TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

STOCHASTISCHE PROCESSEN II

Syllabus naar het college van

Prof. Dr. J. Wessels

samengesteld door

Drs. W.H.M. Zijm

Najaarssemester 1978

Bibl wsk

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Stochastische processen II

Syllabus naar het college van prof. dr. J. Wessels
Samengesteld door drs. L.P.J. Groenewegen

Dictaatnr. 2.229 Prijs f 5,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Stochastische Processen II

Syllabus naar het college van

Prof. Dr. J. Wessels

samengesteld door drs. W.H.M. Zijm

najaarssemester 1978

Inhoud

0. Inleiding

Het college Stochastische Processen II zal bestaan uit een algemeen theoretisch gedeelte, waarin een aantal begrippen op tamelijk formele wijze worden ingevoerd en uitgewerkt en, vervolgens, toepassingen in:

a Spectraalanalyse van stochastische processen

We pogen een proces weer te geven als superpositie van zuiver harmonische trillingen. Feitelijk betekent dit dat we een stochastisch proces als volgt proberen te schrijven:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda$$

of:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Z(j)e^{-it\lambda_j}$$

waarin $\{X(t)|t \in T\}$ en $\{Z(\lambda)|\lambda \in \Lambda\}$ stochastische processen zijn met continue tijdsparameter, en $\{Z(j)|j = 1,2....\}$ een stochastisch proces met discrete tijdsparameter is.

De reden hiervoor is dat processen, die op deze manier te schrijven zijn, zich uitstekend lenen voor allerlei berekeningen. Voorbeelden hiervan vinden we in het tweede onderwerp van dit college, de

b Filtertheorie

Onder een filter verstaan we een mechanisme, dat een proces, de "input", omvormt tot een ander proces, de "output"; een filter is dus feitelijk een transformatie (beide termen worden gebruikt). Voorbeelden:

1 Ruisfilter, b.v. om een signaal in een telefoonverbinding terug te vinden, wanneer het vervormd is.

2 Versterkers, schokdempers (verandering van amplitude en frequentie).

3 Bij het analyseren van veel sociaal-economische processen worden filters toegepast om voor allerlei toevallige fluctuaties te corrigeren.

Het geboortecijfer b.v. wordt bepaald door een normaal, periodiek, verloop + trendverschijnselen + toevallige fluctuaties. We kunnen schrijven:

$$\underbrace{X(t)}_{\text{waarneembaar proces}} = \underbrace{Y(t)}_{\text{basis proces}} + \underbrace{Z(t)}_{\text{toevallige fluctuaties}}$$

We zoeken nu naar een filter, zódanig dat voor Z(t) gecorrigeerd wordt:

$$X(t) \rightarrow \boxed{\text{filter}} \rightarrow Y(t)\ .$$

4 Meetfouten: ook meetfouten kunnen in principe op deze wijze gecorrigeerd worden. Wanneer weer:

$$\underbrace{X(t)}_{\text{gemeten proces}} = \underbrace{Y(t)}_{\text{zuiver proces}} + \underbrace{Z(t)}_{\text{meetfouten}}$$

dan zoeken we naar een transformatie welke X(t) in Y(t) overvoert.

5 Voorspellen: het voorspellen in tijdreeksen kan worden gezien als een toepassing van filtertheorie, n.l.: gebruik een filter welke X(t) zo goed mogelijk in $X(t + k)$, $k \in \mathbb{N}$ overvoert.

Beschouwen we nu b.v. het filter, gedefinieerd door de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} + FC_i(t) = GC_u(t)$$

waarin $\{C_i(t)\,|\,t \in T\}$ het ingangsproces en $\{C_u(t)\,|\,t \in T\}$ het uitgangsproces is, dan blijken deze filters eenvoudiger hanteerbaar te zijn, wanneer we de processen als een soort Fouriertransformaties kunnen zien, m.a.w. als een combinatie van e-machten kunnen schrijven (zie a).

Merk op dat bovenstaand filter lineair is.

N.B. Differentiëren van stochastische processen komt in dit college nader aan de orde.

c Het voorspellen en interpoleren van procesrealisaties en het schatten van procesrealisaties bij meetfouten (ruisfilters), o.a. met behulp van de ontwikkelde spectraal- en filtertheorie.

Voor niet-wiskunde studenten is het mogelijk tentamen te doen over een boek of een gedeelte daarvan (b.v. Papoulis [1]), dat ongeveer dezelfde stof behandelt.

Aan het eind van ieder hoofdstuk volgt een overzicht van de literatuur, waaraan gerefereerd wordt.

De apart te geven oefeningen vormen een essentieel onderdeel van het college en dienen vooral om de formele theorie te concretiseren.

In het vervolg wordt met SP bedoeld: stochastisch(e) proces(sen).

Referenties

[1] Papoulis, A.: Probability, random variables and stochastic processes, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

§ 1. Algemene theorie, basisbegrippen

Met een stochastisch proces bedoelen we praktisch een proces waarvan de realisatie - dat is dus een funktie van de tijd - in enige mate door het toeval bepaald wordt. Dit uitgangspunt suggereert een definitie gebaseerd op het idee dat een tijdsfunktie volgens een of andere kansverdeling uit een verzameling van tijdsfunkties wordt getrokken.

Definitie 1.1. Zij X en $T \subset \mathbb{R}$ verzamelingen;
zij Ω een verzameling afbeeldingen van T in X (met F een σ-algebra van deelverzamelingen van Ω);
zij $\mathbb{P}$ een kansmaat op (Ω,F);
dan leggen $X,T,\Omega,F,\mathbb{P}$ een stochastisch proces vast met toestandsruimte X en tijdsruimte T.

Opmerking. Zoals in de colleges Wiskunde 31/49 en Kansrekening en Statistiek uiteengezet wordt, is voor de definitie van een kansveld naast de mogelijkhedenverzameling (hier Ω) een klasse van te beschouwen uitkomsten (deelverzamelingen van Ω) nodig. Deze klasse dient een speciale structuur te bezitten en wordt σ-algebra genoemd. (zie college Kansrekening en Statistiek § 1.1 en 1.6 en voor verdere detaillering de colleges Maat- en Integratietheorie en Voortgezette Kansrekening, of de referenties Papoulis [5], § 2.2, Fabius en Van Zwet [2], § 1.2, 1.5 en 2.1, Feller [3], hoofdstuk 1).

Simpele voorbeelden met $T = [0,\infty)$ en $X = \mathbb{R}$:

1. $\Omega = \{t,t^2\}$, loten met gelijke kansen.
2. $\Omega = \{\cos(t + \varphi) \,|\, \varphi \in [0,2\pi)\}$, loten volgens uniforme verdeling voor φ.
3. $\Omega = \{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \,|\, n \in \mathbb{N}$, vast; $a_k \in [0,1]$, $k = 0,\ldots,n\}$, loten van coëfficiënten volgens uniforme verdeling.

In deze voorbeelden ligt de realisatie onmiddellijk na het begin vast.

Om het mogelijk te maken meerdere stochastische processen tegelijk te beschrijven buigen we de definitie iets om, zodat Ω niet langer een verzameling tijdsfunkties is, maar die funkties indiceert.

<u>Definitie 1.2</u>. Zij X en $T \subset \mathbb{R}$ verzamelingen (met $\mathcal{B}$ een σ-algebra van deelverzamelingen van X);
zij Ω een verzameling (met F een σ-algebra van deelverzamelingen van Ω);
zij $\mathbb{P}$ een kansmaat op (Ω,F);
zij x een afbeelding van $T \times \Omega$ in X (notatie voor het beeld van (t,ω) : $x(t,\omega)$)
zódanig dat $\{\omega | x(t,\omega) \in A\} \in F$ voor alle $A \in \mathcal{B}$ en $t \in T$ (m.a.w. $x(t,\cdot)$ is een meetbare afbeelding van Ω in X);
dan leggen $X,\mathcal{B},T,\Omega,F,\mathbb{P},x$ een stochastisch proces vast met toestandsruimte X en tijdsruimte T.

Vb.: $\Omega = [0,1)$, $X = \mathbb{R}$, $T = [0,\infty)$. $\mathbb{P}$ = lengtemaat:

$$x_1(t,\omega) = \cos(t + 2\pi\omega)$$

$$x_2(t,\omega) = \begin{cases} t & \text{als } \omega < \frac{1}{2} \\ t^2 & \text{als } \omega \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

en met $\Omega = \{(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n) | \omega_i \in [0,1),\ i = 0,\ldots,n\}$, $X \subset \mathbb{R}$, $T \subset [0,\infty)$,
$\mathbb{P}$ = "inhoudsmaat":

$$x_3(t,\omega_0,\ldots,\omega_n) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k t^k .$$

We zullen ons in dit college beperken tot het geval $X \subset \mathbb{R}^k$ of $X \subset \mathbb{C}^k$, T is een interval in $\mathbb{R}$ of in $\mathbb{Z}$ (grenzen ∞ en $-\infty$ toegestaan). Voor die situatie is definitie 1.2 gelijkwaardig met:

<u>Definitie 1.2'</u>: Zij T een interval in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Z}$, X een Borel verzameling in $\mathbb{R}^k$ of $\mathbb{C}^k$; zij $(\Omega,F,\mathbb{P})$ een kansveld;
zij $X(t)$ voor $t \in T$ een stochastische vector op $(\Omega,F,\mathbb{P})$ met voor elke t waarden in X;
dan heet de familie stochastische vectoren $\{X(t) | t \in T\}$ een <u>stochastisch proces</u> met toestandsruimte X en tijdsruimte T.

Vb.: $\Omega = [0,1)$, $X = \mathbb{R}$, $T = [0,\infty)$, $\mathbb{P}$ = lengtemaat:

$$X_1(t) = \cos(t + 2\pi\omega)$$

$$X_2(t) = \begin{cases} t & \text{als } \omega < \frac{1}{2} \\ t^2 & \text{als } \omega \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

en met $\Omega = \{(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n) \mid \omega_i \in [0,1),\ i = 0,\ldots,n\}$, $X = \mathbb{R}$, $T = [0,\infty)$
$\mathbb{P}$ = inhoudsmaat:

$$X_3(t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k t^k .$$

Voor een SP$\{X(t) \mid t \in T\}$ definiëren we:

$$F_t(a) := \mathbb{P}(X(t) \leq a) = \mathbb{P}(\{\omega \mid x(t,\omega) \leq a\})$$

($\leq$ voor vectoren is gedefinieerd als $\leq$ voor alle componenten).
Algemeen:

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n) := \mathbb{P}(X(t_1) \leq a_1,\ldots, X(t_n) \leq a_n) =$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \mid x(t_1,\omega) \leq a_1,\ldots,x(t_n,\omega) \leq a_n\})$$

voor alle $t_1,\ldots,t_n \in T$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^k$ (of $\mathbb{C}^k$), $n \in \mathbb{N}$.
Nu geldt:

<u>Stelling 1.1.</u>

a) $F_{t_1,\ldots,t_n}(\infty,\ldots,\infty) := \lim\limits_{(a_1,\ldots,a_n)\to(\infty,\ldots,\infty)} F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n) = 1$;

b) $F_{t_1,\ldots,t_n}(-\infty,a_2,\ldots,a_n) := \lim\limits_{a_1\to-\infty} F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n) = 0$;

c) $F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n)$ is monotoon niet-dalend en kontinu van rechts in elke variabele a_k;

d) $F_{t_1,\dots,t_n}(\infty,a_2,\dots,a_n) := \lim_{a_1\to\infty} F_{t_1,\dots,t_n}(a_1,\dots,a_n) = F_{t_2,\dots,t_n}(a_2,\dots,a_n)$;

e) Zij $\tau_1,\dots,\tau_n$ een permutatie van $t_1,\dots,t_n$ en $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de overeenkomstige permutatie van $a_1,\dots,a_n$, dan geldt:

$$F_{\tau_1,\dots,\tau_n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(a_1,\dots,a_n) .$$

De definities 1.2 en 1.2' bieden alleen houvast voor het bewijzen van zeer algemene stellingen, aangezien de structuur van het kansveld $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ in beide gevallen snel ingewikkeld wordt. Zelfs het aangeven van het kansveld voor een concreet proces kan al vrijwel onoverkomelijk zijn.

Het is aantrekkelijker om uitsluitend met de door het proces voortgebrachte familie verdelingsfunkties te werken. Dit wordt mogelijk gemaakt, doordat Kolmogorov bewezen heeft dat ook omgekeerd zo'n familie een stochastisch proces vastlegt:

<u>Stelling 1.2.</u>

Zij T een verzameling; zij een familie distributiefunkties gegeven bevattende voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke groep $t_1,\dots,t_n \in T$ een n-dimensionale distributiefunktie $F_{t_1,\dots,t_n}$ met alle argumenten steeds in dezelfde $\mathbb{R}^k$ (of $\mathbb{C}^k$), terwijl de klasse tevens eigenschappen d) en e) uit stelling 1.1 bezit;
dan is er een stochastisch proces met toestandsruimte $\mathbb{R}^k$ (of $\mathbb{C}^k$) en tijdsruimte T waarvoor precies geldt:

$$\mathbb{P}(X(t_1) \le a_1,\dots,X(t_n) \le a_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(a_1,\dots,a_n)$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} ; \forall_{t_1,\dots,t_n} \in T ; \forall_{a_1,\dots,a_n} \in \mathbb{R}^k \text{ (of } \mathbb{C}^k) .$$

We geven hieronder een schets van de bewijsmethode voor het geval k = 1 (voor een volledig bewijs zie b.v. Yeh [6], hoofdstuk 1, § 2).

Voor een deelverzameling U van T definiëren we:

$$\mathbb{R}^U := \prod_{t\in U} \mathbb{R}_t \quad \text{met} \quad \mathbb{R}_t = \mathbb{R}, \quad \forall t \in T .$$

Laat nu $\Omega := \mathbb{R}^T$ en laat F_0 de verzameling van alle cilinderverzamelingen met eindige basis zijn:

$$F_0 = \{A = \prod_{i=1}^{n} (a_i,b_i] \times \mathbb{R}^{T\setminus\{t_1,\dots,t_n\}} \mid (a_i,b_i] \subset \mathbb{R}_{t_i} ;\ n \in \mathbb{N} ; \{t_1,\dots,t_n\} \subset T\}$$

Zij verder $F := \sigma(F_0)$ met $\sigma(F_0)$ de kleinste σ-algebra die F_0 omvat.
Op F_0 definiëren we nu een verzamelingsfunktie (die zoveel mogelijk op de gewenste kansmaat lijkt) en wel als volgt:

$$\text{op } A = (a_k,b_k] \times \mathbb{R}^{T\setminus\{t_k\}}, \qquad (a_k,b_k] \subset \mathbb{R}_{t_k}$$

$$\mathbb{P}(A) = F_{t_k}(b_k) - F_{t_k}(a_k)$$

$$\text{op } A = (a_k,b_k] \times (a_\ell,b_\ell] \times \mathbb{R}^{T\setminus\{t_k,t_\ell\}}, \ (a_k,b_k] \subset \mathbb{R}_{t_k}, (a_\ell,b_\ell] \subset \mathbb{R}_{t_\ell}$$

$$\mathbb{P}(A) = F_{t_k,t_\ell}(b_k,b_\ell) - F_{t_k,t_\ell}(a_k,b_\ell) - F_{t_k,t_\ell}(b_k,a_\ell) + F_{t_k,t_\ell}(a_k,a_\ell)$$

enz.

De verzamelingsfunktie $\mathbb{P}$ op F_0 kan nu op eenduidige wijze worden voortgezet tot een kansmaat op F m.b.v. de voortzettingsstelling (zie: Voortgezette Kansrekening, appendix, stelling A 2.7).
We hebben nu een σ-algebra F_0 van deelverzamelingen van Ω, en een kansmaat $\mathbb{P}$. Definiëren we tenslotte een SP.:

$$\{X(t) \mid t \in T\} \qquad \text{met } x(t,\omega) = \omega_t$$

waarbij $\{\omega\}$ de éénpuntverzamelingen uit Ω zijn met "t^e coordinaat" ω_t, dan geldt:

$$\mathbb{P}(X(t_1) \le a_1,\dots,X(t_n) \le a_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(a_1,\dots,a_n) .$$

Voorbeelden:

1. Discrete Markov-ketens, met T aftelbaar ($T = \{0,1,2,\ldots\}$) .

$$F_{0,\ldots,n}(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{i_0=0}^{a_0} \sum_{i_1=0}^{a_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{a_n} p_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} .$$

2. $T = (0,\infty)$

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n) = \begin{cases} 0 & \text{als } \exists \ell : a_\ell < \min\{t_\ell,t_\ell^2\} \\ 0 & \text{als } \exists \ell \exists k : 0 < a_\ell < 1 < a_k,\ t_\ell^2 < a_\ell < t_\ell,\ t_k < a_k < t_k^2 \\ 1 & \text{als } \forall \ell : a_\ell \geq \max\{t_\ell,t_\ell^2\} \\ \tfrac{1}{2} & \text{elders .} \end{cases}$$

Belangrijke voorbeelden vinden we ook in de klasse van z.g. Gauss- of normale processen, die hieronder gedefinieerd worden.

Definitie 1.3. Laat $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ een $n \times n$ symmetrische positief-definiete matrix zijn en $m = (m_i)_{i=1}^n$ een vector in $\mathbb{R}^n$. Laat verder $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n := A^{-1}$ en $|B| = \det B$, dan heet:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = [(2\pi)^{\frac{n}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}]^{-1} \exp[-\tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$

de n-dimensionale normale dichtheidsfunktie.
Als $X_1,\ldots,X_n$ stochastische grootheden zijn, waarvoor de simultane verdelingsfunktie wordt gegeven door:

$$F(a_1,\ldots,a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1,\ldots,dx_n$$

dan geldt

$$\mathbb{E}X_i = m_i \ ; \ \sigma^2(X_i) = a_{ii}, \quad \operatorname{cov}(X_i,X_j) = a_{ij} \quad (i \neq j)$$

F wordt de multinormale verdelingsfunktie genoemd.

Definitie 1.4. Een stochastisch proces met toestandsruimte $\mathbb{R}$ en parameterruimte T heet een Gauss-proces (of normaal proces) als elke eindig dimensionale verdelingsfunktie $F_{t_1,\ldots,t_n}$ een (multi-)normale verdelingsfunktie is.

Opmerking. Er is een zekere samenhang tussen de elementen van de familie verdelingsfunkties van een normaal proces. Stelling 1.1. d) zegt dat we voor $a_i = \infty$ de i-de rij en kolom van de matrix A weg kunnen laten, stelling 2.2 e) betekent dat permutaties van rijen (en dan overeenkomstige permutaties van kolommen) van A zijn toegestaan. Altijd blijft gelden:
$\mathbb{E}X(t_i) = m_i$; $\sigma^2(X(t_i)) = a_{ii}$; $\mathrm{cov}(X(t_i),X(t_j)) = a_{ij}$.

Uit stelling 1.2 volgt dat een stochastisch proces in hoge mate wordt bepaald door een familie van verdelingsfunkties (niet helemaal: een familie verdelingsfunkties bepaalt niet één en slechts één stochastisch proces). In principe opent dit echter ook de mogelijkheid het proces vast te leggen door een "voortgangsmechanisme": de kans op een bepaalde voortzetting gegeven een eindig aantal punten uit de historie (zie voorbeeld 1, waar een voortgangsmechanisme optreedt, welke zelfs onafhankelijk van het verleden is). Dus: gegeven:

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1}) = a_{n+1} \mid X(t_1) = a_1,\ldots,X(t_n) = a_n) ,$$

met de overeenkomstige voorwaardelijke kansdichtheid

$$f_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(a_{n+1} \mid a_1,\ldots,a_n) ,$$

is eenvoudig in te zien, dat, mits deze voorwaardelijke kansen (kansdichtheden) in voldoende mate bestaan, ze de familie distributiefunkties uit stelling 1.2 vastleggen en omgekeerd. We hebben immers (in het geval van b.v. kansdichtheden):

$$f_{t_1,\ldots,t_{n+1}}(a_1,\ldots,a_{n+1}) =$$

$$f_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(a_{n+1} \mid a_1,\ldots,a_n) f_{t_1,\ldots,t_n}(a_1,\ldots,a_n) .$$

De relatie, van rechts naar links gebruikt, opent de mogelijkheid, recursief de verdelingsdichtheden, en dus de verdelingsfunkties en een stochastisch proces te bepalen.

Voor discrete tijd wordt een nauwkeuriger formulering geleverd door de volgende stelling, afkomstig van Ionescu Tulcea.

<u>Stelling 1.3</u>. Laat $\{(E_n,F_n);\ n = 0,1,2,\ldots\}$ een aftelbare verzameling meetbare ruimten zijn, $E_n = \mathbb{R}^k$ (of $\mathbb{C}^k$) voor $n = 0,1,2,\ldots$, en laat, voor iedere n, een funktie $G_n(a_n|a_0,\ldots,a_{n-1})$, gedefinieerd op $\{(E_0,F_0),\ldots,(E_n,F_n)\}$ gegeven zijn, zódanig, dat voor vaste $a_0,\ldots,a_{n-1}$ $G_n(a_n|a_0,\ldots a_{n-1})$ een distributiefunktie is op (E_n,F_n). Dan bestaat er een stochastisch proces met toestandsruimte $\mathbb{R}^k$ (of $\mathbb{C}^k$) en discrete tijdsruimte, en een unieke kansmaat $\mathbb{P}$ zódanig dat:

$$\mathbb{P}(X(0) \in A_0,\ldots,X(n) \in A_n) =$$

$$= \int_{a_n \in A_n} \cdots \int_{a_0 \in A_0} G_n(da_n|a_0,\ldots,a_{n-1})\ldots G_1(da_1|a_0)G_0(da_0)$$

$$\forall n\ ,\quad \forall A_i \in F_i\ ;\qquad i = 0,\ldots,n$$

Voor bewijs: zie Neveu [4].

Resumerend zien we dat er verschillende manieren zijn om een stochastisch proces te karakteriseren, n.l.:

<u>1</u>. volgens definitie 1.2: theoretische beschouwingen met name over analytische eigenschappen van realisaties;

<u>2</u>. overeenkomstig stelling 1.2: limieteigenschappen; analyse van processen met zekere stationariteitseigenschappen.

