2.26 zegt dus dat eindige irreducibele aperiodieke Markov-ketens positief recurrent zijn.

Stelling 2.27.
Voor een eindige irreducibele aperiodieke Markov-keten met limietverdeling $p^{(\infty)}$ geldt dat de verwachte terugkeertijd tot toestand k gelijk is aan $\frac{1}{p_k^{(\infty)}}$.

Bewijs.
μ_{ij} := de verwachte tijd die verloopt voor toestand j bereikt wordt bij start in toestand i (eventueel ∞).
In ons geval zijn alle μ_{ij} eindig, nl.: maak toestand j absorberend (vervang j-de rij van P door δ_{ij}), dit heeft geen invloed op μ_{ij}. Alle toestanden ≠ j zijn nu doorgangstoestanden (ga na!), zodat het verwachte aantal bezoeken aan andere toestanden, voordat j bereikt wordt, eindig is (gevolg van stelling 2.14).

$$\mu_{ij} = \sum_{\ell \neq j} p_{i\ell}(\mu_{\ell j} + 1) + p_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \sum_{\ell \neq j} p_{i\ell}\, \mu_{\ell j} + 1$$

$$\mu_{ij} = \sum_{\ell} p_{i\ell}\, \mu_{\ell j} - p_{ij}\, \mu_{jj} + 1 ,$$

Dus

$$M = P(M - M_d) + E ,$$

hierin is

$$M := (\mu_{ij})_{i,j=1}^{n} \; ; \quad M_d := (\delta_{ij}\, \mu_{ij})_{i,j=1}^{n} \; ; \quad E := (1)_{i,j=1}^{n} \; .$$

Dan

$$p^{(\infty)} M = p^{(\infty)} P(M - M_d) + p^{(\infty)} E \; ,$$

$$p^{(\infty)} M = p^{(\infty)}(M - M_d) + p^{(\infty)} E \; ,$$

$$p^{(\infty)} M_d = p^{(\infty)} E \; ,$$

dus

$$p_k^{(\infty)} \mu_{kk} = 1 \; . \qquad \square$$

Nu zullen we de resultaten voor eindige irreducibele aperiodieke Markov-ketens trachten te generaliseren tot periodieke irreducibele Markov-ketens. Merk op dat in het periodieke geval $\lim\limits_{m\to\infty} P^m$ niet bestaat, nl. als de periode d is, is elke $p_{ij}^{(m)}$ bij toenemende m steeds $d-1$ keer nul en 1 keer > 0 (stelling 2.10), terwijl $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = 1$.

De bewijzen zijn niet zo elegant als mogelijk is, doch worden zo gegeven om de opbouw duidelijk te maken.

Stelling 2.28.

Voor een eindige irreducibele Markov-keten geldt:

1) Er is een matrix P^∞ met $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum\limits_{k=0}^{m} P^k = P^\infty$.

2) P^∞ heeft identieke rijen die elk een kansverdeling op $\{1,2,\ldots,n\}$ vormen.

3) P^∞ heeft uitsluitend positieve componenten.

4) $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum\limits_{k=0}^{m} p^{(k)}$ bestaat, is onafhankelijk van $p^{(0)}$ en gelijk aan een rij uit P^∞.

5) Precies één kansverdeling op $\{1,2,\ldots,n\}$ is rijeigenvector van P bij de eigenwaarde 1.

Bewijs.

De relatie R uit stelling 2.8 is een equivalentierelatie. Hernummer de toestanden zó dat de elementen uit één equivalentieklasse bij elkaar staan.

In d perioden wordt elke klasse precies één keer bezocht en wel in een vaste volgorde. Hernummer zō dat opeenvolgende klassen ook opeenvolgend staan. Nu geldt:

$$P^d = \begin{pmatrix} \boxed{A_d} & & & & \bigcirc \\ & \boxed{} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{} & \\ \bigcirc & & & & \boxed{A_1} \end{pmatrix}$$

waarin $A_1,\dots,A_d$ overgangsmatrices zijn van een eindige irreducibele aperiodieke Markov-keten (stelling 2.10 en 2.24).

$$P^{md} = \begin{pmatrix} \boxed{A_d^m} & & & & \bigcirc \\ & \boxed{} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{} & \\ \bigcirc & & & & \boxed{A_1^m} \end{pmatrix}$$

Dus

$$\lim_{m\to\infty} P^{md} = \begin{pmatrix} \boxed{A_d^\infty} & & & & \bigcirc \\ & \boxed{} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{} & \\ \bigcirc & & & & \boxed{A_1^\infty} \end{pmatrix} =: P^*$$

volgens stelling 2.26, terwijl elke A_k^∞ uitsluitend identieke rijen bezit met alleen positieve componenten.

$$\lim_{m\to\infty} P^{md+k} = P^k \lim_{m\to\infty} P^{md} = P^k P^* .$$

De rij $\{P^m\}_{m=0}^\infty$ kan dus gesplitst worden in d convergente deelrijen en is Césaro-convergent naar het gemiddelde van de d limieten:

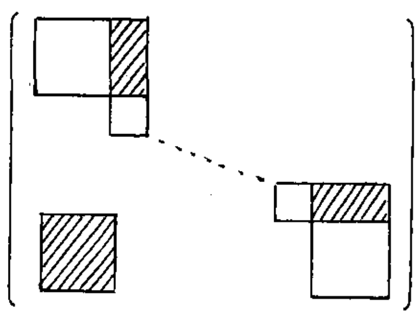
$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} P^k = \frac{1}{d} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell \, P^* =: P^\infty \; .$$

P^∞ wordt uit P^* verkregen door in elke kolom de nulcomponenten te vervangen door componenten van dezelfde waarde als de reeds aanwezige niet-nulcomponenten, nl.:

$\ell = 0$ levert P^*

$\ell = 1$ levert $P^\infty P^*$,

met

$P =$  ,

alleen componenten $\neq 0$ in de gearceerde blokken. Dus $P\,P^*$ levert een bijdrage met juist in de gearceerde blokken de benodigde niet-nultermen.

Enzovoort; $\sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell \, P^*$ levert voor alle matrixcomponenten precies één bijdrage $\neq 0$. □

§ 3. Markov ketens met kostenstructuur

Veelal zijn we niet alleen geïnteresseerd in het kansgedrag van een systeem, maar ook in een of andere grootheid die door het verloop van het proces bepaald wordt, zoals kosten of opbrengsten.
In het vervolg spreken we alleen over kosten. Als de kosten negatief zijn interpreteren we ze als opbrengst. We beperken ons tot eindige toestandsruimte.

1. Aan ieder bezoek aan een doorgangstoestand i verbinden we de kosten r(i). Aan een terugkeertoestand i verbinden we de kosten r(i) = 0 omdat we geïnteresseerd zijn in de totale verwachte kosten over een oneindige horizon en het aantal bezoeken aan een terugkeertoestand oneindig is waardoor de totale verwachte kosten oneindig groot worden als $r(i) > 0$. De kolomvector met componenten r(i) noteren we als r, $i \in E_1$. Laat E_0 de verzameling der terugkeertoestanden zijn en E_1 de verzameling der doorgangstoestanden. (De toestandsruimte is $E = E_0 \cup E_1$.)
De overgangsmatrix is P. We definiëren

$$q_i(n) := P(\underline{x}_n = i),\ i \in E_1$$

en q(n) is de rij-vektor van kansen $q_i(n)$ met $i \in E_1$.
Verder definiëren we

$$q_{ij} := p_{ij} \text{ voor } i,j \in E_1.$$

Q is de matrix van de componenten q_{ij}, $i,j \in E_1$.
De kosten behorend bij tijdstip n noemen we u(n) en we zijn geïnteresseerd in

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\ .$$

Er geldt

$$u(n) = \sum_{k \in E_1} q_k(n) \cdot r(k) + \sum_{k \in E_0} p_k(n) \cdot 0 = q(n) \cdot r\ .$$

Nu weten we dat

$$q(n) = q(n-1)Q = q(0) \cdot Q^n$$

zodat

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} q(0).Q^n r .$$

Daar E_1 de verzameling der doorgangstoestanden is, weten we dat voor alle $i,j \in E_1$ geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} < \infty .$$

Dus $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$ bestaat en dus bestaat u.

Noem: $S_N := \sum_{n=0}^{N} Q^n r$.

Dan geldt $S_N = QS_{N-1} + r$, zodat

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N = QS + r .$$

Hieruit volgt

$$S = (I - Q)^{-1} r .$$

(Merk op dat $(I - Q)^{-1}$ bestaat omdat $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$ bestaat en eindig is.) Hiermee hebben we gevonden dat

$$u = q(0).(I - Q)^{-1} r .$$

Dit resultaat is ook op andere wijze in te zien.
Laat v_i de verwachte kosten bij start in toestand $i \in E_1$ zijn. D.w.z.

$$v_i = \mathcal{E}[\sum_{n=0}^{\infty} r(\underline{x}_n) \mid \underline{x}_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}[r(\underline{x}_n) \mid \underline{x}_0 = i] =$$

$$= r(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in E} r(k).P(\underline{x}_n = k \mid \underline{x}_0 = i)$$

daar $r(k) = 0$ voor $k \in E_0$:

$$= r(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in E_1} r(k).p_{ik}^{(n)}$$

$$= r(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in E_1} r(k) \sum_{j \in E_1} p_{ij}.p_{jk}^{(n-1)}$$

$$= r(i) + \sum_{j \in E_1} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in E_1} r(k).p_{jk}^{(n-1)} =$$

$$= r(i) + \sum_{j \in E_1} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}[r(\underline{x}_{n-1}) \mid \underline{x}_0 = j]$$

$$= r(i) + \sum_{j \in E_1} q_{ij}\, \mathcal{E}[\sum_{n=0}^{\infty} r(\underline{x}_n) \mid \underline{x}_0 = j]$$

$$= r(i) + \sum_{j \in E_1} q_{ij}.v_j \;.$$

In matrixvorm met v de kolomvector der v_i's:

$$v = r + Qv$$

zodat

$$v = (I - Q)^{-1} r \;.$$

(Merk op dat u = q(0).v.)

2. Als we ook kosten aan de terugkeertoestanden willen verbinden dan worden, zoals gezegd, de totale verwachte kosten oneindig als alle kosten negatief of alle kosten positief zijn.
Als we twee systemen met elkaar willen vergelijken dan moeten we niet de totale verwachte kosten als kriterium kiezen maar b.v. verwachte gemiddelde kosten of de verwachte verdisconteerde kosten, d.w.z. de kosten die op tijdstip n gemaakt worden, worden met een factor β^n, $0 < \beta < 1$, vermenigvuldigd om de kosten op de constante waarde te herleiden.
Laat v_i de verwachte verdisconteerde kosten bij start in toestand i zijn dan geldt, analoog aan hetgeen we hiervoor afgeleid hebben:

$$v_i = r(i) + \sum_{j \in E} \beta p_{ij}.v_j$$

en in matrixvorm

$$v = r + \beta P v$$

zodat

$$v = r + \beta P r + \beta^2 P^2 r + \beta^3 P^3 r + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n r$$

of

$$(I - \beta P) v = r \ .$$

Zonder bewijs vermelden we dat $(I - \beta P)$ regulier is voor $0 < \beta < 1$. Dus

$$v = (I - \beta P)^{-1} r \ .$$

3. Tot nu toe hebben we steeds verondersteld dat de kosten op tijdstip n alleen van de toestand op dit tijdstip afhangen. Het is echter in veel praktische situaties zo dat de kosten afhankelijk zijn van de overgang van toestand i naar toestand j.
We zullen zien dat dit op eenvoudige wijze te herleiden is tot hetgeen we hierboven besproken hebben.
Laat a_{ij} de kosten zijn van de overgang van i naar j. Er geldt dan:

$$v_i = \sum_{j \in E} a_{ij} \cdot p_{ij} + \sum_{j \in E_1} q_{ij} \cdot v_j \ .$$

Hierbij zijn $r(i) := \sum_{j \in E} a_{ij} \cdot p_{ij}$ de verwachte kosten bij een toestandsovergang vanuit toestand i. Dit is voor iedere i te berekenen en we kunnen v_i zo weer herleiden tot

$$v_i = r(i) + \sum_{j \in E_1} q_{ij} \cdot v_j \ .$$

Ook het verdisconteerde kosten geval:

$$v_i = \sum_{j \in E} a_{ij} \cdot p_{ij} + \beta \sum_{j \in E} p_{ij} \cdot v_j$$

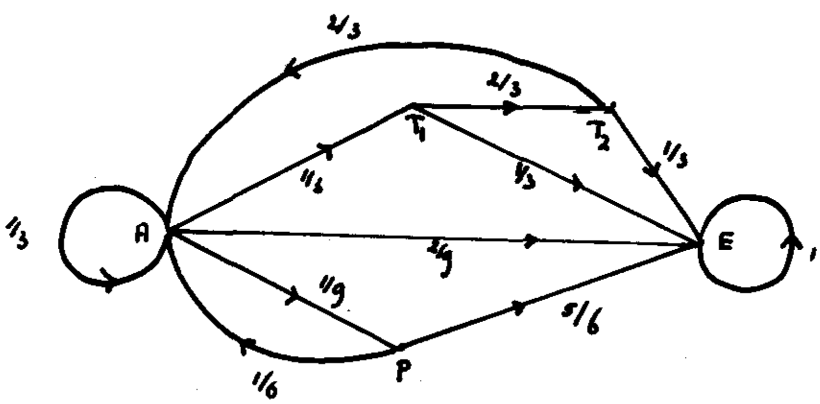
kunnen we met substitutie van r(i) herleiden.

