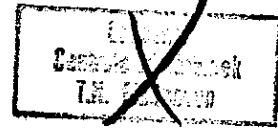




Technische Hogeschool  
Eindhoven  
Dictaatnummer 2.249  
Prijs f. 7,50

*Bijl. Mag*

# Onderafdeling der Wiskunde en Informatica



A T C  
0 1  
T H E

## Besliskunde

Syllabus naar het college van prof.dr. J. Wessels

Wij verzoeken U, dit collegedictaat  
niet mee te nemen buiten de leeszaal  
en het na lezing terug te leggen op  
de ladenkasten. Dank U.

2.249

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## **BESLISKUNDE**

Syllabus naar het college van

**Prof. Dr. J. Wessels**

samengesteld door

**Drs. E.E.C. van Damme**

**Voorjaarssemester 1983**

8109954

BIBLIOTHEEK  
T. H. EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

BESLISKUNDE

Syllabus naar het college van Prof. dr. J. Wessels

Samengesteld door drs. E.E.C. van Damme

Voorjaarssemester 1983

dec 83

# Inhoudsbeschrijving

## BESLISKUNDE

Voorjaarssemester 1983

paragrafen	blz
INLEIDING	i
I. LINEAIRE PROGRAMMERING	1.1
1.1. Inleiding	1.1
1.2. Oplossing van een L.P.-probleem: de simplexmethode	1.6
1.3. Postoptimale analyse en dualiteit	1.17
1.4. Slotopmerkingen	1.24
II. VOORRAADBEHEER EN PRODUCTIEPLANNING	2.1
2.1. Constante (en deterministische) vraag; continue tijd	2.1
2.2. Meerdere producten op dezelfde machine	2.6
2.3. Eén product op meerdere machines	2.10
2.4. Variabele vraag, discrete tijd. De methode van Wagner en Whitin	2.14
2.5. Stochastische vraag; startkosten: $K = 0$	2.20
2.6. Startkosten: $K > 0$	2.29
Voorbeelden van optimalisering in lineaire regelsystemen	2.35
III. SPELTHEORIE	3.1
3.1. Inleiding	3.1
3.2. Voorbeelden	3.2
3.3. Spelen in uitgebreide vorm met perfecte informatie	3.9
3.4. Nul-som spelen en niet nulsom spelen	3.13
3.5. Nul-som spelen met niet-perfecte informatie	3.21
IV. UTILITY THEORIE	4.1

## Inleiding

In de mathematische besliskunde houdt men zich bezig met het ontwerpen en analyseren van wiskundige modellen van beslissingssituaties. Ruwweg kan men een beslissingssituatie als volgt omschrijven :

Gegeven is een persoon (de beslisser) en een systeem. De beslisser heeft een verschillende waardering over de mogelijke eindtoestanden van het systeem en kan de evolutie van het systeem beïnvloeden. Het is mogelijk dat hij volledige controle over het systeem heeft, maar misschien spelen ook toevalselementen een rol; eventueel wordt de evolutie mede bepaald door een aantal andere personen die ook elk een preferentiepatroon (mogelijk verschillend van dat van eerstgenoemde beslisser) over de eindtoestanden hebben.

De besliskundige adviseert wat personen die zich in zó'n beslissingssituatie bevinden het beste zouden kunnen doen. Besliskunde is dus een normatieve tak van de wetenschap en houdt zich niet bezig met de vraag hoe mensen in beslissingssituaties handelen. Deze normatieve aanpak is in feite pas vrij recent ontstaan; ondermeer de problematiek van de geallieerden in de tweede wereldoorlog heeft tot het ontstaan van het vak bijgedragen. Uit die tijd stamt ook de Amerikaanse naam voor het vak : Operations Research (O.R.). Aan de gegeven beschrijving zien we dat we beslissingssituaties op verschillende manieren kunnen indelen :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| i) één beslisser<br>(voorraad- en productieproblemen, patience)   | ↔ | meerdere beslissers<br>(schaken, stemmingen in de 2e kamer)   |
| ii) deterministisch<br>(de uitwerking van elke actie op het systeem is volledig bekend, bijv. schaken)  | ↔ | stochastisch<br>(het toeval speelt een rol, bijv. bridge)   |
| iii) statisch<br>(er hoeft slechts 1 keer een beslissing genomen te worden, bijv. onder welke hoek moet men een kogel afschieten opdat deze op de gewenste plaats terecht komt) | ↔ | dynamisch<br>(er moet een rij beslissingen genomen worden; bijv. het wekelijks aanvullen van een bepaalde voorraad) |

In hoofdstuk 1 behandelen we statische deterministische beslissingssituaties waarin slechts 1 beslisser een rol speelt. Deze situaties zijn te herleiden tot mathematische programmeringsproblemen. Dit zijn problemen waarbij een functie gemaximaliseerd moet worden onder zekere nevenvoorwaarden.

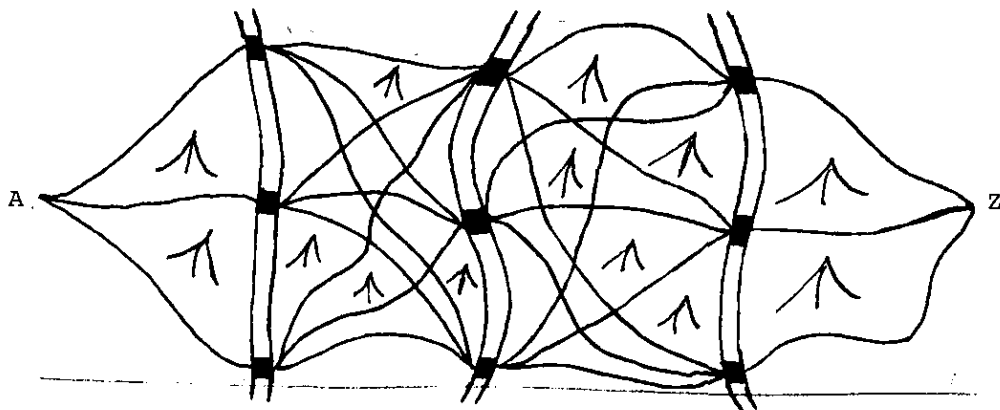
In hoofdstuk 2 beschouwen we 1-persoons dynamische beslissingssituaties. Zowel deterministische als stochastische modellen komen aan de orde. In het eerste gedeelte beschouwen we situaties waarin slechts op discrete tijdstippen bestuurd kan worden; in het tweede gedeelte situaties met continue besturing. In hoofdstuk 3 komen beslissingssituaties met meerdere beslissers aan de orde. Deze kunnen i.h.a. een dynamische en stochastisch karakter hebben. We concentreren ons daarbij op situaties met twee beslissers die volstrekt tegengestelde belangen hebben (2-persoons nul-som spelen). In hoofdstuk 4 tenslotte, houden we ons bezig met de vraag aan welke voorwaarden een preferentiepatroon moet voldoen, opdat er een functie is (een zgn. utility functie) die dit preferentiepatroon volledig beschrijft.

Voor al deze onderwerpen geldt dat er slechts een beknopte inleiding gegeven wordt. Een meer gedetailleerde behandeling vindt men in de verschillende colleges die binnen de vakgroep COSOR gegeven worden (zie voor het onderwerp utility theorie ook het college wiskundige economie).

Als besluit van deze inleiding geven we 2 voorbeelden waarin we de dynamische programmerings methode (ontwikkeld door R. Bellman) illustreren. Deze methode zullen we bij het oplossen van dynamische beslissingssituaties in verschillende vormen tegenkomen.

Voorbeeld 1 :

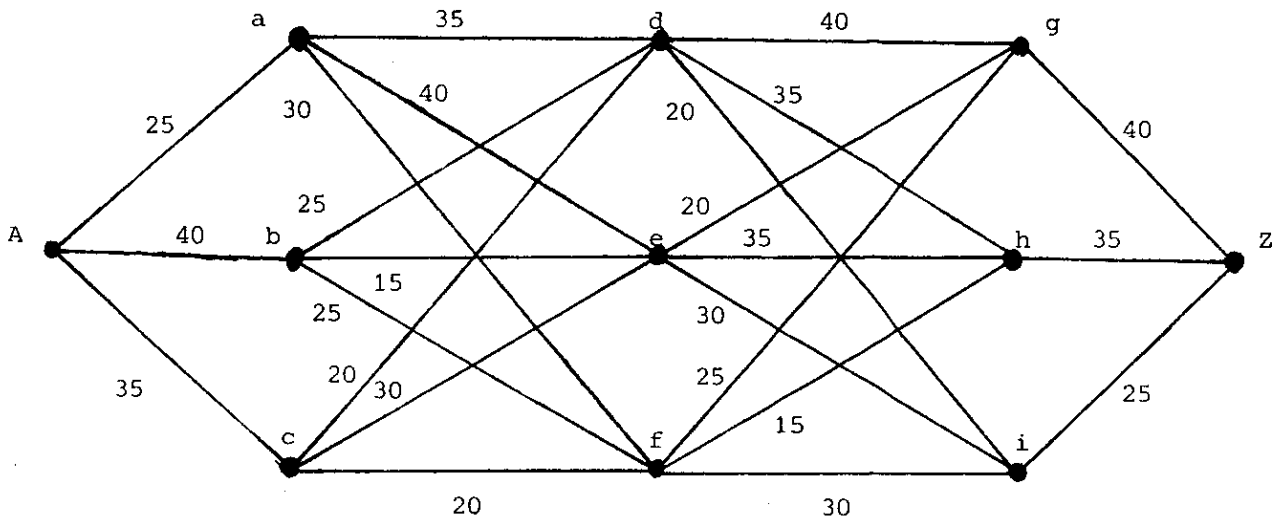
Een bergwandelaar wil zo snel mogelijk van een punt A naar een punt Z komen. Er is echter één probleem: om in Z te komen moet hij drie riviertjes oversteken zodat hij aangewezen is op de bruggen over deze rivieren



Op het oog is de snelste weg die over de drie middelste bruggen. In dit

bergachtige gebied is de kortste weg echter niet noodzakelijk ook de snelste weg.

We kunnen het probleem van de wandelaar als volgt weergeven :



Waarbij we langs elke tak de tijd in minuten hebben gezet die de wandelaar voor het betreffende traject nodig heeft.

Hoe bepalen we nu de snelste weg van A naar Z? Een methode is voor alle mogelijke paden van A naar Z de benodigde tijd te berekenen. (Ga na dat dit hier al 27 verschillende paden zijn.)

Een veel snellere methode is de volgende. In woorden: 'Bereken' eerst voor de punten g, h en i de snelste weg tot Z. Bepaal vervolgens de snelste route van d, e en f tot Z. Daarna de snelste weg van a, b en c tot Z gebruikmakend van het feit dat je de tijd benodigd voor de snelste weg van d, e en f tot Z al kent. En tenslotte de snelste weg van A naar Z waarbij je gebruik maakt van de al eerder bepaalde minimale tijden benodigd om van a, b en c in Z te komen.

We zullen de berekeningen hieronder uitvoeren.

Definieer voor  $s \in \{A, a, b, c, \dots, h, i\}$

$v(s) :=$  de minimale tijd benodigd om van s in Z te komen.

Het probleem is dus  $v(A)$  te bepalen en natuurlijk tevens het pad waarvoor de wandeltijd minimaal is.

Allereerst vinden we

$$v(g) = 40, v(h) = 35, v(i) = 25$$

Vervolgens bepalen we de snelste weg van d naar Z.

$$\begin{aligned}v(d) &= \min\{40 + v(g), 35 + v(h), 20 + v(i)\} \\ &= \min\{40 + 40, 35 + 35, 20 + 25\} = 45\end{aligned}$$

Dus de snelste weg van d tot Z kost 45 minuten en loopt via brug i.  
Analoog vinden we de snelste weg van e naar Z.

$$\begin{aligned}v(e) &= \min\{20 + v(g), 35 + v(h), 30 + v(i)\} \\ &= \min\{20 + 40, 35 + 35, 30 + 25\} = 55\end{aligned}$$

Snelste weg dus 55 minuten, via brug i.

En

$$\begin{aligned}v(f) &= \min\{25 + v(g), 15 + v(h), 30 + v(i)\} \\ &= \min\{25 + 40, 15 + 35, 30 + 25\} = 50\end{aligned}$$

Dus de snelste weg loopt via brug h en kost 50 minuten.

Het bepalen van de snelste weg van a, b en c naar Z verloopt nu analoog:

Er geldt

$$\begin{aligned}v(a) &= 80 && \text{(via d of via f)} \\ v(b) &= 70 && \text{(via d of via e)} \\ v(c) &= 65 && \text{(via d)}\end{aligned}$$

Tenslotte kunnen we nu de snelste weg van A naar Z bepalen.

Er geldt

$$v(A) = 100 \quad \text{(via c)}$$

Zodat we vinden dat de snelste weg van A naar Z 100 minuten kost en loopt via de bruggen c, d en i.

We hebben bij deze berekeningen gebruik gemaakt van het feit dat, als we een snelste route van A naar Z hebben die via brug s loopt, ook de deelroute van s naar Z de snelst mogelijke is (overigens geldt hetzelfde voor de route van A naar s).

Deze eigenschap, dat deelpaden van optimale paden ook weer optimaal zijn,



staat bekend als het optimaliteitsprincipe van Bellman. En het is juist deze eigenschap die ons in staat stelde de snelste weg van A naar Z op de bovenstaande wijze te bepalen.

Voorbeeld 2: Een spel

Twee spelers ( $P_1$  en  $P_2$ ) spelen het volgende spel.  $P_1$  begint. Hij schrijft (duidelijk zichtbaar voor  $P_2$ ) het getal 1 of 2 op. Vervolgens komt  $P_2$  aan de beurt. Hij schrijft (zichtbaar voor  $P_1$ ) het getal 3 of 4 op. Tenslotte komt  $P_1$  nogmaals aan de beurt: hij kan 5 of 6 opschrijven. Zij  $s$  de som van de opgeschreven getallen. De regels van het spel leggen de volgende uitbetaling vast:

Als  $s$  oneven is en  $P_1$  schrijft 5 op, dan ontvangt  $P_1$  een bedrag  $\frac{1}{2}(s-3)$  en  $P_2$  ontvangt  $\frac{1}{2}(s+3)$ . We noteren dit schematisch als:

$$s \text{ oneven, } P_1 : 5 \Rightarrow (\frac{1}{2}(s-3), \frac{1}{2}(s+3))$$

Bovendien geldt:

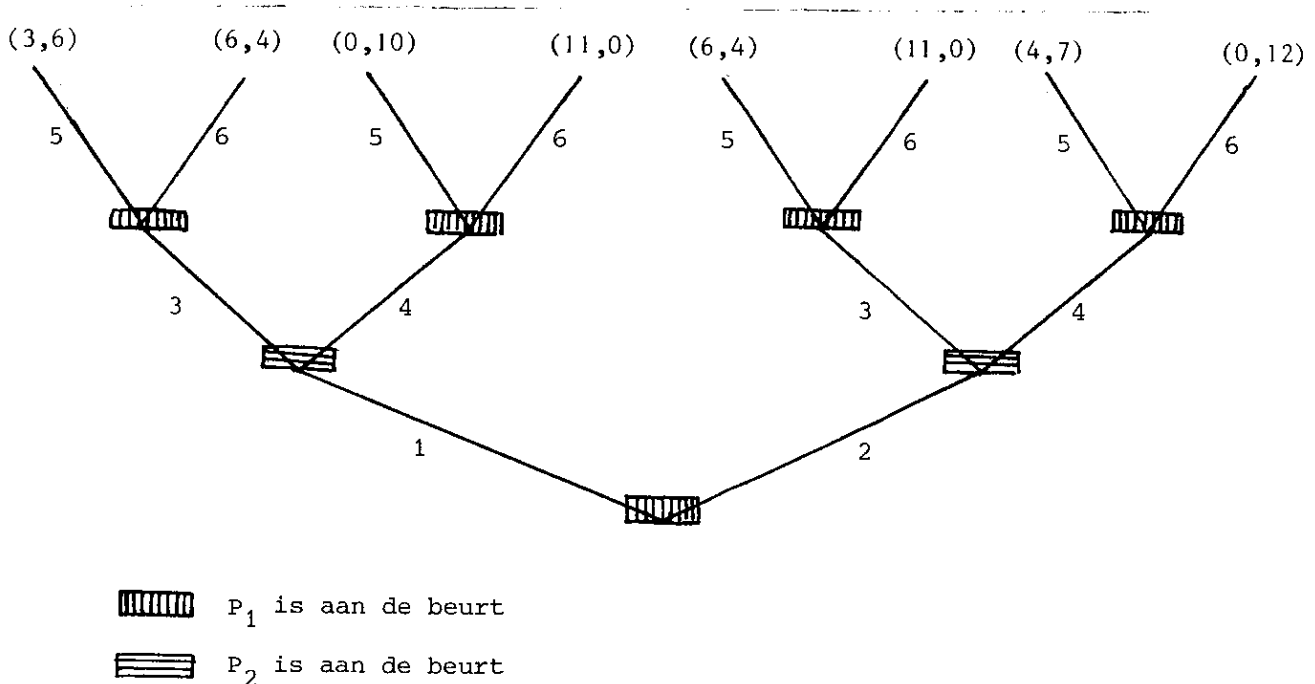
$$s \text{ oneven, } P_1 : 6 \Rightarrow (s, 0)$$

$$s \text{ even, } P_2 : 3 \Rightarrow (\frac{1}{2}(s+2), \frac{1}{2}(s-2))$$

$$s \text{ even, } P_2 : 4 \Rightarrow (0, s)$$

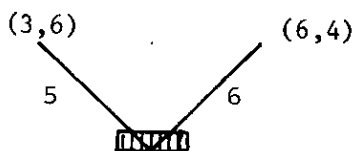
De vraag is nu: hoe moeten beide spelers handelen? Om deze vraag te beantwoorden maken we een diagram waarin we alle mogelijke spelverlopen weer-geven.

Dit is de zogenaamde spelboom.



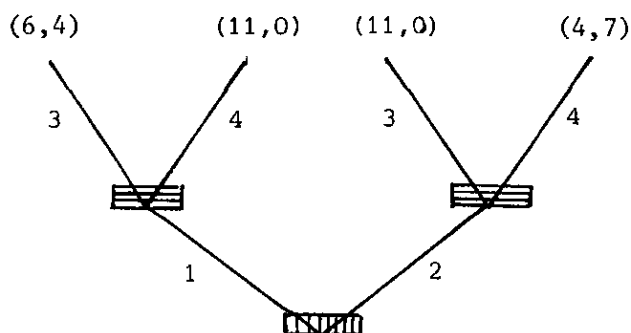
Oplossing m.b.v. dynamische programmering gaat als volgt:

Als  $P_1$  de eerste keer 1 gedaan heeft en  $P_2$  deed 3 dan is het resterende probleem voor  $P_1$ :



en dus zal  $P_1$  dan 6 kiezen.

Op dezelfde manier kunnen we nagaan wat  $P_1$  zal doen op de andere plaatsen in de boom waar hij voor de tweede keer aan de beurt is. Gegeven dat  $P_1$  steeds het optimale zal kiezen, kunnen we de oorspronkelijke boom reduceren tot:

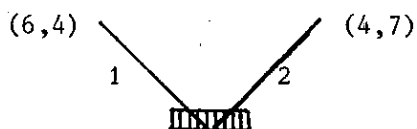


We zien:

Als  $P_1$  1 kiest, dan kiest  $P_2$  3.

Als  $P_1$  2 kiest, dan kiest  $P_2$  4.

We kunnen de boom verder reduceren tot



En dus zal  $P_1$  beginnen met 1 te kiezen. Als beide spelers optimaal spelen is de winst voor  $P_1$  6 en de winst voor  $P_2$  4.

## I. Lineaire programmering

### 1.1. Inleiding

Problemen als "bepaal het maximum (minimum) van een zekere functie" komen vaak voor, zowel in de zuivere als in de toegepaste wiskunde. Vooral in economische toepassingen komen deze vragen op een natuurlijke manier naar voren: Firma's willen opbrengsten maximaliseren of kosten minimaliseren. De lineaire programmering houdt zich bezig met een klasse van maximaliseringsproblemen die erg vaak in de (bedrijfs-) economie voorkomen. Om een gevoel te krijgen voor het soort problemen bekijken we eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 1.1.: Produktieplanning in een staalwalserij.

Overgenomen uit: A. Kaufmann, Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle I, blz. 33, 1959, Dunod, Parijs (studiebibliotheek BSK).

#### Probleemstelling:

In een walserij heeft men de beschikking over drie series walsen: A, B en C (in deze volgorde genummerd van 1 tot en met 3).

Elk van deze "machines" walst blokken tot platen.

De walserij vervaardigt platen van de volgende dichtheden:

5/10, 6/10, 8/10, 10/10, 12/10, 14/10, 16/10, 18/10, 20/10, 22/10, 24/10, 26/10, 28/10 en 30/10 (in deze volgorde genummerd van 1 tot en met 14).

Voor de maand M wil men een produktieprogram opstellen aan de hand van de volgende - berekende en geschatte - grootheden (zie tabel 1.1, blz. 1.2):

- 1) De verwerkingskosten van het staal zijn afhankelijk van het soort produkt en de voor de produktie van die soort gebruikte walsgroep.  
(Notatie:  $c_{ij}$ ;  $i = 1, 2, 3$  en  $j = 1, 2, \dots, 13, 14$ ).
- 2) De produktiesnelheid (in tonnen per uur) is ook afhankelijk van het soort produkt en de gebruikte walsgroep.  
(Notatie:  $d_{ij}$ ;  $i = 1, 2, 3$  en  $j = 1, 2, \dots, 13, 14$ ).
- 3) De in maand M voor elk der walsgroepen beschikbare produktie-uren.  
(Notatie:  $b_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ ).
- 4) Bekend zijn ook de in maand M van elke soort plaatijzer te produceren hoeveelheden.  
(Notatie:  $p_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, 13, 14$ ).

Het produktieprogram wil men nu zo bepalen, dat de totale verwerkingskosten minimaal zijn.

Tabel 1.1.

Pro-duit		5/10	6/10	8/10	10/10	12/10	14/10	16/10	18/10	20/10	22/10	24/10	26/10	28/10	30/10	Capa- cités limites
(1)	A	5 454 F	5 095 F	6 025 F	6 025 F	4 600 F	4 125 F	4 125 F	3 958 F	3 980 F	4 175 F	4 430 F	4 430 F			600 h
(2)	B	10 422 F	9 637 F	9 333 F	8 620 F	8 540 F	8 500 F	8 440 F	8 420 F	8 380 F	8 310 F	8 310 F	8 270 F	8 270 F	8 270 F	600 h
(3)	C				12 430 F	11 010 F	10 400 F	10 150 F	10 150 F							400 h
Prévi- sions glo- ba- les		5 000 t	2 200 t	5 100 t	5 000 t	4 200 t	3 000 t	2 000 t	1 300 t	750 t	500 t	500 t	250 t	100 t	100 t	

A	20,7	23,8	40	40	30	40	40	45,3	44,5	38,7	36	36		
B	7,2	8,6	9,3	11,5	11,8	12	12,2	12,3	12,5	12,8	12,8	13	13	13
C				9	12	14	15	15						

(Débits, en tonnes par heure)

788	2 200	5 100	5 000	389	3 000	2 000	1 300	750	500	500	250		
4212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	100
			0	3811	0	0	0						

AFFECTIONS CORRESPONDANT A L'OPTIMUM (nombres arrondis à la tonne)

Valeur minimum du coût total = 199 822 700 F. Ecart de capacité:  $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = 82,5$  h.

Tabel 1.2.

LES CONTRAINTES MATHÉMATIQUES

$$\frac{x_{11}}{20,7} + \frac{x_{12}}{23,8} + \frac{x_{13}}{40} + \frac{x_{14}}{40} + \frac{x_{15}}{30} + \frac{x_{16}}{40} + \frac{x_{17}}{40} + \frac{x_{18}}{45,3} + \frac{x_{19}}{44,5} + \frac{x_{1,10}}{38,7} + \frac{x_{1,11}}{36} + \frac{x_{1,12}}{36} \leq 600$$

$$\frac{x_{21}}{7,2} + \frac{x_{22}}{8,6} + \frac{x_{23}}{9,3} + \frac{x_{24}}{11,5} + \frac{x_{25}}{11,8} + \frac{x_{26}}{12} + \frac{x_{27}}{12,2} + \frac{x_{28}}{12,3} + \frac{x_{29}}{12,5} + \frac{x_{2,10}}{12,8} + \frac{x_{2,11}}{12,8} + \frac{x_{2,12}}{13} + \frac{x_{2,13}}{13} + \frac{x_{2,14}}{13} \leq 600$$

$$\frac{x_{34}}{9} + \frac{x_{25}}{12} + \frac{x_{26}}{14} + \frac{x_{27}}{15} + \frac{x_{28}}{15} \leq 400$$

$$x_{11} + x_{21} = 5 000$$

$$x_{12} + x_{22} = 2 200$$

$$x_{13} + x_{23} = 5 100$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5 000$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 4 200$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 3 000$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} = 2 000$$

$$x_{18} + x_{28} + x_{38} = 1 300$$

$$x_{19} + x_{29} = 750$$

$$x_{1,10} + x_{2,10} = 500$$

$$x_{1,11} + x_{2,11} = 500$$

$$x_{1,12} + x_{2,12} = 250$$

$$x_{2,13} = 100$$

$$x_{2,14} = 100$$

LA FONCTION ECONOMIQUE

$$z = 5 454 x_{11} + 5 095 x_{12} + 6 025 x_{13} + 6 025 x_{14} + 4 600 x_{15} + 4 125 x_{16} + 4 125 x_{17} + 3 958 x_{18} + 3 980 x_{19} + 4 175 x_{1,10} + 4 430 x_{1,11} + 4 430 x_{1,12} + 10 422 x_{21} + 9 637 x_{22} + 9 333 x_{23} + 8 620 x_{24} + 8 540 x_{25} + 8 500 x_{26} + 8 440 x_{27} + 8 420 x_{28} + 8 380 x_{29} + 8 310 x_{2,10} + 8 310 x_{2,11} + 8 270 x_{2,12} + 8 270 x_{2,13} + 8 270 x_{2,14} + 12 430 x_{34} + 11 010 x_{35} + 10 400 x_{36} + 10 150 x_{37} + 10 150 x_{38}$$

L'OPTIMUM

$$z = 199 822 700 \text{ francs.}$$

Tabel 1.1.

Pro-duit	5/10	6/10	8/10	10/10	12/10	14/10	16/10	18/10	20/10	22/10	24/10	26/10	28/10	30/10	Capa- cités limites
(1) A	5 454 F	5 095 F	6 025 F	6 025 F	4 600 F	4 125 F	4 125 F	3 958 F	3 980 F	4 175 F	4 430 F	4 430 F	/	/	600 u
(2) B	10 422 F	9 637 F	9 333 F	8 620 F	8 540 F	8 500 F	8 440 F	8 420 F	8 380 F	8 310 F	8 310 F	8 270 F	8 270 F	8 270 F	600 h
(3) C	/	/	/	12 430 F	11 010 F	10 400 F	10 150 F	10 150 F	/	/	/	/	/	/	400 h
Prévi- sions glo- bales	5 000 t	2 200 t	5 100 t	5 000 t	4 200 t	3 000 t	2 000 t	1 300 t	750 t	500 t	500 t	250 t	100 t	100 t	

A	20,7	23,8	40	40	30	40	40	45,3	44,5	38,7	36	36	/	/
B	7,2	8,6	9,3	11,5	11,8	12	12,2	12,3	12,5	12,8	12,8	13	13	13
C	/	/	/	9	12	14	15	15	/	/	/	/	/	/

(Débits, en tonnes par heure)

788	2 200	5 100	5 000	389	3 000	2 000	1 300	750	500	500	250	/	/
4212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	100
/	/	/	0	3811	0	0	0	/	/	/	/	/	/

AFFECTIIONS CORRESPONDANT A L'OPTIMUM (nombres arrondis à la tonne)  
Valeur minimum du coût total = 199 822 700 F. Ecart de capacité:  $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = 82,5$  h.

Tabel 1.2.

LES CONTRAINTES MATHÉMATIQUES

$$\frac{x_{11}}{20,7} + \frac{x_{12}}{23,8} + \frac{x_{13}}{40} + \frac{x_{14}}{40} + \frac{x_{15}}{30} + \frac{x_{16}}{40} + \frac{x_{17}}{40} + \frac{x_{18}}{45,3} + \frac{x_{19}}{44,5} + \frac{x_{1,10}}{38,7} + \frac{x_{1,11}}{36} + \frac{x_{1,12}}{36} \leq 600$$

$$\frac{x_{21}}{7,2} + \frac{x_{22}}{8,6} + \frac{x_{23}}{9,3} + \frac{x_{24}}{11,5} + \frac{x_{25}}{11,8} + \frac{x_{26}}{12} + \frac{x_{27}}{12,2} + \frac{x_{28}}{12,3} + \frac{x_{29}}{12,5} + \frac{x_{2,10}}{12,8} + \frac{x_{2,11}}{12,8} + \frac{x_{2,12}}{13} + \frac{x_{2,13}}{13} + \frac{x_{2,14}}{13} \leq 600$$

$$\frac{x_{31}}{9} + \frac{x_{32}}{12} + \frac{x_{33}}{14} + \frac{x_{34}}{15} + \frac{x_{35}}{15} \leq 400$$

$$x_{11} + x_{21} = 5 000$$

$$x_{12} + x_{22} = 2 200$$

$$x_{13} + x_{23} = 5 100$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5 000$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 4 200$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 3 000$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{37} = 2 000$$

31 variables

$$x_{18} + x_{28} + x_{38} = 1 300$$

17 équations ou inéquations

$$x_{19} + x_{29} = 750$$

$$x_{1,10} + x_{2,10} = 500$$

$$x_{1,11} + x_{2,11} = 500$$

$$x_{1,12} + x_{2,12} = 250$$

$$x_{2,13} = 100$$

$$x_{2,14} = 100.$$

LA FONCTION ECONOMIQUE

$$z = 5 454 x_{11} + 5 095 x_{12} + 6 025 x_{13} + 6 025 x_{14} + 4 600 x_{15} + 4 125 x_{16} + 4 125 x_{17} + 3 958 x_{18} + 3 980 x_{19} + 4 175 x_{1,10} + 4 430 x_{1,11} + 4 430 x_{1,12} + 10 422 x_{21} + 9 637 x_{22} + 9 333 x_{23} + 8 620 x_{24} + 8 540 x_{25} + 8 500 x_{26} + 8 440 x_{27} + 8 420 x_{28} + 8 380 x_{29} + 8 310 x_{2,10} + 8 310 x_{2,11} + 8 270 x_{2,12} + 8 270 x_{2,13} + 8 270 x_{2,14} + 12 430 x_{31} + 11 010 x_{32} + 10 400 x_{33} + 10 150 x_{34} + 10 150 x_{35}$$

L'OPTIMUM

$$z = 199 822 700 \text{ francs}$$

Het wiskundig model:

notatie:  $x_{ij}$  is de op walsgroep  $i$  te produceren hoeveelheid plaatijzer van soort  $j$ ;  $i = 1, 2, 3$  en  $j = 1, 2, 3, \dots, 13, 14$ .

Bovenstaand probleem is nu eenvoudig wiskundig te formuleren (zie schema 1.2, blz. 1.2):

de totale verwerkingskosten zijn te schrijven als:

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{14} c_{ij} x_{ij} .$$

De variabelen  $x_{ij}$  moeten voldoen aan de volgende ongelijkheden, resp. gelijkheden:

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^{14} x_{ij} / d_{ij} \leq b_i \quad i = 1, 2, 3$$

als gevolg van de beperking in aantal productie-uren.

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^3 x_{ij} = p_j \quad j = 1, 2, \dots, 13, 14$$

als gevolg van het feit dat van soort  $j$ ,  $p_j$  ton plaatijzer geproduceerd moet worden.

$$(1.4) \quad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 14.$$

Het probleem is nu:

Bepaal de  $x_{ij}$  zo, dat aan de beperkingen (1.2), (1.3) en (1.4) voldaan wordt en de totale verwerkingskosten (1.1) minimaal zijn.

Opmerking 1:  $V := \{(i, j) \mid \text{soort plaatijzer } j \text{ wordt niet gemaakt op walsgroep } i\}$ . In de sommaties dient men de termen met  $(i, j) \in V$  niet mee te nemen.

Opmerking 2: Door het invoeren van drie zgn. slackvariabelen  $\lambda_1, \lambda_2$  en  $\lambda_3$ , zijn de drie ongelijkheden tot gelijkheden te maken:

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^{14} x_{ij} / d_{ij} + \lambda_i = b_i \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

$\lambda_i$  is het aantal uren, dat machine  $i$  onbezet is.

tabel 1.3.

HET PROBLEEM VAN DE PLAATWALSERIJ IN MATRIX - VORM.

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$	$x_{19}$	$x_{20}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	$x_{26}$	$x_{27}$	$x_{28}$	$x_{29}$	$x_{30}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{36}$	$x_{37}$	$x_{38}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Rechter- ledem.																														
$1/20$	$23.8$	$1/40$	$1/40$	$1/30$	$1/40$	$1/40$	$1/45.2$	$1/44.5$	$1/38.7$	$1/36$	$1/7.2$	$1/3.6$	$1/9.2$	$1/11.8$	$1/12$	$1/2.4$	$1/2.3$	$1/2.5$	$1/12.8$	$1/15.8$	$1/13$	$1/13$									600																														
																															600																														
																															400																														
																															5000																														
																															2000																														
																															5100																														
																															5000																														
																															4200																														
																															3000																														
																															2600																														
																															1300																														
																															750																														
																															500																														
																															500																														
																															250																														
																															100																														
																															100																														
te minimaliseren functie:																																																													
5454	5395	625	605	4600	4125	3980	4175	4430	4430	10422	9637	9333	8620	6540	5500	6440	8420	8380	8310	8270	8270	12430	11610	10460	10150	10150	10150																																		

$$\sum_{j=1}^{14} x_{1j}/a_{1j} + \lambda_1 = b_1 \quad (1 = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{j=1}^{14} x_{1j} = \bar{x}_3 \quad (j = 1, \dots, 14)$$

objectfunctie:  
 $\sum_{j=1}^{14} c_j x_{1j} + c_{14}$

In tabel (1.3) is het probleem  
 minimaliseer (1.1)  
 onder de voorwaarden (1.3), (1.4) en (1.5)  
 in matrixvorm weergegeven

De optimale oplossing van het walserij probleem is weergegeven in tabel 1.1. Een eenvoudige berekening leert dat

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 82,5.\end{aligned}$$

Intuitief is duidelijk dat machine A volledig bezet zal zijn: de verwerkingskosten zijn lager dan die van machine B of C.

