Onderafdeling der Wiskunde

Optimaliseringsmethoden I

(Lineaire Programmering)

Uitgave 1972

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Dict.nr. 2.202 / prijs f 3,--

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

OPTIMALISERINGSMETHODEN I

(Lineaire Programmering)

naar het college van

Prof. Dr. J. F. Benders

door

Dr. D. Kijne

Najaar 1971

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Optimaliseringsmethoden I (Lineaire Programmering)

naar het kollege van Prof. Dr. J.F. Benders

door Dr. D. Kijne

De samenstelling van dit diktaat geschiedde in samenwerking met de studenten B. Koster (Bdk), K. Verweij (T) en C. Weug (Wsk). (Najaar 1971)

Inhoud

Notaties

$\underline{x}$	kolomvektor t.a.v. zekere basis (eindig-dimensionaal)
$\underline{x}^T$	rijvektor, getransponeerde van $\underline{x}$
A	matrix, ook geschreven (a_{ij})
a_{ij}	matrixelement in i-de rij en j-de kolom
$\underline{a}_{i*}$	i-de rij van matrix (a_{ij}), geschreven als kolomvektor
$\underline{a}_{i*}^T$	i-de rij van matrix (a_{ij})
$\underline{a}_{*j}$	j-de kolom van matrix (a_{ij})
$\underline{a}_{*j}^T$	j-de kolom van matrix (a_{ij}), geschreven als rijvektor
A^T	getransponeerde matrix van A
$\underline{c}^T\underline{x}$	inwendig produkt van $\underline{c}$ en $\underline{x}$
$\underline{a} < \underline{b}$	elke komponent a_i van $\underline{a}$ kleiner dan de korresponderende b_i van $\underline{b}$
$\underline{a} \leq \underline{b}$	elke komponent a_i van $\underline{a}$ niet groter dan de korresponderende b_i van $\underline{b}$
$\max\,(\underline{c}^T\underline{x})$	maximaliseer de vorm $\underline{c}^T\underline{x}$
$\max\,\{\underline{c}^T\underline{x} \mid ..\}$	maximaliseer de vorm $\underline{c}^T\underline{x}$ onder de voorwaarde ......
$\max\,[x_1, x_2]$	maximum van x_1 en x_2
$\max\limits_i\,[a_i \mid ..]$	maximum van de elementen a_i, $i \in I$, onder de voorwaarde .....
$\underline{x}_B$	deelvektor van $\underline{x}$ samengesteld uit de aktuele basisvariabelen
$\underline{x}_N$	deelvektor van $\underline{x}$ samengesteld uit de aktuele niet-basis-variabelen
$\underline{c}_B$	deelvektor van $\underline{c}$ komponentsgewijs opgebouwd analoog met $\underline{x}_B$
$\underline{c}_N$	deelvektor van $\underline{c}$ komponentsgewijs opgebouwd analoog met $\underline{x}_N$.

1. Inleiding

Een boer wil zijn land (10 ha) bebouwen met haver, aardappelen en/of suikerbieten. Hij wil nagaan, hoeveel ha hij elk jaar met elk van deze produkten moet bebouwen om een zo hoog mogelijke opbrengst te verkrijgen. Per ha is de jaarlijkse opbrengst voor haver ƒ 923,-, voor aardappelen ƒ 1200,- en voor suikerbieten ƒ 1700,-. Hij moet echter rekening houden met een aantal beperkingen die in zijn bedrijf van kracht zijn. Voor de zes perioden waarin hij het arbeidsjaar verdeeld heeft, gelden de volgende gegevens:

	Periode:	Arbeidsbehoefte in uren per ha			Beschikbare
		haver:	aardapp.:	suikerb.:	arbeidsuren:
1.	13/4 - 24/5	2,5	24	158	372
2.	25/5 - 28/6	-	17	98	310
3.	29/6 - 26/7	-	5	11	248
4.	27/7 - 23/8	45	-	-	248
5.	24/8 - 4/10	-	198	-	372
6.	5/10 - 29/11	-	-	120	472

Bovendien kun je niet altijd op dezelfde grond hetzelfde produkt verbouwen: er moet af en toe gewisseld kunnen worden; met aardappelen mag daarom ten hoogste het derde deel van de totale oppervlakte, met suikerbieten ten hoogste het vierde deel en met haver ten hoogste de helft bebouwd worden.