Zelfs indien de kosten verbonden aan de overgang van toestand i naar j een stochastische grootheid $\underline{a}_{ij}$ is geldt:

$$v(i) = \sum_{j\in E} p_{ij}\cdot\mathcal{E}\underline{a}_{ij} + \sum_{j\in E_1} q_{ij}\cdot v_j \ .$$

Nu moeten we $r(i) := \sum_{j\in E} p_{ij}\mathcal{E}\underline{a}_{ij}$ substitueren om de bekende vorm te krijgen.

<u>Voorbeeld 3.1.</u> (Rijexamen)



a) Laat de kosten voor het gehele examen (theoretisch + praktisch) f 100,-- bedragen en f 50,-- voor het praktischexamen alleen, en f 10,-- voor het theoretisch examen alleen. De verwachten examenkosten uitgaande van toestand A zijn dan te berekenen door te definiëren:

$$r_A = 100,\ r_{T_1} = r_{T_2} = 10,\ r_p = 50,\ r_E = 0\ .$$

Laat $r = (r_A, r_{T_1}, r_{T_2}, T_p)T$. De matrix Q, voor de doorgangstoestanden, heeft de volgende vorm:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ T_1 \\ T_2 \\ P \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & T_1 & T_2 & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$v = (v_A, v_{T_1}, v_{T_2}, v_p)^T$ waarbij v_A de verwachte kosten vanuit toestand A zijn,

v_{T_1} vanuit T_1 enz.

$$v = r + Qv$$

zodat we het volgende stelsel kunnen oplossen

$$(I - Q)v = r .$$

Hieruit volgt dat $v_A = f\ 222{,}22$.

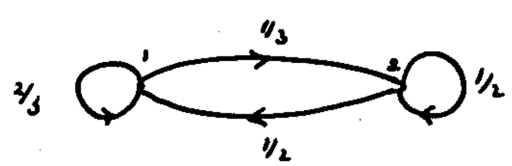
b) Om het verwachte aantal "bezoeken" aan toestand P te berekenen definiëren we $r_A = r_{T_1} = r_{T_2} = 0$ en $r_P = 1$. Uit

$$(I - Q)v = r$$

volgt dan dat $v_A = 2/9$.

c) Als de aanvraag voor een theoretisch examen 2 weken en voor een examen met praktisch deel 3 maanden duurt dan is de verwachte studieduur te berekenen met behulp van $r_A = r_P = 3$, $r_{T_1} = r_{T_2} = \frac{1}{2}$. Uit $(I - Q)v = r$ volgt nu $v_A = 7\,\frac{2}{9}$ maand.

Voorbeeld 3.2. Beschouw de volgende Markovketen.



met de kosten van overgangen:

$$a_{11} = 3,\ a_{12} = 6,\ a_{22} = 2 \text{ en } a_{21} = 4 .$$

De verwachte verdisconteerde kosten met $\beta = 1/4$ zijn:

$$v(1) = 2/3a_{11} + 1/3a_{12} + \beta[2/3v(1) + 1/3v(2)]$$

$$v(2) = 1/2a_{22} + 1/2a_{21} + \beta[1/2v(1) + 1/2v(2)]$$

waaruit volgt dat $v(1) = 5\,\frac{15}{69}$ en $v(2) = 4\,\frac{12}{69}$.

§ 4. Markov processen met continue tijdsparameter en discrete toestandsruimte

In deze paragraaf worden stochastische processen beschouwd die de Markov eigenschap bezitten, een discrete toestandsruimte S hebben en waarvan de tijdsparameter een continuum T doorloopt. Tenzij anders vermeld, zijn $S := \{0,1,2,\dots\}$ en $T := [0,\infty)$. Paden van het proces zijn functies op T die waarden aannemen in S. Voordat een formele definitie van deze Markov processen gegeven wordt, wordt de Markov eigenschap besproken. Een stochastisch proces $\{\underline{x}(t) \mid t \in T\}$ heeft de Markov eigenschap als voor iedere rij $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}$ geldt

$$P(\underline{x}(t_{k+1}) = s_{k+1} \mid \underline{x}(t_1) = s_1,\dots,\underline{x}(t_k) = s_k) =$$

$$= P(\underline{x}(t_{k+1}) = s_{k+1} \mid \underline{x}(t_k) = s_k)$$

voor iedere rij $s_1,s_2,\dots,s_{k+1}$ uit S waarvoor het linkerlid gedefinieerd is. Dit is geheel analoog aan de in stelling 2.1 bewezen eigenschap.

Definitie 4.1. De collectie $P = \{P(t) \mid t \in T\}$ is een Markov semi-groep op S als:

a) $P(t)$ is een Markov matrix op S, $\forall t \in T$ met elementen: $p_{ij}(t)$.

b) $P(t + s) = P(t).P(s)$, $\forall t,s \in T$, d.w.z.

$$p_{ij}(t + s) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t).p_{kj}(s) \ .$$

c) $P(0)$ is de eenheidsmatrix, d.w.z. $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Merk op dat als $T = \{0,1,2,3,\dots\}$, dan vormt de collectie machten van een Markov matrix P, $\{P^n \mid n = 0,1,2,\dots\}$ een Markov semi-groep, en dit is ook de enige Markov semi-groep.

Definitie 4.2. Beschouw een kansveld $(\Omega,F,\mathbb{P})$ met daarop een stochastisch proces $\{\underline{x}(t) \mid t \in T\}$ waarbij $\underline{x}(t)$ waarden aanneemt in S. Laat $P = \{P(t) \mid t \in T\}$ een Markov semi-groep zijn en $\{p_k \mid k \in S\}$ een kansverdeling op S.

$\{\underline{x}(t) \mid t \in T\}$ heet een Markov proces als voor iedere rij $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ en $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ geldt

$$\mathbb{P}(\underline{x}(t_0) = i_0, \underline{x}(t_1) = i_1, \ldots, \underline{x}(t_n) = i_n) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1}) .$$

De analogie met definitie 2.2 is duidelijk. Dat een Markov proces aan de Markov eigenschap voldoet is op dezelfde wijze als in stelling 2.1 na te gaan.

De overgangskans $\mathbb{P}(\underline{x}(t + s) = j \mid \underline{x}(s) = i)$ is gelijk aan $p_{ij}(t)$ zodat de Markov matrix $P(t)$ de overgangskansen van overgangen in een tijdsinterval ter lengte t weergeeft.

Eenvoudig is in te zien dat $\mathbb{P}(\underline{x}(t) = i) = \sum_{k \in S} p_k \cdot p_{ki}(t)$. Voor de semi-groep geldt bovendien $P(t + s) = P(t).P(s) = P(s).P(t)$.

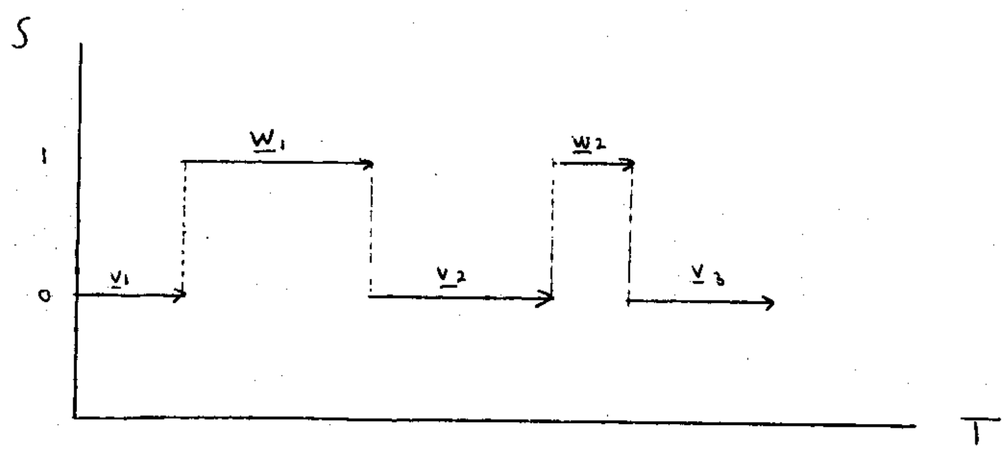
Er zullen nu twee voorbeelden besproken worden, waarbij het proces geconstrueerd wordt.

Voorbeeld 4.1.

Proces met 2 toestanden

De paden van dit proces zijn stapfuncties in de tijd.

De toestandsruimte $S = \{0,1\}$. Als het proces in toestand 0 zit, blijft het daar een exponentieel verdeelde tijd $\underline{v}$ met parameter $\lambda (> 0)$ en in toestand 1 een exponentieel verdeelde tijd $\underline{w}$ met parameter $\mu (> 0)$. De verblijftijden zijn onafhankelijk. Laat $\underline{v}_k$ de k-de verblijftijd in 0 zijn en $\underline{w}_k$ de k-de in 1, voor $k = 1,2,3,\ldots$ De paden hebben bijvoorbeeld de volgende vorm



Er zal een afleiding van de Markov semi-groep van dit proces gegeven worden.
$\mathbb{P}(\underline{x}(h) = 1 \mid \underline{x}(0) = 0) = P(\text{minstens één sprong in } [0,h) \mid \underline{x}(0) = 0) -$
$- P(\text{aantal sprongen in } [0,h) \text{ is even en } \geq 2 \mid \underline{x}(0) = 0)$.
$\mathbb{P}(\text{minstens één sprong in } [0,h) \mid \underline{x}(0) = 0) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ (voor $h \downarrow 0$).
$\mathbb{P}(\text{aantal sprongen in } [0,h) \text{ is even en } \geq 2 \mid \underline{x}(0) = 0) \leq$
$\leq P(\text{aantal sprongen} \geq 2 \mid \underline{x}(0) = 0) = \mathbb{P}(\underline{v}_1 + \underline{w}_1 \leq h) \leq (1 - e^{-\lambda h})(1 - e^{-\mu h}) =$
$= o(h)$ (voor $h \downarrow 0$) zodat

$$\begin{cases} p_{01}(h) := P(\underline{x}(h) = 1 \mid \underline{x}(0) = 0) = \lambda h + o(h) \\ p_{00}(h) := 1 - \lambda h + o(h) \\ p_{10}(h) := \mu h + o(h) \\ p_{11}(h) := 1 - \mu h + o(h) \, . \end{cases}$$

En

$$p_0(t + h) = p_0(t) . p_{00}(h) + p_1(t) . p_{10}(h)$$

waaruit volgt dat

$$p_0(t + h) - p_0(t) = -\lambda h \, p_0(t) + \mu h \, p_1(t) + o(h)$$

en dus

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = -(\lambda + \mu) p_0(t) + \mu \, .$$

Deze lineaire differentiaalvergelijking, met beginvoorwaarde $p_0(0) = p_0$ heeft als oplossing:

$$p_0(t) = (p_0 - \frac{\mu}{\mu + \lambda}) e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

en dus

$$p_1(t) = -(p_0 - \frac{\mu}{\mu + \lambda}) e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \, .$$

Voor $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad \text{en} \quad \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \, ,$$

onafhankelijk van p_0.

Met $p_0(t) = p_0 \cdot p_{00}(t) + p_1 \cdot p_{10}(t)$ is eenvoudig in te zien door $p_0 = 0$ en $p_1 = 1$ respectievelijk $p_1 = 0$ en $p_0 = 1$ te substitueren, dat:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad p_{01}(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\}$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\{1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\}, \quad p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} .$$

Als $p(t) = (p_0(t), p_1(t))$ dan geldt

$$p(t) = p(0).P(t)$$

geheel analoog aan

$$p(n) = p(0).P^n$$

in het discrete geval.

Dit voorbeeld levert een continue analogon van de 2-toestanden Markov keten van blz. 21.

Voorbeeld 4.2.

Proces met ∞ veel toestanden; een wachtrij model.

Klanten komen volgens een Poisson proces bij een loket, d.w.z. de tussen-aankomsttijden zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda (> 0)$. Als het loket bezet is sluiten de klanten achteraan de wachtrij aan. De bedieningstijden van de klanten aan het loket zijn ook onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\mu (> 0)$.

$\underline{x}(t)$:= aantal klanten dat in $[0,t)$ is binnengekomen. Merk op dat $\{\underline{x}(t) \mid t \in T\}$ een Poisson proces is (zie Kansrekening en Statistiek).

