TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Inleiding in de theorie van de STOCHASTISCHE PROCESSEN

Syllabus naar het college van

Prof. Dr. J. Wessels

samengesteld door

Ir. J. van der Wal

Voorjaarssemester 1980

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Inleiding in de theorie van de Stochastische processen

Syllabus naar het college van prof.dr. J. Wessels
Samengesteld door ir. J. van der Wal

Dictaatnr. 2.274 Prijs f 5,-

Inhoudsbeschrijving

Inleiding in de theorie van de STOCHASTISCHE PROCESSEN

Voorjaarssemester 1980

VERVOLG →

JdG, 21 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

INLEIDING IN DE THEORIE VAN DE STOCHASTISCHE PROCESSEN

Syllabus naar het college van Prof.dr. J. Wessels

Samengesteld door Ir. J. van der Wal.

Voorjaarssemester 1980

Voorwoord

Dit college bestaat uit twee delen. Deel I - het grootste gedeelte - behandelt discrete stochastische systemen, terwijl deel II een inleiding geeft tot de dynamische programmering, d.w.z. de analyse van discrete systemen (deterministisch en stochastisch) waarop met behulp van ingrepen van buitenaf invloed kan worden uitgeoefend. In deel I zal uitsluitend aandacht worden besteed aan het autonoom gedrag van discrete stochastische systemen. De resultaten van deel I zijn op zich van groot belang zoals in de voorbeelden zal blijken, terwijl de resultaten ook in de dynamische programmering van pas zullen komen.

Het college wordt besloten met een practicum (genaamd werkweek) met een omvang van 7 halve dagen, waarin de studenten onder begeleiding gestyleerde practische problemen leren aanpakken met behulp van de in het college behandelde methoden. Dit aanpakken omvat de modelformulering modelanalyse en resultateninterpretatie. In de werkweek komt zowel de stof van deel I als van deel II aan de orde. Het is zeer gewenst dat studenten de collegestof voor de werkweek zorgvuldig bestuderen. Het regelmatig volgen van het college wordt daarbij aanbevolen, aangezien in het college sterk de nadruk gelegd worden zal op het geven van het soort inzicht dat nodig is om zelf problemen aan te pakken.
Voor toelating tot de werkweek is het noodzakelijk, dat de student de elementaire analysetechnieken uit deel I, hoofdstuk 2, 3 en 4 op eenvoudige voorbeelden kan toepassen. Daarom zullen studenten in april in de gelegenheid worden gesteld door middel van een (open boek) toets te bewijzen dat zij deze vaardigheid bezitten. Uitsluitend studenten die deze toets voldoende maken, worden toegelaten tot de werkweek. In de syllabus is een groot aantal vraagstukken opgenomen ter oefening, terwijl voor de toets een college gewijd zal worden aan de behandeling van dit soort sommen.

Over dit college wordt geen tentamen afgenomen. Het in de werkweek geleverde werk wordt beoordeeld en deze beoordeling dient als tentamencijfer.

DEEL I: DISCRETE STOCHASTISCHE SYSTEMEN

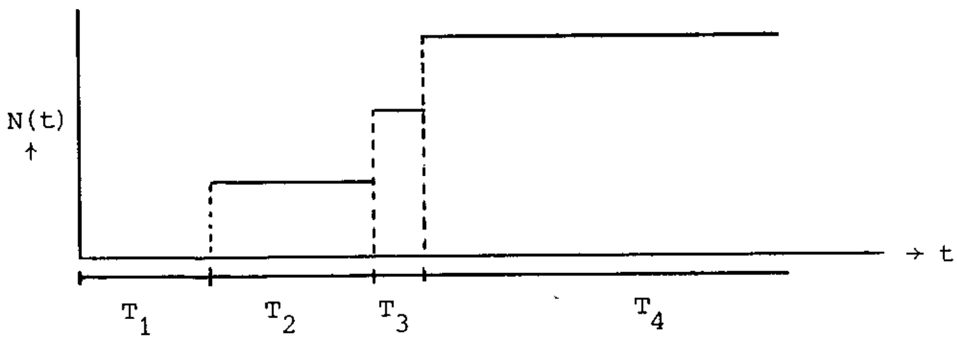
Hoofdstuk 1. Inleiding

Stochastische processen (Engels: random process, stochastic process; Frans: processus aléatoire; Duits: stochastisches Prozess, Zufallsprozess) zijn wiskundige modellen voor het gedrag van systemen, waarvan de dynamiek mede door het toeval bepaald wordt. In dit deel van het college zullen stochastische processen geïntroduceerd en geanalyseerd worden die gebruikt kunnen worden als model voor enige veel voorkomende typen van stochastische systemen.

We zullen in dit gedeelte eerst modellen ontwikkelen voor systemen waarvan de toestand een toevalsgedrag vertoont. In hoofdstuk 5 zullen we vervolgens de eerder ontwikkelde theorie gebruiken voor systemen die bestaan uit veel subsystemen of deeltjes (personen bijvoorbeeld) die elk een toevalsgedrag vertonen dat in meerdere of mindere mate door de andere deeltjes beïnvloed wordt. Enkelvoudige systemen (althans systemen die het best als enkelvoudige systemen behandeld kunnen worden) vinden we bijvoorbeeld in de voorraadplanning, vervanging en onderhoud, procesbeheer, wachtrijsystemen en het weer. Meervoudige systemen vinden we bij sociale en demografische processen, consumentengedrag enz.

Nu eerst enige eenvoudige voorbeelden van stochastische processen:

1) Het Poisson-proces (zie Operationele Research I, Wiskunde 31)



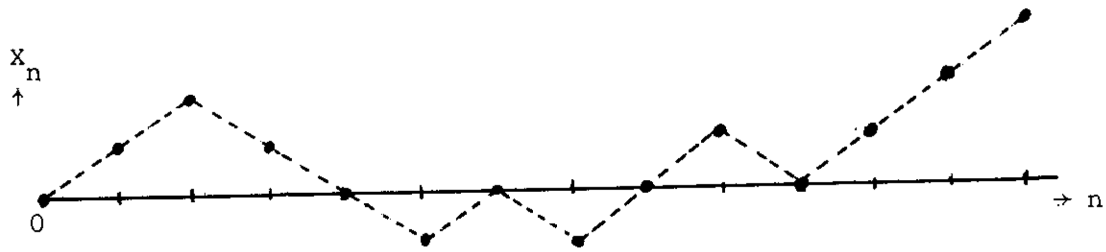
T_n is negatief exponentieel verdeeld met parameterwaarde λ, alle T_n zijn onderling onafhankelijk, nu geldt:

$$N(t) = \max\{n \mid \sum_{i=1}^{n} T_i \le t\}$$

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} .$$

Het Poisson-proces wordt bijvoorbeeld gebruikt voor het binnenkomstproces in een wachtrij, $N(t)$ is dan het aantal klanten dat tot en met tijdstip t is binnengekomen.

2) De stochastische wandeling



op de tijdstippen $n = 1,2,\ldots$ wordt een experiment uitgevoerd met kans p op de uitkomst "succes" en kans $1 - p = q$ op de uitkomst "mislukking".

$$X_0 := 0$$

$$X_n := X_{n-1} + \begin{cases} +1 & \text{als het } n\text{-de experiment "succes" oplevert.} \\ -1 & \text{als het } n\text{-de experiment "mislukking" oplevert.} \end{cases}$$

Dus X_n is het aantal successen verminderd met het aantal mislukkingen in de eerste n experimenten.

Er geldt dan in het geval $p = q = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = k_1, \ldots, X_{n_2} = k_r) = 2^{-n_r} \prod_{i=1}^{r} \binom{\Delta n_i}{\frac{\Delta k_i + \Delta n_i}{2}},$$

waarin

$$0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_r$$

$$k_0 = 0, \ \Delta n_i = n_i - n_{i-1}, \ \Delta k_i = k_i - k_{i-1},$$

terwijl een binomiaalcoëfficiënt gelijk aan 0 genomen wordt, als de onderste ingangswaarde negatief is, groter dan de bovenste of niet geheeltallig.

Met een andere kansverdeling voor het experiment, stelt X_n bijvoorbeeld het verschil voor tussen vraag en productie in n perioden:

$$X_n = X_{n-1} + (V_n - P_n).$$

Uit deze voorbeelden zien we dat de volgende afspraak geschikt is: het gedrag van een systeem wordt beschreven met behulp van een stochastisch proces, als de toestand van het systeem ten tijde t weergegeven kan worden door een stochastische grootheid X_t; hierbij kan de tijd t de reële getallen doorlopen (of $[0,\infty)$ of $[a,b]$) of de gehele getallen doorlopen (of $\{0,1,2,...\}$ of $\{a,a+1,...,b\}$).

We zullen ons in dit college bezighouden met discrete stochastische systemen, d.w.z. dat de tijdsparameter geheeltallig is, terwijl ook aangenomen zal worden dat de stochastische grootheden X_t een discreet waardebereik hebben.

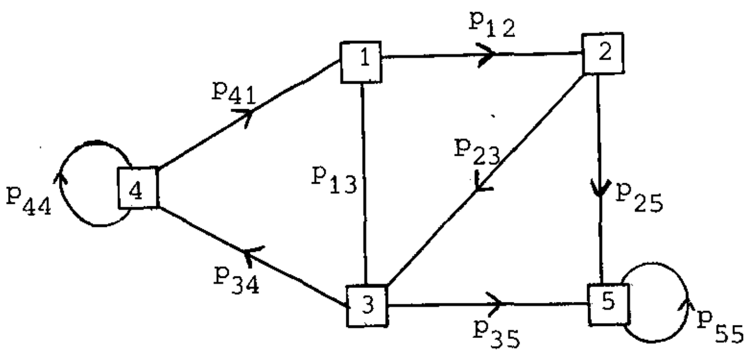
Het eenvoudigste type discreet stochastisch systeem heeft als model: $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ zijn onderling onafhankelijke stochastische grootheden met elk dezelfde kansverdeling.
Dit soort model wordt veel gehanteerd in de statistiek (een rij onafhankelijke herhalingen van hetzelfde experiment), maar heeft weinig betekenis voor de beschrijving van in de praktijk voorkomende systemen. In praktische systemen is namelijk juist de vraag: wat leert ons de realisatie tot nu toe over de toekomst? Om hier iets verstandig over te kunnen zeggen, moet in het gekozen wiskundig model ook de realisatie invloed hebben op de toekomst.
Het eenvoudigste type proces waarin dit het geval is, is de zgn. Markov keten, waarin de toekomst mede beïnvloed wordt door de huidige toestand, maar niet direct door het verdere verleden. In de volgende hoofdstukken zal aangetoond worden, dat dit type processen goed te analyseren is, terwijl het ook een heel geschikt kader voor modelformulering biedt. Er zal daarbij tevens blijken, dat de beperking tot beïnvloeding vanuit het heden geen wezenlijke beperking is, aangezien in een concreet probleem altijd het toestandsbegrip zo gekozen kan worden dat we met dit type proces te maken hebben.

Hoofdstuk 2. Markov ketens, voorbeelden notaties begrippen

2.1. Inleiding, beschrijving van een Markov keten

We zullen in dit hoofdstuk aan de hand van een aantal voorbeelden van Markov ketens enige elementaire zaken met betrekking tot deze stochastische systemen invoeren. In het bijzonder een aantal notaties en begrippen.
We zullen ons beperken tot het beschouwen van eindige Markov ketens, d.w.z. we nemen aan dat het systeem zich in slechts eindig veel verschillende toestanden kan bevinden. Doordat bij een Markov keten het toestandsbegrip zo gekozen is dat voor de voortgang van het systeem alleen de toestand van het moment van belang is en vroegere toestanden en overgangen geen invloed hebben kunnen we zo'n systeem gemakkelijk grafisch weergeven.
De belangrijkste grootheden voor de voortgang van het systeem zijn de kansen om in een stap van een toestand naar een andere toestand te gaan. De kans om van toestand i naar toestand j te gaan noteren we met p_{ij}. We kunnen het systeem nu met een netwerk beschrijven waarbij we de toestanden, de knopen in het netwerk, met vierkantjes aangeven en de overgangen met pijlen. De overgangskansen zetten we bij de pijlen.

Voorbeeld 1. We hebben vijf toestanden, waartussen de volgende overgangen mogelijk zijn:
vanuit 1 kunnen we naar 2 of naar 3 gaan
vanuit 2 kunnen we naar 3 of naar 5 gaan
vanuit 3 kunnen we naar 4 of naar 5 gaan
vanuit 4 kunnen we naar 1 gaan of in 4 blijven.
Als we in 5 zijn, blijven we in 5.
Het bijbehorende netwerk ziet er dan als volgt uit.



Voorbeeld 2. Het rijexamen.

Het rijexamen bestaat uit twee gedeelten, het praktische gedeelte, de rijproef, en het theoretische examen. Slaagt een kandidaat alleen voor het praktische gedeelte dan mag hij het theoretische examen opnieuw doen, zakt hij hiervoor weer dan kan hij het nog een tweede maal overdoen. Lukt het weer niet dan moet hij alles over doen. Slaagt de kandidaat alleen voor het theoretische gedeelte dan kan hij de rijproef eenmaal overdoen. Zakt hij hiervoor dan moet alles opnieuw.

We nemen verder aan dat de slagingskans alleen afhangt van het soort examen dat de kandidaat moet afleggen en niet van de resultaten van eventuele eerdere examens.

We kunnen dus de volgende toestanden onderscheiden:

A $\equiv$ de kandidaat moet zowel het praktisch als theoretisch gedeelte doen.

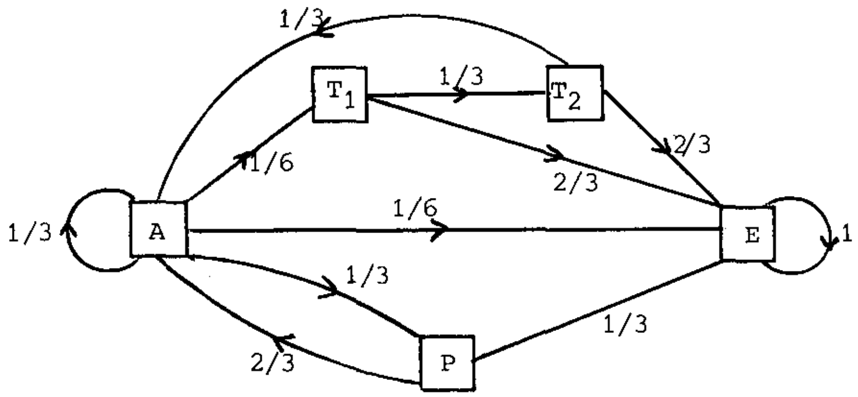
P $\equiv$ de kandidaat hoeft alleen het praktisch deel te doen.

T_1 $\equiv$ de kandidaat hoeft alleen het theoretisch deel te doen; als hij zakt mag hij het nog een keer overdoen.

T_2 $\equiv$ de kandidaat doet het theoretisch deel voor de tweede keer over. Als hij zakt moet alles over.

E $\equiv$ de kandidaat is geslaagd voor het hele examen.

Het bijbehorende netwerk (met fictieve kansen) ziet er dan als volgt uit:



Voorbeeld 3. Het ziekenhuis.

We willen nagaan hoeveel personeel er nodig is op de operatieafdeling van een ziekenhuis. Van belang is hierbij de mate, waarin een patiënt zichzelf kan verzorgen. We onderscheiden daarbij 3 verschillende toestanden. Verder kan de patiënt het ziekenhuis verlaten hebben. We veronderstellen, dat we iedere week bekijken hoe de patiënt het maakt en dat de kans om van toestand i naar j te gaan alleen afhankelijk is van het feit dat de patiënt in toestand i zit en niet van de voorgeschiedenis.

We onderscheiden de volgende toestanden:

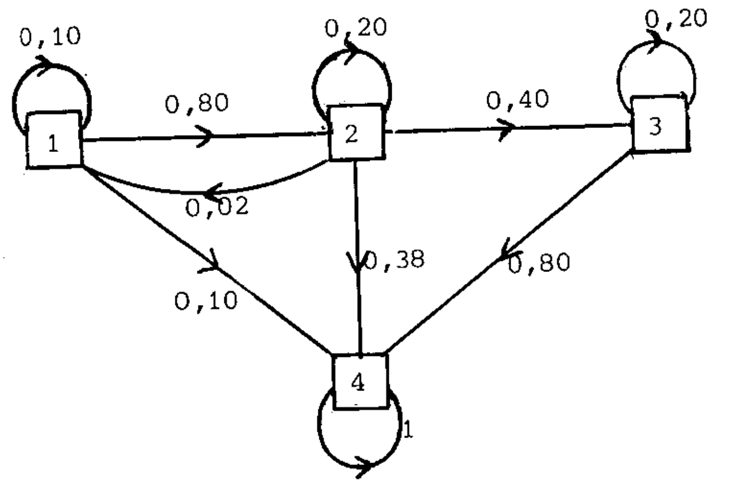
1 ≡ patiënt is zwaar ziek en kan zichzelf helemaal niet verzorgen.

2 ≡ patiënt kan zichzelf enigszins verzorgen.

3 ≡ patiënt kan zichzelf goed verzorgen.

4 ≡ patiënt heeft het ziekenhuis verlaten.

Het netwerk:

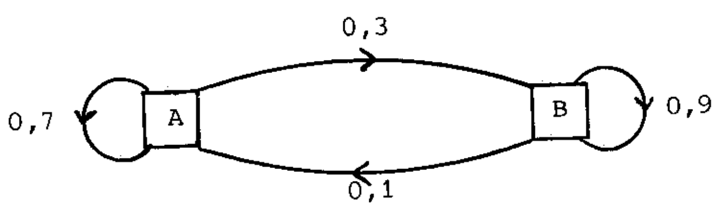


2.2. Enige eenvoudige kansberekeningen

We zijn niet alleen geïnteresseerd in de toestand van het systeem na één overgang, maar vooral in wat er gebeurt in een aantal overgangen na elkaar. De toestand, waarin het systeem zich op tijdstip n bevindt, is een stochastische variabele. We geven deze in het vervolg aan met X_n.

Voorbeeld 4. Merkovergang bij margarine.

Een fabrikant is erin geïnteresseerd hoe groot zijn marktaandeel op den duur zal zijn. Om dit te bepalen laat hij een onderzoek verrichten naar het koopgedrag van de klanten. Een huisvrouw koopt merk A (toestand A) in de periode van waarneming of zij doet dit niet (toestand B). Verondersteld wordt, dat het gedrag in de volgende periode slechts beïnvloed wordt door het gedrag in de huidige en niet door de verdere voorgeschiedenis. De kans, dat een huisvrouw, die nu merk A koopt, dat in de volgende periode weer doet, is 0,7. De kans, dat een huisvrouw, die nu merk A niet koopt, dat in de volgende periode wél doet, is 0,1. Laat X_n aangeven, of een huisvrouw in periode n het merk A al dan niet koopt: X_n = A resp. X_n = B. De overgangsmogelijkheden kunnen we als volgt weergeven:



Hoe groot is de kans, dat een huisvrouw, die op tijdstip 0 merk A koopt, op tijdstip 2 weer merk A koopt?
Deze kans kunnen we als volgt bepalen:

$$\mathbb{P}(X_2 = A \mid X_0 = A) = \mathbb{P}(X_2 = A,\ X_1 = A \mid X_0 = A) + \mathbb{P}(X_2 = A,\ X_1 = B \mid X_0 = A)\ .$$

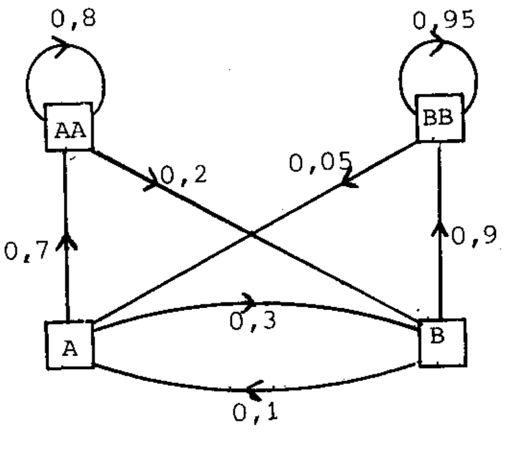
Gebruikmakend van het feit dat de overgangen alleen afhankelijk zijn van de laatste toestand vinden we

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = A \mid X_0 = A) &= \mathbb{P}(X_2 = A \mid X_1 = A,\ X_0 = A)\mathbb{P}(X_1 = A \mid X_0 = A)\ + \\ &\quad \mathbb{P}(X_2 = A (X_1 = B,\ X_0 = A)\mathbb{P}(X_1 = B \mid X_0 = A) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = A \mid X_1 = A)\mathbb{P}(X_1 = A \mid X_0 = A)\ + \\ &\quad \mathbb{P}(X_2 = A \mid X_1 = B)\mathbb{P}(X_1 = B \mid X_0 = A)\ = \\ &= 0.7 \times 0.7 + 0.1 \times 0.3 = 0.52\ .\end{aligned}$$

Voorbeeld 4a. In de praktijk zal het verschil maken of iemand een vaste klant is of niet. Om daar enigszins aan tegemoet te komen zouden we onderscheid kunnen maken tussen het geval dat een huisvrouw één keer een bepaald merk heeft gekocht en het geval dat zij al twee (of meer) perioden achter elkaar hetzelfde merk gekocht heeft.
In dit uitgebreide model onderscheiden we nu de volgende toestanden:

A $\equiv$ laatste keer merk A, daarvoor merk B gekocht.
B $\equiv$ laatste keer merk B, daarvoor merk A gekocht.
AA $\equiv$ laatste twee keer merk A gekocht.
BB $\equiv$ laatste twee keer merk B gekocht.

De mogelijke overgangen worden dan:



De kans, dat een huisvrouw, die op tijdstip n merk A koopt en daarvoor merk B kocht, op tijdstip n + 2 weer merk A koopt bepalen we als volgt:

$$\mathbb{P}(X_{n+2} = AA \mid X_n = A) + \mathbb{P}(X_{n+2} = A \mid X_n = A)\ =$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+2} = AA,\ X_{n+1} = AA \mid X_n = A) + \mathbb{P}(X_{n+2} = A,\ X_{n+1} = B \mid X_n = A) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = AA \mid X_n = A)\mathbb{P}(X_{n+2} = AA \mid X_{n+1} = AA) + \\
&+ \mathbb{P}(X_{n+1} = B \mid X_n = A)\mathbb{P}(X_{n+2} = A \mid X_{n+1} = B) \\
&= 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 = 0.59\ .
\end{aligned}
$$

Op deze manier kunnen we informatie uit het verleden in de toestanden opnemen. De eigenschap, dat alle voor de voortgang van belang zijnde informatie in de toestand is opgenomen, kan hierdoor behouden blijven. We noemen dit de Markov eigenschap. In paragraaf 2.6 geven we nog een meer formele definitie van de Markov eigenschap.

Opgave. Bepaal voor voorbeeld 2 de kans dat een kandidaat slaagt zonder het gehele examen over te doen.

2.3. Markov matrix

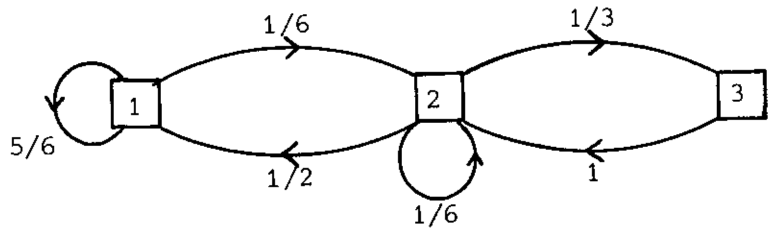
Behalve in een netwerk kunnen we de overgangskansen p_{ij} ook weergeven in een overgangsmatrix P. De kans p_{ij} is het i,j-de element in de matrix (i-de rij, j-de kolom). De overgangsmatrix bij voorbeeld 1 ziet er als volgt uit:

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & p_{25} \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} \end{pmatrix} .
$$

Hierbij geldt steeds, dat alle rijsommen gelijk 1 zijn: $\sum_j p_{ij} = 1$ voor alle i.
Ook geldt voor alle i en j: $p_{ij} \geq 0$.
Een andere naam voor zo'n matrix is *Markov matrix*.

Voorbeeld 5. Producten, die aan bederf onderhevig zijn.
Van een product, dat niet langer dan 2 dagen houdbaar is, wil iemand iedere dag 2 stuks tot zijn beschikking hebben. Iedere morgen wordt de "voorraad" met verse producten aangevuld tot een totaal van 2 stuks. De oudste producten worden steeds het eerst gebruikt en producten, die 2 dagen oud zijn, worden weggegooid en vervangen
De toestand van de "voorraad" na eventuele aanvulling kan worden beschreven met het tweetal (k,ℓ), waarin k het aantal verse producten aangeeft en ℓ het aantal, dat één dag oud en nog in voorraad is. Natuurlijk geldt: $k + \ell = 2$.
We noemen (1,1) toestand 1, (2,0) toestand 2 en (0,2) toestand 3.

De kans dat er op een dag 0, 1 resp. 2 producten gebruikt worden bedraagt 1/3, 1/2 resp. 1/6.
De overgangen tussen de toestanden kunnen we als volgt weergeven.



Ga na dat de bij de pijlen staande overgangskansen uit bovenstaande gegevens berekend kunnen worden.
De overgangsmatrix of Markov matrix voor dit probleem ziet er als volgt uit:

$$P = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Opgave. Stel de overgangsmatrices op voor de voorbeelden 2, 3, 4 en 4a.

2.4. Absorptie

Vaak zijn we geïnteresseerd in het gedrag van het systeem op den duur. Daarbij wordt soms een belangrijke rol gespeeld door die toestanden die de eigenschap hebben dat als het systeem in een van deze toestanden terecht gekomen is, het de betreffende toestand niet meer verlaat. Voor deze toestanden geldt dus $p_{ii} = 1$. We noemen deze toestanden *absorberend*. Bij veel Markov ketens is het zo dat het systeem in een van de absorberende toestanden terecht komt. Overigens zijn er ook Markov ketens zonder absorberende toestanden (vgl. voorbeeld 4).
In het geval van absorberende toestanden is meestel een belangrijke vraag met welke kansen het systeem in elk van de absorberende toestanden terecht komt en hoe lang dat (gemiddeld) duurt.