De optimale oplossing krijgt men niet door intuïtieve redeneringen: bijv. waarom  $x_{2,1} \neq 0$  terwijl  $c_{2,1}$  zo groot is?

In het wiskundige model van voorbeeld 1.1 moet een lineaire functie geminimaliseerd worden onder lineaire bijvoorwaarden. Problemen waarbij een lineaire functie geoptimaliseerd (dwz. gemaximaliseerd of geminimaliseerd) moet worden onder lineaire bijvoorwaarden noemt men lineaire programmeringsproblemen (L.P. - problemen). Deze problemen kan men herleiden tot wiskundige modellen van de vorm:

$$(1.6) \quad \max \{c^T x, x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$$

hierin is  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , A een  $m \times n$  matrix en  $c^T x$  het inproduct van c en x;  $x \geq 0$  betekent: alle componenten van x zijn niet negatief.

We zullen de vorm in (1.6) de standaardvorm van een L.P.-probleem noemen.

Voor het probleem (1.6) noemen we:

$x \in \mathbb{R}^n$  een toegelaten oplossing als

$$Ax = b \text{ en } x \geq 0.$$

We noemen x een optimale oplossing als x een toegelaten oplossing is en onder de toegelaten oplossingen  $c^T x$  maximaliseert.



Voorbeelden van (bedrijfs-) economische situaties waarin L.P. succesvol is toegepast zijn:

planning bij het mengen van veevoeders,  
planning bij olieraffinaderijen,  
transportproblemen.

In dit college wordt slechts een beknopte inleiding in de lineaire programmering gegeven. Voor een gedetailleerde behandeling verwijzen we naar het college Optimaliseringsmethoden I.

Literatuur: het genoemde boek van A. Kaufmann,

S.I. Gass, Linear programming, 1969 (studiebibl. WSK).

G. Hadley, Linear programming, 1961 (studiebibl. WSK).

G.B. Dantzig, Linear programming and extensions, 1963,  
(studiebibl. WSK).

D. Gale, The theory of linear economic models, 1960  
(studiebibl. WSK).

### §1.2. Oplossing van een L.P.-probleem: de simplexmethode

In deze paragraaf illustreren we een methode om algemene l.p.-problemen op te lossen (de simplexmethode ontwikkeld door G.B. Dantzig) aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 2.1.: Van een bepaald produkt worden 2 versies gemaakt: versie 1 voor de export en versie 2 voor de binnenlandse markt. Het produkt ondergaat 2 bewerkingen waarvan de eerste 50 manminuten kost per eenheid van de exportversie en 1 manuur per eenheid van de binnenlandse versie. De tweede bewerking kost voor de exportversie 1 manuur en voor de binnenlandse versie  $\frac{1}{2}$  manuur per eenheid. De exportversie ondergaat nog een derde bewerking die 1 manuur per eenheid kost. Voor de eerste bewerking zijn 1250 manuren per maand beschikbaar, voor de tweede 1000, voor de derde 800. Op de exportversie wordt een winst gemaakt van f12,50 per eenheid, op de binnenlandse een winst van f10,- per eenheid. De markt voor het produkt is nog lang niet verzadigd, zodat aangenomen mag worden dat de totale produktie ook inderdaad verkocht zal worden. De vraag is nu hoeveel eenheden er per maand van beide versies gemaakt moet worden.

Formulering als l.p.-probleem:

Noem  $x_1$  het aantal te produceren eenheden van de exportversie.

Noem  $x_2$  het aantal te produceren eenheden van de binnenlandse versie.

$x_1$  en  $x_2$  moeten voldoen aan de volgende beperkingen:

$$(2.1) \quad 5/6 x_1 + x_2 \leq 1250$$

$$(2.2) \quad x_1 + \frac{1}{2} x_2 \leq 1000$$

$$(2.3) \quad x_1 \leq 800$$

$$(2.4) \quad x_1 \geq 0$$

$$(2.5) \quad x_2 \geq 0$$

We moeten maximaliseren:

$$(2.6) \quad \frac{25}{2} x_1 + 10x_2 \quad (\text{dit heet wel: de doelfunctie})$$

Aangezien in dit probleem slechts 2 variabelen voorkomen, kunnen we het probleem grafisch oplossen.

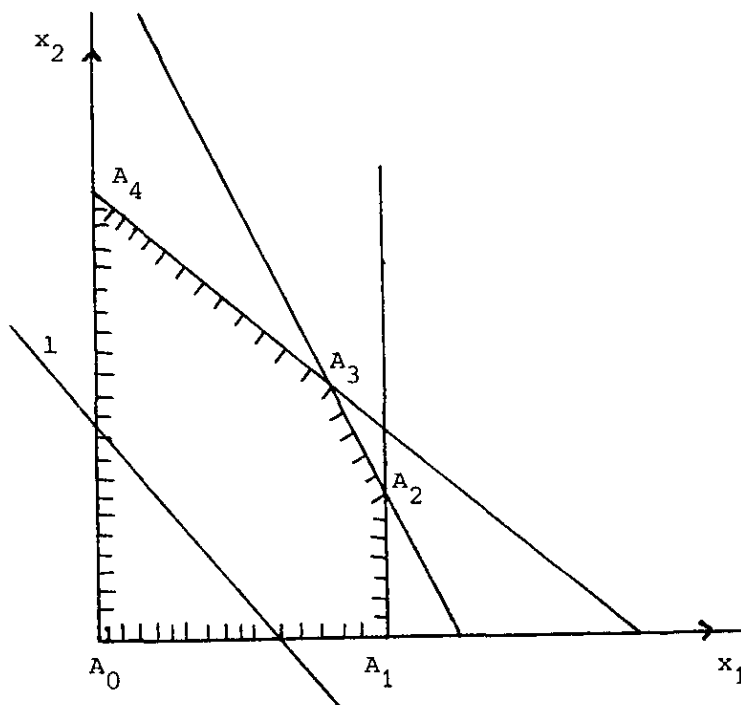


fig. 2.1

Zij  $M$  de verzameling van alle toegelaten oplossingen (de mogelijke produktieplannen).  $M$  is het gearceerde gebied in fig. 2.1. Alle punten van  $M$  die dezelfde winst opleveren liggen op een rechte  $\frac{25}{2}x_1 + 10x_2 = \text{const}$ , dus een lijn evenwijdig aan  $l$ .

Gevolg: we vinden het punt met de maximale winst door  $l$  zolang in noord-oostelijke richting op te schuiven tot deze  $M$  nog net raakt. Dat is in dit geval in het punt  $A_3$ .

In figuur 2.1 zien we:

(2.7)  $M$  is convex,

(2.8)  $M$  heeft eindig veel hoekpunten,

(2.9) het maximum van de doelfunctie wordt aangenomen in een hoekpunt van  $M$ .

De formele definities van de begrippen convex en hoekpunt zijn:

Een deelverzameling  $X$  van  $\mathbb{R}^n$  is convex als voor alle  $x, y \in X$ ,  $t \in [0, 1]$  geldt dat ook  $tx + (1 - t)y \in X$ .

Zij  $X$  een convexe verzameling en  $x \in X$ . Dan is  $x$  een hoekpunt van  $X$  als uit  $x = ty + (1 - t)z$  met  $t \in (0, 1)$ ,  $y, z \in X$  volgt dat  $y = x$ .

Voor grotere L.P.-problemen (meer variabelen) kan men een oplossing niet meer op deze grafische manier bepalen, we zijn dan aangewezen op een algebraïsche methode.

Men kan bewijzen dat voor algemene L.P.-problemen weer aan (2.7) en (2.8) voldaan is ( $M$  is de verzameling van alle toegelaten oplossingen). Bovendien geldt:

(2.10) als de doelfunctie een maximum aanneemt op  $M$ , dan is er ook een hoekpunt van  $M$ , waarin dit maximum wordt aangenomen.

Men kan zich daarom bij het zoeken naar een oplossing tot hoekpunten beperken. De vraag is nu: hoe kan men de hoekpunten van  $M$  op een algebraïsche manier karakteriseren. Welnu, bekijk nogmaals voorbeeld 2.1.

In standaardvorm (na invoering van de slackvariabelen  $x_3, x_4, x_5$ ) luidt dit probleem:

maximaliseer:

$$(2.11) \quad \frac{25}{2}x_1 + 10x_2$$

onder de voorwaarden:

$$(2.12) \quad \frac{5}{6} x_1 + x_2 + x_3 = 1250$$

$$(2.13) \quad x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_4 = 1000$$

$$(2.14) \quad x_1 + x_5 = 800$$

$$(2.15) \quad x_i \geq 0 \quad (i \in \{1, \dots, 5\})$$

Zij  $M'$  de verzameling van alle punten  $(x_1, \dots, x_5)$  die aan (2.12) t/m (2.15) voldoen. Er is een 1 - 1 correspondentie tussen de punten van  $M$  en  $M'$  en het is niet moeilijk in te zien dat geldt:

(2.16)  $(x_1, x_2)$  is een hoekpunt van  $M$  dan en slechts dan als  $(x_1, \dots, x_5)$  een hoekpunt van  $M'$  is.

De hoekpunten van  $M$  zijn die punten van  $M$  die op precies 2 begrenzende lijnen liggen, d.w.z. van de variabelen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  zijn er 2 gelijk aan 0 en 3 groter dan 0, dus:

(2.17)  $(x_1, \dots, x_5)$  is een hoekpunt van  $M'$  dan en slechts dan als er precies 3 (= het aantal vergelijkingen) coördinaten groter dan 0 zijn.

Voor een algemeen L.P.-probleem is een analoge bewering alleen juist als het probleem niet-ontaard is (zie 2.19 en 2.20). Algemeen geldt:

Stelling 2.18.  $x$  is een hoekpunt van  $M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  dan en slechts dan als aan de volgende twee voorwaarden voldaan is:

- i)  $x \in M$
- ii) de kolommen van  $A$  die corresponderen met positieve coördinaten van  $x$  vormen een lineair onafhankelijk stelsel.

We bewijzen deze stelling niet. Vanwege ii) noemt men oplossingen van

$$Ax = b, x \geq 0$$

die corresponderen met hoekpunten ook wel toegelaten basisoplossingen.

In het vervolg van deze paragraaf zullen we veronderstellen dat aan de volgende niet-ontaardheidsvoorwaarden voldaan is:

(2.19)  $n \geq m$ , rang (A) = m,

(2.20) b is niet te schrijven als een lineaire combinatie van minder dan m kolommen uit A.

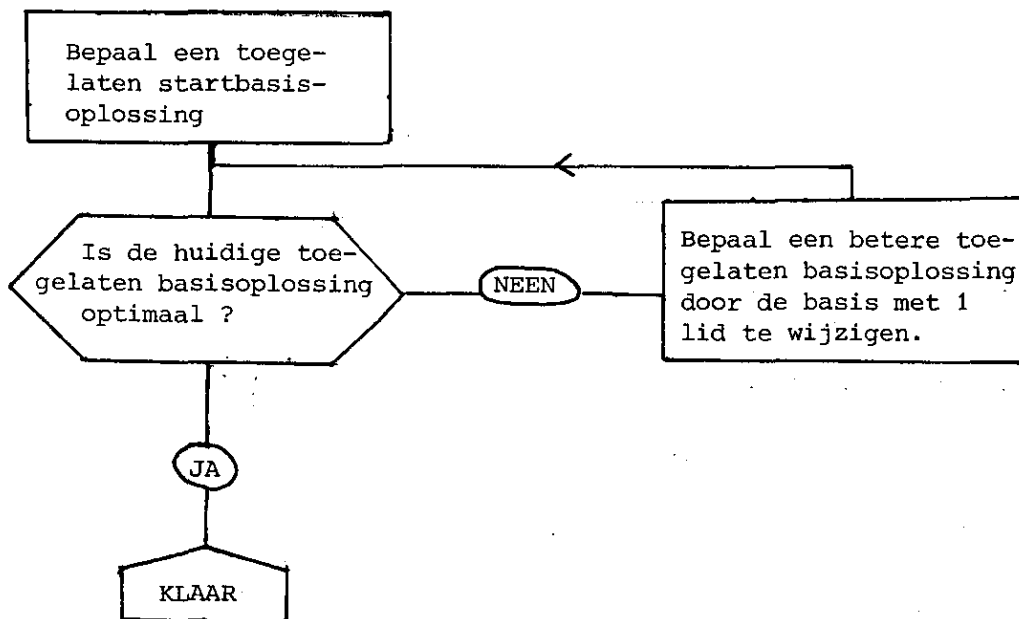
Merk op dat deze voorwaarden niet erg restrictief zijn:

- als niet aan (2.19) voldaan is, dan kan men een aantal vergelijkingen weglaten zonder M te veranderen, tot wel aan (2.19) voldaan is.
- als niet aan (2.20) voldaan is, dan kan men altijd een b' heel dicht bij b vinden die niet te schrijven is als lineaire combinatie van minder dan m kolommen uit A.

Een gevolg van deze aannames is:

Gevolg 2.21.: toegelaten basisoplossingen hebben precies m variabelen groter dan 0.

Het probleem is nu: vindt een groep van m variabelen die een toegelaten basisoplossing vormen en de doelfunctie maximaliseren. De simplexmethode bereikt dit op de manier zoals in het volgende blokschema is aangegeven:



(Met de basis is bedoeld: die variabelen die in de basisoplossing groter dan 0 zijn)

We illustreren de methode aan de hand van het probleem uit voorbeeld 2.1.

We schrijven eerst de vergelijkingen (2.12) t/m (2.14) wat compacter op:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$\frac{5}{6}$	1	1	0	0	1250
1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1000
1	0	0	0	1	800

Tableau 2.1.

We kunnen in Tableau 2.1 meteen een toegelaten basisoplossing aflezen:

$$x_3 = 1250$$

$$x_4 = 1000$$

$$x_5 = 800$$

De hierbij behorende winst  $w = 0$ .

Als we de winst  $w$  ook als variabele opnemen en de winstvergelijking

( $-\frac{25}{2}x_1 - 10x_2 + w = 0$ ) aan het tableau toevoegen krijgen we:

$x_1$	$x_2$	$x_3^*$	$x_4^*$	$x_5^*$	$w$	
$\frac{5}{6}$	1	1	0	0	0	1250
1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	1000
1	0	0	0	1	0	800
$-\frac{25}{2}$	-10	0	0	0	1	0

Tableau 2.2

(de \* geeft een huidige basisvariabele aan).

In tableau 2.2 zien we dat de huidige basisoplossing niet optimaal is. Immers elke eenheid waarmee  $x_1$  verhoogd wordt levert een winst van  $\frac{25}{2}$  op en elke eenheid waarmee  $x_2$  verhoogd wordt levert een winst van 10 op.

Laten we daarom proberen  $x_1$  in de basis op te nemen. Maar welk element van de huidige basis moet er dan uit? Aan de eerste vergelijking:

$$\frac{5}{6} x_1 + x_3 = 1250 \text{ (immers } x_2 \text{ blijft 0) zien we dat:}$$

$$x_3 \geq 0, \text{ als } x_1 \leq 1500.$$

Analoog:  $x_4 \geq 0, \text{ als } x_1 \leq 1000,$

en  $x_5 \geq 0, \text{ als } x_1 \leq 800.$

Dus: als we  $x_1$  ophogen tot 800, dan kunnen  $x_3$  en  $x_4$  in de basis behouden blijven. De nieuwe basis wordt  $\{x_1, x_3, x_4\}$ . Maar wat zijn de waarden van de variabelen bij deze basis? In tableau 2.1 konden we meteen de basisoplossing aflezen, omdat onder de basis een eenheidsmatrix (I) stond. Laten we daarom zorgen dat onder de huidige basis I komt te staan. We moeten dus de eerste kolom m.b.v. de derde rij schoonvegen. We krijgen:

$x_1^*$	$x_2$	$x_3^*$	$x_4^*$	$x_5$	w	
0	1	1	0	$-\frac{5}{6}$	0	583
0	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	0	200
1	0	0	0	1	0	800
$-\frac{25}{2}$	-10	0	0	0	1	0

Tableau 2.3

En we kunnen aflezen:

$$x_1 = 800$$

$$x_3 = 583$$

$$x_4 = 200$$

Bovendien geldt  $w = \frac{25}{2} \cdot 800 = 10.000.$

We zien dat we in fig. 2.1 vanuit  $A_0$  in  $A_1$  terecht gekomen zijn (met welke punten corresponderen  $x_1 = 1000$  en  $x_1 = 1500$ ?)

We moeten nu weer de vraag beantwoorden of deze basis optimaal is. Welnu, bekijk weer de winstvergelijking:

$$w = \frac{25}{2} x_1 + 10x_2 .$$

We mogen nu niet concluderen dat toename van  $x_2$  de winst zal doen toenemen, immers toename van  $x_2$  kan  $x_1$  doen afnemen. Willen we iets zinvols kunnen zeggen dan moeten we  $w$  uitdrukken in de niet-basisvariabelen (net zoals bij het starttableau). Maar dit betekent niets anders dan dat we ook de laatste rij in Tableau 2.3 moeten schoonvegen m.b.v. de derde rij (dit is precies de reden dat we de winstvergelijking aan het tableau hebben toegevoegd).

We krijgen:

$x_1^*$	$x_2$	$x_3^*$	$x_4^*$	$x_5$	$w$	
0	1	1	0	$-\frac{5}{6}$	0	583
0	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	0	200
1	0	0	0	1	0	800
0	-10	0	0	$\frac{25}{2}$	1	10.000

Tableau 2.4

Merk op (en verklaar) dat we rechtsonder in Tableau 2.4 precies de winst behorende bij de basis  $\{x_1, x_3, x_4\}$  kunnen aflezen. Bovendien zien we:

$$w = 10.000 + 10x_2 - \frac{25}{2} x_5 . \text{ Dus, door toename van } x_2 \text{ neemt } w \text{ toe.}$$

Hoe groot kunnen we  $x_2$  laten worden?

Vanwege de eerste beperking:  $x_2 \leq 583$

Vanwege de tweede beperking:  $x_2 \leq 400$

Vanwege de derde beperking : geen begrenzing

Conclusie: vervang in de basis  $x_4$  door  $x_2$ .



We zorgen dat er weer I onder  $\{x_1, x_2, x_3\}$  komt te staan en krijgen:

$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3^*$	$x_4$	$x_5$	w	
0	0	1	-2	$\frac{7}{6}$	0	183
0	1	0	2	-2	0	400
1	0	0	0	1	0	800
0	0	0	20	$-\frac{15}{2}$	1	14.000

Tableau 2.5

De bijbehorende oplossing is:

$$x_1 = 800$$

$$x_2 = 400$$

$$x_3 = 183$$

met een winst van  $w = 14.000$

We zien dat we in fig. 2.1 van  $A_1$  naar  $A_2$  zijn gegaan.

Aan de laatste rij in Tableau 2.5 zien we dat een verhoging van  $x_5$  de winst doet toenemen.

Verhoging van  $x_5$  is aan de volgende begrenzing onderhevig:

Vanwege de eerste beperking:  $x_5 \leq 183 \cdot \frac{6}{7} = 157$  (afgerond)

Vanwege de tweede beperking: geen bovengrens

Vanwege de derde beperking :  $x_5 \leq 800$

Conclusie: vervang in de basis  $x_3$  door  $x_5$ .

Het nieuwe Tableau wordt:

$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3$	$x_4$	$x_5^*$	w	
0	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{12}{7}$	1	0	157
0	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{10}{7}$	0	0	714
1	0	$-\frac{6}{7}$	$\frac{12}{7}$	0	0	643
0	0	$\frac{45}{7}$	$\frac{50}{7}$	0	1	15.178

Tableau 2.6

De bijbehorende basisoplossing is het punt  $A_3$  in fig. 2.1:

$$x_1 = 643$$

$$x_2 = 714$$

$$x_5 = 157$$

Met een winst van  $w = 15.178$ .

Aan de laatste rij in Tableau 2.6 zien we dat verbetering niet meer mogelijk is, dus deze basisoplossing is optimaal.

Opmerking 2.22. In fig. 2.1 zien we dat bij de eerste basisverandering keuze van  $x_2$  sneller tot het optimum had geleid.

Opmerking 2.23. We kunnen de simplexmethode doorvoeren zodra we een startoplossing hebben. Bij een probleem in de vorm

$$(2.24) \quad \max \{c^T x ; x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\},$$

met

$$(2.25) \quad b_i > 0 \text{ voor alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

kunnen we de slackvariabelen als startbasis nemen. Bij een algemeen probleem in de standaardvorm (1.6) kunnen we (via een trucje) een startbasisoplossing m.b.v. de simplexmethode bepalen. Laat nl.  $I$  de  $m \times m$  eenheidsmatrix zijn, en  $e$  de vector uit  $\mathbb{R}^m$  waarvan alle coördinaten 1 zijn.

Bekijk het probleem:

$$(2.26) \quad \min \{e^T y ; (A ; I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Zoals de lezer kan nagaan geldt:

- i) Als  $(\hat{x}, \hat{y})$  een optimale oplossing voor (2.26) is en  $e^T \hat{y} > 0$  dan heeft (1.6) geen toegelaten oplossingen.
- ii) Als  $(\hat{x}, \hat{y})$  een optimale basisoplossing voor (2.26) is en  $e^T \hat{y} = 0$  dan is  $\hat{x}$  een toegelaten basisoplossing voor (1.6).

2.24. Opmerkingen. De simplexmethode zoals wij deze gedemonstreerd hebben is slechts een grondvorm. Vele verfijningen van deze methode bestaan, o.a. methodes die zoveel mogelijk de (i.h.a. ijle) structuur van de matrix A (zoals in tabel 1.3) behouden.

Er bestaat ook een simplexmethode voor ontaarde problemen (d.w.z. er is niet aan 2.20 voldaan). In de praktijk komen deze ontaarde problemen echter niet voor.

Bij de moderne computersystemen is altijd een goed L.P.-programma beschikbaar dat i.h.a. problemen tot enkele duizenden beperkingen de baas kan.

In de praktijk blijkt de simplexmethode erg efficiënt te zijn: er zijn slechts relatief weinig iteraties nodig. Men kan echter pathologische voorbeelden maken waarbij alleen het hoekpunt dat laatst door de simplexmethode bezocht wordt optimaal is. (Theoretisch) is het worst-case behavior van de methode dus slecht. Van de zgn. ellipsoïde-methode (methode van Khachian, Soviet Math. Dokl. 20 (1979) 191-194) is het worst-case behavior veel beter (zie opmerkingen na 4.21).

Ruwweg werkt deze methode als volgt:

- i) Vanwege de dualiteitsstelling (3.2.13) is oplossing van een L.P.-probleem equivalent met het oplossen van een stelsel  $A'x \leq b'; x \geq 0$
- ii) Om de oplossingsverzameling van het stelsel wordt een ellipsoïde gelegd, vervolgens wordt gekeken aan welke kant van de ellipsoïde een oplossing ligt; dan wordt een nieuwe ellipsoïde geconstrueerd die deze oplossing bevat en half zo groot is als de eerste.
- iii) Het proces bij ii) herhaalt zich tot de diameter van de ellipsoïde voldoende klein is, en dus een oplossing met de gewenste nauwkeurigheid bepaald is.

3. Postoptimale analyse en dualiteit

1.3 tsch!

3.1. Postoptimale analyse

Bekijk nogmaals Tableau 2.6. In het optimale plan worden de beschikbare manuren voor de bewerkingen 1 en 2 volledig gebruikt, terwijl er voor de derde bewerking een capaciteitsoverschot is. Gevolg: Als er voor de derde bewerking 1 manuur meer beschikbaar is, dan is het plan uit Tableau 2.6 nog steeds optimaal. Als er echter voor de eerste of voor de tweede bewerking een extra manuur beschikbaar is, dan verandert het optimale plan en stijgt de winst (ga dit na in fig. 2.1). Maar hoeveel stijgt de winst als er voor de eerste bewerking 1 manuur meer beschikbaar is? Een toegelaten oplossing (als er voor de eerste bewerking 1251 manuren beschikbaar zijn) is:

$$x_1 = 643$$

$$x_2 = 714$$

$$x_3 = 1$$

$$x_5 = 157$$

Dit is echter geen basisoplossing. We krijgen een basisoplossing door  $x_1$  en  $x_2$  zodanig op te hogen dat  $x_3$  gelijk aan 0 wordt.

Dus: Toename van de capaciteit voor bewerking 1 met 1 eenheid, correspondeert met een afname van  $x_3$  met 1 eenheid. Aan de winstvergelijking

$w = 15.178 - \frac{45}{7}x_3 - \frac{50}{7}x_4$  zien we dat elke eenheid waarmee  $x_3$  afneemt een winst van  $\frac{45}{7}$  oplevert. Dus de firma uit voorbeeld 2.1 is bereid extra

manuren voor de bewerking 1 te kopen tegen een maximumprijs van  $\frac{45}{7}$  per manuur. Analooq zijn de manuren voor bewerking 2 de firma  $\frac{50}{7}$  waard.  $\frac{50}{7}$  is de schaduwprijs van de productiefactor arbeid bij bewerking 2.

Deze prijs is gelijk aan het marginale nut van de productiefactor arbeid bij deze bewerking (zie ook 3.2).

Bekijken we nu de vraag: hoeveel extra manuren kan de firma gebruiken?

Bekijken we bijv. bewerking 2.

Toename van de capaciteit betekent afname van  $x_4$ .

Hoe negatief kunnen we  $x_4$  laten worden, zodanig dat de basis nog steeds  $\{x_1, x_2, x_5\}$  is?

Vanwege de eerste beperking:  $x_4 \geq -\frac{7}{12} \cdot 157 = -91.6$  (afgerond)

Vanwege de tweede beperking:  $x_4 \geq -\frac{7}{10} \cdot 714 = -499.8$

Vanwege de derde beperking : geen ondergrens

Conclusie: de firma is bereid 91.6 manuren tegen een maximale prijs van  $\frac{50}{7}$  per manuur te kopen.

Ook kunnen we in tableau 2.6 aflezen dat de firma bereid is 750 ( $= \frac{7}{6} \cdot 643$ ) manuren voor bewerking 1 te kopen tegen een maximale prijs van  $\frac{45}{7}$  per manuur.

In de rechterkolom van tableau 2.6 zien we bovendien:

- i) de firma heeft bij bewerking 3 een capaciteitsoverschot van 157 manuren
- ii) als de prijs van de exportversie met  $\epsilon$  stijgt ( $\epsilon$  klein), dan neemt de winst van de firma met  $643 \cdot \epsilon$  toe
- iii) als de prijs van de binnenlandse versie met  $\epsilon$  stijgt, dan neemt de winst van de firma met  $714 \cdot \epsilon$  toe.

Conclusie 3.1.: Aan het eindtableau van de simplexmethode kan men direct aflezen wat het gevolg is van kleine veranderingen in de vectoren b en c uit (1.6). Deze post-optimale analyse (sensitivity analysis) is erg belangrijk omdat b en c i.h.a. niet precies bekend zijn.

### 3.2. Dualiteit

We laten zien dat er bij een L.P.-programma een ander L.P.-programma bestaat (het zogenaamde duale programma) dat nauw met het eerste verbonden is, zowel in wiskundig opzicht als qua economische interpretatie. We doen dit weer aan de hand van een voorbeeld.

#### 3.2.1. Voorbeeld: Veevoedersamenstelling.

Het is bekend dat een kalf per week minimaal

0,4 kg van voedingsstof A (bijv. koolhydraten),

0,6 kg van voedingsstof B (eiwitten),

2 kg van voedingsstof C (zetmeel), en

1,7 kg van voedingsstof D (vetten)

nodig heeft.

Deze voedingsstoffen zijn niet in zuivere vorm te koop. Een boer moet zelf een pakket samenstellen door de produkten M (bijv. sojabonen) en N (suikerbieten) op een bepaalde manier te combineren. Het is bekend dat:

M f1,00 per kilo kost en 10%A, 0%B, 10%C en 20%D bevat (de rest van M is niet voedzaam), en

N f0,40 per kilo kost en 0%A, 10%B, 20%C en 10%D bevat.

Gevraagd wordt een veevoeder samen te stellen dat aan de minimum voorwaarden voldoet en zo goedkoop mogelijk is.

De mathematische formulering is:

Zij  $y_1$  ( $y_2$ ) het aantal kilogrammen van M (N) dat per week aan een kalf gegeven wordt.

Te minimaliseren:

$$(3.2.2) \quad 10y_1 + 4y_2$$

Onder de voorwaarden

$$(3.2.3) \quad 0.1 y_1 \geq 0.4$$

$$(3.2.4) \quad 0.1 y_2 \geq 0.6$$

$$(3.2.5) \quad 0.1 y_1 + 0.2 y_2 \geq 2$$

$$(3.2.6) \quad 0.2 y_1 + 0.1 y_2 \geq 1.7$$

$$(3.2.7) \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Aangezien slechts 2 variabelen een rol spelen kunnen we dit probleem grafisch oplossen. Het minimum wordt aangenomen voor  $y_1 = 4$  en  $y_2 = 9$ . Dit pakket kost f7,60. We zien: het pakket bevat precies genoeg van A en D, maar teveel van B en C.

Bekijk nu het volgende probleem:

Een handelaar is in staat de basisstoffen A t/m D in zuivere vorm te leveren. Hij vraagt zich af wat de maximale prijs is die hij voor deze basisstoffen kan vragen.

Zij  $x_i$  de prijs (in guldens) die de handelaar voor 1 kg van voedingsstof  $i$  vraagt ( $i \in \{A, B, C, D\}$ ). De handelaar moet de boer overtuigen om inderdaad zijn produkten te kopen en niet zelf te mengen.

Voor de boer is 1 kg M equivalent met 0,1 kg A + 0,1 kg C + 0,2 kg D.

Voor de boer kost 1 eenheid M f1,00.

Het equivalent bij de handelaar kost  $0,1x_A + 0,1x_C + 0,2x_D$ .

De handelaar moet er dus voor zorgen dat

$$(3.2.8) \quad 0,1x_A + 0,1x_C + 0,2x_D \leq 1 \quad .$$

Ook moet hij ervoor zorgen (produkt N)

$$(3.2.9) \quad 0,1x_B + 0,2x_C + 0,1x_D \leq 0,4 \quad .$$

Natuurlijk moet ook

$$(3.2.10) \quad x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0, \quad x_C \geq 0, \quad x_D \geq 0 \quad .$$

De handelaar wil natuurlijk zijn winst maximaliseren:

Per kalf kan hij verkopen: 0,4 eenheden van A, 0,6 eenheden van B, 2 eenheden van C en 1,7 eenheden van D.

Zijn winst (per kalf) is dus:

$$(3.2.11) \quad 0,4x_A + 0,6x_B + 2x_C + 1,7x_D \quad .$$

Uit (3.2.8) t/m (3.2.11) zien we dat het probleem voor de handelaar ook een L.P.-probleem is. We kunnen dit probleem oplossen met de simplex-methode. Het eindtableau wordt:

$x_A^*$	$x_B$	$x_C$	$x_D^*$	$Y_1$	$Y_2$	w	
1	-2	-3	0	10	-20	0	2
0	1	2	1	0	10	0	4
0	0.3	0.2	0	4	9	1	7.6

Tableau 3.1

De optimale prijzen zijn:  $x_A = 2$   
 $x_B = 0$   
 $x_C = 0$   
 $x_D = 4$

Per kalf heeft de handelaar een winst van f7,60.

De maximale winst voor de handelaar is dus gelijk aan de minimale kosten voor de boer. We gaan nu verklaren waarom dit zo is.

Veronderstel eens dat de handelaar  $\epsilon$  kg van voedingsstof A aan de boer geeft. De boer hoeft dan nog slechts zo te mengen dat voldaan is aan

$$(3.2.12) \quad 0,1y_1 \geq 0,4 - \epsilon$$

en verder aan (3.2.4) t/m (3.2.7).

Het is eenvoudig (grafisch) in te zien dat de volgende menging voor de boer optimaal is:

$$y_1 = 4 - 10\epsilon \text{ en } y_2 = 9 + 20\epsilon .$$

De kosten voor de boer zijn dan  $7,6 - 2\epsilon$ .

Dus 1 eenheid van A geeft de boer een winst van f2,-. M.a.w.: voor de boer heeft A een schaduwprijs van 2. Op dezelfde manier zien we dat D een schaduwprijs 4 heeft. De schaduw prijzen van B en C zijn 0: de restricties voor B en C zijn voor de boer niet kritiek en dus leveren extra eenheden de boer geen beperking in de kosten op.

De maximale prijs die de boer de handelaar voor zijn produkten wil geven is precies deze schaduwprijs, en dus is het beste wat de handelaar kan doen, inderdaad deze prijzen te vragen.

Merk op dat we in tableau 3.1 ook de optimale oplossing voor de boer kunnen aflezen, nl. onder  $y_1$  en  $y_2$ . Ook dit is eenvoudig te verklaren:

Met behulp van een redenering als in §3.1 halen we uit Tableau 3.1:

M wordt  $\epsilon$  duurder per kg correspondeert met  $y_1$  wordt

$\epsilon$  kleiner en dit levert de handelaar een winst van  $4\epsilon$  op. Aangezien



de winst van de handelaar gelijk is aan het verlies van de boer, geldt: M wordt  $\epsilon$  duurder per kg, kost de boer  $4\epsilon$ . Conclusie de boer gebruikt 4 kg van M.

Merk bovendien nog op dat onder  $x_B$  (resp.  $x_C$ ) het overschot aan voedingsstof B (resp. C) bij de optimale samenstelling van de boer staat.

Conclusie: We kunnen in tableau 3.1 alle relevante informatie voor probleem 1 (dat van de boer) en probleem 2 halen. Deze twee problemen zijn wat we noemen: duale problemen.

Van het probleem:

$$\max \{c^T x ; x \in \mathbb{R}^n , Ax \leq b , x \geq 0\} \quad (P)$$

is het duale probleem:

$$\min \{b^T y ; y \in \mathbb{R}^m , A^T y \geq c , y \geq 0\}. \quad (D)$$

Dus de variabelen in (P) corresponderen met de restricties in (D) en de restricties in (P) corresponderen met de variabelen in (D).