$\underline{n}(t)$:= aantal klanten in het systeem op tijdstip t. Als $\underline{n}(t) = 0$ dan is het systeem leeg en als $\underline{n}(t) = 1$ dan is de wachtrij leeg.

$p_i(t) := \mathbb{P}(\underline{n}(t) = i)$. Hieruit worden de volgende eigenschappen afgeleid:

1. $p_{ii+1}(h) = \lambda h + o(h) \quad$ voor $h \downarrow 0$

2. $p_{ii-1}(h) = \mu h + o(h), \quad i \geq 1$

3. $p_{ii}(h) = 1 - (\mu + \lambda)h + o(h), \quad i \geq 1$

4. $$p_{00}(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$

5. $$\sup_{j \neq -1,0,1} p_{j0}(h) = o(h) .$$

Hieruit volgt:

$$p_0(t + h) = p_0(t).p_{00}(h) + p_1(t).p_{10}(h) + \sum_{j>1} p_j(t).p_{j0}(h) =$$

$$= p_0(t).(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t).(\mu h + o(h)) + o(h)$$

zodat

$$p_0'(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_0(t + h) - p_0(t)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{-\lambda h p_0(t) + \mu h p_1(t) + o(h)}{h} =$$

$$= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) .$$

Voor $n > 0$:

$$p_n(t + h) = p_n(t).\{1 - (\lambda + \mu)h\} + p_{n-1}(t)\lambda h + p_{n+1}(t)\mu h + o(h)$$

zodat

$$p_n'(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{-(\lambda + \mu)hp_n(t) + p_{n-1}(t)\lambda h + p_{n+1}(t)\mu h + o(h)}{h} =$$

$$= -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) .$$

Men kan bewijzen dat voor $t \to \infty$:

1) $p_n(t) \to p_n, \forall n$

2) $p_n'(t) \to 0 , \forall n .$

(Zie: J.W. Cohen: The single server queue, North-Holland, Publ. Comp. 1969.)
zodat

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} .$$

Bovendien weten we dat $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$ zodat $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \leq 1.$

Uit $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ en $p_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n - \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}$ volgt met volledige inductie dat $p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0$.

Zodat aan de eis $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 = 1$ alleen voldaan kan worden als $\lambda > \mu$. Als $\lambda \geq \mu$ dan $p_n = 0$, n. Dus voor $\lambda < \mu$: $p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}), n \geq 0$. De factor $\frac{\lambda}{\mu}$ heet de bezettingsgraad van het loket. (zie Cohen).

<u>Definitie 4.3.</u> Een Markov proces met Markov semi-groep P waarvoor geldt dat $\lim\limits_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$ heet een <u>standaard proces</u>. In matrixvorm: $\lim\limits_{h \downarrow 0} P(h) = I$ (componentsgewijze convergentie). In de rest van dit hoofdstuk beperken we ons tot standaardprocessen, deze voorwaarde betekent dat $P(t)$ continu van rechts is voor $t = 0$. Hieruit volgt de continuiteit van $P(t)$ voor alle t.

<u>Stelling 4.1.</u> Een standaardproces heeft een continue Markov semi-groep.

<u>Bewijs.</u> $p_{ij}(t + h) = \sum\limits_{k} p_{ik}(h).p_{kj}(t), \quad h \geq 0$.

$$p_{ij}(t + h) - p_{ij}(t) = \{p_{ii}(h) - 1\}p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(h).p_{kj}(t) .$$

Merk op dat $0 \leq p_{kj}(t) \leq 1$ en $\sum\limits_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h)$, zodat

$$\{p_{ii}(h) - 1\}p_{ij}(t) \leq p_{ij}(t + h) - p_{ij}(t) \leq \{p_{ii}(h) - 1\}p_{ij}(t) + \\ + \{1 - p_{ii}(h)\}$$

waaruit de continuiteit van rechts volgt.

Voor $h > 0$ geldt $p_{ij}(t) = \sum\limits_{k} p_{ik}(t - h).p_{kj}(h)$. Geheel analoog bewijst men hiermee de linkscontinuiteit. □

Er worden nu enige stellingen afgeleid voor de differentieerbaarheid van $P(t)$ naar t. Enkele stellingen worden bewezen voor eindige toestandsruimte, doch ze zijn ook geldig voor een aftelbare toestandsruimte als geldt dat $\lim\limits_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$ uniform in i (een Markov semi-groep met deze eigenschap heet een <u>uniforme Markov semi-groep</u>).

<u>Stelling 4.2.</u> $p_{ii}(t) > 0$, $\forall t \in T$.

<u>Bewijs.</u> $p_{ii}(t) = p_{ii}(\frac{t}{N} \cdot N) \geq \{p_{ii}(\frac{t}{N})\}^N$. Daar $p_{ii}(\frac{t}{N}) \to 1$ voor $N \to \infty$, zodat $p_{ii}(t) > 0$, $\forall t$. □

<u>Stelling 4.3.</u> $p_{ii}(t)$ is rechts-differentieerbaar in $t = 0$. Noem de afgeleide $-q_i$. Dan geldt $q_i \geq 0$.

<u>Bewijs.</u> Uit stelling 4.2 volgt het bestaan van $\log p_{ii}(h)$.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - e^{\log p_{ii}(h)}}{-\log p_{ii}(h)} \cdot \frac{-\log p_{ii}(h)}{h} .$$

Merk op dat

$$\frac{1 - e^{\log p_{ii}(h)}}{-\log p_{ii}(h)} = 1 + o(1) .$$

We moeten nog het bestaan van $\lim_{h \downarrow 0} \frac{-\log p_{ii}(h)}{h}$ aantonen. Laat

$$q = \sup_{h>0} \frac{-\log p_{ii}(h)}{h} , \quad q \geq 0 .$$

Dus

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{-\log p_{ii}(h)}{h} \leq q .$$

Als $q = 0$ dan $p_{ii}(t) \equiv 1$, en is de stelling bewezen.
Stel $q > 0$. Kies een $a : 0 \leq a < q$. Dan is er een $t > 0$: $\frac{-\log p_{ii}(t)}{t} \geq a$.
Er is een $S > 0$ zodat $t = ns + \delta$ met $0 \leq \delta < s$, waarbij n en δ van s afhangen.

$$p_{ii}(t) = p_{ii}(ns + \delta) \geq (p_{ii}(s))^n . p_{ii}(\delta) .$$

$$a \le \frac{-\log p_{ii}(t)}{t} \le \frac{-n \log p_{ii}(s) - \log p_{ii}(\delta)}{t} =$$

$$= \frac{n.s}{t} \cdot \frac{-\log p_{ii}(s)}{s} - \frac{\log p_{ii}(\delta)}{t}..$$

Als $s \to 0$ dan $\frac{ns}{t} \to 1$ en $\delta \to 0$, dus $a \le \liminf_{s\to 0} \frac{-\log p_{ii}(s)}{s}$. Dit geldt voor iedere $0 \le a < q$, zodat

$$\liminf_{s\to 0} \frac{-\log p_{ii}(s)}{s} \ge q \; .$$

Uit combinatie met

$$\limsup_{s\to 0} \frac{-\log p_{ii}(s)}{s} \le q$$

volgt dat $\lim_{s\to 0} p_{ii}(s)$ bestaat, en dus $q_i = q \ge 0$. □

Stelling 4.4. Als $q_i < \infty$ dan bestaat $\lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}$. Noem deze afgeleide q_{ij}.

Bewijs.

(*) $$p_{ij}(n\delta) \ge \sum_{m=0}^{n-1} \{p_{ii}(\delta)\}^m . p_{ij}(\delta) . p_{jj}((n-m-1)\delta) \; .$$

Dit is in te zien door de Markov keten te beschouwen die op discrete tijdstippen $(n.\delta)$ na m stappen weer in i is en dan daarna naar j gaat en er blijft. Uit het bewijs van stelling 4.3 zien we:

$$q_i = \sup_{t>0} \frac{-\log p_{ii}(t)}{t}$$

dus $-q_i . t \le \log p_{ii}(t)$ waaruit volgt dat $p_{ii}(t) \ge e^{-q_i t}$. Kies $\varepsilon > 0$. Kies $t > 0$ zodanig dat $e^{-q_i t} > 1 - \varepsilon$.

Dan geldt voor $m\delta < t$:

$$\{p_{ii}(\delta)\}^m \geq \{e^{-q_i \delta}\}^m = e^{-q_i \delta m} \geq e^{-q_i t} > 1 - \varepsilon$$

en voor $s < t$:

$$p_{ii}(s) \geq e^{-q_i s} \geq e^{-q_i t} > 1 - \varepsilon .$$

Zodat (*) impliceert:

$$p_{ij}(n\delta) \geq (1 - \varepsilon)^2 n.p_{ij}(\delta)$$

waaruit volgt:

$$(**) \qquad \frac{p_{ij}(n\delta)}{n\delta} > (1 - \varepsilon)^2 \frac{p_{ij}(\delta)}{\delta} .$$

Laat

$$q_{ij} := \limsup_{d \to 0} \frac{p_{ij}(d)}{d} .$$

Kies een rij δ's zodanig dat $\delta \to 0$ en $\frac{p_{ij}(\delta)}{\delta} \to q_{ij}$. Kies vervolgens een rij $n \to \infty$ zodat $n\delta \to s < t$. Dan volgt uit (**):

$$\frac{p_{ij}(s)}{s} \geq (1 - \varepsilon)^2 q_{ij}$$

zodat

$$\liminf_{s \to 0} \frac{p_{ij}(s)}{s} \geq q_{ij} .$$

Hieruit volgt dan het bestaan van de limiet. □

De matrix Q van elementen q_{ij}, $i,j \in S$ heet de <u>generator van de semi-groep</u>.

<u>Stelling 4.5</u>. Als $q_{ii} > -\infty$ en de toestandsruimte is eindig dan is $P(t)$ differentieerbaar voor alle $t \geq 0$ en $P'(t) = Q.P(t) = P(t).Q$ (d.w.z. $p'_{ij}(t)$ bestaat voor alle $t \geq 0$).

Bewijs.

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \cdot \frac{\{P(h) - I\}}{h} \to P(t).Q \quad \text{als } h \to 0 \;.$$

$$\frac{P(t) - P(t-h)}{-h} = \frac{P(t-h) - P(h).P(t-h)}{-h} = \frac{I - P(h)}{-h} P(t-h)$$

en dit nadert naar $Q.P(t)$ voor $h \to 0$.
Eenvoudig is in te zien dat $P(t).\{P(h) - I\} = \{P(h) - I\}P(t)$ zodat $P(t).Q = Q.P(t)$. □

Opmerkingen.

1) $p_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) = 1$ zodat

$$\frac{p_{ii}(t) - 1}{t} + \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = 0, \; \forall t \;.$$

Van beide termen bestaat de limiet (mits S eindig). Dus $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$.
Voor S aftelbaar geldt $q_i \leq \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

2) Het stelsel differentiaalvergelijkingen $P'(t) = QP(t)$ wordt het stelsel van achterwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen genoemd en $P'(t) = P(t)Q$ het stelsel van voorwaartse Kolmogorov differentiaalvergelijkingen.

3) De oplossing van deze stelsel differentiaalvergelijkingen is voor uniforme Markov semi-groepen $P(t) = e^{Qt}$, waarbij

$$e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \frac{t^n}{n!} \;.$$

§ 5. Stoptijden en de vergelijking van Wald

Beschouw een kansveld $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ met daarop gedefinieerd een rij stochastische grootheden $\{\underline{x}_n,\ n = 1,2,3,\ldots\}$.
Een stochastische grootheid $\underline{N}$ op dit kansveld gedefinieerd, heet een stoptijd voor de rij $\{\underline{x}_n,\ n = 1,2,3,\ldots\}$ als er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een verzameling uit de Borel-σ-algebra op de $\mathbb{R}^n$ is zodanig dat de volgende gebeurtenissen gelijk zijn: $\{\underline{N} = n\} = \{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in A\}$. Dit wil zeggen dat de gebeurtenis $\{\underline{N} = n\}$ geheel bepaald wordt door $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$. Dus om te zien of $\underline{N} = n$ behoeven slechts $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ waargenomen te worden.
Stoptijden vinden toepassing in de theorie over Markov ketens. Bijvoorbeeld het tijdstip waarop een Markov keten $\{\underline{x}_n,\ n = 1,2,3,\ldots\}$ met toestandsruimte S een bepaalde verzameling $A \in S$ binnenkomt is een stoptijd.
In de sequentiële statistiek is men geïnteresseerd in het tijdstip waarop men genoeg informatie verzameld heeft om het experimenteren te kunnen staken en een uitspraak te doen. Ook hier geldt dat iedere stopregel een stoptijd is want het al dan niet stoppen op tijdstip n is geheel bepaald door de rij waarnemingen tot en met tijdstip n.
Voor Markov ketens met discrete tijdsparameter geldt dat de voorwaardelijke kans, gegeven dat de keten op een stoptijd $\underline{N}$ in toestand i zit, dat de keten k tijdseenheden later in toestand j zit onafhankelijk is van de stoptijd.
Deze eigenschap noemt men de sterke Markov eigenschap: Dit wordt nu bewezen.
Laat $\underline{N}$ een stoptijd zijn en $\{\underline{x}_n,\ n = 0,1,2,3,\ldots\}$ een Markov keten slechts op de gebeurtenis $\{\underline{N} < \infty\}$ is de stochastische grootheid $\underline{x}_{\underline{N}}$ gedefinieerd.
Vandaar dat er steeds over $\{\underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty\}$ gesproken wordt.