Voorbeeld 6. Studieverloop.
Een studie bestaat uit twee fasen, a en b, die elk met een examen afgesloten moeten worden (het A-examen resp. het B-examen). Om toegang te krijgen tot fase b is het behalen van het A-examen noodzakelijk. Steeds is de kans, dat een student voor een examen slaagt, onafhankelijk van het verdere verleden van die student. We beschrijven het systeem met behulp van een Markov model. We beschikken hierbij over de volgende gegevens:

- Een student, die het A-examen aflegt, heeft kans 1/3 om te slagen. Is hij gezakt, dan zal hij met kans 1/2 de studie staken en met kans 1/2 het nog eens overdoen.
- Een student, die het B-examen aflegt, heeft kans 1/2 om te slagen. Zakt hij hiervoor, dan is de kans, dat hij fase b overdoet 2/3 en de kans, dat hij de studie staakt 1/3.

We onderscheiden de volgende 5 toestanden:

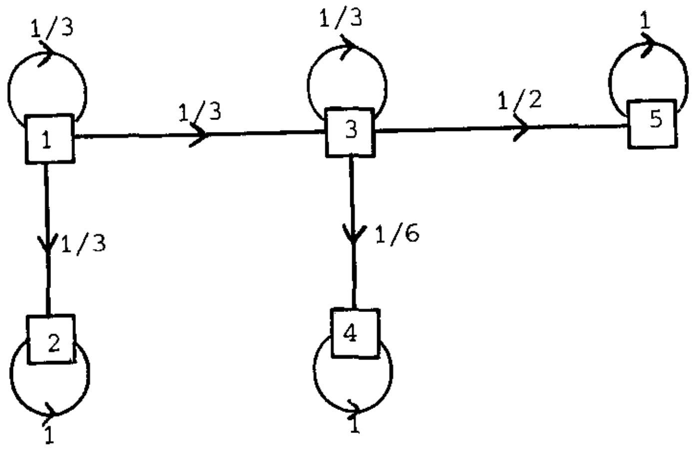
1 $\equiv$ bezig met fase a.

2 $\equiv$ studie gestaakt vanuit fase a.

3 $\equiv$ bezig met fase b.

4 $\equiv$ studie gestaakt vanuit fase b.

5 $\equiv$ diploma gehaald.



$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De toestanden 2, 4 en 5 zijn hier dus absorberende toestanden.

We kunnen voor dit model wat eenvoudige berekeningen uitvoeren.
Definieer daartoe $p_{ij}^{(n)}$ als de kans om in n stappen van toestand i naar toestand j te gaan.
De kans, dat een student, die met fase a start, na 3 perioden het diploma behaald heeft, is:

$$\begin{aligned} p_{15}^{(3)} &= p_{11}p_{15}^{(2)} + p_{13}p_{35}^{(2)} \\ &= p_{11}p_{13}p_{35} + p_{13}(p_{33}p_{35} + p_{35}p_{55}) \\ &= 1/3.1/3.1/2 + 1/3(1/3.1/2 + 1/2.1) = 5/18 \ . \end{aligned}$$

We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in de kans, dat een student uiteindelijk het diploma behaalt, en in de verwachte tijd, die hij daarvoor nodig heeft.

De kans, dat een student, die met fase a begint, in toestand 2 eindigt, is gelijk aan:

de kans, dat hij bij de eerste stap naar 2 gaat + de kans, dat hij bij de tweede stap naar 2 gaat +...

$$= 1/3 + 1/3.1/3 + (1/3)^2 1/3 + \ldots + (1/3)^k 1/3 + \ldots = 1/3 \frac{1}{1 - 1/3} = 1/2 \ .$$

De kans, dat een student, die met fase a start, in toestand 4 eindigt is gelijk aan:

de kans om in 3 te komen vermenigvuldigd met de kans om van 3 naar 4 te gaan =

$$= 1/2\{1/6 + 1/3.1/6 + (1/3)^2 1/6 + \ldots + (1/3)^k 1/6 + \ldots\} = 1/2.1/6 \frac{1}{1-1/3} = 1/8.$$

En de kans, dat een student, die in fase a start in toestand 5 eindigt, is gelijk aan:

de kans om in 3 te komen vermenigvuldigd met de kans om van 3 naar 5 te gaan =

$$= 1/2\{1/2 + 1/3.1/2 + (1/3)^2 1/2 + \ldots + (1/3)^k 1/2 + \ldots\} = /12.1/2 \frac{1}{1-1/3} = 3/8.$$

Inderdaad sommeren deze drie kansen tot 1.

De kans, dat een student precies k perioden in fase a zit, is: $(1/3)^{k-1}2/3$.
De verwachte tijd doorgebracht in fase a is dus: $\sum_{k=1}^{\infty} k(1/3)^{k-1}2/3 = 3/2$.
De kans, dat een student, die in fase b komt, daar precies k perioden blijft is eveneens: $(1/3)^{k-1}2/3$.
De verwachte tijd, doorgebracht in fase b door een student, die werkelijk in b komt is dus ook: 3/2.

De verwachte tijd tot absorptie is zodoende

de verwachte tijd doorgebracht in a + de verwachting van de tijd doorgebracht in b = de verwachte tijd in a + de kans om in b te komen vermenigvuldigd met de verwachte tijd in b bij werkelijke aankomst in b =
$3/2 + 1/2.3/2 = 2\ {}^1/4$.

De kans, dat een student, gegeven dat hij in fase a de studie staakt, dit na precies k perioden doet, is:

$$\frac{(1/3)^{k-1}1/3}{1/2} \; .$$

De verwachte studieduur van degenen, die in fase a de studie staken, is gelijk aan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \, \frac{(1/3)^{k-1}1/3}{1/2} = 3/2$$

evenals de verwachte verblijftijd in fase a van de studenten, die verder gaan met fase b.

Op een soortgelijke wijze vinden we: De verwachte studieduur van de studenten, die het diploma behalen is:

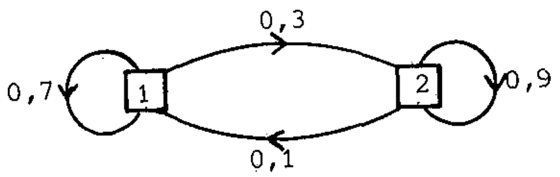
$$3/2 + 3/2 = 3 \text{ perioden} \; .$$

Dit is ook de verwachte studieduur van degenen, die in fase b de studie staken.

In hoofdstuk 4 wordt een methode behandeld om dit soort grootheden voor Markov ketens op een systematische wijze te berekenen.

2.5. Limietgedrag

In de vorige paragraaf hebben we een voorbeeld gezien waarin het systeem op den duur in één van de absorberende toestanden terecht komt. Ook in het geval dat er geen absorberende toestanden zijn is de vraag hoe het systeem zich op den duur gaat gedragen van belang.
We zullen in deze paragraaf dit limietgedrag onderzoeken voor het eenvoudige model uit voorbeeld 4. De overgangsmodelijkheden en -kansen in dit voorbeeld zijn als volgt: (we schrijven 1 i.p.v. A en 2 i.p.v. B)



$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

Definieer

$$p_i^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = i), \qquad i = 1,2; \; n = 0,1,\ldots$$

$$p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}), \qquad n = 0,1,\ldots$$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i), \qquad i,j = 1,2 .$$

Nu geldt er:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1,\ X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1,\ X_{n-1} = 2)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2)\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 2) .$$

Dus

$$p_1^{(n)} = p_1^{(n-1)} p_{11} + p_2^{(n-1)} p_{21} = p_1^{(n-1)} \times 0.7 + p_2^{(n-1)} \times 0.1$$

en

$$p_2^{(n)} = p_1^{(n-1)} p_{12} + p_2^{(n-1)} p_{22} = p_1^{(n-1)} \times 0.3 + p_2^{(n-1)} \times 0.9 .$$

We kunnen deze vergelijkingen ook in de vector-matrix notatie schrijven. Merk op dat $p^{(n)}$ en $p^{(n-1)}$ rijvectoren zijn. We krijgen dan

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} P \qquad \text{(ga na)} .$$

En zo voortgaand ook

$$p^{(n)} = p^{(0)} P^n .$$

Het gedrag op den duur wordt dus bepaald door de matrix P^n.

Deze vector-matrix notatie is natuurlijk niet beperkt tot systemen met slechts 2 toestanden. Beschouw het geval dat de toestandsruimte gelijk is aan $\{1,2,\dots,N\}$. Zij X_n de toestand van het systeem op tijdstip n en laat P de overgangsmatrix zijn. Dan geldt:

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = i,\ X_{n-1} = j) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)\mathbb{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = j) .$$

Hetgeen we ook kunnen schrijven als

$$p_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} p_j^{(n-1)} p_{ji}, \qquad i = 1,\dots,N .$$

Dus in vector-matrix notatie

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} P = \dots = p^{(0)} P^n .$$

We zien dus dat als $p^{(n)}$ convergeert naar een vector p voor $n \to \infty$ er moet gelden

$$p = pP .$$

In dat geval is p dus rijeigenvector van P bij eigenwaarde 1. Bovendien geldt er voor deze vector p

$$p_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N$$

en

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \ .$$

Er zijn echter gevallen waarin $p^{(n)}$ niet convergeert als $n \to \infty$. We zullen hier nog voorbeelden van tegenkomen.

Keren we nu weer terug naar het speciale geval uit voorbeeld 4. Beschouw eens het koopgedrag van een huisvrouw die op tijdstip 0 merk A koopt. Dus $p^{(0)} = (1,0)$.

Er geldt dan

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \text{ zodat } p^{(1)} = p^{(0)}P = (0.7\ ,\ 0.3)$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.16 & 0.84 \end{pmatrix}, \text{ zodat } p^{(2)} = (0.52\ ,\ 0.48)$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.22 & 0.78 \end{pmatrix}, \text{ zodat } p^{(4)} = (0.35\ ,\ 0.65)$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.74 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}, \text{ zodat } p^{(8)} = (0.26\ ,\ 0.74)$$

$$P^{16} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}, \text{ zodat } p^{(16)} = (0.25\ ,\ 0.75)\ .$$

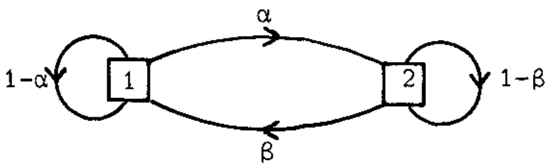
Maar ook voor een huisvrouw, die bij de start merk B koopt, geldt: $p^{(16)} = p^{(0)}P^{16} = (0,1)P^{16} = (0.25\ ,\ 0.75)$. Dus onafhankelijk van de starttoestand geldt: $p^{(16)} = (0.25\ ,\ 0.75)$. Bedenk wel dat bovenstaande getallen op twee cijfers zijn afgerond.

De rijeigenvector p van de matrix P bij eigenwaarde 1, die voldoet aan:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \end{cases}$$

is inderdaad de vector (0.25 , 0.75).

Laten we nu het algemene geval van zo'n merkovergangsproces met 2 toestanden eens nader analyseren.



$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

In de eerste plaats vragen we ons af of er een rijeigenvector $p^{(\infty)}$ bestaat, met

$$\begin{cases} p^{(\infty)} = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}) \\ p^{(\infty)} = p^{(\infty)} P \\ p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1 \,. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat voor $\alpha + \beta > 0$ de vector $p^{(\infty)}$, met

$$p_1^{(\infty)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad \text{en} \quad p_2^{(\infty)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \,,$$

de gewenste eigenschappen heeft.

In de tweede plaats willen we weten, of voor elke $p^{(0)}$ met $p_i^{(0)} \geq 0$ en $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} = 1$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} p^{(0)} P^n = \lim_{n\to\infty} \bar{p}^{(n)} = p^{(\infty)} \,.$$

We nemen aan dat $\alpha + \beta > 0$. De matrix P heeft nu twee eigenvectoren. We hebben al gezien dat $p^{(\infty)}$ rijeigenvector is met eigenwaarde 1. De tweede eigenwaarde van P is $1 - \alpha - \beta$ en de hierbij behorende eigenvector is $(1,-1)$.
Dan kan P geschreven worden in de vorm $P = S^{-1}\Lambda S$ met

$$S = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

We kunnen nu ook S^{-1} bepalen:

$$S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \,.$$

Nu is het eenvoudig om P^n te berekenen: Immers

$$P^n = (S^{-1}\Lambda S)^n = S^{-1}\Lambda^n S$$

met

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}$$

zodat

$$P^n = \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ -\beta & \beta\end{pmatrix} .$$

Dus als $0 < \alpha + \beta < 2$, dan convergeert P^n naar $\frac{1}{\alpha + \beta}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ als n naar ∞ gaat. En bovendien geldt dan:

$$p^{(\infty)} = (\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta}) .$$

Merk op dat $p_1^{(\infty)}/p_2^{(\infty)} = p_{21}/p_{12}$. Dat wil zeggen dat het koopgedrag op den duur bepaald wordt door de merkontrouw.

Conclusies: Als $\alpha + \beta > 0$ geldt:

i) Het stelsel

$$\begin{cases} p^{(\infty)} = p^{(\infty)}P \\ \sum_i p_i^{(\infty)} = 1 \\ p_i^{(\infty)} \geq 0 \end{cases}$$

is eenduidig oplosbaar;

ii) Als bovendien $\alpha + \beta < 2$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix}p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)}\\ p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)}\end{pmatrix} ;$$

iii) Als $\alpha + \beta < 2$, geldt voor elke beginverdeling $p^{(0)}$:

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}P^n = p^{(\infty)} ;$$

iv) De convergentie verloopt geometrisch, met reductiefactor $1 - \alpha - \beta$;

v) $\alpha + \beta = 0$ impliceert $\alpha = 0$ en $\beta = 0$, zodat $P = I$. Dan geldt dus voor alle n dat $p^{(n)} = p^{(0)}I = p^{(0)}$;

vi) Als $\alpha + \beta = 2$ dan geldt

$$P = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} .$$

Dus $p^{(\infty)} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Verder geldt:

$$p^{(2n)} = p^{(0)}$$

$$p^{(2n+1)} = p^{(1)} = (p_2^{(0)}, p_1^{(0)}) \quad \text{voor alle } n\ .$$

In dit geval hebben we dus te maken met een vorm van periodiciteit. In paragraaf 2.8 komen we hierop terug.

2.6. Formele definitie van Markov ketens

In hoofdstuk 1 gaven we al een vage omschrijving van het begrip Markov keten en in de voorgaande paragrafen zijn een groot aantal voorbeelden genoemd. We zullen nu een formele definitie van het begrip Markov keten geven.

Definitie 2.1. Zij $X_0, X_1, \ldots$ een stochastisch proces met toestandsruimte $\{1,2,\ldots,N\}$. Zij verder

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = p_i, \qquad i = 1,\ldots,N\ .$$

Dan noemen we het stochastisch proces $X_0, X_1, \ldots$ een *Markov keten* als er een matrix P bestaat met $(P)_{ij} = p_{ij}$, met $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$, zodat

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}\ ,$$

voor alle $n = 1,2,\ldots$ en elk stel $i_0, i_1, \ldots, i_n$.

Zoals al eerder is gezegd, noemen we de matrix P de overgangsmatrix of de Markov matrix. De elementen p_{ij} noemen we de overgangswaarschijnlijkheden en de vector p heet de *startverdeling* of *beginverdeling*.

Ook voor het begrip Markov eigenschap geven we nu een formele definitie.

Definitie 2.2. Zij $X_0, X_1, \ldots$ een stochastisch proces, dan zeggen we dat dit proces de *Markov eigenschap* heeft als

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

voor alle $n = 1,2,\ldots$ en elk stel $i_0, i_1, \ldots, i_n$.

Dus de voorwaardelijke kansverdeling van X_n gegeven $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ hangt alleen van X_{n-1} af. Dit alles natuurlijk voor zover deze voorwaardelijke kansen gedefinieerd zijn.

We kunnen nu aantonen dat Markov ketens de Markov eigenschap hebben.

Stelling 2.1. Als het stochastisch proces $\{X_n, n = 0,1,\ldots\}$ met toestandsruimte $\{1,2,\ldots,N\}$ een Markov keten is met startverdeling p en Markov matrix P, $(P)_{ij} = p_{ij}$, dan geldt er (voor zover onderstaande voorwaardelijke kansen gedefinieerd zijn)

i) $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}$, d.w.z. deze voorwaardelijke kans is onafhankelijk van n.

ii) $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i) = p_{ij}$ voor alle n en elk stel $i_0, \ldots, i_{n-2}, i, j$.

Bewijs.

i) $$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{n-1} = i, X_n = j)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i, X_n = j)}{\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i} p_{ij}}{\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i}} = p_{ij} .$$

ii) $$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i, X_n = j)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i)} = \frac{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i} p_{ij}}{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-2} i}} = p_{ij}.$$

Analoog is te bewijzen dat ook geldt

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),$$

voor alle n en alle $i_0, \ldots, i_n$ en $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

2.7. Bereikbaarheid en verbondenheid

Voor elk tweetal toestanden i en j kunnen we na gaan of het systeem vanuit i in j terecht kan komen en of het systeem ook vanuit j in i kan komen. Kan het systeem vanuit i in j komen dan noemen we j bereikbaar vanuit i en kan het systeem zowel vanuit i in j als vanuit j in i komen dan noemen we i en j verbonden. We zullen hieronder een meer formele definitie van deze twee begrippen geven.
Daartoe formuleren we eerst de volgende stelling.

Stelling 2.2. Laat $X_0, X_1, \ldots$ een Markov keten zijn dan geldt voor iedere $n \geq 0$, $m \geq 0$, $i = 1,\ldots,N$, $j = 1,\ldots,N$

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = (P^n)_{ij} = p_{ij}^{(n)} \;,$$

mits de voorwaardelijke kans gedefinieerd is.

Bewijs. Met inductie naar n.
$n = 0$. Juist, met de definitie $P^0 = I$.
Stel het resultaat is juist voor $n = k$, dan geldt

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_m = i) = \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(X_{m+k} = \ell \mid X_m = i) \cdot \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_m = i,\ X_{m+k} = \ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} (P^k)_{i\ell} (P)_{\ell j} = (P^{k+1})_{ij} \;,$$

zodat de bewering ook geldt voor $n = k + 1$. Daarmee is het inductiebewijs voltooid. □

Dan volgt nu de formele definitie voor de begrippen bereikbaar en verbonden.

Definitie 2.3. Bij een Markov keten heet de toestand j *bereikbaar* vanuit i als voor zekere $n \geq 0$ geldt $p_{ij}^{(n)} > 0$ ($p_{ii}^{(0)} = 1$, $p_{ij}^{(0)} = 0$, $i \neq j$). Notatie $i \rightarrow j$.
De toestanden i en j heten *verbonden* als i bereikbaar is vanuit j en j bereikbaar is vanuit i. Notatie $i \leftrightarrow j$.

In voorbeeld 3 hebben we $1 \leftrightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 3$ en $i \leftrightarrow i$, $i = 1,2,3,4$. Ga zelf na hoe het bij de andere voorbeelden zit.

Stelling 2.3. Voor een Markov keten geldt:

i) $i \to i$ (reflexiviteit); immers $p_{ii}^{(0)} = 1$;

ii) als $i \to j$ en $j \to k$ dan ook $i \to k$ (transitiviteit);

iii) $i \leftrightarrow i$ (reflexiviteit);

iv) als $i \leftrightarrow j$ en $j \leftrightarrow k$ dan ook $i \leftrightarrow k$ (transitiviteit);

v) als $i \leftrightarrow j$, dan ook $j \leftrightarrow i$ (symmetrie).

i) en iii) zijn triviaal, immers $p_{ii}^{(0)} = 1$. Als voorbeeld voor ii), iv) en v) geven we het bewijs van ii).
Als $p_{ij}^{(n)} > 0$ en $p_{jk}^{(m)} > 0$ dan:

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{\ell} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell k}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0 \,. \qquad \square$$

De beweringen iii), iv) en v) kunnen worden samengevat door de uitspraak: $\leftrightarrow$ is een *equivalentierelatie*. De verzameling van toestanden van een Markov keten kan opgesplitst worden in een aantal deelverzamelingen, *de equivalentieklassen*, zodanig dat binnen een deelverzameling elk tweetal toestanden verbonden is en elk tweetal uit verschillende deelverzamelingen niet verbonden is.

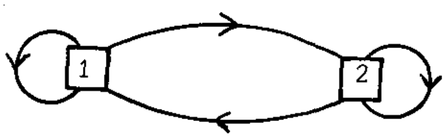
Voorbeeld 3: $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$.
Voorbeeld 4: $\{1,2\}$.
Ga zelf de andere voorbeelden na.

Definitie 2.4. Een Markov keten waarin elk paar toestanden verbonden is, heet *irreducibel*.

Ga na welke van de voorbeelden betrekking hebben op irreducibele Markov ketens.

2.8. Periodiciteit

Zoals we in paragraaf 2.5 al zagen zijn er Markov ketens die een zeker periodiek gedrag vertonen. Zo hadden we in conclusie vi) het volgende geval. Voor $\alpha = \beta = 1$ kregen we het volgende model:



en $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bij start in toestand 1 zal toestand 1 op alle even tijdstippen optreden en en nooit op de oneven tijdstippen.

Definitie 2.5. De periode van een toestand i bij een Markov keten is de grootste gemene deler van alle getallen n, met $n \geq 1$, waarvoor geldt $p_{ii}^{(n)} > 0$.

Zo is in het bovenstaande voorbeeld de periode 2.

Stelling 2.4. Alle toestanden in een klasse van verbonden toestanden hebben dezelfde periode.

Bewijs. Stel $i \leftrightarrow j$; i heeft periode d_i en j heeft periode d_j. Dan zijn er getallen ℓ en m, zodat:

$$p_{ij}^{(\ell)} > 0 \quad \text{en} \quad p_{ji}^{(m)} > 0 \; .$$

Voor ℓ en m geldt dan:

$$p_{ii}^{(\ell+m)} > 0$$

en dus is $\ell + m$ een veelvoud van d_i.
Indien echter $p_{jj}^{(k)} > 0$ dan geldt $p_{ii}^{(\ell+k+m)} > 0$.
Dus is ook $\ell + k + m$ een veelvoud van d_i zodat ook k een veelvoud van d_i is.
Dus $d_j \geq d_i$.
Analoog $d_i \geq d_j$. Dus $d_i = d_j$. □

Voorbeeld 7.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Deze keten heeft drie klassen van verbonden toestanden, nl. {1}, {2,3,4}, {5,6}, met perioden resp. 1,2,2. Ga na.

Met name kan periodiciteit ontstaan als het kansgedrag aan seizoensinvloeden onderhevig is en, om dit op te vangen, het seizoen ook in de toestand opgenomen wordt.

Voorbeeld 8. Abonnement op een krant.

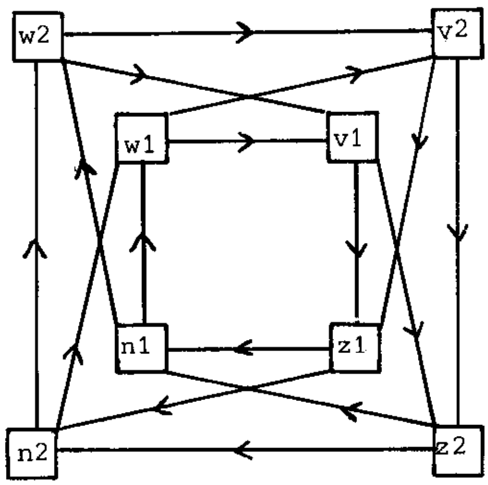
Ieder kwartaal beslist een student of hij een abonnement op een krant neemt en als hij er al een heeft of hij zijn abonnement opzegt. De overgangskansen zijn niet ieder kwartaal gelijk, denk bijvoorbeeld aan de vakantieperiode in de zomer en collegevrije periode in de winter.

We voeren de volgende toestanden in:

(w,1) (v,1) (z,1) (n,1) (wel abonnement)

(w,2) (v,2) (z,2) (n,2) (geen abonnement) .

De éénstapsovergangsmogelijkheden geven we als volgt weer:



De overgangsmatrix P ziet er bijvoorbeeld als volgt uit:

P =

	(w,1)	(w,2)	(v,1)	(v,2)	(z,1)	(z,2)	(n,1)	(n,2)
(w,1)			0.9	0.1				
(w,2)			0.2	0.8				
(v,1)					0.4	0.6		
(v,2)					0	1		
(z,1)							1	0
(z,2)							0.3	0.7
(n,1)	0.7	0.3						
(n,2)	0.1	0.9						

Nu zijn alle toestanden onderling verbonden en zij hebben periode 4.

2.9. Doorgangs- en terugkeertoestanden

In de voorbeelden zien we dat we onderscheid kunnen maken tussen toestanden waar we regelmatig terug komen en toestanden waar we op den duur niet meer in terecht zullen komen.
In de volgende definitie onderscheiden we deze twee soorten toestanden.

Definitie 2.6. Toestand i van een Markov keten heet:
doorgangstoestand (transiënte toestand), als de kans dat het systeem ooit nog in toestand i terugkomt bij start in toestand i, kleiner is dan 1;
terugkeertoestand (recurrente toestand), als de kans op terugkeer in toestand i bij start in toestand i gelijk is aan 1.

Ga zelf na, dat voorbeeld 4 uitsluitend terugkeertoestanden heeft. Ga ook na, welke toestanden in voorbeeld 6 terugkeertoestanden zijn.

Voor het klassificeren van de toestanden van een Markov keten in terugkeertoestanden en doorgangstoestanden, kunnen de volgende voor de hand liggende (maar hier niet bewezen) eigenschappen goed gebruikt worden:

Stelling 2.5. In een Markov keten geldt:

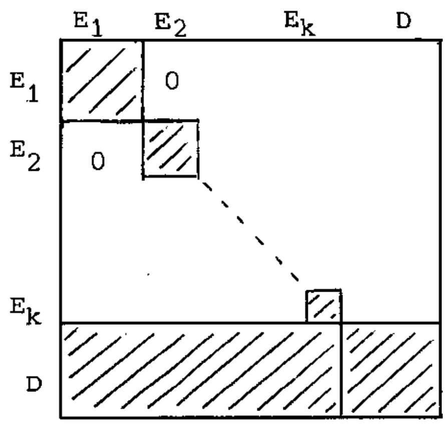
i) i is dan en slechts dan een terugkeertoestand als $\sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(m)} = \infty$ (het verwachte aantal terugkeren in i is ∞);
ii) elke Markov keten bevat minstens één terugkeertoestand;
iii) twee verbonden toestanden hebben dezelfde karakterisering; het zijn ofwel allebei terugkeertoestanden, ofwel allebei doorgangstoestanden;
iv) in een irreducibele Markov keten zijn alle toestanden terugkeertoestand.