M.b.v.

$$\min \{b^T y : y \in \mathbb{R}^m , A^T y \geq c , y \geq 0\}$$

is equivalent met

$$\max \{-b^T y , y \in \mathbb{R}^m , -A^T y \leq -c , y \geq 0\}$$

is het eenvoudig in te zien dat het duale probleem van (D) het probleem (P) is. Een van de belangrijkste resultaten uit de L.P.-theorie is, dat de eigenschappen die we voor de problemen van de boer en de handelaar bewezen hebben ook algemeen gelden:

(3.2.13) Stelling (Dualiteitsstelling)

- i) Als  $x$  een toegelaten oplossing voor (P) en  $y$  een toegelaten oplossing voor (D) is, dan  $c^T x \leq b^T y$ .
- ii) Als probleem (P) een toegelaten oplossing bezit en probleem (D) een toegelaten oplossing bezit, dan hebben beide problemen optimale oplossingen.

iii) Als  $x$  een optimale oplossing voor (P) is, en  $y$  is een optimale oplossing voor (D), dan

$$c^T x = b^T y .$$

iv) (complementary slackness relatie)

Als  $x(y)$  een optimale basisoplossing van P(D) is, dan

$$x_i > 0 \Rightarrow (A^T y)_i = c_i$$

$$y_j > 0 \Rightarrow (Ax)_j = b_j$$

Als beide problemen niet-ontaard zijn (2.20) dan geldt ook de omgekeerde implicatie.

De interpretatie van iv) is weer: als er van een bepaald produkt een overschot is ( $(Ax)_j < b_j$ ) dan moet de prijs ( $=y_j$ ) van dat produkt 0 zijn.

We bewijzen van deze stelling alleen onderdeel i) (de overige onderdelen zijn moeilijker te bewijzen).

Stel  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$  en  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A^T y \geq c$ ,  $y \geq 0$ . Dan:

$$\begin{array}{ccc} c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T Ax \leq y^T b \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

We geven als slot nog een toepassing van (3.2.13) iv). Voor het probleem uit voorbeeld 2.1 is een economische interpretatie van het duale probleem: Een tweede fabrikant wil de manuren van fabrikant 1 kopen. Wat zijn de minimale prijzen waarbij hij fabrikant 1 kan overtuigen dat het verstandig is met hem zaken te doen? Als we  $y_i$  gebruiken als notatie voor de optimale prijs van 1 manuur bij bewerking  $i$  ( $i \in \{1,2,3\}$ ) dan volgt uit (3.2.13) iv):

$$\begin{array}{ll} y_3 = 0 & \text{(want } (Ax)_3 < b_3 \text{)} \\ \frac{5}{6} y_1 + y_2 = \frac{25}{2} & \text{(want } x_1 > 0 \text{)} \\ y_1 + \frac{1}{2} y_2 = 10 & \text{(want } x_2 > 0 \text{)} \end{array}$$

Dus  $y_1 = \frac{45}{7}$ ,  $y_2 = \frac{50}{7}$ ,  $y_3 = 0$ . Dit zijn natuurlijk weer precies de schaduw-prijzen uit Tableau 2.6.

#### 4. Slotopmerkingen

Een belangrijke vraag blijft natuurlijk: is het gekozen model adequaat? We hebben bij de formulering als L.P.-model (impliciet) de volgende aannamen gemaakt:

- (4.1) alle kosten en beperkingen zijn in het model opgenomen.
- (4.2) de optredende relaties (kosten en restricties) zijn echt lineair in de variabelen.
- (4.3) de gekozen coëfficiënten zijn correct.
- (4.4) gebroken waarden voor de beslissingsgrootheden zijn zinvol.

Ad. (4.4): Als sommige beslissingsgrootheden alleen geheeltallige waarden aan mogen nemen, zou men een oplossing kunnen bepalen door eerst de simplexmethode toe te passen op het probleem zonder de geheeltaligheidsrestricties en daarna eventuele breuken af te ronden. Deze procedure is echter lang niet altijd zinvol (zie bijv. probleem (4.12)). Problemen met geheeltaligheidsbeperkingen zijn i.h.a. aanmerkelijk moeilijker dan problemen zonder deze beperkingen.

Ad. (4.3): Aan deze veronderstelling is veelal niet voldaan. Meestal zijn de coëfficiënten stochastisch. Postoptimale analyse is dus erg belangrijk.

Ad. (4.1) en (4.2): Hier nemen we o.a. aan dat we vaste kosten (d.w.z. kosten onafhankelijk van de grootte van de productie) kunnen verwaarlozen. Voor wat betreft vb. 1.1 kan men zich bijv. afvragen of het verwaarlozen van insteltijden en instelkosten van de walsgroepen toelaatbaar is. Stel dat voor produkt  $j$  op walstraat  $i$  een insteltijd van  $a_{ij}$  uur nodig is. Stel dit instellen kost  $c'_{ij}$  ( $c'_{ij} > 0$ ). De totale kosten bedragen dan

$$(4.5) \quad \sum_{i,j} (c_{ij} x_{ij} + c'_{ij} \delta_{ij})$$

waarbij

$$(4.6) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } x_{ij} = 0 \\ 1 & \text{als } x_{ij} > 0 \end{cases} .$$

Bovendien moeten de  $x_{ij}$  en  $\delta_{ij}$  voldoen aan de voorwaarden:

$$(4.7) \quad \sum_j (x_{ij}/d_{ij} + a_{ij}\delta_{ij}) \leq b_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$(4.8) \quad \sum_i x_{ij} = p_j \quad j = 1, \dots, 14$$

$$(4.9) \quad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 14 .$$

Het probleem: minimaliseer (4.5) onder de voorwaarden (4.6) t/m (4.9) is (als gevolg van (4.6)) geen L.P.-probleem meer.

M.b.v. een trucje kunnen we een equivalent L.P.-probleem maken. Merk op dat voor een toegelaten oplossing van bovenstaand probleem geldt:

$$(4.10) \quad x_{ij}/d_{ij} \leq b_i \delta_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 14$$

$$(4.11) \quad \delta_{ij} \in \{0, 1\}$$

Bekijk nu het probleem:

$$(4.12) \quad \begin{cases} \text{Minimaliseer: (4.5)} \\ \text{Onder de voorwaarden: (4.10), (4.11), (4.7), (4.8) en (4.9)} \end{cases}$$

Dit laatste probleem is een L.P.-probleem.

Als  $\{(x_{ij}, \delta_{ij}) : i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, 14\}$  een optimale oplossing van dit probleem is, dan geldt:

$$x_{ij} > 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \quad (\text{vanwege (4.10) en (4.11)})$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \quad (\text{vanwege } c'_{ij} > 0).$$

Dus de  $x_{ij}$ 's vormen een toegelaten oplossing voor het oorspronkelijke probleem. Eenvoudig is in te zien dat deze oplossing optimaal is. Echter als gevolg van restrictie (4.11) is probleem (4.12) aanmerkelijk moeilijker op te lossen, dan een L.P.-probleem in de standaardvorm (1.6).

Veel praktische problemen kan men herleiden tot L.P.-modellen waarin sommige van de beslissingsgrootheden alleen geheeltallige waarden aan mogen nemen, bijv.:

(4.13) het kortste pad probleem (zie de inleiding)

(4.14) het rugzakprobleem:

een toerist moet kiezen welke van  $n$  voorwerpen mee te nemen. Voorwerp  $i$  heeft een volume  $v_i$ , een gewicht  $g_i$  en een waarde (voor de toerist) van  $w_i$ . Welke voorwerpen kan de toerist het beste meenemen als zijn rugzak een volume  $V$  heeft en maximaal met een gewicht  $G$  belast kan worden?

(4.15) het handelsreizigersprobleem:

een handelsreiziger moet  $n$  steden bezoeken. De afstand van stad  $i$  naar stad  $j$  is  $d_{ij}$ . In welke volgorde moet hij de steden bezoeken, als hij weer op zijn uitgangspunt terug moet komen?

Bij wijze van voorbeeld herleiden we (4.13) tot een L.P.-probleem: Een weg van  $A$  naar  $Z$  is gekarakteriseerd door de collectie getallen  $\{\delta_{ij}\}$  waarbij:

$$(4.16) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als het segment } (i,j) \text{ in de weg is opgenomen} \\ 0 & \text{als het segment } (i,j) \text{ niet in de weg is opgenomen} \end{cases}$$

Voor zo'n collectie  $\{\delta_{ij}\}$  geldt:

$$(4.17) \quad \sum_j \delta_{Aj} = 1$$

$$(4.18) \quad \sum_i \delta_{iZ} = 1$$

$$(4.19) \quad \sum_i \delta_{ij} = \sum_k \delta_{jk} \quad \text{voor alle } j \neq A, Z.$$

Voor de weg corresponderend met de collectie  $\{\delta_{ij}\}$  is de lengte:

$$(4.20) \quad \sum_{i,j} \delta_{ij} d_{ij}.$$

Het L.P.-probleem is nu:

(P):  $\begin{cases} \text{Minimaliseer: (4.20)} \\ \text{Onder de voorwaarden: (4.17), (4.18), (4.19) en } \delta_{ij} \in \{0,1\} \text{ voor} \\ \text{alle } i,j. \end{cases}$

In dit speciale geval is (P) equivalent met een L.P.-probleem zonder geheeltaligheidsvoorwaarden, nl. met:

$$(P') \begin{cases} \text{Minimaliseer: (4.20)} \\ \text{Onder de voorwaarden: (4.17), (4.18), (4.19) en } \delta_{ij} \geq 0, \delta_{ij} \leq 1 \\ \text{voor alle } i, j \end{cases}$$

Immers, de collectie  $\{\hat{\delta}_{ij}\}$  is optimaal voor (P') en  $0 < \hat{\delta}_{ij} < 1$  voor zekere  $i$  en  $j$  kan alleen als het optimale vervolg vanuit deze  $i$  niet uniek is. We kunnen dus een optimale oplossing voor (P) samenstellen door voor elke  $i$  één  $j$  te kiezen met  $\hat{\delta}_{ij} > 0$  en alleen het segment  $(i, j)$  op te nemen.

Opmerking (4.21): Natuurlijk is het veel verstandiger bij de oplossing van de structuur van het probleem gebruik te maken: d.w.z. het probleem oplossen met de dynamische programmeringstechniek uit de inleiding.

De lezer kan zelf de problemen (4.14) en (4.15) als L.P.-problemen formuleren. Voor deze problemen zijn de geheeltaligheidsvoorwaarden niet te vervangen door standaardrestricties; deze problemen zijn dan ook veel moeilijker.

De problemen (4.13) t/m (4.15) zijn voorbeelden van combinatorische optimaliseringsproblemen, dit zijn problemen van de vorm: welke configuratie (uit een eindige, maar erg grote verzameling) is de beste? Een eigenschap van deze problemen is dat kleine veranderingen een (bijna) triviaal probleem tot een (bijna) onoplosbaar probleem kunnen maken. In de complexiteitstheorie houdt men zich dan ook bezig met de vraag: welke problemen zijn moeilijk en welke niet? Een probleem is niet moeilijk als er een algoritme bestaat dat een optimale oplossing van het probleem geeft, binnen een rekentijd die polynomiaal afhangt van het formaat van het probleem (= aantal bits nodig om het probleem op te slaan).

Een probleem is moeilijk als alle algoritmen die een optimale oplossing geven, daarvoor een exponentiële tijd nodig hebben. Lange tijd was het een open vraag of L.P. (in deze zin) moeilijk was. Alle bekende algoritmen (inclusief de simplexmethode) hadden (in het slechtste geval)

een exponentiële tijd nodig. In 1979 bewees Khachián dat L.P. niet moeilijk is: zijn algoritme (zie 2.24) heeft slechts een polynomiale tijd nodig. Dit resultaat betekende vooral een theoretische doorbraak: het was bekend dat veel problemen qua complexiteit equivalent zijn met L.P.; in één klap was bewezen dat al deze problemen niet moeilijk zijn.

## II. Voorraadbeheer en productieplanning

In dit hoofdstuk zullen we een aantal klassieke problemen uit de voorraadtheorie bestuderen. Zowel modellen met een discrete tijdsparameter als met een continue komen aan de orde. De vraag per tijdseenheid kan deterministisch of stochastisch zijn.

### 2.1. Constante (en deterministische) vraag; continue tijd

Op een machine wordt met constante snelheid een product geproduceerd; per tijdseenheid maakt men  $p$  eenheden. De vraag naar het product is eveneens constant; per tijdseenheid worden  $d$  eenheden gevraagd. De productiekosten bestaan uit twee delen:

- i) opstartkosten; elke keer dat de productie gestart wordt kost  $K$ ,
- ii) kosten per geproduceerde eenheid; deze bedragen  $c$ .

Verder hebben we voorraadkosten; deze bedragen  $h$  per eenheid die per tijdseenheid op voorraad ligt. Uit service-overwegingen wordt de beperking ingevoerd dat de aanwezige voorraad steeds niet-negatief moet zijn.

Een productieschema is een strikt stijgende rij getallen  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . De getallen met een oneven rangnummer geven de tijdstippen aan waarop de productie gestart wordt, die met een even rangnummer de stoptijdstippen. Gevraagd wordt het productieschema te bepalen dat, van alle schema's die aan de gestelde voorwaarde voldoen, de laagste gemiddelde kosten heeft. Gemiddelde kosten wil zeggen: kosten per tijdseenheid. Dus als  $C(t)$  de totale kosten tot tijdstip  $t$  zijn, dan zijn de gemiddelde kosten:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t}$$

Het is duidelijk dat er geen toegelaten productieschema is als  $d > p$ .



Als  $d = p$  dan is er slechts één:constante productie. We beperken ons dus tot het geval  $d < p$ . In dit geval noemen we  $\rho := \frac{d}{p}$  de bezettingsgraad van de machine. Het zal duidelijk zijn dat voor de bepaling van het optimale schema de productiekosten  $c$  buiten beschouwing kunnen blijven; immers, alle toegelaten verstandige schema's produceren gemiddeld  $d$  eenheden per tijdseenheid. De structuur van het optimale schema ligt voor de hand: produceer tot niveau  $S$ , wacht dan tot de voorraad weer  $0$  is, en herhaal steeds deze cyclus. We zullen de optimaliteit van zo'n schema aantonen en de optimale  $S$  berekenen.

Lemma 1.1

Voor ieder schema dat voorschrijft de productie te starten bij een voorraad groter dan  $0$ , is er een schema met ten hoogste dezelfde gemiddelde kosten, waarbij alleen de productie gestart wordt als de voorraad  $0$  is.

Bewijs:

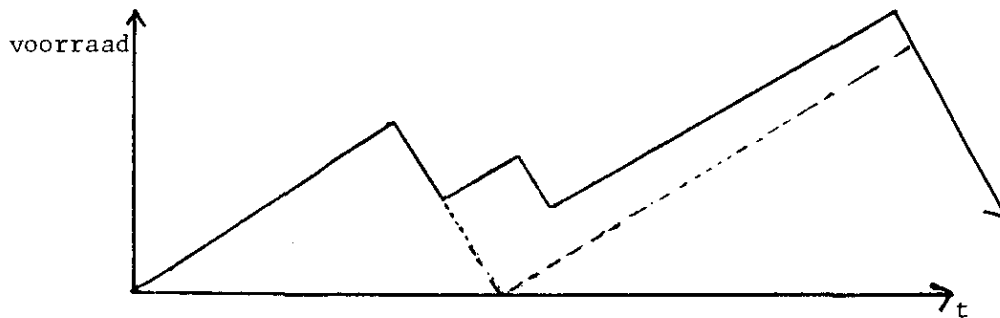


fig.1.1

Beschouw eens een schema dat voorschrijft de productie te starten terwijl de voorraad groter dan  $0$  is (de getrokken grafiek in fig.1.1). We construeren een nieuw schema uit het oude, door op het eerste startpunt van het

oude schema waar de voorraad groter dan 0 is niet te produceren, maar te wachten tot de voorraad 0 is. Het nieuwe schema produceert dan tot de beide schema's dezelfde voorraad hebben, en volgt vervolgens het oude weer (we krijgen de onderbroken grafiek uit fig.1.1). In ieder eindig tijdsinterval zijn de kosten van het nieuwe schema lager dan van het oude; dus zijn de gemiddelde kosten ten hoogste even groot. Daar we het bovenstaande herhaald kunnen toepassen is het lemma bewezen.  $\square$

We kunnen ons bij het zoeken naar een optimaal productieschema dus beperken tot die schema's die alleen op voorraadniveau 0 de productie starten. Voor zo'n schema bedoelen we met een cyclus: het proces tussen twee opeenvolgende productie-startpunten. Intuitief is duidelijk dat het optimale schema stationair zal zijn, d.w.z. bestaat uit het herhaald toepassen van dezelfde cyclus. We zullen dit nu bewijzen:

Lemma 1.2

Bij elk schema bestaat er een stationair schema met ten hoogste dezelfde gemiddelde kosten.

Bewijs: Voor een cyclus met lengte  $t > 0$  bedragen de cycluskosten (= totale kosten gedurende de cyclus):

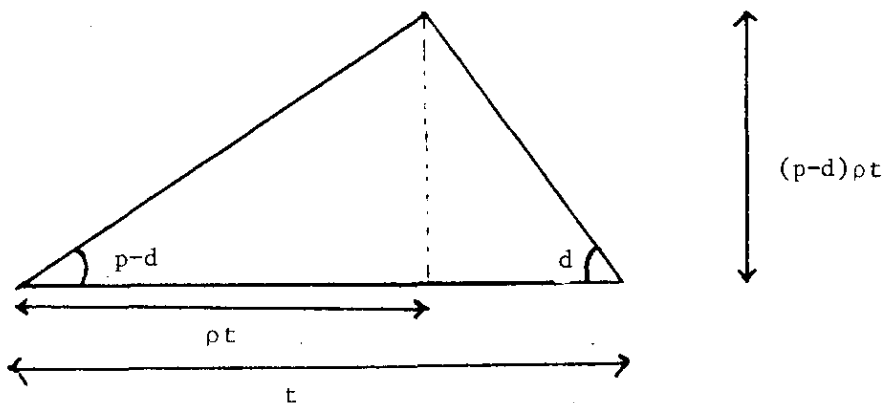


Fig.1.2

$$(1.3) \quad K + \frac{1}{2}(p-d) \rho h t^2.$$

Zij  $T > t$ . De totale kosten van een cyclus met lengte  $t$ , gevolgd door een cyclus met lengte  $T - t$  bedragen:

$$(1.4) \quad 2K + \frac{1}{2}(p-d) \rho h (t^2 + (T-t)^2)$$

Het minimum van (1.4) (over  $t$ , bij vaste  $T$ ) wordt aangenomen voor  $t^* = T/2$ ; zodat twee cycli elk met lengte  $T/2$  ten'hoogste even duur zijn als een cyclus met lengte  $t$ , gevolgd door één met lengte  $T - t$ . Daar we het bovenstaande herhaald kunnen toepassen, is het lemma bewezen.  $\square$

We kunnen ons dus tot stationaire schema's beperken. Resteert nog het bepalen van de optimale cycluslengte. De formules in lemma 1.5 worden door sommigen genoemd naar Camp en door anderen naar Wilson.

Lemma 1.5

Een cyclus met lengte  $T^* = \sqrt{\frac{2K}{(p-d) \rho h}}$  is optimaal. De optimale gemiddelde kosten bedragen  $\sqrt{2K(p-d) \rho h}$ .

Bewijs: Zij  $\alpha = \frac{1}{2}(p-d) \rho h$ . Uit (1.3) volgt dat bij cycluslengte  $T$  de gemiddelde kosten gelijk zijn aan

$$(1.6) \quad \frac{K}{T} + \alpha T = : G(T) .$$

Door de afgeleide van  $G$  nul te stellen vinden we de optimale  $T^*$  en de optimale gemiddelde kosten.  $\square$

1.7. Opmerkingen

i) Bij het optimale schema zijn de gemiddelde kosten gelijk aan:

$$G(T^*) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{component} \\ \text{t.g.v. } K}}{\sqrt{\alpha K}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{component} \\ \text{t.g.v. } h}}{\sqrt{\alpha K}} = 2\sqrt{\alpha K}$$

ii) Bij het optimale schema wordt steeds geproduceerd tot het niveau  $S^* = (p-d) \rho T^*$ . We kunnen dit schema daarom ook omschrijven als: herhaal de cyclus "produceer tot  $S^*$  en wacht tot de voorraad weer 0 is". We noemen zo'n schema: een  $(0, S^*)$ -regel. Schema's van deze vorm zullen we in dit hoofdstuk vaak tegenkomen.

iii) In de praktijk is het van belang te weten hoe de kosten variëren bij kleine afwijkingen van  $T^*$ . Immers, men werkt liever met een cyclus van 5 dagen dan met een cyclus van  $4\frac{1}{2}$  dag. Deze vraag is eenvoudig te beantwoorden. Bij een cycluslengte  $\gamma T^*$  ( $\gamma \approx 1$ ) zijn de gemiddelde kosten:

$$(1.8) \quad G(\gamma T^*) = \frac{K}{\gamma T^*} + \alpha \gamma T^* = \frac{K}{\gamma \sqrt{\frac{K}{\alpha}}} + \alpha \gamma \sqrt{\frac{K}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\alpha K} + \gamma \sqrt{\alpha K} = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) G(T^*) .$$

Aangezien de functie  $\gamma \rightarrow \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right)$  zich in de buurt van 1 heel vlak gedraagt, geldt dat de kosten niet zo erg gevoelig zijn voor kleine afwijkingen van  $T^*$ .

In plaats van de beperking "de voorraad moet altijd niet-negatief zijn" kan men ook de beperking "de voorraad moet altijd minstens  $s$  zijn" ( $s \in \mathbb{R}$ )

hebben. Bij positieve  $s$  noemen we  $s$  het safety-level; negatieve voorraad betekent dat er nageleverd moet worden. De lezer kan nagaan dat ook in dit geval het optimale schema weer een  $(s,S)$ -regel is.

Ook is het mogelijk dat men eist dat de voorraad in minstens een fractie  $\beta$  van de tijd niet-negatief moet zijn;  $\beta$  noemt men dan het service-level. Het zal duidelijk zijn dat het in dit geval niet zinvol is om in meer dan  $\beta \times 100\%$  van de tijd positieve voorraad te hebben. Het optimale schema is weer stationair en bestaat dus uit cycli van de vorm:

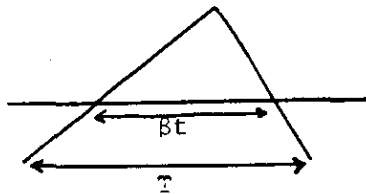


fig.1.3

De gemiddelde kosten bij cycluslengte  $T$  bedragen  $\frac{K}{T} + \alpha\beta^2 T$  en dus is de cycluslengte  $T^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K}{\alpha}}$  optimaal. De optimale gemiddelde kosten zijn  $\beta\sqrt{\alpha K}$ .

Ook is het mogelijk dat men geen beperkingen aan het voorraadniveau oplegt, maar naast opstartkosten en voorraadkosten ook nog tekortkosten rekent voor elke eenheid die per tijdseenheid tekort is. Zonder bewijs vermelden we dat ook nu het optimale productieschema weer een  $(s,S)$ -regel is. De optimale  $s$  en  $S$  kunnen eenvoudig zelf bepaald worden (vergelijk de oefeningen).

## 2.2. Meerdere producten op dezelfde machine

In de praktijk is het vaak zo dat op dezelfde machine meerdere producten gemaakt moeten worden. In dit geval is het bepalen van het optimale schema veel moeilijker. We zullen laten zien dat in dit geval met een

heuristische methode toch heel bevredigende resultaten te behalen zijn.

We beschouwen het volgende probleem:

Op een machine moeten  $n$  producten gemaakt worden; de machine kan maar aan 1 product tegelijk bezig zijn. Voor elk product  $i$  geldt:

- de vraag naar het product is constant:  $d_i$  per tijdseenheid,
- als de machine aan het product werkt, worden er per tijdseenheid  $p_i$  eenheden geproduceerd,
- het product brengt opstartkosten  $K_i$  en voorraadkosten  $h_i$  met zich mee.

We zullen de volgende notaties gebruiken:

$$(2.1) \quad \rho_i = \frac{d_i}{p_i} \quad ; \quad \alpha_i = \frac{1}{2}(p_i - d_i) \rho_i h_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Aan een productieschema wordt de eis opgelegd dat op een rij tijdstippen  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  de voorraad van elk van de producten niet-negatief moet zijn.gevraagd wordt een productieschema met de laagste gemiddelde kosten te bepalen.

Het is duidelijk dat er alleen een schema bestaat, dat aan de gestelde voorwaarde voldoet als de totale bezettingsgraad van de machine  $(= \sum_{i=1}^n \rho_i)$  niet te groot is. Laat  $t > 0$  een willekeurig tijdstip zijn en  $t_i$  de tijd die tot dan aan product  $i$  besteed is. Als op  $t$  de voorraad van elk product niet-negatief is, geldt:

$$d_i t \leq p_i t_i \quad \text{ofwel} \quad \rho_i \leq \frac{t_i}{t} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Waaruit volgt dat

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{t} \leq 1.$$

Als  $\sum_{i=1}^n \rho_i > 1$  bestaat er dus geen schema dat aan de gestelde eis voldoet. Als  $\sum_{i=1}^n \rho_i \leq 1$  bestaat er wel zo'n schema. Namelijk, laat  $T > 0$

willekeurig zijn; Het schema: "produceer product  $i$  als

$t \pmod T \in \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j T, \sum_{j=1}^i \rho_j T \right)$ " voldoet aan de gestelde voorwaarde.

Bij dit schema geven we alle producten dezelfde cycluslengte (nl.  $T$ ). We noemen dit schema een rotatieschema met cycluslengte  $T$ .

Als we alleen product  $i$  zouden moeten produceren, zouden de minimale

gemiddelde kosten  $2\sqrt{\alpha_i K_i}$  bedragen. Voor het huidige probleem is  $2 \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i K_i}$

dus zeker een absolute benedengrens voor de gemiddelde kosten. In het volgende voorbeeld zien we dat we deze ondergrens niet altijd kunnen halen.

#### Voorbeeld 2.2

$n = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $K_1 = 4$ ,  $K_2 = 9$ ,  $\rho_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{3}$ .

De optimale cycluslengte voor product 1 afzonderlijk is 2 en de optimale

cycluslengte voor product 2 is 3. Het is echter niet mogelijk deze in-

dividuele optima te combineren tot een toegelaten schema voor het huidige

probleem (ga na). We zullen dus af moeten wijken van de individuele opti-

ma; bijgevolg bestaat er geen schema dat gemiddelde kosten  $2\sqrt{9} + 2\sqrt{4} = 10$

heeft. Het ligt voor de hand om eens te kijken hoe redelijk een rotatie-

schema met cycluslengte  $T$  tussen 2 en 3 is. De gemiddelde kosten by cyclus-

lengte  $T$  zijn in dit geval (vgl. 1.6):

$$\frac{K_1 + K_2}{T} + (\alpha_1 + \alpha_2)T.$$

Het beste rotatieschema heeft dus lengte  $T = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \sqrt{6,5}$ . De bij-

behorende gemiddelde kosten zijn  $2\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)(K_1 + K_2)} = 2\sqrt{26} = 10,2$  een af-

wijking van slechts 2% van de absolute ondergrens. Het optimale rotatie-

schema is dus best acceptabel.

In het geval met  $n$  producten kunnen we analoog aan het voorbeeld het optimale rotatieschema bepalen. Bij cycluslengte  $T$  zijn de gemiddelde kosten:

$$T^{-1} \sum_{i=1}^n K_i + T \sum_{i=1}^n \alpha_i .$$

Voor de optimale lengte  $T^*$  en de optimale gemiddelde kosten  $G(T^*)$  geldt dus:

$$T^* = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n K_i} ; \quad G(T^*) = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{i=1}^n K_i} .$$

Het zal echter duidelijk zijn dat dit schema alleen redelijk is als de spreiding in de cycluslengten behorende bij de individuele optima niet te groot is. Dit zien we in het volgende voorbeeld.

#### Voorbeeld 2.3

$$n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = K_1 = 1, K_2 = 16, \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = \frac{1}{8} .$$

De optimale cycluslengte voor product 1 is 1, die voor product 2 is 4.

Deze individuele optima zijn te combineren tot een toegelaten schema voor het huidige probleem, dat natuurlijk voor dit probleem het optimale is.

De optimale gemiddelde kosten zijn dus  $2\sqrt{1} + 2\sqrt{16} = 10$ . Het optimale rotatieschema heeft lengte  $T^* = \sqrt{8.5}$  en gemiddelde kosten  $G(T^*) = 2\sqrt{34}$ . Een afwijking van bijna 17% van het optimum.

In het voorbeeld zien we hoe we voor  $n$  producten waarvoor de individuele optimale cycluslengten relatief ver uit elkaar liggen, toch een redelijke oplossing kunnen bepalen. We kunnen de producten bijvoorbeeld indelen



in 2 groepen, binnen één groep alle producten dezelfde cycluslengte geven en voor de cycluslengte van de ene groep een veelvoud van de cycluslengte van de andere groep nemen. Zijn 2 groepen niet voldoende dan nemen we er 3 etc.

### 2.3. Eén product op meerdere machines

In deze paragraaf beschouwen we de situatie waarin één product meerdere bewerkingen moet ondergaan alvorens het geheel gereed is. We zullen ons beperken tot het geval dat er twee productiefasen zijn. Het probleem is het volgende:

De vraag naar een bepaald product is constant:  $d$  per tijdseenheid. Het product wordt in 2 fasen gemaakt; na de eerste fase is een halfproduct gereed dat in de tweede fase tot het eindproduct verwerkt wordt. Het opstarten van de eerste fase kost  $K_1$ , de voorraadkosten voor het halfproduct bedragen  $h_1$ . Het opstarten van fase 2 kost  $K_2$ , de voorraadkosten voor het eindproduct zijn  $h_2$ . Een voorwaarde die in de praktijk geldt is:  $K_1 > K_2$ ;  $h_1 < h_2$ . Het halfproduct zal dus in grotere series gemaakt worden dan het eindproduct. Voor het gemak nemen we aan dat beide productiefasen een productiesnelheid oneindig hebben:  $p_1 = p_2 = \infty$ .

Gevraagd wordt een productieschema met de laagste gemiddelde kosten te bepalen, als gegeven is dat op elk moment de voorraden van het halfproduct en van het eindproduct niet-negatief moeten zijn.

Met een redenering als in §2.1 zien we dat bij productiefase 2 een stationair schema gebruikt zal worden, Stel men gebruikt hier een cycluslengte  $T$ . De vraag naar het halfproduct is dan stationair (met tussenpozen  $T$  een

vraag  $dT$ ) en dus zal ook bij fase I een stationair schema gebruikt worden.

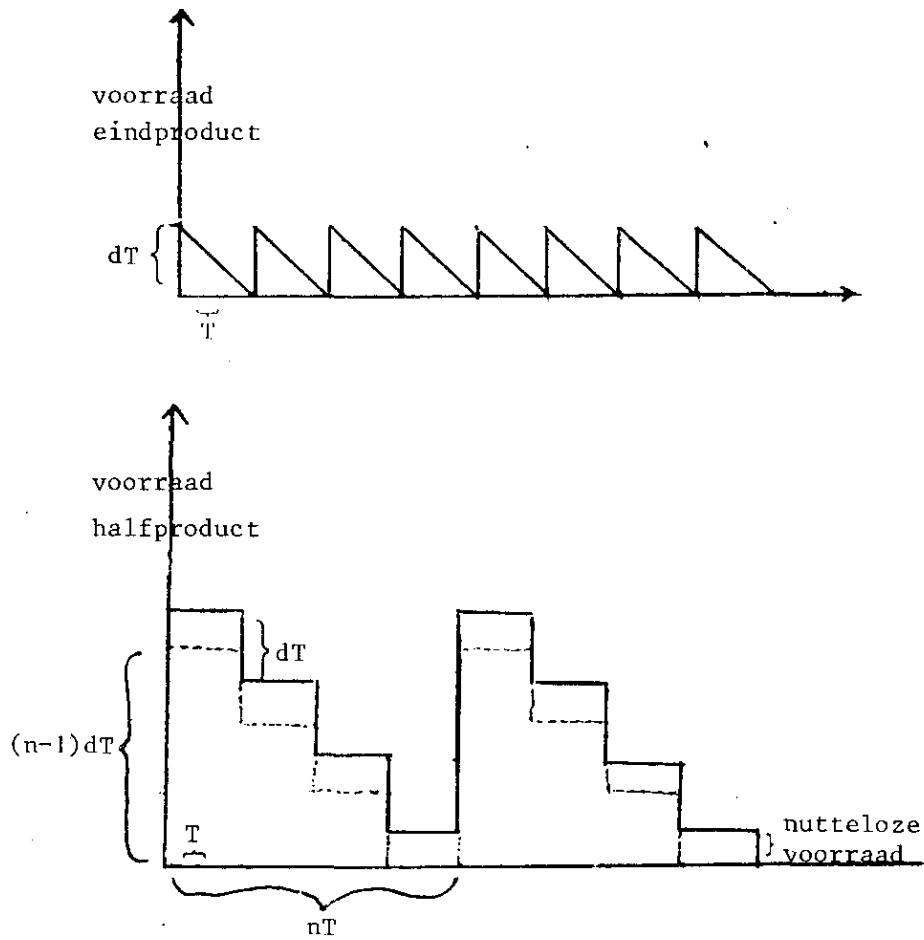


fig. 2.3

Aangezien bij fase I het gestippelde schema goedkoper is dan het getrokken schema zal men bij fase I een cycluslengte  $nT$  (voor zekere  $n \in \mathbb{N}$ ) gebruiken. We bepalen vervolgens de optimale  $T$  en  $n$ . Bij cycluslengten  $T$  en  $nT$  bedragen de gemiddelde kosten:

$$(3.1) \quad \frac{K_1 + dh_1 T^2 \sum_{k=1}^{n-1} k}{nT} + \frac{K_2 + \frac{1}{2} dh_2 T^2}{T} =$$
$$= \frac{K_1}{nT} + \frac{1}{2}(n-1)dh_1 T + \frac{K_2}{T} + \frac{1}{2} dh_2 T =$$

$$(3.2) \quad = \frac{K_1/n + K_2}{T} + \frac{1}{2} dT((n-1)h_1 + h_2) .$$

Schrijven we  $g_1 = h_1$  en  $g_2 = h_2 - h_1$  dan is (3.2) gelijk aan:

$$(3.3) \quad \frac{K_1/n + K_2}{T} + \frac{1}{2} dT(ng_1 + g_2) .$$

De interpretatie van (3.3) is:

In plaats van naar de voorraad van het halfproduct die nog niet verwerkt is en de voorraad van het eindproduct, kijken we nu naar:

- de voorraad van het halfproduct die nog in het bedrijf aanwezig is, al dan niet verwerkt tot eindproduct (we zullen dit het hybride product noemen) en
- de voorraad van het eindproduct.