<u>3</u>. overeenkomstig stelling 1.3: direkte berekening van kansen en verwachtingen, mogelijkheid van tamelijk concrete analyse in speciale gevallen (Markov-ketens, stochastische differentiaalvergelijkingen).

Onderzoek op de verschillende niveaus is sterk onderling afhankelijk, eigenschappen worden ontleend aan het naast hogere (abstractere) niveau, terwijl inspiratie vaak ontleend wordt aan het naast lagere (concretere).

De colleges Stochastische Processen I en Inleiding in de theorie van de stochastische processen speelden louter op het laagste, meest concrete niveau. Dit college zal hoofdzakelijk op het middenniveau spelen, terwijl voorbeelden en toepassingen weer van het laagste niveau komen.

We zullen ons in het vervolg beperken tot stochastische processen zonder vectorkarakter, wel zullen in het algemeen stochastische processen complexe waarden mogen aannemen.

In het hiernavolgende zal gesproken worden over de verwachtingsfunktie van een stochastisch proces en over de verwachting van produkten van stochastische grootheden. Voor een goed begrip van deze definities voeren we eerst de verzameling $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ in.

Definitie 1.5. Zij $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ een kansruimte, en f een complexwaardige funktie op Ω, dan definiëren we:

$$f \in L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \Leftrightarrow \int_\Omega |f(\omega)|^2 d\mathbb{P} < \infty$$

m.a.w.: L_2 bevat alle complexwaardige kwadratisch integreerbare funkties op Ω (in kansrekening-taal: L_2 bevat alle stochastische grootheden met eindig tweede moment).

Opmerkingen.

1. Op L_2 kan een inprodukt gedefinieerd worden, als volgt:
   Als $f,g \in L_2$ dan is:

$$f \circ g := \int_\Omega f\bar{g}\,d\mathbb{P} = \int_\Omega f(\omega)\bar{g}(\omega)\,d\mathbb{P}$$

(hierin is $\bar{g}$ de complex geadjungeerde van g).

De integraal is gedefinieerd wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_\Omega f\bar{g}d\mathbb{P} \right|^2 \leq \int_\Omega |f|^2 d\mathbb{P} \}\{ \int_\Omega |g|^2 d\mathbb{P} \} .$$

2. Met de gewone inprodukt-norm $\|f\| = \{f \circ f\}^{\frac{1}{2}}$ vormt de L_2 een volledige genormeerde lineaire ruimte, ofwel: een Hilbertruimte.
(Merk op:

$$\{f \circ f\}^{\frac{1}{2}} = \{ \int_\Omega f\bar{f}d\mathbb{P} \}^{\frac{1}{2}} = \{ \int_\Omega |f|^2 d\mathbb{P} \}^{\frac{1}{2}}$$

3. De ongelijkheid van Hölder geldt: voor $1 \leq p \leq \infty$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ is

$$\left| \int_\Omega fgd\mathbb{P} \right| \leq \{ \int_\Omega |f|^p d\mathbb{P} \}^{1/p} \{ \int_\Omega |g|^q d\mathbb{P} \}^{1/q}$$

Voor $p = 2$ komt dit weer neer op de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

4. <u>Definitie 1.6</u>: Van $f,g \in L_2$ zeggen we dat <u>f loodrecht staat op g</u> als

$$\int_\Omega f\bar{g}d\mathbb{P} = 0 .$$

Notatie: $f \perp g$.

5. $f \in L_2 \Rightarrow \left| \int_\Omega fd\mathbb{P} \right| < \infty$

Immers:

$$\left| \int_\Omega fd\mathbb{P} \right|^2 = \left| \int_\Omega f.1d\mathbb{P} \right|^2 \leq \left(\int_\Omega |f|^2 d\mathbb{P} \right) \left(\int_\Omega 1^2 d\mathbb{P} \right) = \int_\Omega |f|^2 d\mathbb{P} < \infty .$$

Definiëren we nu de verwachting van een stochastische grootheid $X \in L_2$ als volgt:

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega xd\mathbb{P} = \int_\Omega x(\omega)d\mathbb{P}$$

dan:

$$X \circ Y = \mathbb{E}X\bar{Y} \qquad X,Y \in L_2$$

$$\|X\| = (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

We zijn nu toe aan het definiëren van verwachtings- en correlatiefunkties van stochastische processen:

Definitie 1.7.:

$$\mu_x(t) := \mathbb{E}X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x) = \int_{\Omega} x(t,\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

is de verwachtingsfunktie van het proces $\{X(t)\,|\,t \in T\}$;

$$R_{xx}(t,s) := \mathbb{E}X(t)\overline{X(s)} = \int_{\Omega} x(t,\omega)\overline{x(s,\omega)}\,\mathbb{P}(d\omega)$$

is de autocorrelatiefunktie van het proces $\{X(t)\,|\,t \in T\}$;

Merk op: $R_{xx}(t,s)$ bestaat, als $x(t,\cdot) \in L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\forall t$.

$$C_{xx}(t,s) := \mathbb{E}(X(t) - \mu_x(t))\overline{(X(s) - \mu_x(s))}$$

is de autocovariantiefunktie van het proces $\{X(t)\,|\,t \in T\}$.
Voor $\mu_x(t)$, $R_{xx}(t,s)$ en $C_{xx}(t,s)$ zullen we vaak schrijven $\mu(t)$, $R(t,s)$ resp. $C(t,s)$ als duidelijk is om welk proces het gaat.

Tenslotte definiëren we:

$R_{xy}(t,s) = \mathbb{E}X(t)\overline{Y(s)}$ is de kruiscorrelatie van de stochastische processen $\{X(t)\,|\,t \in T\}$ en $\{Y(t)\,|\,t \in T\}$.

Gevolgen:

1. $|R(t,s)|^2 \le R(t,t)R(s,s)$ (Cauchy-Schwarz)
2. $C(t,s) = R(t,s) - \mu(t)\overline{\mu(s)}$
3. $C(t,t) = \sigma^2(X(t))$.

Stelling 1.4. $\{X(t)|t \in T\}$ is een proces waarvoor $R(t,s)$ bestaat, $\forall t,s \in T$. Dan geldt:

a. $R(t,s) = \overline{R(s,t)}$

b. $\sum_{i,j} R(t_i,t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0$ voor alle $t_1,\ldots,t_n \in T$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$.

Bewijs.

a. $R(t,s) = \mathbb{E}X(t)\overline{X(s)} = \overline{\mathbb{E}X(s)\overline{X(t)}} = \overline{R(s,t)}$

b. $\sum_{i,j} R(t_i,t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} = \sum_{i,j} \mathbb{E}X(t_i)\alpha_i\overline{X(t_j)\alpha_j} =$

$$= \mathbb{E}\sum_{i,j} X(t_i)\alpha_i\overline{X(t_j)\alpha_j} = \mathbb{E}\,(\sum_i X(t_i)\alpha_i)\overline{(\sum_j X(t_j)\alpha_j)} =$$

$$= \mathbb{E}\,|\sum_i X(t_i)\alpha_i|^2 \geq 0 .$$

Opmerking. Stelling 1.4 geldt ook omgekeerd.
Stel een complexe funktie $R(t,s)$ voldoet aan stelling 1.4.a en b, dan bestaat er een (normaal) proces $\{X(t)|t \in T\}$ waarvan voor de verwachting $\mu(t)$ elke funktie van $t \in T$ gekozen mag worden en waarvoor $R(t,s)$ de autocorrelatiefunktie is (merk op dat voor $T = \{1,2,\ldots,n\}$ stelling 1.4 betekent dat de matrix $(R(t,s))_{t,s=1}^{n}$ hermitisch en semi-positief definiet is). Dit valt gemakkelijk in te zien door definitie 1.3 en 1.4 uit te breiden voor het complexe geval (voor bewijs, zie Doob [1], stelling II. 3.1.).

Stationariteit

Bij het beschouwen van stochastische processen zullen we ons in het algemeen beperken tot processen die een zekere mate van stationariteit vertonen. In concrete zin betekent dat, dat we bijvoorbeeld geen last willen hebben van aanloopverschijnselen. Een heel voor de hand liggende definitie van stationariteit is de volgende:

<u>Definitie 1.8</u>. Een stochastisch proces $\{X(t) | t \in T\}$ heet <u>sterk stationair</u> als voor alle ε en elke groep $(t_1,\dots,t_n)$ met t_i, $t_i + \varepsilon \in T$; $i = 1,\dots,n$ geldt:

$$F_{t_1,\dots,t_n}(a_1,\dots,a_n) = F_{t_1+\varepsilon,\dots,t_n+\varepsilon}(a_1,\dots,a_n); \quad \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}^k$$
$$(\text{of } \mathbb{R}^k)$$

(stationary in the strict sense).

<u>Voorbeeld</u>. Markov-keten (discrete tijd, eindige toestandsruimte) uitgaande van de stationaire verdeling van het proces d.w.z.: stel $p^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}P^n$ bestaat, met $p^{(0)}$ de beginverdeling, dan $p^{(\infty)} = p^{(\infty)}P$.

In de praktijk is sterke stationariteit zeer moeilijk controleerbaar, terwijl onder zwakkere voorwaarden al belangrijke resultaten verkregen kunnen worden. Vandaar de volgende definitie:

<u>Definitie 1.9</u>. Een SP$\{X(t) | t \in T\}$ waarvoor $R(t,s)$ bestaat voor alle $t,s \in T$ heet <u>zwak stationair</u> als:

1. $\mu(t)$ niet afhangt van t,

2. $\forall t,s \in T$, $\forall \varepsilon$ zódat $t + \varepsilon$, $s + \varepsilon \in T$ geldt: $R(t,s) = R(t + \varepsilon, s + \varepsilon)$.

N.B. In geval $\mathbb{E}X(t_1)\dots X(t_k) = \mathbb{E}X(t_1 + \varepsilon)\dots X(t_k + \varepsilon)$

$$\forall t_1,\dots,t_k \in T,\ \forall \varepsilon \text{ zódat: } t_1 + \varepsilon,\dots,t_k + \varepsilon \in T,\quad \forall k : 1 \le k \le n ,$$

wordt gesproken van n-de orde zwakke stationariteit.

<u>Opmerkingen</u>.

1. Eis 1 speelt geen rol in de theorie van dit soort processen, maar is wel van belang bij praktische problemen.
2. Sterk stationair $\not\Rightarrow$ zwak stationair.
3. Sterk stationair $\wedge$ $R(t,s)$ bestaat $\Rightarrow$ zwak stationair.
4. Zwak stationair $\Rightarrow$ $R(t,s)$ is een funktie van $t - s$, daarom schrijven we in dat geval $R(t - s)$ in plaats van $R(t,s)$.

<u>Afspraak</u>. Uit het eerste gevolg van definitie 1.7 blijkt, dat $R(t,s)$ bestaat voor alle $t,s \in T$ zodra $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$ voor alle $t \in T$. Voortaan zullen we dan ook voor een zwak stationair proces $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$ veronderstellen voor alle $t \in T$ in plaats van $R(t,s)$ bestaat (dus $X(t) \in L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$)

<u>Stelling 1.5.</u> $R(t)$ is autocorrelatiefunktie van een zwak stationair proces

$$\Leftrightarrow$$

1. $R(t) = \overline{R(-t)}$

2. $\sum_{i,j} R(t_i - t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0$ voor alle eindige grepen $t_1,\ldots,t_n \in T$ en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$.

<u>Bewijs</u>. " $\Rightarrow$ " : direkt uit stelling 1.4.
" $\Leftarrow$ " : direkt uit de opmerking volgend op stelling 1.4. q.e.d.

<u>Stelling 1.6</u>. $R(t,s)$ continu in (τ,τ) voor elke $\tau \Leftrightarrow R$ continu.

<u>Bewijs</u>. " $\Rightarrow$ " : $|R(t + h, s + \ell) - R(t,s)| =$

$$= |\mathbb{E}[X(t + h)\bar{X}(s + \ell) - X(t)\bar{X}(s + \ell) + X(t)\bar{X}(s + \ell) - X(t)\bar{X}(s)]| \leq$$

$$\leq |\mathbb{E}[X(t + h) - X(t)]\bar{X}(s + \ell)| + |\mathbb{E}X(t)[\bar{X}(s + \ell) - \bar{X}(s)]| \quad .$$

Bekijk $|\mathbb{E}[X(t + h) - X(t)]\bar{X}(s + \ell)|^2 =: A$.
Met Cauchy-Schwartz geldt:

$$A \leq \mathbb{E}|X(t + h) - X(t)|^2\mathbb{E}|X(s + \ell)|^2 =$$

$$= R(s + \ell, s + \ell)[R(t + h, t + h) + R(t,t) - R(t + h,t) - R(t,t + h)] \;.$$

Als $h \to 0$ gaat de faktor tussen de rechte haken naar nul, terwijl voor $\ell \to 0$ $R(s + \ell, s + \ell)$ naar $R(s,s)$ convergeert, zodat:

$A \to 0$ als $h \to 0$, $\ell \to 0$.

Analoog: $|\mathbb{E}\, X(t)[\bar{X}(s + \ell) - \bar{X}(s)]|^2 \to 0$ als $\ell \to 0$

m.a.w. R continu

q.e.d.

Gevolg: Voor een zwak stationair proces geldt:

R continu in 0 $\Leftrightarrow$ R continu .

[1] Doob, J.L.: Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc., 1953.

[2] Fabius, J. en W.R. van Zwet: Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening, Mathematisch Centrum, 1970.

[3] Feller, W.: An introduction to Probability Theory and its applications, volume I, sec. ed., John Wiley & Sons, Inc., 1965 .

[4] Neveu, J.: Mathematical Foundations of the calculus of probability, Holden-Day, 1965.

[5] Papoulis, A.: Probability, random variables and stochastic processes, Mc Graw-Hill, Inc., 1965.

[6] Yeh, J.: Stochastic Processes and the Wiener integral, Marcel Dekker, Inc., 1973.

2. Infinitesimaalrekening voor stochastische processen

Beschouw het S.P. $\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ met $X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k t}$ waarin $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ een verzameling stochastische grootheden is met

$$\mathbb{E} A_k = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{E} A_k A_\ell = \delta_{k\ell}\sigma_k^2 , \qquad k,\ell = 1,\ldots,n .$$

Merk op dat dit proces zwak stationair is met

$$\mu_x(t) = 0 \quad \text{en} \quad R_{xx}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k t} .$$

Nu zouden we graag algemeen voor een zwak stationair proces zo'n soort Fourier-voorstelling tot onze beschikking willen hebben. Dit zal in het algemeen geen som worden, maar b.v.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) e^{+i\lambda t} \cdot d\lambda$$

waarin $\{Y(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ weer een stochastisch proces is. Bovenstaande uitdrukking hebben we echter nog niet gedefinieerd, zodat eerst een integraalbegrip voor stochastische processen moet worden ingevoerd. Bovendien worden in § 3 transformaties van stochastische processen beschouwd, waarbij het gewenst is deze processen naar de tijd te kunnen differentiëren en integreren.

Voor deze definities hebben we allereerst een limietbegrip nodig.

Definitie 2.1:

$$\lim_{t \to t_0} X(t) = X \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\,|X(t) - X|^2 = \lim_{t \to t_0} \int_\Omega |X(t,\omega) - X(\omega)|^2 \cdot \mathbb{P}\,(d\omega) = 0$$

Dit heet convergentie in kwadratisch gemiddelde, of van orde twee.

Deze convergentie komt precies overeen met convergentie in de norm van de Hilbertruimte $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Opmerking: In dit college kiezen we voor convergentie in L_2-norm. Er zijn echter heel andere convergentiebegrippen denkbaar (zie b.v. Arnold [1], § 1.4). Zo hebben we:

Definitie 2.1.a:

$$\lim_{t\to t_0} X(t) = X \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \mathbb{P}(|X(t) - X| > \varepsilon) =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \mathbb{P}(\{\omega \,|\, |x(t,\omega) - x(\omega)| > \varepsilon\}) = 0 \qquad \text{(voor alle } \varepsilon > 0\text{)}$$

(convergentie in waarschijnlijkheid)

of:

Definitie 2.1.b:

$$\lim_{t\to t_0} X(t) = X \Leftrightarrow \mathbb{P}(\lim_{t\to t_0} X(t) = X) =$$

$$\mathbb{P}(\{\omega \,|\, \lim_{t\to t_0} x(t,\omega) = x(\omega)\}) = 1$$

(convergentie met kans 1)

of:

Definitie 2.1.c: Als $F_t(x)$ de distributiefunktie is van $X(t)$ en $F(x)$ van X, dan:

$$\lim_{t\to t_0} X(t) = X \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} F_t(x) = F(x) \text{ in alle punten waar } F \text{ continu is.}$$

(convergentie in verdeling).

Definitie 2.1.a geeft precies het convergentiebegrip uit de zwakke wet van de grote aantallen, definitie 2.1.b dat uit de sterke wet van de grote aantallen, definitie 2.1.c dat uit de centrale limietstelling. Bovenstaande definities hangen in zekere mate samen. Zo kan bewezen worden:

$$\mathbb{P}(\lim_{t \to t_0} X(t) = X) = 1 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \mathbb{P}(|X(t) - X| > \varepsilon) = 0$$

en ook:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\,|X(t) - X|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \mathbb{P}(|X(t) - X| > \varepsilon) = 0$$

__Bewijs van de laatste bewering__: direkt uit de ongelijkheid van Chebycheff:

$$\mathbb{E}\,|X(t) - X|^2 = \int_{\Omega} |x(t,\omega) - x(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) \geq \int_{|x(t,\omega)-x(\omega)|>\varepsilon} |x(t,\omega) - x(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|x(t,\omega)-x(\omega)|>\varepsilon} \mathbb{P}(d\omega) = \varepsilon^2 \mathbb{P}(|X(t) - X| > \varepsilon) \text{ dus:}$$

$$\mathbb{P}(|X(t) - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\,|X(t) - X|^2}{\varepsilon^2} .$$

Kies nu ε vast, en neem links en rechts de limiet voor $t \to t_0$ q.e.d.

In het vervolg zal uitsluitend met het limietbegrip uit definitie 2.1 gewerkt worden.

__Definitie 2.2__: Het $SP\{X(t) \mid t \in T\}$ heet continu in $t = t_0$ als $\lim_{t \to t_0} X(t) = X(t_0)$.

__Definitie 2.3__: Het $SP\{X(t) \mid t \in T\}$ heet differentieerbaar in $t = t_0$ als

$$\lim_{h \to 0} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} \text{ bestaat.}$$

Als $X(t)$ differentieerbaar is, voor alle $t \in T$ dan heet het proces dat gevormd wordt door de limieten $\lim_{h \to 0} \frac{X(t + h) - X(t)}{h}$ het afgeleide proces.
Notatie:

$$X'(t) = \frac{d}{dt} X(t) = \lim_{h \to 0} \frac{X(t + h) - X(t)}{h} .$$

<u>Voorbeeld</u> van toepassing van een differentieerbaar proces: een filter, gedefinieerd door

$$\frac{d}{dt} X(t) + X(t) = Y(t)$$

met $X(t)$: ingangsproces
en $Y(t)$: uitgangsproces

<u>Definitie 2.4</u>: Het $SP\{X(t) | t \in T\}$ heet integreerbaar over $[a,b]$ als

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)\Delta t_i$$

bestaat en onafhankelijk is van de partitie $t_0,\dots,t_n$.
(Hierin is $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,\dots,n$ met $t_0,\dots,t_n$ zodanig dat $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$).

Notatie:

$$\int_a^b X(t)dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)\Delta t_i \; .$$

In bovenstaande definitie hadden we ook

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(s_i)\Delta t_i$$

kunnen nemen, met $t_{i-1} < s_i \le t_i$. Definitie 2.4 is echter de meest gebruikelijke.
De integraal uit definitie 2.4 wordt Itô-integraal genoemd. Overigens zijn de stochastische grootheden $X'(t)$ en $\int_a^b X(t)dt$ niet vastgelegd op een verzameling met kansmaat 0.

In dit college zal ook nog over de volgende integralen gesproken worden:

<u>Definitie 2.5</u>. Voor een SP$\{Y(t)\,|\,t \in T\}$ en een funktie $\varphi(t)$ geldt:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dY(t) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i)[Y(t_i) - Y(t_{i-1})]$$

mits deze limiet bestaat en onafhankelijk is van de partitie $t_0,\dots,t_n$ van $[a,b]$.

<u>Definitie 2.6</u>: Voor een SP$\{X(t)\,|\,t \in T\}$ en een funktie $H(t)$ geldt:

$$\int_a^b X(t-\tau)\,dH(\tau) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta \tau_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(t-\tau_i)[H(\tau_i) - H(\tau_{i-1})]$$

mits deze limiet bestaat en onafhankelijk is van de partitie $\tau_0,\dots,\tau_n$ van $[a,b]$.

<u>Stelling 2.1</u>: $\{X(t)\,|\,t \in T\}$ continu in $t = \tau \Leftrightarrow R(t,s)$ continu in (τ,τ).

<u>Bewijs</u>:

"$\Leftarrow$" : $\mathbb{E}\,|X(t) - X(\tau)|^2 = R(t,t) - R(t,\tau) - R(\tau,t) + R(\tau,\tau) \to 0$ als $t \to \tau$.

"$\Rightarrow$" : $R(t,s) - R(\tau,\tau) = \mathbb{E}\,X(t)\overline{X(s)} - \mathbb{E}\,X(\tau)\overline{X(\tau)} =$

$$= \mathbb{E}(X(t) - X(\tau))\overline{(X(s) - X(\tau))} + \mathbb{E}X(\tau)\overline{(X(s) - X(\tau))} + \mathbb{E}(X(t) - X(\tau))\overline{X(\tau)}$$

Bekijk: $\left|\mathbb{E}(X(t) - X(\tau))\overline{(X(s) - X(\tau))}\right|^2 =: A$.

Met Cauchy-Schwarz geldt:

$$A \le \mathbb{E}\,|X(t) - X(\tau)|^2\,\mathbb{E}\,|X(s) - X(\tau)|^2 \to 0 \quad \text{als } t \to \tau \text{ of } s \to \tau.$$

Behandel analoog:

$$|\mathbb{E}X(\tau)\overline{(X(s) - X(\tau))}|^2 \quad \text{en} \quad |\mathbb{E}(X(t) - X(\tau))\overline{X(\tau)}|^2$$

(bedenk: $\mathbb{E}|X(\tau)|^2 = R(\tau,\tau) < \infty$).