Stelling 5.1. (sterke Markov eigenschap).

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = j \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty) = \mathbb{P}(\underline{x}_k = j \mid \underline{x}_0 = i)\ .$$

Bewijs.

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = j \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = j,\ \underline{N} = n \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{x}_{n+k} = j \mid \underline{N} = n,\ \underline{x}_{\underline{N}} = i).\mathbb{P}(\underline{N} = n \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty)\ .$$

Daar $\{\underline{N} = n\} = \{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in A\}$ voor een A uit Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^n$ geldt volgens de (gewone) Markov eigenschap dat

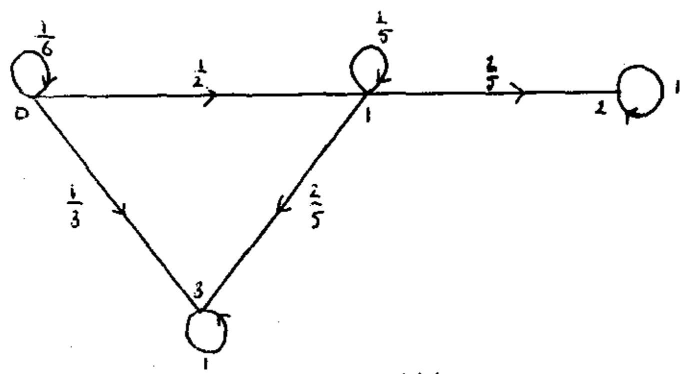
$$\mathbb{P}(\underline{x}_{n+k} = j \mid \underline{x}_n = i,\ \underline{N} = n) = \mathbb{P}(\underline{x}_{n+k} = j \mid \underline{x}_n = i) = p_{ij}^{(k)}$$

zodat

$$\mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = j \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ N < \infty) = p_{ij}^{(k)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} = n \mid \underline{x}_{\underline{N}} = i,\ \underline{N} < \infty) = p_{ij}^{(k)} .$$

$\square$

<u>Voorbeeld.</u> Beschouw de volgende Markov keten



Om de volgende voorwaardelijke kans te bepalen

$$\mathbb{P}(\underline{x}_n = 2 \text{ voor een } n \mid \underline{x}_0 = 0)$$

wordt de stoptijd $\underline{N}$ ingevoerd:

$$\underline{N} := \inf\{n \mid \underline{x}_n = 1\} .$$

$\mathbb{P}(\underline{x}_n = 2 \text{ voor een } n \mid \underline{x}_0 = 0) = \mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = 2 \text{ voor een } k, \underline{N} < \infty \mid \underline{x}_0 = 0) =$
$\mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}+k} = 2 \text{ voor een } k \mid \underline{N} < \infty,\ \underline{x}_{\underline{N}} = 1,\ \underline{x}_0 = 0) . \mathbb{P}(\underline{x}_{\underline{N}} = 1,\ \underline{N} < \infty \mid \underline{x}_0 = 0) =$
$\mathbb{P}(\underline{x}_k = 2 \text{ voor een } k \mid \underline{x}_0 = 1) . \mathbb{P}(\underline{N} < \infty \mid \underline{x}_0 = 0) =$

$$\frac{2}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{3}{10} .$$

Stelling 5.2. (Vergelijking van Wald). Laat $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3,\ldots$ een rij onafhankelijk identiek verdeelde stochastische grootheden zijn en $\underline{N}$ een stoptijd voor deze rij en laat $E|\underline{x}_1| < \infty$ en $E\,\underline{N} < \infty$, dan geldt

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\Big) = E\underline{x}_1 . E\underline{N} .$$

Bewijs. Voer in de rij stochastische grootheden $\underline{y}_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ met $\underline{y}_n = 0$ als $\underline{N} < n$, $\underline{y}_n = 1$ als $\underline{N} \geq n$. Dan geldt:

$$\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{x}_n . \underline{y}_n ,$$

zodat

$$(*) \qquad E\Big(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\Big) = E\sum_{n=1}^{\infty} (\underline{x}_n . \underline{y}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E\underline{x}_n . \underline{y}_n .$$

Daar $\underline{y}_n$ een functie is van $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1}$ geldtdat $\underline{y}_n$ onafhankelijk is van $\underline{x}_n$.
Formeel:

$$\{\underline{y}_n = 0\} = \{\underline{N} < n\} = \{\underline{N} \leq n-1\} = \{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1}) \in A\}$$

voor een A uit de Borel-σ-algebra op de $\mathbb{R}^n$ en evenzo

$$\{\underline{y}_n = 1\} = \{\underline{N} \geq n\} = \{\underline{N} \leq n-1\}^C = \{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1}) \notin A\} .$$

Daar $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,$ onafhankelijk zijn, zijn $\underline{x}_n$ en $\underline{y}_n$ onafhankelijk. Dus

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E\underline{x}_n . E\underline{y}_n = E\underline{x}_1 \,.\, E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \underline{y}_n\Big) =$$

$$= E\underline{x}_1 \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} \geq n) = E\underline{x}_1 . E\underline{N}$$

want

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(\underline{N} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k.\mathbb{P}(\underline{N} = k).$$

Tot slot nog een opmerking over de verwisseling van somteken en verwachting. Het bewijs kan eerst gegeven worden voor $\tilde{\underline{x}}_n = |\underline{x}_n|$. In dit geval is de verwisseling geoorloofd omdat alle termen niet negatief zijn. Met behulp van de gedomineerde convergentiestelling is de bewering ook juist voor $\tilde{\underline{x}}_n = \underline{x}_n$ daar

$$E \sum_{n=1}^{\infty} |\underline{x}_n| \underline{y}_n = E|\underline{x}_1| . E\underline{N} < \infty . \qquad \square$$

Voorbeelden:

1) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onafhankelijk identiek verdeeld met $\mathbb{P}(\underline{x}_n = 0) = \mathbb{P}(\underline{x}_n = 1) = \frac{1}{2}$,

$$\underline{N} = \inf\{n \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n = 10\}$$

$$E\left(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\right) = E\underline{x}_n . E\underline{N} = \tfrac{1}{2}E\underline{N}$$

anderzijds

$$E\left(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\right) = \sum_{n=10}^{\infty} 10.\mathbb{P}(\underline{N} = n) = 10 .$$

Hieruit volgt dat $E\underline{N} = 20$.

2) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onafhankelijk identiek verdeeld met $\mathbb{P}(\underline{x}_n = -1) = \mathbb{P}(\underline{x}_n = 1) = \frac{1}{2}$

$$\underline{N} = \min\{n \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n = 1\} .$$

Als de vergelijking van Wald gebruikt mag worden, d.w.z. als $E\underline{N} < \infty$ dan geldt

$$E\left(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\right) = E\underline{x}_n . E\underline{N} = 0,$$

dit is onjuist daar $E\left(\sum_{n=1}^{\underline{N}} \underline{x}_n\right) = 1$ zodat de conclusie $E\underline{N} = \infty$ getrokken mag worden.

§ 6. Vernieuwingstheorie

- (litteratuur: S. Ross, Applied probability Models with optimization Applications, Holden Day 1969).

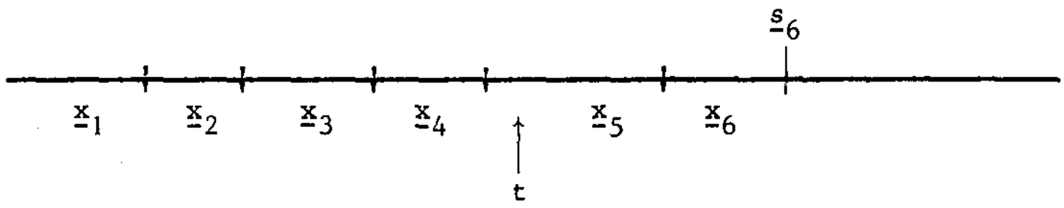
Laat $\{\underline{x}_n,\ n=1,2,3,\ldots\}$ een rij niet-negatieve, onafhankelijke identiek verdeelde stochastische grootheden zijn met distributiefunktie F en verwachting μ. Er wordt verondersteld dat $\mu > 0$ zodat $\mathbb{P}(\underline{x}_n = 0) < 1$. Verder worden gedefinieerd:

$$\underline{s}_0 = 0$$

$$\underline{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k,\ n \geq 1$$

$$\underline{N}(t) = \sup\{n \mid \underline{s}_n \leq t\}\ .$$

Een intuïtieve interpretatie van deze stochastische grootheden is het volgende.
Beschouw een gloeilamp. De levensduur van deze gloeilamp wordt voorgesteld door de stochastische grootheid $\underline{x}_n$. Steeds als de gloeilamp kapot gaat wordt hij vervangen door een identieke gloeilamp. $\underline{s}_n$ is de totale levensduur van n lampen en $\underline{N}(t)$ geeft het aantal vervangingen tot en met tijdstip t weer.
In de tekening is $\underline{N}(t) = 4$.



Het stochastische proces $\{\underline{N}(t),\ t \in [0,\infty)\}$ heet een vernieuwingsproces.
De toestandsruimte is de verzameling der natuurlijke getallen en de paden van dit proces zijn stapfunkties in tijd waarbij de stapgrootte steeds +1 is, zoals bij het Poissonproces.
Volgens de sterke wet der grote aantallen geldt

$$\frac{\underline{s}_n}{n} \to \mu \text{ met kans } 1\ .$$

Dus $\underline{s}_n$ stijgt met kans 1 boven elke waarde uit zodat $\underline{s}_n \le t$ voor slechts eindig veel n optreedt, met kans 1, waaruit volgt dat $\underline{N}(t) < \infty$ (met kans 1). Eenvoudig is in te zien dat

$$\underline{N}(t) \ge n \Leftrightarrow \underline{s}_n \le t \ .$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{P}\,(\underline{N}(t) = n) = \mathbb{P}\,(\underline{N}(t) \ge n) - \mathbb{P}\,(\underline{N}(t) \ge n+1) =$$

$$= \mathbb{P}\,(\underline{s}_n \le t) - \mathbb{P}\,(\underline{s}_{n+1} \le t) \ .$$

Noem:

$$F_n(t) := \mathbb{P}\,(\underline{s}_n \le t) \ .$$

(Dus $F_n(t)$ is de n-voudige convolutie van F.)
Hiermee wordt

$$\mathbb{P}\,(\underline{N}(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t) \ .$$

Noem de verwachting van $\underline{N}(t)$: m(t).
Er geldt

$$m(t) := \mathbb{E}\underline{N}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\ \mathbb{P}\,(\underline{N}(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\{F_n(t) - F_{n+1}(t)\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \{F_n(t) - F_{n+1}(t)\}$$

daar $F_n(t) \ge F_{n+1}(t)$ mag de sommatie volgorde verwisseld worden:

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \{F_n(t) - F_{n+1}(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \ .$$

m(t) heet de <u>vernieuwingsfunktie</u> (renewal function).

<u>Stelling 6.1.</u>

$$m(t) < \infty \qquad \forall_{t \ge 0} \ .$$

Bewijs. Introduceer een rij stochastische grootheden $\underline{y}_n$, n = 1,2,3,... . waarbij

$$\underline{y}_n = 0 \text{ als } \underline{x}_n < \alpha \;,\; \alpha > 0 \;.$$
$$= \alpha \text{ als } \underline{x}_n \geq \alpha \;.$$

Op dezelfde wijze als voor de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots$ worden gedefinieerd:

$$\underline{T}_n := \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k$$

$$\underline{N}_y(t) := \sup\{n \mid \underline{T}_n \leq t\}.$$

Ook $\{\underline{N}_y(t),\ t \in [0,\infty)\}$ is een vernieuwingsproces.
Voor $t = k\cdot\alpha$ met k een natuurlijk getal, geldt: $\underline{N}_y(t)$ is negatief binomiaal verdeeld met parameters k en $\mathbb{P}(\underline{x}_1 \geq \alpha)$. Voor $t = k\cdot\alpha$ geldt

$$E\,\underline{N}_y(t) = \frac{k}{\mathbb{P}(\underline{x}_1 \geq \alpha)} = \frac{k}{1 - F(\alpha)} \;.$$

Daar $\underline{s}_n \geq \underline{T}_n$, n = 1,2,3,... geldt $\underline{N}_y(t) \geq \underline{N}(t)$ zodat

$$m(t) \leq E\,\underline{N}_y(t) \leq \frac{[t/\alpha] + 1}{1 - F(\alpha)} < \infty \;. \quad \square$$

Een opmerking over Laplace transformaties.
Laat $g^*(s)$ de Laplace getransformeerde van de functie g(t) zijn, dan is

$$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dg(t) \;.$$

Stel, voor de convolutie van de distributiefuncties h en f geldt de volgende betrekking:

$$g(t) := \int_0^t h(t-\tau) df(\tau) \;.$$

Er wordt nu bewezen dat $g^*(s) = f^*(s)h^*(s)$.