Het oorspronkelijke probleem is equivalent met het probleem waarbij we het hybride product voorraadkosten  $g_1$  en het eindproduct voorraadkosten  $g_2$  geven. Bij cyclustijden  $T$  en  $nT$  hebben we:

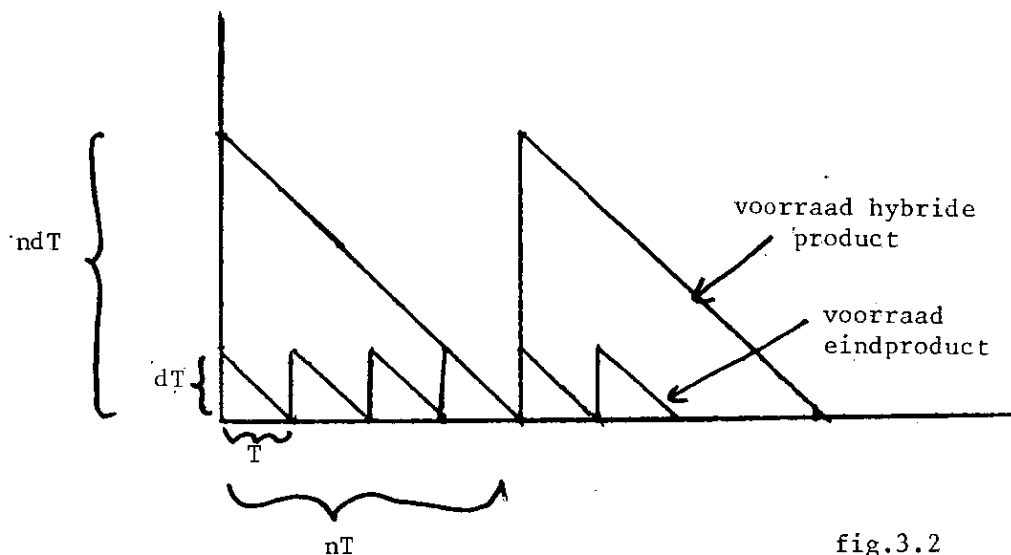


fig.3.2

Inderdaad zijn de gemiddelde kosten behorend bij fig. 3.2, die gegeven door (3.3). Bij vaste  $n$  vinden we de optimale  $T$  door het nul stellen van de afgeleide van (3.3); we vinden:

$$(3.4) \quad T_n^* = \sqrt{\frac{K_1/n + K_2}{\frac{1}{2}d(ng_1 + g_2)}} .$$

De bijbehorende optimale gemiddelde kosten zijn:

$$(3.5) \quad G(n, T_n^*) = \sqrt{(K_1/n + K_2) \frac{1}{2}d(ng_1 + g_2)} .$$

Vanwege de vorm van de grafiek van de functie  $x \rightarrow G(x, T_x^*)$  is de optimale  $n$  gelijk aan de minimale  $n$  waarvoor geldt dat  $G(n, T_n^*) \leq G(n+1, T_{n+1}^*)$ . Uitswerken van deze ongelijkheid levert dat het de  $n^*$  is waarvoor geldt:

$$(3.6) \quad n^*(n^*-1) < \frac{K_1 g_2}{K_2 g_1} \leq n^*(n^*+1) .$$

### Interpretatie

Het gegeven probleem bestaat uit twee afzonderlijke problemen, het voorraadprobleem voor het hybride product en het voorraadprobleem voor het eindproduct, die op een speciale manier aan elkaar gekoppeld zijn. We bekijken nu elk van deze problemen afzonderlijk. De optimale cyclustijden zijn:

$$T_1 = \sqrt{\frac{K_1}{\frac{1}{2}dg_1}} \quad (\text{hybride product}) ,$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{K_2}{\frac{1}{2}dg_2}} \quad (\text{eindproduct}) .$$

Er geldt:  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{K_1 g_2}{K_2 g_1}}$  en uit (3.6) volgt dus  $n^* \approx \frac{T_1}{T_2}$ .

Bovendien geldt  $T_n^* \approx T_2$ . Het optimale schema voor het gekoppelde probleem is dus ongeveer gelijk aan het optimale schema voor het ontkoppelde probleem; alleen hebben we er extra voor gezorgd dat de verhouding van de cyclustijden geheel is. Vanwege (1.8) zijn de optimale kosten bij het gekoppelde probleem nauwelijks hoger dan die bij het ontkoppelde probleem.

### 2.4. Variabele vraag, discrete tijd, De methode van Wagner en Whitin

We zullen nu een productieplanningsprobleem beschouwen, waarin de vraag naar een bepaald product varieert in de tijd. We nemen echter nog steeds aan dat de vraag van tevoren precies bekend is. Vanwege de eenvoud zullen we de tijd discreet nemen. Het probleem is het volgende:

Voor  $n$  perioden van gelijke lengte is gegeven hoeveel eenheden aan het einde van iedere periode afgeleverd moeten worden:  $d_1, d_2, \dots, d_N$ . De productiekosten bestaan uit twee delen: kosten voor het opstarten van een

serie:K, en de kosten per eenheid:c. Het produceren van ieder aantal eenheden gebeurt in een ten opzichte van de periodelengte te verwaarlozen tijd. Verder hebben we voorraadkosten voor artikelen die aan het einde van een periode nog in voorraad zijn; deze bedragen h per eenheid. De voorraadkosten over periode n moeten bij het begin van periode n+1 betaald worden. Gevraagd wordt het productieschema met de laagste totale kosten te bepalen. Een productieschema is nu een N-tal  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , waarbij  $p_n$  het te maken aantal in periode n is. Er moet gelden:

$$\sum_{i=1}^n p_i \geq \sum_{i=1}^n d_i \quad (n \in \{1, \dots, N\}) .$$

Het is duidelijk dat voor de bepaling van het optimale schema de productiekosten per apparaat buiten beschouwing kunnen blijven; immers, alle verstandige schema's brengen productiekosten  $c \sum_{i=1}^N d_i$  met zich mee. Het gaat weer om de afweging tussen opstartkosten en voorraadkosten. Voor een optimaal schema gelden de volgende twee eigenschappen:

Eigenschap 4.1. Er wordt alleen voor een vol aantal perioden geproduceerd.

Eigenschap 4.2. De productie wordt alleen gestart als het echt nodig is, d.w.z. als de aanwezige voorraad 0 is.

Immers, bij een schema dat niet aan eigenschap 4.1 voldoet, zouden we extra voorraadkosten hebben, terwijl we toch een nieuwe serie zouden moeten opzetten (vgl. fig. 3.1). Gegeven dat eigenschap 4.1 geldt, volgt eigenschap 4.2 als in lemma 1.1. Deze twee eigenschappen maken de bepaling van een optimaal schema erg eenvoudig, zoals we illustreren in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4.3. Van een product moeten de komende 4 perioden (seizoenen) respectievelijk 30, 20, 30 en 20 eenheden afgeleverd worden. De vaste kosten bedragen 20, de voorraadkosten per artikel per periode zijn 0,2. Vanwege de eigenschappen 4.1 en 4.2 kunnen we voor dit probleem een eenvoudig netwerk opstellen:

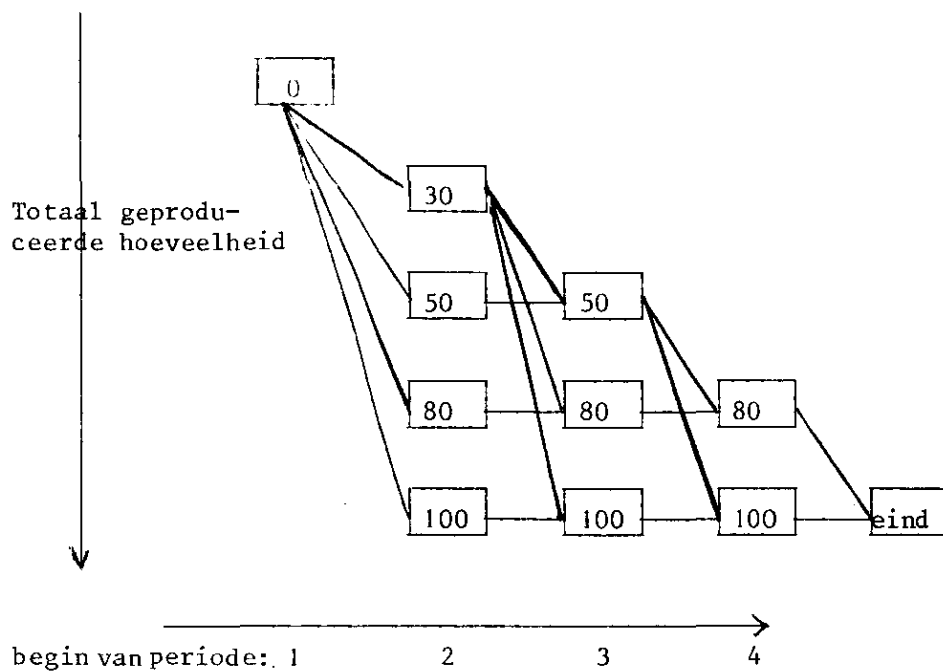


fig. 4.1

Het bepalen van het optimale schema komt neer op het bepalen van het goedkoopste pad van 0 tot het eind van de planningsperiode. Dit kan erg snel gebeuren m.b.v. de dynamische programmeringsmethode: Definieer  $v_n(i)$  als de minimale kosten vanaf het begin van periode  $n$  tot het eind als bij het begin van periode  $n$  de totale geproduceerde hoeveelheid  $i$  is. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 v_4(80) &= 20 && \text{(productiekosten)} \\
 v_4(100) &= 20 \times 0,2 = 4 && \text{(voorraadkosten)} \\
 v_3(50) &= 20 + \min\{v_4(80) + v_4(100)\} = 24 && \text{(dus produceer er 50)} \\
 v_3(80) &= 30 \times 0,2 + v_4(80) = 26 && \text{(voorraadkosten)} \\
 v_3(100) &= 50 \times 0,2 + v_4(100) = 14 && \text{(voorraadkosten)} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Van Wagner en Whitin is de volgende handige manier van administreren van het bovenstaande afkomstig:

Kosten bij optimaal vervolg		Er moet geproduceerd zijn aan het eind van de periode:			
		30	50	80	100
Er is al gereed bij het begin van de periode	0	20 + 28			
	30		20 + 14		
	50		4 + 24	20 + 4	
	80		10 + 26	6 + 20	20
	100		14 + 14	10 + 4	4

fig. 4.2

Er zijn dus twee optimale schema's (met kosten 48), nl. produceer alles in 1 keer of produceer er eerst 50 en in periode 3 weer 50.

Het algemene probleem kan op precies dezelfde wijze m.b.v. dynamische programmering worden opgelost. Vanwege eigenschap 4.1 is de hoeveelheid die bij het begin van periode  $n$  geproduceerd is gelijk aan  $\sum_{i=1}^k d_i$  voor zekere  $k \in \{n-1, \dots, N\}$ . Zij  $v_n\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)$  de minimale kosten vanaf periode



n tot het eind als bij het begin van periode n reeds  $\sum_{i=1}^k d_i$  geproduceerd is. Vanwege eigenschap 4.2 hebben we:

$$(4.4) \quad v_n \left( \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) = K + \min_{k \in \{n, \dots, N\}} \left\{ v_{n+1} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \right\},$$

$$(4.5) \quad v_n \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) = h \sum_{i=n}^k d_i + v_{n+1} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \quad (k \in \{n, \dots, N\}).$$

Deze recursieformules zijn erg eenvoudig door te rekenen en leveren direct de optimale kosten en het optimale schema.

Vaak zijn niet alleen aan het opstarten van de productie, maar ook aan elke verandering van de productiesnelheid kosten verbonden. Het is in dit geval zaak de productiesnelheid zoveel mogelijk constant te houden (productie-smoothing). We beschouwen dus nu een probleem als in de inleiding van deze paragraaf, echter i.p.v. opstartkosten K hebben we nu kosten k voor elke eenheid waarmee we het productieniveau veranderen. In dit geval voldoet een optimaal schema in het algemeen niet aan de eigenschappen 4.1 en 4.2 (ga na). Het gevolg is dat we voor het vinden van het optimale schema een veel grotere klasse moeten onderzoeken; het probleem is veel ingewikkelder geworden.

Voorbeeld 4.6. De komende 4 perioden moeten respectievelijk 30, 20, 30 en 20 eenheden afgeleverd worden. Er geldt:  $k = 1$ ;  $h = 0,2$ ;  $c = 10$ . Bij het begin van periode 1 is geen voorraad aanwezig.

We zouden ook nu weer een netwerk van mogelijkheden kunnen tekenen, maar

dit wordt veel groter dan in voorbeeld 4.3. Immers, een toestand in het netwerk is niet volledig gespecificeerd door de voorraad die tot dan gemaakt is, we moeten ook het vorige productieniveau weten. Met een beetje moeite kan de lezer nagaan dat het schema 30, 25, 25, 20 optimaal is.

Het algemene probleem kan weer m.b.v. dynamische programmering opgelost worden. Zij  $v_n(x,y)$  de minimale kosten vanaf periode  $n$  als bij het begin van periode  $n$  reeds  $x$  gemaakt is, en in periode  $n-1$   $y$  gemaakt werd

( $x \geq \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ ,  $x \geq y \geq 0$ ). Er geldt:

$$(4.7) \quad v_{N+1}(x,y) = h\left(x - \sum_{i=1}^N d_i\right) + ky ,$$

$$(4.8) \quad v_n(x,y) = h\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right) + \min_{z \geq \sum_{i=1}^n d_i - x} \left\{ cz + k|z-y| + v_{n+1}(x+z, z) \right\}$$

( $n \in \{1, \dots, N\}$ ).

Deze recursieformules kunnen ook voor gröttere problemen m.b.v. de computer erg snel doorgerekend worden.

Tot slot van deze paragraaf zullen we het begrip verdiscontering bespreken.

Vaak waardeert men kosten die pas na  $n$  perioden gemaakt worden, lager dan kosten die men in de huidige periode maakt. Immers, voor het betalen van een bedrag  $K$  na  $n$  perioden, kan men volstaan met nu een kleiner bedrag tegen rente uit te zetten, zodat het na  $n$  perioden precies  $K$  oplevert.

Laat de rentevoet  $r$  (per periode) zijn ( $r > 0$ ). Een bedrag  $K_0$  levert na  $n$  perioden  $K_0(1+r)^n$  op. De kosten  $K$  na  $n$  perioden zijn ons dus nu "waard"

$\frac{K}{(1+r)^n}$ , dit heet de contante waarde.

Men noemt  $\beta := \frac{1}{1+r}$  de verdisconteringsfactor. Er geldt  $\beta \in [0,1)$ . Ook voor een continue tijdsparemeter kunnen we een contante waarde bepalen: Laat de rente  $\alpha$  per tijdseenheid zijn ( $\alpha > 0$ ) en  $K(t)$  de waarde van het kapitaal op tijdstip  $t$ :  $\frac{dK(t)}{dt} = \alpha K(t)$ . Dan geldt  $K(t) = e^{\alpha t} K(0)$  en dus is de contante waarde van een bedrag  $K$  op tijdstip  $t$ :  $e^{-\alpha t} K$ , de verdisconteringsfactor is  $e^{-\alpha t}$ .

In het productieplanningsprobleem uit het begin van deze paragraaf spelen de productiekosten  $c$  wel een rol als de kosten die later gemaakt worden verdisconteerd worden; immers productie uitstellen spaart geld. De recursieformules (4.4), (4.5) worden in dit geval:

$$(4.9) \quad v_n \left( \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) = K + \min_{k \in \{n, \dots, N\}} \left\{ c \sum_{i=n-1}^k d_i + \beta v_{n+1} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \right\}$$

$$(4.10) \quad v_n \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) = h \sum_{i=n}^k d_i + \beta v_{n+1} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \quad (k \in \{n, \dots, N\}).$$

## 2.5. Stochastische vraag; startkosten $K = 0$

In §2.5 en §2.6 zullen we voorraadssystemen beschouwen waarbij de vraag in periode  $n$ ,  $Y_n$ , een stochastische grootheid is. We nemen aan dat  $Y_1, Y_2, \dots$  een rij onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische grootheden met een continue dichtheidsfunctie  $f$  en een verdelingsfunctie  $F$  ( $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$ ) is. De vraag is niet-negatief dus  $f$  en  $F$  zijn geconcentreerd op de niet-negatieve getallen. Het produceren (of het afleveren van bestelde goederen) vindt plaats in een, ten opzichte van de periodelengte, te verwaarlozen tijd. We onderscheiden de volgende kosten:

- kosten voor het starten van de productie (of het doen van een bestelling):  $K$ ,
- productiekosten per eenheid:  $c$ ,
- voorraadkosten per eenheid per tijdseenheid:  $h$ ,
- straffkosten (vanwege het buiten voorraad zijn):  $b$  per eenheid per tijdseenheid.

De voorraad- en straffkosten worden berekend over de voorraad aan het einde van een periode en we veronderstellen dat ze betaald worden aan het begin van de volgende periode. De kosten op tijdstip  $n$  worden verdisconteerd met  $\beta^n$  ( $\beta \in [0,1)$ ). We veronderstellen dat de voorraad aan het einde van de planningsperiode weer op 0 gebracht moet worden:

- overschotten kunnen tegen een dump prijs worden verkocht; elke eenheid die over is, levert  $g$  op ( $g \leq c$ ),
- tekorten moeten door productie worden aangevuld.

We veronderstellen dat  $c < \beta(b+c)$ . Dit betekent dat het goedkoper is om een product nu te produceren dan om het in de volgende periode te produceren en er dan de straffkosten bij te betalen. Gevraagd wordt het productieschema te bepalen dat de laagste totale verwachte verdisconteerde kosten heeft. We zullen ons in §2.5 beperken tot de eenvoudiger situatie waarin  $K = 0$ . Het algemene geval zullen we in §2.6 onderzoeken. In de analyse zullen we gebruik maken van convexe functies

Definitie 5.1.

Een functie  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is convex als  $G(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda G(x) + (1-\lambda)G(y)$  voor alle  $x, y \in \mathbb{R}$  en alle  $\lambda \in [0,1]$ .

Er geldt:

Stelling 5.2

- i) Een differentieerbare functie  $G$  is convex dan en alleen dan als  $G'$  niet dalend is.
- ii) Als  $G_1$  en  $G_2$  convexe functies zijn en  $\alpha \geq 0$ , dan zijn  $G_1 + G_2$  en  $\alpha G$  convexe functies.
- iii) Voor  $f$  een kansdichtheidsfunctie en  $G$  een willekeurige functie, zij  $\tilde{G}$  gedefinieerd door  $\tilde{G}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) f(y) dy$ . Als  $G$  convex is, dan is  $\tilde{G}$  convex.

Bewijs: Voor een bewijs van i) zie Algebra en Analyse. De overige beweringen zijn eenvoudig te bewijzen. □

Aangezien het optimale schema voor het  $n$ -periodenprobleem gebruik maakt van gegevens over het optimale schema van het  $(n-1)$ -periodenprobleem (optimaliteitsprincipe van Bellman) zullen we beginnen met het 1-periodeprobleem te onderzoeken.

Zij  $v_1(x,u)$  de verwachte kosten in het 1-periodeprobleem bij beginvoorraad  $x$  en productie tot  $u$ . Zij  $v_1(x)$  de minimale verwachte kosten bij beginvoorraad  $x$ :  $v_1(x) = \min_{u \geq x} v_1(x,u)$ . Dan geldt ( $x^+ = \max(0,x)$ ,  $x^- = \max(0,-x)$ ):

$$\begin{aligned}
 v_1(x,u) &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta \int_0^{\infty} \{ (h-g)(u-y)^+ + (b+c)(u-y)^- \} f(y) dy = \\
 &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta(h-g) \int_0^u (u-y) f(y) dy + \beta(b+c) \int_u^{\infty} (y-u) f(y) dy = \\
 &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta(h-g) \int_0^u (u-y) f(y) dy + \beta(b+c) \int_0^{\infty} (y-u) f(y) dy \\
 &\quad - \beta(b+c) \int_0^u (y-u) f(y) dy =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta(b+c+h-g) \int_0^u (u-y)f(y)dy + \beta(b+c)\mu + \beta(b+c)u = \\ &= hx^+ + bx^- - cx + G_1(u), \end{aligned}$$

waarin

$$\mu := \int_0^\infty y f(y)dy \quad \text{en}$$

$$G_1(u) := \beta(b+c) + u\{c - \beta(b+c)\} + \beta(b+c+h-g) \int_0^u (u-y)f(y)dy.$$

Er geldt:

Lemma 5.3

- i)  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} G_1(u) = \infty$ ,
- ii)  $G_1'(u) = c - \beta(b+c) + \beta(b+c+h-g)F(u)$ ,
- iii)  $G_1$  neemt z'n minimum aan in het punt  $u_1^*$  waarvoor geldt:

$$F(u_1^*) = \frac{\beta(b+c)-c}{\beta(b+c+h-g)},$$

- iv)  $G_1$  is convex,  $G_1$  is stijgend op  $(u_1^*, \infty)$ .

Bewijs:

- i)  $\lim_{u \rightarrow -\infty} G_1(u) = \infty$ , daar  $c < \beta(b+c)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} G_1(u) = \infty, \text{ daar } \int_0^\infty f(y)dy = 1 \text{ en } c - \beta(b+c) + \beta(b+c+h-g) > 0.$$

- iv) volgt direct uit ii) daar  $F$  niet dalend is.

De overige beweringen zijn eenvoudig te bewijzen. □

De grafiek van  $G_1$  heeft dus de volgende vorm:

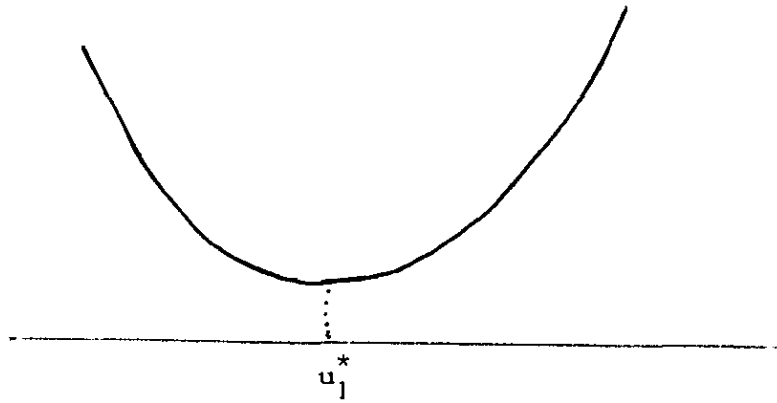


fig.5.1

Het optimale schema voor het 1-periodeprobleem is dus:

als  $x < u_1^*$  produceer tot  $u_1^*$ ,

als  $x \geq u_1^*$  produceer niet.

Voor de optimale kosten geldt:

$$v_1(x) = \begin{cases} hx^+ + bx^- - cx + G_1(u_1^*) & \text{als } x < u_1^* , \\ hx^+ + bx^- - cx + G_1(x) & \text{als } x \geq u_1^* . \end{cases}$$

Zij  $H_1$  gedefinieerd door:

$$H_1(x) = \begin{cases} G_1(u_1^*) & \text{als } x < u_1^* , \\ G_1(x) & \text{als } x \geq u_1^* . \end{cases}$$

Dan geldt:

(5.4)  $H_1$  is een convexe functie,

(5.5)  $H_1$  is constant tot  $u_1^*$ ,

(5.6)  $v_1(x) = hx^+ + bx^- - cx + H_1(x)$ .

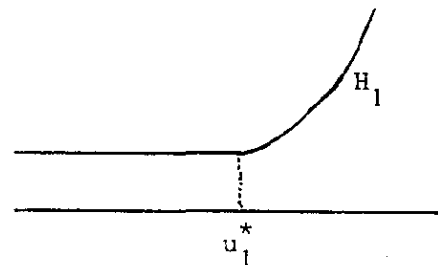


fig. 5.2

We beschouwen nu het 2-periodenprobleem. Zij  $v_2(x,u)$  de verwachte kosten bij beginvoorraad  $x$  als men bij het begin van de eerste periode aanvult tot  $u$  en in de laatste periode het (boven berekende) optimale schema hanteert. Zij  $v_2(x)$  de verwachte minimale kosten bij beginvoorraad  $x$ . Vanwege het optimaliseringsprincipe van Bellman:  $v_2(x) = \min_{u \geq x} v_2(x,u)$ .

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 v_2(x,u) &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta \int_0^{\infty} v_1(u-y)f(y)dy = \\
 &= hx^+ + bx^- + c(u-x) + \beta \int_0^u h(u-y)f(y)dy + \beta \int_u^{\infty} b(y-u)f(y)dy \\
 &\quad - \beta \int_0^{\infty} c(u-y)f(y)dy + \beta \int_0^{\infty} H_1(u-y)f(y)dy \\
 &= \left( \text{we schrijven weer } \int_u^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^u \right) = \\
 &= hx^+ + bx^- - cx + \beta(b+c)u + u\{c - \beta(b+c)\} \\
 &\quad + \beta(b+h) \int_0^u (u-y)f(y)dy + \beta \int_0^{\infty} H_1(u-y)f(y)dy \\
 &= hx^+ + bx^- - cx + G(u) + \beta \tilde{H}_1(u) \\
 &= hx^+ + bx^- - cx + G_2(u)
 \end{aligned}$$



waarin:

$$(5.7) \quad G(u) = \beta(b+c)u + u\{c - \beta(b+c)\} + \beta(b+h) \int_0^u (u-y)f(y) dy,$$

$\tilde{H}_1$  geconstrueerd is uit  $H_1$  als in stelling 5.2 en  $G_2 = G + \beta\tilde{H}_1$ .

Dan geldt (vgl. lemma 5.3):

$$(5.8) \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} G(u) = \infty, \text{ dus ook } \lim_{u \rightarrow \pm\infty} G_2(u) = \infty.$$

(5.9)  $G$  en  $\tilde{H}_1$  zijn convex, dus is ook  $G_2$  convex.

(5.10)  $G$  neemt zijn minimum aan in het punt  $u^*$  met

$$F(u^*) = \frac{\beta(b+c) - c}{\beta(b+h)}.$$

Nu geldt dat  $u_1^* < u^*$ , dus  $G_2$  neemt zijn minimum aan in een punt in  $(u_1^*, u^*)$ .

Zij  $u_2^* = \max\{u; G_2(u) = \min_z G_2(z)\}$ . Dan  $u_2^* \in (u_1^*, u^*)$  en  $G_2$  is stijgend op  $(u_2^*, \infty)$ .

Schematisch:

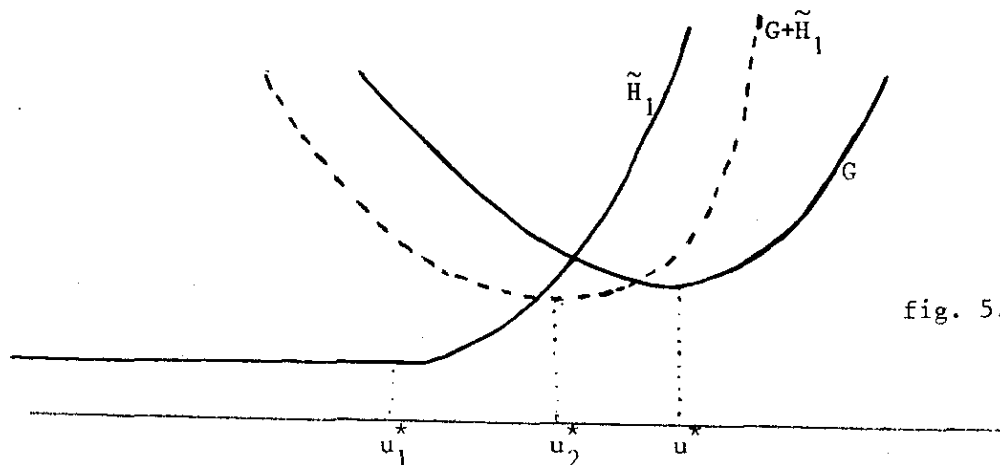


fig. 5.3

Het optimale schema is dus:

- als  $x < u_2^*$  produceer tot  $u_2^*$ ,
- als  $x \geq u_2^*$  produceer niet.

Schrijven we

$$H_2(x) = \begin{cases} G_2(u_2^*) & \text{als } x < u_2^* , \\ G_2(x) & \text{als } x \geq u_2^* , \end{cases}$$

dan geldt  $v_2(x) = hx^+ + bx^- - cx + H_2(x)$  en  $H_2$  heeft dezelfde structuureigenschappen als  $H_1$  ((5.4 en (5.5) met  $u_2^*$  i.p.v.  $u_1^*$ ).

Het zal nu duidelijk zijn dat we met inductie de volgende stelling kunnen bewijzen.

#### Stelling 5.11

Laat  $G$ ,  $\tilde{H}_1$  en  $u^*$  gedefinieerd zijn als boven. Voor  $n \geq 2$  definieer:

$$G_n(u) := G(u) + \beta \tilde{H}_{n-1}(u) ,$$
$$u_n^* := \max \left\{ u ; G_n(u) = \min_z G_n(z) \right\} ,$$
$$H_n(x) := \begin{cases} G_n(u_n^*) & \text{als } x < u_n^* , \\ G_n(x) & \text{als } x \geq u_n^* , \end{cases}$$

$v_n(x) :=$  de verwachte minimale kosten in het  $n$ -periodenprobleem,  
bij beginvoorraad  $x$ .

Dan geldt:

- i)  $G_n$  is convex,  $G_n$  is stijgend op  $(u_n^*, \infty)$ ,
- ii)  $u_n^* \in (u_{n-1}^*, u^*)$ ,

iii) het optimale schema voor het n-periodenprobleem is:

als  $x < u_n^*$  produceer tot  $u_n^*$ ,

als  $x \geq u_n^*$  produceer niet,

iv)  $v_n(x) = hx^+ + bx^- - cx + H_n(x)$ .

Merk op dat het enige dat in het bewijs essentieel gebruikt wordt de structuur van de grafiek van  $G_n$  is (met name de convexiteit).

Opmerking 5.12

Er geldt  $u_{n-1}^* \leq u_n^* \leq u^*$  voor alle n. Dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^*$  bestaat.

Zonder bewijs vermelden we dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^* = u^*$ . Voor het  $\infty$ -horizon-probleem is de stationaire strategie:

als  $x < u^*$  produceer tot  $u^*$ ,

als  $x \geq u^*$  produceer niet,

optimaal. Zij  $v_\infty(x)$  de verwachte minimale kosten in het  $\infty$ -horizon-probleem bij beginvoorraad x. Als  $x \leq u^*$  blijft de voorraad altijd beneden  $u^*$  en kunnen we  $v_\infty(x)$  expliciet berekenen. Er geldt:

$$(5.13) \quad v_\infty(x) = hx^+ + bx^- + c(u^* - x) + \beta \int_0^\infty v_\infty(u^* - y) f(y) dy \quad (x \leq u^*).$$

Dus geldt voor alle  $x \leq u^*$ :

$$(5.14) \quad v_\infty(x) = hx^+ + bx^- + c(u^* - x) - hu^* + v_\infty(u^*).$$

Substitueren we (5.4) (met  $x = u^* - y$ ) in (5.13) (met  $x = u^*$ ), dan zien we:

$$(5.15) \quad v_\infty(u^*) = (h-c)u^* + \frac{G(u^*)}{1-\beta}.$$

2.6. Startkosten:  $K > 0$

We houden in deze paragraaf de notaties van de vorige sectie aan. We onderzoeken eerst weer het 1-periodenprobleem. Analoog aan §2.5 geldt:

$$v_1(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u}^K + G_1(u) + \beta \int_0^\infty \gamma_{u,y}^K f(y) dy ,$$

waarin

$$(6.1) \quad \gamma_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{als } s \geq t , \\ 1 & \text{als } s < t . \end{cases}$$

Nu geldt:

$$\int_0^\infty \gamma_{u,y}^K f(y) dy = K(1 - F(u)) , \quad \text{dus schrijven we}$$

$$(6.2) \quad L_1(u) = G_1(u) + \beta K(1 - F(u)) ,$$

dan geldt:

$$(6.3) \quad v_1(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u}^K + L_1(u) .$$

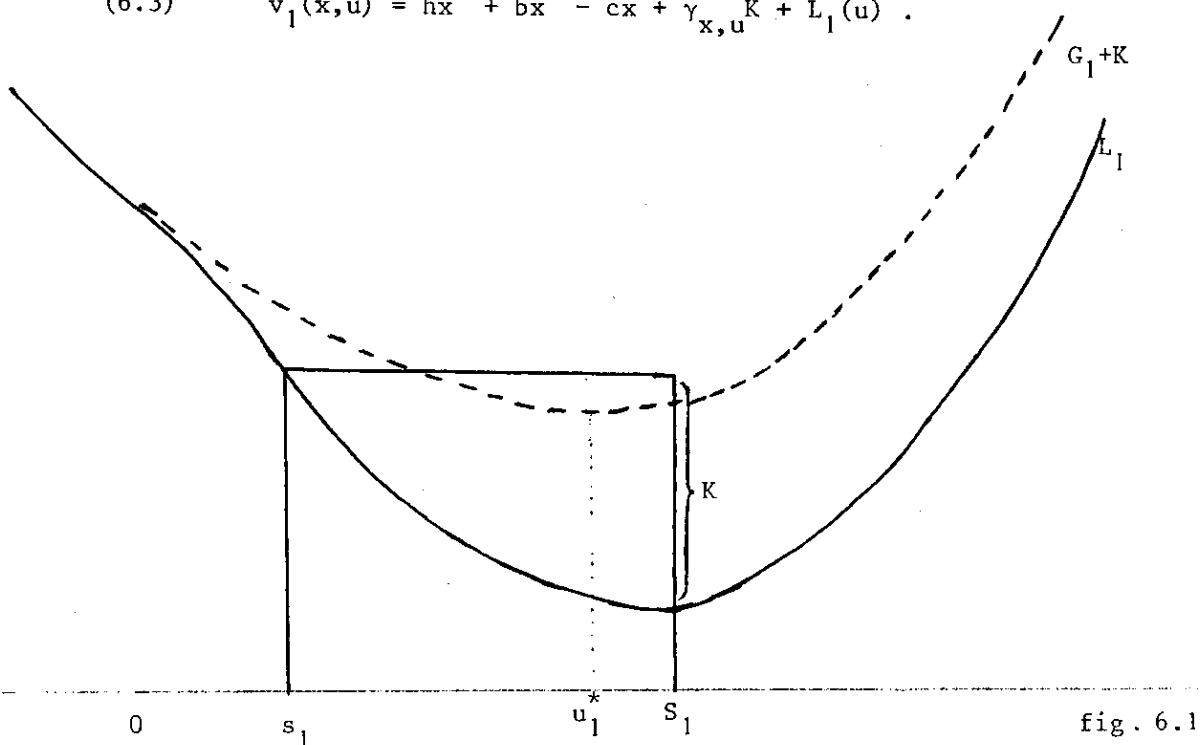


fig. 6.1

In fig. 6.1 zien we dat  $L_1$  niet (noodzakelijk) convex is. Zij

$$(6.4) \quad S_1 := \max\{u ; L_1(u) = \min_z L_1(z)\}.$$

Dan geldt  $S_1 > u_1^*$ . Vanwege fig. 6.1 vermoeden we dat productie niet verstandig zal zijn als  $x > S_1$ . Echter ook als  $x$  "niet veel kleiner" is dan  $S_1$  geldt:  $L_1(x) < K + L_1(S_1)$  en dus is productie niet verstandig. Zij

$$(6.5) \quad s_1 = \max\{u < S_1, L_1(u) = K + L_1(S_1)\}.$$

Uit fig. 6.1 halen we:

#### Vermoeden 6.6

Voor het 1-periodenprobleem is de  $(s_1, S_1)$ -regel optimaal; d.w.z. optimaal is:

- als  $x < s_1$  produceer tot  $S_1$ ,
- als  $x \geq s_1$  produceer niet.