We stellen nu het model op. Er zal jaarlijks x_1 ha met haver bebouwd worden, x_2 ha met aardappelen, x_3 met suikerbieten. Deze beslissingsgrootheden heten ook wel de aktiviteiten van het probleem. De uit de gegevens af te lezen beperkingen zijn:

1. zes beperkingen (voor elke periode één) betreffende arbeidsbehoefte en -beschikbaarheid, bijv.
   $2{,}5\ x_1 + 24\ x_2 + 158\ x_3 \le 372$ (voor periode 1), enz.;
2. één voor de beschikbare grond :
   $x_1 + x_2 + x_3 \le 10$;
3. drie voor de vruchtverwisselingseisen:
   $x_1 \le 5,\ x_2 \le 3{,}33,\ x_3 \le 2{,}5.$

De doelfunktie x_0, die gemaximaliseerd moet worden, is hier:

$$w = 923\ x_1 + 1200\ x_2 + 1700\ x_3.$$

We zijn echter nog niet klaar. De waarden die de variabelen x_j in feite zullen kunnen aannemen, kunnen niet negatief zijn: het zijn immers oppervlakten te bebouwen grond. Bij de probleemformulering moeten we er op bedacht zijn dat ongelijkheden $x_j \geq 0$ voor variabelen van dit type mede opgenomen worden. Bovendien merken we vast op dat dit soort ongelijkheden voor de berekeningen van groot belang zijn.
Rekapitulerend schrijven we het wiskundig model hieronder nog eens uit:

$$\max\ (w = 923\ x_1 + 1200\ x_2 + 1700\ x_3)$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 2{,}5\ x_1 + 24\ x_2 + 158\ x_3 \leq 372 \\ 17\ x_2 + 98\ x_3 \leq 310 \\ 5\ x_2 + 11\ x_3 \leq 248 \\ 45\ x_1 \leq 248 \\ 198\ x_2 \leq 372 \\ 120\ x_3 \leq 472 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \leq 5 \\ x_3 \leq 3{,}33 \\ x_3 \leq 2{,}5 \end{cases}$$

met $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Op een soortgelijke manier worden voor allerlei bedrijven wiskundige modellen opgesteld; men stelt dan de verschillende optredende grootheden voor door lettersymbolen, variabelen genoemd, brengen de verschillende beperkende relaties er tussen in formule, als algebraïsche vergelijkingen of ongelijkheden, en trachten dan zodanige waarden voor de variabelen te vinden, dat een bepaalde doelfunktie of objectfunktie (een winstfunktie of een kostenfunktie) van die variabelen een zo hoog mogelijke (als het om winst gaat) of een zo laag mogelijke (als het om kosten gaat) waarde aanneemt. De variabelen of onbekenden zijn bijvoorbeeld hoeveelheden van stoffen die gekocht kunnen worden, of verwerkt, of gefabriceerd, of verkocht; de beperkingen zijn bijvoorbeeld de door de omstandigheden opgelegde grenzen wat betreft voorraden, transportmogelijkheden, financiële middelen, arbeidskrachten, of kapaciteiten van andere aard. De doelfunkties moeten geoptimaliseerd worden, d.w.z. gemaximaliseerd of geminimaliseerd, al naar gelang we ze een zo hoog mogelijke dan wel een zo laag mogelijke waarde willen laten aannemen. Zo'n hoogste waarde die zo'n funktie, gezien de geldende beperkingen, kan aannemen heet het maximum van die funktie, de laagste waarde het minimum. Maximum of minimum noemt men ook wel uiterste waarde of optimum; het is de optimale waarde.

Elk stel getallen x_1, x_2, x_3 in ons voorbeeld dat aan de gevonden voorwaarden voldoet, is een mogelijke "beslissing" voor de bedrijfsleider, een programma dat men in het bedrijf zou kunnen uitvoeren, gezien de mogelijkheden. (Niet elk programma is even effektief: het programma $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ voldoet aan de beperkingen, maar het is niet erg doeltreffend!) Omdat het probleem waarvoor we ons gesteld zien, streeft naar een zo gunstig mogelijk programma voor het bedrijf, heet het een programmeringsprobleem.