Gebruik deze eigenschappen om de toestanden in de verschillende voorbeelden te karakteriseren.

Hoofdstuk 3. Het limietgedrag van Markov ketens

3.1. Inleiding

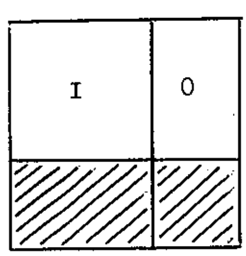
In paragraaf 2.5 hebben we het limietgedrag onderzocht voor het eenvoudige geval van een Markov keten met twee toestanden. In dit hoofdstuk zullen we het algemene geval bestuderen. We zullen daartoe eerst de structuur van de overgangsmatrix analyseren.
Elke overgangsmatrix kunnen we door de toestanden te hernummeren in de volgende vorm brengen.



Hierin zijn $E_1,\dots,E_k$ de verschillende equivalentieklassen van verbonden terugkeertoestanden en is D de verzameling doorgangstoestanden. Altijd is er tenminste één klasse van terugkeertoestanden (vgl. stelling 2.5 ii), de verzameling D kan leeg zijn (vgl. voorbeeld 4).
We zullen onze analyse niet beginnen met het bestuderen van overgangsmatrices van de nog zeer algemene vorm hierboven. We zullen deze vorm eerst wat vereenvoudigen. Vandaar de onderstaande definitie.

Definitie 3.1. Een Markov keten met de eigenschap dat elke terugkeertoestand absorberend is heet een *transiënte* keten.

De algemene vorm van een transiente keten is dus



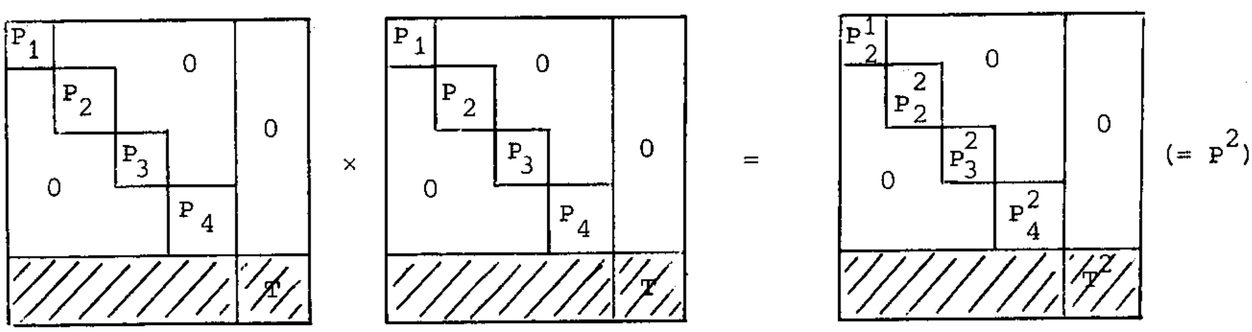
Om het limietgedrag van een Markov keten te onderzoeken kunnen we volstaan met het beschouwen van transiënte ketens en irreducibele recurrente ketens, apart. Dit wordt op de volgende wijze aannemelijk gemaakt.
Beschouw eens de Markov keten, met de overgangsmatrix uit het begin van deze paragraaf. Noem deze matrix P. We zullen in plaats hiervan een nieuwe Markov keten met Markov matrix Q beschouwen met toestandsruimte $\{1,2,\dots,k\} \cup D$, waarbij Q de volgende gedaante heeft:

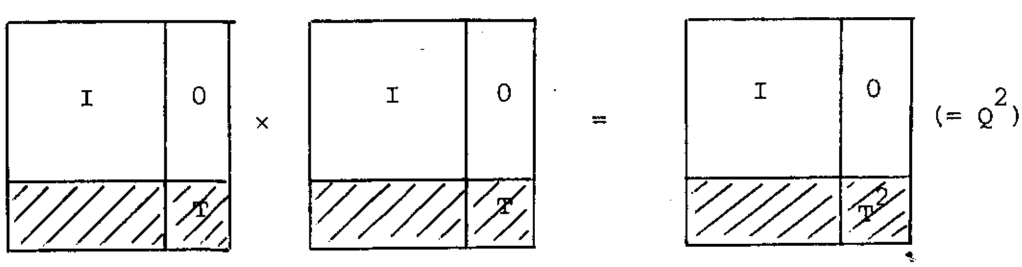
$$q_{ij} = p_{ij} \qquad \text{als } i,j \in D$$

$$q_{ii} = 1 \qquad \text{als } i \in \{1,2,\dots,k\}$$

$$q_{ij} = \sum_{\ell \in E_j} p_{i\ell} \qquad \text{als } i \in D,\ j \in \{1,2,\dots,k\}\ .$$

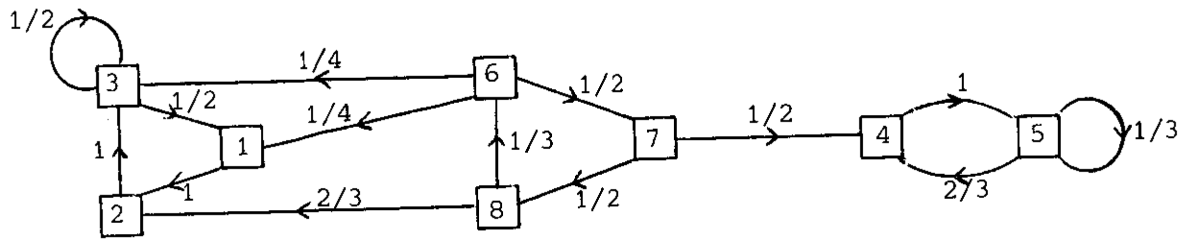
Dus in deze nieuwe Markov-keten is iedere recurrente klasse van de oorspronkelijke keten geconcentreerd tot één absorberende toestand. En in de nieuwe keten is de overgangskans van een transiënte toestand i naar een absorberende toestand j gelijk aan de kans in de oorspronkelijke keten om van i naar E_j te gaan. Het gedrag van beide ketens met betrekking tot de toestanden van D is identiek, totdat D verlaten wordt, d.w.z. dat voor alle n geldt: $p_{ij}^{(n)} = q_{ij}^{(n)}$ als $i,j \in D$. Dit is direct te zien uit de matrixproducten $P \times P$ en $Q \times Q$. Vergelijk de volgende plaatjes. Hierbij is k gelijk aan 4 en wordt de matrix van overgangen binnen E_i met P_i aangeduid, $i = 1,2,\dots,k$.
Elke klasse E_i, $i = 1,2,\dots,k$, is weer een irreducibele keten aangezien het proces E_i niet meer verlaten kan zodra het er eenmaal inzit en in E_i alle toestanden onderling verbonden zijn.





We illustreren dit "inkrimpen" van de klassen van terugkeertoestanden nog eens voor het volgende voorbeeld.

<u>Voorbeeld 9.</u>



We kunnen de volgende klassen van toestanden onderscheiden:

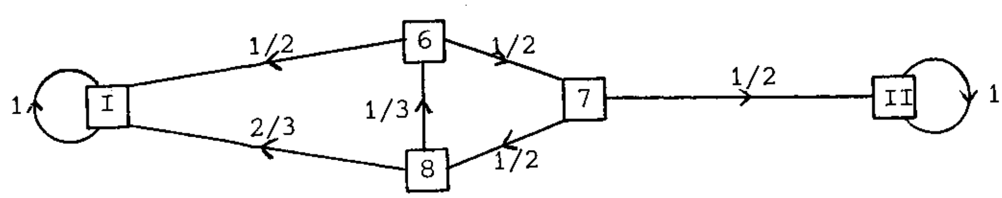
i) De beide equivalentieklassen van terugkeertoestanden $E_1 = \{1,2,3\}$ en $E_2 = \{4,5\}$.

ii) De klasse van doorgangstoestanden $D = \{6,7,8\}$. (De toestanden in D zijn verbonden maar voor de analyse is dat onbelangrijk.)

De overgangsmatrix P ziet er als volgt uit:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}
0 & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 2/3 & 1/3 & & & \\
\hline
1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Als we de beide klassen van terugkeertoestanden E_1 en E_2 elk als één toestand, resp. toestand I en toestand II, beschouwen, gaat het netwerk er als volgt uitzien. Ga na.



De overgangsmatrix Q wordt dan:

$$Q = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3.2. Transiënte ketens

Beschouw een transiënte keten met Markov matrix Q,

$$Q := \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & T \end{pmatrix} \}D$$

De (n - 1)-staps overgangsmatrix Q^{n-1} heeft nu de volgende vorm:

$$Q^{n-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ S_{n-1} & T^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Hieruit is eenvoudig Q^n af te leiden

$$Q^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R+TS_{n-1} & T^n \end{pmatrix}$$

zodat

$$(*) \qquad S_n = R + TS_{n-1} .$$

Aangezien voor elk paar toestanden $i \in D$, $j \notin D$ geldt

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \le \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) \le 1 ,$$

ofwel $p_{ij}^{(n)}$ is een monotoon niet dalende rij, heeft $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ een limiet als $n \to \infty$.

Met vergelijking (*) kunnen we deze limiet in matrixvorm eenvoudig bepalen, immers

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (R + TS_{n-1}) = R + T \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = R + TS$$

zodat

$$(I - T)S = R .$$

Alle toestanden van D zijn doorgangstoestanden zodat volgens stelling 2.5 i) geldt $\sum_{n=0}^{\infty} q_{ii}^{(n)} < \infty$, voor $i \in D$. Dus $\lim_{n\to\infty} q_{ii}^{(n)} = 0$ ofwel $T^n \to 0$.

Zonder bewijs vermelden we dat daaruit volgt dat $(I - T)^{-1}$ bestaat. Dus $S = (I - T)^{-1}R$.

Samenvattend:

Stelling 3.1. Een transiënte Markov keten met overgangsmatrix Q,

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & T \end{pmatrix},$$

heeft limietverdeling Q^{∞}:

$$Q^{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (I-T)^{-1}R & 0 \end{pmatrix}.$$

Bij voorbeeld 9: Beschouw de transiënte keten met Markov matrix Q. Dan geldt:

$$Q^{\infty} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 8/11 & 3/11 & \\ 5/11 & 6/11 & \\ 10/11 & 1/11 & \end{array}\right).$$

3.3. Irreducibele, aperiodieke Markov ketens

Bij de analyse van irreducibele Markov ketens is het zinvol onderscheid te maken tussen het geval dat er een zekere vorm van periodiciteit optreedt, wat de analyse enigszins bemoeilijkt, en de aperiodieke situatie. Deze tweede, eenvoudiger, situatie beschouwen we nu eerst:

Definitie 3.2. Een irreducibele Markov-keten heet aperiodiek, als alle toestanden periode 1 hebben.

Voor het limietgedrag van irreducibele aperiodieke Markov-ketens geldt de volgende stelling, die nauw aansluit bij de eigenschappen, die we voor Markov-ketens met 2 toestanden bewezen hebben.

Stelling 3.2. Voor een irreducibele, aperiodieke Markov keten met overgangsmatrix P geldt

i) er is een matrix P^{∞} met $\lim_{n\to\infty} P^n = P^{\infty}$;

ii) P^{∞} heeft identieke rijen, die elk een kansverdeling op de toestandsverzameling $\{1,\ldots,N\}$ vormen;

iii) P^{∞} heeft uitsluitend positieve componenten;

iv) er bestaan constanten b en ρ met $0 \le \rho < 1$, zodat voor elke i,j en geldt:

$$|p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(\infty)}| \leq bp^n$$

(de convergentie verloopt exponentieel);

v) $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}$ bestaat, hangt niet af van $p^{(0)}$ en is gelijk aan een (de) rij uit P^{∞} (noem deze limiet $p^{(\infty)}$);

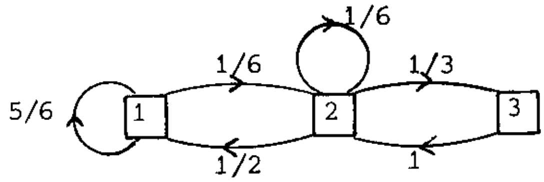
vi) precies één kansverdeling op $\{1,\ldots,N\}$ is rijeigenvector van P bij eigenwaarde 1, nl. de vector $p^{(\infty)}$;

vii) de verwachte tijd, die ligt tussen twee bezoeken aan toestand i is gelijk aan $1/p_i^{(\infty)}$.

Het bewijs van deze stelling zal hier niet worden geleverd (zie hiervoor bijvoorbeeld het boek van Kemeny en Snell).
Ga wel zelf na dat de beweringen v) en vi) uit de eigenschappen i) en ii) volgen.

Voorbeeld. Beschouwen we nu nog eens het systeem met Markov-matrix P uit voorbeeld 5:

$$P = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$



Laat $p = (p_1,p_2,p_3)$ de eigenvector zijn bij eigenwaarde 1, dus $p = pP$. Als bovendien $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ dan geldt: $p = (9/13,3/13,1/13)$.
Daar we te maken hebben met een irreducibele aperiodieke Markov keten, geldt: $\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = p = \frac{1}{13}(9,3,1)$. De limiet is onafhankelijk van de beginsituatie.
Op den duur geldt dus bij benadering: $p_1 = 9/13$, $p_2 = 3/13$, $p_3 = 1/13$. Verder is bijvoorbeeld de verwachte tijd, die ligt tussen twee bezoeken aan toestand 2 gelijk aan $\frac{1}{p_2} = 13/3 = 4^1/3$.

3.4. Irreducibele, periodieke ketens

Nu zullen we proberen de resultaten voor irreducibele aperiodieke Markov ketens te generaliseren naar algemene irreducibele Markov-ketens. Merk op, dat in het periodieke geval P^n niet convergeert voor $n \to \infty$, nl. als de periode d is, is elke $p_{ij}^{(n)}$ bij toenemende n steeds $d-1$ keer nul en hoogstens 1 keer groter dan nul, terwijl $\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$ voor alle i en n (ga na).

Stelling 3.3. Voor een irreducibele Markov keten met Markov matrix P geldt:

i) er is een matrix P^∞ met $\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} P^k = P^\infty$;

ii) P^∞ heeft identieke rijen, die elk een kansverdeling op $\{1,2,\ldots,N\}$ vormen;

iii) P^∞ heeft uitsluitend positieve componenten;

iv) $\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}$ bestaat, is onafhankelijk van $p^{(0)}$ en gelijk aan een rij uit P^∞ (noem deze limietvector $p^{(\infty)}$);

v) precies één kansverdeling op $\{1,2,\ldots,N\}$ is rijeigenvector van P bij de eigenwaarde 1, nl. de vector $p^{(\infty)}$.

Bewijs.

i) Noem de periode d.

Definieer: $i \overset{d}{\leftrightarrow} j$ als $p_{ij}^{nd} > 0$ voor minstens één waarde van $n \geq 0$.

$\overset{d}{\leftrightarrow}$ is een equivalentierelatie op $\{1,2,\ldots,N\}$ (vergelijk de relatie $\leftrightarrow$).

Hernummer de toestanden zó, dat de elementen uit één equivalentieklasse bij elkaar staan. In d perioden wordt elke klasse precies één keer bezocht en wel in een vaste volgorde. Hernummer zó, dat opeenvolgende klassen ook opeenvolgend staan. Nu geldt:

$$P^d = \begin{pmatrix} \boxed{A_s} & & & \\ & \boxed{} & \ddots & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{A_d} \end{pmatrix}$$

waarin $A_1,\ldots,A_d$ overgangsmatrices zijn van een irreducibele, aperiodieke Markov keten.

Hieruit volgt voor P^{nd}, $n = 1,2,\ldots$

$$P^{nd} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^n} & & & \\ & \boxed{} & \ddots & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{A_d^n} \end{pmatrix}$$

Met stelling 3.2 vinden we dus

$$\lim_{n\to\infty} P^{nd} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^\infty} & & & \\ & \boxed{} & \ddots & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{A_d^\infty} \end{pmatrix} =: P^* ,$$

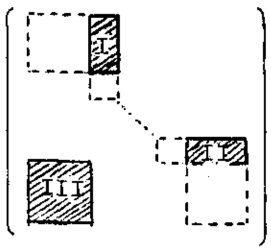
waarbij elke A_k^∞ identieke rijen heeft met uitsluitend positieve componenten, $k = 1,2,\dots,d$.

$$\lim_{n\to\infty} P^{nd+k} = P^k \lim_{n\to\infty} P^{nd} = P^k P^* \; .$$

De rij $\{P^n\}_{n=0}^\infty$ kan dus gesplitst worden in d convergente deelrijen, zodat geldt:

$$\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} P^k = 1/d \sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell P^* =: P^\infty \; .$$

ii) P^∞ wordt uit P^* verkregen door in elke kolom de nulcomponenten te vervangen door componenten van dezelfde waarde als de reeds aanwezige nietnulcomponenten en vervolgens door de periode d te delen.
Immers beschouw nog eens de term $d^{-1} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell P^*$. Voor $\ell = 0$ krijgen we P^*. Voor $\ell = 1$ krijgen we PP^*. Deze matrix heeft de volgende vorm

$PP^* =$ 

Alleen in de gearceerde blokken komen niet-nul componenten voor. De rijen in deze blokken zijn identiek aan de rijen in de corresponderende blokken in P in dezelfde kolommen, zo zijn de rijen in I gelijk aan de rijen in A_2^∞, de rijen in II gelijk aan de rijen in A_d^∞ en de rijen in III gelijk aan de rijen in A_1^∞. Ga dit na.
Zo voortgaand zien we dat $\sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell P^*$ voor elk matrixelement precies een keer een tijdrage ongelijk nul levert, en dat de bijdragen in elk element uit een kolom gelijk zijn. Dus P^∞ heeft identieke rijen die natuurlijk een kansverdeling op $\{1,\dots,N\}$ vormen, en iii): alle componenten zijn strict positief.

iv) De rijen van P^∞ zijn identiek dus is de $\lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)} =$
$= \lim_{n\to\infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} p^{(0)} P^k = p^{(0)} P^\infty$ onafhankelijk van $p^{(0)}$.

v) Duidelijk is dat de limietvector $p^{(\infty)}$ rijeigenvector van P is bij eigenwaarde 1, immers

$$P^\infty P = \frac{1}{d} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^\ell P^* P \; .$$

Verder $PP^* = P^*P$ en $P^dP^* = P^*$ (ga na), zodat

$$P^{\infty}P = \frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{d-1} P^{\ell+1}P^* = \frac{1}{d}\sum_{\ell=1}^{d} P^{\ell}P^* = \frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{d-1} P^{\ell}P^* = P^{\infty} .$$

Dus

$$p^{(\infty)}P = p^{(\infty)} .$$

Omgekeerd, laat p een rijeigenvector bij eigenwaarde 1 van P zijn, dan is p ook eigenvector van P^d en P^*. Nu zijn de overgangsmatrices $A_1,\ldots,A_d$ irreducibel en aperiodiek, dus bestaan er unieke kansverdelingen bij eigenwaarde 1, $p_1,\ldots,p_d$ behorende bij $A_1,\ldots,A_d$ (vgl. stelling 3.2 vi)). Dus moet p een lineaire combinatie van $p_1,\ldots,p_d$ zijn. Dat $p = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} p_0$ volgt uit het feit dat p eigenvector is van P en dus de kans op elk van de klassen $1,2,\ldots,d$ gelijk moet zijn.

<u>Voorbeeld</u>. In voorbeeld 8 (kranteabonnement) hadden we een irreducibele periodieke Markov-keten met periode 4. De overgangsmatrix was als volgt

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
 & & 0{,}9 & 0{,}1 & & & & \\
 & & 0{,}2 & 0{,}8 & & & & \\
\hline
 & & & & 0{,}4 & 0{,}6 & & \\
 & & & & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0{,}3 & 0{,}7 \\
\hline
0{,}7 & 0{,}3 & & & & & & \\
0{,}1 & 0{,}9 & & & & & &
\end{array}\right]$$

Berekenen we P^4 dan zien we dat geldt (afgerond op 2 cijfers)

$$P^4 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0{,}43 & 0{,}57 & & & & & & \\
0{,}31 & 0{,}69 & & & & & & \\
\hline
 & & 0{,}51 & 0{,}49 & & & & \\
 & & 0{,}40 & 0{,}60 & & & & \\
\hline
 & & & & 0{,}28 & 0{,}72 & & \\
 & & & & 0{,}16 & 0{,}84 & & \\
\hline
 & & & & & & 0{,}49 & 0{,}51 \\
 & & & & & & 0{,}38 & 0{,}62
\end{array}\right]$$

Met de resultaten uit paragraaf 2.5 vinden we vervolgens P^* (uitgaand van de afgeronde cijfers in P^4)

$$
P^* = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
0.35 & 0.65 & & & & & & \\
0.35 & 0.65 & & & & & & \\
\hline
 & & 0.45 & 0.55 & & & & \\
 & & 0.45 & 0.55 & & & & \\
\hline
 & & & & 0.18 & 0.82 & & \\
 & & & & 0.18 & 0.82 & & \\
\hline
 & & & & & & 0.43 & 0.57 \\
 & & & & & & 0.43 & 0.57
\end{array}\right]
$$

zodat $p^{(\infty)} \simeq \frac{1}{100}(9,16,11,14,5,20,11,14)$.

3.5. Het Ehrenfest diffusiemodel

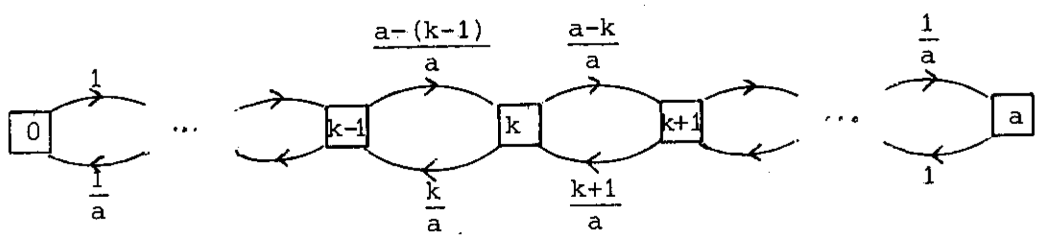
Tot slot van dit hoofdstuk beschouwen we in deze paragraaf het Ehrenfest diffusiemodel dat een eenvoudig model is voor diffusie door een membraan. Er zijn twee dozen, die samen a knikkers bevatten, bijvoorbeeld k in de eerste en $a-k$ in de tweede. Door loting trekken we willekeurig een knikker (uit de a) en brengen deze over naar de andere doos. Dan loten we opnieuw, enz. Noem X_n het aantal knikkers in de eerste doos na de n^e trekking. $X_0 = k_0$ gegeven (bv. $X_0 = 0$). Definieer:

$$
\begin{aligned}
p_k^{(n)} &:= \mathbb{P}(X_n = k) \;, \\
p^{(n)} &:= (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}) \;, \\
p_k^{(0)} &:= \delta_{kk_0} \;.
\end{aligned}
$$

Voor de overgangskansen geldt (ga na):

$$
p_{ij} := \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \begin{cases} \frac{a-i}{a} & \text{als } j = i+1 \\ \frac{i}{a} & \text{als } j = i-1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}
$$

Deze voorwaardelijke kansen hangen niet van n af. De één-stapsovergangsmogelijkheden en -kansen kunnen we als volgt weergeven:



Uit het plaatje zien we direct, dat het proces een irreducibele Markov-keten is met periode 2. Immers je kunt vanuit een toestand in elke andere toestand komen en alleen na een even aantal stappen terugkomen.

P is de overgangsmatrix; $(P)_{i,j} = p_{ij}$.

Laten we nu de kans, dat op den duur op een willekeurig tijdstip zich k ($0 \le k \le a$) knikkers in de eerste doos bevinden, berekenen.

We moeten middelen over de even en oneven tijdstippen, dus

$$p^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \{\tfrac{1}{2}p^{(0)}P^{2n} + \tfrac{1}{2}p^{(0)}P^{2n+1}\} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}p^{(0)}(I + P)P^{2n} .$$

Volgens stelling 3.3 is $p^{(\infty)}$ onafhankelijk van $p^{(0)}$ en rijeigenvector van P bij eigenwaarde 1, verder $\sum_{k=0}^{a} p_k^{(\infty)} = 1$. Dus geldt:

$$p^{(\infty)} = p^{(\infty)}P$$

$$\sum_{k=0}^{a} p_k^{(\infty)} = 1 .$$

Dus

$$p_k^{(\infty)} = p_{k+1}^{(\infty)} \frac{k+1}{a} + p_{k-1}^{(\infty)} \frac{a-(k-1)}{a} , \qquad 0 < k < a$$

$$p_0^{(\infty)} = p_1^{(\infty)} \frac{1}{a}$$

$$p_a^{(\infty)} = p_{a-1}^{(\infty)} \frac{1}{a}$$

$$\sum_{k=0}^{a} p_k^{(\infty)} = 1 .$$

Directe berekening levert:

$$p_k^{(\infty)} = \binom{a}{k} 2^{-a}, \qquad 0 \le k \le a$$

ofwel: de verdeling is binomiaal ($n = a$, $p = \tfrac{1}{2}$).

We kunnen ons nu afvragen of:

i) dit model overeenstemt met de practijk-limietsituatie dat aan beide zijden even grote concentraties voorkomen.

ii) het binnen dit model verklaarbaar is dat practisch geen zichtbare concentratieveranderingen meer optreden als eenmaal evenwicht bereikt is.