Dit vermoeden kan door uitschrijven geverifieerd worden (ga na). We zullen het bewijzen met gebruikmaking van het begrip K-convexiteit. M.b.v. dit begrip kunnen we zelfs bewijzen dat voor elke periode een  $(s, S)$ -regel optimaal is.

#### Definitie 6.7

Zij  $L$  een functie,  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $a, b \in \mathbb{R}$  met  $a \neq b$ . Zij  $\ell_a^b$  de functie waarvan de grafiek de lijn door  $(a, L(a))$  en  $(b, L(b))$  is:

$$(6.8) \quad \ell_a^b(x) = L(a) + (x-a) \frac{L(b) - L(a)}{b - a} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

De functie  $L$  is  $K$ -convex als voor alle  $a, b, x \in \mathbb{R}$  met  $a < b < x$  geldt dat

$$L(x) \geq \ell_a^b(x) - K.$$

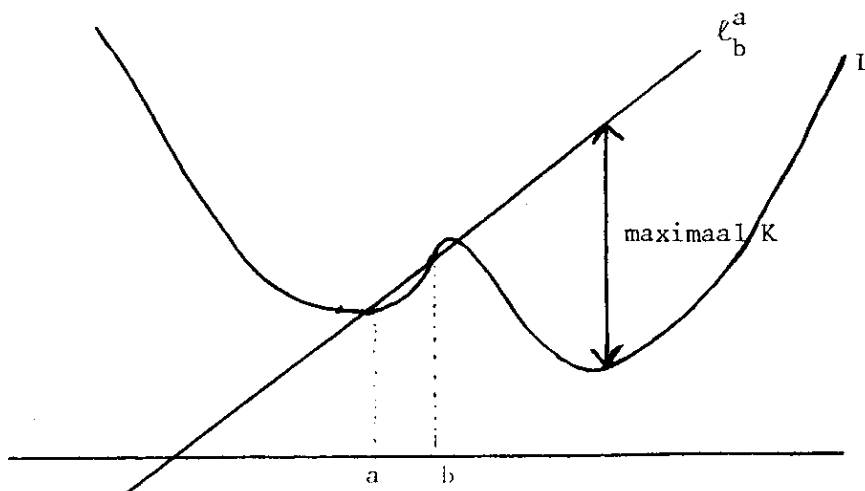


fig.6.2

De lezer kan zelf de volgende stelling bewijzen:

Stelling 6.9 (vgl stelling 5.2)

- i) Een functie is  $0$ -convex dan en alleen dan wanneer hij convex is.
- ii) Als  $K_1 \leq K_2$  en  $L$  is  $K_1$ -convex, dan is  $L$  ook  $K_2$ -convex.
- iii) Als  $L_1$  een  $K_1$ -convexe functie is,  $L_2$  een  $K_2$ -convexe functie en  $\alpha \geq 0$ , dan is  $L_1 + L_2$   $(K_1 + K_2)$ -convex en  $\alpha L_1$  is  $\alpha K_1$ -convex.
- iv) Voor een willekeurige functie  $L$  en een dichtheidsfunctie  $f$  zij  $\tilde{L}$  gedefinieerd door  $\tilde{L}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x-y) f(y) dy$ . Als  $L$  een  $K$ -convexe functie is, dan is ook  $\tilde{L}$  een  $K$ -convexe functie.
- v) De functie  $L_1$  gedefinieerd door (6.2) is  $K$ -convex.

Aan de basis van stelling 5.12 lag het feit dat (als  $K=0$ ) voor elke  $n$

geldt dat  $v_n(x, u) = hx^+ + bx^- - cx + G_n(u)$  met  $G_n$  een convexe

functie. We zullen bewijzen dat als  $K > 0$  voor elke  $n$  geldt dat  $v_n(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u} K + L_n(u)$ , waarin  $L_n$  een  $K$ -convexe functie is. Bovendien zullen we bewijzen dat in dit geval voor elke  $n$  een  $(s_n, S_n)$ -regel optimaal is.

Stelling 6.10

Stel  $v_n(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u} K + L_n(u)$  met  $L_n$  een  $K$ -convexe functie.

Zij

$$S_n = \max \{u ; L_n(u) = \min_z L_n(z)\} ,$$

$$s_n = \max \{u < S_n ; L_n(u) = K + L_n(S_n)\} .$$

Dan is in het  $n$ -periodenprobleem de  $(s_n, S_n)$ -regel optimaal.

Bewijs:

Voor  $a, b \in \mathbb{R}$  met  $a \neq b$  zij  $\ell_a^b$  de functie geconstrueerd uit  $L_n$  als in (6.8).

Geval 1:  $x > S_n$ . We moeten bewijzen dat voor alle  $u > x$  geldt:

$L_n(x) \leq K + L_n(u)$ . Welnu, stel  $L_n(x) > K + L_n(u)$  voor zekere  $u$ . Dan geldt:

$L_n(u) < \ell_{S_n}^x(u) - K$ , wat in tegenspraak is met de  $K$ -convexiteit van  $L_n$ .

Geval 2:  $x \in (s_n, S_n)$ . We moeten bewijzen  $L_n(x) \leq K + L_n(S_n)$ . Welnu, als

$L_n(x) > K + L_n(S_n)$  dan geldt  $L_n(S_n) < \ell_{s_n}^x(S_n) - K$ , wat een tegenspraak is.

Geval 3:  $x < s_n$ . We moeten bewijzen dat  $K + L_n(S_n) \leq L_n(x)$ . Dit gaat

analoog aan de gevallen 1 en 2. □

Stelling 6.11

Stel  $v_n(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u} K + L_n(u)$ , met  $L_n$  een  $K$ -convexe

functie. Dan geldt:  $v_{n+1}(x,u) = hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u} K + L_{n+1}(u)$ , met

$L_{n+1}$  een  $K$ -convexe functie.

Bewijs:

Laat  $S_n$  en  $s_n$  gedefinieerd zijn als in stelling 6.10. Definieer

$$M_n(x) = \begin{cases} K + L_n(S_n) & \text{als } x < s_n, \\ L_n(x) & \text{als } x \geq s_n. \end{cases}$$

Dan geldt (ga na):

i)  $v_n(x) = hx^+ + bx^- - cx + M_n(x)$ ,

ii)  $M_n$  is een K-convexe functie.

Er geldt:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x,u) &= hx^+ + bx^- + \gamma_{x,u}K + c(u-x) + \beta \int_0^\infty v_n(u-y) f(y) dy \\ &= hx^+ + bx^- - cx + \gamma_{x,u}K + G(u) + \beta \int_0^\infty M_n(u-y) f(y) dy \\ &= \gamma_{x,u}K + hx^+ + bx^- - cx + G(u) + \beta \tilde{M}_n(u) = \\ &= \gamma_{x,u}K + hx^+ + bx^- - cx + L_{n+1}(x) \end{aligned}$$

waarin  $\tilde{M}_n$  geconstrueerd is uit  $M_n$  als in stelling 6.9 iv) en  $L_{n+1} = G + \beta \tilde{M}_n$ .

Nu geldt:  $G$  is 0-convex en  $\tilde{M}_n$  is K-convex, dus is  $L_{n+1}$  (op grond van stelling 6.9) K-convex. □

Omdat  $L_1$  een K-convexe functie is, volgt uit de stellingen 6.10 en 6.11:

Gevolg 6.12

Voor elke  $n$  bestaan er  $s_n$  en  $S_n$ , zodat voor het  $n$ -periodenprobleem de  $(s_n, S_n)$ -regel optimaal is.



Opmerking 6.13

Men kan bewijzen dat ook voor het  $\infty$ -horizon-probleem een  $(s,S)$ -regel optimaal is. In dit geval hangen  $s$  en  $S$  niet meer van de periode af: de optimale strategie is stationair.

Voorbeelden van optimalisering in lineaire regelsystemen

We zullen enige voorbeelden uit de regeltheorie bespreken. Hiertoe hebben we resultaten uit dit vakgebied nodig die we niet zullen bewijzen. We verwijzen hiervoor naar het college: "Optimalisering van regelsystemen". Centraal staat het maximumprincipe, een principe dat sterk met dynamische programmering verwant is.

Een lineair regelsysteem wordt beschreven door een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = b, \quad u(t) \in U$$

waarbij  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $A$   $n \times n$  matrix,  $B$   $n \times m$  matrix,  $x(t)$  de toestand van het systeem op tijdstip  $t$ ,  $u(t)$  de waarde van de stuurgrootte op tijdstip  $t$  en  $U$  de verzameling van toegelaten waarden van de stuurgrootte. Het systeem start op  $t = 0$  in  $b$ . De bestuurder moet een stuksgewijs continue functie  $u(t)$  kiezen (met  $u(t) \in U$ ). De verzameling van alle stuksgewijs continue functies  $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow U$  noemen we  $\Omega$ . Alvorens het optimaliseringsprobleem te schetsen zullen we eerst de oplossing van (1) bepalen voor een vast gekozen  $u \in \Omega$ . Beschouw eerst het homogene stelsel:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) .$$

Eenvoudig is in te zien dat iedere kolom van de matrix  $e^{At}$  gedefinieerd door:

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

een oplossing van (2) is. (Ga dit na.) De matrix  $e^{At}$  heeft de volgende eigenschappen:  $Ae^{At} = e^{At}A$  en  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ . Om nu het inhomogene stelsel (1) op te lossen voeren we de volgende transformatie uit:  $y(t) := e^{-At}x(t)$ . Dus  $x(t) = e^{At}y(t)$  en  $\dot{x}(t) = Ae^{At}y(t) + e^{At}\dot{y}(t)$ . Door dit te substitueren in (1) krijgen we

$$Ae^{At}y(t) + e^{At}\dot{y}(t) = Ae^{At}y(t) + Bu(t)$$

en dus

$$\dot{y}(t) = e^{-At}Bu(t) .$$

Integratie geeft:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-As}Bu(s)ds .$$

En terug transformeren geeft de expliciete oplossing van (1):

$$(3) \quad x(t) = e^{At}b + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds .$$

Deze oplossing hangt van  $u$  af. We noteren dit als  $x_u(t)$ .

De regeltheorie wordt o.a. toegepast in de chemische proces besturing, bij besturing van elektrische of mechanische systemen doch ook bij productieplanning. In feite hebben we in het vorige hoofdstuk al een eenvoudig voorbeeld gezien: het machine planningsprobleem met constante vraag- en productiesnelheid. Daar werd het model beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\dot{x}(t) = -d + pu(t), \quad u(t) \in \{0,1\} .$$

In de regeltheorie beschouwt men allerlei optimaliseringsproblemen; wij zullen het probleem van de *tijdoptimale besturing* beschouwen. D.w.z. zoek een  $u \in \Omega$  zodanig dat, voor  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$T_u := \min\{t \mid x_u(t) \in X\}$$

minimaal is.

Van de structuur van de optimale besturing zullen we enige eigenschappen bespreken. Voor de eenvoud veronderstellen we dat  $U := [-1,1]$  en dat  $X := \{0\}$ . Laat  $K(t)$  de verzameling van alle mogelijke toestanden van het systeem zijn op tijdstip  $t$ ;  $K(t) := \{x_u(t) \mid u \in \Omega\}$ .

Er geldt:

- 1) De verzameling  $K(t)$  is *convex*, want laat  $\alpha, \beta \in K(t)$  dan zijn er besturingen  $u_\alpha$  en  $u_\beta$  zodat  $x_{u_\alpha}(t) = \alpha$  en  $x_{u_\beta}(t) = \beta$ . De besturing

$$u_\lambda(s) := \lambda u_\alpha(s) + (1 - \lambda)u_\beta(s), \quad 0 \leq s \leq t, \quad \lambda \in [0,1]$$

is toegelaten en geeft  $x_{u_\lambda}(t) = \lambda x_{u_\alpha}(t) + (1 - \lambda)x_{u_\beta}(t)$ .

- 2) De verzameling  $K(t)$  is *gesloten* (dit bewijzen we niet).
- 3) De functie  $K(\cdot)$  is *continu* (dit bewijzen we niet):  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \geq 0$  zodanig dat

$$\rho(K(t), K(s)) \leq \epsilon \quad \text{als} \quad |t - s| \leq \delta$$

waarbij  $\rho$  een metriek is op de compacte verzamelingen in  $\mathbb{R}^n$ . Bijvoorbeeld:

$$\rho(S, T) = \max\{\max(d(x, T), d(y, S)); x \in S, y \in T\}$$

met

$$d(x, T) = \min\{d(x, y); y \in T\}.$$

Met de eigenschappen 2 en 3 is eenvoudig in te zien dat voor de minimale tijd  $t^*$  geldt: *de oorsprong ligt op de rand van  $K(t^*)$ .*

Tezamen met de convexiteit van  $K(t)$  impliceert dit het bestaan van een *ondersteunend hypervlak* in 0 (dit wordt niet bewezen; vgl. echter hoofdstuk III, st. 5.22). D.w.z. er is een  $p \in \mathbb{R}^n$  zodanig dat

$$p^T x \leq 0, \forall x \in K(t^*) .$$

Hierin is  $p$  de normaal in 0 op dit hypervlak.

Equivalent met deze bewering is

$$(4) \quad \max_{u \in \Omega} \{p^T x_u(t^*)\} = 0$$

(want er is een besturing  $u^*$  zodat  $x_{u^*}(t^*) = 0$ ).

Beschouw voor  $u \in \Omega$  de vergelijking

$$(5) \quad p^T x_u(t^*) = p^T e^{At^*} b + \int_0^{t^*} p^T e^{A(t^*-s)} B u(s) ds$$

en noem  $\eta(s) := p^T e^{A(t^*-s)}$  (dus  $\eta$  is een rijvector).

Er geldt nu

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad & \eta(t^*) = p^T \\ \text{ii)} \quad & \dot{\eta}(s) = p^T e^{A(t^*-s)} (-A) = -\eta(s)A, \quad 0 \leq s \leq t^*. \end{aligned}$$

De vergelijking

$$(7) \quad \dot{\eta}(s) = -\eta(s)A$$

wordt de *geadjungeerde vergelijking* genoemd.

We kunnen (5) nu schrijven als:

$$p^T x_u(t^*) = \eta(0)b + \int_0^{t^*} \eta(s)Bu(s) ds .$$

Eenvoudig is in te zien dat het maximum in (4) bereikt wordt door  $\eta(s)Bu(s)$ ,  $0 \leq s \leq t^*$  maximaal te kiezen.

Dus we vinden als noodzakelijke voorwaarde voor de optimaliteit van  $u^* \in \Omega$ :

$$(8) \quad \eta(s)Bu^*(s) = \max_{u \in U} \eta(s)Bu, \quad 0 \leq s \leq t^*$$

met  $\eta$  oplossing van (6).

Dit is een speciaal geval van het *maximumprincipe van Pontryagin*.

Uit (8) volgt:

$$\begin{aligned} u(s) &= -1 \text{ als } \eta(s)B < 0, \\ u(s) &= 1 \text{ als } \eta(s)B > 0. \end{aligned}$$

De keuze van  $u(s)$  is onbelangrijk als  $\eta(s)B = 0$ . Als  $\eta(\cdot)B$  discrete nulpunten heeft (d.w.z. in  $[0, t^*]$  eindig veel) dan hebben we met (8) en dus met (4) de structuur van de optimale besturing bepaald:  $u^*(s) = \pm 1$  behalve in eindig veel punten uit  $[0, t^*]$ . Zo'n besturing die bijna steeds op de rand van  $U$  ligt wordt een *bang-bang* besturing genoemd. We zullen een tweetal voorbeelden bespreken van tijdoptimale besturing van mechanische systemen.

Voorbeeld 1. Een wagen, met massa 1, beweegt zonder wrijving langs een rechte weg. De plaats van de wagen, t.o.v. de oorsprong, op tijdstip  $t$  wordt voorgesteld door  $x_1(t)$ . De snelheid door  $x_2(t) := \dot{x}_1(t)$ . Op de wagen mag een kracht  $u(t)$  uitgeoefend worden,  $|u(t)| \leq 1$ , langs de weg. Gevraagd wordt de wagen zo vlug mogelijk in de oorsprong stil te zetten. De beginvoorwaarden zijn:

$$x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b.$$

Volgens de wet van Newton geldt:  $u(t) = \dot{x}_2(t)$  zodat het systeem beschreven wordt door:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = a, \quad x_1(t^*) = 0 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = b, \quad x_2(t^*) = 0 \end{aligned}$$

(waarbij  $t^*$  de gevraagde minimale tijd is).

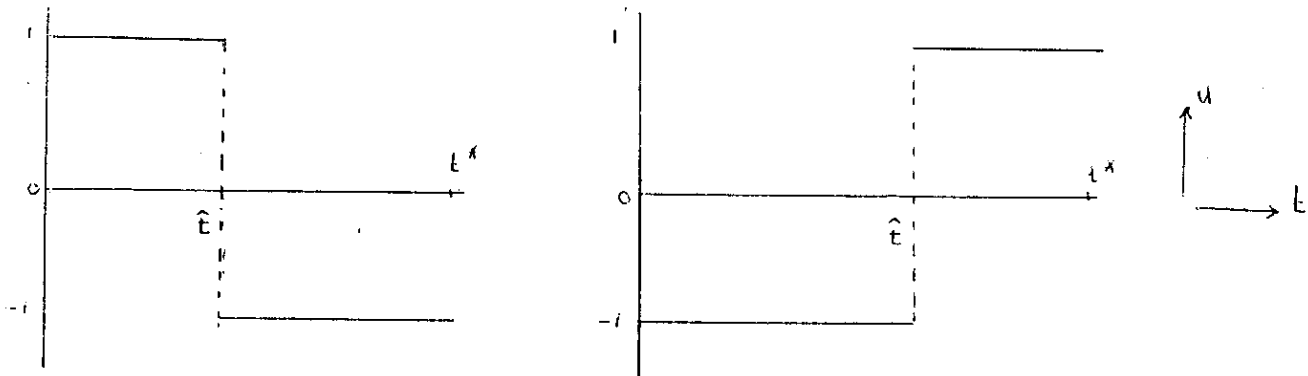
In matrixnotatie:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

We beschouwen nu de geadjungeerde vergelijking (7):

$$(\dot{\eta}_1(s), \dot{\eta}_2(s)) = -(\eta_1(s), \eta_2(s)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, -\eta_1(s)).$$

Hieruit volgt dat  $\eta_1(s)$  constant is en dus dat  $\eta_2(s)$  lineair is. Maar dan heeft  $\eta(s)B = (0, \eta_2(s))$  ten hoogste één nulpunt. Dit betekent dat de optimale besturing slechts één maal kan overschakelen daar het een bang-bang besturing moet zijn en dus een van de volgende gedaantes heeft.



(eventueel  $\hat{t} = 0$  of  $\hat{t} = t^*$ ). We onderzoeken eerst  $u(\cdot) = 1$ . Uit (9) zien we dat

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t + b \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}t^2 + bt + a \end{aligned}$$

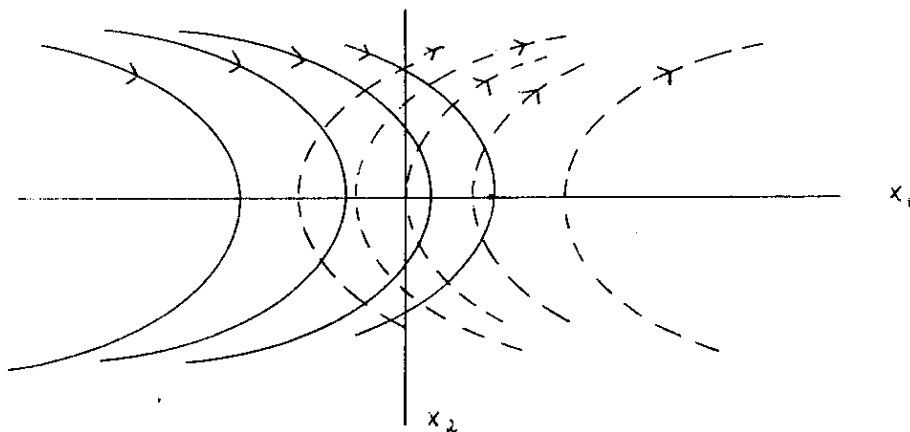
Eliminatie van  $t$  geeft de baan in het  $(x_1, x_2)$ -vlak:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c$$

Geheel analoog vinden we voor  $u(\cdot) = -1$ :

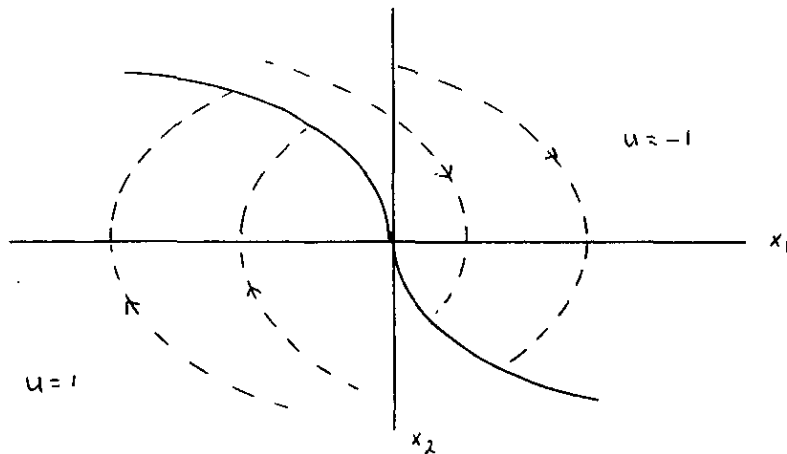
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c$$

De oplossingen zijn parabolen:



In het bovenhalfvlak is de snelheid positief dus worden de parabolen van links naar rechts doorlopen; in het benedenhalfvlak van rechts naar links. Door ieder punt  $(x_1, x_2)$  gaat er precies één baan, zodanig dat we met ten hoogste éénmaal overschakelen op een andere parabool, in de oorsprong komen. Hiermee ligt de optimale besturing vast.

Stuur:  $u = -1$  boven de *schakelkromme* en  $u = 1$  eronder, en stap over op de schakelkromme in het snijpunt.



De schakelkromme voldoet aan

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2^2, \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}x_2^2, \quad x_1 < 0. \end{aligned}$$

De optimale besturing in formulevorm:

$$u(t) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}\{x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)^2\} & \text{als } x_1(t) > 0, \\ -\operatorname{sgn}\{x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)^2\} & \text{als } x_1(t) < 0, \\ -\operatorname{sgn}\{x_2(t)\} & \text{als } x_1(t) = 0. \end{cases}$$

waarin  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Merk op dat  $u(t)$  alleen van  $x_1(t)$  en  $x_2(t)$  afhangt. Dit heet *terugkoppeling*.

Voorbeeld 2. Beschouw een slinger die zo snel mogelijk in de evenwichtsstand tot rust gebracht moet worden. Hiertoe kan in horizontale richting een kracht  $|u| \leq 1$  uitgeoefend worden.

We veronderstellen dat de lengte van de slinger groot is in verhouding tot de beginuitwijking. Dit impliceert met behulp van de formule van Newton dat de bewegingsvergelijking bij benadering wordt:

$$u(t) = m\ddot{x}_1(t) + \frac{mg}{\ell} x_1(t)$$

(hierbij is  $g$  de gravitatieconstante,  $\ell$  de lengte van de slinger en  $m$  de massa;  $\frac{mg}{\ell} x_1(t)$  is bij benadering de resultante van de gravitatie kracht). Voor de eenvoud zullen we veronderstellen dat  $\ell = g$  en  $m = 1$ . De beginvoorwaarden zijn:  $x_1(0) = a$ ,  $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = b$ . Het systeem wordt beschreven door

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad x(t^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beschouw weer de geadjungeerde vergelijking (7):

$$(\dot{\eta}_1(s), \dot{\eta}_2(s)) = -(\eta_1(s), \eta_2(s)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\eta_2(s), -\eta_1(s))$$

Dus

$$\ddot{\eta}_2(s) + \eta_2(s) = 0 \text{ en } \ddot{\eta}_1(s) + \eta_1(s) = 0 .$$

Hieruit volgt dat  $\eta_2(s) = \lambda \sin(s + \varphi)$  voor een  $\lambda$  en  $\varphi$  en dus liggen de nulpunten van  $\eta_2$  op onderlinge afstand  $\pi$ . Evenzo voor  $\eta_1$ . Daar  $\eta(s)B = \eta_2(s)$  heeft de optimale besturing de vorm

$$u(s) = \text{sgn}(\eta_2(s)) .$$

En hier zien we uit dat de tijd tussen 2 maal overschakelen precies  $\pi$  is.

We gaan weer de banen in het  $(x_1, x_2)$ -vlak construeren.

Eerst  $u(\cdot) = 1$ :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 1 .$$

Door eliminatie van  $t$  vinden we

$$x_2^2 + (x_1 - 1)^2 = c .$$

Evenzo voor  $u(\cdot) = -1$ :

$$x_2^2 + (x_1 + 1)^2 = c .$$

De hoeksnelheid in deze cirkels bepalen we als volgt. Kies  $u(\cdot) = 1$ .

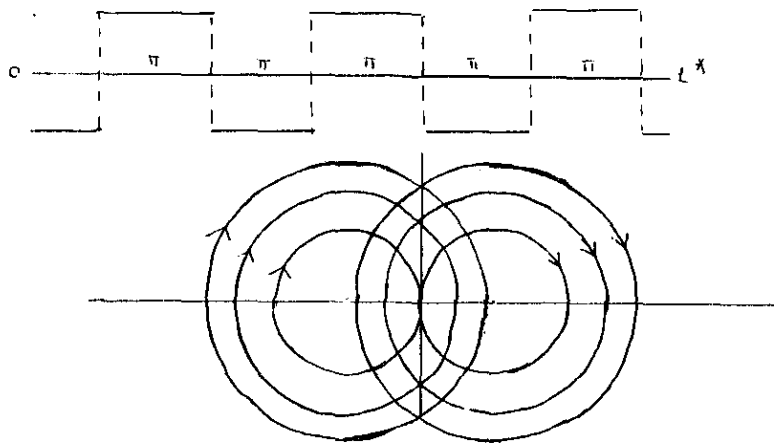
$\ddot{x}_1(t) = -x_1(t) + 1$ . Laat  $z(t) := x_1(t) - 1$ .

Dus  $z(t) = r \sin(t + \varphi)$  en  $x_2(t) = r \cos(t + \varphi)$  zodat de hoeksnelheid 1 is.

Evenzo voor de cirkels behorend bij  $u(\cdot) = -1$ .

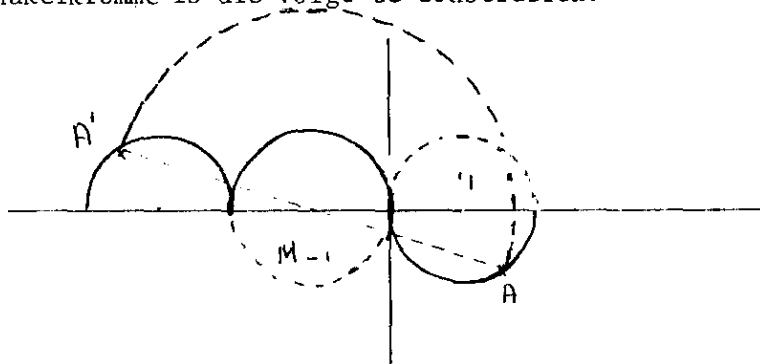
Deze eigenschap tezamen met de wetenschap dat tussen 2 maal overschakelen een tijdsinterval  $\pi$  ligt, betekent dat steeds een halve cirkel in het  $(x_1, x_2)$ -vlak doorlopen wordt, behalve misschien het eerste en laatste stuk van de baan, welke  $\leq \pi$  zijn:



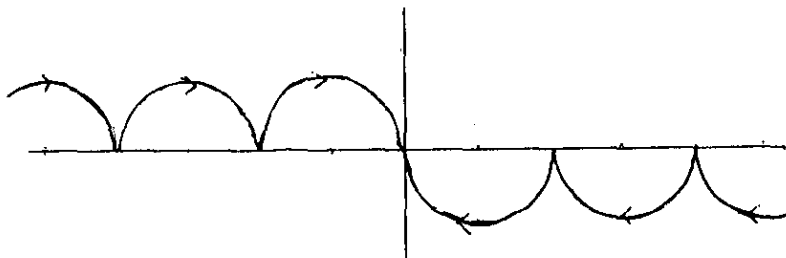


De doorlooprichting is eenvoudig te vinden: met de klok mee.

De schakelkromme is als volgt te construeren.



Kies een punt A op de onderhelft van de cirkel  $M_1$ . Verplaats dit punt over  $-\pi$  rad. langs de cirkel door A met middelpunt  $-1$ . Het laatste stuk van een baan moet gaan van A naar 0 en dus het voorlaatste van A' naar A. Door dit voor alle punten van de benedenhelft van  $M_1$  te doen vinden we een halve cirkel met straal 1 en middelpunt  $-3$ . Zo vinden we uiteindelijk de schakelkromme:



Optimaal sturen door boven de schakelkromme  $u = -1$  te kiezen en  $u = 1$  er onder.

### III. Speltheorie

#### 3.1. Inleiding

In de speltheorie bestudeert men beslissingssituaties, waarin meerdere beslissers een rol spelen. In deze situaties is steeds sprake van een systeem, dat door meerdere "spelers", die elk een eigen waardering voor de verschillende eindtoestanden van het systeem hebben, beïnvloed wordt. Voorbeelden zijn gezelschapsspelen zoals schaken en bridge, maar ook allerlei economische, politieke en militaire situaties. Vrijwel algemeen wordt aanvaard dat de grondslag van de speltheorie gelegd werd in:

J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Annalen 100 (1928) 259-320.

De theorie werd echter pas in wijde kring bekend bij het verschijnen van:

J. von Neumann en O. Morgenstern: The theory of games and economic behavior 1944, (studiebibl. WSK).

Een goede inleiding in de speltheorie geven de volgende boeken (alle aanwezig in de studiebibl. WSK).

J. Mc Kinsey : Introduction to the theory of games, 1952.

R.D. Luce en H. Raiffa: Games and Decisions, 1957.

G. Owen : Game theory 1968.

N.N. Vorob'ev : Game theory, 1977.

A.J. Jones : Game theory, 1980.

Populaire verhandelingen zijn:

M.D. Davis : Game theory (leeszaal, duitse vertaling in bibl. WSK).

J.D. Williams : Speltheorie (studiebibl. WSK, deze Marka pocket behandeld slechts een beperkte klasse van spelen).

#### 3.2. Voorbeelden

In de inleiding van de syllabus is een voorbeeld gegeven van een spel dat via dynamische programmering opgelost kan worden. Het daar gegeven spel was dynamisch: er moesten zetten na elkaar gedaan worden. In het volgende voorbeeld laten we zien dat zo'n dynamisch spel gereduceerd kan worden tot een statisch spel (er hoeft slechts 1 keer een zet gedaan te worden). Bij deze reductie speelt het begrip strategie een belangrijke rol.

Voorbeeld 2.1.

Op tafel liggen 4 lucifers. Het spel wordt gespeeld door twee spelers,  $P_1$  en  $P_2$ . De volgorde is  $P_1, P_2, P_1, P_2, \dots$ , tot het spel afgelopen is. Elke speler mag, als hij aan de beurt is, 1 of 2 lucifers wegnemen. Diegene die de laatste lucifer wegneemt ontvangt een bedrag gelijk aan het aantal lucifers dat hij heeft weggenomen plus het aantal beurten dat het spel geduurd heeft. De andere speler ontvangt een bedrag gelijk aan het aantal lucifers dat hij heeft weggenomen.