Voer 2 onderling onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in. Laat f(x) de distributiefunctie van $\underline{x}$ zijn en f(y) die van $\underline{y}$. De som $\underline{t} := \underline{x} + \underline{y}$ heeft dan de distributiefunctie g(t). Eenvoudig is in te zien dat

$$f^*(s) = Ee^{-s\underline{x}} ,$$
$$h^*(s) = Ee^{-s\underline{y}} ,$$
$$g^*(s) = Ee^{-s\underline{t}} .$$

Daar

$$Ee^{-s(\underline{x}+\underline{y})} = Ee^{-s\underline{x}} . Ee^{-s\underline{y}}$$

geldt

$$g^*(s) = f^*(s).h^*(s) .$$

Opmerking: bij integratie ${}_a\int^b f(x)dF(x)$ moet een eventuele sprong in a mee genomen worden.

Laat $m^*(s)$ de Laplace getransformeerde van m(t) zijn.
Dan geldt

$$m^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \{F^*(s)\}^k ,$$

zodat

$$(*) \qquad m^*(s) = F^*(s) + m^*(s) \sum_{k=1}^{\infty} \{F^*(s)\}^k = F^*(s)\ (1 + m^*(s)) .$$

Hieruit volgt dat $F^*(s) = \dfrac{m^*(s)}{1 + m^*(s)}$ en dus is F(t) eenduidig bepaald door m(t) (en omgekeerd).
Bovendien volgt uit (*)

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-\tau)dF(\tau) .$$

Deze vergelijking wordt de vernieuwingsvergelijking genoemd (engels: renewal equation).
Deze vergelijking is ook op andere wijze in te zien:

$$m(t) = E\,\underline{N}(t) = E\{E[\underline{N}(t) \mid \underline{x}_1 = x]\} = \int_0^\infty E[\underline{N}(t) \mid \underline{x}_1 = x]dF(x)\ .$$

$$\begin{aligned} E[\underline{N}(t) \mid \underline{x}_1 = x] &= 0 \text{ als } t < x \\ &= 1 + E[\underline{N}(t-x)] \text{ als } t \geq x\ , \end{aligned}$$

want $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ zijn onafhankelijk.
Dus

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)\ .$$

Met een vernieuwingsachtige vergelijking wordt bedoeld een vergelijking van het type

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x),\ t \geq 0\ ,$$

waarbij h en F bekende functies zijn.
De oplossing van g(t) uit zo'n vergelijking wordt afgeleid in de volgende stelling.

Stelling 6.2. Als

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x),\ t \geq 0\ ,$$

dan

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x)\ ,$$

waarbij

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)\ .$$

($F_n(x)$ is de n-voudige convolutie van F.)

Bewijs. $g^*(s) = h^*(s) + g^*(s)F^*(s)$, zodat

$$g^*(s) = \frac{h^*(s)}{1 - F^*(s)} = h^*(s) \sum_{k=0}^{\infty} \{F^*(s)\}^k = h^*(s) + h^*(s) \sum_{k=1}^{\infty} F_k^*(s) ,$$

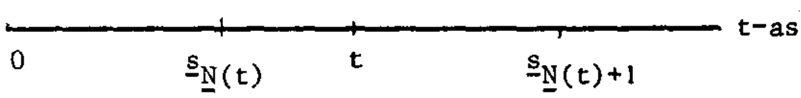
waaruit de bewering volgt. □

Er zullen nu enige limietstellingen voor het vernieuwingsproces afgeleid worden.

Stelling 6.3. Met kans 1 geldt

$$\frac{\underline{N}(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \text{ als } t \to \infty .$$

Bewijs. Daar $\underline{N}(t) < \infty$ met kans 1 is $\underline{s}_{\underline{N}(t)}$ met kans 1 gedefinieerd.



Uit de definitie van $\underline{N}(t)$ is direct te zien dat

$$\underline{s}_{\underline{N}(t)} \leq t < \underline{s}_{\underline{N}(t)+1} ,$$

zodat

$$\frac{\underline{s}_{\underline{N}(t)}}{\underline{N}(t)} \leq \frac{t}{\underline{N}(t)} < \frac{\underline{s}_{\underline{N}(t)+1}}{\underline{N}(t)} .$$

Met kans 1 gaat $\underline{N}(t) \to \infty$ als $t \to \infty$ want stel dat er een k is zodat

$$\mathbb{P}(\sup_t \underline{N}(t) \leq k) > 0$$

dan

$$\mathbb{P}(\bigcap_t \{\underline{N}(t) \leq k\}) = \mathbb{P}(\bigcap_t \{\underline{s}_k \geq t\}) = \mathbb{P}(\underline{s}_k = \infty) > 0 ,$$

waaruit volgt dat $\mathbb{P}(\underline{x}_1 = \infty) > 0$ zodat $\lim_{x\to\infty} F(x) < 1$ hetgeen betekent dat $F(x)$ geen distributiefunctie is.

Volgens de sterke wet der grote aantallen geldt $\frac{\underline{s}_n}{n} \to \mu$ met kans 1 zodat

$\frac{\underline{s}_{\underline{N}(t)}}{\underline{N}(t)} \to \mu$ met kans 1.

Daar ook $\frac{\underline{N}(t)+1}{\underline{N}(t)} \cdot \frac{\underline{s}_{\underline{N}(t)+1}}{\underline{N}(t)+1} \to \mu$ met kans 1 moet $\frac{\underline{N}(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ met kans 1. □

Stelling 6.4. (elementaire vernieuwingsstelling)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \text{ als } t \to \infty \text{ .}$$

Bewijs.

a) Veronderstel $\mu < \infty$.

Merk op dat $\underline{N}(t)$ geen stoptijd is want

$$\{\underline{N}(t) = n\} = \{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n \le t\} \cap \{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{n+1} > t\}$$

en dus is $\{\underline{N}(t) = n\}$ geen gebeurtenis die alleen door $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ bepaald wordt.

Echter $\underline{N}(t)+1$ is wel een stoptijd hetgeen met een analoge redenering is in te zien.

Om de verwachting van $\underline{s}_{\underline{N}(t)+1}$ te berekenen mag de vergelijking van Wald toegepast worden omdat $\mu < \infty$ en volgens stelling 6.1 is $m(t) < \infty$.

Dus

$$E[\underline{s}_{\underline{N}(t)+1}] = \mu E[\underline{N}(t)+1] = \mu(m(t)+1) \text{ .}$$

Daar $\underline{s}_{\underline{N}(t)+1} \ge t$ geldt $E[\underline{s}_{\underline{N}(t)+1}] \ge t$ zodat

$$\mu(m(t)+1) \ge t \text{ en dus } \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \text{ ,}$$

hetgeen betekent dat $\liminf\limits_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}$.

Nu nog te bewijzen dat $\limsup\limits_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$.

Voer een nieuw vernieuwingsproces in:

$$\underline{y}_n = \begin{cases} \underline{x}_n & \text{als } \underline{x}_n \le M \\ M & \text{als } \underline{x}_n > M \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\ldots \text{ .}$$

Laat $\underline{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_n$ en $\underline{N}_y(t) = \sup\{n \mid \underline{T}_n \le t\}$.

$$0 \qquad \underline{T}_{\underline{N}_y(t)} \qquad t \qquad \underline{T}_{\underline{N}_y(t)+1}$$

Daar $\underline{y}_n \le M$ geldt

$$\underline{T}_{\underline{N}_y(t)+1} \le t+M ,$$

zodat met behulp van de vergelijking van Wald

$$E(\underline{y}_1)E(\underline{N}_y(t)+1) \le t+M.$$

Noem: $\mu_M := E\underline{y}_1$ en $m_y(t) := E(\underline{N}_y(t))$, zodat

$$\mu_M(m_y(t)+1) \le t+M ,$$

waaruit volgt

$$\frac{m_y(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{t}\left\{\frac{M}{\mu_M} - 1\right\} .$$

Merk op dat $M \ge \mu_M$. Dus

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m_y(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M} .$$

$m(t) \le m_y(t)$, $\forall_{t\ge 0}$, want

$$\underline{N}_y(t) \le n \Rightarrow \underline{T}_n \ge t \Rightarrow \underline{s}_n \ge t \Rightarrow \underline{N}(t) \le n .$$

Dus

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M} .$$

Dit geldt voor alle $M > 0$. Daar $\lim_{M\to\infty} \mu_M = \mu$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu} .$$

Hiermee is bewezen dat $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

b) Voor $\mu = \infty$ is het voldoende te bewijzen dat

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \le 0.$$

Beschouw weer het afgeknotte vernieuwingsproces $\{\underline{y}_n, n = 1,2,3,\ldots\}$.
Weer geldt hiervoor

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{m_y(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M},$$

waaruit weer volgt

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M}, \ \forall_{M>0}.$$

Nu geldt

$$\lim_{M\to\infty} \mu_M = \infty. \qquad \square$$

Zonder bewijs zal nu een sterkere stelling over het limietgedrag van de vernieuwingsfunctie vermeld worden. Deze stelling onderscheidt twee typen distributiefuncties.

<u>Definitie 6.1</u>. Een niet-negatieve stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft een <u>roosterverdeling</u> met <u>roosterconstante</u> d als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{x} = nd) = 1 \text{ en g.g.d.}\{n \mid \mathbb{P}(\underline{x} = nd) > 0\} = 1.$$

(De tweede voorwaarde betekent dat er geen rooster met roosterconstante $k\cdot d$ is, met k een natuurlijk getal, zodat $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{x} = n\cdot kd) = 1$.)

<u>Stelling 6.5</u>. (Blackwell)
i) Als F een roosterverdeling is met roosterconstante d dan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{vernieuwing op tijdstip } nd) \to \frac{d}{\mu}$$

$$(\text{formeel: } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\underline{s}_k = nd\}) \to \frac{d}{\mu}).$$

2) Als F een niet-roosterverdeling is dan geldt

$$m(t+a) - m(t) \to \frac{a}{\mu} \text{ als } t \to \infty, \ \forall_{a\geq 0} \ .$$

Bewijs. Zie voor 1): Feller, W., An introduction to Probability Theory and its Applications, vol. I

2): -- Vol.II.

Gevolg van Stelling 6.5. 1)

$p_n := \mathbb{P}$ (vernieuwing op tijdstip nd), $p_0 := 0$.
Het verwachte aantal vernieuwingen op tijdstip nd is

$$m(nd) = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

en op tijdstip t:

$$m(t) = \sum_{k=1}^{[t/d]} p_k \ .$$

Dus

$$m(t+nd) - m(t) = \sum_{k=[t/d]+1}^{[t/d]+n} \ .$$

Daar $p_k \to \frac{d}{\mu}$ voor $k \to \infty$ geldt

$$m(t+nd) - m(t) \to \frac{nd}{\mu} \ .$$

Voorbeeld 6.1. Beschouw een irreducibele aperiodieke Markovketen met aftelbare toestandsruimte. Als vernieuwing wordt een bezoek aan toestand i beschouwd bij start in i. De tijd tussen twee bezoeken is een rij onafhankelijk identiek verdeelde stochastische grootheden.

$$\mathbb{P}\text{(vernieuwing op tijdstip n)} = p_{ii}^{(n)} \ .$$

Volgens Stelling 6.5:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu} \ ,$$

zodat verwachte terugkeertijd in toestand i bij start in i uit de limietverdeling te berekenen is.

De volgende stelling wordt ook niet bewezen. In deze stelling wordt het limietgedrag van de vernieuwingsfunctie nader bekeken. Eerst een definitie over integreerbaarheid.

Definitie 6.2. Een functie $h(t)$, $t \geq 0$ heet direct Riemann integreerbaar als

1) $\sum\limits_{n=1} |\bar{m}_n(a)|$ en $\sum\limits_{n=1} |\underline{m}_n(a)|$ eindig zijn voor elke $a > 0$.

2) $\lim\limits_{a\to 0^+} a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a) = \lim\limits_{a\to 0^+} a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(a)$,

waarbij $\bar{m}_n(a) = \sup\limits_{t\in[(n-1)a,na]} h(t)$ en $\underline{m}_n(a) = \inf\limits_{t\in[(n-1)a,na]} h(t)$.

Een voldoende voorwaarde hiervoor is:

1) $h(t) \geq 0$, $\forall_{t\geq 0}$

2) $h(t)$ is niet-stijgend

3) $h(t)$ is Riemann-integreerbaar en $\int\limits_0^{\infty} h(t)dt < \infty$.