<u>Gevolgen</u>:

1. $\{X(t)|t \in T\}$ continu in $t = \tau \Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to\tau \\ s\to\tau}} \mathbb{E}X(t)\overline{X(s)} = \mathbb{E}\lim\limits_{\substack{t\to\tau \\ s\to\tau}} X(t)\overline{X(s)}$.

2. Voor een zwak stationair proces geldt:

   $\{X(t)|t \in T\}$ is continu in $t = \tau \Leftrightarrow R(h)$ continu in $h = 0$.

3. Voor een zwak stationair proces geldt:

   $\{X(t)|t \in T\}$ is overal continu of nergens.

<u>Stelling 2.2</u>: $\lim\limits_{t\to\tau} X(t) = X \Rightarrow \lim\limits_{t\to\tau} \mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X$.

<u>Bewijs</u>:

$$|\mathbb{E}X(\tau + h) - \mathbb{E}X|^2 = |\mathbb{E}\,1(X(\tau + h) - X)|^2 \leq$$

$$\leq \mathbb{E}|1|^2\mathbb{E}|X(\tau + h) - X|^2 \to 0 \quad \text{als} \quad h \to 0$$

(m.b.v. Cauchy-Schwarz) . q.e.d.

<u>Gevolg</u>: $\{X(t)|t \in T\}$ is continu in $t = \tau \Rightarrow \mu(t) = \mathbb{E}X(t)$ is continu in $t = \tau$.

Een nodig en voldoende voorwaarde voor het bestaan van het SP $\int_a^b X(t)dt$ levert de volgende stelling:

<u>Stelling 2.3</u>: $\int_a^b\int_a^b R(t,s)dsdt$ bestaat $\Leftrightarrow \int_a^b X(t)dt$ bestaat en bovendien:

$$\mathbb{E}\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2 = \int_a^b\int_a^b R(t,s)dsdt .$$

Bewijs:

"$\Rightarrow$" : Laten, voor iedere $n,m \in \mathbb{N}$, $(t_0,\dots,t_n)$ en $(\tau_0,\dots,\tau_m)$ twee partities zijn van het interval $[a,b]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1,\dots,n)$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ $(i = 1,\dots,m)$.
Noem

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} X(t_i)\Delta t_i \quad \text{en} \quad J_m = \sum_{i=1}^{m} X(\tau_i)\Delta\tau_i .$$

Wanneer nu voor elk tweetal rijen $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(J_m)_{m=1}^{\infty}$, gedefinieerd als boven, geldt:

(*) $\mathbb{E}|I_n - J_m|^2 \to 0$ als $\min(n,m) \to \infty$, $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0$, $\max\limits_{1\le j\le m} \Delta\tau_j \to 0$

dan volgt:

1. Elke rij $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ is een fundamentaalrij (neem $J_m = I_m$) en dus convergent wegens de volledigheid van $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
2. Elk tweetal fundamentaalrijen $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(J_m)_{m=1}^{\infty}$ convergeert naar dezelfde limiet (rechtstreeks uit (*)) en dus

$$\int_a^b X(t)dt$$

bestaat.

We bewijzen dus (*).

$$\mathbb{E}|I_n - J_m|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R(t_i,t_j)\Delta t_i\Delta t_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} R(t_i,\tau_\ell)\Delta t_i\Delta\tau_\ell$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} R(\tau_k,t_j)\Delta\tau_k\Delta t_j + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} R(\tau_k,\tau_\ell)\Delta\tau_k\Delta\tau_\ell$$

en elk van deze vier termen convergeert naar

$$\int_a^b\int_a^b R(t,s)dsdt, \quad \text{als } \min(n,m) \to \infty, \ \max_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0, \ \max_{1\le j\le m} \Delta\tau_j \to 0$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\,|I_n - J_m|^2 \to 0$ als $\min(n,m) \to \infty$, $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0$, $\max\limits_{1\le j\le m} \Delta\tau_j \to 0$

"$\Leftarrow$" : Laten, voor iedere $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, $(t_0,\dots,t_m)$, $(\tau_0,\dots,\tau_n)$, $(s_0,\dots,s_p)$ en $(\sigma_0,\dots,\sigma_q)$ vier partities zijn van $[a,b]$ (met Δt_i etc. als boven).

Dan:

$$[\sum_i \sum_j R(t_i,\tau_j)\Delta t_i \Delta\tau_j - \sum_k \sum_\ell R(s_k,\sigma_\ell)\Delta s_k \Delta\sigma_\ell] =$$

$$\mathbb{E}[(\sum_i X(t_i)\Delta t_i)(\sum_j \overline{X(\tau_j)}\Delta\tau_j) - (\sum_i X(t_i)\Delta t_i)(\sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell) +$$

$$+ (\sum_i X(t_i)\Delta t_i)(\sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell) - (\sum_k X(s_k)\Delta s_k)(\sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell)] =$$

$$= \mathbb{E}\sum_i X(t_i)\Delta t_i[\sum_j \overline{X(\tau_j)}\Delta\tau_j - \sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell] + \mathbb{E}[\sum_i X(t_i)\Delta t_i - \sum_k X(s_k)\Delta s_k]\sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell$$

Nu geldt volgens Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbb{E}\sum_i X(t_i)\Delta t_i[\sum_j \overline{X(\tau_j)}\Delta\tau_j - \sum_\ell \overline{X(\sigma_\ell)}\Delta\sigma_\ell]|^2 \le$$

$$\le \mathbb{E}\,|\sum_i X(t_i)\Delta t_i|^2\,\mathbb{E}\,|\sum_j X(\tau_j)\Delta\tau_j - \sum_\ell X(\sigma_\ell)\Delta\sigma_\ell|^2 \to$$

$$\to \mathbb{E}|\int_a^b X(t)dt|^2 \cdot 0 = 0$$

als $\min(m,n,q) \to \infty$, $\max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i \to 0$, $\max\limits_{1\le j\le n} \Delta\tau_j \to 0$, $\max\limits_{1\le \ell\le q} \Delta\sigma_\ell \to 0$

immers:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i \to 0}} \mathbb{E}\,|\sum_i X(t_i)\Delta t_i|^2 = \mathbb{E}\,(\lim_{\substack{m\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i \to 0}} |\sum_i X(t_i)\Delta t_i|^2)$$

wegens stelling 2.2.

De tweede term wordt analoog behandeld.
Wederom is nu bewezen dat elke rij van getallen

$$\Big(\sum_i \sum_j R(t_i,\tau_j)\Delta t_i \Delta\tau_j\Big)_{i,j=1}^{\infty}$$

een fundamentaalrij is, en dus convergent, terwijl verder elk tweetal fundamentaalrijen naar dezelfde limiet convergeert, m.a.w.:

$$\int_a^b \int_a^b R(t,s)dsdt$$

bestaat.
Op grond hiervan en weer het feit dat verwisseling van limiet en verwachting is toegestaan (stelling 2.2) geldt:

$$\mathbb{E}\Big|\int_a^b X(t)dt\Big|^2 = \mathbb{E}\Big|\lim_{\substack{m\to\infty\\ \max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i\to 0}} \sum_{i=1}^m X(t_i)\Delta t_i\Big|^2 = \lim_{\substack{m\to\infty\\ \max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i\to 0}} \mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^m X(t_i)\Delta t_i\Big|^2 =$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty\\ \max\limits_{1\le i\le m} \Delta t_i\to 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R(t_i,t_j)\Delta t_i \Delta t_j = \int_a^b \int_a^b R(t,s)dsdt \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Opmerking</u>: De definities en stellingen betreffende het bestaan van $\int_a^b$ kunnen uiteraard worden uitgebreid tot uitspraken over oneigenlijke integralen; wanneer

$$\int_a^b X(t)dt \quad \text{bestaat}\ , \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

en tevens

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b X(t)dt \quad \text{bestaat,}$$

dan geldt per definitie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)dt = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b X(t)dt \ .$$

Het analogon van stelling 2.3 voor oneigenlijke integralen wordt dan:

Stelling 2.4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)dt \quad \text{bestaat} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(t,s)dsdt \ \text{bestaat.}$$

en bovendien:

$$\mathbb{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(t)dt\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(t,s)dsdt \ .$$

Het analogon van stelling 2.3 voor de integraal uit definitie 2.5 wordt:

Stelling 2.5:

$$\int_a^b \varphi(t)dY(t) \quad \text{bestaat} \Leftrightarrow \int_a^b\int_a^b \varphi(t)\overline{\varphi(\tau)}d^2R(t,\tau) \quad \text{bestaat}$$

en bovendien:

$$\mathbb{E}\left|\int_a^b \varphi(t)dY(t)\right|^2 = \int_a^b\int_a^b \varphi(t)\overline{\varphi(\tau)}d^2R(t,\tau)$$

en idem voor de integraal uit definitie 2.6:

Stelling 2.6:

$$\int_a^b X(t-\tau)dH(\tau) \ \text{bestaat} \Leftrightarrow \int_a^b\int_a^b R(t-\tau,\ t-\sigma)dH(\sigma)dH(\tau) \ \text{bestaat}$$

en bovendien:

$$\mathbb{E}\left|\int_a^b X(t-\tau)\,dH(\tau)\right|^2 = \int_a^b\int_a^b R(t-\tau,\ t-\sigma)\,dH(\sigma)\,dH(\tau)$$

De bewijzen van de laatste drie stellingen gaan min of meer analoog aan dat van stelling 2.3. Op het bestaan van de integraal uit stelling 2.5 wordt nader teruggekomen.

Tenslotte nog een stelling over differentieerbaarheid:

<u>Stelling 2.7</u>: Het SP$\{X(t)\,|\,t \in T\}$ is differentieerbaar in $t=\tau \Leftrightarrow R(t,s)$ is tweemaal differentieerbaar in (τ,τ) en bovendien:

$$\mathbb{E}\,X'(t_1)X'(s_1) = \left.\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\,\partial s}\right|_{(t,s)=(t_1,s_1)}$$

(vergelijk ook Papoulis [2], § 9.6)

<u>Referenties</u>:

[1] Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen: Theorie und Anwendung, Oldenbourg, 1973.

[2] Papoulis, A.: Probability, random variables and stochastic processes, Mc.Graw-Hill, Inc., 1965.

3. Transformaties van stochastische processen

Een realisatie van een SP is, zoals we gezien hebben, op te vatten als een tijdfunktie. Laat $\mathcal{T}$ een klasse zijn van tijdfunkties. Beschouw nu transformaties φ van $\mathcal{T}$ in zichzelf:

$$\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \quad \text{of} \quad \varphi(f) = g \quad \text{met} \quad f, g \in \mathcal{T} .$$

In dit laatste geval heet f input(proces) en g output(proces). De transformatie φ heet ook wel filter (voor voorbeelden zie de inleiding van deze syllabus, blz. 1 en 2).

In het geval van een stochastisch inputproces is ook het outputproces in het algemeen stochastisch, en de kansverdeling van het inputproces en de transformatie samen bepalen de kansverdeling van het outputproces.

Bij dit soort van transformaties kunnen we het volgende onderscheid maken:

Definitie 3.1.

a. Zonder geheugen: op tijdstip τ wordt $g = \varphi f$ helemaal vastgelegd door de waarde van f op tijdstip $t = \tau$; $(\varphi f)(\tau) = \varphi(f(\tau))$

V.b.: een "ideale" versterker (zonder naijlen).

b. Met onbeperkt geheugen: op tijdstip τ wordt g helemaal vastgelegd door de waarden van f op de tijdstippen $t \le \tau$;

V.b.: $g(t) = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau$, b.v. een wel naijlende versterker.

c. Lineair: $\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$ waarin $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{T}$ en $g_1 = \varphi(f_1)$ en $g_2 = \varphi(f_2)$.

d. Tijdsinvariant: voer de volgende transformatie in: $T_h : f(t) \to f(t+h)$, notatie: $f_h(t) := (T_h f)(t)$

$$(\varphi f)_h := T_h \varphi f .$$

φ is tijdsinvariant betekent $(\varphi f)_h = \varphi f_h$.

Wederom nemen we de versterker als voorbeeld: komt de input een tijdsinterval ter lengte h later binnen, dan zal ook de output een tijd h later ter beschikking komen.

e. Niet-anticiperend of causaal: de output g van een filter $g = \varphi f$ zal op tijdstip t hooguit afhangen van de waarden $f(\tau)$; $\tau \leq t$, maar zeker niet van toekomstige waarden van f; een versterker "versterkt" alleen de reeds binnengekomen signalen; ook bij de analyse van sociaal-economische processen zullen alleen de data uit het verleden een rol spelen.

Er bestaan echter ook niet-causale filters, b.v.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau \; .$$

In dit college zullen we ons hoofdzakelijk beperken tot lineaire, tijds-invariante filters, en wel die filters, die in het algemeen als volgt te schrijven zijn:

$$(Lx)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)dH(\tau)$$

waarbij H een funktie van begrensde variatie is en x een meetbare en H-integreerbare funktie. Uiteraard móeten we dan aantonen dat een filter van deze vorm inderdaad lineair en tijdsinvariant is.

Lemma 3.1: Laat $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een funktie zijn van begrensde variatie en laat L een transformatie zijn, gedefinieerd op de verzameling meetbare funkties x van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ die H-integreerbaar zijn:

$$(Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)dH(\tau) \; ,$$

dan is L zowel lineair als tijdsinvariant.

Bewijs: $(L(\alpha x_1 + \beta x_2))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_1 + \beta x_2)(t - \tau)dH(\tau) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha x_1(t - \tau) + \beta x_2(t - \tau)]dH(\tau) =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau)dH(\tau) + \beta\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau)dH(\tau) = \alpha(Lx_1)(t) + \beta(Lx_2)(t) .$$

Hiermee is de lineariteit bewezen, nu nog de tijdsinvariantie:

$$(Lx)_h(t) = (Lx)(t + h) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + h - \tau)dH(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_h(t - \tau)dH(\tau) =$$

$$= (Lx_h)(t) .$$

q.e.d.

Welke filters zijn nu te schrijven in de vorm

$$(Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)dH(\tau) \quad \text{, met } H \text{ van begrensde variatie ?}$$

Zij L een lineair, tijdsinvariant filter, en definieer, voor elke t, $L_t x := (Lx)(t)$. Dan is L_t voor elke t een lineaire funktionaal. Nu geldt de stelling van Riesz:

Stelling 3.1: Zij u een begrensde lineaire funktionaal, d.w.z. $|u(x)| \leq M\|x\|$, op de Hilbertruimte $L_2(\mathbb{R},\mathcal{B},G)$ van alle tijdsfunkties. (Hierin is $\mathcal{B}$ een Borel σ-algebra en G een maatfunktie).
Dan is er precies één $h \in L_2$ zódat

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\tau)dG(\tau)$$

(zie b.v. Lineaire Analyse 1, Stelling 5.1.13).

In ons geval betekent dit dat, mits L_t begrensd is (L_t is zeker lineair, want L is lineair), we voor elke t een funktie h_t kunnen vinden zó dat:

$$(Lx)(t) = L_t x = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_t(\tau)dG(\tau) .$$

Met behulp van de tijdsinvariantie $(Lx)_\delta = Lx_\delta$ volgt gemakkelijk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + \delta)h_t(\tau)dG(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{t+\delta}(\tau)dG(\tau)$$

ofwel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_t(\tau - \delta)dG(\tau - \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{t+\delta}(\tau)dG(\tau) .$$

Uit het bovenstaande blijkt dat het gedeelte

$$h_t(\tau)dG(\tau)$$

slechts van $t - \tau$ afhangt, zodat we mogen schrijven

$$(Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)dH^*(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)dH(\tau)$$

met H^* geschikt gekozen en $H(\tau) = -H^*(\tau)$, $\forall\tau \in \mathbb{R}$.
Uit bovenstaande redenering blijkt dat voor een grote klasse van lineaire, tijdsinvariante transformaties de gekozen schrijfwijze tamelijk voor de hand ligt. In het vervolg zullen we, tenzij anders aangegeven, praten over lineaire, tijdsinvariante filters van bovenstaande vorm.

Definitie 3.2. We noemen een transformatie lineair, als hij op de manier van lemma 3.1 door middel van een integraal is voor te stellen.

De funktie H wordt de impulsresponsie van L genoemd.

Stelling 3.2. L is een lineaire transformatie en $\{X(t) \mid t \in T\}$ een SP. Noem $Y(t) := (LX)(t)$. Nu geldt:

$$\mathbb{E}\, Y(t) = L\mathbb{E}\, X(t) .$$

Bewijs. Kies t vast:

$$\mathbb{E}\, Y(t) = \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)dH(\tau) =$$

$$= \mathbb{E} \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_{1\le i\le n} \Delta\tau_i \to 0 \\ a=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_n=b}} \sum_{j=1}^{n} X(t - \tau_j)\Delta H(\tau_j) =$$

$$= \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to-\infty}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta\tau_i \to 0 \\ a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b}} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\, X(t-\tau_j)\Delta H(\tau_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}X\,(t-\tau)dH(\tau) = L\mathbb{E}X\,(t)$$

waarbij tweemaal het verwisselen van limiet en verwachting is toegestaan op grond van stelling 2.2.

<u>Opmerking</u>: Stelling 3.2 blijft geldig als L lineair is in de zin van definitie 3.1, dus zonder integraalvoorstelling en tijdsinvariantie.

<u>Stelling 3.3</u>: L is een lineaire transformatie en $\{X(t)\,|\,t \in T\}$ een SP. Laat $Y(t) := (LX)(t)$. Dan geldt:

$$R_{xy}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t,s-\sigma)d\overline{H(\sigma)}\ ,$$

en

$$R_{yy}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t-\tau,s)dH(\tau)\ .$$

<u>Bewijs</u>:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s-\sigma)\,dH(\sigma)$$

$$X(t)\overline{Y(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\overline{X(s-\sigma)}d\overline{H(\sigma)}$$

en, met behulp van stelling 3.2:

$$R_{xy}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t,s-\sigma)d\overline{H(\sigma)}\ .$$

Analoog:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)dH(\tau)$$

$$Y(t)\overline{Y(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)\overline{Y(s)}dH(\tau)$$

$$R_{YY}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t - \tau,s)dH(\tau)$$

<u>Gevolg</u>:

$$R_{YY}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t - \tau,\ s - \sigma)dH(\tau)d\overline{H(\sigma)}\ .$$

<u>Opmerking</u>: Een zwak stationair proces wordt door een lineair filter getransformeerd in een eveneens zwak stationair proces, immers:

$$R_{YY}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t - s - \tau + \sigma)dH(\tau)d\overline{H(\sigma)}$$

is slechts afhankelijk van $t - s$, terwijl volgens stelling 3.2:

$$\mathbb{E}\,Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\,X(t - \tau)dH(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu dH(\tau)$$

onafhankelijk van t is, met $\mu = \mathbb{E}\,X(t)$, $\forall t$.

Wat betreft sterk stationaire processen, geldt het volgende:
een tijdsinvariante transformatie L voert een sterk stationair proces over in een eveneens sterk stationair proces.
Immers: wanneer $X(t_1),\dots,X(t_n)$ en $X(t_1 + h),\dots,X(t_n + h)$ dezelfde simultane kansverdeling hebben, dan geldt dat ook voor het Y-proces:

$$Y(t + h) = (LX)(t + h) = (LX)_h(t) = (LX_h)(t)\ .$$

4. De spectrale verdelingsfunctie voor zwak stationaire processen

Beschouw eens de volgende, niet stochastische tijdfunktie

$$x(t) = e^{i\lambda t} \quad \text{(zuiver harmonische trilling)} ,$$

en laat L een lineaire transformatie zijn (in de zin van definitie 3.2). Dan geldt:

$$y(t) = (Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)\lambda} dH(\tau) =$$

$$= e^{it\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} dH(\tau) = e^{it\lambda} y(0) .$$

Noem $y(0) =: A(\lambda)$.

$A(\lambda)$ heet ook wel de <u>frequentieresponsie</u> van L (merk op: $A(\lambda)$ is de Fourier-Stieltjes-getransformeerde van $H(t)$).

Voor $x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{it\lambda_n}$ vinden we analoog: $(Lx)(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{it\lambda_n} A(\lambda_n)$.

Stel nu:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

waarin $\xi(\lambda)$ de Fouriergetransformeerde van $x(t)$ is en laat weer L een lineaire transformatie zijn.

Dan:

$$y(t) = (Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) dH(\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \xi(\lambda) e^{i\lambda(t-\tau)} d\lambda dH(\tau) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) e^{it\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} dH(\tau) \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \xi(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda .$$

Hierin is $A(\lambda)\xi(\lambda)$ juist de Fouriergetransformeerde van $y(t)$

$\Rightarrow$ Fouriergetransformeerde (output) =

= Fouriergetransformeerde (input) × frequentieresponsie.

Uiteindelijk willen we toe naar Fouriertransformaties van SP's. Daarvoor is het zinvol eerst Fouriertransformaties van autocorrelatiefunkties te onderzoeken (ook al vanwege het feit dat m.b.v. Fouriertransformaties convolutieintegralen zoals in stelling 3.3 en gevolg, in veel makkelijker hanteerbare produkten worden overgevoerd).
We zullen ons hierbij tot zwak stationaire processen beperken.

Eerst nog even wat eigenschappen van de autocorrelatiefunktie op een rijtje:

1. $R_{xx}(h) = \overline{R_{xx}(-h)}$

$R_{xy}(h) = \overline{R_{yx}(-h)}$

2. Voor alle $t_1,\dots,t_n$ en $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{xx}(t_i - t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \ge 0 .$$

3. Een funktie die aan 1 en 2 voldoet is autocorrelatiefunktie van een zwak stationair SP.

4. $|R_{xx}(h)| \le R_{xx}(0)$.

<u>Bewijs</u>: $|R_{xx}(h)|^2 = |\mathbb{E}\,X(t+h)\overline{X(t)}|^2 \le \mathbb{E}\,|X(t+h)|^2\mathbb{E}\,|X(t)|^2 =$

$$= R_{xx}(0)R_{xx}(0) \;, \quad \text{met} \quad R_{xx}(0) = \mathbb{E}|X(t)|^2 \ge 0$$

(m.b.v. Cauchy-Schwarz). q.e.d.