De spelboom is:

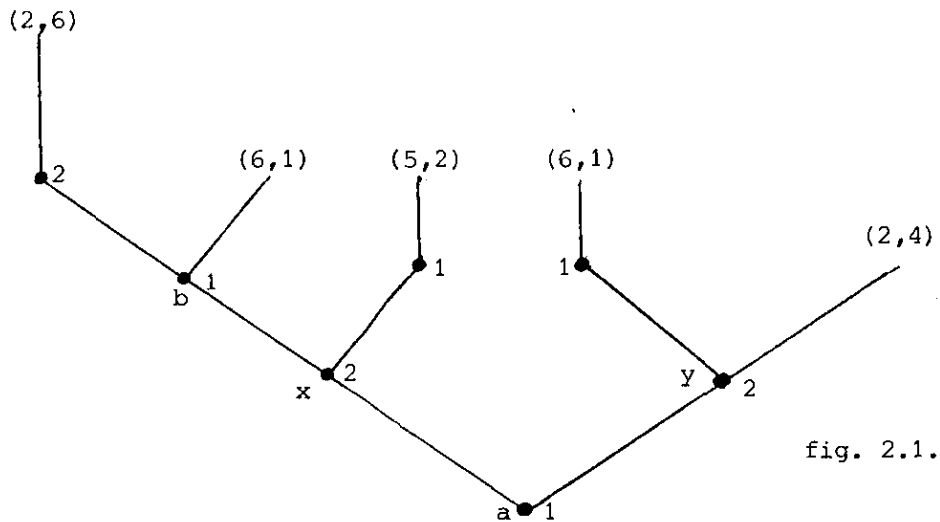


fig. 2.1.

$i \in \{1,2\}$  betekent:  $P_i$  is aan de beurt. Steeds is de linker-(of verticale) tak 1 wegnemen en de rechtertak 2 wegnemen.  $(2,6)$  betekent:  $P_1$  ontvangt 2,  $P_2$  ontvangt 6.

M.b.v. dynamische programmering kan de optimale manier van spelen bepaald worden:  $P_1$  moet 1 wegnemen in a en 2 in b.  $P_2$  moet 2 wegnemen in x en 2 in y.

Stel dat  $P_1$  iemand anders (of een machine) voor hem wil laten spelen, maar toch wil dat die ander precies speelt, zoals hij dat ook gedaan zou hebben. Hij moet dan die ander zeggen wat hij moet doen in a en in b. Voor de overige punten waar  $P_1$  aan de beurt is, hoeft hij niets voor te schrijven omdat daar slechts 1 actie mogelijk is. Zo'n voorschrift, met behulp waarvan een vervanger kan spelen zoals jij dat wilt, noemen we een strategie.

Een voorbeeld van een strategie voor  $P_1$  is: neem 1 weg in a, neem 2 weg in b. We noteren deze strategie met  $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , of kortweg met (12). De andere strategieën van  $P_1$  zijn (11), (21) en (22).

Een strategie van  $P_2$  is een voorschrift dat zegt wat er gedaan moet worden in x en in y. Voorbeeld: doe 2 in x en 1 in y. Notatie  $\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , of korter (21). De overige strategieën van  $P_2$  zijn (11), (12) en (22).

Als een speler van te voren zijn strategie bepaalt dan houdt dit geen beperking van zijn mogelijkheden in. Wel betekent het, dat hij ook voor allerlei situaties - die als het spel gespeeld is helemaal niet blijken te zijn voorgekomen - bedacht had, wat hij zou doen als hij in die situatie terecht zou zijn gekomen. Als beide spelers van te voren hun strategie bepalen dan hoeft het spel in principe niet meer gespeeld te worden: de spelers kunnen hun strategie inleveren bij een scheidsrechter en die kan de uitslag van het spel bepalen. We kunnen nu bij het oorspronkelijke (dynamisch) spel een nieuw (statisch) spel maken, nl. het spel waarin de spelers de keuze maken welke strategie zij zullen spelen (merk op dat in dit nieuwe spel de spelers simultaan hun keuze maken; de een weet bij voorbaat niet welke strategie de ander zal spelen). Dit nieuwe spel noemen we de normale vorm van het oorspronkelijke spel (dat wel een spel in uitgebreide vorm genoemd wordt). We kunnen de normale vorm als volgt weergeven:

$P_1 \backslash P_2$				
	(11)	(12)	(21)	(22)
(11)	(2,6)	(2,6)	(5,2)	(5,2)
(12)	(6,1)	(6,1)	(5,2)	(5,2)
(21)	(6,1)	(2,4)	(6,1)	(2,4)
(22)	(6,1)	(2,4)	(6,1)	(2,4)

fig. 2.2

verticaal staan de strategieën van  $P_1$ , horizontaal die van  $P_2$ . Als  $P_1$  (21) speelt en  $P_2$  (12) is de uitbetaling aan  $P_1$  2 en de uitbetaling aan  $P_2$  4.

In fig.2.1 zagen we dat voor  $P_1$  (12) optimaal is en voor  $P_2$  (22). Laten we eens kijken of we dit ook uit fig.2.2 kunnen halen. Vergelijk eens de strategieën (11) en (12) van  $P_1$ . Het is duidelijk dat  $P_1$  (12) prefereert. Immers (12) haalt tegen alle strategieën van  $P_2$  minstens evenveel als (11) en tegen sommige zelfs meer. We zeggen: (12) domineert (11).  $P_1$  zal dus nooit (11) spelen en we kunnen het spel reduceren tot:

	(11)	(12)	(21)	(22)
(12)	(6,1)	(6,1)	(5,2)	(5,2)
(21)	(6,1)	(2,4)	(6,1)	(2,4)
(22)	(6,1)	(2,4)	(6,1)	(2,4)

fig. 2.3

Bekijk nu eens de strategieën van  $P_2$  : (22) is duidelijk de beste ((22) domineert alle andere strategieën). We kunnen het spel verder reduceren tot

	(22)
(12)	(5,2)
(21)	(2,4)
(22)	(2,4)

fig. 2.4

Maar nu zien we dat voor  $P_1$  (12) de beste strategie is. Dus  $P_1$  speelt (12) en  $P_2$  speelt (22) (Ga na dat we tot dezelfde uitkomst komen als we beginnen met strategieën van  $P_2$  weg te strepen).

In het bovenstaande hebben we gezegd: "het is optimaal voor  $P_1$  om (12) te spelen". Maar we hebben geen definitie van optimaal handelen in spelsituaties gegeven. In 1-persoons beslissingssituaties (hfdst. 1 en 2) is optimaal handelen: maximaliseer de winst (minimaliseer het verlies). In voorbeeld 2.1 hebben we terugwerkend steeds gemaximaliseerd. Maar wat is het uiteindelijke resultaat?

Bekijk nogmaals fig. 2.1. Voor  $P_1$  is de keuze van 1 in a alleen optimaal (levert de maximale winst) als  $P_2$  in y inderdaad 2 kiest. Als  $P_2$  in y 1 zou kiezen, dan kan  $P_1$  beter 2 doen in a.

Iets dergelijks geldt ook voor  $P_2$ . In x is 2 alleen optimaal als  $P_1$  in b inderdaad 2 speelt. Als  $P_1$  in b 1 zou spelen, dan is het voor  $P_2$  beter om 1 te spelen in x.

Dit verschijnsel vinden ook terug in de normale vorm (fig. 2.2): Als  $P_2$  inderdaad (22) speelt, dan is (12) (of (11)) het beste wat  $P_1$  kan doen. We zeggen  $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  is een beste antwoord tegen  $\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Bovendien geldt:  $\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  is een beste antwoord tegen  $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . We noemen het paar  $(\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix})$  een (Nash-)evenwichtspunt van het spel. Het strategieënpaar  $(\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix})$  is stabiel in die zin dat geen van beide spelers zich kan verbeteren door eenzijdig van dit paar af te wijken.

Als we nu algemeen een 2-personen spel hebben, waarvan een boom getekend kan worden net als in fig. 2.1 dan kunnen we op precies dezelfde manier als in het voorbeeld de begrippen "strategie voor  $P_1$ " en "strategie voor  $P_2$ " definiëren. Als beide spelers hun strategie bepaald hebben, kan een scheidsrechter weer de uitslag van het spel bepalen. We noteren de uitbetaling aan  $P_1$  als  $P_1$  de strategie  $\pi_1$  en  $P_2$  de strategie  $\pi_2$  speelt met  $R_1(\pi_1, \pi_2)$ . De formele definitie van een Nash-evenwichtspunt voor zo'n spel is:

Definitie 2.2: Zij  $G$  een 2-personen spel en zij  $\hat{\pi}_1$  een strategie voor  $P_1$  en  $\hat{\pi}_2$  een strategie voor  $P_2$ . Het strategieën paar  $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2)$  is een Nash-evenwichtspunt van  $G$  als:

$$(2.3) R_1(\pi_1, \hat{\pi}_2) \leq R_1(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2) \text{ voor alle strategieën } \pi_1 \text{ van } P_1.$$

$$(2.4) R_2(\hat{\pi}_1, \pi_2) \leq R_2(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2) \text{ voor alle strategieën } \pi_2 \text{ van } P_2.$$

De lezer kan nagaan dat de optimale strategieën uit het voorbeeld van de inleiding van de syllabus inderdaad een evenwichtspunt vormen. Ook kan men nagaan (bijv. in fig. 2.2) dat het paar  $(\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix})$  het enige evenwichtspunt van het spel uit voorbeeld 2.1 is. Klaarblijkelijk hebben we in het voorgaande (impliciet) als definitie van optimaal handelen gehanteerd: een evenwichtsstrategie spelen.

In het volgende voorbeeld beschouwen we een spel waarin de stochastiek een rol speelt. We zullen zien dat dit geen bijzondere problemen met zich meebrengt.

Voorbeeld 2.3: Russische Roulette.

Dit spel wordt gespeeld door 2 personen ( $P_1$  en  $P_2$ ). Ze gebruiken een revolver met een magazijn van 6 kamers. In precies 1 van deze kamers (de spelers weten niet welke) bevindt zich een kogel.  $P_1$  begint. Hij kan passen of schieten. Als hij schiet en de revolver gaat af, betaalt hij 3 eenheden aan  $P_2$  en is het spel afgelopen. In alle andere gevallen komt  $P_2$  aan de beurt. Ook hij kan weer passen of schieten. Als beide spelers passen volgt geen uitbetaling. Indien de revolver afgaat als  $P_2$  schiet, betaalt  $P_2$  3 aan  $P_1$ . Als een van beide past en de ander schiet zonder dat de revolver afgaat, betaalt degene die past 2 aan de ander. Als bij beide spelers de revolver niet afgaat wordt een (eerlijke) munt opgegooid. Bij "kop" ontvangt  $P_1$  3 van  $P_2$ , bij "munt" ontvangt  $P_2$  3 van  $P_1$ .

De spelboom is:

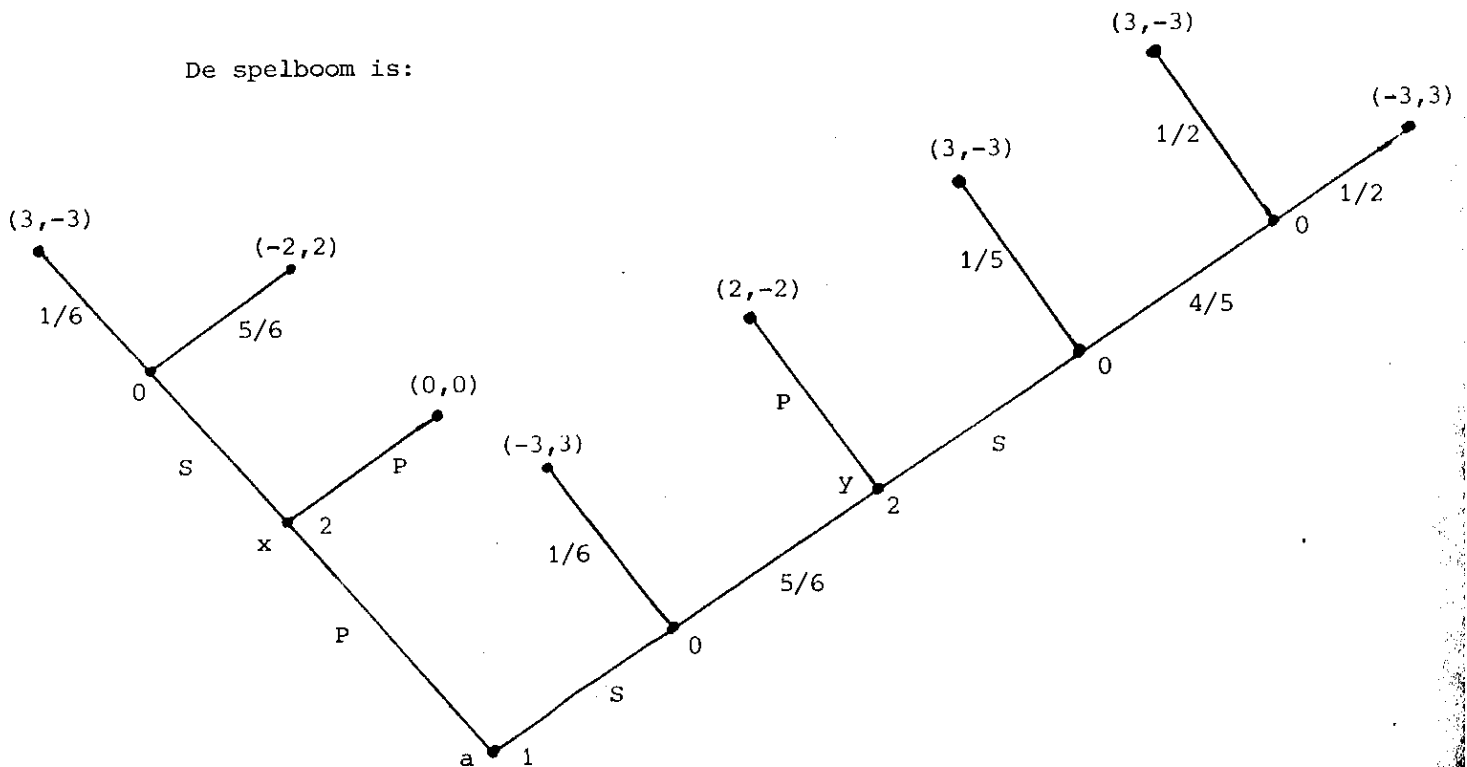


fig. 2.5.

Toelichting op fig. 2.5:

Bij de knopen met een 0 wordt een lotingszet uitgevoerd  
0 heet wel de kansspeler.

de getallen bij de takken uitgaande van een knoop met  
een 0 geven de kansen aan, waarmee deze takken gekozen  
worden.

Willen we weer de vraag beantwoorden wat in dit spel optimaal handelen is,  
dan moeten we eerst weten wat  $P_2$  in  $x$  prefereert:  
passen en dus met zekerheid 0 ontvangen, of  
schieten en dus 2 winnen met kans  $5/6$  en 3 verliezen met kans  $1/6$ .  
We zullen in dit hoofdstuk steeds aannemen dat de spelers pogen hun verwachte  
winst te maximaliseren. Een rechtvaardiging van deze aanname wordt gegeven  
in het hoofdstuk utility theorie. Als  $P_2$  inderdaad zijn verwachte winst wil  
maximaliseren, dan zal hij in  $x$  zeker schieten (dit levert een verwachte  
winst  $7/6$ , passen levert slechts 0). Gevolg: als  $P_1$  past dan levert dat  
voor hem ( $=P_1$ ) een verwacht verlies van  $7/6$  op. We zien dat we ook nu weer  
m.b.v. dynamische programmering de optimale manier van spelen kunnen bepa-  
len. De optimale manier van spelen is:  
voor  $P_1$  : schieten (in  $a$ ).  
voor  $P_2$  : zowel in  $x$  als in  $y$  schieten.  
Dit levert beide spelers een verwachte winst van 0 op.

Ook van dit spel kunnen we weer een normale vorm maken. Strategieën voor  
 $P_1$  en  $P_2$  worden weer op dezelfde manier gedefinieerd als in voorbeeld 2.1  
(een strategie voor  $P_2$  legt vast wat in  $x$  en in  $y$  gedaan moet worden).  
Als beide spelers een strategie inleveren bij een scheidsrechter, dan  
kan deze niet meer de uitslag bepalen, maar wel welke uitslagen met welke  
kansen optreden. Bijvoorbeeld als  $P_1$  past en  $P_2$  schiet in  $x$  en past in  $y$   
dan is de uitkomst:  
met kans  $1/6$ :  $(3, -3)$  en met kans  $5/6$ :  $(-2, 2)$ .  
En dus is de verwachte uitbetaling aan  $P_1$   $-7/6$  en die aan  $P_2$   $7/6$   
We kunnen een normale vorm maken door als resultaat van een strategieën-  
paar de verwachte uitbetaling te nemen (dit is geoorloofd daar de spelers  
hun verwachte winst proberen te maximaliseren).



De normale vorm wordt:

	PP	PS	SP	SS
P	(0,0)	(0,0)	(-7/6,7/6)	(-7/6,7/6)
S	(7/6,-7/6)	(0,0)	(7/6,-7/6)	(0,0)

fig. 2.6.

verticaal staan de strategieën van  $P_1$ , horizontaal die van  $P_2$ . P betekent "passen", PS is "passen in x, schieten in y".

Zoals in fig. 2.2 kunnen we ook hier gedomineerde strategieën wegstrepen. Het enige strategieën paar dat overblijft is (S,SS), het paar dat we ook via dynamische programmering vonden. Dit paar is een evenwichtspunt van het spel. Formeel is een evenwichtspunt weer gedefinieerd als in definitie 2.2 echter met dit verschil, dat men voor  $R_i(\pi_1, \pi_2)$  moet nemen: de verwachte uitbetaling aan  $P_i$  als  $P_1$   $\pi_1$  en  $P_2$   $\pi_2$  speelt. Het paar (S,SS) is echter niet het enige evenwichtspunt van het spel. Ook (S,PS) is een evenwichtspunt (ga dit na en verklaar het).

Tot nu toe hebben we alleen spelen met 2 personen bekeken. Er zijn natuurlijk ook beslissingssituaties, waarin meer dan 2 personen een rol spelen. Zo'n situatie bekijken we in voorbeeld 2.5.

Voorbeeld 2.5:

Op tafel liggen 6 lucifers. Het spel wordt gespeeld door 3 spelers  $P_1, P_2$  en  $P_3$ . De volgorde is  $P_1, P_2, P_3, P_1, P_2, \dots$  tot het spel afgelopen is. Elke speler moet als hij aan de beurt is, 1 of 2 lucifers wegnemen. Diegene die de laatste lucifer wegneemt wint. Hij ontvangt van elk van de andere spelers een bedrag gelijk aan het aantal beurten dat het spel geduurd heeft minus het aantal lucifers dat deze speler heeft weggenomen.

Ook van dit spel kunnen we weer een boom tekenen en de optimale manier van spelen kan weer m.b.v. dynamische programmering gevonden worden. Ga na dat  $P_1$  van beide anderen 2 wint, als alle spelers optimaal spelen.

Ook strategieën kunnen op dezelfde manier als in voorgaande voorbeelden gedefinieerd worden. Als elke speler z'n strategie bepaald heeft, ligt de uitslag van het spel vast. Als we de uitbetaling aan  $P_i$  als  $P_i$  strategie  $\pi_1$ ,  $P_2$  strategie  $\pi_2$  en  $P_3$  strategie  $\pi_3$  speelt noteren met  $R_i(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ , dan geldt voor de strategieën  $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$  die we vinden via dynamische programmering:

$$(2.6) R_1(\pi_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3) \leq R_1(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3) \quad \text{voor alle strategieën } \pi_1 \text{ van } P_1.$$

$$(2.7) R_2(\hat{\pi}_1, \pi_2, \hat{\pi}_3) \leq R_2(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3) \quad \text{voor alle strategieën } \pi_2 \text{ van } P_2.$$

$$(2.8) R_3(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \pi_3) \leq R_3(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3) \quad \text{voor alle strategieën } \pi_3 \text{ van } P_3.$$

Ga dit na. Het drietal  $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3)$  noemen we weer een (Nash-)evenwichtspunt.

### 3.3. Spelen in uitgebreide vorm met perfecte informatie

De gegeven voorbeelden suggereren dat n-personen spelen altijd in een boom, zoals in fig. 2.1 kunnen worden weergegeven. Echter, de tot nu toe bekeken spelen hebben de volgende kenmerken gemeenschappelijk:

(3.1) de zetten in het spel worden na elkaar gedaan.

(3.2) op een moment dat een speler aan de beurt is, weet hij precies wat er in het verleden allemaal gebeurd is.

We noemen spelen met deze kenmerken: spelen met perfecte informatie. In stelling 3.11 bewijzen we dat spelen met perfecte informatie altijd m.b.v. dynamische programmering opgelost kunnen worden. We geven eerst enige definities.

Een boom is een eindige gerichte graaf  $K$  met de volgende eigenschappen:

(3.3) er is precies 1 knoop van  $K$  (de wortel), die geen onmiddellijke voorganger heeft.

(3.4) alle overige knopen van  $K$  hebben precies 1 onmiddellijke voorganger.

M.b.t. een boom hanteren we de volgende terminologie:

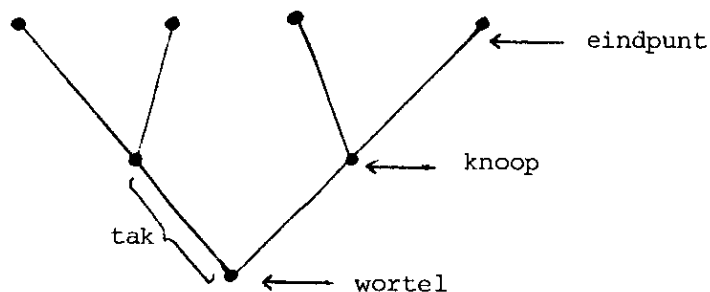


fig. 3.1.

Een pad is een aantal knopen en takken van de wortel naar een eindpunt. De lengte van een pad is het aantal knopen in dit pad. De lengte van de boom is de lengte van het langste pad.

Definitie 3.5:

Een n-personen spel (in uitgebreide vorm) met perfecte informatie is een vierspan  $G = (K, r, L, p)$ , waarbij:

(3.6)  $K$  is een boom.

(3.7)  $r$  is een functie, die aan elk eindpunt  $x$  van  $K$  een element  $r(x) = (r_1(x), \dots, r_n(x))$  van  $\mathbb{R}^n$  toekent ( $r_i(x)$  is de uitbetaling aan  $P_i$  als  $x$  bereikt wordt).

(3.8)  $L$  is een functie, die aan elke knoop  $x$  van  $K$ , die geen eindpunt is een getal  $L(x) \in \{0, 1, \dots, n\}$  toekent ( $L(x) = i$  betekent: in  $x$  is  $P_i$  aan de beurt;  $0$  is de kansspeler;  $L_i := \{x; L(x) = i\}$  is de verzameling van beslissingspunten van  $P_i$ ).

(3.9)  $p$  is een functie die aan elke  $x \in L_0$  een kansverdeling over de takken bij  $x$  toekent ( $p$  specificceert met welke kans een tak bij een lotingszet gekozen wordt).

Zij  $G$  een  $n$ -personen spel in uitgebreide vorm met perfecte informatie.

Een strategie voor  $P_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) is een voorschrift dat aan elke  $x \in L_i$  een tak, beginnend bij  $x$ , toekent. Merk op dat er slechts eindig veel strategieën zijn, omdat de boom eindig is. We noteren de verwachte

uitbetaling aan  $P_i$  als  $P_j$  strategie  $\pi_j$  speelt ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) met  $R_i(\pi_1, \dots, \pi_n)$  (er geldt dus  $R_i(\pi_1, \dots, \pi_n) = \sum_x \rho(x | (\pi_1, \dots, \pi_n)) r_i(x)$ , waarbij  $\rho(x | (\pi_1, \dots, \pi_n))$  de kans is dat  $x$  bereikt wordt, als de strategieëncombinatie  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  gespeeld wordt).

Zij  $\hat{\pi}_i$  een strategie voor  $P_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ). De strategieëncombinatie  $(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_n)$  is een Nash-evenwichtspunt van  $G$  als

$$(3.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{voor alle } i \in \{1, \dots, n\} \text{ en voor alle strategieën } \pi_i \text{ van } P_i: \\ R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \pi_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n) \leq R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \hat{\pi}_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n). \end{array} \right.$$

Stelling 3.11: Zij  $G$  een  $n$ -personenspel met perfecte informatie. Dan heeft  $G$  een Nash-evenwichtspunt.

Bewijs: M.b.v. inductie naar de lengte van de spelboom. Als de lengte van de spelboom 0 of 1 is, is de stelling flauw (ga na). Stel de lengte van  $G$  is  $m + 1$  en stelling is juist voor alle  $n$ -personenspelen met lengte  $\leq m$ . We hebben dan de volgende situatie:

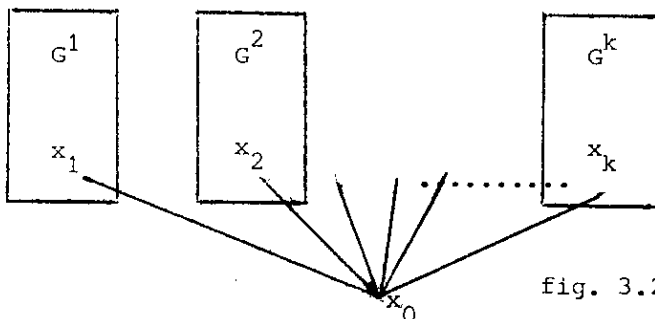


fig. 3.2.

Immers als het oorspronkelijke spel in  $x_j$  terecht komt, moet vanaf daar gewoon een spel  $G^j$  gespeeld worden. Als in het spel  $G^j$   $P_i$  de strategie  $\pi_i^j$  speelt ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), dan noteren we de uitbetaling aan  $P_i$  (in  $G^j$ ) met  $R_i^j(\pi_1^j, \pi_2^j, \dots, \pi_n^j)$ . Er geldt: elk van de spelen  $G^j$  ( $j \in \{1, \dots, k\}$ ) is een  $n$ -personenspel met perfecte informatie, met lengte  $\leq m$ . Dus heeft elk van deze spelen een evenwichtspunt. Zeg  $\hat{\pi}^j := (\hat{\pi}_1^j, \dots, \hat{\pi}_n^j)$  is een evenwichtspunt van  $G_j$ . We onderscheiden nu twee gevallen:

- i) in  $x_0$  moet een lotingszet worden uitgevoerd.
- ii) één van de spelers  $P_i$  met  $i \in \{1, \dots, n\}$  is in  $x_0$  aan zet.

ad 1) Definieer voor  $i \in \{1, \dots, n\}$  de strategie  $\hat{\pi}_i$  voor  $P_i$  d.m.v.

$$(3.12) \begin{cases} \text{als je in de knoop } x \text{ aan de beurt bent, bepaal dan } j \text{ zodanig} \\ \text{dat } x \in G^j; \text{ speel de actie die } \hat{\pi}_i^j \text{ voorschrijft in } x. \end{cases}$$

(Ga na, dat  $\hat{\pi}_i$  inderdaad een strategie voor  $P_i$  is in spel  $G$ ).

Dan is  $(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_n)$  een evenwichtspunt van  $G$ .

Immers, laat  $\pi_i$  een strategie voor  $P_i$  zijn in het spel  $G$ . Dan kunnen we

$\pi_i$  decomponeren als  $\pi_i = \{\pi_i^j\}_{j=1}^k$ , waarbij  $\pi_i^j$  een strategie in  $G^j$  is.

Dan geldt (met  $p(x_j)$  is de kans dat het spel in  $x_j$  terecht komt):

$$\begin{aligned} R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \pi_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n) &= \sum_{j=1}^k p(x_j) \cdot R_i^j(\hat{\pi}_1^j, \dots, \hat{\pi}_{i-1}^j, \pi_i^j, \hat{\pi}_{i+1}^j, \dots, \hat{\pi}_n^j) \\ &\leq \sum_{j=1}^k p(x_j) \cdot R_i^j(\hat{\pi}_1^j, \dots, \hat{\pi}_{i-1}^j, \hat{\pi}_i^j, \hat{\pi}_{i+1}^j, \dots, \hat{\pi}_n^j) = R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \hat{\pi}_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n). \end{aligned}$$

ad ii) Stel  $P_{i_0}$  is aan zet in  $x_0$ . Dan kan  $P_{i_0}$  bepalen welk van de spelen  $G^j$  er gespeeld gaat worden. Als  $P_{i_0}$  uitgaat van de veronderstelling dat in  $G^j$  de spelers  $\hat{\pi}^j$  zullen spelen, dan speelt hij het liefst het spel  $G^{j_0}$  waarbij:

$$(3.13) \quad R_{i_0}^{j_0}(\hat{\pi}^{j_0}) = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} R_{i_0}^j(\hat{\pi}^j).$$

Definieer nu de strategie  $\hat{\pi}_{i_0}$  voor  $P_{i_0}$  d.m.v.:

in  $x_0$  : kies de tak die naar  $j_0$  leidt.

in  $x \neq x_0$  : zoals in (3.12).

En voor  $i \neq i_0$  definieer de strategie  $\hat{\pi}_i$  als in (3.12). Dan geldt dat

$(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_n)$  een evenwichtspunt van  $G$  is. Immers als  $i \neq i_0$  en  $\pi_i = \{\pi_i^j\}_{j=1}^k$  een strategie voor  $P_i$ , dan

$$\begin{aligned} R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \pi_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n) &= R_i^{j_0}(\hat{\pi}_1^{j_0}, \dots, \hat{\pi}_{i-1}^{j_0}, \pi_i^{j_0}, \hat{\pi}_{i+1}^{j_0}, \dots, \hat{\pi}_n^{j_0}) \\ &\leq R_i^{j_0}(\hat{\pi}_1^{j_0}, \dots, \hat{\pi}_{i-1}^{j_0}, \hat{\pi}_i^{j_0}, \hat{\pi}_{i+1}^{j_0}, \dots, \hat{\pi}_n^{j_0}) = R_i(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i-1}, \hat{\pi}_i, \hat{\pi}_{i+1}, \dots, \hat{\pi}_n). \end{aligned}$$

Voor  $i = i_0$  geldt dat we een strategie  $\pi_{i_0}$  van  $P_{i_0}$  kunnen decomponeren als  $\pi_{i_0} = (\ell; \{\pi_{i_0}^j\}_{j=1}^k)$  ( $\ell$  is de keuze bij  $x_0$ ;  $\pi_{i_0}^j$  is de strategie in het spel  $G^j$ ).

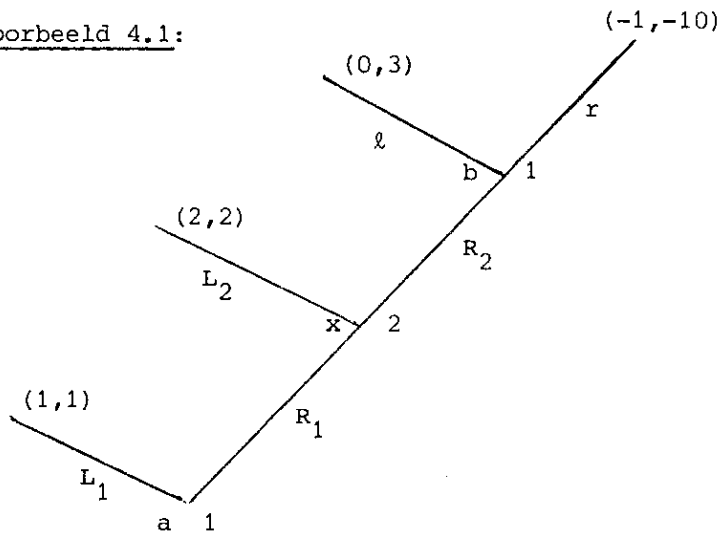
Er geldt:

$$R_{i_0}(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i_0-1}, \pi_{i_0}, \hat{\pi}_{i_0+1}, \dots, \hat{\pi}_n) = R_{i_0}^\ell(\hat{\pi}_1^\ell, \dots, \hat{\pi}_{i_0-1}^\ell, \pi_{i_0}^\ell, \hat{\pi}_{i_0+1}^\ell, \dots, \hat{\pi}_n^\ell) \leq R_{i_0}^\ell(\hat{\pi}^\ell) \leq R_{i_0}^{j_0}(\hat{\pi}^{j_0}) = R_{i_0}(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{i_0-1}, \hat{\pi}_{i_0}, \hat{\pi}_{i_0+1}, \dots, \hat{\pi}_n).$$

3.4. Nul-som spelen en niet nulsom spelen.

We hebben gezien dat spelen met perfecte informatie altijd een evenwichtspunt bezitten dat via dynamische programmering gevonden kan worden. In het volgende voorbeeld laten we zien dat zo'n evenwichtspunt misschien niet altijd even redelijk is.

Voorbeeld 4.1:



	$L_2$	$R_2$
$L_1$	(1,1)	(1,1)
$L_1$	(1,1)	(1,1)
$R_1$	(2,2)	(0,3)
$R_1$	(2,2)	(-1,-10)

uitgebreide vorm

fig. 4.1.

normale vorm

Het evenwichtspunt dat we via dynamische programmering vinden is  $(L_1, R_2)$ . Het geeft beide spelers een uitbetaling van 1. In de normale vorm zien we



dat ook  $(R_1, r, L_2)$  een evenwichtspunt is. Dit punt geeft beide spelers een uitbetaling van 2 en is dus duidelijk beter. Waarom zouden de spelers dan niet volgens dit evenwichtspunt spelen?

Als de spelers volgens  $(L_1, l, R_2)$  spelen dan maken de spelers in elk punt van de boom de keuze die op dat moment het beste is. Als  $P_1$   $R_1, r$  speelt dan maakt hij in  $b$  zeker niet de beste keuze. De keuze van  $r$  levert hem een verlies van 1 op. Maar tegelijkertijd levert deze keuze  $P_2$  een verlies van 10 op.  $P_1$  dreigt dus als het ware dat hij in  $b$  rechts zal spelen als  $P_2$  in  $x$  naar rechts gaat. Wat moet  $P_2$  nu doen in  $x$ ? Moet hij de dreiging van  $P_1$  geloven? Het zal duidelijk zijn dat het uiteindelijke resultaat van het spel mede bepaald wordt door allerlei psychologische factoren. Daarom gaan we niet verder in op de vraag wat de spelers in dit spel zouden moeten doen.

In de volgende voorbeelden illustreren we nog enige problemen die op kunnen treden als we eisen dat de oplossing van een spel een evenwichtspunt moet zijn.

Voorbeeld 4.2: Een onderhandelingsituatie.

Iemand stelt  $f$  4,- beschikbaar en zegt dat  $P_1$  en  $P_2$  deze mogen hebben, als zij het tenminste eens worden over de verdeling. De persoon staat erop dat de verdeling als volgt zal geschieden: elke speler moet (zonder dat hij weet wat de ander doet) opschrijven of hij zich hard (=H), dan wel toegeeflijk (=T) opstelt. De uitbetaling hangt af van hoe de spelers zich opstellen (zie fig. 4.2)

$P_1 \backslash P_2$	H	T
H	(0,0)	(3,1)
T	(1,3)	(2,2)

fig. 4.2.