Stelling 6.6. (key renewal theorem)
Als F een niet-rooster distributiefunctie is en $h(t)$ is direct Riemann-integreerbaar dan

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(x)dx .$$

Bewijs. Zie Feller Vol. II.

Intuïtief is deze stelling op de volgende manier in te zien.
Volgens de Stelling van Blackwell

$$m(t+x) - m(t) \to \frac{x}{\mu} \quad \text{als } t \to \infty .$$

De staart van $h(t) \to 0$ als $t \to \infty$ zodat voor kleine x $h(t-x)$ weinig invloed heeft, vandaar dat het aannemelijk is dat

$$\int_0^t h(t-x)dm(x) \to \int_0^\infty h(x)d\,\frac{x}{\mu} \quad \text{voor } t \to \infty\ .$$

Met de Stelling van Blackwell is de key renewal stelling te bewijzen, echter uit de key renewal stelling volgt de Stelling van Blackwell zodat ze equivalent zijn, want voor

$$h(t) = 1 \qquad 0 \le t \le a$$
$$\quad = 0 \qquad \text{anders}$$

geldt voor $t \ge a$:

$$\int_0^t h(t-x)dm(x) = m(t) - m(t-a)\ ,$$

zodat

$$m(t) - m(t-a) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(x)dx = \frac{a}{\mu}\ .$$

Voorbeeld 6.2. (alternerend vernieuwingsproces)
Beschouw een systeem dat onderhevig is aan storing. Er zijn twee toestanden: "het systeem werkt" en "het systeem is buiten bedrijf".
Als het systeem buiten bedrijf is wordt het gerepareerd.
$\underline{x}_1$ is de tijd dat het systeem werkt, $\underline{y}_1$ de tijd dat het buiten bedrijf is. Daarna werkt het systeem weer, $\underline{x}_2$, en is daarna weer $\underline{y}_2$ nodig voor het herstel, enz.
$\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3,\dots$ onafhankelijk en identiek verdeeld met distributiefunctie F,
$\underline{y}_1,\underline{y}_2,\underline{y}_3,\dots$ onafhankelijk en identiek verdeeld met distributiefunctie G.
H is de distributiefunctie van $\underline{x}+\underline{y}$ en H is een niet-rooster verdeling.
$P(t) := \mathbb{P}$ (op tijdstip t is het systeem in bedrijf)
formeel:

$$P(t) := \mathbb{P}\Big(\bigcup_{N=0}^{\infty}\{\sum_{n=1}^{N}(\underline{x}_n+\underline{y}_n) \le t \wedge \sum_{n=1}^{N}(\underline{x}_n+\underline{y}_n) + \underline{x}_{n+1} > t\}\Big)\ .$$

De limietverdeling van $P(t)$ voor $t \to \infty$ wordt bepaald.

Stelling 6.7. Als E $\underline{x}_1 < \infty$ dan

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{E\underline{x}_1}{E\underline{x}_1 + E\underline{y}_1} .$$

Bewijs. $P(t) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\text{op } t \text{ systeem in bedrijf} \mid \underline{x}_1 + \underline{y}_1 = x)dH(x)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{op } t \text{ systeem in bedrijf} \mid \underline{x}_1 + \underline{y}_1 = x) &= P(t-x) \text{ als } t \geq x \\ &= \mathbb{P}(\underline{x} > t \mid \underline{x}_1 + \underline{y}_1 = x) \text{ als } x > t.\end{aligned}$$

Dus

$$P(t) = \int_0^t P(t-x)dH(x) + \int_t^\infty P(\underline{x}_1 > t \mid \underline{x}_1 + \underline{y}_1 = x)dH(x) =$$

$$= \int_0^t P(t-x)dH(x) + \int_0^\infty P(\underline{x}_1 > t \mid \underline{x}_1 + \underline{y}_1 = x)dH(x)$$

$$= \{1 - F(t)\} + \int_0^t P(t-x)dH(x) .$$

Met behulp van Stelling 6.2:

$$P(t) = 1 - F(t) + \int_0^t \{1 - F(t-x)\}dm_H(x) ,$$

waarbij

$$m_H(x) = \sum_{n=1}^\infty H_n(x) .$$

Volgens de key renewal stelling:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \{1-F(x)\}dm_H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \{1-F(x)\}dx ,$$

waarbij

$$\mu := \int_0^\infty x dH(x) = E\underline{x}_1 + E\underline{y}_1 \ .$$

Merk op dat

$$\int_0^\infty (1-F(x))dx = \int_0^\infty \int_x^\infty dF(t)dx = \int_0^\infty \int_0^t dxdF(t) = \int_0^\infty tdF(t) \ ,$$

zodat

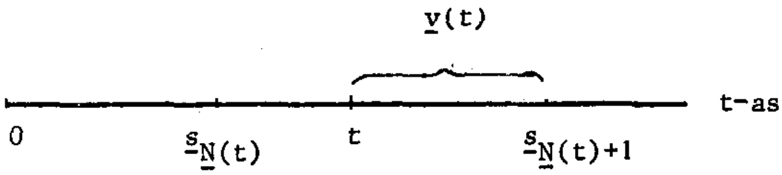
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{E\underline{x}_1}{E\underline{x}_1 + E\underline{y}_1} \ . \quad \Box$$

Er zal nu een ander aspect van het vernieuwingsproces besproken worden, nl. de <u>restlevensduur</u>.

<u>Definitie 6.3</u>. De restlevensduur $\underline{v}(t)$ is:

$$\underline{v}(t) := \underline{s}_{\underline{N}(t)+1} - t \ .$$

Dit is de wachttijd tot de eerstvolgende vernieuwing na tijdstip t.



Het limietgedrag van de kansverdeling van de resttijd wordt nu afgeleid.

<u>Stelling 6.8</u>.

$$\mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x) = F(t+x) - \int_0^t \{1 - F(t+x-y)\}dm(y)$$

en als F een niet-rooster verdeling is dan geldt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x) = \frac{\int_0^x \{1-F(t)\}dt}{\mu} \ ,$$

waarbij

$$m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \text{ en } \mu = \int_0^{\infty} x dF(x) .$$

<u>Bewijs</u>. Noem $P(t) := \mathbb{P}(\underline{v}(t) > x)$. Merk op dat

$$P(t) = \mathbb{P}\,(\text{geen vernieuwing in } (t,t+x])$$

$$P(t) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\,(\underline{v}(t) > x \mid \underline{x}_1 = y) dF(y) .$$

Er geldt:

$$\mathbb{P}\,(\underline{v}(t) > x \mid \underline{x}_1 = y) = \begin{cases} P(t-y) & \text{als } t \geq y \\ 1 & \text{als } y > t+x \\ 0 & \text{als } t < y \leq t+x \end{cases}$$

zodat

$$P(t) = \int_0^{t} P(t-y) dF(y) + \{1 - F(t+x)\}$$

met behulp van Stelling 6.2

$$P(t) = \{1 - F(t+x)\} + \int_0^{t} \{1 - F(t-y+x)\} dm(y)$$

en dus

$$\mathbb{P}\,(\underline{v}(t) \leq x) = F(t+x) - \int_0^{t} \{1 - F(t-y+x)\} dm(y) .$$

Beschouw nu eerst: $u < \infty$.

En vervolgens de key renewal stelling

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \{1 - F(t+x)\} dt = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} \{1 - F(t)\} dt ,$$

zodat

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\,(\underline{v}(t) \leq x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{x} \{1 - F(t)\} dt . \square$$

Nu het bewijs in geval $\mu = \infty$

$$\mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x) = \mathbb{P}(\underline{N}(t+x) - \underline{N}(t) > 0) = \mathbb{P}(\underline{N}(t+x)-\underline{N}(t) > \varepsilon)$$

voor $0 < \varepsilon < 1$.

Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\mathbb{P}(\underline{N}(t+x) - \underline{N}(t) > \varepsilon) \le \frac{E(N(t+x)-\underline{N}(t)}{\varepsilon} = \frac{m(t+x)-m(t)}{\varepsilon} .$$

Volgens de stelling van Blackwell

$$\mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x) = \frac{m(t+x)-m(t)}{2} - P\,\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{x}{\mu} = 0 \text{ voor } t \to \infty . \qquad \square$$

Het is eenvoudig om de <u>leeftijd</u> van het proces op tijdstip t te berekenen met behulp van Stelling 6.8.

De leeftijd $\underline{z}(t)$ is als volgt gedefinieerd:

<u>Definitie 6.4.</u> $\underline{z}(t) = t - \underline{s}_{\underline{N}(t)}$.

$$\{\underline{z}(t) > x\} = \{\text{geen vernieuwing in } [t-x,t]\} = \{\underline{v}(t-x) > x\} ,$$

zodat

$$\mathbb{P}(\underline{z}(t) > x) = \mathbb{P}(\underline{v}(t-x) > x)$$

en dus

$$\mathbb{P}(\underline{z}(t) \le x) = \begin{cases} F(t) - \displaystyle\int_0^{t-x} \{1 - F(t-y)\}dm(y) & \text{als } x \le t \\ 1 & \text{als } x > t . \end{cases}$$

Als F een niet-rooster verdeling is geldt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\underline{z}(t) \le x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \{1 - F(y)\}dy .$$

Laat de stochastische grootheid $\underline{v}$ als verdelingsfunctie hebben $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x)$ dus

$$\mathbb{P}(\underline{v} \le x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \{1 - F(t)\}dt .$$

Dan heeft $\underline{v}$ een continue kansverdeling met dichtheid:

$$f_{\underline{v}}(x) := \frac{d}{dx}\,\frac{1}{\mu} \int_0^x \{1 - F(t)\}dt = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) .$$

En dan geldt:

$$E\underline{v} = \int_0^\infty v\, f_{\underline{v}}(v)dv = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty v\,\{1 - F(v)\}dv =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty v\,\{\int_v^\infty dF(x)\}dv = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \{\int_0^x v dv\}dF(x) =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\int_0^\infty x^2 dF(x) = \frac{\mu_2}{2\mu} \text{ met } \mu_2 := \int_0^\infty x^2 dF(x)\ .$$

Daar, onder de veronderstelling dat F niet gedegenereerd is, geldt dat $\mu_2 - \mu^2 > 0$ moet $E\underline{v} > \frac{1}{2}\mu$.

Dit resultaat is intuïtief met het volgende voorbeeld te verklaren.

F is de homogene verdeling op $[0,1]$, dus $\mathbb{P}(\underline{x} \le \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(x \ge \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Op een willekeurig tijdstip t is de kans om in een lang interval te zitten groter dan in een kort.

Voor de exponentiële verdeling: $\frac{\mu_2}{2\mu} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} = \mu$.

Dikwijls gedraagt een proces zich pas na zeker moment als vernieuwingsproces. Als het proces de volgende vorm heeft spreekt men van een <u>vertraagd vernieuwingsproces</u>.

Beschouw een rij onafhankelijke stochastische grootheden $\{\underline{x}_n, n = 1,2,3,\ldots\}$ met $\underline{x}_1$ heeft distributiefunctie G en de overige hebben dezelfde distributiefunctie F.

Weer is $\underline{N}(t) := \sup\{n \mid \underline{s}_n \le t\}$.

Het proces $\{\underline{N}(t),\ t \in [0,\infty)\}$ heet een vertraagd vernieuwingsproces.

Het is niet moeilijk te bewijzen dat

1) $\frac{\underline{N}(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ als $t \to \infty$, met kans 1.

2) $\frac{m_D(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ als $t \to \infty$ $(m_D(t) := E\underline{N}(t))$.

3) als F een niet-roosterverdeling is geldt $m_D(t+a) - m_D(t) \to \frac{a}{\mu}$ als $t \to \infty$.

Zonder bewijs wordt nog vermeld dat indien

$$G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \{1 - F(t)\}dt$$

dan

$$\mathbb{P}(\underline{v}(t) \le x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \{1 - F(t)\}dt \;, \forall_{t\ge 0}$$

en bovendien geldt dan

$$m_D(t) = E\underline{N}(t) = \frac{t}{\mu} \;, \forall_{t\ge 0} \;.$$

Tot slot worden vernieuwingsprocessen met opbrengststructuur besproken (renewal reward processen).
Beschouw een vernieuwingsproces met tussen-aankomst-tijden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots$.
Iedere vernieuwing geeft een opbrengst, de eerste $\underline{y}_1$, de tweede $\underline{y}_2$, enz.
$\{(\underline{x}_n, \underline{y}_n)\}$ zijn onafhankelijk (merk op dat $\underline{x}_n$ en $\underline{y}_n$ afhankelijk mogen zijn).

$$\underline{W}(t) = \sum_{n=1}^{\underline{N}(t)} \underline{y}_n \quad \text{de opbrengst tot en met tijdstip } t.$$

Voorbeelden.