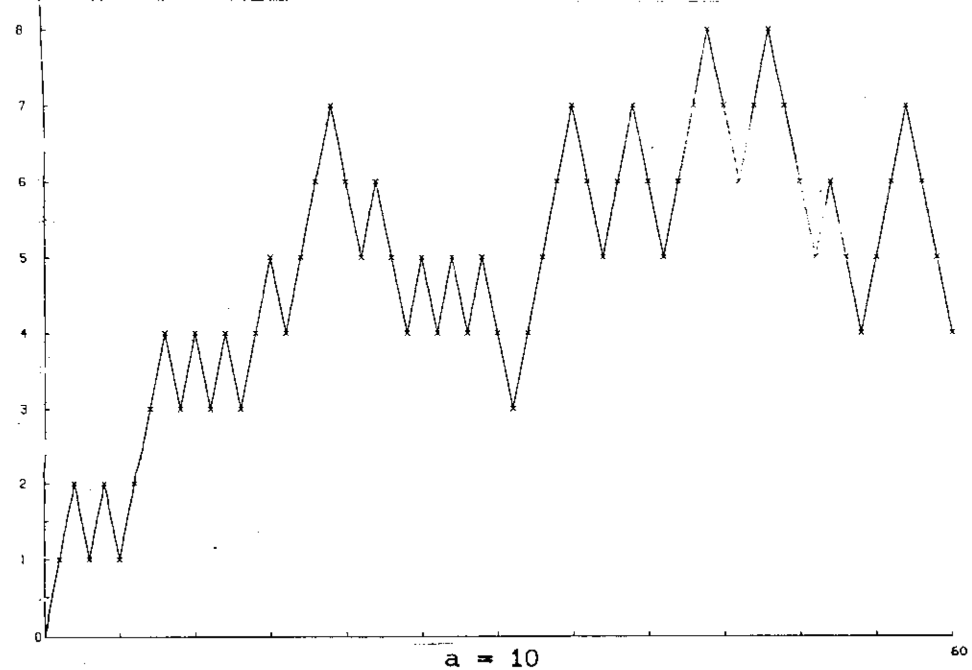
Teneinde de eerste vraag te beantwoorden beschouwen we de kans op zekere procentuele afwijkingen van a/2:

$$\alpha := \mathbb{P}(-\beta a \le \underline{k}^{(\infty)} - a/2 \le \beta a) .$$

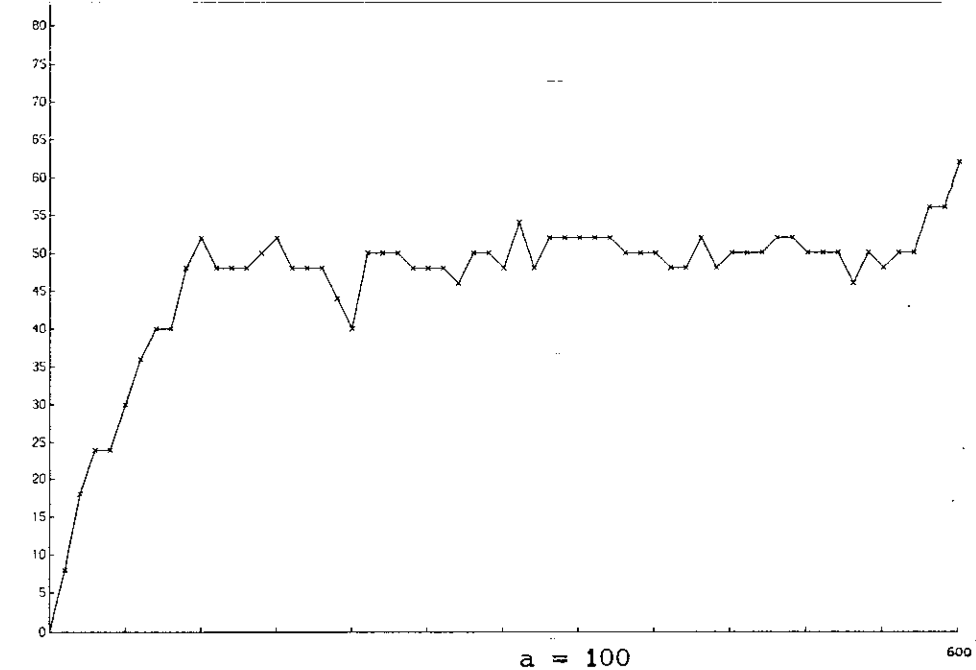
Als a groot is, dan is de kans α (centrale limietstelling) ongeveer gelijk aan:

$$\mathbb{P}(-2\beta\sqrt{a} \leq \underline{u} \leq 2\beta\sqrt{a}) \quad ,$$

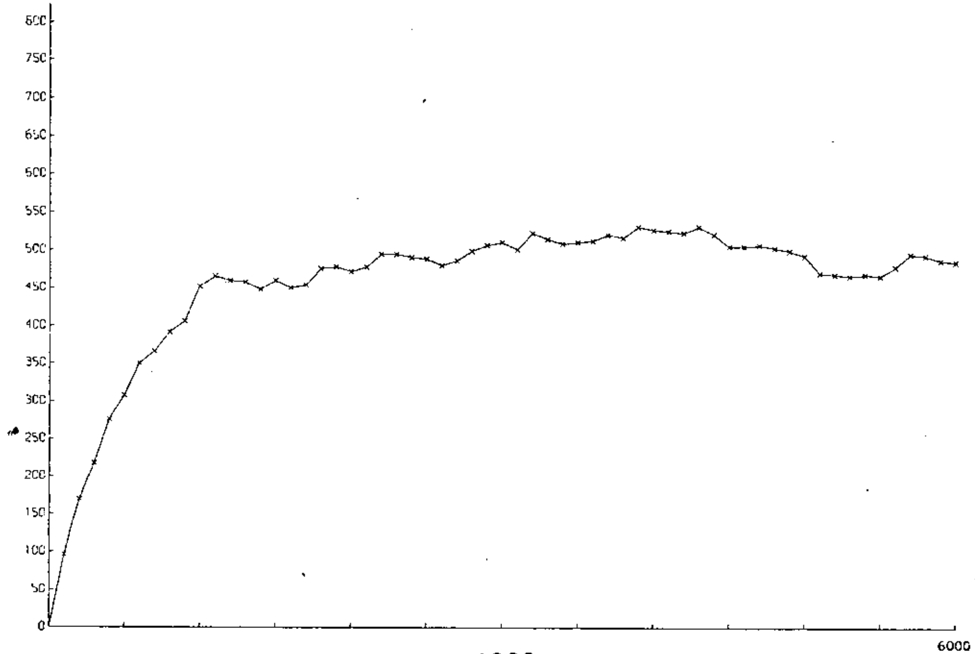
waarbij $\underline{u}$ normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie 1.
Deze kans is voor concrete waarden van a (getal van Avogadro!) ook voor zeer kleine waarden van β practisch gelijk aan 1.
Het antwoord op de tweede vraag is eveneens positief (voor a zeer groot), hoewel een gedetailleerd antwoord ingewikkelder is. Wel kan snel geverifieerd worden, dat de verwachte fractie van de tijd, dat de concentratie meer dan βa van a/2 verschilt, gelijk is aan $1 - \alpha$. Simulaties met a = 10,100,1000, 10.000 illustreren deze verschijnselen.
Op de volgende bladzijde zijn deze simulaties weergegeven. Langs de verticale as is het aantal knikkers in de eerste vaas aangegeven, langs de horizontale as het aantal trekkingen dat inmiddels is verricht.



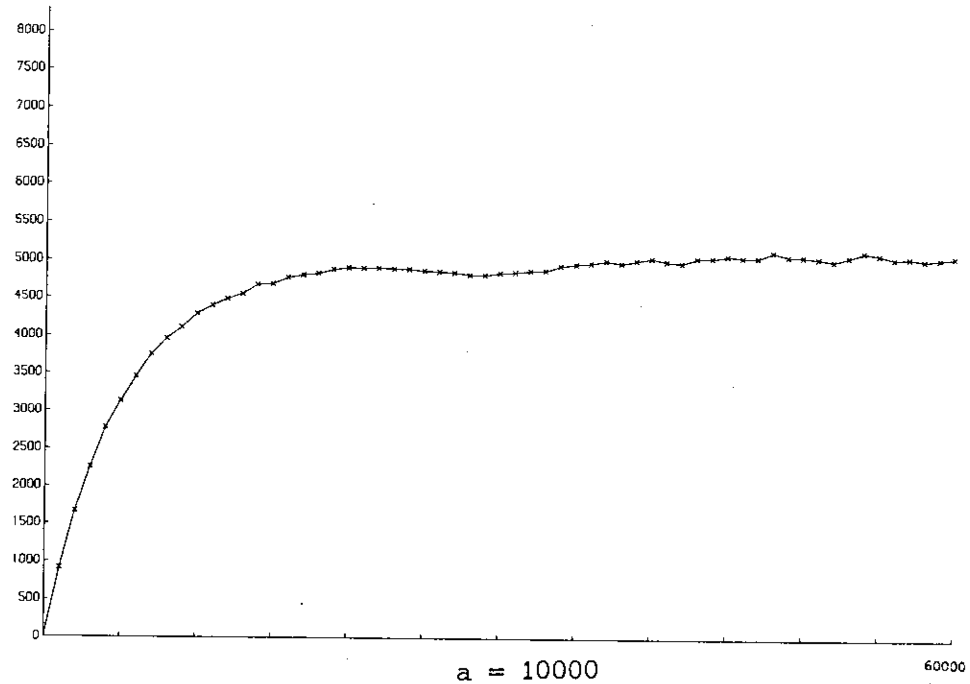
a = 10



a = 100



a = 1000



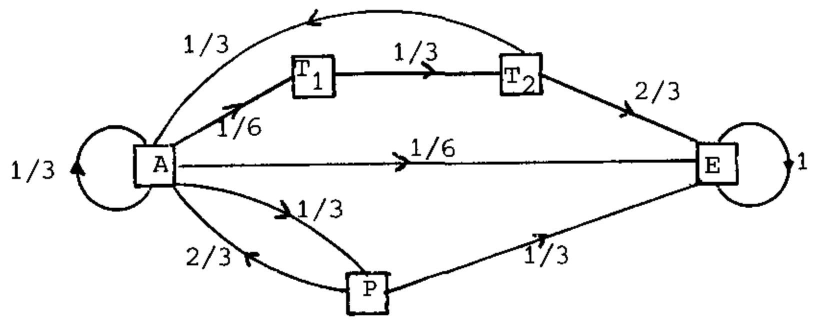
a = 10000

Hoofdstuk 4. Markov ketens met kostenstructuur

4.1. Inleiding

Soms zijn we vrijwel uitsluitend geinteresseerd in het kansgedrag van het systeem zoals bijvoorbeeld in het geval van het studieverloopmodel (voorbeeld 6). Vaak echter zijn aan het doorlopen van sommige toestanden kosten of opbrengsten verbonden en zijn we speciaal daarin geinteresseerd.

Voorbeeld. Laten we nog kijken naar het rijexamenvoorbeeld uit hoofdstuk 2.



Neem aan dat de kosten voor een volledig examen, inclusief de daarvoor benodigde rijlessen, ƒ 690,-- bedragen. En laat het practisch examen alleen ƒ 640,-- en een theoretisch examen ƒ 75,-- kosten.
Hoe kunnen we nu de totale verwachte kosten berekenen?
We kunnen de kosten opsplitsen per periode (hier dus per keer examen doen). De kosten voor het eerste examen (als we uitgaan van een start in A) bedragen ƒ 690,--. De verwachte kosten voor het tweede examen (zo dat er al is) bedragen

$$1/3.690 + 1/6.75 + 1/3.640 \ .$$

In het algemeen bedragen de verwachte kosten voor het n-de examen

$$p_{AE}^{(n-1)}.0 + p_{AA}^{(n-1)}.690 + p_{AT_1}^{(n-1)}.75 + p_{AT_2}^{(n-1)}.75 + p_{AP}^{(n-1)}.640 \ .$$

Door over te gaan op de vector-matrix notatie kunnen we een eenvoudige uitdrukking afleiden voor de totale verwachte kosten.
De bij het voorbeeld behorende overgangsmatrix P ziet er als volgt uit:

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & A & T_1 & T_2 & P & E \\ \hline A & 1/3 & 1/6 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ T_1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ T_2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ P & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Omdat er, zodra het systeem in toestand E is aangekomen, geen verdere kosten zijn kunnen we ons beperken tot de doorgangstoestanden A, T_1, T_2 en P. Noemen we deze deelmatrix van de doorgangstoestanden Q dan geldt dus

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & A & T_1 & T_2 & P \\ \hline A & 1/3 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ T_1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ T_2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ P & 2/3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Voor de kosten op tijdstip n, vinden we

$$v(n) = q_{AA}^{(n)}.690 + q_{AT_1}^{(n)}.75 + q_{AT_2}^{(n)}.75 + q_{AP}^{(n)}.640, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Met de kostenvector $r^T = (r_A, r_{T_1}, r_{T_2}, r_P) = (690,75,75,640)$ en v_k, $k \in \{A,T_1,T_2,P\}$ gedefinieerd als de totale verwachte kosten bij start in k vinden we zodoende

$$v_k = (\sum_{n=0}^{\infty} Q^n r)_k, \qquad k \in \{A,T_1,T_2,P\} .$$

Of met $v^T = (v_A, v_{T_1}, v_{T_2}, v_P)$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n r = r + \sum_{n=1}^{\infty} Q^n r = r + Q \sum_{n=0}^{\infty} Q^n r = r + Qv .$$

Omdat $Q^n \to 0$ $(n \to \infty)$ bestaat $(I - Q)^{-1}$ (vgl. paragraaf 3.2) en kunnen we deze uitdrukking nog herschrijven tot

$$v = (I - Q)^{-1} r .$$

Een andere, veel directere, manier om de vergelijking $v = r + Qv$ af te leiden is de volgende.

We kunnen v_i splitsen in twee delen, nl. de directe kosten r_i en de kosten daarna $(Qv)_i$. Bijvoorbeeld

$$v_A = r_A + q_{AA}v_A + q_{AT_1}v_{T_1} + q_{AT_2}v_{T_2} + q_{AP}v_P \, .$$

In vectornotatie

$$v = r + Qv \, .$$

Als we dit stelsel oplossen met de gegevens uit het bovenstaande voorbeeld dan vinden we

$$v_A = 2160 \, .$$

Dus de totale verwachte kosten voor het behalen van het rijexamen bedragen ƒ 2160,--.

4.2. Totale verwachte kosten voor transiënte ketens

Om te kunnen spreken over de totale verwachte kosten of opbrengst zullen we moeten eisen dat de kosten of opbrengsten op een zeker moment ophouden. Voor transiënte ketens kunnen we dit doen door aan te nemen dat er in de terugkeertoestanden geen kosten en opbrengsten meer zijn. Zoals we in het rijbewijsvoorbeeld uit de vorige paragraaf zagen is dat soms een redelijke veronderstelling. De afleiding van de vergelijking $v = r + Qv$ verloopt natuurlijk identiek aan de afleiding in de vorige paragraaf.

Zij P de overgangsmatrix van het systeem en Q de deelmatrix die betrekking heeft op de doorgangstoestanden. Voor de verwachte kosten $v_i(n)$ bij start in i in de n-de periode vinden we dan

$$v_i(n) = (Q^{n-1} r)_i$$

waarbij r de vector van kosten en opbrengsten voor de doorgangstoestanden is. Voor de totale verwachte kosten geldt dus

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n r = r + \sum_{n=1}^{\infty} Q^n r = r + Q \sum_{n=0}^{\infty} Q^n r = r + Qv \, .$$

Natuurlijk geldt $Q^n \to 0$ dus is $(I - Q)$ regulier, zodat

$$v = (I - Q)^{-1} r \, .$$

De formule $v = r + Qv$ kan ook weer gevonden worden door de opbrengst te splitsen in de directe opbrengst en de opbrengst na de eerste stap.

Beschouw nog eens het rijbewijsvoorbeeld. We zullen als voorbeeld het verwachte aantal volledige examens berekenen.
Daartoe gebruiken we de methode om de "kosten" te splitsen in directe en latere kosten. We vinden dan met n_i het verwachte aantal examens bij start in i

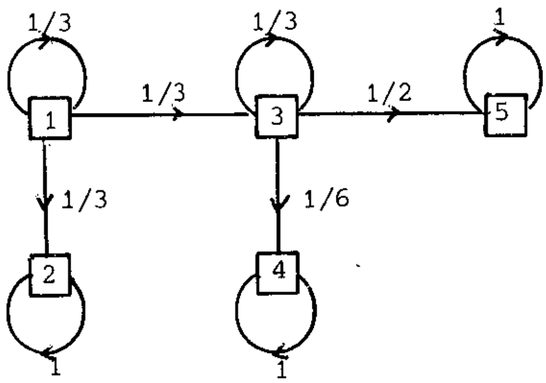
$$n_A = 1 + 1/3.n_A + 1/6.n_{T_1} + 1/3.n_P$$
$$n_{T_1} = 0 + 1/3.n_{T_2}$$
$$n_{T_2} = 0 + 1/3.n_A$$
$$n_P = 0 + 2/3.n_A \ .$$

Door oplossen van dit stelsel $(n = (1,0,0,0)^T + Qv)$ vinden we $n_A = 54/23 = 2\frac{8}{23}$.
Als de wachttijd voor een examen met rijproef 4 maanden is en de wachttijd voor een theoretisch examen 1 maand, dan volgt de totale verwachte tijd t_A tot behalen van het examen uit het stelsel

$$t_A = 4 + 1/3.t_A + 1/6.t_{T_1} + 1/3.t_P$$
$$t_{T_1} = 1 + 1/3.t_{T_2}$$
$$t_{T_2} = 1 + 1/3.t_A$$
$$t_P = 4 + 2/3.t_A$$

Hieruit vinden we $t_A = 300/23 = 13\frac{1}{23}$ maand.

Tot slot gaan we nog eens kijken naar het voorbeeld van het studieverloop (voorbeeld 6).

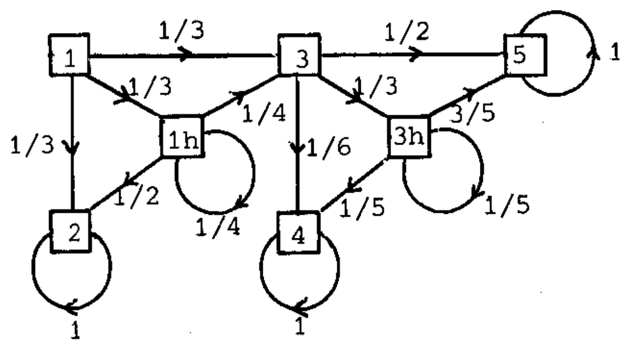


We hebben in paragraaf 2.4 al berekend, dat de verwachte verblijftijd in fase a (toestand 1) 3/2 is. Dit kunnen we nu ook als volgt doen: Laat v_i de verwachte verblijftijd in fase a zijn bij start in i (i = 1,3) dan geldt:

$$v_1 = 1 + 1/3.v_1 + 1/3.v_3$$
$$v_3 = 0 + 1/3.v_3$$

zodat $v_1 = 3/2$.
Bereken zelf de verwachte verblijftijd in fase b.

Nemen we nu eens aan dat als een student zakt voor het examen in fase a of fase b hij in beide gevallen de kans krijgt om na een half jaar examen A resp. B over te doen. Zakt hij weer dan krijgt hij steeds na een half jaar opnieuw een kans. Het model passen we nu als volgt aan. We voeren een toestand 1h en een toestand 3h in met overgangsmogelijkheden en kansen als volgt.



We berekenen nu de verwachte verblijftijd in fase a, dus de tijd doorgebracht in toestand 1 en 1h samen. Zij v_i de verwachte verblijftijd in fase a bij start in toestand i, i = 1,1h,3,3h.
Met $r_1 = 1$, $r_{1h} = 1/2$, $r_3 = r_{3h} = 0$ vinden we:

$$v_1 = 1 + 1/3.v_{1h} + 1/3.v_3$$
$$v_{1h} = 1/2 + 1/4.v_{1h} + 1/4.v_3$$
$$v_3 = 0 + 1/3.v_{3h}$$
$$v_{3h} = 0 + 1/5.v_{3h} .$$

We zien direct, dat $v_3 = v_{3h} = 0$ en dus dat $v_{1h} = 2/3$. Hieruit volgt: $v_1 = 11/9$.

4.3. De verwachte terugkeertijd

In deze paragraaf geven we nog een illustratie van de techniek uit de beide voorgaande paragrafen. We zullen bewijzen dat de verwachte tijd tussen twee opeenvolgende bezoeken aan toestand i gelijk is aan $1/p_i^{(\infty)}$ (stelling 3.2 vii)). Het bewijs verloopt als volgt:

Laat P de Markov matrix zijn en $p^{(\infty)}$ de bijbehorende limietverdeling. We nemen niet aan dat P aperiodiek is maar nog wel dat P irreducibel is.

Definieer μ_{ij} als de verwachte tijd, die nodig is om vanuit i in j te komen. Dan geldt:

μ_{ij} = 1 + verwachte tijd na de eerste stap, die nodig is om in j te komen, als we bij de eerste stap niet naar j gaan.

Ofwel

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj} = 1 + \sum_k p_{ik}\mu_{kj} - p_{ij}\mu_{jj}, \qquad \text{voor alle i en j .}$$

We kunnen nu de matrices M, M_d en E als volgt definiëren:

M de matrix met elementen μ_{ij}, $(M)_{ij} = \mu_{ij}$

$$M_d = \begin{pmatrix} \mu_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{NN} \end{pmatrix}, \text{ dus } (M_d)_{ij} = \delta_{ij}\mu_{ii}, \text{ met } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (E)_{ij} = 1 \text{ voor alle i en j.}$$

De vergelijking voor μ_{ij} kunnen we hiermee in matrixnotatie weergeven, en wel als volgt (ga na)

$$M = E + PM - PM_d \ .$$

Vermenigvuldigen we links en rechts voor met $p^{(\infty)}$ dan vinden we

$$p^{(\infty)}M = p^{(\infty)}E + p^{(\infty)}PM - p^{(\infty)}PM_d \ .$$

Met $p^{(\infty)}P = p^{(\infty)}$ en $p^{(\infty)}E = (1,\dots,1)$ reduceert dit tot

$$(1,\dots,1) = p^{(\infty)}M_d$$

zodat $p_i^{(\infty)}\mu_{ii} = 1$, $i = 1,\dots,N$, ofwel

$$\mu_{ii} = 1/p_i^{(\infty)}, \qquad \text{voor alle i .}$$

We zien dat de periodiciteit bij het bewijs inderdaad geen enkele rol speelt.

4.4. De totale verwachte verdisconteerde kosten

Als ook aan bezoeken aan terugkeertoestanden kosten verbonden zijn dan zullen de totale verwachte kosten niet langer eindig zijn of niet meer goed gedefinieerd. In zo'n geval kan men bijvoorbeeld naar de gemiddelde kosten per tijdseenheid kijken. Of, wat vaak gedaan wordt bij het vergelijken van systemen, het criterium van de totale verwachte verdisconteerde kosten hanteren. Hierbij worden de kosten op tijdstip n vermenigvuldigd met een factor β^n, $0 < \beta < 1$. β heet dan de *verdisconteringsfactor*. Men kan dit doen als men de kosten die later gemaakt worden minder zwaar wil laten wegen dan de directe kosten.
Definieer v_i als de verwachte verdisconteerde kosten bij start in toestand i.
Dan geldt nu

$$v = r + \beta Pr + \beta^2 P^2 r + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n r = r + \beta P \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n r = r + \beta Pv.$$

Omdat $\beta < 1$ is convergeert de som $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n r$ absoluut, immers laat M gedefinieerd zijn door $M = \max_i |r_i|$ dan geldt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n r \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n |r| \le \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n Me = (1-\beta)^{-1} Me$$

waarin $e^T = (1,1,\ldots,1)$ en we gebruikt hebben $Pe = e$.
Omdat $(\beta P)^n \to 0$ is $I - \beta P$ regulier (voor $0 \le \beta < 1$) en geldt dus ook

$$v = (I - \beta P)^{-1} r .$$

We kunnen de vergelijking $v = r + \beta Pv$ ook weer als volgt afleiden:

$$v_i = \text{directe kosten} + \beta_i \text{ verwachte kosten na de eerste stap}$$

$$= r_i + \beta \sum_j p_{ij} v_j .$$

Ofwel $v = r + \beta Pv$.

4.5. Verwachte gemiddelde kosten

Zoals al in de vorige paragraaf werd opgemerkt is ook het criterium van de gemiddelde kosten per tijdseenheid geschikt voor die gevallen waarin de totale verwachte kosten niet eindig of niet gedefinieerd zijn.
De verwachte gemiddelde kosten worden gedefinieerd als de limiet voor $n \to \infty$ van het gemiddelde over n perioden. Dus zij v_i de verwachte gemiddelde kosten bij start in i dan is

$$v_i = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (P^k r)_i$$

zodat

$$v_i = ((\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} P^k) r)_i = (P^\infty r)_i = \sum p_{ij}^{(\infty)} r_j \ .$$

Uit de stellingen 3.2 en 3.3 weten we dat voor irreducibele ketens $p_{ij}^{(\infty)}$ onafhankelijk is van i. Ook als i en j tot dezelfde recurrente klasse behoren is $p_{ij}^{(\infty)}$, althans op die klasse, onafhankelijk van i. Als j een doorgangstoestand is of j niet in dezelfde keten ligt als i dan is $p_{ij}^{(\infty)} = 0$.
Zij nu ρ_{ij} de kans dat het systeem bij start in i uiteindelijk terecht komt in de keten waartoe j behoort, althans als j een terugkeertoestand is. Als j doorgangstoestand is, dan is $\rho_{ij} = 0$.
Voor een doorgangstoestand i geldt dan

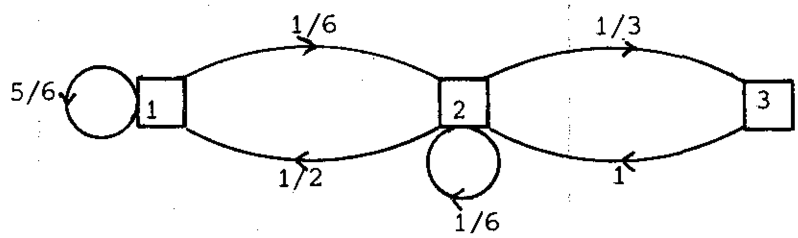
$$p_{ij}^{(\infty)} = \rho_{ij} p_{jj}^{(\infty)} \ .$$

Voor een Markov keten met één klasse van terugkeertoestanden geldt dus voor de verwachte kosten per tijdseenheid

$$v_i = \sum_j p_{jj}^{(\infty)} r_j \ .$$

We zien dat v_i onafhankelijk is van i.
Bij meerdere recurrente klassen is v_i per klasse constant.

Beschouw nog eens voorbeeld 5.



In paragraaf 3.3 hebben we voor deze keten de limietverdeling bepaald $p^{(\infty)} = \frac{1}{13}(9,3,1)$.
Als nu de kosten in toestand 1, 2 en 3 respectievelijk 9, 16 en 1 bedragen dan zijn de gemiddelde kosten per tijdseenheid

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} p_{jj}^{(\infty)} r_j = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(\infty)} r_j = 1/13(9.9 + 3.16 + 1.1) = 10 \ .$$

4.6. Kosten verbonden aan de overgangen

Tot nu toe hebben we steeds verondersteld dat de kosten alleen van de toestand afhangen. In een aantal practische situaties hangen de kosten echter af van de overgangen; de kosten van een overgang van i naar j bedragen r_{ij}. We zullen laten zien dat dit op eenvoudige wijze te herleiden is tot de situatie uit de voorgaande paragrafen.