Analoog:

$$|R_{xy}(h)|^2 \le R_{xx}(0)R_{yy}(0) .$$

Tenslotte:

$$2|R_{xy}(h)| \le R_{xx}(0) + R_{yy}(0) .$$

Bewijs: $4|R_{xy}(h)|^2 = 4|\mathbb{E}\,X(t+h)\overline{Y(t)}|^2 \le$

$$\le 4\ \mathbb{E}|X(t+h)|^2\mathbb{E}|Y(t)|^2 \le (\mathbb{E}|X(t+h)|^2 + \mathbb{E}|Y(t)|^2)^2 =$$

$$= (R_{xx}(0) + R_{yy}(0))^2 .$$ q.e.d.

Definitie 4.1:

$$S(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}R_{xx}(t)dt$$

heet het spectrum of de spectrale dichtheid van het SP$\{X(t)|t \in T\}$ mits de integraal bestaat.

Soms wordt ook de notatie $S_{xx}(\lambda)$ gebruikt in plaats van $S(\lambda)$.
In geval $R_{xx}(t)$ continu en absoluut integreerbaar is geldt ook de omkeerformule uit de Fouriertheorie:

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}S(\lambda)d\lambda .$$

Opmerking: Voor het discrete tijdgeval wordt definitie 4.1:

Definitie 4.1': $S(\lambda) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n}R_{xx}(n)$ heet de spectrale dichtheid van het SP$\{X(n)|n \in \mathbb{Z}\}$ mits de som convergeert. $(-\pi \le \lambda \le \pi)$.

In geval $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_{xx}(n)| < \infty$ geldt weer de omkeerformule:

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}S(\lambda)d\lambda .$$

<u>Stelling 4.1</u>: Als voor een SP$\{X(t)|t \in T\}$ de spectrale dichtheid S bestaat geldt: S is reëel en voor een reëel proces is S zelfs even.

<u>Bewijs</u>:

$$\overline{S(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\overline{R(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}R(\tau)d\tau = S(\lambda)$$

$\Rightarrow$ $S(\lambda)$ is reëel.

Stel nu: $X(t)$ is reëel $\Rightarrow$ $R(t)$ is reëel $\Rightarrow$ $R(t) = R(-t)$

$$S(-\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}R(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}R(\tau)d\tau = S(\lambda)$$

$\Rightarrow$ $S(\lambda)$ is even. q.e.d.

Zelfs kan worden bewezen: $S(\lambda) \geq 0$ en $\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)d\lambda < \infty$. (Dit laatste is triviaal wanneer de omkeerformule geldt omdat dan $\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)d\lambda = 2\pi R(0)$).
M.a.w: $S(\lambda)$ is, eventueel op een multiplicatieve constante na, een echte dichtheidsfunktie.
Eveneens kan vrij eenvoudig worden aangetoond, dat voor een niet-negatieve funktie $S(\lambda)$ met $\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)d\lambda < \infty$ geldt dat

$$R(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{+it\lambda}S(\lambda)d\lambda$$

autocorrelatiefunktie is van een zwak stationair, continu SP.

Deze beweringen bewijzen we niet hier, maar voor een wat algemenere situatie (zie het bewijs van stelling 4.2 hierna). Men kan zich n.l. afvragen of elke autocorrelatiefunktie van een zwak stationair continu proces ook inderdaad in de vorm

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+it\lambda}S(\lambda)d\lambda$$

te schrijven is.

Beschouw daartoe eens het volgende stochastisch proces:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k t} \quad , \quad \text{waarin } \{A_k\}_{k=1}^{n}$$

een verzameling stochastische grootheden is met, voor $k,\ell = 1,\ldots,n$:

$$\mathbb{E} A_k = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{E} A_k A_\ell = \delta_{k\ell}\sigma_k^2 \ .$$

Dit proces is zwak stationair en continu; we vinden

$$R_{xx}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k t} \ .$$

Deze funktie is zeker niet absoluut integreerbaar. We kunnen echter schrijven:

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

met

$$F(\lambda) = \sum_{\{n|\lambda_n \le \lambda\}} \sigma_n^2 \ .$$

Algemeen geldt de volgende stelling:

<u>Stelling 4.2</u> (Hoofdstelling van de spectraaltheorie).

Als het SP$\{X(t)|t \in T\}$ zwak stationair en continu is, dan bestaat er een reële, monotoon niet-dalende, begrensde funktie $F(\lambda)$, zó dat

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

en F voldoet aan

$$\frac{F(\lambda_2^+) + F(\lambda_2^-)}{2} - \frac{F(\lambda_1^+) + F(\lambda_1^-)}{2} = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} R_{xx}(t)dt$$

terwijl omgekeerd elke op deze wijze gedefinieerde R(t) autocorrelatiefunktie is van een continu, zwak stationair proces.

Alvorens deze stelling te bewijzen enige opmerkingen vooraf.

Definitie 4.2: De funktie F uit de formulering van stelling 4.2 heet de spectrale verdelingsfunktie van het $SP\{X(t)|t \in T\}$.

Als F differentieerbaar is en bovendien R integreerbaar, dan geldt:

$$F'(\lambda) = S(\lambda)$$

want

$$\frac{F(\lambda_2) - F(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it(\lambda_2 - \lambda_1)} R(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it(\lambda_2 - \lambda_1)} R(t)dt \; .$$

Laat nu $\lambda_1 \to \lambda_2$, dan

$$F'(\lambda_2) = \lim_{\lambda_1\to\lambda_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it(\lambda_2 - \lambda_1)} R(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\lambda_1\to\lambda_2} e^{-it\lambda_2} \frac{1 - e^{+it(\lambda_2 - \lambda_1)}}{-it(\lambda_2 - \lambda_1)} R(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda_2} R(t)dt = S(\lambda_2)$$

waarbij verwisseling van limiet en integraal is toegestaan omdat de integrand uniform begrensd is.

Tenslotte formuleren we het discrete analogon van de hoofdstelling:

<u>Stelling 4.2'</u>. Zij gegeven een zwak stationair proces $\{X(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dan bestaat er een reële, monotoon niet-dalende, begrensde funktie $F(\lambda)$, voor $|\lambda| \leq \pi$, zó dat

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda)$$

terwijl F voldoet aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{F(\lambda_2^+) + F(\lambda_2^-)}{2} - \dfrac{F(\lambda_1^+) + F(\lambda_1^-)}{2} = \\ = R_{xx}(0)(\lambda_2 - \lambda_1) + \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \dfrac{e^{-in\lambda_2} - e^{-in\lambda_1}}{-in} R_{xx}(n) \\ \qquad \text{waarbij } -\pi < \lambda_1 < \lambda_2 < \pi \\ F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi \cdot R(0) \ . \end{cases}$$

Omgekeerd is elke op deze wijze gedefinieerde $R(n)$ autocorrelatiefunktie van een discreet, zwak stationair proces.

Bij het bewijs van stelling 4.2 zullen we van de volgende twee stellingen gebruik moeten maken:

a) De stelling van Fubini: een preciese formulering hiervan zal achterwege blijven vanwege de typisch maattheoretische terminologie, maar de stelling garandeert dat in geval van een dubbelintegraal van een absoluut integreerbare funktie de integratievolgorde verwisseld mag worden (zie bijv. het college "Maattheorie en Lebesgue-integratie", of Loève [2] , § 8.2.A).

b) De continuiteitsstelling van Lévy: laat $P_1, P_2, \ldots$ een rij kansverdelingen op $\mathbb{R}^1$ zijn, en $F_1, F_2, \ldots$ de bijbehorende rij verdelingsfunkties. Als voor de bijbehorende rij karakteristieke funkties $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}^1$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ met φ continu in $x = 0$, dan geldt dat φ de karakteristieke funktie is van een kansverdeling P met verdelingsfunktie F waarvoor geldt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^1$ waar $F(x)$ continu is.
(zie Fabius en van Zwet [1], § 2.9 en 2.10).

<u>Bewijs</u> (van stelling 4.2):

Stel we hebben een reële, monotoon niet-dalende funktie F met:

$$R(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda) .$$

$R(t) = \overline{R(-t)}$ voor alle $t \in T$.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R(t_j - t_k)\alpha_j\overline{\alpha_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda(t_j-t_k)} \alpha_j\overline{\alpha_k}\, dF(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{it_j\lambda}\alpha_j \right|^2 dF(\lambda) \geq 0$$

en dit voor elke keuze $t_1,\ldots,t_n \in T$ en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ voor elke n.
Dus we hebben al: $R(t)$ is autocorrelatiefunktie van een zwak stationair proces (stelling 1.5).
Nu de continuïteit:

$$|R(t) - R(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t}-1)\, dF(\lambda)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda t}-1|\, dF(\lambda).$$

Noem $F(\infty) := \lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda)$ en $F(-\infty) := \lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda)$.
Deze bestaan want F is monotoon en begrensd.
$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\lambda_1,\lambda_2$ zódat:

$$\lambda_1 < \lambda_2 , \quad 0 \leq F(\infty) - F(\lambda_2) \leq \frac{1}{6}\varepsilon, \quad 0 \leq F(\lambda_1) - F(-\infty) \leq \frac{1}{6}\varepsilon .$$

Kies $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \left|R(t) - R(0)\right| \le 2\cdot\frac{1}{6}\,\varepsilon + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left|e^{i\lambda t}-1\right| dF(\lambda) + 2\cdot\frac{1}{6}\,\varepsilon\,.$$

Verder geldt: $\exists\delta > 0$ zódanig dat, $\forall t$ met $|t| < \delta$ en $\forall\lambda$ met $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$:

$$\left|e^{i\lambda t} -1\right| \le \frac{\varepsilon}{3[F(\lambda_2) - F(\lambda_1)]}$$

$\Rightarrow$ als $|t| < \delta$ dan $|R(t) - R(0)| \le \varepsilon \Rightarrow R$ is continu.

Nu gaan we eerst aantonen dat als er een zwak stationair, continu proces gegeven is, er een reële, monotoon niet-dalende, begrensde funktie F bestaat zódat

$$R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)\,.$$

Voor het geval dat R absoluut integreerbaar is, kan de spectrale dichtheid worden gedefinieerd. Dit idee kunnen we ook toepassen, in geval R niet absoluut integreerbaar is: we kappen R dan af op een eindig interval, zódanig dat de afgeknotte funktie continu blijft, als volgt:

$$R_T(t) = \begin{cases} R(t)\,\dfrac{T - |t|}{T} & \text{voor } |t| \le T \\ 0 & \text{voor } t > T\,. \end{cases}$$

Definieer nu:

$$S_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R_T(t)\,dt\,.$$

Nu geldt:

$$S_T(\lambda) = \int_{-T}^{T} e^{-it\lambda} R(t)\, \frac{T - |t|}{T}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-\sigma)\lambda} R(s - \sigma) ds d\sigma =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le j\le n} \Delta s_j \to 0}} \frac{1}{T} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{-i(s_\ell - s_j)\lambda} R(s_\ell - s_j) \Delta s_\ell \Delta s_j =$$

$$= \frac{1}{T} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s_j = \Delta s \to 0}} \left[\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_\ell \bar{\alpha}_j R(s_\ell - s_j) \right] (\Delta s)^2 \geq 0$$

(immers: R is continu en autocorrelatiefunktie van een zwak stationair proces).

Omdat nu $R_T(t)$ continu en absoluut integreerbaar is geldt weer (volgens de omkeerformule):

$$R_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda \ .$$

Definieer nu:

$$F_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} S_T(\nu) d\nu$$

dan geldt:

F_T is monotoon niet-dalend en niet-negatief omdat S_T niet-negatief is.

$$F_T(-\infty) = 0$$

$$F_T(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\nu)d\nu = 2\pi R_T(0) = 2\pi R(0) \Rightarrow F_T \text{ is begrensd.}$$

Merk op dat $\frac{F_T(\lambda)}{2\pi R(0)}$ voor alle T een verdelingsfunktie is, en dat $\frac{R_T(t)}{R(0)}$ precies de karakteristieke funktie is die hoort bij $\frac{F_T(\lambda)}{2\pi R(0)}$.

Nu geldt: $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{R_T(t)}{R(0)} = \frac{R(t)}{R(0)}$,

met $\frac{R(t)}{R(0)}$ continu in $t = 0$.

Dus op grond van de continuïteitsstelling van Lévy geldt:

$\frac{R(t)}{R(0)}$ is de karakteristieke funktie van een verdeling met verdelingsfunktie $\frac{F(\lambda)}{2\pi R(0)}$ waarvoor geldt: $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{F_T(\lambda)}{2\pi R(0)} = \frac{F(\lambda)}{2\pi R(0)}$. En daaruit volgt:

$$R(t) = \lim_{T\to\infty} R_T(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

Nu is alleen nog te bewijzen dat F dan voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{F(\lambda_2^+) + F(\lambda_2^-)}{2} - \frac{F(\lambda_1^+) + F(\lambda_1^-)}{2} = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} R(t)dt .$$

Stel $\lambda_1 < \lambda_2$ en definieer

$$b^*(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} & \text{als } t \neq 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \text{als } t = 0 . \end{cases}$$

Dan geldt:

$$b^*(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-it\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda$$

$$\text{waarin } b(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{als } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ \frac{1}{2} & \text{als } \lambda = \lambda_1 \text{ of } \lambda = \lambda_2 \\ 0 & \text{elders .} \end{cases}$$

Merk op: $b^*(t)$ is de Fouriergetransformeerde van $b(\lambda)$ en
$b(\lambda)$ voldoet aan de Dirichlet condities,

d.w.z.

1. $b(\lambda^+)$ en $b(\lambda^-)$ bestaan, $\forall\lambda$

2. $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{b(\lambda+h) - b(\lambda^+)}{h}$ en $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{b(\lambda^-) - b(\lambda-h)}{h}$ bestaan, $\forall\lambda$.

Bovendien geldt: $b(\lambda) = \frac{1}{2}[b(\lambda^+) + b(\lambda^-)]$, $\forall\lambda$.

Wederom geldt nu de omkeerformule uit de Fouriertheorie:

$$b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)e^{i\lambda t}dt \; .$$

Bekijk:

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)R(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF(\lambda)dt$$

en op grond van de stelling van Fubini:

$$= \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)e^{it\lambda}dtdF(\lambda) \overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)e^{i\lambda t}dtdF(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda)dF(\lambda) = \tfrac{1}{2}[F(\lambda_1^+) - F(\lambda_1^-)] + [F(\lambda_2^-) - F(\lambda_1^+)] + \tfrac{1}{2}[F(\lambda_2^+) - F(\lambda_2^-)] =$$

$$= \frac{F(\lambda_2^+) + F(\lambda_2^-)}{2} - \frac{F(\lambda_1^+) + F(\lambda_1^-)}{2} \; .$$

De overgang (*) is toegestaan, omdat $\int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)e^{i\lambda t}dt$ uniform begrensd is, want

$$\left|\int_{-\tau}^{\tau} b^*(t)e^{i\lambda t}dt\right| = \left|\int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-it(\lambda_2-\lambda)} - e^{-it(\lambda_1-\lambda)}}{-it}dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-\tau}^{\tau} \frac{\cos t(\lambda_2-\lambda) - \cos t(\lambda_1-\lambda)}{-it}dt - i\int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin t(\lambda_2-\lambda) - \sin t(\lambda_1-\lambda)}{-it}dt\right| =$$

(de integrand van de eerste integraal is een oneven funktie van t en die van de tweede integraal een even funktie)

$$= \left|2\int_0^{\tau} \frac{\sin t(\lambda_2-\lambda) - \sin t(\lambda_1-\lambda)}{t}dt\right| \le$$

$$\le 2\left|\int_{t=0}^{\tau} \frac{\sin t(\lambda_2-\lambda)}{t(\lambda_2-\lambda)}dt(\lambda_2-\lambda)\right| + 2\left|\int_{t=0}^{\tau} \frac{\sin t(\lambda_1-\lambda)}{t(\lambda_1-\lambda)}dt(\lambda_1-\lambda)\right| \le$$

(alternerende integranden met monotoon dalende bijdragen)

$$\le 2\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}dy + 2\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}dy < \infty .$$

q.e.d.

Een voorbeeld

Laat het $SP\{X(t)\,|\,t \in T\}$ zwak stationair en continu zijn, en bekijk $Y := LX$ met L een lineaire transformatie, dus

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)dH(\tau)$$

Volgens de hoofdstelling geldt:

$$R_{XX}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF_{XX}(\lambda)$$

met $F_{xx}(\lambda)$ reëel, monotoon niet-dalend en begrensd.
Het gevolg van stelling 3.3 voor zwak stationaire processen luidt:

$$R_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t - \tau + \sigma)dH(\tau)\overline{dH(\sigma)}$$

en dus:

$$R_{yy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{\sigma=-\infty}^{\infty}\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau+\sigma)\lambda}dF_{xx}(\lambda)dH(\tau)\overline{dH(\sigma)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda=-\infty}^{\infty}\left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda}dH(\tau)\right)\left(\int_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\lambda}\overline{dH(\sigma)}\right)e^{it\lambda}dF_{xx}(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}A(\lambda)\overline{A(\lambda)}dF_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}|A(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \ .$$

Omdat het $SP\{Y(t)|t \in T\}$ wederom zwak stationair en continu is, geldt:

$$R_{yy}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF_{yy}(\lambda) \ .$$

Wegens de éénduidigheid van de Fouriervoorstelling kunnen we nu schrijven:

$$\text{"}dF_{yy}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda)\text{"} \ .$$

Voor de punten waar $F_{xx}(\lambda)$ en $F_{yy}(\lambda)$ differentieerbaar zijn, geldt:

$$S_{yy}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 S_{xx}(\lambda) \ ,$$

terwijl voor de sprongpunten:

$$F_{yy}(\lambda^+) - F_{yy}(\lambda^-) = |A(\lambda)|^2 \cdot \{F_{xx}(\lambda^+) - F_{xx}(\lambda^-)\} \ .$$

Referenties:

[1] Fabius, J. en W.R. van Zwet: Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening, Mathematisch Centrum, 1970.

[2] Loêve, M.: Probability theory, van Nostrand, 1963.

5. De lineaire kleinste kwadraten schattingen

Stel we zijn geïnteresseerd in een $SP\{S(t)\,|\,t \in T\}$.
We kennen dit stochastisch proces niet, wel èchter een ander $SP\{X(t)\,|\,t \in T\}$, dat op een of andere manier aan $\{S(t)\,|\,t \in T\}$ gerelateerd is.
Verder voeren we voor elke t een verzameling $A(t)$ in, zódanig dat het $SP\{X(\tau)\,|\,\tau \in A(t)\}$ gebruikt kan worden voor een schatting van $S(t)$.

<u>Voorbeeld</u>

$$A(t) = \{\tau\,|\,\tau \in T,\ \tau \le t\}$$

$$A(t) = \{\tau\,|\,\tau \in T,\ t - 1 \le \tau \le t\}$$

$$A(t) = \{t - N\Delta,\ t - (N - 1)\Delta, \dots, t - \Delta, t\}\ .$$

De bedoeling is nu dat we $S(t)$ schatten met behulp van

$$(\psi X)(t)\ ,\ t \in T,\ \ \psi \text{ een filter,}$$

en ψ wel zodanig dat $(\psi X)(t)$ in termen van de $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$ wordt uitgedrukt. Noem de verzameling van deze filters: Π.
Als criterium voor zo'n schatting kiezen we:

$$\mathbb{E}\,|S(t) - (\psi X)(t)|^2$$

waarbij we een schatting $\hat{S}(t)$ de beste noemen als

$$\mathbb{E}\,|S(t) - \hat{S}(t)|^2 = \min_{\psi\in\Pi} \mathbb{E}\,|S(t) - (\psi X)(t)|^2$$

met $\hat{S}(t) = (\hat{\psi}X)(t)$, $t \in T$ en $\hat{\psi} \in \Pi$

<u>Opmerking</u>: De keuze van bovenstaand criterium sluit aan op vroegere ervaringen. Als voorspelling van de uitkomst van een stochastische grootheid X namen we meestal $a = \mathbb{E}X$, ofwel: de a die de funktie $f(a) = \mathbb{E}\,(X - a)^2$ minimaliseert.
Analoog: wanneer X en Y een simultane verdeling hebben, een realisatie van Y bekend is en X voorspeld moet worden, nemen we als schatter die $a(Y)$ die

$$\mathbb{E}\,|X - a(Y)|^2$$

minimaliseert.
Resultaat: $a(Y) = \mathbb{E}\,(X|Y)$.

Op grond van bovenstaande opmerking mogen we verwachten:

<u>Lemma 5.1</u>: $\hat{S}(t) = \mathbb{E}(S(t)\,|\,\{X(\tau)\,|\,\tau \in A(t)\})$.

<u>Bewijs</u>: $\mathbb{E}_{X,S}|S(t) - (\psi X)(t)|^2 = \mathbb{E}_X \mathbb{E}_S(|S(t) - (\psi X)(t)|^2\,|\,\{X(\tau)\,|\,\tau \in A(t)\}) = (*)$
moet minimaal zijn voor $(\psi X)(t) = \hat{S}(t)$.
Noem $B := \{X(\tau)\,|\,\tau \in A(t)\}$ en bekijk

$$\mathbb{E}(|S(t) - (\psi X)(t)|^2|B) = \mathbb{E}((S(t) - (\psi X)(t))\overline{(S(t) - (\psi X)(t))}|B) =$$

$$= \mathbb{E}((S(t) - D(t) + D(t) - (\psi X)(t))\overline{(S(t) - D(t) + D(t) - (\psi X)(t))}|B) =$$

(met $\{D(t)\,|\,t \in T\}$ een SP)

$$= \mathbb{E}[|S(t) - D(t)|^2|B] + \mathbb{E}[|D(t) - (\psi X)(t)|^2|B] +$$

$$+ \mathbb{E}[(S(t) - D(t))\overline{(D(t) - (\psi X)(t))} + (D(t) - (\psi X)(t))\overline{(S(t) - D(t))}|B] = (**).$$

Noem de laatste term van $(**)$: $(***)$.
Kies $D(t) = \mathbb{E}(S(t)|B)$.
Omdat $\mathbb{E}(S(t)|B)$ een funktie is van B geldt nu:

$$\mathbb{E}(D(t)|B) = D(t) \ .$$

Verder werken we met filters ψ, zódanig dat $(\psi X)(t)$ in termen van de $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$ wordt uitgedrukt, m.a.w.: $(\psi X)(t)$ is een funktie van B zódat: $\mathbb{E}((\psi X)(t)|B) = (\psi X)(t)$.
Nu geldt:

$$(***) = \overline{(D(t) - (\psi X)(t))}\,\mathbb{E}(S(t)|B) - \overline{(D(t) - (\psi X)(t))}D(t) +$$

$$+ (D(t) - (\psi X)(t))\,\mathbb{E}(\overline{S(t)}|B) - (D(t) - (\psi X)(t))\overline{D(t)} =$$

$$= 0 + 0 = 0 \ .$$

En:

$$(**) = \mathbb{E}(|S(t) - \mathbb{E}(S(t)|B)|^2|B) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(S(t)|B) - (\psi X)(t)|^2|B).$$

De eerste term is onafhankelijk van ψ, de tweede term is gelijk aan nul voor de keuze: $(\psi X)(t) = \mathbb{E}(S(t)|B)$.
Dus volgt:

$$(*) \text{ is minimaal voor } (\psi X)(t) = \mathbb{E}(S(t)|B) = \hat{S}(t) \;. \qquad \text{q.e.d.}$$

Om praktische redenen kan men van het filter ψ dat $X(t)$ in $(\psi X)(t)$ overvoert eisen dat $(\psi X)(t)$ te schrijven is als lineaire combinatie van de $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$. In stelling 5.2 zal worden aangetoond dat voor het geval $S(t)$ en $X(t)$ simultaan normaal verdeeld zijn, dit geen echte beperking is. Dit suggereert dat ook in een meer algemene situatie de beperking niet al te sterk is.