1) $\underline{y}_n = 1 \;, \forall_n$, dan is $\underline{W}(t) = \underline{N}(t)$

2) $\underline{y}_n = \underline{x}_n \;, \forall_n$, dan is $\underline{W}(t) = \underline{s}_{\underline{N}(t)}$.

In de volgende stelling iets over het limietgedrag van $\frac{\underline{W}(t)}{t}$ en van $\frac{E\underline{W}(t)}{t}$.

Stelling 6.9.

1) Met kans 1 : $\frac{\underline{W}(t)}{t} \to \frac{E\underline{y}_1}{E\underline{x}_1}$ als $t \to \infty$.

2) $\frac{E\underline{W}(t)}{t} \to \frac{E\underline{y}_1}{E\underline{x}_1}$ als $t \to \infty$.

Bewijs.

1) $$\frac{\underline{W}(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{\underline{N}(t)} \underline{y}_n}{\underline{N}(t)} \cdot \frac{\underline{N}(t)}{t} \to E\underline{y}_1 \cdot \frac{1}{E\underline{x}_1} \quad \text{met kans } 1,$$

volgens de sterke wet der grote aantallen volgens Stelling 6.3.

2) $$E\underline{W}(t) = E\left\{ \sum_{n=1}^{\underline{N}(t)+1} \underline{y}_n - \underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \right\} = E\underline{y}_1\{m(t)+1\} - E\underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \,.$$

Dus

$$\frac{E\underline{W}(t)}{t} = E\underline{y}_1 \frac{m(t)+1}{t} - \frac{1}{t} E\underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \,.$$

Als bewezen kan worden dat $\frac{1}{t} E\underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \to 0$ als $t \to \infty$ volgt het resultaat uit de elementaire vernieuwingsstelling (6.4).
Voer in: $g(t) := E\underline{y}_{\underline{N}(t)+1}$.
Dan

$$g(t) = \int_0^\infty E[\underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \mid \underline{x}_1 = x]dF(x).$$

$$\begin{aligned} E[\underline{y}_{\underline{N}(t)+1} \mid \underline{x}_1 = x] &= g(t-x) && \text{als } t \ge x \\ &= E[\underline{y}_1 \mid \underline{x}_1 = x] && \text{als } t < x \,. \end{aligned}$$

Dus

$$(*) \qquad g(t) = \int_0^t g(t-x)dF(x) + \int_t^\infty E[\underline{y}_1 \mid \underline{x}_1 = x]dF(x) \,.$$

Noem

$$h(t) := \int_t^\infty E[\underline{y}_1 \mid \underline{x} = x]dF(x) \,.$$

Daar $E|\underline{y}_1| = \int_0^\infty E[|\underline{y}_1| \mid \underline{x} = x]dF(x) < \infty$ geldt dat $|h(t)| \le E|\underline{y}_1|$ en

$h(t) \to 0$ als $t \to \infty$.

Uit (*) volgt met behulp van Stelling 6.2

$$\frac{g(t)}{t} = \frac{h(t)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t h(t-x)dm(x), \quad \text{kies } \varepsilon > 0.$$

Kies nu A zodanig dat $|h(t)| < \varepsilon$ als $t \geq A$.

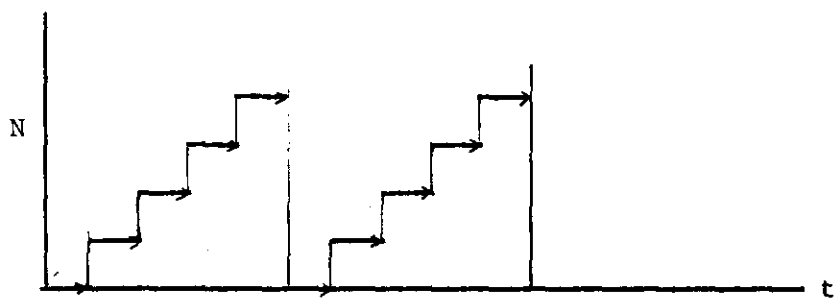
$$\frac{g(t)}{t} = \frac{h(t)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^{t-A} h(t-x)dm(x) + \frac{1}{t}\int_{t-A}^{t} h(t-x)dm(x) ,$$

zodat

$$\left|\frac{g(t)}{t}\right| \leq \left|\frac{h(t)}{t}\right| + \frac{\varepsilon}{t}\, m(t-A) + \frac{E|\underline{y}_1|}{t}\{m(t) - m(t-A)\} ,$$

hetgeen naar $\frac{\varepsilon}{E\underline{x}_1}$ nadert als $t \to \infty$. Daar ε willekeurig is volgt hieruit $\frac{g(t)}{t} \to 0$ als $t \to \infty$ waarmee de stelling bewezen is. □

<u>Voorbeeld 6.3.</u> Reizigers komen volgens een vernieuwingsproces het station binnen. De verwachte tussenaankomsttijd is μ. Steeds als er N passagiers zijn vertrekt de trein. De totale wachttijd van de passagiers tot en met tijdstip t is $\underline{W}(t)$.
Het limietgedrag van $\frac{E\underline{W}(t)}{t}$ zal bepaald worden.



Laat $\underline{x}_n$ het tijdsverschil zijn tussen de vertrektijd van de n-1-ste en de n-de trein. $\underline{y}_n$ is de totale wachttijd in de n-de periode, d.w.z. na het vertrek van de n-1-ste trein en voor het vertrek van de n-de $\{(\underline{x}_n, \underline{y}_n)\}$ is een vernieuwingsproces met opbrengsten en dus geldt:

$$\frac{E\underline{W}(t)}{t} \to \frac{E\underline{y}_1}{E\underline{x}_1} .$$

Nu is:

$$E\underline{x}_1 = N\mu \text{ en } E\underline{y}_1 = E\{\underline{\tau}_1 + 2\underline{\tau}_2 + \ldots + (N-1)\underline{\tau}_{N-1}\} ,$$

waarbij $\underline{\tau}_n$ het tijdsverschil tussen aankomst van n-de en n+1-ste reiziger.
Dus

$$E\underline{y}_1 = \tfrac{1}{2}N(N-1)E\underline{\tau}_1 = \tfrac{1}{2}N(N-1)\mu ,$$

zodat

$$\frac{E\underline{W}(t)}{t} \to \tfrac{1}{2}(N-1) \text{ als } t \to \infty.$$

§ 7. Semi Markov processen en Markov vernieuwingsprocessen

In deze paragraaf worden stochastische processen met een discrete toestandsruimte en continue tijdsparameter besproken. De toestandsovergangen gaan volgens een Markov keten, en de verblijftijd in een toestand is een stochastische grootheid.
In § 4 zijn reeds zulke processen aan de orde geweest, doch daar was de verblijftijd in een toestand steeds exponentieel verdeeld terwijl nu willekeurige verdelingen voor de verblijftijd toegelaten worden.

Beschouw het volgende stochastische proces bestaande uit paren stochastische grootheden:

$$\{(\underline{z}_n,\underline{t}_n) \mid n = 0,1,2,3,\dots\} .$$

De beeldruimte is de productverzameling

$$S\times[0,\infty)$$

waarbij S een discrete toestandsverzameling is.
De kansverdeling van het proces wordt bepaald door een Markov matrix P, gedefinieerd op S, en een collectie verdelingsfuncties $F_{ij}(t)$ waarbij $i,j \in S$ op de volgende manier.
Laat $q_i := \mathbb{P}(\underline{z}_0 = i)$.

$$\mathbb{P}(\underline{z}_0 = i_0, \underline{t}_0 \le t_0, \underline{z}_1 = i_1, \underline{t}_1 \le t_1,\dots,\underline{z}_{n-1} = i_{n-1},$$

$$\underline{t}_{n-1} \le t_{n-1}, \underline{z}_n = i_n) =$$

$$= q_{i_0}\cdot p_{i_0i_1}\cdot F_{i_0i_1}(t_0)\cdot p_{i_1i_2}\cdot F_{i_1i_2}(t_1) \dots p_{i_{n-1}i_n}\cdot F_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1}) .$$

De interpretatie hiervan is als volgt:
Met kans q_{i0} start het proces in toestand i_0. Vervolgens wordt de kans bepaald dat het proces naar toestand i_1 zal springen door de rij met nummer i_0 uit de Markov matrix P, dus van i_0 naar i_1 met kans $p_{i_0i_1}$. Daarna wordt bepaald hoe lang het proces in toestand i_0 blijft zitten als al bekend is dat naar i_1 wordt gesprongen door middel van de distributie functie $F_{i_0i_1}(t)$.

Eenvoudig is na te gaan dat

$$\mathbb{P}(\underline{z}_n = j \mid \underline{z}_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$$

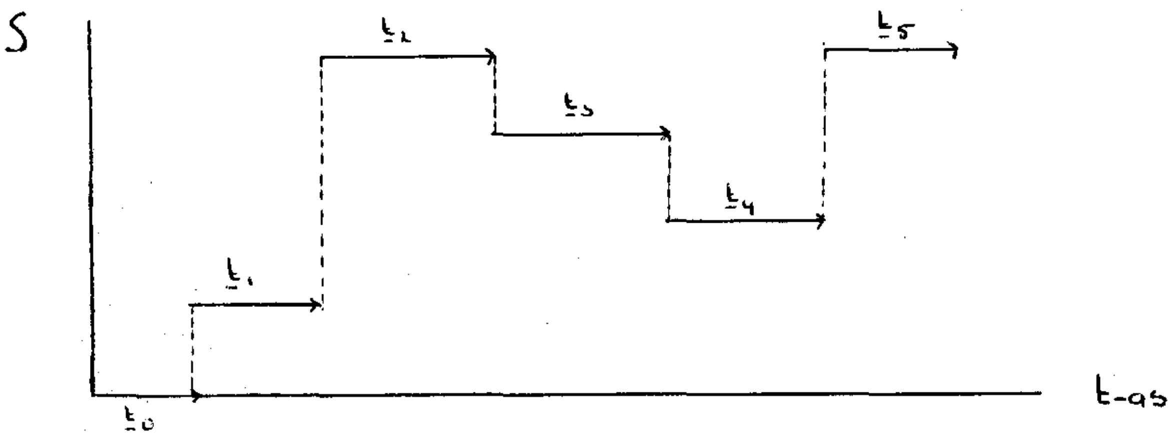
zodat $\{\underline{z}_n \mid n = 0,1,2,3,\ldots\}$ een Markov keten vormen,
Deze wordt de ingebedde Markov keten genoemd.

Definitie 6.1. Het proces $\{\underline{y}(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ wordt bepaald door

$$\underline{y}(t) = \underline{z}_{\sup\{n \mid \underline{t}_0 + \underline{t}_1 + \ldots + \underline{t}_{n-1} < t\}}$$

en heet een semi-Markov proces.

Het semi-Markov proces geeft aan in welke toestand het proces $\{(\underline{z}_n, \underline{t}_n)\}$ op tijdstip t zit.



Definitie 6.2. Laat $\underline{N}_i(t) := \# \{n \mid \underline{z}_n = i,\ \underline{t}_0 + \underline{t}_1 + \ldots + \underline{t}_{n-1} < t\}$ en

$$\underline{N}(t) := (\underline{N}_0(t), \underline{N}_1(t), \underline{N}_2(t), \ldots) .$$

Het stochastische proces $\{\underline{N}(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ heet een Markov vernieuwingsproces (Markov renewal process).

Een Markov vernieuwingsproces is een proces waarbij de toestanden vektoren zijn, met eventueel ∞ veel komponenten.
Eenvoudig is in te zien dat uit het Markov vernieuwingsproces het semi-Markov proces is te construeren als de begintoestand $\underline{z}_0$ gegeven is, en als $\underline{M}(t) < \infty$ met kans 1 (zie definitie van $\underline{M}(t)$ verder op).

Als voor de Markov matrix P geldt dat $p_{ii} = 0$, $\forall i \in S$, dan bepaalt het semi-Markov proces het Markov vernieuwingsproces. Als echter $p_{ii} > 0$ dan is dit niet waar. Kies maar eens het semi-Markov proces met een toestandsruimte bestaande uit 1 toestand (i_0). Het semi-Markov proces $\underline{y}(t)$ is constant, het Markov vernieuwingsproces is echter een vernieuwingsproces met vernieuwingsverdeling $F_{i_0 i_0}(t)$.

Er worden nog enige grootheden ingevoerd.

1) $\underline{M}(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \underline{N}_i(t)$, het totaal aantal sprongen voor tijdstip t.

2) $H_i(t) := \sum_{j\in S} p_{ij}.F_{ij}(t)$, de kans dat het proces een sprong maakt voor tijdstip t gegeven dat het proces op tijdstip 0 in i zit.

3) $G_{ij}(t) := \mathbb{P}(\underline{N}_j(t) > 0 \mid \underline{y}(0) = i)$, de kans om voor tijdstip t in toestand j te zijn (geweest) bij start in i.

4) $\mu_k := \int_0^{\infty} x \, dH_k(x)$, de verwachte verblijftijd in toestand k.