Wat moeten de spelers doen in deze situatie? (H,T) en (T,H) zijn allebei evenwichtspunten;  $P_1$  prefereert (H,T) en  $P_2$  prefereert (T,H); maar als beide



spelers zich hard opstellen krijgen beide niets. Merk op dat (T,T) geen evenwichtspunt is.

Voorbeeld 4.3: Prisoners' dilemma.

Twee verdachten van een misdrijf zijn gescheiden opgesloten. Het bewijs tegen hen is niet best en de leider van het vooronderzoek geeft elk afzonderlijk in overweging te bekennen omdat deze bekentenis gebruikt kan worden om de ander te pakken; diegene die bekent komt in dit geval vrij. Bekennen ze echter beiden dan worden beiden gestraft, maar met enige verlichting. Als beiden blijven ontkennen, worden beiden licht gestraft (wegens verboden wapenbezit of iets dergelijks).

De normale vorm van dit spel is:

		$b_2$	$o_2$	
$b_1$	(8 jaar, 8 jaar)	(0 jaar, 10 jaar)		$b_1$ : verdachte i bekent
$o_1$	(10 jaar, 0 jaar)	(1 jaar, 1 jaar)		$o_1$ : verdachte i ontkent

fig. 4.3.

Voor  $P_1$  is bekennen altijd beter (onafhankelijk van wat  $P_2$  doet;  $b_1$  domineert  $o_1$ ). Hetzelfde geldt voor  $P_2$ . Dus zullen beiden bekennen. Het punt  $(b_1, b_2)$  is inderdaad het enige Nash evenwichtspunt van dit spel. Het gevolg is wel dat ze beiden 8 jaar straf krijgen, terwijl ze er toch beiden met slechts 1 jaar vanaf zouden kunnen komen, door allebei te ontkennen. In het geval dat de spelers bindende afspraken kunnen maken, doen zij er zeker verstandig aan samen te werken en beide te ontkennen. In het geval dat geen bindende afspraken gemaakt kunnen worden, is er geen enkele reden dat een speler zijn afspraak na zal komen, en is dus bekennen het beste dat een speler kan doen.

In voorbeeld 4.3 zien we dat we een onderscheid moeten maken tussen spelen waarin bindende afspraken mogelijk zijn (coöperatieve spelen) en spelen waarin deze niet mogelijk zijn (niet-coöperatieve spelen). Impliciet hebben

we overal in §3.2 en §3.3 aangenomen, dat we te maken hadden met niet-coöperatieve spelen. Immers, bijv. in voorbeeld 2.1 zouden de spelers 8 kunnen verdelen als zij zouden (kunnen) samenwerken. Het Nash-evenwichtspunt is dus alleen een goed oplossingsconcept voor niet-coöperatieve spelen.

Voor deze spelen blijft de kernvraag (zie vb. 4.1 en 4.2):

Welk evenwichtspunt moet er gekozen worden als de oplossing van het spel, indien dit spel meerdere evenwichtspunten heeft.

Voor deze vraag is (behalve in speciale gevallen) nog geen bevredigend antwoord gevonden. We zullen ons daarom van nu af beperken tot een klasse van spelen (de 2-personen nul-som spelen) waarvoor wel een bevredigend antwoord gegeven kan worden. Een 2-personen spel is een nul-som spel als:

$$(4.4) \quad R_2(\pi_1, \pi_2) = -R_1(\pi_1, \pi_2) \quad \text{voor alle } \pi_1, \pi_2.$$

In zo'n spel betaald de ene speler dus een bepaald bedrag aan de ander. Een voorbeeld is het spel uit vb. 2.3. Vanwege (4.4) hoeven we voor zo'n spel alleen de uitbetaling aan  $P_1$  te specificeren. De normale vorm van het spel uit vb. 2.3 noteren we dan ook wel als

	PP	PS	SP	SS
P	0	0	-7/6	-7/6
S	7/6	0	7/6	0

fig. 4.4.

en we noemen zo'n spel een matrixspel.

I.h.a. zal een 2-personen nul-som spel in de normale vorm weergegeven worden door een  $m \times n$ -matrix  $R$  ( $R$  is de uitbetaling aan  $P_1$ ), waarbij  $m$  het aantal strategieën van  $P_1$  is en  $n$  het aantal strategieën van  $P_2$ . M.b.v. definitie 2.2 zien we dat  $(\pi_0, \sigma_0)$  een evenwichtspunt van het matrixspel  $R$  is als:

$$(4.5) \quad R(\pi, \sigma_0) \leq R(\pi_0, \sigma_0) \quad \text{voor alle } \pi \in \{1, \dots, m\}.$$

$$(4.6) \quad -R(\pi_0, \sigma) \leq -R(\pi_0, \sigma_0) \quad \text{voor alle } \sigma \in \{1, \dots, n\}.$$

Ofwel

$$(4.7) R(\pi, \sigma_0) \leq R(\pi_0, \sigma_0) \leq R(\pi_0, \sigma) \quad , \quad \text{voor alle } \pi \in \{1, \dots, m\}, \sigma \in \{1, \dots, n\}.$$

Daarom noemen we in dit geval  $(\pi_0, \sigma_0)$  wel een zadelpunt van het spel. In het spel van fig. 4.4 zijn de strategieënparen  $(S, PS)$  en  $(S, SS)$  zadelpunten. Merk op dat deze punten dezelfde uitbetaling aan  $P_1$  tot gevolg hebben. In stelling 4.8 bewijzen we, dat dit voor alle matrixspelen het geval is, en dus kunnen problemen zoals in vb. 4.2 niet voorkomen in nul-som situaties.

Stelling 4.8: Zij  $R$  een  $m \times n$  matrix.

Stel  $(\pi_0, \sigma_0)$  en  $(\pi_1, \sigma_1)$  zijn zadelpunten van het matrixspel  $R$ . Dan

- i)  $R(\pi_0, \sigma_0) = R(\pi_1, \sigma_1)$ .
- ii) Ook  $(\pi_0, \sigma_1)$  en  $(\pi_1, \sigma_0)$  zijn zadelpunten van het matrixspel  $R$ .

Bewijs:

i) Vanwege (4.7) geldt

$$(4.9) \begin{array}{ccccccc} R(\pi_0, \sigma_0) & \leq & R(\pi_0, \sigma_1) & \leq & R(\pi_1, \sigma_1) & \leq & R(\pi_1, \sigma_0) & \leq & R(\pi_0, \sigma_0) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (*) & & (**) & & (**) & & (*) \end{array}$$

$(*)$ :  $(\pi_0, \sigma_0)$  is zadelpunt,  $(**)$ :  $(\pi_1, \sigma_1)$  is zadelpunt  
en dus geldt overal in (4.9) gelijkheid.

ii) Direct uit (4.9) (met gelijkheid) en de definitie van een zadelpunt. □

Deel ii) van stelling 4.8 zegt dat de spelers niet in problemen komen als ze niet voor het zelfde zadelpunt kiezen. Ga na, dat een analoge bewering voor evenwichtspunten (in niet nul-som spelen) niet algemeen juist is.

Stel er moet een matrixspel  $R$  gespeeld worden. Het zal duidelijk zijn dat de situatie die voor  $P_1$  het meest ongunstig is, die situatie is waarin  $P_1$  een tegenstander treft die precies kan voorspellen wat hij doet. In dit

ongunstigste geval is de verwachte winst voor  $P_1$  als hij  $\pi$  speelt:

$$(4.10) \quad \min_{\sigma} R(\pi, \sigma).$$

En dus zal  $P_1$  zijn strategie zo kiezen dat (4.10) maximaal is; zijn verwachte winst is dan:

$$(4.11) \quad \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) =: \alpha.$$

$P_1$  kan er dus altijd voor zorgen dat hij minstens  $\alpha$  wint ( $\alpha$  is de verliesvloer van  $P_1$ ).

Analoog geldt voor  $P_2$ : in het meest ongunstige geval is zijn verwachte verlies als hij  $\sigma$  speelt:

$$(4.12) \quad \max_{\pi} R(\pi, \sigma).$$

En dus zal  $P_2$  zijn strategie zo kiezen dat (4.12) minimaal is. Zijn verwachte verlies is dan:

$$(4.13) \quad \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma) := \beta.$$

$P_2$  kan er dus altijd voor zorgen dat hij niet meer dan  $\beta$  verliest ( $\beta$  is het verliesplafond van  $P_2$ ). Omdat  $P_1$  minstens  $\alpha$  kan winnen en  $P_2$  hooguit  $\beta$  kan verliezen, volgt  $\alpha \leq \beta$ . We bewijzen dit formeel in stelling 4.14.

Stelling 4.14:

Zij  $R$  een matrixspel. Dan geldt

$$(4.15) \quad \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \leq \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma).$$

Bewijs:

Voor elke  $\pi$  en  $\sigma$  geldt

$$\min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \leq R(\pi, \sigma).$$

Dus geldt voor elke  $\sigma$ :

$$\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \leq \max_{\pi} R(\pi, \sigma).$$

Maar nu is het linkerlid onafhankelijk van  $\sigma$ , dus geldt:

$$\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \leq \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma).$$

□

Het zal duidelijk zijn dat het spel "flauw" is als  $\alpha = \beta$ .  $P_1$  zal in dit geval een strategie  $\pi$  kiezen die (4.10) maximaliseert en  $P_2$  een strategie  $\sigma$  die (4.12) minimaliseert. In stelling 4.16 bewijzen we dat  $\alpha = \beta$  precies dan wanneer het spel een zadelpunt heeft.

Stelling 4.16:

Zij  $R$  een matrixspel. Dan geldt:

i) Als  $(\pi_0, \sigma_0)$  een zadelpunt van  $R$  is, dan

$$(4.17) \quad \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) = R(\pi_0, \sigma_0) = \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma).$$

ii) Als  $\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) = \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma)$ , dan bestaat er een zadelpunt  $(\pi_0, \sigma_0)$  van  $R$ . (en dus geldt (4.17)).

Bewijs:

i) Laat  $(\pi_0, \sigma_0)$  een zadelpunt van  $R$  zijn. Zij  $\pi$  een strategie van  $P_1$ . Dan

$$\begin{array}{ccccccc} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) & \leq & R(\pi, \sigma_0) & \leq & R(\pi_0, \sigma_0) & = & \min_{\sigma} R(\pi_0, \sigma) \leq \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & (\pi_0, \sigma_0) \text{ is een zadelpunt} \end{array}$$

Dus geldt:

$$\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \leq R(\pi_0, \sigma_0) \leq \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma)$$

en is de linker gelijkheid in (4.17) bewezen.

Het bewijs van de rechter gelijkheid gaat analoog.

ii) Stel  $\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) = \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma)$ .

Zij  $\pi_0$  z.d.d.  $\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) = \min_{\sigma} R(\pi_0, \sigma)$  en

Zij  $\sigma_0$  z.d.d.  $\min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma) = \max_{\pi} R(\pi, \sigma_0)$ .

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad R(\pi_0, \sigma_0) &\leq \max_{\pi} R(\pi, \sigma_0) = \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma) \\
 &= \max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) = \min_{\sigma} R(\pi_0, \sigma) \leq R(\pi_0, \sigma_0) .
 \end{aligned}$$

Dus staan overal in (4.18) gelijktokens. Hieruit volgt eenvoudig dat  $(\pi_0, \sigma_0)$  een zadelpunt is. □

In het voorgaande hebben we gezien dat de uitkomst van een matrixspel  $R$  bepaald is, als dit spel een zadelpunt heeft; de spelers zullen een zadelpuntstrategie spelen (het doet er niet toe welke volgens st. 4.8). In dit geval noemen we, als  $(\pi_0, \sigma_0)$  een zadelpunt is:

$\pi_0$  een optimale strategie voor  $P_1$  en  $\sigma_0$  een optimale strategie voor  $P_2$ . Bovendien noemen we dan het getal

$$\max_{\pi} \min_{\sigma} R(\pi, \sigma) \quad (= R(\pi_0, \sigma_0) = \min_{\sigma} \max_{\pi} R(\pi, \sigma))$$

de waarde van het spel.

In §3.5 bekijken we spelen die geen zadelpunt bezitten. Op grond van stelling 3.11 zijn dit spelen met niet-perfecte informatie.

### 3.5. Nul-som spelen met niet-perfecte informatie

#### Voorbeeld 5.1.:

$P_1$  bezit 2 kaarten: koning (= K) en aas (= A). Hij neemt 1 van zijn kaarten en legt deze met de beeltenis naar beneden op tafel.  $P_2$  probeert te raden welke kaart  $P_1$  op tafel heeft gelegd. Als  $P_2$  fout raadt moet hij een bedrag aan  $P_1$  betalen, als hij goed raadt moet  $P_1$  betalen. Voor de bedragen, zie de boom.

De spelboom is:

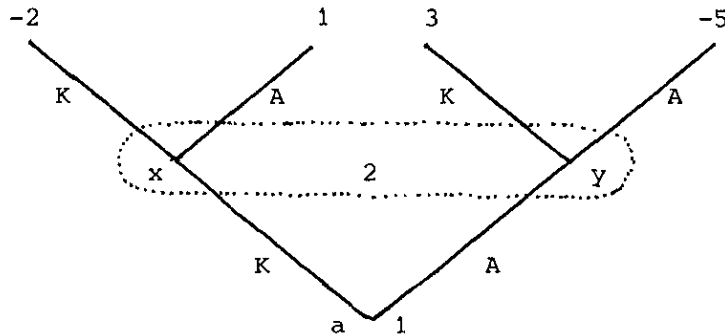


fig. 5.1

M.b.v.  $x \sim y$  geven we aan dat  $P_2$  niet weet of hij zich in  $x$  dan wel in  $y$  bevindt;  $\{x, y\}$  is een informatieverzameling voor  $P_2$ .

We kunnen van dit spel een spel in normale vorm maken.  $P_1$  heeft 2 strategieën: K (= koning spelen) en A. Ook  $P_2$  heeft 2 strategieën: K (= koning raden) en A (immers  $P_2$  kan zijn actie niet baseren op wat  $P_1$  gedaan heeft). De normale vorm is dus:

		$P_2$	
	$P_1$	K	A
K		-2	1
A		3	-5

fig. 5.2.

Wat is een verstandige manier om dit spel te spelen? Zoals men eenvoudig nagaat geldt:  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ ; en dus bezit het spel geen zadelpunt. Betekent dit dat het spel niet op verstandige wijze gespeeld kan worden?

Voor  $P_2$  is A aantrekkelijk: hij kan dan 5 winnen (bij K maximaal 2) en in het ongunstigste geval slechts 1 verliezen (bij K zelfs 3).  $P_2$  zou op grond van deze redenering kunnen besluiten A te raden.

Vóór  $P_1$  zijn kaart op tafel legt, zal hij overdenken wat  $P_2$  zal doen. Het is dus heel goed mogelijk dat hij dezelfde redenering als  $P_2$  volgt en dus besluit K te spelen.

Op het moment dat  $P_2$  aan de beurt is, bedenkt hij dat  $P_1$  misschien wel zijn plan geraden had en dus K speelt; dus moet hij K raden.

Maar misschien had  $P_1$  ook dit voorzien en heeft hij A gespeeld; en dus moet  $P_2$  A raden, etc.. We volgen dus een cirkelredenering.

Een manier om uit deze cirkelredenering te komen is aangegeven door Von Neumann. De gedachte is als volgt: Voor  $P_2$  is het niet verstandig om K te raden en ook niet verstandig om A te raden; hij moet ze eigenlijk allebei gelijktijdig raden. Welnu, dat kan door ze allebei met een positieve kans te raden.

$P_2$  zou bijvoorbeeld het volgende plan kunnen hebben:

Voordat ik raad, gooi ik een munt op; bij "kop" raad ik de koning, bij "munt" raad ik aas.

Als  $P_1$  K had gekozen, is de verwachte winst voor  $P_2$ :  $-\{\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}1\} = \frac{1}{2}$ .

Als  $P_1$  A had gekozen, is de verwachte winst voor  $P_2$ :  $-\{\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}(-5)\} = 1$ .

En dus heeft  $P_2$  in het slechtste geval nog een winst van  $\frac{1}{2}$ , dit is beter dan in de situatie vóór hij de hulp van de munt inriep (daar had hij in het ongunstigste geval een verlies van 1 ( $=\beta$ )). We noemen een strategie als "raad, bij kop K en bij munt A" ofwel "met kans  $\frac{1}{2}$  K en met een kans  $\frac{1}{2}$  A" ofwel " $\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}A$ " een gemengde strategie voor  $P_2$ . Wat we oorspronkelijk strategie genoemd hebben, noemen we daarom ook wel: zuivere strategie.

We hebben gezien dat  $P_2$  zijn verliesplafond kan verlagen door een gemengde strategie te gebruiken. Analoog geldt dat  $P_1$  zijn winstvloer kan verhogen door een gemengde strategie te gebruiken.  $P_1$  zou bijvoorbeeld de gemengde strategie " $\frac{2}{3}K + \frac{1}{3}A$ " kunnen spelen (hij kan vóór hij speelt een dobbelsteen gooien (onzichtbaar voor  $P_2$ ) en bij 1 en 2 aas spelen, in de overige gevallen K). Als  $P_1$  deze strategie speelt is zijn verwachte winst:

als  $P_2$  K raadt:  $\frac{2}{3}(-2) + \frac{1}{3}3 = -1/3$

als  $P_2$  A raadt:  $\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}(-5) = -1$

En dus in het ongunstigste geval  $-1$  duidelijk beter dan  $\alpha$  ( $=-2$ ).



Opmerking 5.2: Later zullen we laten zien dat in dit spel het voor  $P_1$  optimaal is om " $8/11K + 3/11A$ " te spelen. Voor  $P_2$  is optimaal " $6/11K + 5/11 A$ ". Merk op dat  $P_2$  K met grotere kans raadt dan A. Dit is niet zo paradoxaal als het op het eerste gezicht misschien lijkt. Immers als  $P_1$  optimaal speelt, speelt hij ook K met grotere kans.

Voorbeeld 5.3: Vereenvoudigd Poker.

$P_1$  trekt een kaart uit {K,A} (beide mogelijkheden met dezelfde kans); hij bekijkt deze (onzichtbaar voor  $P_2$ ) en zegt vervolgens "Pas" of "Bied". Als hij past moet hij f 1,- betalen aan  $P_2$ . Als hij biedt komt  $P_2$  aan zet. Hij kan "passen" of "zien". Als hij past, betaalt hij f 1,- aan  $P_1$ ; als hij biedt moet hij f 2,- betalen als de getrokken kaart A was, anders ontvangt hij f 2,-.

De spelboom is:

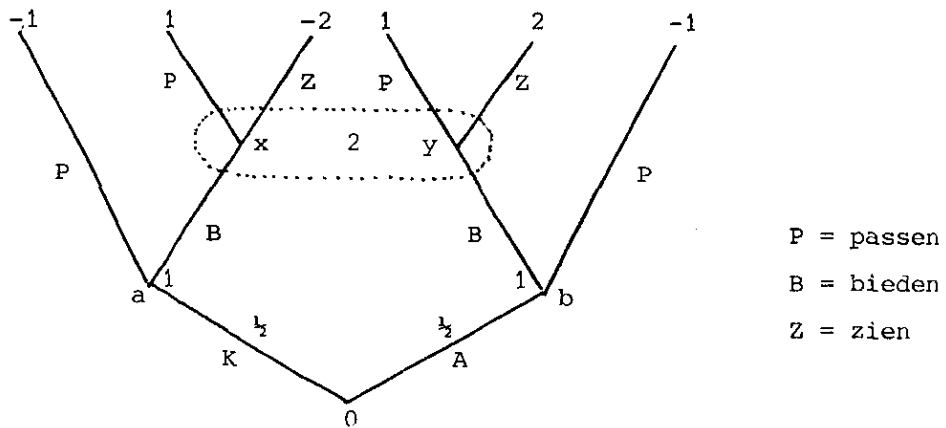


fig. 5.3

We kunnen van dit spel weer een normale vorm maken. Een zuivere strategie voor  $P_1$  schrijft voor wat te doen in de informatieverzamelingen {a} en {b}. Met (BP) bedoelen we de strategie "bieden in a, passen in b". De overige strategieën van  $P_1$  zijn (PP), (PB) en (BB). Een (zuivere) strategie van  $P_2$  schrijft voor wat te doen in de informatieverzameling {x,y} de strategieën van  $P_2$  zijn dus: P en Z.

De normale vorm is:

	P	Z
(PP)	-1	-1
(PB)	0	$\frac{1}{2}$
(BP)	0	$-1\frac{1}{2}$
(BB)	1	0

fig. 5.4.

Het zal duidelijk zijn, dat  $P_2$  bij een Aas (in b) steeds moet bieden. Maar wat moet hij bij een Koning doen? Als het spel herhaald gespeeld zou worden en  $P_1$  zou bij K steeds passen, dan weet  $P_2$ : als  $P_1$  biedt, dan heeft hij A en dus moet ik dan passen. Ook als  $P_1$  bij K steeds zou bieden, zou  $P_2$  dit ontdekken en er dus voordeel mee doen.  $P_1$  moet dus bij K af en toe passen en af en toe bieden; hij moet dus een gemengde strategie spelen. Dit zien we ook in de normale vorm: (PP) en (BP) worden gedomineerd door (PB) en dus zal  $P_1$  deze niet spelen. We kunnen het spel reduceren tot:

	P	Z
(PB)	0	$\frac{1}{2}$
(BB)	1	0

fig. 5.5.

Dit spel heeft geen zadelpunt ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ). Men kan eenvoudig nagaan dat de spelers zich kunnen verbeteren door gemengde strategieën te spelen (optimaal voor  $P_1$  is: bij A bieden, bij K met kans  $\frac{2}{3}$  passen, met kans  $\frac{1}{3}$  bieden; optimaal voor  $P_2$  is: met kans  $\frac{1}{3}$  passen met kans  $\frac{2}{3}$  zien).

De voorbeelden maken duidelijk dat een 2-personenspel altijd in boomvorm weergegeven kan worden. Het enige verschil met definitie 3.5 is, dat nu informatieverzamelingen gespecificeerd moeten worden (in een spel met per-

fecte informatie bestaan alle informatieverzamelingen uit 1 punt). In de algemene situatie kan een verzameling  $u$  van knopen uit de spelboom optreden als een informatieverzameling van  $P_i$  ( $i \in \{1,2\}$ ) als:

(5.6) elke knoop uit  $u$  behoort tot  $L_i$ .

(5.7) elk pad in de boom doorsnijdt  $u$  in hooguit 1 punt.

(5.8) als  $x$  en  $y$  knopen in  $u$  zijn, dan correspondeert met elke tak ontspringend in  $x$  precies 1 tak ontspringend in  $y$  (en dus ontspringen bij  $x$  evenveel takken als bij  $y$ ).

Als  $u$  een informatieverzameling is, dan noemen we zo'n verzameling van corresponderende takken (1 tak voor elke knoop uit  $u$ ) een keuze bij  $u$ . (in vb. 5.2 vormen de linkertak bij  $x$  en de linkertak bij  $y$  samen de keuze  $P$  bij de informatieverzameling  $\{x,y\}$ ). Een zuivere strategie voor  $P_1$  in zo'n spel is een functie die aan elke informatieverzameling  $u$  van  $P_1$  een keuze bij  $u$  toekent. M.b.v. het strategie begrip kan het oorspronkelijke spel in uitgebreide vorm gereduceerd worden tot een spel in normale vorm. Dit laatste spel is weer een matrixspel.

Om een spel echt op te lossen is meestal de uitgebreide vorm het meest geschikt; algemene theoretische resultaten kunnen echter het eenvoudigst in de normale vorm bewezen worden. We richten daarom onze aandacht nu op matrixspelen.

Zij  $R$  een  $m \times n$  matrix. We beschouwen het matrixspel met uitbetalingsmatrix  $R$ . Om notationele redenen geven we de zuivere strategieën van  $P_1$  (de rijen van  $R$ ) aan met  $i$  en de zuivere strategieën van  $P_2$  (de kolommen van  $R$ ) met  $j$ .

Een gemengde strategie voor  $P_1$  is een kansverdeling over de rijen van  $R$ . Een gemengde strategie voor  $P_1$  is dus bepaald door een vector  $p \in \mathbb{R}^m$  met

$$(5.7) \quad p_i \geq 0 \quad (i \in \{1, \dots, m\}) \quad , \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

( $p_i$  is de kans dat rij  $i$  gekozen wordt).

De verzameling van alle  $p \in \mathbb{R}^m$  die voldoen aan (5.7) noteren we als  $S^m$ .

Een gemengde strategie voor  $P_2$  is een kansverdeling over de kolommen van  $R$ . Zo'n strategie is bepaald door een vector  $q \in \mathbb{R}^n$  met

$$(5.8) \quad q_j \geq 0 \quad (j \in \{1, \dots, n\}) \quad , \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

( $q_j$  is de kans dat kolom  $j$  gekozen wordt).

$S^n$  is de verzameling van alle  $q \in \mathbb{R}^n$  die aan (5.8) voldoen. Bij het oorspronkelijke spel (waarin de spelers een rij, resp. een kolom spelen) hebben we nu een nieuw spel gemaakt, waarin de spelers een kansverdeling over de rijen, resp. de kolommen spelen. Dit spel noemen we de gemengde uitbreiding van het oorspronkelijke spel. Het is een uitbreiding daar we elke zuivere strategie  $i$  op kunnen vatten als een gemengde strategie, nl. als die kansverdeling die met kans 1  $i$  kiest. Als in de gemengde uitbreiding  $P_1$  de (gemengde) strategie  $p$  en  $P_2$  de strategie  $q$  speelt, is de verwachte uitbetaling aan  $P_1$ :

$$(5.9) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i R(i,j) q_j =: \tilde{R}(p,q).$$

Als  $P_1$  de gemengde strategie  $p$  kiest, ontvangt hij in het ongunstigste geval:

$$(5.10) \quad \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q)$$

$P_1$  kan er, door zijn strategie verstandig te kiezen, voor zorgen dat hij minimaal

$$(5.11) \quad \sup_{p \in S^m} \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) =: \tilde{\alpha}$$

verdient.

Analoog, kan  $P_2$  er voor zorgen, dat hij maximaal

$$(5.12) \quad \inf_{q \in S^n} \sup_{p \in S^m} \tilde{R}(p,q) =: \tilde{\beta}$$

hoeft te betalen.

In de voorbeelden hebben we gezien dat de spelers zich kunnen verbeteren door te mengen, d.w.z.  $\tilde{\alpha} \geq \alpha$  en  $\tilde{\beta} \leq \beta$ . In stelling 5.13 bewijzen we dat dit algemeen geldt.

Stelling 5.13: Zij  $R$  een  $m \times n$  matrix en  $\tilde{R}$  gedefinieerd als in (5.9).

Dan geldt:

$$i) \quad \text{voor elke } p \in S^m: \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{R}(p,j) .$$

$$ii) \quad \text{voor elke } q \in S^n: \sup_{p \in S^m} \tilde{R}(p,q) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \tilde{R}(i,q) .$$

$$iii) \quad \sup_{p \in S^m} \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) \geq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} R(i,j) .$$

$$iv) \quad \inf_{q \in S^n} \sup_{p \in S^m} \tilde{R}(p,q) \leq \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \max_{i \in \{1, \dots, m\}} R(i,j) .$$

$$v) \quad \sup_{p \in S^m} \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) \leq \inf_{q \in S^n} \sup_{p \in S^m} \tilde{R}(p,q) .$$

Bewijs:

i) Zij  $p \in S^m$  en  $q \in S^n$ . Dan

$$\tilde{R}(p,q) = \sum_{j=1}^n \tilde{R}(p,j) q_j \geq \sum_{j=1}^n \left\{ \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{R}(p,j) \right\} \cdot q_j = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{R}(p,j) .$$

En dus geldt ook

$$\inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) \geq \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{R}(p,j) .$$

Omdat elke  $j \in \{1, \dots, n\}$  een speciale  $q \in S^n$  is, geldt ook voor alle  $p \in S^m$

$$\min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{R}(p,j) \geq \inf_{q \in S^n} \tilde{R}(p,q) .$$

- ii) analoog aan het bewijs van i).
- iii) m.b.v. i) en de opmerking dat elke  $i$  een speciale  $p$  is.
- iv) analoog aan het bewijs van iii).
- v) analoog aan het bewijs van stelling 4.14.

□

Uit stelling 5.13 volgt:  $\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \leq \beta$ . Als dus  $\alpha = \beta$ , dan geldt zeker  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ .

Gevolg 5.14: Als  $(i_0, j_0)$  een zadelpunt (in zuivere strategieën) is van het matrixspel  $R$ , dan geldt:

$$(5.15) \quad \tilde{R}(p, j_0) \leq R(i_0, j_0) \leq \tilde{R}(i_0, q) \quad \text{voor alle } p \in S^m, q \in S^n.$$

Bewijs: m.b.v. stelling 5.13 i) en ii).

□

Als  $(i_0, j_0)$  dus een zadelpunt van  $R$  is, dan is  $(i_0, j_0)$  ook een zadelpunt van de gemengde uitbreiding  $\tilde{R}$ . Maar misschien heeft  $\tilde{R}$  ook nog zadelpunten die niet zuiver zijn. Een paar  $(p_0, q_0) \in S^m \times S^n$  is een zadelpunt van  $\tilde{R}$  als

$$(5.16) \quad \tilde{R}(p, q_0) \leq \tilde{R}(p_0, q_0) \leq \tilde{R}(p_0, q) \quad \text{voor alle } p \in S^m, q \in S^n.$$

De lezer kan zelf bewijzen (analoog als in st. 4.16) dat  $\tilde{R}$  een zadelpunt bezit dan als  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ . Ook geldt weer een analoge bewering als in stelling 4.8 (ga na). Als  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ , dan is de uitkomst van het spel bepaald: beide spelers zullen een zadelpuntsstrategie spelen. Als  $(p_0, q_0)$  een zadelpunt is, noemen we  $p_0$  een optimale strategie voor  $P_1$  en  $q_0$  een optimale strategie voor  $P_2$ . Ook noemen we in dit geval het getal  $\tilde{R}(p_0, q_0)$  ( $= \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ ) de waarde van het spel. In stelling 5.18 bewijzen we dat matrixspelen altijd een waarde en (gemengde) optimale strategieën voor beide spelers bezitten. We geven deze stelling meerdere bewijzen om daarmee verschillende bewijstechnieken te illustreren die voor dit vakgebied kenmerkend zijn. De stelling heet de minimaxstelling omdat de bewering erin equivalent is met

$$(5.17) \quad \max_{p \in S^m} \min_{q \in S^n} \tilde{R}(p, q) = \min_{q \in S^n} \max_{p \in S^m} \tilde{R}(p, q) \quad (\text{ga na}).$$

Stelling 5.18: (minimaxstelling).

Zij  $R$  een  $m \times n$  matrix. Dan heeft de gemengde uitbreiding  $\tilde{R}$  een zadelpunt (en dus heeft het spel een waarde en optimale strategieën voor beide spelers).

Bewijs A: Dekpuntmethode.

De kern van dit bewijs is de dekpuntstelling van Kakutani. Dekpuntstellingen (vast punt stellingen) zijn stellingen van de vorm: zij gegeven een verzameling  $X$  en een functie  $f: X \rightarrow X$ . Als  $f$  en  $X$  aan bepaalde voorwaarden voldoen, dan heeft  $f$  een dekpunt, d.w.z. er is een  $x \in X$  met  $f(x) = x$ . Een eenvoudig voorbeeld van zo'n stelling is:

Zij  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  een continue functie, dan heeft  $f$  een dekpunt. Bewijs deze stelling zelf, bijv. m.b.v. de tussenwaardestelling uit wsk. 10. Algemeener geldt de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen:

#### 5.19. Dekpuntstelling van Brouwer

Zij  $X$  een niet lege, compacte en convexe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ . Zij  $f: X \rightarrow X$  een continue functie. Dan heeft  $f$  een dekpunt.

De dekpuntstelling van Kakutani is een generalisatie van die van Brouwer. De stelling handelt echter niet over functies  $f: X \rightarrow X$  maar over afbeeldingen  $f: X \rightarrow P(X)$  ( $P(X)$  is de verzameling van alle deelverzamelingen van  $X$ ). Men noemt deze afbeeldingen wel multifuncties. Voor zo'n multifunctie noemen we  $x$  een dekpunt als  $x \in f(x)$ . We geven eerst enige definities (zie bijv. Berge: Espaces Topologique).

Definitie 5.20: Zij  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$  en  $f: X \rightarrow P(X)$  zdd  $f(x) \neq \emptyset$  voor elke  $x \in X$ .  $f$  is half continu van boven (upper semi continuous) als voor alle  $x, y \in X$  en alle rijen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  van elementen van  $X$  geldt

als  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  en  $y_n \in f(x_n)$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

dan  $y \in f(x)$ .

$f$  is half continu van beneden (lower semi continuous) als voor alle  $x, y \in X$  en elke rij  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  van elementen van  $X$  geldt

als  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  en  $y \in f(x)$

dan bestaat er een rij  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  van elementen uit  $X$  zdd  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  en  $y_n \in f(x_n)$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

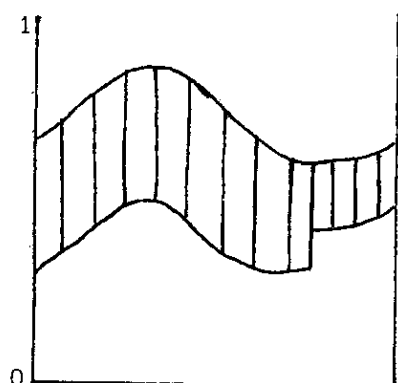
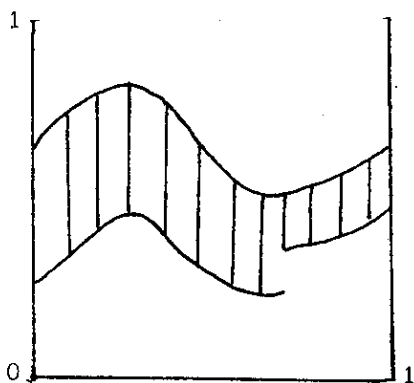


fig. 5.6

$f: [0,1] \rightarrow P([0,1])$   
het verticale lijn-  
stuk boven  $x$  repre-  
senteert  $f(x)$ .

niet half continu van boven  
wel half continu van beneden

wel half continu van boven  
niet half continu van beneden

### 5.21. Dekpuntstelling van Kakutani

Zij  $X$  een compacte, convexe en niet lege deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ . Zij  $f: X \rightarrow P(X)$  zdd  $f(x)$  niet leeg, gesloten en convex is, voor elke  $x \in X$ . Als  $f$  half continu van boven is, dan heeft  $f$  een dekpunt.