Laat $v_i(n)$ de verwachte kosten in de n-de periode zijn bij start in i dan geldt dus

$$v_i(n) = \sum_j p_{ij}^{(n-1)} \sum_k p_{jk} r_{jk} \; .$$

Als als we definiëren

$$r_j = \sum_k p_{jk} r_{jk}$$

dan krijgen we

$$v_i(n) = \sum_j p_{ij}^{(n-1)} r_j = (P^{n-1} r)_i$$

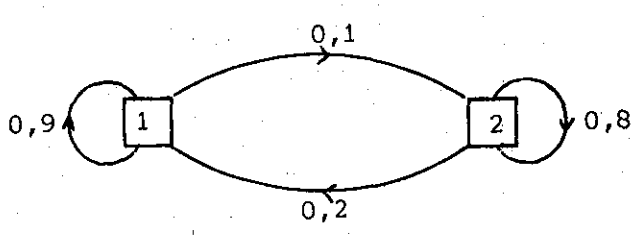
zodat de verdere analyse voor de verschillende modellen, totale kosten, verdisconteerde kosten en gemiddelde kosten, weer hetzelfde verloopt als in de paragrafen 4.2, 4.4 en 4.5.

Ook bij het opstellen van de vergelijkingen $v = r + Qv$ of $v = r + \beta Pv$ gaan we op dezelfde manier te werk.

Voorbeeld. Beschouw de volgende vereenvoudigde versie van voorbeeld 8.
Ieder kwartaal beslist men of men een abonnement op een bepaald dagblad neemt of indien men al een abonnement heeft, of dit wordt opgezegd of gecontinueerd. De kans, dat iemand, die een abonnement heeft dat opzegt, is 0,2. De kans, dat iemand, die geen abonnement heeft, zich als abonnee aanmeldt is 0,1.
We onderscheiden de volgende toestanden:

1 ≡ geen abonnement.

2 ≡ wel abonnement.



Aan de overgangen zijn voor het dagblad de volgende opbrengsten verbonden:

$$r_{11} = 0;\; r_{12} = 60;\; r_{21} = -10;\; r_{22} = 70\ .$$

De verdisconteringsfactor β bedraagt 10/11.

De totale verwachte verdisconteerde opbrengsten volgen uit:

$$v_1 = 0{,}9.r_{11} + 0{,}1.r_{12} + 10/11(0{,}9.v_1 + 0{,}1.v_2)$$

$$v_2 = 0{,}8.r_{22} + 0{,}2.r_{21} + 10/11(0{,}8.v_2 + 0{,}2.v_1)\ .$$

zodat $v_1 = 198$, $v_2 = 330$.

Voorbeeld. Hoe groot is de kans om het rijbewijs te halen bij het overdoen van een theorie-examen?

Deze kans is gelijk aan het verwachte aantal overgangen naar E vanuit T_1 of T_2.

We lossen daartoe het volgende stelsel op:

$$v_A = 0 + 1/3.v_A + 1/6.v_{T_1} + 1/3.v_P$$

$$v_{T_1} = p_{T_1E} + 1/3.v_{T_2} = 2/3 + 1/3.v_{T_2}$$

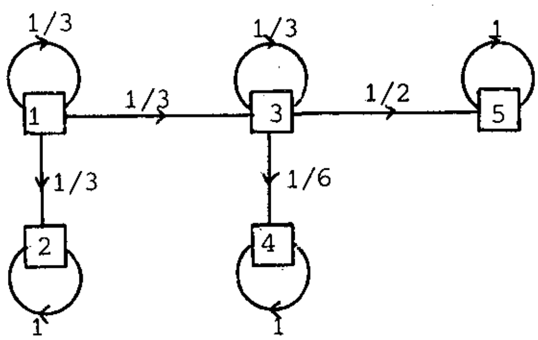
$$v_{T_2} = p_{T_2E} + 1/3.v_A = 2/3 + 1/3.v_A$$

$$v_P = 0 + 2/3.v_A\ .$$

Hieruit volgt $v_A = 8/23$.

De kans om het rijbewijs te halen bij het overdoen van een theorie-examen is dus 8/23.

Voorbeeld. Het eenvoudige studieverloopmodel:



In paragraaf 2.4 hebben we al rechtstreeks berekend, dat de kans, dat een student, die in fase a start, uiteindelijk voor beide examens slaagt gelijk is aan 3/8. We kunnen dit nu ook op onderstaande eenvoudige wijze berekenen. De kans v_i om bij start in i ooit in 5 te komen is juist het verwachte aantal overgangen van 3 naar 5 bij start in i.

$$v_1 = 0 + 1/3.v_1 + 1/3.v_3$$

$$v_3 = 1/2 + 1/3.v_3 \ .$$

Dus $v_1 = 3/8$.

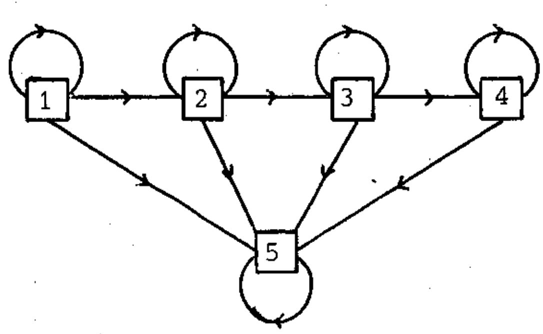
De kans, dat een student, die in fase a start, in toestand 5 eindigt is dus 3/8.

Hoofdstuk 5. Cohorte modellen

5.1. Inleiding

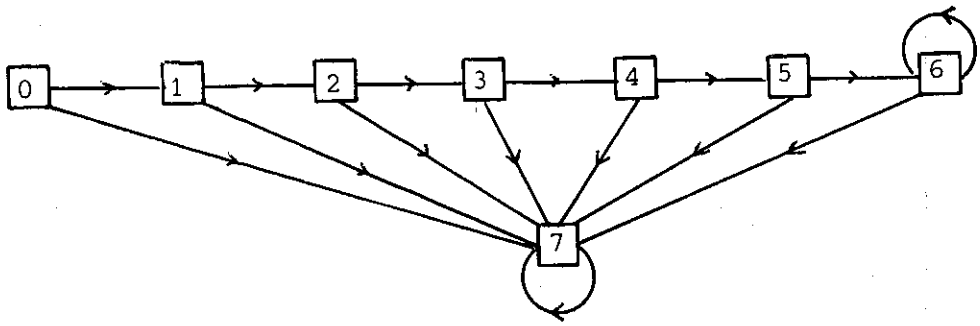
In de voorgaande hoofdstukken hebben we steeds modellen beschouwd voor het gedrag van één persoon of één artikel. Vaak echter zijn deze modellen juist van belang bij het bestuderen van het gedrag van een groot aantal personen of artikelen die het systeem doorlopen. Zo is het studieverloopmodel (voorbeeld 6) minder geschikt om het gedrag van één speciale student te beschrijven (daarvoor is het model veel te grof en in het algemeen zal ook niet de Markov eigenschap gelden). Maar het kan heel geschikt zijn om het gedrag van een hele generatie studenten te bestuderen. En bijvoorbeeld vragen te beantwoorden als hoeveel studenten over een aantal jaren een bepaalde faciliteit nodig zullen hebben. Denk bijvoorbeeld aan de medische faculteiten.
In dit hoofdstuk zullen we een aantal aspecten van deze *cohorte* processen, zoals we deze groepsprocessen zullen noemen, nader beschouwen. De personen, artikelen of deeltjes die ieder afzonderlijk en, naar we aannemen, onafhankelijk van elkaar het proces doorlopen, noemen we *leden*.
Voordat we deze cohorte modellen nader gaan analyseren zullen we eerst nog een paar voorbeelden geven.

Voorbeeld 10. Personeelsmodel.
Laten we aannemen dat de personeelsleden van een bedrijf zich in 4 verschillende rangen (of eventueel salarisgroepen) kunnen bevinden. Jaarlijks kan iemand eventueel naar de naast hogere rang promoveren. Daarnaast kan men het bedrijf verlaten, bijvoorbeeld door persionering, hetgeen we aangeven als overgang naar toestand 5.



We kunnen nu bijvoorbeeld vragen naar het verwachte aantal werknemers in een bepaalde rang bij voortzetting van het huidige beleid, d.w.z. ongewijzigde overgangskansen, voor een aantal jaren in de toekomst.

Voorbeeld 11. Automodel.
Auto's worden jaarlijks bekeken. De toestanden 0 tot en met 6 geven de leeftijd van de auto aan; in toestand 6 zitten alle auto's van 6 of meer jaar oud. In toestand 7 zitten alle auto's die van de weg zijn verdwenen.



In verband met een eventuele verplichte veiligheidskeuring is bijvoorbeeld interessant het aantal auto's van een bepaalde leeftijd over bv. 3 jaar.

Voorbeeld 12. Demografisch model.
Om een indruk te krijgen van het aantal te verwachten geboorten beschouwen we het volgende model.
Als toestanden nemen we de paren (i,j) waarin i de leeftijd van de vrouw en j haar aantal kinderen is. Verder is er een toestand 0 waarin vrouwen die onvruchtbaar zijn (worden) en vrouwen die overlijden naar toe overgaan. Vanuit toestand (i,j) zijn dus in een stap bereikbaar de toestanden 0, $(i+1,j)$ en verder de toestanden $(i+1,j+k)$, $k = 1,2,\ldots$. Waarbij we de overgangskansen naar $(i+1,j+k)$ voor $k > 5$ nul kunnen stellen. Het aantal geboorten in de komende jaren is bijvoorbeeld van belang voor ramingen van de behoefte aan kleuterscholen.

5.2. Verwachte aantallen

Zoals we in de voorgaande voorbeelden zagen, willen we vaak het aantal leden kennen dat na een aantal perioden in een bepaalde toestand zit. Deze aantallen zijn echter stochastisch. We moeten dus kiezen tussen het bepalen van de verdelingsfunctie en het bepalen van bijvoorbeeld de verwachting. Het Markov model waarmee we de situatie beschrijven is in het algemeen slechts een benadering van de feitelijke situatie zodat de verdelingsfunctie voor het model niet hoeft te lijken op die in de werkelijkheid. We zijn vaak al tevreden als de verwachte aantallen in model en werkelijkheid overeenstemmen.
We zullen in deze paragraaf eerst eens nagaan hoe verwachte bezettingen bepaald kunnen worden.

Algemeen: Laat P de m × m matrix van overgangswaarschijnlijkheden zijn, volgens welke de leden die het systeem doorlopen, hun overgangen maken. Als zich op tijdstip 0 n_i leden in toestand i bevinden, i = 1,...,m, dan kunnen we het verwachte aantal leden in toestand j op tijdstip t, $\mathbb{E}N_j(t)$, als volgt bepalen.

De leden bewegen zich onafhankelijk van elkaar dus het aantal leden, $N_{ij}(t)$, dat vanuit i na t stappen in toestand j is aangekomen, is binomiaal verdeeld met parameters n_i en $p_{ij}^{(t)}$. Dus

$$\mathbb{E}N_{ij}(t) = n_i p_{ij}^{(t)}$$

zodat

$$\mathbb{E}N_j(t) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{m} N_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{m} n_i p_{ij}^{(t)} .$$

In vector-matrix notatie met $N(t) = (N_1(t),...,N_m(t))$ en $n = (n_1,...,n_m)$

$$\mathbb{E}N(t) = (\mathbb{E}N_1(t),...,\mathbb{E}N_m(t)) = nP^t .$$

Ad voorbeeld 10.

Als in het personeelsmodel $p_{11} = 4/5$ en $n_1 = 125$, dan is het verwachte aantal leden dat over drie jaar nog in rang 1 zit gelijk aan

$$\mathbb{E}N_1(3) = n_1 p_{11}^{(3)} = 125.(4/5)^3 = 64$$

(immers $p_{j1}^{(3)} = 0$, j = 2,...,5).

Opmerking. Voor het bepalen van de verwachte bezetting is niet van belang of de leden zich onafhankelijk van elkaar gedragen of niet. Als maar voor ieder de overgangswaarschijnlijkheden gegeven worden door dezelfde matrix P. Weliswaar zal dan $N_{ij}(t)$ in het algemeen niet langer binomiaal verdeeld zijn maar nog wel geldt $\mathbb{E}N_{ij}(t) = n_i p_{ij}^{(t)}$.

5.3. Varianties in de voorspellingen

In de vorige paragraaf hebben we voor het aantal leden in een bepaalde toestand op een zeker tijdstip de verwachting bepaald. Of het redelijk is om op grond van deze verwachtingen (beleids)beslissingen te nemen is nog de vraag. Om daar enig idee van te krijgen kunnen we de variantie bepalen. Immers als de variantie klein is dan zal de afwijking van de werkelijke waarde van de stochastische variabele van zijn verwachting dat met grote waarschijnlijkheid ook zijn. De gerealiseerde waarde ligt dan met vrij grote waarschijnlijkheid in het interval $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

Als de stochastische variabelen $X_1,\ldots,X_n$ onderling onafhankelijk zijn dan geldt voor de variantie van de som:

$$\mathrm{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \ldots + \mathrm{var}(X_n) \;.$$

We hebben aangenomen dat de leden zich onafhankelijk van elkaar gedragen zodat met

$$\mathrm{var}\; N_{ij}(t) = n_i p_{ij}^{(t)}(1 - p_{ij}^{(t)}) \;,$$

volgt

$$\mathrm{var}\; N_j(t) = \sum_{i=1}^{m} n_i p_{ij}^{(t)}(1 - p_{ij}^{(t)}) \;.$$

Voorbeeld: $\mathrm{var}\; N_1(3) = 125.{}^{64}/125.{}^{61}/125 \approx 31.$

De aanname dat de leden zich onafhankelijk van elkaar gedragen is zeker niet altijd volledig juist. Zo zal in het personeelsmodel de bezetting ook worden afgestemd op het aantal beschikbare functies.
En beschouwen we in een model de kinderen uit één klas met als toestanden 1: waterpokken gehad en 2: nog geen waterpokken gehad, dan zullen de kinderen de overgang van 1 naar 2 zeker niet onafhankelijk van elkaar maken.
In het personeelsmodel wordt het stochastische karakter 'verzwakt' waardoor de variantie kleiner wordt en het werken met de verwachting aantrekkelijker.
In het model voor de waterpokken zal de variantie juist vergroot worden en zal de verwachting in het algemeen sterk afwijken van de werkelijke waarde.

5.4. Gemiddelde aantal leden

Soms zijn we geinteresseerd in het gemiddelde aantal leden in een bepaalde toestand. We willen bijvoorbeeld voor een groep van 200 huisvrouwen nagaan hoeveel van hen gemiddeld margarinemerk A gebruiken (vgl. voorbeeld 4). Algemeen geldt voor het gemiddelde aantal leden k_j in toestand j:

$$\begin{aligned} k_j &= \lim_{T\to\infty} (T+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T} \mathbb{E}N_j(t) \\ &= \lim_{T\to\infty} (T+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{m} n_i p_{ij}^{(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} n_i \lim_{T\to\infty} (T+1)^{-1} \sum_{t=0}^{T} p_{ij}^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} n_i \rho_{ij} p_{ij}^{(\infty)} \end{aligned}$$

(vergelijk paragraaf 4.5).

Is er maar één recurrente keten dan zal $\rho_{ij}p_{ij}^{(\infty)}$ niet van i afhangen. Met $p^{(\infty)} = (p_1^{(\infty)},\ldots,p_m^{(\infty)})$, de stationaire verdeling, volgt dan:

$$k_j = \sum_{i=1}^{m} n_i p_j^{(\infty)} .$$

Voor het margarinevoorbeeld is de limietverdeling (¼,¾) (vgl. paragraaf 2.5) zodat we voor de groep van 200 huisvrouwen vinden

$$k_A = 200.\tfrac{1}{4} = 50$$

$$k_B = 200.\tfrac{3}{4} = 150 .$$

5.5. Recrutering

In veel cohorte modellen zijn we vooral geinteresseerd in het aantal leden in de doorgangstoestanden. Vanuit deze doorgangstoestanden verdwijnen we op den duur naar een absorberende toestand (in het personeelsmodel zullen de leden de dienst te zijner tijd verlaten, b.v. door pensionering, en in het automodel zullen de auto's op den duur van de weg verdwijnen).
Dit leeglopen van de bezetting in de doorgangstoestanden wordt meestal gecompenseerd doordat er in de doorgangstoestanden nieuwe leden binnenkomen. We noemen dit *recrutering*.
Laat $r_i(t)$ het aantal leden zijn dat op tijdstip t in toestand i gerecruteerd wordt.
Dan geldt voor de bezetting op tijdstip t_0 met $r(t) = (r_1(t),\ldots,r_m(t))$

$$\mathbb{E}N(t_0) = nP^{t_0} + r(1)P^{t_0-1} +\ldots+ r(t_0-1)P + r(t_0) .$$

Ofwel

$$\mathbb{E}N(t_0) = \mathbb{E}N(t_0-1)P + r(t_0) .$$

De aantallen die gerecruteerd worden, kunnen natuurlijk ook stochastisch zijn. In dat geval krijgen we

$$\mathbb{E}N(t_0) = nP^{t_0} + \mathbb{E}R(1)P^{t_0-1} +\ldots+ \mathbb{E}R(t_0-1)P + \mathbb{E}R(t_0)$$

en

$$\mathbb{E}N(t_0) = \mathbb{E}N(t_0-1)P + \mathbb{E}R(t_0) .$$

In het geval van een cohorte model met constante recruteringen kunnen we ook een uitdrukking vinden voor het gemiddelde aantal leden in de doorgangstoestanden.

Zij E_1 de verzameling van doorgangstoestanden, $E_1 = \{1,2,\dots,s\}$ en r_i, $i \in E_1$ de constante recrutering in toestand i en $r = (r_1,\dots,r_s)$. Zij verder Q weer het transiente deel van de matrix P (vergelijk paragraaf 4.1).
Als $n_j(t)$ de verwachte bezetting op tijdstip t in toestand j is, dan geldt:

$$n_j(t+1) = \sum_{i \in E_1} n_i(t) q_{ij} + r_j$$

Ofwel in vectormatrix notatie

$$n(t+1) = n(t)Q + r \ .$$

Laten we nu t naar oneindig gaan, dan geldt als n(t) naar een limiet n convergeert

$$n = nQ + r \ .$$

Omdat $I - Q$ weer inverteerbaar is ($Q^n \to 0$, $n \to \infty$) geldt

$$n = (I - Q)^{-1} r \ .$$

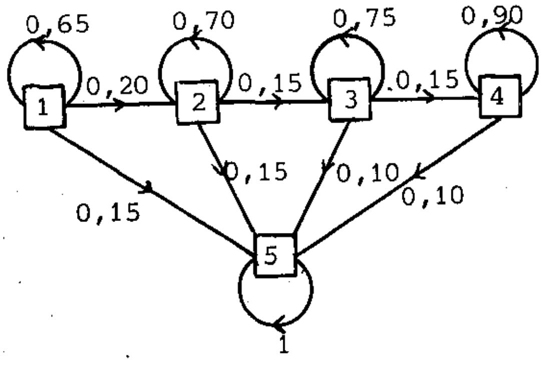
We moeten nu nog laten zien dat n(t) inderdaad convergeert als t naar oneindig gaat.
Daartoe itereren we de vergelijking $n(t+1) = n(t)Q + r$. We vinden dan

$$n(t+1) = n(t)Q + r = (n(t-1)Q + r)Q + r = n(t-1)Q^2 + rQ + r$$
$$= \dots = n(0)Q^{t+1} + rQ^t + \dots + rQ + r \ .$$

Nu geldt $Q^{t+1} \to 0$ dus ook $n(0)Q^{t+1} \to 0$. Verder convergeert $\sum_{\ell=0}^{t} Q^\ell$ naar $(I - Q)^{-1}$ dus

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = r(I - Q)^{-1} \ .$$

Bij voorbeeld 10.
Laat de overgangskansen in dit model als volgt zijn.



Als er ieder jaar 35 mensen worden aangenomen in rang 1 en 19 mensen in rang 2 dan vinden we voor de gemiddelde bezetting in de doorgangstoestanden: $n_1 = 100$, $n_2 = 130$, $n_3 = 78$, $n_4 = 117$. Ga na.

5.6. Personeelsplanning met Formasy

Tot slot van dit hoofdstuk willen we aan de hand van een voorbeeld laten zien hoe het cohorte model voor een personeelsbestand gebruikt kan worden. We hebben hierbij gebruik gemaakt van het computerprogramma Formasy dat speciaal ontwikkeld is om het mogelijk te maken verschillende beleidsvarianten voor de personeelsplanning te vergelijken en om een aantal belangrijke gegevens voor de toekomst te berekenen.
We zullen het programma gebruiken bij de analyse van een gedeelte van het personeelsbestand van een dienst bij een van de ministeries. De gegevens zijn overigens fictief.

Model. Een bepaald deel van de personeelsleden van de dienst kan zich in de volgende rangen bevinden

rang 1 ≡ ambtenaar (AMB)
rang 2 ≡ ambtenaar eerste klas (AMB1)
rang 3 ≡ hoofdambtenaar (HAMB)
rang 4 ≡ hoofdambtenaar eerste klas (HAMB1)

Behalve van de rang zijn de overgangskansen ook afhankelijk van het aantal jaren dat iemand al in een bepaalde rang zit. Daarom zullen we in elke rang een aantal looptijden onderscheiden. Looptijd k wil zeggen: tussen k - 1 en k jaar in de betreffende rang. Verder kunnen we de leeftijd van een persoon meenemen in verband met de persionering (hier op 65 jarige leeftijd). De toestanden bestaan dus uit drie kenmerken: rang, looptijd en leeftijd. Het verdwijnen uit dit systeem (bv. vertrek naar een andere werkkring, pensionering naar een hogere rang dan rang 4) geven we aan als overgang naar "rang 5".

We gaan uit van de volgende bezetting op 1 januari 1979. Het aantal personeelsleden in rang i met looptijd j wordt gegeven door onderstaande tabel.
Startbezetting.

		looptijd										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
rang	1	50	40	20	10	0	0	0	0	0	0	0
	2	25	30	20	5	10	5	5	0	0	0	0
	3	20	10	10	4	2	2	2	0	0	0	0
	4	2	4	3	5	4	6	2	2	2	0	0

In totaal zijn er dus 300 werknemers.

Het promotiebeleid van het bedrijf kan worden gekarakteriseerd door de promotiekansen; deze kansen moeten geschat worden uit historische gegevens en gelden voor het huidige beleid (beleid I).
Er is alleen promotie mogelijk naar de naasthogere rang. De kansen om van rang i_1 naar rang i_2 te gaan, worden gegeven door de volgende tabellen.

Promotiekansen bij beleid I

$i_1 = 1,\ i_2 = 2$	
looptijd	kans
1	0.1
2	0.2
3	0.5
4	0.95

$i_1 = 2,\ i_2 = 3$	
looptijd	kans
1	0
2	0.1
3	0.2
4	0.6
5	0.4
6	0.1
7	0

$i_1 = 3,\ i_2 = 4$	
looptijd	kans
1	0
2	0.05
3	0.2
4	0.3
5	0.1
6	0

Het verloop in de rangen (behoudens pensionering) is niet afhankelijk van de looptijd.

Verloop

rang	verloopkans
1	0.05
2	0.05
3	0.08
4	0.1

Opmerkingen. In rang 1 komen alleen de looptijden 1 tot en met 4 daadwerkelijk voor. Bij looptijd 4 is namelijk de som van de promotiekans en de verloopkans 1. Voor de promotie van rang 2 naar rang 3 geldt dat als men na 6 jaar nog niet gepromoveerd is men ook niet meer voor promotie in aanmerking komt. Hetzelfde geldt voor de promotie van rang 3 naar rang 4 na 5 jaar.

Met deze gegevens kan men bijvoorbeeld de gemiddelde looptijd bepalen van degenen die van rang i naar rang j promoveren.

Gemiddelde looptijd

rang	gemiddelde leeftijd van degenen die promoveren	gemiddelde leeftijd van degenen die niet promoveren
1	2,9	2,1
2	3,7	10,8
3	3,5	10,0
4	-	10

Hieruit zien we dat degenen die rang 4 bereiken dit gemiddeld 2,9 + 3,7 + 3,5 = 10,1 jaar na binnenkomst in rang 1 (met looptijd 1) doen.

Ook kunnen we op basis van de gegeven startbezetting de verwachte bezetting in de verschillende rangen bepalen voor de komende 7 jaar bij voortzetting van het bestaande beleid, aannemende dat er geen recrutering optreedt.

Voorspelde bezetting voor de komende 7 jaar

jaar	MAB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
1979	120	100	50	30	300
1980	82	113	57	31	283
1981	45	122	65	33	265
1982	14	124	74	36	248
1983	0	111	82	39	232
1984	0	83	90	42	215
1985	0	58	96	46	200
1986	0	39	95	50	184

Wat we zien is dat het aantal personeelsleden in rang 1 na 4 jaar (natuurlijk) tot 0 is gedaald. Bovendien zitten er na 7 jaar al 145 personeelsleden in de hoogste twee rangen tegen slechts 80 in 1979. Verder is bijna 40% van de personeelsleden die op 1 jan. 1979 aanwezig waren inmiddels vertrokken.

Om het totaal aantal werknemers ongeveer constant te houden en de lage rangen wat op te vullen worden er per jaar 18 mensen in rang 1 aangenomen. De voorspelde bezetting voor de komende 7 jaar wordt daarmee

Voorspelde bezetting voor de komende 7 jaar bij beleid I met een recrutering van 18 man in rang 1.

jaar	AMB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
1979	120	100	50	30	300
1980	100	113	57	31	301
1981	79	123	65	33	300
1982	59	130	74	36	299
1983	50	127	82	39	298
1984	50	114	91	42	297
1985	50	100	99	46	295
1986	50	90	103	50	293

Bij deze constante recruteringsaantallen en het bestaande beleid wordt de stationaire bezetting

Stationaire bezetting bij beleid I

AMB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
50	88	81	46	265

De groei die de dienst de laatste jaren heeft doorgemaakt is tot stilstand gekomen. Daardoor is het, zoals we hierboven gezien hebben, niet meer mogelijk het bestaande beleid voort te zetten omdat hierdoor de verhouding tussen lagere en hogere ambtenaren volkomen scheef dreigt te groeien. Men is van mening dat er minder snel gepromoveerd moet worden, en dat er naar gestreefd moet worden de verhouding tussen de bezettingen in de verschillende rangen ongeveer zo te houden als die op 1 jan. 1979 is. Men kan bijvoorbeeld proberen dit te bereiken door de promoties uit te stellen (de promotiekansen op te schuiven). Dwz. promoveren wordt pas mogelijk nadat men een aantal jaren in een bepaalde rang heeft gezeten.
De promotiekansen in de rangen 1, 2 en 3 worden respectievelijk 4, 4 en 2 jaar opgeschoven.
Dit nieuwe promotiebeleid noemen we beleid II. De kansen om van rang i naar rang j te gaan worden nu gegeven door de volgende tabellen.