5) $\mu_{ij} := \int_0^{\infty} x \, dG_{ij}(x)$, de verwachte tijd die nodig is om van i naar j te gaan.

Steeds wordt verondersteld dat

$$\exists_{\alpha>0,\varepsilon>0} \; 1 - Hi(\alpha) > \varepsilon, \; \forall i \in S$$

deze voorwaarde impliceert: $F_{ij}(\alpha) < 1 - \varepsilon$, $\forall i,j \in S$ met $p_{ij} > 0$. Zonder bewijs wordt vermeld dat onder deze voorwaarde $\underline{N}_i(t) < \infty$ met kans 1, $\forall i \in S$. (Het bewijs gaat analoog aan het bewijs in § 5, bewijs zelf.) Bovendien geldt $\mathbb{P}(\underline{M}(t) = \infty \mid \underline{z}_0 = i) = 0$, $\forall i \in S$.

Voorbeelden.

1) $$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 1 , \\ 1 & \text{als } t \geq 1 . \end{cases}$$

Het semi-Markov proces is dan een Markov keten, identiek aan de ingebedde Markov keten waarbij de tijd continu genomen wordt.

2) $F_{ij} = 1 - e^{-\lambda i(t)}$.

Nu is het semi-Markov proces een Markov proces met continue tijdsparameter.

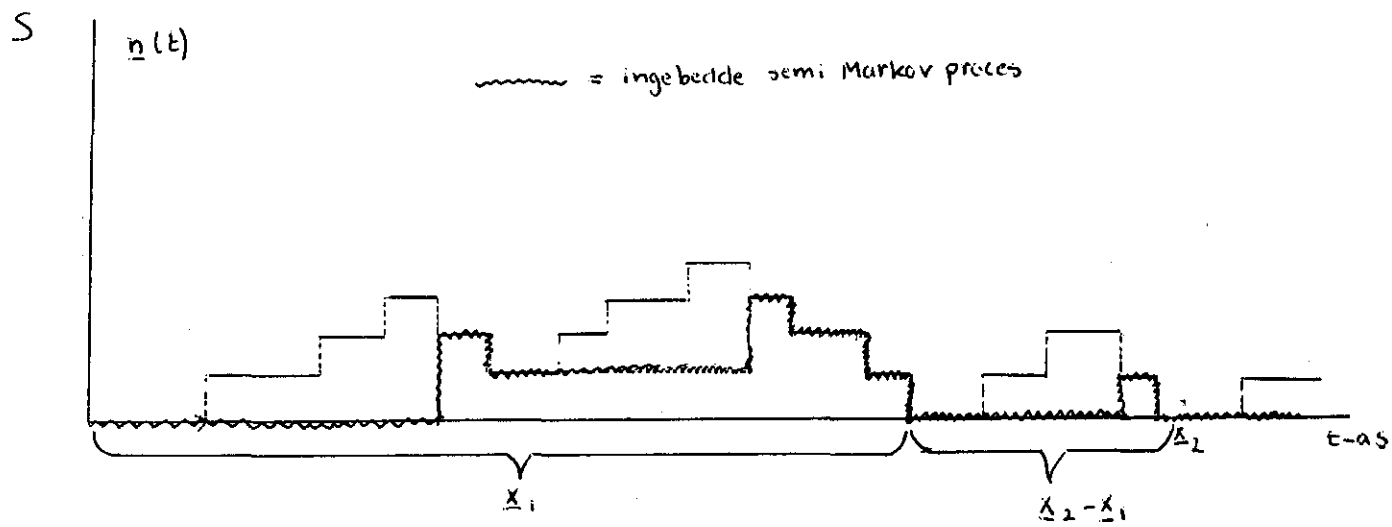
3) Het alternerend vernieuwingsproces

$$S = \{0,1\},\ p_{01} = p_{10} = 1,\ F_{10}(t) = F(t),\ F_{01}(t) = G(t)\ .$$

(Zie voorbeeld 6.2.)

4) Beschouw een wachtrij systeem waar klanten volgens een Poisson proces binnenkomen en een bedieningstijd hebben die een distributie functie F heeft. Noem het tijdstip waarop het systeem voor het eerst leeg is $\underline{x}_1$, voor de tweede maal $\underline{x}_2$ enz. Dan bepaalt de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2 - \underline{x}_1, \underline{x}_0 - \underline{x}_2, \ldots$ een vernieuwingsproces.

Het proces dat op de volgende wijze verkregen wordt is een semi Markov-proces: $\underline{z}(t) = n$ als er de laatste keer (voor t) dat er een klant het systeem verliet n klanten overbleven. Dit proces wordt wel het ingebedde semi-Markov proces van het wachtrij systeem genoemd.



Analoog aan Markov ketens kan de toestandsruimte verdeeld worden in klassen van verbonden toestanden:

1) $i \to j : \Leftrightarrow G_{ij}(\infty) > 0.$

2) $i \leftrightarrow j : \Leftrightarrow G_{ij}(\infty).G_{ji}(\infty) > 0.$

Een semi-Markov proces heet irreducibel als er steeds één klasse van verbonden toestanden is.

Een toestand i heet recurrent als $G_{ii}(\infty) = 1$ en transient als $G_{ii}(\infty) < 1$. En i heet positief recurrent als i recurrent is en $\mu_{ii} < \infty$. Als i recurrent is en $\mu_{ii} = \infty$ dan is i nulrecurrent. Zonder bewijs wordt vermeld dat in een semi-Markov proces toestand i dan en dan alleen recurrent is als deze in de ingebedde Markov keten recurrent is. Het zelfde geldt voor verbonden zijn.

Nu zal er een stelling besproken worden over het limietgedrag van een semi-Markov proces.

Stelling 6.1. Laat $\{\underline{y}(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ een semi-Markov proces zijn met de volgende eigenschappen:

1) het proces is irreducibel.
2) $\mu_{jj} < \infty$.
3) $G_{jj}(x)$ is een niet-rooster verdeling voor alle $j \in S$.

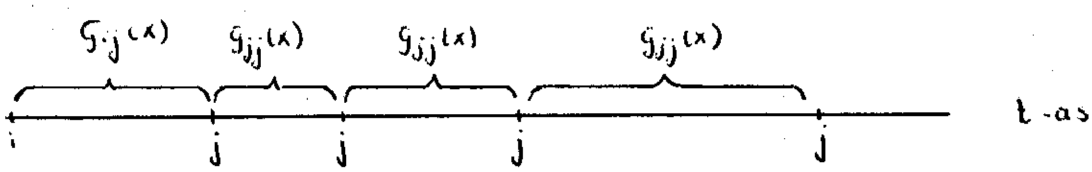
Laat verder $\underline{z}_n$ de ingebedde Markov keten zijn en

$$p_k := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\underline{z}_n = k \mid \underline{z}_0 = i) .$$

Dan geldt:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = i) = \frac{p_j \mu_j}{\sum_{k\in S} p_k \mu_k} .$$

Bewijs. De tijdstippen van binnenkomst in toestand j vormen een (vertraagd) vernieuwingsproces.



Voer in: $\underline{x} = \inf\{t \mid \underline{N}_j(t) > 0\}$. Dus $\underline{x}$ is het tijdstip waarop het proces voor het eerst in j komt. $\mathbb{P}(\underline{x} \le t \mid \underline{y}(0) = i) = G_{ij}(t)$.

$$\mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = i) = \int_0^t \mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = i, \underline{x} = x)\, dG_{ij}(x) =$$

$$= \int_0^t \mathbb{P}(\underline{y}(t - x) = j \mid \underline{y}(0) = j)\, dG_{ij}(x) .$$

Evenzo voor start in toestand j:

$$\mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = j) = \int_0^t \mathbb{P}(\underline{y}(t - x) = j \mid \underline{y}(0) = j).dG_{jj}(x) + $$

$$+ \{1 - H_j(t)\} .$$

Noem: $P(t) := \mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = j)$.
Hier staat dus weer een vernieuwingsachtige vergelijking waarvan de oplossing volgens stelling 6.2 is

$$P(t) = \int_0^t \{1 - H_j(t - x)\}dm_{jj}(x) + \{1 - H_j(t)\}$$

waarbij $m_{jj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{jj}^{*n}(x)$, met $G_{jj}^{*n}(x)$ de n-voudige convolutie van $G_{jj}(x)$.
Met behulp van de key renewal stelling:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{\mu_{jj}} \int_0^{\infty} \{1 - H_j(t)\}dt = \frac{\mu_j}{\mu_{jj}} .$$

(Dit resultaat volgt ook onmiddellijk uit stelling 6.7 waarbij $\underline{x}_1$ = verblijftijd in toestand j en $\underline{y}_1$ = terugkeertijd tot toestand j).
Eenvoudig is na te gaan dat

$$\mu_{ij} = \mu i + \sum_{k\neq j} p_{ik}\cdot\mu_{kj} .$$

Zodat ook voor de limiet verdeling $\{p_k\}$ geldt:

$$\sum_{i\in S} p_i\cdot\mu_{ij} = \sum_{i\in S} p_i\cdot\mu_i + \sum_{i\in S} p_i \sum_{k\neq j} p_{ik}\cdot\mu_{kj} =$$

$$= \sum_{i\in S} p_i\cdot\mu_i + \sum_{k\neq j} \{\sum_{i\in S} p_i\cdot p_{ik}\}\mu_{kj} =$$

$$= \sum_{i\in S} p_i\cdot\mu_i + \sum_{k\neq j} p_k\cdot\mu_{kj} .$$

Waaruit volgt:

$$p_j\mu_{jj} = \sum_{i\in S} p_i\mu_i .$$

Dus:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{p_j \mu_j}{\sum_{i\in S} p_i \mu_i} ,$$

waarmee de stelling bewezen is voor $\underline{y}(0) = j$.
Voor start in i geldt voor $0 < A < t$:

$$\mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = i) = \int_0^A P(t-x)dG_{ij}(x) + \int_A^t P(t-x)dG_{ij}(x) .$$

Merk op dat $|P(t-x)| \le 1$ dus

$$\left| \int_A^t P(t-x)dG_{ij}(x) \right| \le G_{ij}(t) - G_{ij}(A) .$$

Met de gedomineerde convergentiestelling:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^A P(t-x)dG_{ij}(x) = \int_0^A \frac{p_j \mu_j}{\sum_{i\in S} p_i \mu_i} dG_{ij}(x) = \frac{p_j \mu_j}{\sum_{i\in S} p_i \mu_i} G_{ij}(A) .$$

Dus:

$$\forall A: \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\underline{y}(t) = j \mid \underline{y}(0) = i) = \frac{p_j \mu_j}{\sum_{i\in S} p_i \mu_i} G_{ij}(A) + \delta(A)$$

waarbij $\delta(A) \downarrow 0$ als $A \to \infty$.
Hiermee is de stelling bewezen. □

Tot slot wordt nog een opbrengst structuur beschouwd.
Laat $\underline{w}_n(i)$ de opbrengst zijn, als het proces voor de n-de maal in toestand i komt.
De kansverdeling van $\underline{w}_n(i)$: $G_i(x) = \mathbb{P}(\underline{w}_n(i) \le x)$ hangt niet van n af. Bovendien zijn $\underline{w}_1(i), \underline{w}_2(i), \underline{w}_3(i), \ldots$ onafhankelijk. Laat

$$q_i := \int_0^\infty x \, dG_i(x) .$$

De totale opbrengst tot tijdstip t is $\underline{v}(t)$ en is als volgt gedefinieerd:

$$\underline{v}(t) := \sum_{i\in S} \sum_{n=1}^{\underline{N}_i(t)} \underline{w}_n(i) \;.$$

Indien S eindig is wordt het limietgedrag van $\frac{\underline{v}(t)}{t}$ op de volgende wijze bepaald.

$$\frac{\underline{v}(t)}{t} = \sum_{i\in S} \left\{\frac{\sum_{n=1}^{\underline{N}_i(t)} \underline{w}_n(i)}{\underline{N}_i(t)} \cdot \frac{\underline{N}_i(t)}{t}\right\} .$$

Met kans 1 geldt:

$$\frac{\underline{N}_i(t)}{t} \to \frac{1}{\mu_{ii}} \quad \text{en} \quad \frac{\sum_{n=1}^{\underline{N}_i(t)} \underline{w}_n(i)}{\underline{N}_i(t)} \to q_i, \text{ als } t \to \infty \;.$$

Zodat

$$\frac{\underline{v}(t)}{t} \to \frac{\sum_{i\in S} q_i}{\mu_{ii}}$$

met kans 1 als $t \to \infty$.

Uit het bewijs van stelling 6.1 blijkt dat

$$\mu_{ii} = \frac{\sum_{j\in S} p_j \mu_j}{p_i}$$

zodat

$$\frac{\underline{v}(t)}{t} \to \frac{\sum_{i\in S} q_i p_i}{\sum_{i\in S} p_i \mu_i}$$

met kans 1, als $t \to \infty$.