Omdat alle beperkingen lineair zijn in de variabelen x_j $(j = 1,2,3)$ en omdat de doelfunktie lineair is in de x_j, heet het probleem een lineair programmeringsprobleem, afgekort tot L.P.-probleem. Het rekenkundig oplossen van een L.P.-probleem volgens wiskundige methoden heet lineaire programmering (Eng. "linear programming", Fr. "programmation linéaire", D. "lineare Optimierung"). Doordat veel praktische problemen L.P.-problemen zijn en doordat de wiskundige methoden om L.P.-problemen op te lossen tot een grote mate van volmaaktheid zijn ontwikkeld, is de lineaire programmering een belangrijk hoofdstuk uit de toegepaste wiskunde geworden. Eén naam mag niet onvermeld blijven, die van de Amerikaan George B. Dantzig, de "vader van de lineaire programmering", die de wiskundige methoden voor een groot deel heeft uitgedacht.
Het is ondoenlijk om proberenderwijs van bovenstaand (klein) L.P.-probleem de oplossing te vinden. In dit diktaat wordt toegewerkt naar een wiskundige oplossingsmethode: de simplexalgoritme (hoofdstuk 5). De hoofdstukken 2, 3 en 4 vormen een voorbereiding op deze methode, terwijl de hoofdstukken 6, 7 en 8 enige andere aspekten van het lineaire programmeren beschouwen.
In het voorbeeld zouden wij met behulp van genoemde simplexalgoritme de volgende optimale oplossing vinden: als wij jaarlijks 5 ha haver, 1,87 ha aardappelen en 1,99 ha suikerbieten verbouwen, dan is de optimale opbrengst ƒ 10.252,40. In totaal wordt dan 8,86 ha van de 10 jaarlijks bebouwd.

De methoden om met wiskundige middelen te komen tot de meest ekonomische beslissingen over fabrikageprogramma's, over het maken van plannen voor produktie, over scheeps- en vliegtuigtransporten, over mengverhoudingen voor paraffinen of voor veevoeder, over het beheer van voorraden, enz., worden samengenomen onder de naam Operations Research (USA), Operational Research (Engeland), Recherche Opérationelle (Frankrijk), Unternehmensforschung (Duitsland); voor het Nederlandse taalgebied is de term Operationele Analyse voorgesteld, die echter nog niet algemeen geaccepteerd wordt. Velen gebruiken de Amerikaanse naam.
Een onderdeel van deze operationele analyse is de mathematische programmering, de verzameling van technieken die worden toegepast om doelfunkties te optimaliseren onder zekere beperkingen. De lineaire programmering is dus weer een onderdeel van de mathematische programmering.

2. Het lineair programmeringsprobleem (L.P.-probleem)

2.1. Algemene formulering

Bij een L.P.-probleem gaat het om het bepalen van een vektor $\underline{x} \in R^n$ (of wel van alle vektoren $\underline{x} \in R^n$) waarvoor een lineaire funktie

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{j=n} c_jx_j = \underline{c}^T\underline{x} \tag{I}$$

een maximale (of wel een minimale, algemeen: een optimale) waarde aanneemt, onder de lineaire beperkingen of restrikties

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ voor } i = 1,2,\ldots,m_1 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \text{ voor } i = m_1+1,\ m_1+2,\ldots,m_n \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \text{ voor } i = m_2+1,\ m_2+2,\ldots,m, \end{array}\right\} \text{(II)}$$

terwijl bovendien voor een aantal (eventueel alle) variabelen x_j de eis betreffende de grens 0 opgelegd kan zijn:

$$\left.\begin{array}{ll} x_j \geq 0 & \text{voor } j = 1,2,\ldots,n_1 \\ x_j \leq 0 & \text{voor } j = n_1+1,\ n_1+2,\ldots,n_2, \text{ met } n_2 \leq n. \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Een oplossing van het probleem heet een optimale oplossing op optimaal programma. De beperkingen (II) en de eisen (III) zijn beide lineair in de variabelen x_j; zij worden in de rekenmethoden echter verschillend behandeld en het is dan ook doelmatig om tussen de twee onderscheid te maken. Een oplossing van (II) die voldoet aan de eisen (III) heet een toegelaten oplossing of een programma bij het probleem; een oplossing van (II) die niet voldoet aan (III) heet een niet-toegelaten oplossing van (II).
De optimaliseringsfunktie $\underline{c}^T\underline{x}$ heet de objectfunktie, kostenfunktie of doelfunktie.