Laat L de verzameling zijn van lineaire transformaties van X, zódanig dat voor elke $L \in L$ geldt: $(LX)(t)$ is te schrijven als lineaire combinatie van de $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$.

<u>Stelling 5.1</u>: Stel $\exists L_0 \in L$ z.d.d. $\forall \tau \in A(t)$: $S(t) - (L_0X)(t) \perp X(\tau)$ dan:

$$\min_{L \in L} \mathbb{E}|S(t) - (LX)(t)|^2 = \mathbb{E}|S(t) - (L_0X)(t)|^2$$

met $\mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{S(t)}$ een maat voor de fout in de schatting.

<u>Definitie 5.1</u>: De L_0 uit stelling 5.1 heet een <u>beste lineaire schatter</u> van $S(t)$.

<u>Bewijs</u> (van stelling 5.1):

$$\mathbb{E}|S(t) - (LX)(t)|^2 = \mathbb{E}|S(t) - (L_0X)(t) + (L_0X)(t) - (LX)(t)|^2 =$$

$$= \mathbb{E}|S(t) - (L_0X)(t)|^2 + \mathbb{E}|((L_0 - L)X)(t)|^2 +$$

$$+ \mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{((L_0 - L)X)(t)} + \mathbb{E}((L_0 - L)X)(t)\overline{(S(t) - (L_0X)(t))}$$

De eerste term is onafhankelijk van L,
de tweede term is ≥ 0 en $= 0$ als $L = L_0$,
de derde en vierde term $= 0$ vanwege de orthogononaliteit, immers, ook $((L_0 - L)X)(t) = (L_0X)(t) - (LX)(t)$ kan worden geschreven als een lineaire combinatie van $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$, terwijl

$$\mathbb{E}\, X(\tau)\overline{(S(t) - (L_0X)(t))} = 0 \qquad \forall \tau \in A(t) .$$

N.B. Een verwachting van een lineaire combinatie van stochastische grootheden is een lineaire combinatie van verwachtingen van stochastische grootheden.

De fout in de schatting is nu:

$$\mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{(S(t) - (L_0X)(t))} =$$

$$= \mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{S(t)} - \mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{(L_0X)(t)} =$$

$$= \mathbb{E}(S(t) - (L_0X)(t))\overline{S(t)} ,$$

immers: $(L_0X)(t)$ kan weer geschreven worden als een lineaire combinatie van de $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$, zodat we weer van de orthogonaliteit gebruik kunnen maken.

Stelling 5.2: Laten $\{S(t) \mid t \in T\}$ en $\{X(t) \mid t \in T\}$ twee simultaan normale processen zijn (d.w.z. voor alle $t \in T$, $\tau \in T$ zijn $S(t)$ en $X(\tau)$ simultaan normaal verdeeld). Dan is een beste lineaire schatter van $S(t)$ tevens de beste schatter van $S(t)$.

Bewijs: Zonder beperking van de algemeenheid mag worden aangenomen:

$$\mathbb{E}\, X(t) = \mathbb{E}\, S(t) = 0 .$$

Stel $(LX)(t)$ is een beste lineaire schatter van $S(t)$, dus
$\forall \tau \in A(t) : S(t) - (LX)(t) \perp X(\tau)$.

Noem $B := \{X(\tau)|\tau \in A(t)\}$.

Op grond van lemma 5.1 is het voldoende te bewijzen:

$$\mathbb{E}(S(t)|B) = (LX)(t) \ .$$

Bekijk

$$\mathbb{E}(S(t) - (LX)(t)|B) \ .$$

$S(t)$ en $X(t)$ zijn beide normaal verdeeld, $\forall t$ (marginale verdelingen), en daardoor ook $S(t) - (LX)(t)$. (Bedenk dat $(LX)(t)$ een lineaire combinatie van $X(\tau)$, $\tau \in A(t)$ is).

Uit de orthogonaliteit van $S(t) - (LX)(t)$ en $X(\tau) \in B$, $\tau \in A(t)$ volgt de ongecorreleerdheid van $S(t) - (LX)(t)$ en B (bedenk dat de verwachtingen van $S(t) - (LX)(t)$ en $X(\tau) \in B$ nul zijn). Omdat het hier normale verdelingen betreft volgt nu:

$$S(t) - (LX)(t) \text{ en } B \text{ zijn onafhankelijk.}$$

Dan volgt:

$$\mathbb{E}(S(t) - (LX)(t)|B) = \mathbb{E}(S(t) - (LX)(t)) =$$

$$= \mathbb{E}(S(t)) - \mathbb{E}(LX)(t) = 0 - 0 = 0$$

zódat:

$$\mathbb{E}(S(t)|B) = \mathbb{E}((LX)(t)|B) = (LX)(t) \ ,$$

waarbij het laatste =-teken weer geldt vanwege het feit, dat $(LX)(t)$ geheel door B bepaald wordt. q.e.d.

<u>Voorbeeld 1</u>: Gegeven een $SP\{X(t)|t \in T\}$, een $SP\{Y(t)|t \in T\}$ en een $SP\{S(t)|t \in T\}$; de beide laatste processen zijn zwak stationair en ongecorreleerd, er geldt:

$$X(t) = S(t) + Y(t) \ ; \qquad t \in T \ .$$

Hierbij is $S(t)$ het (onbekende) proces dat ons interesseert, $X(t)$ is waarneembaar, terwijl $Y(t)$ als een storing (ruis) kan worden geïnterpreteerd. We willen nu $S(t)$ schatten m.b.v. $X(t)$. (Dus $A(t) = \{t\}$).

Lemma 5.1 levert dan als schatter $\mathbb{E}(S(t)\,|\,X(t))$.
Zoeken we een beste lineaire schatter, dan vinden we: $(L_0X)(t) = \alpha X(t)$, waarbij α zodanig is gekozen dat:

$$S(t) - \alpha X(t) \perp X(t),$$

ofwel

$$\mathbb{E}\, S(t)\overline{X(t)} = \alpha \mathbb{E}\, X(t)\overline{X(t)} \;,$$

en dus

$$R_{sx}(0) = \alpha R_{xx}(0)$$

Wegens het feit dat de processen $\{S(t)\,|\,t \in T\}$ en $\{Y(t)\,|\,t \in T\}$ ongecorreleerd zijn, geldt:

$$R_{xx}(0) = R_{ss}(0) + R_{yy}(0) \text{ en } R_{sy}(0) = 0 \;,$$

zódat we vinden:

$$R_{ss}(0) = R_{sx}(0) = \alpha R_{xx}(0) = \alpha(R_{ss}(0) + R_{yy}(0))$$

en dus

$$\alpha = \frac{R_{ss}(0)}{R_{ss}(0) + R_{yy}(0)}$$

Om nu te zien hoe goed een schatting $Z(t) = \alpha X(t)$ is, vergelijken we de spectrale dichtheden van $Z(t)$ en $S(t)$ (aangenomen dat ze bestaan):

$$S_{zz}(\lambda) = |\alpha|^2 S_{xx}(\lambda) = |\alpha|^2 (S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)) =$$

$$= \left| \frac{R_{ss}(0)}{R_{ss}(0) + R_{yy}(0)} \right|^2 (S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)) =$$

$$= \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{ss}(\nu)\,d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{ss}(\nu)\,d\nu + \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\nu)\,d\nu} \right)^2 (S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)) \;.$$

Voorbeeld 2: We beschouwen dezelfde situatie als in voorbeeld 1 met dien verstande dat we nu $S(t)$ proberen te schatten op basis van $\{X(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, dus $A(t) = \mathbb{R}$.
Beperking tot lineaire schatters en toepassing van stelling 5.1 levert:

$$\mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)dH(\tau) - S(t)\right)\overline{X(\xi)} = 0 .$$

De vraag is nu of we een H kunnen vinden, die voldoet.
$\forall t,\xi \in \mathbb{R}$ volgt uit bovenstaande vergelijking:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-\xi-\tau)dH(\tau) = R_{sx}(t-\xi) = R_{ss}(t-\xi)$$

ofwel (met $u = t - \xi$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(u-\tau)dH(\tau) = R_{ss}(u) .$$

Onderstel nu: de processen zijn continu en de spectrale dichtheden $S_{ss}(\lambda)$, $S_{yy}(\lambda)$ en dus ook $S_{xx}(\lambda)$ bestaan, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. Links en rechts de Fouriergetransformeerde nemen levert dan:

$$S_{xx}(\lambda)H^*(\lambda) = S_{ss}(\lambda) ,$$

waarin $H^*(\lambda)$ de Fouriergetransformeerde van $H(t)$ voorstelt.
Dus:

$$H^*(\lambda) = \frac{S_{ss}(\lambda)}{S_{xx}(\lambda)} = \frac{S_{ss}(\lambda)}{S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)}$$

Noemen we

$$Z(t) := \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)dH(\tau) ,$$

dan weten we uit het voorbeeld aan het eind van de vorige paragraaf dat:

$$S_{zz}(\lambda) = |H^*(\lambda)|^2 S_{xx}(\lambda) =$$

$$= \left(\frac{S_{ss}(\lambda)}{S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)}\right)^2 (S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)) = \frac{S_{ss}(\lambda)}{S_{ss}(\lambda) + S_{yy}(\lambda)} S_{ss}(\lambda)$$

m.a.w.: de spectrale dichtheid van de schatting en het te schatten proces zijn aan elkaar gelijk, op een "verhoudingsconstante" na.

Voor het geval dat $A(t) = \{\tau | \tau \leq t\}$ vinden we de volgende vergelijking:

$$\int_0^\infty R_{xx}(u - \tau) dH(\tau) = R_{ss}(u) , \qquad u \geq 0$$

de z.g. Wiener-Hopf-vergelijking.

Integraalvergelijkingen van deze soort worden behandeld in het college Toegepaste Aanalyse II. Voor het geval dat $A(t)$ discreet is, krijgen we stelsels vergelijkingen.

Voor toepassingen is het i.h.a. een nadeel dat we voor grote systemen toch nog veel moeten onthouden, terwijl vaak de gebeurtenissen in een verder achter ons liggend verleden een minder belangrijke rol spelen bij het voorspellen van nieuwe procesrealisaties. Dit maakt beperking tot nog eenvoudiger schatters gewenst.

<u>Definitie 5.2</u>: Een SP$\{S(n) | n = 1,2,\ldots\}$ heeft de <u>zwakke Markov-eigenschap</u> als voor elke $n > 2$ een beste lineaire schatter (voorspeller) van $S(n)$ gebaseerd op $S(1),\ldots,S(n-1)$ dezelfde is als de beste lineaire schatter gebaseerd op $S(n-1)$.

<u>Lemma 5.2</u>: Laat $\{S(n) | n = 1,2,\ldots\}$ een SP zijn met de zwakke Markov-eigenschap en laat $\hat{S}(n) = \alpha_n S(n-1)$ de beste lineaire schatter van $S(n)$ zijn gebaseerd op $S(n-1)$.

Dan geldt:

$$R_{ss}(i,n) R_{ss}(n-1,n-1) = R_{ss}(i,n-1) R_{ss}(n-1,n) \qquad \forall i,n \text{ met } 1 \leq i \leq n-1.$$

Bewijs: $R(i,n)R(n-1,n-1) = R(i,n-1)R(n-1,n)$ is equivalent met $R(n,i)R(n-1,n-1) = R(n-1,i)R(n,n-1)$. Uit het feit dat $\hat{S}(n) = \alpha_n S_{n-1}$ de beste lineaire schatter van $S(n)$ is volgt:

$$S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(i) \,, \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

$$\mathbb{E}\,(S(n) - \alpha_n S(n-1))\overline{S(i)} = 0 \,, \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

$$R(n,i) - \alpha_n R(n-1,i) = 0 \,, \qquad i = 1,\ldots,n-1.$$

Als voor een i, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, geldt: $R(n-1,i) = 0$ dan volgt: $R(n,i) = 0$ en de relatie is bewezen.

In het bijzonder geldt: $R(n-1,n-1) = 0 \Rightarrow R(n,n-1) = 0$.

Dus: stel nu: $R(n-1,i) \neq 0$ voor $i \in I \subset \{1,\ldots,n-1\}$, met $n-1 \in I$.

Dan:

$$\alpha_n = \frac{R(n,i)}{R(n-1,i)} \,, \qquad \forall i \in I \,,$$

en dus

$$\frac{R(n,i)}{R(n-1,i)} = \frac{R(n,n-1)}{R(n-1,n-1)}$$

$$R(n,i)R(n-1,n-1) = R(n,n-1)R(n-1,i) \,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Stelling 5.3: Voor het $SP\{S(n)\,|\,n = 1,2,\ldots\}$ met $\sigma^2(S(j)) \neq 0$, $j = 1,2,\ldots$ geldt:

$S(n)$ heeft de zwakke Markov-eigenschap $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R_{SS}(i,n)R_{SS}(k,k) = R_{SS}(i,k)R_{SS}(k,n) \qquad \forall i,k,n \text{ met } 1 \leq i \leq k \leq n-1.$$

Bewijs: $\sigma^2(S(n-1)) \neq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\,|S(n-1)|^2 = R(n-1,\, n-1) \neq 0$.

Kies

$$\alpha_n = \frac{R(n,\, n-1)}{R(n-1,\, n-1)} \,.$$

Voor $R(n-1,\, i) \neq 0$ vinden we uit het gegeven, met $k = n-1$:

$$\mathbb{E}\,(S(n) - \alpha_n S(n-1))S(i) = \mathbb{E}\,(S(n) - \frac{R(n,i)}{R(n-1,i)}S(n-1))S(i) = 0$$

Voor $R(n-1,i) = 0$ vinden we, wegens $R(n-1,\ n-1) \neq 0$:
$R(n,i) = 0$, en dus:

$$\mathbb{E}\,(S(n) - \alpha_n S(n-1))S(i) = R(n,i) - \alpha_n R(n-1,i) = 0 - 0 = 0 .$$

"$\Rightarrow$" Uit lemma 5.2 weten we:

$$R(i,n)R(n-1,n-1) = R(i,n-1)R(n-1,n), \qquad \forall i,n \text{ met } 1 \le i \le n-1.$$

(*) Kies $n = m$: $R(i,m)R(m-1,m-1) = R(i,m-1)R(m-1,m) \qquad 1 \le i \le m-1$

(**) Kies $i = m-2,\ n = m$: $R(m-2,m)R(m-1,m-1) = R(m-2,m-1)R(m-1,m)$

(***) Kies $n = m-1$: $R(i,m-1)R(m-2,m-2) = R(i,m-2)R(m-2,m-1) \qquad 1 \le i \le m-2.$

Stel (**) $\neq 0$ voor een of andere m.

Nu: $\frac{(*)}{(**)}$ (***) levert voor $1 \le i \le m-2$:

$$\frac{R(i,m)R(m-1,m-1)}{R(m-2,m)R(m-1,m-1)} R(i,m-1)R(m-2,m-2) =$$

$$= \frac{R(i,m-1)R(m-1,m)}{R(m-2,m-1)R(m-1,m)} R(i,m-2)R(m-2,m-1)$$

zodat voor $R(i,\ m-1) \neq 0$ volgt:

$$R(i,m)R(m-2,m-2) = R(i,m-2)R(m-2,m) \qquad 1 \le i \le m-2 .$$

Voor $R(i,\ m-1) = 0$ volgt dit resultaat rechtstreeks uit (*) en (***)
(wegens (**) $\neq 0$).

Stel nu (**) = 0 voor een of andere m.

Merk op: $\sigma^2(S(j)) \neq 0$ impliceert $R(j,j) \neq 0$.

Nu geldt: (**) $= 0 \Rightarrow R(m-2,m-1) = 0 \vee R(m-1,m) = 0.$

$R(m-2,m-1) = 0 \underset{(***)}{\Rightarrow} R(i,m-1) = 0,\ \ 1 \le i \le m-2 \underset{(*)}{\Rightarrow} R(i,m) = 0,\ \ 1 \le i \le m-2,$

terwijl $R(m-1,m) = 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} R(i,m) = 0, \quad 1 \le i \le m-1.$

Dus:

(**) $= 0 \Rightarrow R(i,m) = 0,\ \ 1 \le i \le m-2$, i.h.b. $R(m-2,m) = 0$,

zódat wederom

$$R(i,m)R(m-2,m-2) = R(i,m-2)R(m-2,m) \qquad 1 \le i \le m-2.$$

Nu geldt dit ook voor elke m.

Met induktie kan het nu ook verder worden aangetoond voor $k = m - 3,\dots,1$.

q.e.d.

<u>Stelling 5.4</u>: Het $SP\{S(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ heeft de zwakke Markov-eigenschap $\Leftrightarrow$ $\exists$ een $SP\{U(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ met $U(n) \perp U(m)$ voor $n \neq m$ en $\exists$ getallen A_n zódanig dat

$$S(1) = U(1)$$

$$S(n) = A_n S(n-1) + U(n)\,, \qquad n = 2,3,\dots\,.$$

<u>Bewijs</u>: Laat $\hat{S}(n)$ de beste lineaire schatter zijn voor $S(n)$ gebaseerd op $S(n-1),\dots,S(1)$.

"$\Rightarrow$" $\hat{S}(n) = \alpha_n S(n-1)$ met $S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(i)\,, \quad i = 1,2,\dots,n-1$.

Definieer $U(1) := S(1)$

$$U(n) := S(n) - \alpha_n S(n-1)\,.$$

Uit $S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(i)\,, \quad i = 1,2,\dots,n-1$ volgt:

$$S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(i) - \alpha_i S(i-1)\,, \qquad i = 2,\dots,n-1\,,$$

alsmede

$$S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(1)\,,$$

dus:

$$U(n) \perp U(i) \qquad i = 1,\dots,n-1\,,$$

zodat we $A_n = \alpha_n$ kunnen kiezen voor $n = 2,3,\dots$.

"$\Leftarrow$" Kies $\alpha_n = A_n\,, \quad n = 2,3,\dots,$ dan

$$S(n) - \alpha_n S(n-1) = U(n) \perp U(i)\,, \qquad i = 1,\dots,n-1$$

$$S(n) - \alpha_n S(n-1) \perp S(i)\,, \qquad i = 1,\dots,n-1\,,$$

want elke $S(i)$ is een lineaire conbinatie van $U(1),\dots,U(i)$. q.e.d.

<u>Toepassing: Het Kalmanfilter</u>

Gegeven zijn een $SP\{S(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$, een $SP\{V(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ en een $SP\{X(n)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$.

Verder geldt:

$S(n) = A_n S(n-1) + U(n)$ met $A_n \in \mathbb{C}$ en $U(n) \perp U(m)$ voor $n \neq m$, $P(S(0)=0)=1$.
$X(n) = S(n) + V(n)$ met $V(n) \perp V(m)$ voor $n \neq m$ en $V(n) \perp S(m)$ voor alle n,m.
De bedoeling is nu $S(n)$ te schatten met behulp van $X(1),\dots,X(n)$.
De bewering is: de beste lineaire schatter van $S(n)$ gebaseerd op $X(1),\dots,X(n)$ is van de vorm:

$$\hat{S}(n) = \alpha_n \hat{S}(n-1) + \beta_n X(n) \quad \text{met } \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C} .$$

De transformatie die $X(1),\dots,X(n)$ in $\hat{S}(n)$ overvoert, heet het Kalmanfilter.