Promotiekansen bij beleid II

i = 1, j = 2	
looptijd	kans
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0.1
6	0.2
7	0.5
8	0.95

i = 2, j = 3	
looptijd	kans
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0.1
7	0.2
8	0.6
9	0.4
10	0.1
11	0

i = 3, j = 4	
looptijd	kans
1	0
2	0
3	0
4	0.05
5	0.2
6	0.3
7	0.1
8	0

We veronderstellen dat het verloop in de rangen hierdoor nier verandert.

Houden we het aantal mensen dat gerecruteerd wordt gelijk, d.w.z. weer 18 in rang 1, dan krijgen we de volgende verwachte bezetting voor de komende 7 jaar.

Voorspelde bezetting voor de komende 7 jaar bij beleid II met een recrutering van 18 man in rang 1

jaar	AMB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
1979	120	100	50	30	300
1980	132	94	46	28	300
1981	142	86	45	27	300
1982	150	80	43	27	300
1983	151	79	42	29	301
1984	143	86	42	31	302
1985	130	92	48	31	301
1986	115	100	57	30	302

Bij dit nieuwe beleid zal de bezetting de komende jaren niet al te veel gaan verschillen van de huidige bezetting.
De stationaire bezetting bij dit nieuwe beleid wordt

Stationaire bezetting bij beleid II

AMB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
107	105	60	26	298

Wat ook mogelijk is, is het nieuwe beleid geleidelijk invoeren. Daarmee is waarschijnlijk het sterke oplopen van de bezetting in AMB en de onderbezetting in AMB1 en HAMB gedurende de jaren 1980-1985 te voorkomen.
We hebben hier alleen beleid I en beleid II vergeleken. In de praktijk vergelijkt men natuurlijk een groot aantal alternatieven. Ook is het natuurlijk twijfelachtig of een zo sterke wijziging van de promotiekansen, als hierboven in beleid II is aangegeven, in de gegeven situatie acceptabel is.

Een belangrijk probleem is natuurlijk de vraag of de berekende verwachte bezetting een redelijk betrouwbare voorspelling is voor de feitelijke bezetting. Om daar een indruk van de krijgen, kunnen we de varianties in de verwachte aantallen bepalen.

Standaardafwijkingen bij beleid II met recrutering

Jaar	AMB	AMB1	HAMB	HAMB1
1980	2	2	2	2
1981	3	3	3	3
1982	4	4	4	3
1983	5	5	4	4
1984	6	6	5	4
1985	6	7	5	4
1986	5	7	6	4

We zien dus dat de standaardafwijkingen niet al te groot zijn in verhouding tot de verwachte bezetting, zodat inderdaad de verwachte bezetting een goede indruk geeft voor de feitelijke bezettingen die we de komende jaren zullen zien.

Behalve in het aantal leden per rang zijn we ook geinteresseerd in de leeftijdsopbouw in de verschillende rangen. We hebben bijvoorbeeld nu de volgende beginsituatie. De tabel geeft per leeftijd het aantal personeelsleden per rang aan.

Leeftijdsverdeling 1 jan. 1979

leeftijd	AMB	AMB1	HAMB	HAMB1	Totaal
64	0	0	0	0	0
63	0	0	0	1	1
62	0	0	0	1	1
61	0	0	0	0	0
60	0	0	0	1	1
59	0	0	0	1	1
58	0	0	0	1	1
57	0	0	0	0	0
56	0	0	0	1	1
55	0	0	0	1	1
54	0	0	0	2	2
53	0	0	0	1	1
52	0	0	0	2	2
51	0	0	0	1	1
50	0	0	0	0	0
49	0	0	0	2	2
48	0	0	0	1	1
47	0	0	1	1	2
46	0	0	1	0	1
45	0	0	0	3	3
44	0	0	1	1	2
43	0	0	1	2	3
42	0	0	0	0	0
41	0	0	1	3	4
40	0	2	1	1	4
39	0	1	3	1	5
38	0	1	3	0	4
37	0	4	2	1	7
36	0	3	3	0	6
35	0	3	5	0	8
34	0	4	2	1	7
33	1	7	4	0	12
32	0	3	3	0	6
31	1	9	10	0	20
30	1	9	3	0	13
29	2	10	5	0	17
28	6	15	1	0	22
27	8	13	0	0	21
26	10	7	0	0	17
25	6	5	0	0	11
24	11	4	0	0	15
23	18	0	0	0	18
22	28	0	0	0	28
21	28	0	0	0	28

Veronderstel eens dat verder uit historische gegevens bekend is dat de leeftijdsverdeling voor de recruten als volgt is

Leeftijdsverdeling recruten

leeftijd	21	22	23	24	25	26	27	28
kans	0.1	0.2	0.2	0.15	0.1	0.1	0.1	0.05

Op basis van deze gegevens kunnen we nu het verwachte aantal leden van een bepaalde leeftijd in een bepaalde rang bepalen.

In de onderstaande tabellen geeft ieder cijfer i bij een bepaalde leeftijd een personeelslid in rang i van die leeftijd aan.

We zien bijvoorbeeld dat van de vier werknemers die nu 40 jaar oud zijn er twee in rang 2, één in rang 3 en één in rang 4 zitten (huidige bezettingen).

Vergelijken we de tabellen voor beleid I en beleid II dan zien we dat de totale aantallen werknemers van leeftijdsklasse in 1986 niet veel verschillen.

Maar ook is duidelijk dat er bij beleid I veel sneller gepromoveerd wordt.

Neem bijvoorbeeld eens de groep werknemers die in 1986 28 jaar oud zijn en vergelijk de verdeling over de rangen bij beleid I en beleid II.

leeftijd	1979	leeftijd	beleid I 1986	leeftijd	beleid II 1986
64		64		64	
63	4	63		63	
62	4	62		62	
61		61	4	61	4
60	4	60		60	
59	4	59	4	59	4
58	4	58		58	
57		57		57	
56	4	56	4	56	4
55	4	55		55	
54	44	54	3	54	4
53	4	53		53	
52	44	52	4	52	4
51	4	51	4	51	4
50		50	34	50	4
49	44	49		49	
48	4	48	44	48	44
47	34	47	24	47	34
46	3	46	234	46	34
45	444	45	34	45	34
44	34	44	2234	44	334
43	344	43	234	43	334
42		42	3344	42	3334
41	3444	41	2234	41	334
40	2234	40	2233344	40	2233334
39	23334	39	344	39	334
38	2333	38	22333334444	38	223333333444
37	2222334	37	23333444	37	22333334
36	222333	36	2333334444	36	22233333344
35	22233333	35	2233333334444	35	22222223333333
34	2222334	34	22233333333444	34	1222222222233333
33	122222223333	33	22223333333344	33	11222222222233
32	222333	32	2222333334	32	11112222233
31	12222222223333333333	31	222222333333334	31	111112222222223
30	1222222222333	30	12222222223333333334	30	11111111222222222222
29	11222222222233333	29	11222222222222333333333333334	29	11111111111122222222222222222
28	1111112222222222222223	28	111122222222222222333333333333334	28	111111111111111122222222222222222
27	111111112222222222222	27	11111222222223	27	111111111111112
26	11111111112222222	26	1111112222222	26	1111111111111
25	11111122222	25	111111122222	25	111111111111
24	111111111112222	24	11111111122	24	11111111111
23	111111111111111111	23	111111112	23	111111111
22	1111111111111111111111111111	22	11111	22	11111
21	1111111111111111111111111111	21	11	21	11

DEEL II: DYNAMISCHE PROGRAMMERING

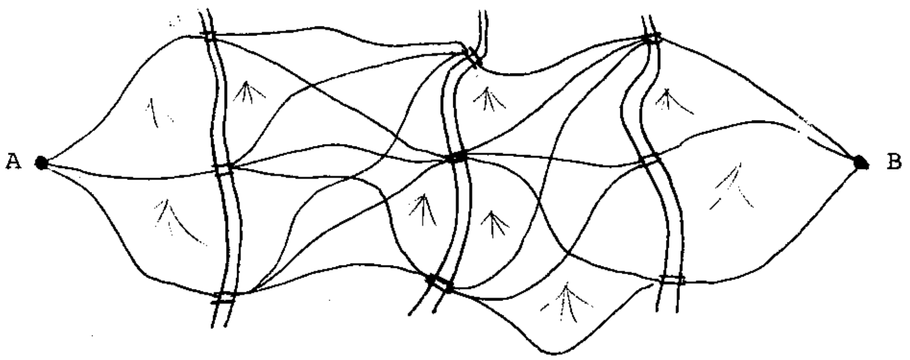
Hoofdstuk 6. Introductie tot de dynamische programmering

6.1. Inleiding

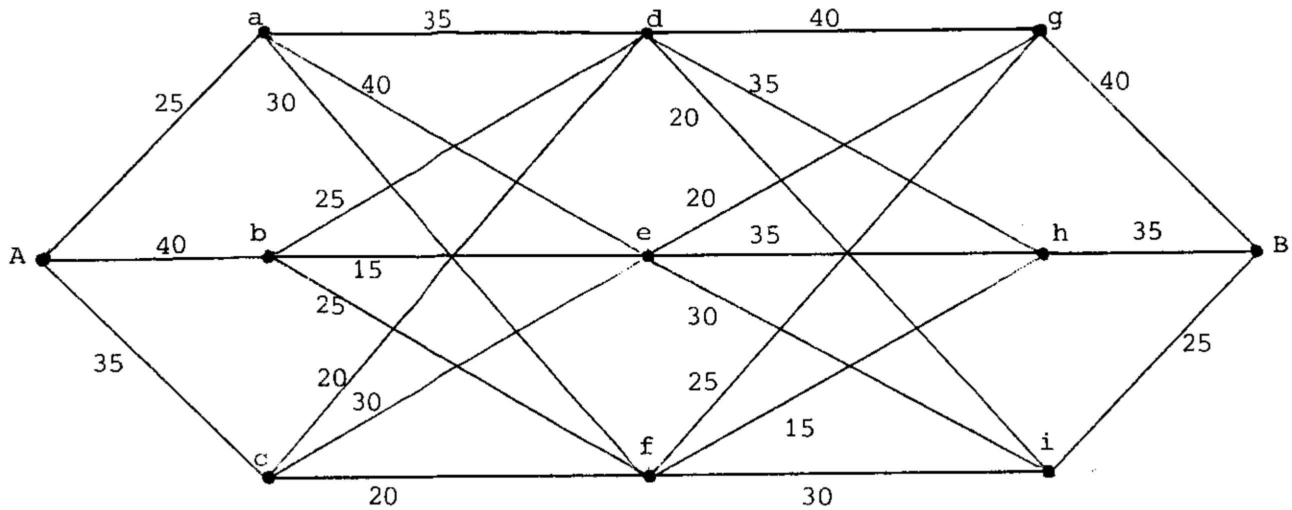
In dit tweede deel van het college geven we een inleiding tot de dynamische programmering d.w.z. de analyse van dynamische systemen, zowel deterministische als stochastische , waarop, door het nemen van beslissingen, invloed kan worden uitgeoefend.
We zullen in dit hoofdstuk aan de hand van een aantal voorbeelden de methode van de dynamische programmering invoeren. In hoofdstuk 7 zullen we vervolgens deze techniek wat verder uitwerken voor een speciaal type van dynamische beslissingsproblemen, de zogenaamde Markov beslissingsproblemen, feitelijk Markov ketens met beslissingen.

6.2. Bepaling van een kortste pad in een eenvoudig netwerk

Beschouw eens het volgende eenvoudige beslissingsprobleem. Een bergwandelaar wil zo snel mogelijk van een punt A naar een punt B komen. Er is echter één probleem: om in B te komen moet hij drie riviertjes oversteken zodat hij aangewezen is op de bruggen over deze rivieren.



Op het oog is de snelste weg die over de drie middelste bruggen. In dit bergachtige gebied is de kortste weg echter niet noodzakelijk ook de snelste weg.
We kunnen het probleem van de wandelaar als volgt weergeven



Waarbij we langs elke tak de tijd in minuten hebben gezet die de wandelaar voor het betreffende traject nodig heeft.
Hoe bepalen we nu de snelste weg van A naar B? Een methode is voor alle mogelijke paden van A naar B de benodigde tijd te berekenen. (Ga na dat dit hier al 27 verschillende paden zijn.)
Een veel snellere methode is de volgende. In woorden: 'Bereken' eerst voor de punten g,h en i de snelste weg tot B. Bepaal vervolgens de snelste route van d,e en f tot B. Daarna de snelste weg van a,b, en c tot B gebruikmakend van het feit dat je de tijd benodigd voor de snelste weg van d,e en f tot B al kent. En tenslotte de snelste weg van A naar B waarbij je gebruik maakt van de al eerder bepaalde minimale tijden benodigd om van a,b en c in B te komen.

We zullen de berekeningen hieronder uitvoeren.
Definieer voor $s \in \{A,a,b,c,\dots,h,i\}$

$v(s) :=$ de minimale tijd benodigd om van s in B te komen.

Het probleem is dus $v(A)$ te bepalen en natuurlijk tevens het pad waarvoor de wandeltijd minimaal is.
Allereerst vinden we

$$v(g) = 40, \; v(h) = 35, \; v(i) = 25.$$

Vervolgens bepalen we de snelste weg van d naar B.

$$\begin{aligned} v(d) &= \min\{40 + v(g),\; 35 + v(h),\; 20 + v(i)\} \\ &= \min\{40 + 40,\; 35 + 35,\; 20 + 25\} = 45 \end{aligned}$$

Dus de snelste weg van d tot B kost 45 minuten en loopt via brug i.
Analoog vinden we de snelste weg van e naar B

$$v(e) = \min\{20 + v(g),\ 35 + v(h),\ 30 + v(i)\}$$
$$= \min\{20 + 40,\ 35 + 35,\ 30 + 25\} = 55$$

Snelste weg dus 55 minuten, via brug i.
En

$$v(f) = \min\{25 + v(g),\ 15 + v(h),\ 30 + v(i)\}$$
$$= \min\{25 + 40,\ 15 + 35,\ 30 + 25\} = 50$$

Dus de snelste weg loopt via brug h en kost 50 minuten.
Het bepalen van de snelste weg van a,b en c naar B verloopt nu analoog:

$$v(a) = \min\{35 + v(d),\ 40 + v(e),\ 30 + v(f)\}$$
$$= \min\{35 + 45,\ 40 + 55,\ 30 + 50\} = 80$$

Dus de snelste weg van a naar B kost 80 minuten en we kunnen zowel via brug d als brug f gaan

$$v(b) = \min\{25 + v(d),\ 15 + v(e),\ 25 + v(f)\}$$
$$= \min\{25 + 45,\ 15 + 55,\ 25 + 50\} = 70$$

Dus snelste van b naar B kost 70 minuten en men kan zowel via brug d als brug e gaan.

$$v(c) = \min\{20 + v(d),\ 30 + v(e),\ 20 + v(f)\}$$
$$= \min\{20 + 45,\ 30 + 55,\ 20 + 50\} = 65$$

Dus de snelste weg van c naar B kost 65 minuten en loopt via brug d.
Tenslotte kunnen we nu de snelste weg van A naar B bepalen.

$$v(A) = \min\{25 + v(a),\ 40 + v(b),\ 35 + v(c)\}$$
$$= \min\{25 + 80,\ 40 + 70,\ 35 + 65\} = 100$$

Zodat we vinden dat de snelste weg van A naar B 100 minuten kost en loopt via de bruggen c,d en i. We hebben bij deze berekeningen gebruik gemaakt van het feit dat, als we een snelste route van A naar B hebben die via brug s loopt, ook de deelroute van s naar B de snelst mogelijke is (overigens geldt hetzelfde voor de route van A naar s).
Deze eigenschap, dat deelpaden van optimale paden ook weer optimaal zijn, staat bekend als het optimaliteitsprincipe van Bellman. En het is juist deze eigenschap die ons in staat stelde de snelste weg van A naar B op de bovenstaande wijze te bepalen.
De gevolgde methode staat bekend als de methode van de dynamische programmering.

6.3. Staalwalserij

In een staalwalserij moeten platen staal van 5cm dikte gewalst worden tot ze een dikte hebben gekregen van 1cm. Dit gebeurt door het staal achtereenvolgens in een aantal walsen te bewerken.
In onderstaande tabel worden de bewerkingskosten aangegeven per eenheid staal voor een wals die de gegeven dikte met de aangegeven hoeveelheid reduceert.

walskosten per gewichtseenheid staal			
dikte in cm voor het walsen	reductie in cm		
	1	2	3
5	7	9	15
4	6	8	-
3	6	7	-
2	4	-	-

(Een - geeft een technisch niet mogelijke reductie aan).
Het probleem is nu te bepalen hoe het staal op zo goedkoop mogelijke wijze van een dikte van 5cm to een dikte van 1cm gewalst kan worden.
We kunnen natuurlijk weer alle mogelijke volgorden vergelijken. Dat is hier nog best uitvoerbaar. We kunnen echter ook dezelfde dynamische programmeringsaanpak volgen als in de vorige paragraaf.
Definieer voor $i = 2,3,4,5$

v(i) := de minimale kosten voor het walsen van staal met dikte i cm tot staal met een dikte van 1cm.

Dan geldt:

$v(2) = 4$ (slechts één mogelijkheid)

$v(3) = \min\{6 + v(2),\ 7\} = \min\{6 + 4,\ 7\} = 7$

Dus staal van 3cm dikte wordt in één keer tot staal van 1cm dikte gewalst tegen kosten 7.

Vervolgens

$v(4) = \min\{6 + v(3),\ 8 + v(2)\} = \min\{6 + 7,\ 8+ 4\} = 12$

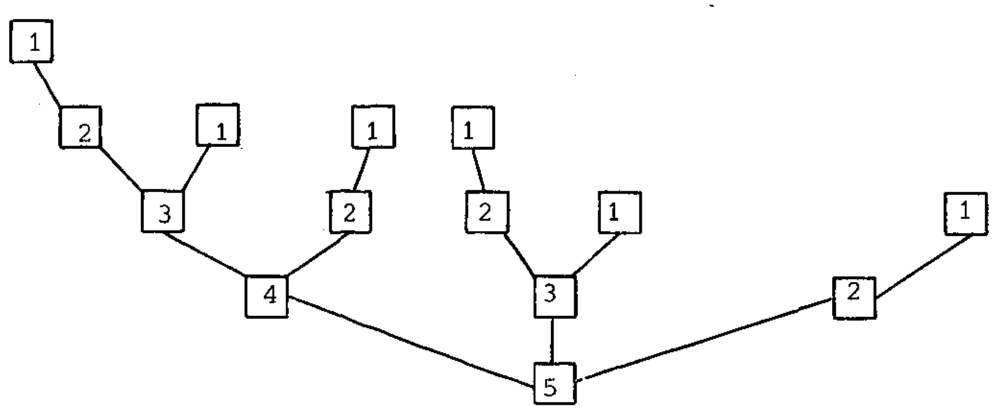
En tenslotte

$$v(5) = \min\{7 + v(4),\ 9 + v(3),\ 15 + v(2)\}$$
$$= \min\{7 + 12,\ 9 + 7,\ 15 + 4\} = 16$$

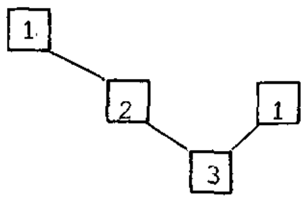
Dus de goedkoopste methode is het staal eerst in één wals van 5 op 3cm dikte te brengen en vervolgens van 3 naar 1 cm opnieuw in één wals. De totale kosten bedragen dan 16 per gewichtseenheid.

6.4. Beslissingsbomen

We kunnen dynamische beslissingsproblemen ook weergeven met bomen. Neem bijvoorbeeld het probleem van de staalwalserij. Dat kunnen we als volgt in een boom weergeven



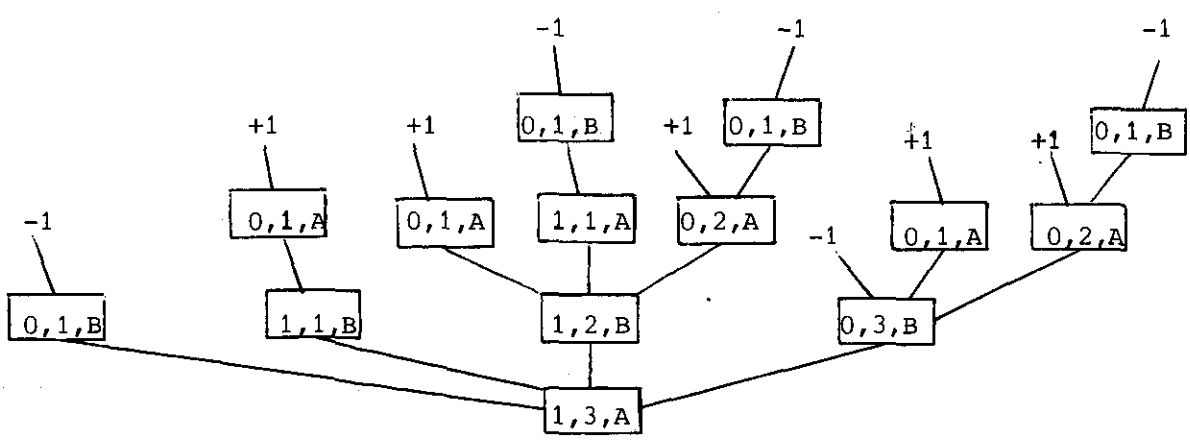
Hierin komen de takken steeds met een bepaalde reductie overeen en geven de knopen de bereikte dikte aan. We zien ook, dat elke knoop 1 correspondeert met een andere reductiewijze. Sommige delen van de boom komen meerdere malen voor. Bijvoorbeeld het deel



Opgave: Geef de beslissingsboom voor het probleem van de wandelaar uit paragraaf 6.2.

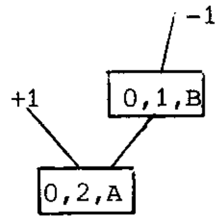
Ook voor beslissingsproblemen met meer beslissers kunnen we een beslissingsboom opstellen. Beschouw eens de volgende eenvoudige versie van het NIM-spel.
Er zijn twee stapeltjes lucifers. Om de beurt mogen de twee spelers, A en B elk een of meer lucifers van een van de stapeltjes wegnemen. Wie de laatste lucifer(s) wegneemt is de winnaar en krijgt een cent van de ander. De boom voor bijvoorbeeld een stapeltje van 1 en een van 3 is als volgt:

We geven de knopen (toestanden) aan met het drietal (i,j,C) waarin $i \leq j$ de aantallen op de beide stapeltjes en C de speler die aan zet is.



Dus neemt speler A in zijn eerste zet het stapeltje van 3 in zijn geheel weg, dan is het resultaat toestand (0,1,B) Vervolgens neemt B de laatste

lucifer weg en wint daarmee. We noteren dit met -1 aan het eind van de tak, hetgeen aangeeft dat A 1 cent verliest (en B dus 1 cent wint).
Het is duidelijk dat B de uitbetalingsfunctie wil minimaliseren en A deze wil maximaliseren.
We kunnen dit weer doen met de dynamische programmeringsaanpak uit de voorgaande paragrafen.
Beschouw eens de uiterst rechtse tak



Komt het systeem ooit in (0,1,B) dan wint B dus geldt met g de uitbetalingsfunctie voor A bij optimaal spel:

$$g(0,1,B) = -1$$

Vervolgens bepalen we g(0,2,A) als volgt

$$g(0,2,A) = \max\{+1,\ g(0,1,B)\} = 1$$

Dus als A beide lucifers wegneemt wint hij.
We kunnen zo verder gaan en nu bijvoorbeeld voor toestand (0,3,B) de uitbetaling bepalen bij optimaal spel van beide spelers:

$$g(0,3,B) = \min\{-1,\ g(0,1,A),\ g(0,2,A)\}$$

Duidelijk is dat

$$g(0,1,A) = +1$$

zodat

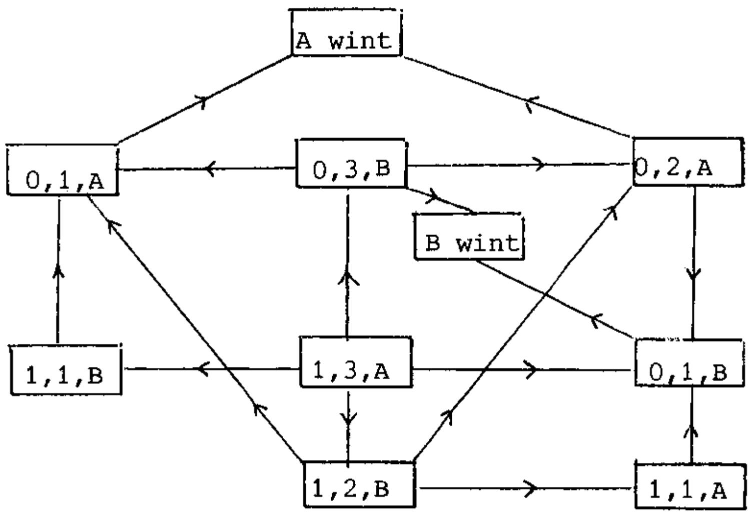
$$g(0,3,B) = \min\{-1,\ +1,\ +1\} = -1$$

D.w.z. een verstandige B neemt nu alle lucifers weg en wint. Zo voortgaand tonen we, na ook de takken met wortel (1,2,B), (1,1,B) en (0,1,B) te hebben uitgewerkt, aan dat

$$g(1,3,A) = +1$$

En dat optimaal voor speler A is twee lucifers van het stapeltje met 3 weg te nemen. Ga dit na. Opgave: Doe hetzelfde eens voor stapeltjes van 2 en 3.

Een nadeel van deze beschrijving met bomen is dat bepaalde stukken meer dan eens voorkomen. Zo komt toestand (0,1,B) hier bijvoorbeeld 4 keer voor. Bij de beschrijving met een netwerk vervalt dit bezwaar.