#### Bewijs van stelling 5.18

$S^m$  en  $S^n$  zijn niet lege, compacte en convexe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^m$ , resp.  $\mathbb{R}^n$ ; dus is  $S^m \times S^n$  een compacte, convexe en niet lege deelverzameling van  $\mathbb{R}^{m+n}$ . We definiëren een afbeelding van  $S^m \times S^n$  naar  $P(S^m \times S^n)$ .



Voor  $p \in S^m$ , zij

$$B_p := \{q \in S^n ; \tilde{R}(p,q) = \min_{y \in S^n} \tilde{R}(p,y)\}$$

(het minimum bestaat vanwege stelling 5.13).

Dan is  $B_p$  niet leeg, gesloten en convex (ga na).

Voor  $q \in S^n$ , zij

$$A_q := \{p \in S^m ; \tilde{R}(p,q) = \max_{x \in S^m} \tilde{R}(x,q)\}.$$

Dan is  $A_q$  niet leeg, gesloten en convex.

Definieer nu  $f: S^m \times S^n \rightarrow P(S^m \times S^n)$  door:

$$f(p,q) = A_q \times B_p.$$

Dan is  $f(p,q)$  niet leeg, gesloten en convex voor alle  $(p,q) \in S^m \times S^n$ .

We laten zien dat  $f$  half continu van boven is.

Laat:

$$p, a, p_n, a_n \in S^m \quad (n \in \mathbb{N}) \quad q, b, q_n, b_n \in S^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, q_n) = (p, q)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (a, b)$$

$$a_n \in A_{q_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n \in B_{p_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Te bewijzen:  $a \in A_q$ ,  $b \in B_p$ .

Welnu, stel  $a \notin A_q$ . Laat  $a^* \in A_q$ . Zij  $\varepsilon > 0$  zdd

$$\tilde{R}(a,q) + \varepsilon \leq \tilde{R}(a^*,q).$$

Omdat  $\tilde{R}$  in beide leden continu is (ga na), geldt voor  $n$  voldoende groot

$$\tilde{R}(a_n, q_n) + \varepsilon/2 \leq \tilde{R}(a^*, q_n).$$

Dus  $a_n \notin A_{q_n}$ . Tegenspraak, dus  $a \in A_q$ .

Analoog bewijst men dat  $b \in B_p$ .

We mogen concluderen dat  $f$  een dekpunt  $(p_0, q_0)$  bezit. Het is eenvoudig na te gaan, dat dit punt  $(p_0, q_0)$  een zadelpunt van  $\tilde{R}$  is. □

Bewijs B: De separatiemethode.

Stelling 5.22: (separatiestelling)

Laat  $A$  en  $B$  disjuncte en convexe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^m$  zijn. Dan is er een hypervlak dat  $A$  en  $B$  scheidt, d.w.z. er is een  $p \in \mathbb{R}^m$  ( $p \neq 0$ ) en een  $v \in \mathbb{R}$ , zdd

$$p^T x \leq v \quad \text{voor alle } x \in A$$

$$p^T y \geq v \quad \text{voor alle } y \in B.$$

Literatuur: R.T. Rockefellar: Convex Analysis.

Bewijs van stelling 5.18:

Definieer  $V \subset \mathbb{R}^m$  door

$$V := \{(\tilde{R}(1,q), \dots, \tilde{R}(m,q)); q \in S^n\}.$$

Voor het matrixspel  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  is het plaatje van  $V$ :

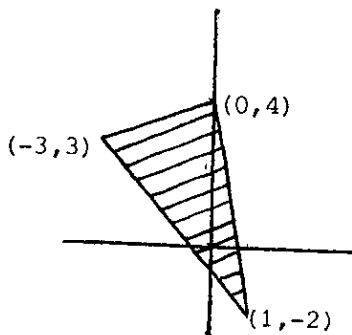


fig. 5.7

$V$  is een niet lege, begrensde en convexe verzameling (ga na). Voor  $t \in \mathbb{R}$  definieer

$$O_t := \{x \in \mathbb{R}^m; x_i < t \text{ voor alle } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Dan is  $O_t$  een niet lege, convexe verzameling. Zij  $\hat{t} = \sup\{t; O_t \cap V = \emptyset\}$  (dit supremum bestaat, ga na). Dan geldt  $O_{\hat{t}} \cap V = \emptyset$  (ga na). Vanwege de scheidingsstelling bestaat er een  $\hat{p} \in \mathbb{R}^m$  ( $\hat{p} \neq 0$ ) en  $\hat{v} \in \mathbb{R}$  met,

$$(5.23) \quad \hat{p}^T x \leq \hat{v} \quad \text{voor alle } x \in O_{\hat{t}}$$

$$(5.24) \quad \hat{p}^T y \geq \hat{v} \quad \text{voor alle } y \in V.$$

Omdat  $O_{\hat{t}}$  naar beneden onbegrensd is, volgt uit (5.23)

$$(5.25) \quad \hat{p}_i \geq 0 \quad \text{voor alle } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Omdat  $\hat{p}_i > 0$  voor minstens één  $i$  kunnen we  $\hat{p}$  zo normaliseren dat

$$(5.26) \quad \sum_{i=1}^m \hat{p}_i = 1$$

en dus geldt  $\hat{p} \in S^m$ .

Uit (5.23), (5.26) en  $t \cdot e \in O_t$  voor alle  $t < \hat{t}$  volgt:

$$(5.27) \quad \hat{t} \leq \hat{v}.$$

Zij  $q \in S^n$  en zij  $\tilde{r}(q) := (\tilde{R}(1,q), \dots, \tilde{R}(m,q)) \in V$ .

Uit (5.24) volgt:

$$(5.28) \quad \tilde{R}(\hat{p}, q) = \sum_{i=1}^m \hat{p}_i \cdot \tilde{R}(i, q) = \hat{p}^T \tilde{r}(q) \geq \hat{v}.$$

En dus kan  $P_1$ , door  $\hat{p}$  te spelen, minimaal  $\hat{v}$  winnen. Omgekeerd geldt: Als  $t > \hat{t}$ , dan is er een  $q_t \in S^n$  zdd  $\tilde{r}(q_t) \in O_t$ .

En dus geldt

$$\tilde{R}(i, q_t) < t \quad \text{voor alle } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Maar dan geldt ook

$$(5.29) \quad \tilde{R}(p, q_t) < t \quad \text{voor alle } p \in S^m.$$

Kies een rij  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  met  $t_k > \hat{t}$  en  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \hat{t}$ .

Aangezien  $S^n$  compact is, bestaat er een deelrij van  $\{q_{t_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  die convergeert, zeg naar  $\hat{q}$ .

Uit (5.29) volgt:

$$(5.30) \quad \tilde{R}(p, \hat{q}) \leq \hat{t} \quad \text{voor alle } p \in S^m.$$

En dus kan  $P_2$  zijn verlies tot  $\hat{t}$  beperken, door  $\hat{q}$  te spelen. Uit (5.27), (5.28) en (5.30) volgt dat  $\hat{p}$  een optimale strategie voor  $P_1$ ,  $\hat{q}$  een optimale strategie voor  $P_2$  en  $\hat{v}$  de waarde van het spel is.  $\square$

Bewijs C: Lineaire Programmering.

Als we aannemen dat de waarde van het spel (genoteerd met  $v$ ) en optimale strategieën voor beide spelers bestaan, dan is  $p \in \mathbb{R}^m$  een optimale strategie voor  $P_1$  als voldaan is aan:

$$(5.31) \quad p_i \geq 0 \quad \text{voor alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

$$(5.32) \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$(5.33) \quad \sum_{i=1}^m p_i R(i, j) \geq v \quad \text{voor alle } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ga dit na m.b.v. stelling 5.13 i). Bovendien geldt in dit geval: de waarde van het spel is de grootste  $v$  die aan (5.33) voldoet. We zien dat het bepalen van een optimale strategie voor  $P_1$  nauw verwant is met oplossen van het lp-probleem:

$$P^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{maximaliseer } v \\ \text{onder de voorwaarden (5.31), (5.32), (5.33)}. \end{array} \right.$$

Analoog ziet men dat het bepalen van een optimale strategie voor  $P_2$  nauw samenhangt met oplossen van het lp-probleem:

$$P^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{minimaliseer } w \\ \text{onder de voorwaarden} \\ q_j \geq 0 \quad \text{voor alle } j \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{j=1}^n q_j = 1 \\ \sum_{j=1}^n R(i, j)q_j \leq w \quad \text{voor alle } i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right.$$

Nu kan men nagaan dat de problemen  $P^{(1)}$  en  $P^{(2)}$  elkaars duale zijn (her-schrijf eventueel eerst de problemen  $P^{(1)}$  en  $P^{(2)}$  in een geschikte vorm). Omdat beide problemen toegelaten oplossingen bezitten, volgt uit de dualiteitsstelling voor lineaire programmering (hfdst. I, st. 3.2.13):

(5.34) Er bestaat een optimale oplossing  $(\hat{p}, \hat{v})$  van  $P^{(1)}$  en een optimale oplossing  $(\hat{q}, \hat{w})$  van  $P^{(2)}$ ; er geldt  $\hat{v} = \hat{w}$ .

Men gaat eenvoudig na dat in dit geval  $\hat{p}$  een optimale strategie voor  $P_1$ ,  $\hat{q}$  een optimale strategie voor  $P_2$  en  $\hat{v}$  de waarde van het spel is.

#### Opmerkingen

Het eerste bewijs van de minimaxstelling werd in 1928 door von Neumann gegeven. Dit bewijs gebruikte de dekpuntstelling van Brouwer. Ville bewees in 1938 de minimaxstelling op manier B. De relatie tussen lineaire programmering en speltheorie werd rond 1950 ontdekt door Dantzig en Brown (zie T.C. Koopmans (ed.): Activity Analysis of Production and Allocation, 1951, studiebibl. WSK). Overigens is de dualiteitsstelling voor lineaire programmering ook m.b.v. de minimaxstelling te bewijzen (zie G.B. Dantzig: linear programming and extensions).

Nash bewees in 1950 m.b.v. de dekpuntstelling van Kakutani, dat elk niet-coöperatief n-personenspel een evenwichtspunt (in gemengde strategieën) bezit.

Van stelling 5.18 zijn in de loop der jaren verscheidene generalisaties gegeven. Een voorbeeld is:

Stelling 5.36: Stel  $X$  en  $Y$  zijn compacte, convexe deelverzamelingen van lineaire ruimtes  $E^1$  en  $E^2$ . Zij  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ . Als

- i)  $f$  een continue functie is.
- ii)  $f(x, \cdot)$  een convexe functie is, voor elke  $x \in X$ .
- iii)  $f(\cdot, y)$  een concave functie is, voor elke  $y \in Y$ , dan

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Een functie  $g$  is concaaf als de functie  $-g$  convex is. Voor een bewijs van stelling 5.36 zie bijv.:

S. Karlin: Mathematical methods and theory in games, programming and economics vol I (st. 1.5.1).

In het volgende voorbeeld zien we dat niet elk spel een waarde bezit.

Voorbeeld 5.37: Twee spelers schrijven gelijktijdig (en onafhankelijk) een natuurlijk getal op. Diegene die het hoogste getal opschrijft ontvangt f 1,- van de ander. Bij gelijke getallen volgt geen uitbetaling. Een gemengde strategie voor  $P_1$  is een rij  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  met

$$p_i \geq 0 \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Men gaat eenvoudig na dat  $\tilde{\alpha} = -1$  en  $\tilde{\beta} = 1$ .

Na de existentievraag is uiteraard de vraag aan de orde hoe de waarde en optimale strategieën berekend kunnen worden. In principe is dit altijd mogelijk m.b.v. de simplexmethode (vanwege 5.34)). Ook in dit geval is het echter verstandig zoveel mogelijk van de structuur van het spel gebruik te maken, zoals we illustreren in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 5.38:

$P_1$  en  $P_2$  hebben elk 2 kaarten,  $P_1$  heeft A en V,  $P_2$  heeft J en K. De rangorde is  $J > A > K > V$ . Beide spelers doen f 1,- in de pot. Vervolgens kiezen ze gelijktijdig elk een kaart. Als  $P_2$  K gekozen heeft, wint de speler met

de hoogste kaart de pot. Bij de combinatie (V,J) delen de spelers de pot. Bij de combinatie (A,J) wordt het spel nogmaals gespeeld. In dit geval zetten de spelers elk f 1,- extra in. Als nu (A,J) optreedt, wint  $P_2$  de pot.

De uitgebreide vorm van het spel is:

De normale vorm is:

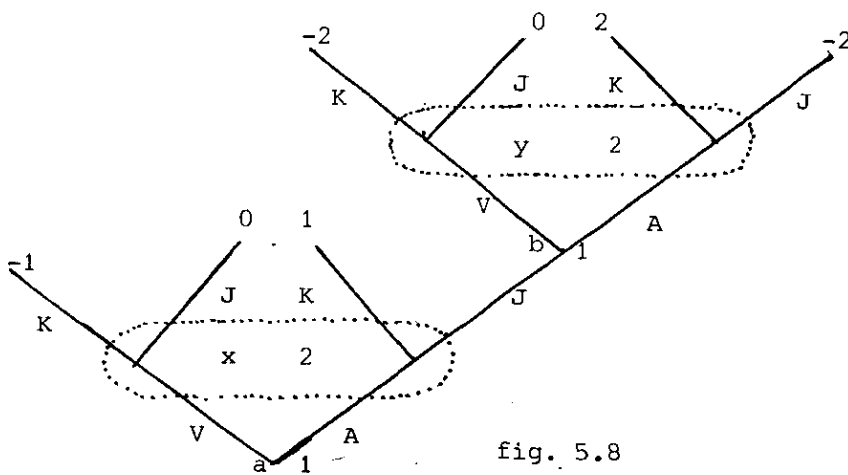


fig. 5.8

	KK	KJ	JK	JJ
VV	-1	-1	0	0
VA	-1	-1	0	0
AV	1	1	-2	0
AA	1	1	2	-2

VA betekent: V in a, A in b.

KJ betekent: K in x, A in y.

fig. 5.9

De matrix uit fig. 5.9 is te reduceren tot:

	K	JK	JJ
V	-1	0	0
AV	1	-2	0
AA	1	2	-2

fig. 5.10

Maar dit spel is niet zo eenvoudig met de hand op te lossen. We kunnen echter ook m.b.v. dynamische programmering aan de slag. Immers, als de informatieverzameling {b} bereikt wordt, moet een nieuw spel gespeeld

worden. Van dit spel is de spelmatrix

	K	J
V	-2	0
A	2	-2

fig 5.11

Als in dit spel  $P_1$  de strategie  $\tilde{p} = p \cdot V + (1 - p)A$  en  $P_2$  de strategie  $\tilde{q} = q \cdot K + (1 - q) \cdot J$  speelt is de uitbetaling voor  $P_1$ :

$$(5.39) \quad \tilde{R}(\tilde{p}, \tilde{q}) = -2pq + 2(1 - p)q - 2(1 - p)(1 - q) = p\{-6q + 2\} + 4q - 2$$

$$= q\{4 - 6p\} + 2p - 2.$$

$P_1$  wil (5.39) maximaliseren,  $P_2$  wil (5.39) minimaliseren. Hieruit volgt

i.v.m.  $P_1$ :

$$q < 1/3 \Rightarrow p = 1$$

$$q = 1/3 \Rightarrow p \text{ willekeurig}$$

$$q > 1/3 \Rightarrow p = 0$$

i.v.m.  $P_2$ :

$$p < 2/3 \Rightarrow q = 0$$

$$p = 2/3 \Rightarrow q \text{ willekeurig}$$

$$p > 2/3 \Rightarrow q = 1$$

Hieruit zien we dat het spel precies 1 zadelpunt heeft nl.

$(2/3V + 1/3A, 1/3K + 2/3J)$ . De waarde van het spel is  $-2/3$  (ga dit ook na m.b.v. de techniek uit bewijs B van stelling 5.18).

We kunnen nu het oorspronkelijke spel reduceren tot:

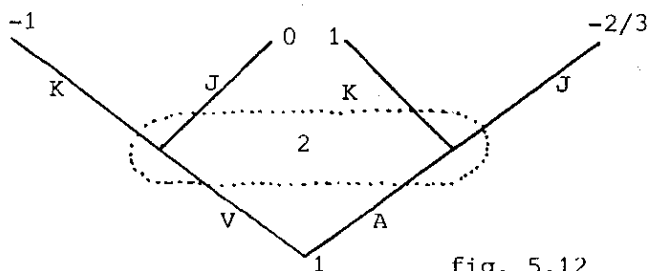


fig. 5.12

	K	J
V	-1	0
A	1	-2/3

fig. 5.13



Op dezelfde manier als boven zien we dat  $(5/8V + 3/8A, 1/4K + 3/4J)$  het enige zadelpunt van dit spel is. De waarde van het spel is  $-1/4$ . De gevonden strategieën leiden tot de volgende strategieën voor het matrixspel uit fig. 5.10:

voor  $P_1$ :  $5/8V + 2/8AV + 1/8AA$

voor  $P_2$ :  $1/4K + 1/4JK + 2/4JJ$ .

Men kan eenvoudig nagaan dat dit strategieënpaar inderdaad een zadelpunt voor het spel uit fig. 5.10 is.

#### IV. Utility theorie

We hebben in de voorgaande hoofdstukken steeds aangenomen dat elke beslissers in een beslissingssituatie als doel heeft de verwachte waarde van zijn criteriumfunctie te maximaliseren. Het is echter de vraag of zo'n ééndimensionale criteriumfunctie überhaupt bestaat, of het wel mogelijk is de verschillende doelen die iemand nastreeft onder één noemer te vangen. Denk bijvoorbeeld aan een economische situatie waarin een regering zowel de werkloosheid als de inflatie wil beteugelen: Is het mogelijk deze twee doelen tegen elkaar af te wegen en een ééndimensionale criteriumfunctie op te stellen? Als U bijvoorbeeld een fiets wilt aanschaffen, construeert U dan een ééndimensionale criteriumfunctie, waarin prijs, kwaliteit, rijcomfort etc. is verwerkt en koopt U die fiets waarvoor de criteriumwaarde maximaal is? Een ander probleem is, dat zelfs als een ééndimensionale criteriumfunctie gegeven is, het niet altijd vanzelfsprekend is, dat de beslissers de verwachte waarde hiervan tracht te maximaliseren. We geven hiervan twee voorbeelden:

##### Voorbeeld 4.1. Paradox van Sint Petersburg (D. Bernoulli).

In een casino wordt het volgende spel gespeeld tussen een bankhouder en een speler. De bankhouder werpt een (eerlijke) munt tot voor de eerste keer kruis valt. De speler ontvangt een bedrag  $2^n$  als bij de  $n^e$  worp voor het eerst kruis valt. Om aan het spel deel te kunnen nemen moet vooraf door de speler een bedrag ingezet worden. Wat is het maximale bedrag dat U bereid bent te betalen om het recht van deelneming te verwerven? Merk op dat de verwachte uitbetaling gelijk is aan:

$$\frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + \frac{1}{8}8 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty .$$

##### Voorbeeld 4.2. Beschouw het nulsomspel met uitbetalingsmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

De unieke optimale strategie voor speler 1 is  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (de tweede en derde

zuivere strategie beide met kans  $\frac{1}{2}$  spelen). Zou U, speler 1 zijnde, deze strategie spelen? Beschouw vervolgens het spel met uitbetalingsmatrix  $\alpha R$  ( $\alpha > 0$ ). De unieke optimale strategie voor speler 1 is nog steeds  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Speelt U deze strategie als  $\alpha = 10^3$  of  $\alpha = 10^6$ ? Realiseer U dat de eerste zuivere strategie U met zekerheid een uitbetaling  $\alpha$  geeft.

Bovenstaande voorbeelden geven aanleiding tot de volgende vragen:

- i) onder welke voorwaarden is het mogelijk om in situaties waarin de waardering voor een aantal gegeven mogelijkheden niet op een natuurlijke wijze in één eenheid uitgedrukt kan worden, toch een numerieke weergave van een voorkeurspatroon te vinden, en
- ii) onder welke voorwaarden bestaat een criteriumfunctie met de eigenschap dat de meest geprefereerde strategie diegene is met de hoogste verwachte criteriumwaarde.

Deze vragen zijn het onderwerp van de utility theorie, welke in zijn moderne versie, zoals gepresenteerd in dit hoofdstuk, afkomstig is van Von Neumann and Morgenstern (Theory of Games and Economic Behavior). We concentreren ons in dit hoofdstuk op een stochastische beslissingssituatie waarin eindig veel uitkomsten  $A_1, \dots, A_n$  mogelijk zijn. De restrictie tot eindig veel uitkomsten is niet essentieel, zij is alleen gemaakt om de expositie te vereenvoudigen. Zij  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ . Elke keuze van strategieën door de beslissers in deze beslissingssituatie induceert een kansverdeling op  $A$  en elke beslisser zal sommige kansverdelingen prefereren boven bepaalde andere. We nemen aan dat de preferenties van een speler beschreven worden door een preferentiepatroon (definitie 4.3) en beschouwen de vraag wanneer een preferentiepatroon numeriek weergegeven kan worden, d.w.z. wanneer er een utility functie (nutsfunctie, definitie 4.9) bij dit preferentiepatroon bestaat.

Definitie 4.3. Zij  $\Pi$  de verzameling van alle kansverdelingen op  $A$ . Een preferentiepatroon op  $\Pi$  is een binaire relatie  $\preceq$  op  $\Pi$  zodat voor elke

$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$ :

i)  $\pi_1 \preceq \pi_2$  of  $\pi_2 \preceq \pi_1$ ,

ii) als  $\pi_1 \preceq \pi_2$  en  $\pi_2 \preceq \pi_3$  dan  $\pi_1 \preceq \pi_3$  (transitiviteit).

Zij  $\succeq$  een preferentiepatroon op  $\Pi$ . We definiëren de met  $\succeq$  geassocieerde relaties  $\succ$  en  $\sim$  door middel van:

$$\pi_1 \succ \pi_2 := [\pi_1 \succeq \pi_2 \wedge \neg(\pi_2 \succeq \pi_1)],$$

$$\pi_1 \sim \pi_2 := [\pi_1 \succeq \pi_2 \wedge \pi_2 \succeq \pi_1].$$

De interpretatie van deze relaties is

$\pi_1 \succ \pi_2$ : de beslisser geeft de voorkeur aan de verdeling  $\pi_1$  boven de verdeling  $\pi_2$ ,

$\pi_1 \succeq \pi_2$ : de beslisser vindt  $\pi_1$  minstens even goed als  $\pi_2$ ,

$\pi_1 \sim \pi_2$ : de beslisser is indifferent tussen  $\pi_1$  en  $\pi_2$ .

De uitspraken gedaan in de volgende stelling zijn eenvoudig te verifiëren:

Stelling 4.4.

- i) de relatie  $\sim$  is een equivalentierelatie,
- ii) voor elke  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$  geldt: òf  $\pi_1 \succ \pi_2$ , òf  $\pi_1 \sim \pi_2$ , òf  $\pi_2 \succ \pi_1$ , en dus induceert het preferentiepatroon een volledige ordening (d.w.z. een reflexieve, transitieve, antisymmetrische en totale relatie) op de equivalentieclassen van  $\Pi$ , met betrekking tot  $\sim$ .
- iii) voor elke  $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi$  geldt: als  $\pi_1 \succ \pi_2$  en  $\pi_2 \succeq \pi_3$  dan  $\pi_1 \succ \pi_3$ .

De kansverdeling  $\pi \in \Pi$  die met kans  $p_i$  de uitkomst  $A_i$  oplevert ( $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ) zullen we noteren als  $\sum_{i=1}^n p_i A_i$ . We kunnen de uitkomst  $A_i$  identificeren met  $1A_i$ , de kansverdeling die met kans 1  $A_i$  oplevert en hebben dus  $A \subset \Pi$ . Uit definitie 4.3 volgt meteen:

Gevolg 4.5. Zij  $\succeq$  een preferentiepatroon op  $\Pi$ . Dan bestaat er een permutatie  $\sigma$  van  $\{1, \dots, n\}$  zodat geldt  $A_{\sigma(1)} \succeq A_{\sigma(2)} \succeq \dots \succeq A_{\sigma(n)}$ .

In het vervolg zullen we aannemen dat  $A_1 \succeq A_2 \succeq \dots \succeq A_n$ , hetgeen we door eventuele henummering van  $A$  kunnen bereiken. We formuleren nu een aantal axioma's waaraan een redelijk preferentiepatroon zal voldoen en bewijzen vervolgens dat een preferentiepatroon dat aan deze axioma's voldoet numeriek

weergegeven kan worden (stelling 4.10). De lezer kan de redelijkheid van de volgende axioma's testen door na te gaan of zijn eigen preferentiepatroon eraan voldoet.

Axioma 4.6. (Continuïteit):

Voor elke  $A_i \in A$  bestaat er een  $\hat{p}_i \in [0,1]$  zodat:

$$A_i \sim \hat{p}_i A_1 + (1 - \hat{p}_i) A_n .$$

Axioma 4.7. (Substitutie):

Voor  $i \in \{1, \dots, n\}$  zij  $\hat{p}_i$  als in Axioma 4.6. Voor elke  $i \in \{1, \dots, n\}$  en elk drietal  $p_1, p_i, p_n \geq 0$  met  $p_1 + p_i + p_n = 1$  geldt:

$$p_1 A_1 + p_i A_i + p_n A_n \sim (p_1 + p_i \hat{p}_i) A_1 + (p_n + p_i (1 - \hat{p}_i)) A_n .$$

Axioma 4.8. (Monotonie):

Voor elk tweetal  $p, p' \in [0,1]$  geldt:

$$\begin{aligned} \text{als } A_1 \succeq A_n, \text{ dan } [pA_1 + (1-p)A_n \succeq p'A_1 + (1-p')A_n \Leftrightarrow p \geq p'] \\ \text{als } A_1 \preceq A_n, \text{ dan } [pA_1 + (1-p)A_n \preceq p'A_1 + (1-p')A_n \Leftrightarrow p > p'] . \end{aligned}$$

Definitie 4.9. Een utility functie bij een preferentiepatroon  $\succeq$  is een functie  $u: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  met de eigenschappen:

- i)  $\pi_1 \succeq \pi_2 \Leftrightarrow u(\pi_1) > u(\pi_2)$ , voor alle  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ ,
- ii) als  $\pi = \sum_{i=1}^n p_i A_i$ , dan  $u(\pi) = \sum_{i=1}^n p_i u(A_i)$ .

Eis i) in bovenstaande definitie zegt dat een verdeling  $\pi_1$  geprefereerd wordt boven een verdeling  $\pi_2$  precies als de utility waarde van  $\pi_1$  groter is dan die van  $\pi_2$ . De tweede eis zegt dat een utility functie het karakter van een verwachting heeft, wat rekentechnisch natuurlijk erg plezierig is.

Stelling 4.10. Zij  $\succeq$  een preferentiepatroon op  $\Pi$ . Er bestaat een utility functie bij  $\succeq$  dan en slechts dan als  $\succeq$  aan de Axioma's 4.6, 4.7 en 4.8 voldoet.

Bewijs. Het is eenvoudig na te gaan dat een preferentiepatroon waarbij een utility functie bestaat aan de Axioma's 4.6, 4.7 en 4.8 voldoet.

Stel vervolgens dat  $\underline{\xi}$  een preferentiepatroon is dat aan deze axioma's voldoet. We zullen een utility functie  $u$  bij  $\underline{\xi}$  construeren. We onderscheiden twee gevallen:

- a)  $A_1 \sim A_n$ . In dit geval volgt uit de axioma's dat  $\pi \sim A_1$  voor elke  $\pi \in \Pi$  en is iedere constante functie op  $\Pi$  een utility functie bij  $\underline{\xi}$ .
- b)  $A_1 \succ A_n$ . Nu moet gelden  $u(A_1) > u(A_n)$ . Stel we definiëren  $u(A_1) = 1$  en  $u(A_n) = 0$ . Uit de axioma's 4.6 en 4.8 volgt dat er voor iedere  $i \in \{1, \dots, n\}$  precies één  $\hat{p}_i \in [0, 1]$  bestaat met  $A_i \sim \hat{p}_i A_1 + (1 - \hat{p}_i) A_n$ . Vanwege eis ii) voor een utility functie zijn we gedwongen  $u(A_i) := \hat{p}_i$  te definiëren, immers:

$$u(A_i) = u(\hat{p}_i A_1 + (1 - \hat{p}_i) A_n) = \hat{p}_i u(A_1) + (1 - \hat{p}_i) u(A_n) = \hat{p}_i .$$

Maar dan zijn we gedwongen  $u$  te definiëren door:

$$u\left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i \hat{p}_i . \quad (4.11)$$

Resteert ons te bewijzen dat  $u$ , als gedefinieerd in (4.11), inderdaad aan eis i) voor een utility functie bij  $\underline{\xi}$  voldoet. Welnu als

$\pi_1 = \sum_{i=1}^n p_i A_i$  en  $\pi_2 = \sum_{i=1}^n p'_i A_i$ , dan volgt uit herhaald toepassen van de axioma's 4.6 en 4.7:

$$\sum_{i=1}^n p_i A_i \sim \left(\sum_{i=1}^n p_i \hat{p}_i\right) A_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i \hat{p}_i\right) A_n , \quad (4.12)$$

en dus m.b.v. Axioma 4.8:

$$\sum_{i=1}^n p_i A_i \succ \sum_{i=1}^n p'_i A_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i \hat{p}_i > \sum_{i=1}^n p'_i \hat{p}_i , \quad (4.13)$$

hetgeen (volgens (4.11)) te bewijzen was.  $\square$

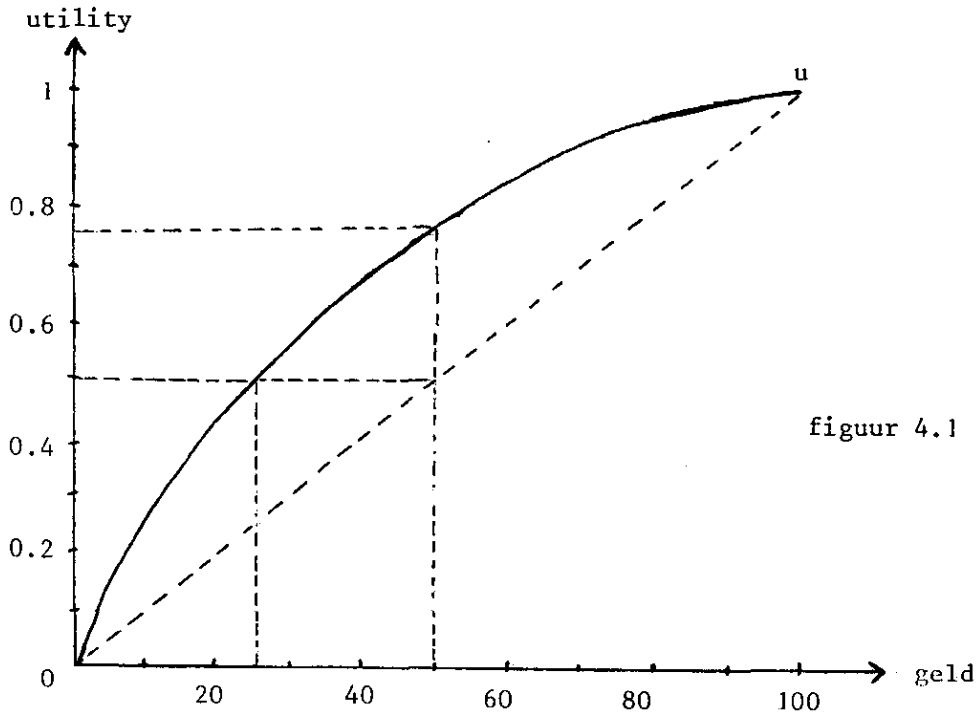
Uit het bewijs van Stelling 4.10 volgt meteen:

Gevolg 4.14. Zij  $\underline{\xi}$  een preferentiepatroon dat aan de Axioma's 4.6, 4.7 en 4.8 voldoet. Als  $u$  en  $v$  twee utility functies bij  $\underline{\xi}$  zijn, dan bestaan er constantes  $\alpha > 0$  en  $\beta \in \mathbb{R}$  zodat  $u(\pi) = \alpha v(\pi) + \beta$  voor alle  $\pi \in \Pi$ .

Tot slot van dit hoofdstuk zullen we aangeven hoe m.b.v. utility theorie de paradox uit voorbeeld 4.1 opgelost kan worden. De kern van de zaak is dat de meeste mensen risiko-afkerig zijn, d.w.z. als hun bijvoorbeeld de keuze gegeven wordt tussen  $\frac{1}{2} f_{100} + \frac{1}{2} f_0$  (met kans  $\frac{1}{2}$  100 gulden ontvangen en met kans  $\frac{1}{2}$  niets) of  $1 f_{50}$  dan kiezen zij voor het laatste. Als u een utility functie van een risico-afkerige beslisser is, dan geldt dus

$$u(1 f_{50}) > u(\frac{1}{2} f_{100} + \frac{1}{2} f_0) = \frac{1}{2}u(f_{100}) + \frac{1}{2}u(f_0) .$$

Normaliseren we u zodanig dat  $u(f_{100}) = 1$  en  $u(f_0) = 0$ , dan hebben we dus  $u(1 f_{50}) > \frac{1}{2}$ , hetgeen wil zeggen dat de kans  $p$  waarvoor  $1 f_{50} \sim p f_{100} + (1-p)f_0$  groter dan  $\frac{1}{2}$  is. Voor een risico-afkerige beslisser ziet een utility functie u er dus bijvoorbeeld als volgt uit:



Voor een beslisser waarvoor de utility functie voor loterijen met uitbetalingen tussen  $f_0$  en  $f_{100}$  gegeven wordt door fig 4.1 geldt dat  $1 f_{50} \sim 0,75 f_{100} + 0,25 f_0$ . Deze beslisser is ook indifferent tussen  $\frac{1}{2} f_{100} + \frac{1}{2} f_0$  en  $1 f_{25}$ .