De volgende notatie blijkt handig: $R_{ss}(i,j) =: R_{ij}$ en $\mathbb{E}\,|V(n)|^2 =: \sigma_n^2$.
Dan volgt:

$$R_{xs}(i,j) = R_{ij}$$

$$R_{xx}(i,j) = \begin{cases} R_{ij} & \text{als } i \neq j \\ R_{ii} + \sigma_i^2 & \text{als } i = j \end{cases}$$

De bovenstaande bewering betreffende $\hat{S}(n)$ is gerechtvaardigd als α_n en β_n zo gekozen kunnen worden dat

$$S(n) - \hat{S}(n) \perp \{X(1),\dots,X(n)\} .$$

Stel daarom

$$\mathbb{E}\,[S(n) - \alpha_n \hat{S}(n-1) - \beta_n X(n)]\overline{X(k)} = 0 , \qquad k = 1,\dots,n ,$$

dus

$$\mathbb{E}\, S(n)\overline{X(k)} - \alpha_n \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{X(k)} - \beta_n \mathbb{E}\, X(n)\overline{X(k)} = 0 , \qquad k = 1,\dots,n .$$

$$(*) \qquad R_{nk} - \alpha_n \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{X(k)} - \beta_n \left[R_{nk} + \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq n \\ \sigma_n^2 & \text{als } k = n \end{cases} \right] = 0 , \qquad k = 1,\dots,n .$$

Dus voor $k = 1,\dots,n-1$ geldt:

$$R_{nk} - \alpha_n \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{X(k)} - \beta_n R_{nk} = 0 .$$

Uit $S(n-1) - \hat{S}(n-1) \perp X(k)$, $k = 1,\ldots,n-1$ volgt:
$\mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{X(k)} = \mathbb{E}S(n-1)\overline{X(k)}$. Dit invullen levert:

$$R_{nk} - \alpha_n \mathbb{E}S(n-1)\overline{X(k)} - \beta_n R_{nk} = (1-\beta_n)R_{nk} - \alpha_n R_{n-1,k} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \frac{\alpha_n}{1-\beta_n} = \frac{R_{nk}}{R_{n-1,k}}, \qquad k = 1,\ldots,n-1 .$$

Volgens stelling 5.4 heeft het S-proces de zwakke Markov-eigenschap en op grond daarvan volgt (stelling 5.3)

$$\frac{R_{nk}}{R_{n-1,k}} = \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-1}}; \qquad k = 1,\ldots,n-1$$

zódat we uit $\frac{\alpha_n}{1-\beta_n} = \frac{R_{nk}}{R_{n-1,k}}$, $k = 1,\ldots,n-1$ slechts één eis voor α_n en β_n kunnen halen:

$$\frac{\alpha_n}{1-\beta_n} = \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-1}}$$

Nu nog het geval $k = n$ in (*):

$$(**) \qquad R_{nn} - \alpha_n \mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{X(n)} - \beta_n[R_{nn} + \sigma_n^2] = 0 .$$

Bekijk de gemiddelde kwadratische fout van $\hat{S}(n)$:

$$(***) \qquad e_n := \mathbb{E}\,|S(n) - \hat{S}(n)|^2 = \mathbb{E}\,(S(n) - \hat{S}(n))\overline{S(n)} =$$

$$= \mathbb{E}S(n)\overline{S(n)} - \mathbb{E}\hat{S}(n)\overline{S(n)} = R_{nn} - \mathbb{E}\,(\alpha_n\hat{S}(n-1) + \beta_n X(n))\overline{S(n)} =$$

$$= R_{nn} - \alpha_n \mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{S(n)} - \beta_n R_{nn} .$$

En omdat

$$\mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{S(n)} = \mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{(X(n) - V(n))} = \mathbb{E}\hat{S}(n-1)\overline{X(n)}$$

volgt uit (**):

$$R_{nn} - \alpha_n \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{S(n)} - \beta_n [R_{nn} + \sigma_n^2] = 0 \text{ .}$$

Invullen van (***) geeft nu:

$$e_n - \beta_n \sigma_n^2 = 0 \text{ .}$$

Tezamen met

$$\frac{\alpha_n}{1-\beta_n} = \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-1}}$$

levert dit

$$\alpha_n = \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-1}} \left(1 - \frac{e_n}{\sigma_n^2}\right) = A_n \left(1 - \frac{e_n}{\sigma_n^2}\right)$$

waarin

$$A_n = \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-1}}$$

op grond van stelling 5.4.

De e_n's en daarmee de α_n's en de β_n's kunnen als volgt recurrent berekend worden.

Uit (***) volgt:

$$e_n = R_{nn} - A_n \left(1 - \frac{e_n}{\sigma_n^2}\right) \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{S(n)} - \frac{e_n}{\sigma_n^2} R_{nn} \text{ .}$$

Ook geldt:

$$e_{n-1} = \mathbb{E}\,[S(n-1) - \hat{S}(n-1)]\overline{S(n-1)} = R_{n-1,n-1} - \mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{S(n-1)}$$

dus

$$\mathbb{E}\,\hat{S}(n-1)\overline{S(n-1)} = R_{n-1,n-1} - e_{n-1} \text{ .}$$

Merk op:

$$\hat{S}(n-1) = \mathcal{LC}(X(1),\dots,X(n-1)) =$$
$$= \mathcal{LC}(S(1),\dots,S(n-1),\ V(1),\dots,V(n-1)) =$$
$$= \mathcal{LC}(U(1),\dots,U(n-1),\ V(1),\dots,V(n-1))\ ,$$

waarin $\mathcal{LC}$ staat voor "lineaire combinatie".
Verder impliceert $U(n) = S(n) - A_n S(n-1)$ dat $U(n) \perp V(i)$, $1 \le i \le n-1$.
Dus:

$$S(n) - A_n S(n-1) = U(n) \perp \hat{S}(n-1)$$

en invullen levert

$$e_n = R_{nn} - A_n\left(1 - \frac{e_n}{\sigma_n^2}\right)A_n[R_{n-1,n-1} - e_{n-1}] - \frac{e_n}{\sigma_n^2} R_{nn}\ ,$$

$$e_n = \frac{R_{nn} + A_n^2(e_{n-1} - R_{n-1,n-1})}{R_{nn} + A_n^2(e_{n-1} - R_{n-1,n-1}) + \sigma_n^2}\,\sigma_n^2$$

$$\alpha_n = A_n\left(1 - \frac{e_n}{\sigma_n^2}\right)$$

$$\beta_n = \frac{e_n}{\sigma_n^2}\ .$$

De rekenprocedure is nu als volgt: bepaal β_1 uit

$$\mathbb{E}\,(S(1) - \beta_1 X(1))\overline{X(1)} = 0$$

$$R_{11} - \beta_1(R_{11} + \sigma_1^2) = 0$$

$$\beta_1 = \frac{R_{11}}{R_{11} + \sigma_1^2}$$

$$e_1 = \frac{R_{11}\sigma_1^2}{R_{11} + \sigma_1^2}$$

etc.

Daar $\hat{S}(n) = \alpha_n \hat{S}(n - 1) + \beta_n X(n)$ is het voor de berekening van de volgende schatting voldoende alleen de vorige schatting en de vorige kwadratische fout te onthouden.

Opmerkingen

1. Voor het geval $X(n) = B_n S(n) + C_n V(n)$ met B_n, C_n matrices en $X(n)$, $S(n)$, $V(n)$ stochastische vectoren kan men eenzelfde resultaat op een in feite analoge wijze afleiden.
2. Nergens wordt zwakke stationariteit vereist.
3. Bovenstaande vindt toepassing in het separatieprincipe: bepaal eerst $\hat{S}(n)$, ga dan met deze geschatte toestand sturen, i.p.v. met de toestand zelf.

6. Spectraalanalyse van stochastische processen

In het verleden (§ 4) hebben we gekeken naar Fouriertransformaties van autocorrelatiefunkties. Dit idee willen we nu uitbreiden voor stochastische processen. Stel we hebben twee SP's $\{X(t) \mid t \in T\}$ en $\{Y(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ waarvoor geldt:

$$Y(n) \perp Y(m) \text{ voor } n \neq m$$

$$\mathbb{E}\,|Y(n)|^2 = \sigma_n^2$$

$$X(t) = \sum_{j=1}^{k} Y(j)e^{it\lambda_j}$$

Dan volgt:

$$\mathbb{E}\,X(t+\tau)\overline{X(t)} = \sum_{j,\ell}^{k} \mathbb{E}\,Y(j)\overline{Y(\ell)}e^{i(t+\tau)\lambda_j - it\lambda_\ell} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 e^{i\tau\lambda_j} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$$

met

$$F(\lambda) = \sum_{\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\}} \sigma_j^2$$

(spectrale verdelingsfunktie: merk op dat $\{X(t) \mid t \in T\}$ een continu SP is).

De generalisatie van het discrete naar het continue geval zou nu als volgt kunnen luiden:
Stel we hebben een SP$\{X(t) \mid t \in T\}$, continu en zwak stationair en een SP$\{Y(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ waarvoor geldt:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Y(\lambda)d\lambda$$

met $Y(\lambda_1) \perp Y(\lambda_2)$ voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Zo'n Y-proces levert echter teveel problemen op, met name t.a.v. de integratie, het proces is n.l. bijna altijd discontinu, $\forall\lambda$, immers:

$$\mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(\lambda_0)|^2 = \mathbb{E}\,|Y(\lambda)|^2 + \mathbb{E}\,|Y(\lambda_0)|^2 \geq E|Y(\lambda_0)|^2 .$$

Daarom zullen we zoeken naar een Y-proces waarvoor geldt:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)$$

met de toenamen van Y orthogonaal.

Definitie 6.1: Het SP$\{Y(\lambda)|\lambda \in \mathbb{R}\}$ heet een SP met orthogonale toenamen als:

$$\mathbb{E}\,(Y(\lambda_4) - Y(\lambda_3))\overline{(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))} = 0 \quad \text{voor } \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 .$$

Voorbeeld: Stochastische wandeling

Laat gegeven zijn stochastische grootheden $Z(n)$; $n \in \mathbb{N}$, onderling onafhankelijk met $\mathbb{P}\,(Z(n) = 1) = \mathbb{P}\,(Z(n) = -1) = \frac{1}{2}$.
Definieer een SP$\{Y(n)|n \in \mathbb{N}\}$ door $Y(n) := \Sigma_{k=1}^{n} Z(k)$. Dan: $\mathbb{E}\,Y(n) = 0$ en $\mathbb{E}\,(Y(n_4) - Y(n_3))(Y(n_2) - Y(n_1)) = \mathbb{E}\,(Y(n_4) - Y(n_3))\mathbb{E}\,(Y(n_2) - Y(n_1)) = 0$, met $n_4 > n_3 \geq n_2 > n_1 > 0$.

Stelling 6.1: Als $\{Y(\lambda)|\lambda \in \mathbb{R}\}$ een SP is met orthogonale toenamen dan bestaat er een monotoon niet-dalende reële funktie F met

$$\mathbb{E}\,|Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \quad \text{voor alle } \lambda_1, \lambda_2 \text{ met } \lambda_2 \geq \lambda_1 .$$

Bewijs. Kies

$$F(\lambda) := \begin{cases} \mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(0)|^2 & \text{als } \lambda \geq 0 \\ -\mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(0)|^2 & \text{als } \lambda < 0 . \end{cases}$$

Veronderstel $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, dan

$$\mathbb{E}\,|Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)|^2 = \mathbb{E}\,(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))\overline{(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))} =$$

$$= \mathbb{E}\,(Y(\lambda_2) - Y(0))\overline{(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))} + \mathbb{E}\,(Y(0) - Y(\lambda_1))\overline{(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))} =$$

$$= \mathbb{E}\,(Y(\lambda_2) - Y(0))\overline{(Y(\lambda_2) - Y(0))} + \mathbb{E}\,(Y(\lambda_2) - Y(0))\overline{(Y(0) - Y(\lambda_1))} + 0 =$$

$$= F(\lambda_2) + \mathbb{E}\,(Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1))\overline{(Y(0) - Y(\lambda_1))} + \mathbb{E}\,(Y(\lambda_1) - (Y(0))\overline{(Y(0) - Y(\lambda_1))} =$$

$$= F(\lambda_2) + 0 - F(\lambda_1) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$$

De gevallen $\lambda_2 < 0 \leq \lambda_1$ en $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ gaan analoog. q.e.d.

Opmerkingen:

1) De funktie F uit stelling 6.1 is niet noodzakelijk begrensd.
2) F heeft hoogstens aftelbaar veel sprongpunten, immers een monotone funktie heeft op elk eindig interval, en dus op $\mathbb{R}$, hoogstens aftelbaar veel discontinuïteitspunten.
3) F is bepaald op een additieve constante na.

Lemma 6.2: Het SP$\{Y(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$ heeft orthogonale toenamen impliceert dat voor elke $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ stochastische grootheden $Y(\lambda_0^+)$ en $Y(\lambda_0^-)$ en getallen $F(\lambda_0^+)$ en $F(\lambda_0^-)$ bestaan, zodanig dat:

$$Y(\lambda_0^+) = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_0} Y(\lambda)\ ;\ F(\lambda_0^+) = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_0} F(\lambda)\ ;\ F(\lambda) - F(\lambda_0^+) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(\lambda_0^+)|^2, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

en

$$Y(\lambda_0^-) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} F(\lambda)\ ;\ F(\lambda_0^-) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} F(\lambda)\ ;\ F(\lambda_0^-) - F(\lambda) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda_0^-) - Y(\lambda)|^2, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

Bovendien geldt: Het Y-proces is continu in díé punten, waar F continu is, en omgekeerd, m.a.w.: op hoogstens aftelbaar veel λ na (de sprongpunten van F) geldt voor alle λ

$$\mathbb{P}\,(Y\ (\lambda^-) = Y(\lambda) = Y(\lambda^+)) = 1\ .$$

Tenslotte geldt: als F begrensd is bestaan ook stochastische grootheden $Y(\infty)$ en $Y(-\infty)$ en getallen $F(\infty)$ en $F(-\infty)$ zó dat:

$$Y(\infty) = \lim_{\lambda\to\infty} Y(\lambda)\,;\ F(\infty) = \lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda)\,;\ F(\infty) - F(\lambda) = \mathbb{E}\,|Y(\infty) - Y(\lambda)|^2$$

en

$$Y(-\infty) = \lim_{\lambda\to-\infty} Y(\lambda)\,;\ F(-\infty) = \lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda)\,;\ F(\lambda) - F(-\infty) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(-\infty)|^2 \ .$$

<u>Bewijs</u>: Uit definitie 2.1, definitie 2.2 en stelling 6.1 volgt direkt:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(\lambda_0)|^2 = \lim_{\lambda\to\lambda_0} |F(\lambda) - F(\lambda_0)|$$

m.a.w. $Y(\lambda)$ continu in $\lambda_0 \Leftrightarrow F(\lambda)$ continu in λ_0.

In de continuïteitspunten van F definiëren we dan: $Y(\lambda_0^+) := Y(\lambda_0^-) := Y(\lambda_0)$ zódat:

$$\mathbb{P}\,(Y(\lambda_0^-) = Y(\lambda_0) = Y(\lambda_0^+)) = 1 \ .$$

Nu de discontinuïteitspunten.

$$\lim_{\lambda_1,\lambda_2\uparrow\lambda_0} \mathbb{E}\,|Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)|^2 = \lim_{\lambda_1,\lambda_2\uparrow\lambda_0} |F(\lambda_2) - F(\lambda_1)| = 0$$

immers: $F(\lambda_2)$ en $F(\lambda_1)$ worden van boven begrensd door $F(\lambda_0)$. De rij $\{Y(\lambda)\,|\,\lambda\uparrow\lambda_0\}$ is dus een fundamenteelrij, zodat, wegens de volledigheid van de ruimte der kwadratische integreerbare stochastische grootheden, geldt:

$$\lim_{\lambda\uparrow\lambda_0} Y(\lambda) =: Y(\lambda_0^-) \ .$$

De rij $\{F(\lambda)\,|\,\lambda \uparrow \lambda_0\}$ is eveneens een fundamentaalrij, zodat we, wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$, kunnen definiëren:

$$\lim_{\lambda\uparrow\lambda_0} F(\lambda) =: F(\lambda_0^-) \ .$$

Nu geldt:

$$F(\lambda_1) - F(\lambda_0^-) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} \{F(\lambda_1) - F(\lambda)\} = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} \mathbb{E}\,|Y(\lambda_1) - Y(\lambda)|^2 =$$

$$= \mathbb{E} \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} |Y(\lambda_1) - Y(\lambda)|^2 = \mathbb{E}\,|Y(\lambda_1) - Y(\lambda_0^-)|^2 \;.$$

Analoog voor $Y(\lambda_0^+)$ en $F(\lambda_0^+)$.

Tenslotte: als F begrensd is, dan bestaan $F(-\infty)$ en $F(\infty)$:

$$F(-\infty) := \lim_{\lambda \to -\infty} F(\infty)$$

$$F(\infty) := \lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) \;.$$

Verder:

$$0 = \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \to -\infty} |F(\lambda_1) - F(\lambda_2)| = \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \to -\infty} \mathbb{E}\,|Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2)|^2$$

zōdat, wederom wegens de fundamentaaleigenschap en de volledigheid:
$Y(-\infty) := \lim_{\lambda \to -\infty} Y(\lambda)$ bestaat en analoog $Y(\infty)$.
Het bewijs van

$$F(\infty) - F(\lambda) = \mathbb{E}\,|Y(\infty) - Y(\lambda)|^2$$

en van

$$F(\lambda) - F(-\infty) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda) - Y(-\infty)|^2$$

is geheel analoog aan het voorgaande. q.e.d.

In het vervolg zal $\{Y(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$ steeds een SP met orthogonale toenamen zijn waarvan de bijbehorende F begrensd is.
$F(-\infty)$ kan dus/0 gekozen worden.

Laat Φ de klasse zijn van de funkties op $\mathbb{R}$ die absoluut Riemann-Stieltjes integreerbaar zijn met betrekking tot een monotoon niet-dalende begrensde F, behorend bij zo'n $SP\{Y(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$.

<u>Stelling 6.2</u>: Laat voor $A,B \in \mathbb{R}$, $A < B$ (beide eindig):

$$\int_A^B |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \qquad \text{met } \varphi \in \Phi$$

en

$$F(\lambda_2) - F(\lambda_1) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)|^2 \quad \text{voor} \quad A \le \lambda_1 < \lambda_2 \le B\,.$$

Dan geldt:

$$\int_A^B \varphi(\lambda) dY(\lambda)$$

bestaat.

<u>Bewijs</u>: Beschouw eerst het geval dat φ een eindige trapfunktie is op $[A,B]$, dat wil zeggen

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{(\lambda_{k-1},\lambda_k]} \quad \text{met } A = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = B\,.$$

Dan geldt zeker

$$\int_A^B |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$$

en ook:

$$I_\varphi = \int_A^B \varphi(\lambda) dY(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k [Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+)]$$

dus I_φ bestaat.
Veronderstel nu $\varphi \in \Phi$ willekeurig.
Laat $\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ een partitie zijn van $[A,B]$ en definieer de eindige trapfunktie

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j) \chi_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} \quad \text{op } [A,B]\,.$$

Op $[A,B]$ is φ m.b.v. zo'n eindige trapfunktie willekeurig dicht te benaderen in die zin dat $\forall \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ een eindige trapfunktie φ_ε op $[A,B]$ bestaat zódanig dat

$$(*) \qquad \int_A^B |\varphi(\lambda) - \varphi_\varepsilon(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \varepsilon .$$

Immers: voor elke rij partities $\{\lambda_{k,j} | j = 0,\ldots,n_k\}_{k=1}^{\infty}$ van het interval $[A,B]$ die op den duur fijn genoeg worden, en de bijbehorende rijen ondersommen $\{\underline{s}_k\}_{k=1}^{\infty}$ en bovensommen $\{\bar{s}_k\}_{k=1}^{\infty}$ van de $|\varphi|^2$, met:

$$\underline{s}_k = \sum_{j=1}^{n_k} \inf\{|\varphi(\lambda)|^2 | \lambda_{k,j-1} < \lambda \le \lambda_{k,j}\} \cdot \{F(\lambda_{k,j}^+) - F(\lambda_{k,j-1}^+)\}$$

$$\bar{s}_k = \sum_{j=1}^{n_k} \sup\{|\varphi(\lambda)|^2 | \lambda_{k,j-1} < \lambda \le \lambda_{k,j}\} \cdot \{F(\lambda_{k,j}^+) - F(\lambda_{k,j-1}^+)\}$$

geldt dat:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{s}_k = \lim_{k\to\infty} \bar{s}_k$$

terwijl

$$\forall k : \underline{s}_k \le \int_A^B |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) \le \bar{s}_k$$

Kies nu k zódanig dat $\bar{s}_k - \underline{s}_k < \frac{1}{2}\varepsilon$ en daarbij een trapfunktie φ_ε op de bijbehorende partitie $\{\lambda_{k,j}\}_{j=0}^{n_k}$:

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = \sum_{j=1}^{n_k} \varphi(\lambda_{k,j}) \chi_{(\lambda_{k,j-1},\lambda_{k,j}]}$$

Dan geldt:

$$\int_A^B |\varphi(\lambda) - \varphi_\varepsilon(\lambda)|^2 dF(\lambda) = \int_A^B |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) +$$

$$+ \int_A^B |\varphi_\varepsilon(\lambda)|^2 dF(\lambda) - \int_A^B (\varphi(\lambda)\overline{\varphi_\varepsilon(\lambda)} + \varphi_\varepsilon(\lambda)\overline{\varphi(\lambda)})dF(\lambda)$$

In de laatste som zijn de eerste twee termen kleiner dan $\bar{s}_k$, terwijl de laatste kleiner is dan $-2\underline{s}_k$, zódat

$$\int_A^B |\varphi(\lambda) - \varphi_\varepsilon(\lambda)|^2 dF(\lambda) < 2(\bar{s}_k - \underline{s}_k) < \varepsilon \text{ .}$$

waarmee (*) bewezen is.

Laat $\{\lambda_{k,j} | j = 0,\ldots,n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\{\nu_{\ell,j} | j = 0,\ldots,m_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ twee rijen van partities van [A,B] zijn met

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n_k} (\lambda_{k,j} - \lambda_{k,j-1}) = \lim_{\ell\to\infty} \max_{1\le j\le m_\ell} (\nu_{\ell,j} - \nu_{\ell,j-1}) = 0$$

en laat $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\{\varphi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ de bijbehorende rijen van eindige trapfunkties zijn. Dan volgt uit (*): $\exists N_\varepsilon$ zódat, als $k,\ell > N_\varepsilon$, dan

$$\int_A^B |\varphi_k(\lambda) - \varphi_\ell(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \varepsilon$$

(convergente rijen hebben de fundamentaal-eigenschap).