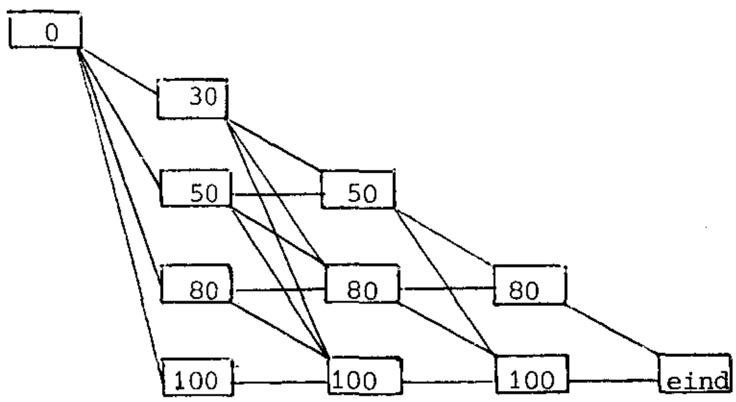
6.5. Productieplanningsprobleem

Beschouw eens het volgende productieplanningsprobleem. Van een artikel moeten de komende vier perioden respectievelijk 30, 20, 30 en 20 eenheden afgeleverd worden. De productiekosten bestaan uit twee delen: de kosten voor het opzetten van een serie (voorbereiding, afstelling, etc.) ter grootte 20 en de kosten per eenheid 5. Verder hebben we voorraadkosten voor artikelen die aan het eind van het kwartaal overblijven ten bedrage van 0,2 per eenheid. Er moet geleverd worden.

Hoe bepalen we een optimaal productieschema voor deze vier perioden. Het is duidelijk dat de productiekosten per eenheid geen rol spelen bij het bepalen van de optimale planning. Wat we moeten afwegen is de besparing aan opzetkosten bij het produceren voor meerdere perioden tegelijk tegen de extra voorraadkosten die daardoor ontstaan.

Het zal ook duidelijk zijn dat we altijd alleen voor een vol aantal perioden produceren; immers in het andere geval zouden we (soms) wel extra voorraadkosten hebben maar toch een nieuwe serie moeten opzetten. En ook zullen we nooit een productie starten als er nog voldoende voorraad is. De enige vraag is dus nog voor hoeveel perioden produceren we tegelijk?

We kunnen voor dit probleem weer een netwerk opstellen; de toestanden geven de totale productie tot dan toe aan



periode 1 2 3 4

We moeten nu dus een zo goedkoop mogelijk pad van 0 tot het eind van de planningsperiode bepalen.

We zullen de voorraadkosten voor zover die gemaakt worden pas in de volgende periode verrekenen.

Definieer nu

$v_n(i)$:= minimale kosten als er aan het begin van periode n reeds i eenheden zijn geproduceerd (inclusief de eventuele voorraadkosten over de vorige periode)

Dan geldt er

$v_4(80) = 20$ (wel produceren, geen voorraadkosten)
$v_4(100) = 20 \times 0{,}2 = 4$ (niet produceren, wel voorraadkosten)

en vervolgens

$$v_3(50) = \min\{20 + v_4(80),\ 20 + v_4(100)\}$$
$$= \min\{20 + 20,\ 20 + 4\} = 24 \text{ (dus produceer er meteen 50)}$$

$v_3(80) = 30 \times 0{,}2 + v_4(80) = 6 + 20 = 26$ (geen directe opzetkosten, wel voorraadkosten over vorige periode)

$v_3(100) = 50 \times 0{,}2 + v_4(100) = 10 + 4 = 14$ (idem)

Daarna

$$v_2(30) = \{\min 20 + v_3(50),\ 20 + v_3(80),\ 20 + v_3(100)\}$$
$$= \min\{20 + 24,\ 20 + 26,\ 20 + 14\} = 34$$

(dus het is het verstandigst om de rest in een keer te maken.)

$$v_2(50) = 20 \times 0{,}2 + v_3(50) = 4 + 24 = 28$$
$$v_2(80) = 50 \times 0{,}2 + v_3(80) = 10 + 26 = 36$$
$$v_2(100) = 70 \times 0{,}2 + v_3(100) = 14 + 14 = 28$$

En tenslotte

$$v_1(0) = \min\{20 + v_2(30),\ 20 + v_2(50),\ 20 + v_2(80),\ 20 + v_2(100)\}$$
$$= \min\{20 + 34,\ 20 + 28,\ 20 + 36,\ 20 + 28\} = 48$$

Dus er zijn twee mogelijke productieschema's beide met kosten 48 (afgezien van de productiekosten per eenheid), nl. produceer alles in 1 keer of produceer er eerst 50 en later in periode 3 opnieuw 50.

We kunnen dit op de volgende wijze in een schema aangeven

Kosten bij optimaal vervolg		Er moet geproduceerd zijn aan het eind van de periode:			
		30	50	80	100
Er is al gereed aan het begin van de periode:	0	48			
	30		34		
	50		28	24	
	80		36	26	20
	100		28	14	4

Ga na dat de bovenstaande procedure ook gemakkelijk in het schema kan worden uitgevoerd.

Opgave: Stel zelf een optimaal schema op voor het geval de voorraadkosten per eenheid 0.3 bedragen.

Opgave: Bepaal een optimaal schema voor het geval dat de vraag respectievelijk 30,20,10 en 50 bedraagt (voorraadkosten weer 0.2).

6.6. Machine vervangingsprobleem

Alle in de voorgaande paragrafen gegeven voorbeelden waren deterministisch. Als de beslissing genomen was lag de volgende toestand vast. We hebben voor deze voorbeelden de dynamische programmeringsaanpak gegeven. Voor sommige andere problemen bestaan nog wel snellere methoden. De dynamische programmering is echter bij uitstek geschikt voor stochastische beslissingsproblemen.

Beschouw als voorbeeld van een stochastisch beslissingsprobleem het volgende machinevervangingsprobleem.

Een bepaald artikel wordt geproduceerd op machines van het type QT 15. Over 3 maanden zullen deze machines vervangen worden door het nieuwere type QT 17. Maandelijks wordt elke machine geïnspecteerd. Ruwweg kan een machine zich in 3 toestanden bevinden: goed, (zo goed als nieuw), redelijk en slecht. Als een machine nú goed is dan is de kans dat hij de volgende maand ook nog goed is $^4/5$; met kans $^1/5$ is hij dan nog in redelijke staat. En als een machine nu redelijk is is hij dat volgende maand ook nog met kans $^3/5$ en is de toe-

stand van de machine met kans $^2/5$ slecht. De onderhoudskosten en de kosten van productieverlies bedragen per maand voor een goede machine 200, voor een redelijke 400 en voor een slechte 700.
Willen we een machine na inspectie vervangen dan kan dat direct gebeuren.
De nieuwprijs van een machine bedraagt 2000 en de restwaarde van een goede, redelijke en slechte machine bedraagt respectievelijk 1400, 900 en 400.
In de jaren dat het bedrijf met de QT 15 gewerkt heeft volgde het als strategie: vervang een machine zodra hij niet goed meer is. Het probleem is nu moeten ze dit blijven doen of moeten ze nu minder snel vervangen met het oog op de aanschaf van de nieuwe QT 17.
We zullen dit probleem weer aanpakken met dynamische programmering.
Definieer

$v_i(a)$ = de minimale kosten voor een machine als die in maand i in toestand a zit, i = 1,2,3, a = g(goed), r(redelijk, s(slecht).

Dan geldt er

$v_3(g)$ = directe kosten - verwachte restwaarde

$= 200 - {}^4/5.1400 - {}^1/5\ 900 = -1100$

$v_3(r)$ = min {kosten bij vervanging, kosten bij houden}

= min {nieuwprijs - restwaarde van redelijke machine - directe kosten - verwachte restwaarde volgende maand, directe kosten - verwachte restwaarde}

$= \min\{2000 - 900 + 200 - {}^4/5.1400 - {}^1/5\ 900,\ 400 - {}^3/5.900 - {}^2/5.400\}$

$= \min\{0, -300\} = -300$

Dus met nog 1 periode te gaan moeten we een redelijke machine houden.

$v_3(s)$ = min {kosten bij vervanging, kosten bij houden}

$= \min\{2000 - 400 + 200 - {}^4/5.1400 - {}^1/5.900,\ 700 - 400\}$

$= \min\{500, 300\} = 300$

Dus ook een slechte machine zullen we met nog maar één periode te gaan niet vervangen.
Vervolgens bepalen we $v_2(a)$, a = g,r,s.

$v_2(g) = 200 + {}^4/5\ v_3(g) + {}^1/5\ v_3(r) = 200 - {}^4/5.1100 - {}^1/5.300 = -740$

$$v_2(r) = \min\{2000 - 900 + 200 + {}^4/5\ v_3(g) + {}^1/5\ v_3(r),\ 400 + {}^3/5\ v_3(r) + {}^2/5\ v_3(s)\}$$
$$= \min\{1100 - 740,\ 400 - {}^3/5.300 + {}^2/5.300\} = \min\{360,\ 340\} = 340$$
$$v_2(s) = \min\{2000 - 400 + 200 + {}^4/5\ v_3(g) + {}^1/5\ v_3(r),\ 700 + v_3(s)\}$$
$$= \min\{1600 - 740,\ 700 + 300\} = 860$$

Dus met nog twee maanden te gaan zullen we een redelijke machine niet meer vervangen maar een slechte nog wel.
Tenslotte moeten we nog nagaan wanneer we vervangen met nog 3 perioden te gaan.

$$v_1(g) = 200 + {}^4/5\ v_2(g) + {}^1/5\ v_2(r) = 200 - {}^4/5.740 + {}^1/5.340 = -324$$
$$v_1(r) = \min\{2000 - 900 + 200 + {}^4/5\ v_2(g) + {}^1/5\ v_2(r),\ 400 + {}^3/5\ v_2(r) + {}^2/5\ v_2(s)\}$$
$$= \min\{1100 - 324,\ 400 + {}^3/5.340 + {}^2/5.860\} = \min\{776,\ 948\} = 776$$
$$v_1(s) = \min\{2000 - 400 + 200 + {}^4/5\ v_2(g) + {}^1/5\ v_2(r),\ 700 + v_2(s)\}$$
$$= \min\{1276,\ 700 + 860\} = 1276$$

Zodat we zien dat we met mog 3 maanden te gaan niet alleen een slechte maar ook een redelijke machine zullen moeten vervangen.

6.7. Algemene formulering van een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem

Beschouw een stochastisch beslissingsprobleem (het deterministische probleem is hiervan slechts een bijzonder geval), waarbij we op een aantal tijdstippen, zeg $1,2,\ldots,T$ beslissingen moeten nemen om het systeem te besturen. Laat $I_t = \{1,2,\ldots,n_t\}$ de verzameling van mogelijke toestanden van het systeem op tijdstip t zijn. Deze toestandsverzameling kan, zoals we in het productieplanningsprobleem zagen, inderdaad van t afhangen. Zij verder $B_t(i)$ de verzameling van mogelijke beslissingen in toestand i op tijdstip t.
Als op tijdstip t in toestand i beslissing k wordt genomen dan gebeuren er twee dingen

1°. De beheerder (bestuurder) van het systeem ontvangt een directe (eventueel verwachte) opbrengst $r_i^k(t)$.

2°. Het systeem gaat met kans $p_{ij}^k(t)$ over naar toestand j
$(\sum_{j\in S_{t+1}} p_{ij}^k(t) = 1$ voor alle $i \in I_t,\ k \in B_t(i))$

(In sommige problemen zoals het vervangingsprobleem uit paragraaf 6.6. zullen $r_i^k(t)$ en $p_{ij}^k(t)$ niet van t afhangen. In dat geval - dat we in het volgende hoofdstuk uitgebreid zullen beschouwen - zullen we de notatie r_i^k en p_{ij}^k gebruiken). Soms zal er aan het eind van de planningsperiode nog een slotuitkering plaats vinden (zoals de restwaarde in het vervangingsprobleem). We zullen deze noteren met $w_i(T+1)$, $i \in I_{T+1}$ (de uitkering hangt af van de toestand waarin we na de laatste beslissing terecht zullen komen).

De vraag is nu: hoe bepalen we voor dit stochastische beslissingsprobleem de optimale verwachte opbrengst en optimale strategieën?
We kunnen dit met de dynamische programmeringsaanpak als volgt doen.
Definieer

$w_i(t)$:= maximale verwachte opbrengst vanaf tijdstip t als het systeem op tijdstip t in toestand i zit, $t = 1,\dots,T$, $i \in I_t$.

Dan geldt er

$$w_i(T) = \max_{k \in B_T(i)} \{r_i^k(T) + \sum_{j \in S_{T+1}} p_{ij}^k(T) w_j(T+1)\} \quad , i \in I_T$$

en algemeen

$$(*) \qquad w_i(t) = \max_{k \in B_t(i)} \{r_i^k(t) + \sum_{j \in S_{t+1}} p_{ij}^k(t) w_j(t+1)\} \quad , t = 1,2,\dots,T,\ i \in I_t.$$

We herkennen hier weer het optimalitietsprincipe van Bellman.
Op deze wijze kunnen we achtereenvolgens $w(T)$, $w(T-1)$ tot en met $w(1)$ bepalen. De maximaliserende acties in (*) vormen vervolgens samen een optimale strategie.

Opgave: Ga na dat in het verdisconteerde geval, $\beta \geq 0$, de uitdrukking (*) vervangen kan worden door

$$w_i(t) = \max_{k \in B_t(i)} \{r_i^k(t) + \beta \sum_{j \in S_{t+1}} p_{ij}^k(t) w_j(t+1)\}$$

Hoofdstuk 7. Stochastische beslissingsproblemen met oneindige horizon.

7.1. Inleiding

We zullen in dit hoofdstuk het stochastische beslissingsprobeem uit paragraaf 6.7 beschouwen over oneindige horizon in het speciale geval dat de verzamelingen I_t en $B_t(i)$ niet van t afhangen, evenmin als de directe opbrengsten en de overgangskansen, dus het stationaire geval.

We zullen twee criteria beschouwen. Eerst zullen we het verdisconteerde probleem beschouwen. De verdisconteringsfactor zorgt er in dat geval voor dat het oneindige horizon probleem en het eindig horizon probleem veel op elkaar gaan lijken als de horizon maar voldoende ver weg ligt. Het tweede criterium dat we zullen beschouwen is het criterium van de gemiddelde opbrengst (of kosten) per tijdseenheid. We zullen proberen een strategie te bepalen die de optimale criterium waarde geeft.

Heel algemeen is een strategie een voorschrift dat voor elk tijdstip t en elke toestand $i \in I$ vastlegt welke beslissing er genomen moet worden, eventueel mede afhankelijk van het verleden van het systeem, dat wil zeggen, vroegere toestanden en eerder genomen beslissingen. Omdat het verleden ons niets leert over het toekomstige gedrag van het systeem lijkt het redelijk dat we ons verder beperken tot strategieën die niet van het verleden afhangen, de zogenaamde Markov strategieën. Men kan bewijzen dat deze beperking correct is.

Een Markov strategie s wordt gekarakteriseerd door een rij functies $f_0, f_1, \ldots$ die aan elke toestand $i \in I$ een beslissing uit $B(i)$ toevoegen; $f_t(i)$ is dan de beslissing die op tijdstip t in toestand i genomen wordt. Notatie: $s = (f_0, f_1, \ldots)$. Zo een functie f_t heet een beslissingsregel. Omdat we in het oneindig horizon probleem op elk tijdstip tegen hetzelfde probleem aankijken (het oneindig horizon probleem) ligt het voor de hand dat we steeds dezelfde beslissingsregel kunnen gebruiken. Zo een strategie s met $s = (f, f, \ldots)$ heet een stationaire strategie. Notatie: $s = f^{(\infty)}$.

Voor een beslissingsregel f schrijven we verder nog

$r(f)$ = de kolomvector met i-de component $r_i^{f(i)}$

$p(f)$ = de overgangsmatrix met i,j-de element $p_{ij}^{f(i)}$

Voorbeeld. Voorraadprobleem.

Een winkelier wil een bepaald artikel zo veel mogelijk uit voorraad leveren. De vraag naar het artikel is stochastisch: de kans op een vraag ter grootte i is $q(i)$, $i = 0,1,\dots,M$. De winkelier wil niet meer dan maximaal N artikelen in voorraad hebben. Wekelijks, vrijdags, beslist de winkelier of, en zo ja hoeveel, er besteld moet worden. De bestelling komt dan maandagochtend binnen. De inkoopsprijs bedraagt bij een bestelling van i exemplaren $c(i)$, $i = 0,1,\dots,N$. Over de voorraad aan het eind van de week worden voorraadkosten berekend, te weten h per eenheid. Eventuelen tekorten worden niet nageleverd en de winkelier rekent een verlies aan good-will van $p.i$ voor een tekort van i exemplaren.
De verkoopprijs tenslotte tenslotte bedraagt d per eenheid.

De toestandsruimte is hier dus $I = \{0,1,\dots,N\}$ (de toestand is de voorraad aan het eind van de week). De te nemen beslissing k is de hoeveelheid die wordt bijbesteld. In toestand i kan k dus de waarden $0,1,\dots,N-i$ aannemen. Dus $B(i) = \{0,1,\dots,N-i\}$, $i \in I$. Voor de overgangskansen geldt (ga na):

$$\begin{cases} p_{ij}^k = q(i+k-j) \text{ als } j > 0 \\ p_{i0}^k = \sum\limits_{\ell \geq i+k} q(\ell) \end{cases}$$

En voor de directe opbrengsten geldt, als we de voorraad en tekortkosten nog in dezelfde periode verrekenen:

$$\begin{cases} r_i^k = -c(k) + d \sum\limits_{j\leq i+k} jq(j) + d \sum\limits_{j>i+k} (i+k)q(j) + \\ - h \sum\limits_{j<i+k} (i+k-j)q(j) - p \sum\limits_{j>i+k} (i+k-j)q(j)\,. \end{cases}$$

7.2. Het stochastische beslissingsprobleem met oneindige horizon en verdiscontering

We beschouwen in deze paragraaf het oneindig horizon probleem met verdisconteringsfactor β, $0 \leq \beta < 1$.

Zij $v_i(n)$ de optimale verwachte opbrengst voor het n perioden probleem met slotuitkering 0.

Zoals we in het voorgaande hoofdstuk zagen, geldt daarvoor

$$\begin{cases} v_i(n+1) = \max\limits_k \{r_i^k + \beta\sum\limits_j p_{ij}^k\, v_j(n)\}, & n = 0,1,2,\ldots \\ v_i(0) = 0 \end{cases}$$

Of in vector-matrix notatie

$$\text{(7.1)}\qquad \begin{cases} v(n+1) = \max\limits_f \{r(f) + \beta P(f)v(n)\}, & n = 0,1,\ldots \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Merk op dat de notatie anders is dan in paragraaf 6.7. Daar gaf w_t de optimale verwachte opbrengst aan voor een T-t perioden probleem. Hier geeft het argument n het aantal perioden aan dat nog te gaan is.

We noteren verder met $v_i(s)$ de verwachte verdisconteerde opbrengst over oneindige horizon als we strategie s volgen en in toestand i starten.

Definieer verder

$$v_i = \sup_s v_i(s).$$

en zij

$$M = \max_{i,k} | r_i^k |$$

Dan geldt de volgende stelling.

<u>Stelling 7.1.</u>

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$

(ii) $\| v - v(n) \| \le \dfrac{\beta^n}{1-\beta} M$

__Bewijs__. Zij s een willekeurige strategie dan geldt er

$$v(s) \leq v(n) + \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e,$$

immers tot n is de opbrengst ten hoogste v(n) en daarna in elke periode ten hoogste M.
Dus ook

$$v \leq v(n) + \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e \tag{7.2}$$

Maar anderzijds, als we beginnen met een strategie die optimaal is in het n-staps probleem en daarna willekeurig verder sturen dan is de opbrengst tenminste

$$v(n) - \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e$$

We kunnen in de perioden na de n-de in het ongunstigste geval steeds M verspelen. Zodat ook

$$v \geq v(n) - \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e \tag{7.3}$$

Uit (7.2) en (7.3) samen volgen nu de beide beweringen (i) en (ii).

□

Dus v(n) convergeert exponentieel snel naar v. Laten we om de kracht en de zwakte van deze uitspraak in te zien nog eens kijken naar het voorraadprobleem uit paragraaf 7.1.
We nemen voor de daargenoemde parameters de volgende waarden:

$q(0) = 0.2$, $q(1) = 0.4$, $q(2) = 0.3$, $q(3) = 0.1$,

$N = 5$,

$c(0) = 0$, $c(1) = 61$, $c(2) = 120$, $c(3) = 177$, $c(4) = 234$, $c(5) = 291$,

$h = 1$, $p = 2$, $d = 67$, $\beta = 0.998$.

Passen we op dit beslissingsprobleem de methode (7.1) toe dan vinden we:

$v_n(i)$	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5
1	-2.60	52.40	79.40	85.40	84.40	83.40
2	-0.22	60.78	115.13	149.57	164.34	167.23
3	6.56	65.56	126.56	179.39	217.45	238.66
4	15.01	72.45	133.45	192.01	243.85	284.18
5	23.19	80.19	140.95	200.19	256.91	308.27
6	31.80	88.80	148.80	207.95	265.80	321.49
7	39.88	96.88	157.24	216.07	273.88	330.79
8	48.14	105.14	165.38	224.28	282.07	339.14
9	56.35	113.35	173.60	232.47	290.24	347.35
10	64.52	121.52	181.79	240.66	298.42	355.52
15	105.20	162.20	222.46	281.34	339.10	396.20
50	378.79	435.79	496.06	554.93	612,70	669.79
100	737.83	794.83	865.10	913.97	971.74	1028.83
500	2617.02	2674.02	2734.29	2793.16	2850.93	2908.02
1000	3585.44	3642.44	3702.71	3761.58	3819.35	3876.44
2000	4072.15	4129.15	4189.42	4248.29	4306.06	4363.15
∞	4148.15	4205.15	4265.42	4324.29	4382.05	4439.15

We zien dat al na enkele iteratieslagen het verschil tussen v_{n+1} en v_n nagenoeg constant is, hetgeen suggereert dat we dit ook moeten kunnen benutten door te extrapoleren. In paragraaf 7.3 zullen we dit verder uitwerken.

Beschouw nu eens formule (7.1). Volgens de voorgaande stelling geldt nu dat v(n) naar v convergeert zodat we ons af kunnen vragen of (7.1) ook geldt als we v(n + 1) en v(n) vervangen door v.

<u>Stelling 7.2</u>. De waarde(vector) v van het oneindig horizon probleem met verdiscontering is de unieke oplossing van de vergelijking:

(7.4) $$x = \max_f \{r(f) + P(f)x\}$$

<u>Bewijs</u>. Volgens stelling 7.1(ii) geldt voor alle f

$$r(f) + \beta P(f)(v - \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e) \le r(f) + \beta P(f)v(n) \le r(f) + \beta P(f)(v + \frac{\beta^n}{1-\beta} M.e)$$

En dus ook na maximalisering over f

$$\max_f \{r(f) + \beta P(f)v\} - \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} M.e \le v(n+1) \le \max_f \{r(f) + \beta P(f)v\} + \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} M$$

Zodat

$$\|v(n+1) - \max_f \{r(f) + \beta P(f)v\}\| \to 0 \quad \text{als } n\to\infty$$

Maar we weten al dat $v(n) \to v$ vor $n\to\infty$. Dus moet er gelden

$$v = \max_f \{r(f) + \beta P(f)v\}$$

Dus v voldoet inderdaad aan (7.4). We moeten nog bewijzen dat deze oplossing uniek is.

Laat v en w twee oplossingen zijn van (7.4) en laat g en h de maximaliserende beslissingsregels zijn voor de 1-stapsspelen met eindopbrengst respectievelijk v en w, d.w.z.

$$v = \max_f \{r(f) + \beta P(f)v\} = r(g) + \beta P(g)v$$

$$w = \max_f \{r(f) + \beta P(f)w\} = r(h) + \beta P(h)w$$

Dan geldt er

$$\begin{aligned} v - w &= r(g) + \beta P(g)v - r(h) - \beta P(h)w \\ &\le r(g) + \beta P(g)v - r(g) - \beta P(g)w \\ &= \beta P(g)(v - w) \le \beta P(g) \max_i (v - w)(i).e \\ &= \beta \max_i (v - w)(i).e \end{aligned}$$

In het bijzonder geldt er dus ook

$$\max_i (v_i - w_i) \leq \beta \max_j (v_j - w_j)$$

Dus moet gelden

$$v - w \leq 0$$

Met verwisselingen van v en w geldt natuurlijk ook

$$w - v \leq 0$$

Dus $v = w$, en de oplossing van (7.4) is uniek. □

Het gevolg van deze stelling is dat als we v zouden kennen we ook direct een optimale stationaire strategie kunnen bepalen.
Immers zij f^* een beslissingsregel die optimaal is in (7.4), d.w.z. voldoet aan:

(7.5) $$v = r(f^*) + \beta P(f^*)v$$

dan geldt

<u>Stelling 7.3</u>. De stationaire strategie $f^{*(\infty)}$ is optimaal:

$$v = v(f^{*(\infty)})$$

<u>Bewijs</u>. We zien direct in dat bij toepassing van de stationaire strategie $f^{*(\infty)}$ het proces een Markov keten wordt met overgangskansen $p_{ij}^{f^{*(\infty)}}$. Volgens paragraaf 4.4 is de totale verwachte verdisconteerde opbrengst voor deze keten de unieke oplossing van

$$w = r(f^*) + \beta P(f^*)w$$

Dus geldt er

$$v(f^{*(\infty)}) = r(f^*) + \beta P(f^*)v(f^{*(\infty)})$$

Met (7.5) en de uniciteit van de oplossing volgt dan $v = v(f^{(\infty)})$. □

Beschouw nog eens het voorraadprobleem uit paragraaf 7.1 met de gegevens van blz. 80.

Met behulp van de dynamische programmeringsaanpak kunnen we v willekeurig dicht benaderen. Vogens de tabel op blz. 81 ($n = \infty$) bedraagt v:

$$v^T = (4148.15,\ 4205.15,\ 4265.42,\ 4342.29,\ 4382.05,\ 4439.15)$$

Met behulp van deze vector v kunnen we nu nagaan wat de optimale acties in de verschillende toestanden zijn. Het zal uit de gegevens duidelijk zijn dat in de toestanden 3,4 en 5 nooit besteld zal worden. Resteert dus slechts de bepaling van optimale beslissingen voor de toestanden 0,1 en 2. We vinden deze door te controleren voor welke beslissing(en) in toestand i, i = 0,1,2 geldt

$$r_i^k + \sum_j p_{ij}^k\, v(j) = v(i).$$

De optimale acties blijken te zijn:

In toestand 0 bijbestellen tot 5

In toestand 1 bijbestellen tot 5

In de toestanden 2,3,4 en 5 niet bestellen.