Bekijk nu:

$$I_{\varphi_k} := \sum_{j=1}^{n_k} \varphi_k(\lambda_{k,j})[Y(\lambda_{k,j}^+) - Y(\lambda_{k,j-1}^+)]$$

en

$$I_{\varphi_\ell} := \sum_{j=1}^{m_\ell} \varphi_\ell(\nu_{\ell,j})[Y(\nu_{\ell,j}^+) - Y(\nu_{\ell,j-1}^+)] \text{ .}$$

Op grond van de orthogonale toenamen van het Y-proces geldt nu:

$$\mathbb{E}|I_{\varphi_k} - I_{\varphi_\ell}|^2 = \sum_{j=1}^{n_k} |\varphi_k(\lambda_{k,j})|^2 [F(\lambda_{k,j}^+) - F(\lambda_{k,j-1}^+)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_\ell} |\varphi_\ell(\nu_{\ell,j})|^2 [F(\nu_{\ell,j}^+) - F(\nu_{\ell,j-1}^+)] +$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \varphi_k(\rho_j)\overline{\varphi_\ell(\rho_j)}[F(\rho_j^+) - F(\rho_{j-1}^+)] +$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \varphi_\ell(\rho_j)\overline{\varphi_k(\rho_j)}[F(\rho_j^+) - F(\rho_{j-1}^+)] =$$

(waarbij $A = \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_n = B$ de gemeenschappelijke verfijning van de partities λ_k en ν_ℓ is.)

$$= \int_A^B |\varphi_k(\lambda)|^2 dF(\lambda) + \int_A^B |\varphi_\ell(\lambda)|^2 dF(\lambda) +$$

$$- \int_A^B \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_\ell(\lambda)} dF(\lambda) - \int_A^B \varphi_\ell(\lambda)\overline{\varphi_k(\lambda)} dF(\lambda) =$$

$$= \int_A^B |\varphi_k(\lambda) - \varphi_\ell(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \varepsilon$$

zódat, wegens definitie 2.1 en de volledigheid:

$$\lim_{k\to\infty} I_{\varphi_k} = \lim_{k\to\infty} \int_A^B \varphi_k(\lambda) dY(\lambda) = \int_A^B \varphi(\lambda) dY(\lambda) \qquad \text{q.e.d.}$$

Opmerkingen:

1) De stelling blijft gelden met $A = \infty$, $B = -\infty$. Dit valt eenvoudig in te zien met behulp van de volgende redenering:
Kies $A_1 := A_1(\varepsilon)$ en $B_1 := B_1(\varepsilon)$ zódanig dat $\lim_{\varepsilon\to 0} A_1 = - \lim_{\varepsilon\to 0} B_1 = -\infty$ en

$$\int_{-\infty}^{A_1} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{en} \quad \int_{B_1}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Dan geldt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_1}^{B_1} \varphi_k(\lambda)dY(\lambda) = \int_{A_1}^{B_1} \varphi(\lambda)dY(\lambda) \; .$$

Laat vervolgens $\varepsilon \to 0$.

2. De stelling is hier bewezen onder algemene voorwaarden. Voor ons doel is het echter voldoende dat de stelling geldt voor funkties φ, die stuksgewijs continu en begrensd zijn, deze funkties voldoen zeker aan de eis van integreerbaarheid t.a.v. F. Het bewijs van de stelling, met name het benaderen van een funktie m.b.v. trapfunkties, wordt daardoor wat eenvoudiger.

De omgekeerde bewering van stelling 6.2. luidt:

Stelling 6.3: Het bestaan van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda) \quad \text{met} \quad \varphi \in \Phi$$

impliceert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \; .$$

Bewijs: Voor eindige trapfunkties is het zonder meer in orde. Stel dus, voor φ willekeurig.

$$I_\varphi := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda) \; .$$

Zij verder gegeven een rij partities $\{\lambda_{i,j} | j = 0,1,\dots,n_i\}_{i=1}^{\infty}$ van een interval [a,b] zódat:

$$\lim_{i\to\infty} n_i = \infty\ ,\quad \lim_{i\to\infty} \max_{1\le j\le n_i} (\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j-1}) = 0$$

en laat

$$I_{\varphi_i} := \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i(\lambda_{i,j})(Y(\lambda_{i,j}^+) - Y(\lambda_{i,j-1}^+))$$

met $\varphi_i(\lambda)$ een trapfunktie, gedefinieerd zoals gebruikelijk.
Dan:

$$I_\varphi = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \lim_{i\to\infty} I_{\varphi_i}\ .$$

Verder geldt, omdat het Y-proces orthogonale toenamen heeft, dat:

$$\mathbb{E}|I_{\varphi_i}|^2 = \mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i(\lambda_{i,j})(Y(\lambda_{i,j}^+) - Y(\lambda_{i,j-1}^+))\Big|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_i} |\varphi_i(\lambda_{i,j})|^2 [F(\lambda_{i,j}^+) - F(\lambda_{i,j-1}^+)]$$

Wegens:

$$E|I_\varphi|^2 = \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to-\infty}} \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}|I_{\varphi_i}|^2 < \infty$$

(verwisselen van limiet en verwachting)
geldt:

$$\infty > \mathbb{E}\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda)\Big|^2 = \mathbb{E}|I_\varphi|^2 =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{n_i} |\varphi_i(\lambda_{i,j})|^2 [F(\lambda_{i,j}) - F(\lambda_{i,j-1})] = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda)$$

q.e.d.

De laatste regel van het bewijs van stelling 6.3 zegt feitelijk dat de afbeelding

$$\varphi \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda)$$

norminvariant is. De volgende stelling levert een sterkere bewering: de invariantie van het inwendig produkt.

Stelling 6.4: Het bestaan van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda) \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)dY(\lambda)$$

voor φ, $\psi \in \Phi$ impliceert

$$\mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)dY(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}dF(\lambda) \ .$$

Bewijs: Veronderstel eerst weer dat φ en ψ eindige trapfunkties zijn op $[a,b]$

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \le a \vee \lambda \ge b \\ \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{(\lambda_{k-1},\lambda_k]}(\lambda) & \text{elders} \end{cases}$$

en

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \le a \vee \lambda \ge b \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(\lambda_{k-1},\lambda_k]}(\lambda) & \text{elders} \end{cases}$$

waarbij de bijbehorende partities $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ altijd hetzelfde gekozen kunnen worden omdat in geval van verschil de gemeenschappelijke verfijning ook voldoet.

Noem

$$I_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k(Y(\lambda_k) - Y(\lambda_{k-1}))$$

$$I_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)dY(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k(Y(\lambda_k) - Y(\lambda_{k-1}))$$

Dan volgt analoog aan vroeger:

$$\mathbb{E}\, I_\varphi \overline{I_\psi} = \sum_{k=1}^{n} b_k \bar{c}_k \mathbb{E}\, |Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}dF(\lambda) .$$

Nu nog het geval dat φ en ψ willekeurig zijn.
Uit stelling 6.3 volgt dat φ en ψ kwadratisch integreerbaar zijn met betrekking tot F, en uit het bewijs van stelling 6.2 volgt dat φ en ψ op $\mathbb{R}$ willekeurig dicht te benaderen zijn (in de kwadratische F-norm) door eindige trapfunkties φ_i en ψ_j. Analoog aan het bewijs van stelling 6.2 kunnen we dan weer een rij trapfunkties $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ vinden, zó dat op grond van de volledigheid van de L_2-ruimte der kwadratisch integreerbare stochastische grootheden geldt:

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{i\to\infty} \varphi_i = \varphi \Rightarrow \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{i\to\infty} I_{\varphi_i} = I_\varphi .$$

Evenzo

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{j\to\infty} \psi_j = \psi \Rightarrow \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{j\to\infty} I_{\psi_j} = I_\psi .$$

Zonder beperking mag verondersteld worden dat de partities horend bij φ_i en ψ_j dezelfde zijn. Noem die partitie λ_k dan volgt uit het eerste deel van dit bewijs

(*) $$\mathbb{E}\, I_{\varphi_k} \overline{I_{\psi_k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(\lambda)\overline{\psi_k(\lambda)}dF(\lambda)$$

Uit

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{k\to\infty} I_{\varphi_k} = I_\varphi , \quad \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{k\to\infty} I_{\psi_k} = I_\psi$$

volgt m.b.v. Cauchy-Schwarz:

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{k\to\infty} I_{\varphi_k} \overline{I_{\psi_k}} = I_\varphi \overline{I_\psi}$$

en met behulp van stelling 2.2:

$$(**)\qquad \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\, I_{\varphi_k} \overline{I_{\psi_k}} = \mathbb{E}\, I_\varphi \overline{I_\psi}$$

Anderzijds volgt uit de continuïteit van het inprodukt:

$$(***)\qquad \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(\lambda)\overline{\psi_k(\lambda)}\,dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,dF(\lambda)$$

(*), (**) en (***) leveren nu de bewering. q.e.d.

<u>Lemma 6.2</u>: Het SP$\{X(t)\,|\,t \in T\}$ gedefinieerd door

$$X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)$$

is continu en heeft een autocorrelatiefunktie $\mathbb{E}\, X(t)\overline{X(s)}$ die alleen afhangt van t - s.

<u>Bewijs</u>: Op grond van stelling 6.4:

$$\mathbb{E}\, X(t+s)\overline{X(t)} = \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+s)\lambda} dY(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+s)\lambda} e^{-it\lambda} dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} dF(\lambda) = R(s)\ .$$

De continuïteit van het X-proces kunnen we nu rechtstreeks bewijzen, n.l. door te bewijzen dat R(s) continu is in s = 0.
Het resultaat volgt echter ook direkt door op te merken dat de funktie

$$F_0(\lambda) := 2\pi F(\lambda)$$

voldoet aan de voorwaarden, genoemd in de hoofdstelling van de spectraaltheorie (stelling 4.2), waaruit de continuïteit onmiddellijk volgt. q.e.d.

<u>Opmerking</u>: Uit

$$R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} dF(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} dF_0(\lambda)$$

volgt m.b.v. de hoofdstelling van de spectraaltheorie het bestaan van een zwak stationair, continu proces $\{\xi(t) \mid t \in T\}$. Dit behoeft echter niet het X-proces uit lemma 6.2 te zijn. De SP's $\{X(t) \mid t \in T\}$ en $\{\xi(t) \mid t \in T\}$ hebben weliswaar dezelfde (continue) autocorrelatiefunktie, maar $\mathbb{E}\, X(t)$ behoeft niet onafhankelijk van t te zijn.
Zoals reeds opgemerkt bij definitie 2.9 speelt eis 1 van deze definitie geen rol in de theorie, met name wordt er bij het bewijs van de hoofdstelling van de spectraaltheorie geen gebruik van gemaakt. Dit betekent dat ook voor het X-proces een spectrale verdelingsfunktie $F_{XX}(\lambda)$ gedefinieerd is.

Bekijk nu de volgende lineaire transformatie

$$Z(t) := (LX)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) dH(\tau)$$

en stel eens dat X(t) te schrijven is als

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) \ .$$

Uit lemma 6.2 volgt dat $\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ continu is en dat $R_{XX}(t,s)$ slechts afhangt van t - s. Uit

$$R_{ZZ}(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t - \tau,\ s - \sigma) dH(\tau)\overline{dH(\sigma)}$$

en het feit dat H van begrensde variatie is volgt dan hetzelfde voor $\{Z(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wegens de opmerking na lemma 6.2 volgt dan dat de spectrale verdelingsfunkties F_{xx} en F_{zz} bestaan ($F_{xx} = 2\pi F$ met F gedefinieerd door stelling 6.1).
Men kan zich afvragen hoe $Y(\lambda)$ eruit ziet, als deze al bestaat, en tevens wat dan het verband is tussen $F_{zz}(\lambda)$ en $F_{xx}(\lambda)$. (zie ook blz. 49).

$$Z(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} e^{i(t-\tau)\lambda} dY(\lambda) dH(\tau) = \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} dH(\tau) dY(\lambda)$$

mits we veronderstellen dat verwisseling van integratie-volgorde is toegestaan.
Met

$$H^*(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} dH(\tau) \quad \text{(de frequentieresponsie van L)}$$

vinden we dus:

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H^*(\lambda) dY(\lambda)$$

$$R_{zz}(t) = \mathbb{E}\, Z(t)\overline{Z(0)} = \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H^*(\lambda) dY(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} H^*(\lambda) dY(\lambda)} =$$

(wegens stelling 6.4)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H^*(\lambda) \overline{H^*(\lambda)} dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} |H^*(\lambda)|^2 dF(\lambda)$$

Omdat tevens:

$$R_{zz}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_{zz}(\lambda)$$

en

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} F_{xx}(\lambda)$$

volgt:

$$dF_{zz}(\lambda) = |H^*(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) .$$

We zullen echter moeten aantonen dat elk zwak stationair en continu proces $\{X(t)|t \in T\}$ inderdaad te schrijven is als

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) .$$

Dit is des te meer van belang omdat in dat geval het schatten van F_{xx} en R_{xx} minder bewerkingen kost. Beschouwen we b.v. een discreet proces

$$\{X(n)|n \in \mathbb{N}\}$$

en wensen we R_{xx} rechtstreeks te schatten m.b.v. N waarnemingen van het proces $\{X(1),\ldots,X(N)\}$, dan gebruiken we voor $j = 1,\ldots,N$, als schatter voor $R_{xx}(j)$:

$$\frac{1}{N-j} \sum_{\ell=1}^{N-j} X(\ell + j)\overline{X(\ell)} .$$

Merk op dat deze schatter zuiver is, echter, wegens de afhankelijkheid van $X(1),\ldots,X(N)$ zal de variantie van de schatter niet al te snel naar nul gaan voor $N \to \infty$.

Het schatten van R_{xx} kost op deze manier $\sum_{j=1}^{N} (N - j + 1) = \frac{1}{2}N(N + 1) = O(N^2)$ vermenigvuldigingen, terwijl we voor het schatten van F_{xx} nog een stap moeten doen.

Echter niet rechtstreeks, via het Y-proces, met behulp van de zogenaamde Fast-Fourier-Transform (FFT) die voor N waarnemingen $O(N \log N)$ vermenigvuldigingen kost, gaat het als volgt:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)$$

zódat het schatten van het Y-proces in N punten op grond van X(1),...,X(n) O(N log N) vermenigvuldigingen kost.
Vervolgens:

$$dF(\lambda) = \mathbb{E}\,|dY(\lambda)|^2$$

dit kost N vermenigvuldigingen.
Voor het schatten van R_{xx} zijn tenslotte nog eens O(N log N) vermenigvuldigingen nodig, via

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_{xx}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

zódat in totaal 2.O(N log N) + N = O(N log N) vermenigvuldigingen nodig zijn. Voor grote N levert dit een aanzienlijke besparing op in vergelijking met de rechtstreekse schattingsmethode.

We hebben gezien (stelling 6.2, 6.3, 6.4) dat er een 1-1-correspondentie bestaat tussen de ruimte van kwadratisch integreerbare stochastische grootheden van de vorm

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda)$$

en de ruimte der kwadratisch Riemann-Stieltjes integreerbare funkties, en wel vanwege de invariantie t.a.v. norm en inwendig produkt van de afbeelding

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)dY(\lambda) \leftrightarrow \varphi \quad .$$

Dit verband zullen we gebruiken bij het zoeken naar een SP$\{Y(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$ zódanig, dat:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) \quad .$$

<u>Stelling 6.5.</u> (Hoofdstelling)

1) Als het SP$\{X(t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$ zwak stationair en continu is dan bestaat er een SP$\{Y(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$ met orthogonale toenamen, waarvoor geldt dat

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)$$

en

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

met $F(\lambda_2) - F(\lambda_1) = \mathbb{E}\,|Y(\lambda_2) - Y(\lambda_1)|^2$ voor $\lambda_2 \geq \lambda_1$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, en F begrensd.

2) Ook het omgekeerde van bewering 1 geldt, behalve dat dan voor de zwak stationariteit van het X-proces ontbreekt dat $\mathbb{E}\,X(t)$ niet van t afhangt.

3) Bovendien geldt met kans 1 de volgende relatie:

$$\frac{Y(\lambda_2^+) + Y(\lambda_2^-)}{2} - \frac{Y(\lambda_1^+) + Y(\lambda_1^-)}{2} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} X(t)dt\ .$$

<u>Bewijs</u>: Bewering 1. Gegeven is het zwak stationaire continue SP$\{X(t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$. Noem

$$M := \{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda} \,|\, n \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C},\ t_j \in \mathbb{R}\}\ ,\quad M \subset \Phi$$

$$\mathcal{M} := \{\sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j) \,|\, n \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{C},\ t_j \in \mathbb{R}\}.$$

Omdat het X-proces zwak stationair en continu is, bestaat de spectrale verdelingsfunktie $F_{xx}(\lambda)$, kies deze rechtscontinu.

Definieer $F(\lambda) := \frac{1}{2\pi} F_{xx}(\lambda)$, en bekijk de inwendige produkten in $\mathcal{M}$ en M resp. met de maten $\mathbb{P}$ en F, te weten

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j) \overline{\sum_{k=1}^{m} b_k X(\tau_k)}$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda} \overline{\sum_{k=1}^{m} b_k e^{i\tau_k\lambda}} dF(\lambda) .$$

Het volgende verband geldt:

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j) \overline{\sum_{k=1}^{m} b_k X(\tau_k)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \overline{b_k} \mathbb{E}\, X(t_j) \overline{X(\tau_k)} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \overline{b_k} R_{xx}(t_j - \tau_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \overline{b_k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j-\tau_k)\lambda} dF(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda} \overline{\sum_{k=1}^{m} b_k e^{i\tau_k\lambda}} dF(\lambda) .$$

Vorm nu de afsluitingen van M en $\mathcal{M}$: $\bar{M}$ resp. $\bar{\mathcal{M}}$ en wel met betrekking tot juist deze inwendige produkten of afstandsdefinities. Nu geldt:

$$\bar{M} \supset \{\varphi(\lambda) | \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty\}$$

(Riemann-Stieltjes-integraal)

omdat een resultaat uit de lineaire analyse garandeert dat de eindige lineaire combinaties van e-machten dicht liggen in de verzameling van kwadratisch Riemann-Stieltjes integreerbare funkties. $\bar{\mathcal{M}}$ omvat uiteraard de verzameling van kwadratisch integreerbare stochastische grootheden X(t).
Stochastische grootheden $\in \bar{\mathcal{M}}$ die afstand 0 hebben zullen geïndentificeerd worden. Hetzelfde wordt gedaan voor funkties $\in \bar{M}$.
Voer nu de afbeelding f in

$$f : e^{i\lambda t} \rightarrow X(t)$$

met t vast en laat f zelfs lineair zijn, zódat:

$$f : \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j X(t_j) .$$

Volgens het voorgaande is f dan één-éénduidig en afstandsinvariant.

En omdat M en M ingebed liggen met betrekking tot de inwendige produktnorm in de volledige ruimte $\bar{M}$, resp. $\bar{\mathrm{M}}$, kan met behoud van de één-éénduidigheid en de afstandsinvariantie deze afbeelding f uitgebreid worden tot een afbeelding van $\bar{\mathrm{M}}$ op $\bar{M}$, die ook f genoemd zal worden.
Kies $\chi_{(-\infty,\lambda_0]}(\lambda) \in \bar{\mathrm{M}}$ en definieer $Y(\lambda_0) \in \bar{M}$ zó dat

$$f : \chi_{(-\infty,\lambda_0]}(\lambda) \to Y(\lambda_0) \ .$$

De eerste vraag is nu: is het $SP\{Y(\lambda)|\lambda \in \mathbb{R}\}$ een SP met orthogonale toenamen? Bekijk daartoe

$$\mathbb{E}\,(Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2))\overline{(Y(\lambda_3) - Y(\lambda_4))} \quad \text{met } \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 > \lambda_4.$$

Daar $Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2) \in \bar{M}, \chi_{(\lambda_2,\lambda_1]} \in \bar{\mathrm{M}}$ en $f : \chi_{(\lambda_2,\lambda_1]} \to Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2)$ geldt:

$$\mathbb{E}\,(Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2))\overline{(Y(\lambda_3) - Y(\lambda_4))} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(\lambda_2,\lambda_1]}(\lambda)\overline{\chi_{(\lambda_4,\lambda_3]}(\lambda)}dF(\lambda) = 0 \ .$$

De tweede vraag is nu of tussen de in dit bewijs ingevoerde $F(\lambda)$ en $Y(\lambda)$ inderdaad het verband bestaat waar stelling 6.1 over spreekt.
Er geldt:

$$\mathbb{E}\,|Y(\lambda_1) - Y(\lambda_2)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{(\lambda_2,\lambda_1]}(\lambda)|^2 dF(\lambda) =$$

$$= \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} dF(\lambda) = F(\lambda_1) - F(\lambda_2) \quad \text{voor } \lambda_1 \geq \lambda_2 \ .$$

De derde vraag is dan nog, geldt

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) \ ?$$

Uit stelling 6.2 volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dY(\lambda) \quad \text{bestaat, als} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty .$$

Verder geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dY(\lambda) \in \bar{M} \quad \text{voor} \quad \varphi \in \bar{M}$$

immers

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dY(\lambda) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\lambda_i \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+))$$

en

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+)) \in \bar{M} .$$

Bovendien geldt:

$$f : \varphi(\lambda) \to \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dY(\lambda)$$

want

$$f : \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k) \chi_{(\lambda_{k-1}, \lambda_k]}(\lambda) \to \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+))$$

terwijl

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\lambda_i \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k) \chi_{(\lambda_{k-1}, \lambda_k]}(\lambda) = \varphi(\lambda)$$

en

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\lambda_i \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(Y(\lambda_k^+) - Y(\lambda_{k-1}^+)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dY(\lambda) .$$

Dus in het bijzonder:

$$f : e^{it\lambda} \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda)$$

Echter, krachtens definitie geldt:

$$f : e^{it\lambda} \to X(t) \ .$$

Wegens de identificatie van stochastische grootheden $\in \bar{M}$ met afstand 0 volgt dan:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) \ .$$

Bewering 2. Dit is in lemma 6.2 al bewezen.

Bewering 3. Het bewijs hiervan gaat analoog aan het bewijs van een soortgelijke uitdrukking voor de spectrale verdelingsfunktie in stelling 4.2, en zal hier achterwege worden gelaten. q.e.d.

7. Schatten van spectrale verdelingen en autocorrelatiefuncties

In deze paragraaf zal iets gezegd worden over het schatten van autocorrelatiefuncties en spectrale verdelingsfuncties. Voorafgaand hieraan zullen we eerst eens de verwachtingsfunctie van een zwak stationair proces proberen te schatten.

Stel we hebben een $SP\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, zwak stationair en continu, en

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda) .$$

Er geldt

$$\mu := \mu_X(t) = \mathbb{E}X(t)$$

$$R_{XX}(t) = \mathbb{E}X(t+\tau)\overline{X(\tau)}$$

$$R_{XX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_{XX}(\lambda)$$

$$\mathbb{E}\left|dY(\lambda)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\, dF_{XX}(\lambda)$$

met F_{XX} de spectrale verdelingsfunctie van het X-proces.

Voor een discreet $SP\{X(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, zwak stationair, bestaat een analoge representatie, nl.:

$$X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dY(\lambda) .$$

Dan geldt (zie stelling 4.2')

$$R_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF_{XX}(\lambda) .$$

a) Gegeven $(N+1)$ waarnemingen van het $SP\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, nl. $X(0), X(\Delta), \ldots, X(N.\Delta)$. Dan is een zuivere schatter voor μ:

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X(n.\Delta)$$

immers

$$\mathbb{E}\, \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X(n.\Delta) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}X(n.\Delta) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \mu = \mu .$$

De kwaliteit van deze schatter wordt bepaald door:

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} X(n.\Delta) - \mu\right|^2 = \mathbb{E}\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} X(n.\Delta)\right|^2 - |\mu|^2 =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} R((n-m).\Delta) - |\mu|^2 =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|)R(k.\Delta) - |\mu|^2 =$$

$$= \frac{1}{(N+1)\Delta}\sum_{k=-N}^{N} \left(1-\frac{|k|.\Delta}{(N+1).\Delta}\right)\Delta.R(k.\Delta) - |\mu|^2 .$$

Stellen we $T = (N+1)\Delta$, T vast, en laten we vervolgens Δ tot nul naderen (dus $N \to \infty$) dan:

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} X(n.\Delta) - \mu\right|^2 \to \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)R(t)\,dt - |\mu|^2 .$$

Omdat (zie blz. 37, punt 4):

$$|R(t)| \le R(0)$$

geldt:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)|R(t)|\,dt \le R(0).1 = R(0)$$

zodat:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)|R(t)|dt - |\mu|^2 \le R(0) - |\mu|^2 = \mathbb{E}|X(0)|^2 - |\mathbb{E}X(0)|^2 = \sigma^2(X(0))$$

ofwel: de gemiddelde kwadratische fout van de schatter is ten hoogste $\sigma^2(X(0))$.

Opmerking. Voor t groot zijn $X(t)$ en $X(0)$ redelijk onafhankelijk zodat $R(t) = \mathbb{E}X(t)X(0) \approx \mu^2$. Voor T groot geldt dan $R(t) \approx \mu^2$ op het grootste deel van het interval $[-T,T]$ zódat:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|t|}{T})|R(t)|dt - |\mu|^2 \approx |\mu|^2 - |\mu|^2 = 0$$

waarbij de benadering beter wordt, naarmate T groter is. (Uitgaande van $T = (N+1)\Delta$ betekent dit: kies eerst een vaste, voldoend kleine Δ, zódat de benadering van de kwadratische fout door de integraalformule redelijk goed is, en hoog daarna het aantal waarnemingen op zódat T groot wordt, dus de benadering van de kwadratische fout klein.)

In de praktijk worden, zoals ook al uit het voorafgaande bleek, schattingsproblemen vaak bemoeilijkt door het feit dat, ten eerste, een in wezen continu proces met continue tijdsparameter slechts op discrete tijdstippen kan worden waargenomen en, ten tweede, dan nog slechts gedurende een eindige tijd.

b) We proberen nu $F_{xx}(\lambda)$ te schatten, waarbij we eerst de gevolgen bekijken van het feit dat slechts een eindige tijd is waargenomen, dus veronderstel: we hebben waarnemingen $X(t)$; $0 \le t \le T$.
Beschouw dan de volgende grootheid:

$$\frac{1}{T}\left|\int_{0}^{T} X(t)e^{-i\lambda t}dt\right|^2 .$$

Dan

$$\mathbb{E}\,\frac{1}{T}\left|\int_{0}^{T} X(t)e^{-i\lambda t}dt\right|^2 = \mathbb{E}\,\frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(t)e^{-i\lambda t}dt \int_{0}^{T}\overline{X(\tau)}\,e^{i\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T} R(t-\tau)e^{-i\lambda(t-\tau)}d\tau dt = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(T-|s|)R(s)e^{-i\lambda s}ds =$$

$$= \int_{-T}^{T}(1-\frac{|s|}{T})R(s)e^{-i\lambda s}ds =: S_T(\lambda) .$$

Merk op dat de functie $S_T(\lambda)$ dezelfde is als gedefinieerd in het bewijs van stelling 4.2. Wanneer dan weer

$$F_T(\lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda} S_T(\nu)d\nu$$

dan geldt:

$$\lim_{T\to\infty} F_T(\lambda) = F_{xx}(\lambda) \qquad \text{(zie blz. 46)}$$

zódat de schatter

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T X(t)e^{-it\lambda}dt\right|^2$$

asymptotisch zuiver is, hoewel strict genomen niet voor $F_{xx}(\lambda)$. Indien de spectrale dichtheid $S_{xx}(\lambda)$ bestaat, dus wanneer

$$\int_0^\infty |R_{xx}(t)|dt < \infty ,$$

hebben we een asymptotisch zuivere schatter voor $S_{xx}(\lambda)$. Echter ook wanneer hieraan niet voldaan is, kunnen we $F_{xx}(\lambda)$ schatten m.b.v. bovengenoemde grootheid.

c) Vervolgens bekijken we de gevolgen van het discretiseren, dus veronderstel dat op equidistante tijdstippen, met onderlinge afstand Δ, waarnemingen zijn gedaan.

In feite hebben we dan te doen met het SP$\{X(n\Delta) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Hiermee correspondeert een autocorrelatiefunctie R_n

$$R_n := R(n\Delta), \quad n \in \mathbb{Z} .$$

In geval $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_n| < \infty$ bestaat de spectrale dichtheid van het discrete X-proces

$$S_\Delta(\lambda) := \Delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\Delta j} R_j; \qquad -\frac{\pi}{\Delta} < \lambda \le \frac{\pi}{\Delta} .$$

Dus S_Δ is periodiek met periode $\frac{2\pi}{\Delta}$.

Verder geldt ook:

$$R_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{i\Delta k\lambda} S_\Delta(\lambda)\,d\lambda .$$

Het verband tussen S_Δ en S_{xx} (die nu ook bestaat) wordt gegeven door de formule van Poisson:

$$S_\Delta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{xx}(\lambda + \frac{2\pi n}{\Delta})$$

(voor een bewijs, zie Papoulis [4], blz. 48, formule 3-64).

Omdat S_{xx} integreerbaar is (omkeerformule) mogen we verwachten dat $S_{xx}(\lambda)$ klein is voor $|\lambda|$ groot. Dit betekent dat voor kleine Δ $S_\Delta(\lambda)$ een redelijke schatting is voor $S_{xx}(\lambda)$, althans op het interval $(-\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta}]$. Voor grotere Δ echter gaat het mis, vooral als $S_{xx}(\lambda)$ grillig van vorm is, reden om in een dergelijk geval Δ klein te kiezen.

d) Kies nu een Δ, en laat deze Δ dan verder de tijdséénheid zijn, dus $\Delta = 1$. We schrijven S_d en F_d voor de spectrale dichtheid, resp. de spectrale verdelingsfunctie van het waar te nemen discrete tijdproces. We willen nu deze functies schatten, de grootte van Δ bepaalt dan of S_d en F_d goede benaderingen zijn voor S_{xx}, resp. F_{xx} (zie punt c).
Eerst proberen we weer R_j te schatten op grond van N waarnemingen van het X-proces: $X(1),\ldots,X(N)$.
Er geldt:

$$R_j = \mathbb{E}X(n+j)\overline{X(n)} .$$

Dus schattingen zijn:

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{N}(X(1)\overline{X(1)} + X(2)\overline{X(2)} +\ldots+ X(N)\overline{X(N)} ,$$

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{N-1}(X(2)\overline{X(1)} + X(3)\overline{X(2)} +\ldots+ X(N)\overline{X(N-1)}) ,$$

$$\vdots$$

$$\hat{R}_{N-1} = X(N)\overline{X(1)}$$

$$\hat{R}_{-k} = \overline{\hat{R}_k}, \quad k = 1,\ldots,N-1 .$$

Er zijn nu schattingen voor $R_{-N+1},\ldots,R_{N-1}$, waarbij de schatting voor R_j beter wordt als j dichter bij nul ligt, omdat die schatting op meer waarnemingen berust.
Het aantal vermenigvuldigingen ligt in de orde van $\frac{1}{2}N(N+1)$: $O(N^2)$. Het bezwaar van het rechtstreeks schatten van R_k, voor $k = 1,\ldots,N-1$, op grond van $X(1),\ldots,X(N)$ is gelegen in het aantal vermenigvuldigingen, want zoals al in de vorige paragraaf is opgemerkt kan het in $O(N \log N)$ vermenigvuldigingen.

Indien S_d en F_d geschat worden m.b.v. $\hat{R}_j$'s, zijn voor de hand liggende schatters:

$$\hat{S}_d(\lambda) = \sum_{j=-N+1}^{N-1} \hat{R}_j e^{-ij\lambda}, \qquad -\pi < \lambda \le \pi$$

$$\hat{F}_d(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \hat{S}_d(\nu)\, d\nu, \qquad -\pi < \lambda \le \pi .$$

e) De volgende methode die we bekijken om R_k, $k = -N+1,\ldots,N-1$, en F_d te schatten is het ontbinden van het X-proces in harmonische trillingen.
Er geldt immers

$$X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dY(\lambda)$$

waarin het Y-proces een SP met orthogonale toenamen is, en verder geldt

$$\mathbb{E}\,|dY(\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi}\, dF_d(\lambda) .$$

Stel we hebben weer N waarnemingen van het X-proces: $X(1),\ldots,X(N)$. We beschouwen de volgende grootheid als schatter voor S_d (of F_d)

$$\frac{1}{N}\,\Big|\sum_{n=1}^{N} X(n)e^{-i\lambda n}\Big|^2 .$$

Er geldt:

$$\mathbb{E}\,\frac{1}{N}\Big|\sum_{n=1}^{N} X(n)e^{-i\lambda n}\Big|^2 = \frac{1}{N}\mathbb{E}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} X(n)\overline{X(m)}e^{-i\lambda(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} R_{n-m}e^{-i\lambda(n-m)} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N+1}^{N-1} (N-|k|)R_k e^{-i\lambda k} =$$

$$= \sum_{k=-N+1}^{N-1} \Big(1-\frac{|k|}{N}\Big)R_k e^{-i\lambda k} =: S_N(\lambda) .$$

Definieer:

$$F_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} S_N(\nu)\, d\nu .$$

Op dezelfde manier als onder b) volgt dan weer:

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\lambda) = F_d(\lambda)$$

zödat $\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} X(n)e^{-i\lambda n}\right|^2$ een asymptotisch zuivere schatter is.

De volgende vraag is: wat is de kwaliteit van deze schatter?

Opmerking. Wanneer we de grootheid b willen schatten m.b.v. een schatter $\hat{A}$ (stochastisch), dan wordt de kwaliteit van deze schatter bepaald door

$$\mathbb{E}(\hat{A} - b)^2 = \sigma^2(\hat{A}) + (\mathbb{E}\hat{A} - b)^2$$

met $\sigma^2(\hat{A})$ de variantie van $\hat{A}$ en $(\mathbb{E}\hat{A} - b)$ de systematische fout.

Veronderstel eens dat $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$, en dus dat

$$S_d(\lambda) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-i\lambda k}$$

bestaat. Dan geldt:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} X(k)e^{-i\lambda k}\right|^2 - S_d(\lambda)\right)^2 =$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} X(k)e^{-i\lambda k}\right|^2\right) + \left(\mathbb{E}\,\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} X(k)e^{-i\lambda k}\right|^2 - S_d(\lambda)\right)^2 .$$

We onderzoeken de systematische fout van de schatter:

$$\mathbb{E}\,\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} X(k)e^{-i\lambda k}\right|^2 - S_d(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} R_{k-\ell}e^{-i(k-\ell)\lambda} - S_d(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} R_n e^{-i(k-\ell-n)\theta}.d\theta\right)e^{-in\lambda} - S_d(\lambda) =$$

(wegens $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_n| < \infty$ mogen we $\int$ en $\sum$ verwisselen)

$$= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-in(\lambda-\theta)} . e^{-i(k-\ell)\theta} . d\theta \right) - S_d(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} S_d(\lambda-\theta) e^{-i(k-\ell)\theta} d\theta - S_d(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} S_d(\lambda-\theta) \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} e^{-i(k-\ell)\theta} d\theta - S_d(\lambda) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [S_d(\lambda-\theta) - S_d(\lambda)] \frac{1}{2\pi N} \Big| \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\theta} \Big|^2 d\theta .$$

De laatste gelijkheid volgt uit de genormeerdheid van de functie

$$\frac{1}{2\pi N} \Big| \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\theta} \Big|^2, \quad -\pi < \theta \le \pi$$

d.w.z.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \Big| \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\theta} \Big|^2 d\theta = 1 .$$

Een dergelijke, genormeerde, gewichtsfunctie noemen we een venster (eng.: window). De systematische fout in de schatter wordt dus veroorzaakt doordat $S_d(\lambda)$ in feite door het venster

$$\frac{1}{2\pi N} \Big| \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\theta} \Big|^2, \quad -\pi < \theta \le \pi$$

gezien wordt, immers:

$$\mathbb{E} \frac{1}{N} \Big| \sum_{k=1}^{N} X(k) e^{-i\lambda k} \Big|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_d(\lambda-\theta) \frac{1}{2\pi N} \Big| \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\theta} \Big|^2 d\theta .$$

<u>Voorbeeld</u>: Voor $N = 2$ krijgen we het venster

$$\frac{1}{4\pi} |e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}|^2 = \frac{1}{\pi} \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

zódat de weging het zwaarst is bij $\theta = 0$.

f) Door de waarnemingen te wegen kunnen we het venster en daarmee de systematische fout variëren.

De kwaliteit van zo'n venster in zake de systematische fout doet er minder toe naarmate $S_d(\lambda)$ meer een constante functie benadert. Een venster met een andere breedte (zie hieronder) is te bereiken door in plaats van

$$\hat{S}_d(\lambda) = \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} X(k)e^{-ik\lambda}\right|^2$$

de volgende schatter te gebruiken:

$$\hat{S}_w(\lambda) = \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} w_k X(k)e^{-ik\lambda}\right|^2 .$$

Kies daarbij de weegfactoren $w_1,\ldots,w_n$ zo, dat $\sum_{n=1}^{N} |w_n^2| = N$. Bovendien is het zinvol deze factoren ook nog symmetrisch te kiezen.

$$w_1 = w_N,\ w_2 = w_{N-1},\ \text{etc.}$$

Analoog aan de ongewogen situatie vinden we dan:

$$\mathbb{E}\hat{S}_w(\lambda) - S_d(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} [S_d(\lambda-\theta) - S_d(\lambda)]\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} w_k e^{-ik\theta}\right|^2 d\theta .$$

Als nu het venster smal is (d.w.z.: $\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=1}^{N} w_k e^{-ik\theta}\right|^2$ alleen groot voor kleine θ), dan is het nadeel een grote variantie en het voordeel een kleine systematische fout. Bij een breed venster is dat precies omgekeerd.

Als het te schatten spectrum al vlak is, dan is de systematische fout, onafhankelijk van het venster, toch al klein (in het ideale geval van een constant spectrum is de systematische fout zelfs gelijk aan nul).

Dan wordt de enige eis het klein maken van de variantie (gelijke w_k's).

Een volgend probleem is de vraag naar de consistentie van de schatter:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left|\hat{S}_w(\lambda) - S_d(\lambda)\right|^2 \overset{?}{=} 0 .$$

Er geldt:

$$\mathbb{E}\left|\hat{S}_w(\lambda) - S_d(\lambda)\right|^2 = \sigma^2(\hat{S}_w(\lambda)) + \left|\mathbb{E}\hat{S}_w(\lambda) - S_d(\lambda)\right|^2 .$$

De tweede term gaat weliswaar naar nul, voor $N \to \infty$ (asymptotische zuiverheid van de schatter), maar de variantie behoeft niet klein te worden, d.w.z.:

$$\sigma^2\left(\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} w_k X(k) e^{-ik\lambda}\right|^2\right) \neq 0 .$$

We kunnen proberen een betere schatting te krijgen door het z.g. ruwe spectrum

$$\hat{S}_w(\lambda) = \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} w_k X(k) e^{-i\lambda k}\right|^2, \qquad -\pi < \lambda \leq \pi$$

te vervangen door een gemiddelde van schattingen voor naburige waarvan van λ. Stel voor equidistante punten $\lambda_{\ell+k}$, $k = -n,\ldots,n$ hebben we schattingen $\hat{S}_w(\lambda_{\ell+k})$. Neem dan als schatter voor $S_d(\lambda_\ell)$:

$$\hat{T}(\lambda_\ell) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \hat{S}_w(\lambda_{\ell+k}) .$$

De variantie zal echter slechts dan kleiner worden, wanneer de $\hat{S}(\lambda)$'s voor verschillende λ in redelijke mate onafhankelijk zijn. Verder zal het op bovenstaande manier werken met een "gemiddelde" schatter zinvoller zijn naarmate S_d vlakker is.

Als nu $N \to \infty$, $m \to \infty$ en tevens $\frac{N}{m} \to \infty$ (bijvoorbeeld $m \sim \sqrt{N}$) dan geldt, onder bepaalde voorwaarden: $\hat{T}$ is een consistente schatter. (Dus: de systematische fout gaat naar nul, immers $N \to \infty$, en evenzo de variantie, immers $m \to \infty$.)

We hebben gezien dat het prettig is wanneer S_d een min of meer vlakke functie is, liefst constant, d.w.z.: de meeste frequenties komen ongeveer even vaak voor. Behalve bij het klein worden van de systematische fout speelt dit ook een rol bij het werken met "gemiddelde" schatters (het klein worden van de variantie, zie boven). Dit is een reden om het binnenkomend stochastisch signaal eerst witter te maken (prewhitening, naar de analogie met wit licht, waarin alle frequentiecomponenten voorkomen), zodat het spectrum vlakker wordt, en later eventueel weer terug te transformeren (recoloring, naar de analogie met gekleurd licht, wat veel sterker op één (of enkele) frequentiegebied(en) is geënt). Dit betekent dat we het signaal door een filter sturen met frequentieresponsie $H^*(\lambda)$, zodat $dF_{xx}(\lambda)$ wordt overgevoerd in $dF_{xx}(\lambda)\,|H^*(\lambda)|^2$, met $H^*(\lambda)$ zódanig dat $dF_{xx}(\lambda)\,|H^*(\lambda)|^2$ een min of meer vlakke functie wordt (zie ook blz. 49). Aangezien echter $dF_{xx}(\lambda)$ niet bekend is berust de keuze van $H^*(\lambda)$ op een gok.

De "Fast Fourier Transform"

Laten eens gegeven zijn N getallen $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$, die we willen beschouwen als coëfficiënten van een Fourierreeks, m.a.w.: pas de volgende Fouriertransformatie toe:

$$b_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi ikj/N}; \qquad j = 0,\ldots,N-1 .$$

Laat verder N even zijn, N = 2M (geen wezenlijke beperking). We kunnen nu b_j, $j = 0,\ldots,N-1$, als volgt schrijven:

$$b_j = \sum_{k=0}^{M-1} \{a_k e^{2\pi ikj/(2M)} + a_{k+M} e^{2\pi ikj/(2M)+2\pi iMj/(2M)}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} \{a_k + a_{k+M}.e^{\pi ij}\}.e^{\pi ikj/M}$$

ofwel:

$$b_{2\ell} = \sum_{k=0}^{M-1} [a_k + a_{k+M}].e^{2\pi ik\ell/M}, \qquad \ell = 0,1,\ldots,M-1 .$$

$$b_{2\ell+1} = \sum_{k=0}^{M-1} [\{a_k - a_{k+M}\}.e^{\pi ik/M}]e^{2\pi ik\ell/M}, \qquad \ell = 0,1,\ldots,M-1 ,$$

zódat de procedure

"Bereken de Fourierreeks van N getallen"

kan worden vervangen door tweemaal de procedure

"Bereken de Fourierreeks van $\frac{N}{2}$ getallen" .

De eerste procedure kost N^2 vermenigvuldigingen, tweemaal de tweede kost $2(\frac{1}{2}N)^2 = \frac{1}{2}N^2$ vermenigvuldigingen.

Stel nu: $N = 2^m$. Dan kunnen we het bovenstaande herhaald toepassen. We vinden dan uiteindelijk dat het benodigde aantal vermenigvuldigingen gelijk is aan $N.m \approx N \log N$.

Literatuur: Cooley en Tuckey [2], Kruseman Aretz en Zonneveld [3], Brillinger [1], § 3.4.

Referenties:

[1] Brillinger, D.R.: Time series, data analysis and theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1975.

[2] Cooley, J.W. and J.W. Tuckey: An algorithm for the machine calculation of complex Fourierseries, Math. Comp. 19 (1965): 297-301.

[3] Kruseman Aretz, F.E.J. and J.A. Zonneveld: FFT-Algorithms, Philips Research Reports 30 (1975): 288-301.

[4] Papoulis, A.: The Fourier integral and its applications, McGraw-Hill, Inc., 1962.

Literatuur

Algemeen

[1] Doob, J.L.: Stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc., 1953.

[2] Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, John Wiley & Sons, Inc., volume 1, 3-rd ed., 1970, volume 2, 2-nd ed., 1966.

[3] Loève, M.: Probability theory, van Nostrand, 1963.

L_2-theorie

[4] Ash, R.B. and M.F. Gardner: Topics in stochastic processes, Academic Press, 1975.

[5] Dunford, N. and J.T. Schwartz: Linear operators, part 1, Interscience, New York, 1958.

[6] Zaanen, A.C.: Linear analysis: measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations, North Holland, 1953.

Spectraaltheorie

[7] Cramér, H. and M.R. Leadbetter: Stationary and related stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

alsmede [1]

Meer op de toepassingen gerichte literatuur

(algemeen)

[8] Papoulis, A.: Probability, random variables and stochastic processes, McGraw-Hill, Inc., 1965.

(het schatten van spectra)

[9] Anderson, T.W.: The statistical analysis of time series, John Wiley & Sons, Inc., 1971.

[10] Hannan, E.J.: Multiple time series, John Wiley & Sons, Inc., 1970.

[11] Nahi, N.E.: Estimation theory and applications, John Wiley & Sons, Inc., 1969.

(filtertheorie)

[12] Bucy, R.S. and P.D. Joseph: Filtering for stochastic processes with applications to guidance, Interscience, 1968.

[13] Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng. 82, 35-45 (1960).

[14] Kalman, R.E. and R.S. Bucy: New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng. 83, 95-108 (1961).

[15] Meditch, J.S.: Stochastic optimal linear estimation and control, McGraw-Hill, Inc., 1969.

[16] Sage, A.P.: Optimum systems control, Prentice Hall, 1968.

Verder benodigde theorie

[17] Halmos, P.R.: Measure theory, Springer, 1974.

alsmede [5] en [6].