Hoewel we nu weten dat we ons inderdaad kunnen beperken tot het beschouwen van stationaire strategieën helpt ons dat in het algemeen niet veel verder. Immers v is onbekend. Wat we zouden kunnen proberen is voor alle stationaire strategieën de opbrengst bepalen. Voor een probleem met 2 toestanden en in elke toestand 2 beslissingen is dat nog wel te doen; er zijn dan 4 stationaire strategieën. Maar voor een probleem met 10 toestanden en in elke toestand 10 beslissingen bedraagt het aantal stationaire strategieën al 10^{10}.
In de volgende twee paragrafen zullen we twee methoden beschouwen om een optimale stationaire strategie te bepalen.

7.3. De methode van de successieve approximaties

Met de methode van de successieve approximaties bedoelen we de methode om de waarde van het oneindig horizon probleem te benaderen met de waarde van eindig horizon problemen. Zoals we in stelling 7.1 hebben gezien convergeren de waarden $v(n)$ voor het eindig stapsprobleem naar v als n naar oneindig gaat.

Stelling 7.1 v(ii) geeft ook al een afschatting voor v met behulp van $v(n)$. We zullen hieronder nog enkele, in de praktijk betere grenzen voor v geven, en we zullen ook zien hoe we (bijna) optimale stationaire strategieën vinden.

We weten ook dat voor alle f en n geldt

$$(7.6) \qquad v(n+1) \geq r(f) + \beta P(f) v(n)$$

Zij nu f_n een beslissingsregel die het rechterlid in (7.6) maximaliseert, dus

$$(7.7) \qquad v(n+1) = r(f_n) + \beta P(f_n) v(n)$$

En zij $f^{*(\infty)}$ een optimale stationaire strategie voor het oneindig horizon probleem. Voor f^* geldt dus

$$(7.8) \qquad v(n+1) \geq r(f^*) + \beta P(f^*) v(n)$$

Verder is de totale verwachte verdisconteerde opbrengst voor een stationaire strategie $f^{(\infty)}$ gelijk aan

$$(7.9) \qquad v(f^{(\infty)}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(f) r(f).$$

Er geldt nu de volgende stelling

Stelling 7.4.

$$\text{(i)}\quad v(f_n^{(\infty)}) = v(n+1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t P^t(f_n)(v(n+1) - v(n))$$

$$\text{(ii)}\quad v = v(f^{*(\infty)}) \le v(n+1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t P^t(f^*)(v(n+1) - v(n))$$

Bewijs (i). We kunnen (7.7) herschrijven tot

$$r(f_n) = v(n+1) - \beta P(f_n)v(n)$$

Zodat met (7.9) geldt

$$v(f_n^{(\infty)}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(f_n)r(f_n) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(f_n)(v(n+1) - \beta P(f_n)v(n))$$

$$= v(n+1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t P^t(f_n)(v(n+1) - v(n)).$$

(ii). Herschrijven we (7.8) tot

$$r(f^*) \le v(n+1) - P(f^*)v(n)$$

dan levert dit met (7.9)

$$v = v(f^{*(\infty)}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(f^*)r(f^*) \le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(f^*)(v(n+1) - \beta P(f^*)v(n))$$

$$= v(n+1) + \sum_{t=1} \beta^t P^t(f^*)\,(v(n+1) - v(n)).$$

□

En met behulp hiervan vinden we

Stelling 7.5.

$$\text{(i)}\quad v(f_n^{(\infty)}) \ge v(n+1) + \frac{\beta}{1-\beta} \min_i (v(n+1) - v(n))(i)\,.\,e \quad (e = (1,1,..,1)^T)$$

(ii) $v \le v(n+1) + \frac{\beta}{1-\beta} \max_i (v(n+1) - v(n)(i) \, . \, e$

(iii) $\frac{\beta}{1-\beta} \min_i (v(n+1) - (n))(i) . e \le v - v(n+1) \le \frac{\beta}{1-\beta} \max_i (v(n+1) - v(n))(i) . e$

(iv) $v(f_n^{(\infty)}) \ge v - \frac{\beta}{1-\beta} [\max_i (v(n+1) - v(n))(i) - \min_i (v(n+1) - v(n))(i)]e$

Bewijs. (i). Met $v(n+1) - v(n) \ge \min_i (v(n+1) - v(n)(i).e$ en $P(f_n)e = e$ volgt uit stelling 7.4 (i) direct

$$v(f_n^{(\infty)}) \ge v(n+1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t P^t(f_n) \min_i (v(n+1) - v(n))(i).e$$

$$= v(n+1) + \frac{\beta}{1-\beta} \min_i (v(n+1) - v(n))(i).e$$

(ii) volgt analoog met $v(n+1) - v(n) \le \max_i (v(n+1) - v(n))(i).e$ uit stelling 7.4 (ii). (iii) volgt uit (i) en (ii) met $v \ge v(f_n^{(\infty)})$ en (iv) volgt direct uit (i) en (ii).

□

Dus stelling 7.5 (i) geeft een ondergrens voor de opbrengst bij de stationaire strategie $f_n^{(\infty)}$ en (ii) geeft een bovengrens voor de optimale waarde v. Door deze te combineren vinden we (iii): onder- en bovengrenzen voor v en (iv): een afschatting voor de kwaliteit van $f_n^{(\infty)}$ ten opzichte van de optimale opbrengst v.
In veel gevallen neemt $\max_i (v(n+1) - v(n))(i) - \min_i (v(n+1) - v(n))(i)$ beduidend sneller af dan $\beta^n M$ zodat in dat geval de grenzen uit stelling 7.5 aanzienlijk beter zullen zijn dan de grenzen die uit stelling 7.1 volgen.
Het nadeel van de methode van de successieve approximaties is dat de methode niet eindigt, zodat we gedwongen zijn om met bijna optimale strategieën te werken. Overigens bestaan er uitbreidingen van deze methode die het soms mogelijk maken (in het geval dat er maar één optimale stationaire strategie bestaat) om die optimale strategie te ontdekken. Het aantal iteraties is in het algemeen vrij groot. In de volgende paragraaf zullen we nog een methode beschouwen die wel altijd een optimale strategie levert.

Voorbeeld

We zullen het belang van stelling 7.5 illustreren aan de hand van het voorraadprobleem uit paragraaf 7.1 met de gegevens van blz. 80. Uit de tabel op blz. 81 kunnen we de volgende verschillen-tabel bepalen.

$v_n - v_{n-1}$		i = 0	1	2	3	4	5
n	1	-2.60	52.40	79.40	85.40	84.40	83.40
	2	2.38	8.38	35.73	64.17	79.94	83.83
	3	6.78	4.78	11.43	29.82	53.11	71.43
	4	8.45	6.89	6.89	12.62	26.40	45.52
	5	8.18	7.74	7.50	8.18	13.06	24.09
	6	8.71	8.71	7.85	7.76	8.89	13.22
	7	8.08	8.08	8.44	8.12	8.08	9.30
	8	8.26	8.26	8.14	8.21	8.19	8.35
	9	8.21	8.21	8.22	8.19	8.17	8.19
	10	8.17	8.17	8.19	8.19	8.18	8.17

We zien dus dat met stelling 7.5 (iii) de 10-de iteratieslag al een interval voor v geeft met een breedte van ca. 4/1000 maal de waarde van v. Dus door het midden van dit interval als benadering voor v te nemen maken we een relatieve fout van niet meer dan 1/500.
Ook is de beslissingsregel f_n die het rechterlid in (7.6) maximaliseert voor n = 10 al gelijk aan de optimale strategie van blz 84. En weten we al dat de relatieve fout die met f_{10} gemaakt wordt hoogstens 1/250 bedraagt.

7.4. De policy iteration methode

Zoals we in stelling 7.3 gezien hebben bestaat er een stationaire optimale strategie. De policy iteration nu is een methode die alleen stationaire strategieën beschouwt. Van zo'n stationaire strategie wordt steeds de opbrengst bepaald. Met behulp daarvan construeren we dan een nieuwe stationaire strategie met een hogere verwachte opbrengst. Aangezien er maar eindig veel stationaire strategieën zijn eindigt dit proces na zekere tijd. De dan gevonden strategie is optimaal.

De policy iteration methode

(i) Kies een willekeurige stationaire strategie $f^{(\infty)}$

(ii) Bepaal $v(f^{(\infty)})$ door het stelsel

$$v(f^{(\infty)}) = r(f) + \beta P(f)v(f^{(\infty)})$$

op te lossen.

(iii) Bepaal voor alle $i \in I$

(7.10) $$w_i = \max_k \{r_i^k + \beta \sum_j p_{ij}^k \; v_j(f^{(\infty)})\}.$$

Als $w_i = v_i(f^{(\infty)})$ voor alle $i \in I$ dan is de stationaire strategie $f^{(\infty)}$ optimaal.

Als nog voor sommige i geldt $w_i > v_i(f^{(\infty)})$ definieer dan h zodat h(i) voor alle i het rechterlid in (7.10) maximaliseert, dus

(7.11) $$r_i^{h(i)} + \beta \sum_j p_i^{h(i)} v_j(f^{(\infty)}) = w_i = v_i(f^{(\infty)}) + \gamma_i$$

met $\gamma_i \geq 0$ voor alle i en voor tenminste één ook $\gamma_i > 0$.
Vervang nu $f^{(\infty)}$ door $h^{(\infty)}$ en ga naar (ii).

<u>Stelling 7.6</u>. Voor de in stap (iii) als verbetering van $f^{(\infty)}$ gevonden strategie $h^{(\infty)}$ geldt

(7.12) $$v(h^{(\infty)}) = v(f^{(\infty)}) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \; P^t(h)\gamma.$$

Omdat $\gamma \geq 0$ en $\gamma \neq 0$ geldt dus

$$v(h^{(\infty)}) \geq v(f^{(\infty)})$$

en voor tenminste één $i \in I$

$$v_i(h^{(\infty)}) > v_i(f^{(\infty)}).$$

<u>Bewijs</u>. We zullen alleen (7.12) bewijzen de rest van de beweringen volgen daar direct uit.

In vector-matrix notatie luidt (7.11)

$$r(h) + \beta P(h) v(f^{(\infty)}) = v(f^{(\infty)}) + \gamma$$

Analoog aan het bewijs van stelling 7.4 vinden we met (7.9)

$$\begin{aligned} v(h^{(\infty)}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(h) r(h) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(h) \, [v(f^{(\infty)}) + \gamma - \beta P(h) v(f^{(\infty)})] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(h) v(f^{(\infty)}) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(h)\gamma - \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t P^t(h) v(f^{(\infty)}) \\ &= v(f^{(\infty)}) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t P^t(h)\gamma. \end{aligned}$$

□

Dus de strategie $h^{(\infty)}$ is echt beter dan $f^{(\infty)}$ en zoals we al eerder zeiden: er zijn maar eindig veel stationaire strategieën dus op zeker moment moeten we een strategie $f^{(\infty)}$ gevonden hebben die niet meer verbeterd kan worden in stap iii. Maar dat betekent dat voor deze $f^{(\infty)}$ geldt $\gamma = 0$ ofwel voor alle i

$$v_i(f^{(\infty)}) = \max_k \{r_i^k + \beta \sum_j p_{ij}^k \, v_j(f^{(\infty)})\}$$

Maar dit stelsel vergelijkingen heeft zoals we in stelling 7.2 zagen de unieke oplossing v. Dus $v = v(f^{(\infty)})$ ofwel $f^{(\infty)}$ is optimaal.
Het aantal iteraties dat benodigd is om een optimale strategie te vinden is in het algemeen klein, veel kleiner dan bij de methode van successieve approximaties. Een nadeel is echter dat steeds een stelsel vergelijkingen moet worden opgelost: $r + \beta Pv = v$. Als het aantal toestanden groot is wordt dit wel een bezwaar.

Voorbeeld 7.7.

Beschouw nog eens het vervangingsprobleem uit paragraaf 6.6; nu over oneindige horizon met verdisconteringsfactor $\beta = 0.9$. We hebben de volgende gegevens:

r_i^k		i: g	r	s
k	h	-200	-400	-700
	v	-	-1300	-1800

p_{ij}^k		j: g	r	s
(i,k)	(g,h), (r,v), (s,v)	0.8	0.2	0
	(r,h)	0	0.6	0.4
	(s,h)	0	0	1

Hierin is h de actie: machine houden en v de actie: vervangen.

Kies als beginstrategie die strategie f_0 die de directe opbrengst in elke toestand maximaliseert, dus $f_0(r) = f_0(s) = h$. Dan vinden we (let op de t.o.v. paragraaf 6.6 gewijzigde notatie)

$$v_g(f_0^{(\infty)}) = -4795.03,\ v_r(f_0^{(\infty)}) = -6347.83,\ v_s(f_0^{(\infty)}) = -7000.$$

Nu moeten we voor de toestanden r en s de maximaliserende actie in (7.10) bepalen, dus

$$i = r: \quad \max\{-400 + 0.9[0.6\ v_r(f_0^{(\infty)}) + 0.4\ v_s(f_0^{(\infty)})],\ -1300 + 0.9[0.8\ v_g(f_0^{(\infty)}) + 0.2\ v_r(f_0^{(\infty)})]\}$$

$$= \max\{-6347.83,\ -5895.03\},\ \text{dus 'vervangen' is beter.}$$

$$i = s: \quad \max\{-7000,\ -1800 + 0.9[0.8\ v_g(f_0^{(\infty)}) + 0.2\ v_r(f_0^{(\infty)})]\}$$

$$= \max\{-7000,\ -6395.03\},\ \text{dus ook hier 'vervangen'.}$$

Voor f_1 geldt

$$v_g(f_1^{(\infty)}) = -3980,\ v_r(f_1^{(\infty)}) = 5080,\ v_s(f_1^{(\infty)}) = 5580.$$

Proberen we nu opnieuw strategie $f_1^{(\infty)}$ te verbeteren dan vinden we in (7.10) geen verbetering meer hetgeen betekent dat de strategie $f_1^{(\infty)}$ (alleen goede machines werken) optimaal is.

7.5. Het stochastische beslissingsprobleem met oneindige horizon en als criterium gemiddelde opbrengst per tijdseenheid

Voor het eindig horizon probleem is natuurlijk de totale verwachte opbrengst het voor de hand liggende criterium als de opbrengsten niet verdisconteerd worden. Voor het oneindig horizon probleem zonder verdiscontering zal de totale verwachte opbrengst in het algemeen of $\pm\infty$ of niet gedefinieerd zijn $(\infty - \infty)$. Daarom beschouwen we in dit geval het criterium de gemiddelde opbrengst per tijdseenheid. We zullen in het vervolg van deze paragraaf dit criterium wat nader beschouwen en voor een speciaal geval aangeven hoe een optimale strategie (die hier weer stationaire is) gevonden kon worden door het oplossen van een lineair programmeringsprobleem.

Laat s een strategie zijn voor het oneindig horizon probleem dan definieren we

$v_i(s,n)$:= de totale verwachte opbrengst gedurende de eerste n perioden als strategie s wordt gevolgd en het systeem in toestand i start.

De gemiddelde opbrengst per tijdseenheid bij strategie s en start in i definieren we nu als

$$g_i(s) := \liminf_{n\to\infty} \frac{v_i(s,n)}{n}$$

We kunnen hier niet $\lim_{n\to\infty}$ nemen omdat voor sommige strategieën deze limiet niet hoeft te bestaan. Voor stationaire strategieën echter kunnen we liminf vervangen door lim. Zonder bewijs vermelden we dat er ook weer een stationaire strategie bestaat die optimaal is, d.w.z. er bestaat een $f^{(\infty)}$ zodanig dat

$$g_i(f^{*(\infty)}) = \sup_s g_i(s) =: g_i$$

Voor een stationaire strategie is de criterium waarde weer eenvoudig te bepalen, immers

$$v_i(f^{*(\infty)},n) = (\sum_{t=0}^{n-1} P^t(f)r(f))(i)$$

Dus

$$g_i(f^{(\infty)}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} P^t(f)r(f))(i)$$
$$= (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} P^t(f))r(f)(i)$$

En zoals we in paragraaf4.5 zagen kunnen we dit verder uitwerken tot

$$g_i(f^{(\infty)}) = (P^{\infty}(f)r(f))(i) = \sum_j p_{ij}^{(\infty)}(f)r_j^{f(j)}$$

$$= \sum_j \rho_{ij}(f)p_{jj}^{(\infty)}(f)r_j^{f(j)} .$$

In het algemeen zal $g_i(f^{(\infty)})$ van de starttoestand afhangen. Niet echter in het geval dat de matrix $P(f)$ slechts één recurrente keten met eventueel nog wat transiente toestanden bevat; dan geldt (vgl § 4.5)

$$g_i(f^{(\infty)}) = \sum_j p_{jj}^{(\infty)}(f) r_j^{f(j)}$$

Voorbeeld:

$$\text{a)}\ P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad P_1^{(\infty)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\ P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad P_2^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dan is dus $q(f) = (q_1(f),\ldots,q_N(f))$ de limiet verdeling van de Markov keten met overgangsmatrix $P(f)$. En we zien uit $g_i(f^{(\infty)}) = \sum_j q_j(f) r_j^{f(j)}$, dat $g_i(f^{(\infty)})$ juist de opbrengst is in één stap als de limietverdeling eenmaal bereikt is.

We zullen nu voor het speciale geval dat voor alle stationaire strategieën $f^{(\infty)}$ de matrix $P(f)$ irreducibel is een lineaire programmeringsaanpak ontwikkelen die een optimale stationaire strategie levert.

Zoals we al zagen is in dit geval $g_i(f^{(\infty)})$ niet van i afhankelijk. We zoeken nu een stationaire strategie die

$$\sum_j q_j\, r_j^{f(j)}$$

maximaliseert onder de nevenvoorwaarden

I

(7.13)
$$\begin{cases} q_i = \sum_j q_j\, p_{ji}^{f(j)}, & i \in S \\ \sum_i q_i = 1 \\ q_i \geq 0, & i \in S \end{cases}$$

De voorwaarde (7.13) bepalen de limietverdeling behorende bij de overgangsmatrix P(f). Door de afhankelijkheid tussen q en f is dit echter nog geen lineair programmeringsprobleem.
We voeren nu de grootheden d_i^k, $i \in I$, $k \in B(i)$ in gedefinieerd door

$$d_i^k := 1 \text{ als } f(i) = k$$

$$d_i^k := 0 \text{ als } f(i) \neq k$$

Hiermee kunnen we de eerste voorwaarde in (7.13) herschrijven tot

$$q_i = \sum_j q_j \sum_k d_j^k p_{ij}^k = \sum_j \sum_k q_j d_j^k p_{ji}^k$$

En met $\sum_k d_i^k = 1$ voor alle i nog tot

$$\sum_k q_i d_i^k = \sum_j \sum_k q_j d_j^k p_{ji}^k$$

De tweede vergelijking in (7.13) wordt nu

$$\sum_i \sum_k q_i d_i^k = 1$$

en de objectfunctie wordt

$$\sum_j \sum_k q_j d_j^k r_j^k$$

waarbij gemaximaliseerd moet worden over alle vectoren (d_i^k) met $d_i^k = 0$ of 1 en $\sum_k d_i^k = 1$, $i \in I$.
Dus we hebben het stochastische beslissingsprobleem I nu herformuleerd tot

$$\max \sum_j \sum_k q_j d_j^k r_j^k$$

onder de voorwaarden

II

$$\sum_k q_i\, d_i^k = \sum_j \sum_k q_j\, d_j^k\, p_{ji}^k$$

$$(7.14)\quad \begin{cases} \sum_i \sum_k q_i\, d_i^k = 1 \\ \sum_k d_i^k = 1 \\ q_i \geq 0,\ d_i^k = 0 \text{ of } 1,\ i \in S,\ k \in B(i) \end{cases}$$

We zien hieraan duidelijk dat het probleem niet lineair is, immers in de formulering komen de produkten $q_i\ d_i^k$ voor. Bovendien is het probleem gedeeltelijk geheeltallig: alle d_i^k zijn 0 of 1.
Definieer nu $q_i^k = q_i\ d_i^k$. We kunnen q_i^k interpreteren als de limietkans dat het systeem in toestand i zit en beslissing k wordt genomen. Substitueren we dit in het voorgaande mathematisch programmeringsprobleem dan krijgen we

III

$$\max \sum_j \sum_k q_j^k\, r_j^k$$

onder de voorwaarden

$$(7.15)\quad \begin{cases} \sum_k q_i^k = \sum_j \sum_k q_j^k\, p_i^k \\ \sum_i \sum_k q_i^k = 1 \\ q_i^k \geq 0 \end{cases}$$

In de voorwaarden (7.15) is ten opzichte van (7.14) een deel van de beperkingen verdwenen. Toch zijn, zoals we nog zullen zien, de problemen II en III equivalent in die zin dat beiden dezelfde maximale objectwaarden hebben.
Lossen we het lineaire programmeringsprobleem III op dan vinden we een optimale oplossing (x_i^k).
Definieer

$$x_i := \sum_k x_i^k$$

$$e_i^k := x_i^k/x_i \quad \text{als } x_i > 0$$

$$\text{willekeurig als } x_i = 0 \text{ (wel zodanig dat } \sum_k e_i^k = 1)$$

Beschouw nu de matrix P met elementen

$$p_{ij} = \sum_k e_i^k \, p_{ij}^k$$

Deze matrix P is natuurlijk irreducibel, immers zij $h^{(\infty)}$ een stationaire strategie met h(i) gelijk aan een van de k waarvoor $e_i^k > 0$ is voor alle $i \in S$ dan in P(h) al irreducibel. In de matrix P kunnen alleen maar meer elementen p_{ij} positief zijn, dus alleen maar meer bereikbaarheids- en verbondenheidsrelaties optreden dus ook P is irreducibel.
Vervolgens zien we dat (x_i) voldoet aan

$$\begin{cases} x_i = \sum_j x_j \, p_{ji} \\ \sum x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Dus (x_i) is de limietverdeling behorend bij de matrix P. P is irreducibel, dus $x_i > 0$ voor alle i en er bestaat dus ook voor elke i tenminste één k met $x_i^k > 0$.
Anderzijds is (x_i^k) ook een basisoplossing van probleem III en kunnen er dus niet meer elementen x_i^k positief zijn dan de rang van het stelsel nevenvoorwaarden (7.15). We hebben N+1 vergelijkingen maar de som van de eerste N vergelijkingen is een identiteit:

$$\sum_i \sum_k q_i^k = \sum_i \sum_j \sum_k q_j^k \, p_{ji}^k = \sum_j \sum_k q_j^k \sum_i p_{ji}^k = \sum_j \sum_k q_j^k$$

Laat daarom de vergelijking $\sum_k q_N^k = \sum_j \sum_k q_j^k \, p_{jN}$ in III weg.

Dus de rang is ten hoogste N. En elke basisopleiding bevat ten hoogste N variabelen die positief zijn. Zoals we al zagen is er voor elke toestand tenminste 1 x_i^k positief waarmee we al tenminste N positieve x_i^k hebben.
Resumerend:

Voor een optimale oplossing (x_i^k) van III geldt: voor elke i is er precies één k waarvoor $x_i^k > 0$. Dus de set (e_i^k) heeft ook voor elke i precies 1 k die positief is en zelfs geldt er: $e_i^k = 0$ of 1 voor alle i en k en $\sum_k e_i^k = 1$ voor alle i. Daarmee correspondeert (e_i^k) dus met een stationaire strategie f^* met $f^*(i)$ gelijk aan die k waarvoor $e_i^k > 0$ is.

De objectwaarde van III corresponderend met (x_i^k) is juist

$$\sum_j \sum_k x_j^k \, r_j^k = \sum_j \sum_k x_j \, e_j^k \, r_j^k = \sum_j x_j \, r_j^{f*(i)}$$

En omdat - zoals we hiervoor al opmerkten - (x_j) de limiet verdeling is behorend bij de matrix P die dus juist gelijk is aan $P(f^*)$ is x_j dus de limiet verdeling behörende bij $P(f^*)$. Dus de objectwaarde van III behorend bij de optimale oplossing (x_i^k) is juist de gemiddelde opbrengst van de stationaire strategie $f^{*(\infty)}$. Omdat het direct duidelijk is dat we bij iedere stationaire strategie een toegelaten oplossing van III kunnen construeren is de strategie $f^{*(\infty)}$ dus ook een optimale oplossing voor probleem I. Met het (niet bewezen) resultaat dat er een stationaire strategie bestaat waarvoor de gemiddelde opbrengst optimaal is volgt nu

$$g(f^{*(\infty)}) = g^*.$$

Hoe kunnen we ook direct inzien dat de problemen I, II en III equivalent terwijl bij de overgang van II naar III toch de voorwaarde $d_i^k = 0$ of 1 is verdwenen? Door het weglaten van deze voorwaarde laten we feitelijk toe dat er met kansen d_i^k geloot wordt tussen de beslissingen $k \in B(i)$. Het zal dan ook duidelijk zijn dat we hier geen winst van mogen verwachten, zodat de optima gelijk zullen blijven.

Als we de voorwaarde: alle P(f) irreducibel verzwakken tot alle P(f) bevatten slechts een recurrente keten en eventueel nog een aantal doorgangstoestanden dan kunnen we dezelfde aanpak volgen als hierboven. Echter we kunnen niet meer constateren dat P irreducibel is, dus dat er voor alle i een k bestaat met $x_i^k > 0$. Het kan nu gebeuren dat er voor sommige i geldt $x_i^k = 0$ voor alle k en voor andere toestanden j er twee of meer k zijn met $x_j^k > 0$. In dat geval correspondeert (e_i^k) niet meer met een stationaire strategie, d.w.z. een strategie waarbij tussen acties geloot kan worden. Wel is deze strategie dan weer gemiddeld optimaal. En ook een stationaire strategie zonder menging die we hieruit kunnen maken door in elke toestand i een k kiezen waarvoor geldt $e_i^k > 0$ is weer gemiddeld optimaal.

Het geval dat P(f) meerdere recurrente ketens bevat is aanzienlijk ingewikkelder.

Ook bestaat er voor het gemiddelde criterium weer een policy iteration methode waarmee een gemiddeld optimale stationaire strategie bepaald kan worden. Voor het geval van slechts een recurrente keten is ook de methode van de successieve approximaties nog goed toepasbaar mits de matrices P(f) alle aperiodieke zijn.