De beperkingen (II) kunnen ook worden genoteerd met sigma-tekens:

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq b_i \text{ voor } i = 1,2,\ldots,m_1$$

enz.,

of ook met behulp van vektornotatie

$$\underline{a}_{i*}^T \underline{x} \le b_i \quad \text{voor } i = 1,2,..,m_1,$$

enz.,

terwijl tenslotte ook de matrix-notatie gebruikelijk is:

$$A_1 \underline{x} \le \underline{b}_1$$

$$A_2 \underline{x} = \underline{b}_2$$

$$A_3 \underline{x} \ge \underline{b}_3 \;;$$

hier is dan A_1 een (m_1,n)-matrix, A_2 een (m_2-m_1,n)-matrix en A_3 een $(m-m_2,n)$-matrix, met $\underline{b}_1 \in R^{m_1}$, $\underline{b}_2 \in R^{m_2-m_1}$ en $\underline{b}_3 \in R^{m-m_2}$.

2.2. Transformaties van L.P.-problemen

Definitie. We noemen twee L.P.-problemen gelijkwaardig indien het ene in het andere overgezet kan worden door een of meer van de volgende operaties:

(1) het toevoegen van een konstante k aan de doelfunktie $\underline{c}^T\underline{x}$,

(2) het vervangen van een opdracht "maximaliseer $\underline{c}^T\underline{x} + k$" door de opdracht "minimaliseer $-\underline{c}^T\underline{x} - k$", *of andersom*,

(3) het vervangen van een variabele x_j met de eis $x_j \le 0$ door een variabele $x_j^* = -x_j$ met de eis $x_j^* \ge 0$, of omgekeerd,

(4) het vervangen van een variabele x_j zonder voorgeschreven grens 0 door het verschil $x_j^+ - x_j^-$ van twee nieuwe niet-negatieve variabelen $x_j^+ := \max(x_j,0)$ en $x_j^- := \max(-x_j,0)$, of omgekeerd,

(5) het vervangen van een ongelijkheid $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i$ (dan wel $\ge b_i$) door de ongelijkheid $-\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \ge -b_i$ (respectievelijk $\le -b_i$),

(6) het vervangen van een vergelijking $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} = b_i$ door twee ongelijkheden te zamen: $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i$ en $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \ge b_i$, of omgekeerd,

(7) het vervangen van een ongelijkheid $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i$ (dan wel $\ge b_i$) door een vergelijking $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} + y_i = b_i$ (respektievelijk ... $-y_i = b_i$) door toevoeging van een niet-negatieve restvariabele ("slack variable") y_i, of het omgekeerde hiervan.

Voorbeeld. Het L.P.-probleem

$$\min \{ -3x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \le 1;\ x_1 \ge 0\}$$

is gelijkwaardig met het L.P.-probleem

$$\max \{ 3x_1 - x_2^+ + x_2^- + 5 \mid x_1 + x_2^+ - x_2^- + y = 1;\ x_1 \ge 0;\ x_2^+ \ge 0;\ x_2^- \ge 0;\ y \ge 0\} .$$

Opmerking.
We zullen later, bij de z.g. tweefasen-methode, nog een operatie invoeren, die enigszins op die van (7) lijkt.

2.3. Standaardvormen

Met behulp van de in de vorige paragraaf gegeven operaties kan elk L.P.-probleem tot de volgende standaardvormen teruggebracht worden:

Standaardvorm I

$$\max (\underline{c}^T\underline{x}) \text{ onder de voorwaarden } A\,\underline{x} \le \underline{b}\,, \qquad \underline{x} \in R^n,\ \underline{c} \in R^n,\ \underline{b} \in R^m,$$

A een (m,n)-matrix,

Standaardvorm II

$$\max (\underline{c}^T\underline{x}) \text{ onder de voorwaarden } A\,\underline{x} \le \underline{b}\,,\ \underline{x} \ge \underline{o}\,, \qquad \underline{x} \in R^n,\ \underline{c} \in R^n,\ \underline{o} \in R^n,\ \underline{b} \in R^m$$

A een (m,n)-matrix.

Bij de rekenmethode die voor de oplossing van L.P.-problemen ontwikkeld is (de simplexmethode), is het niet-negatief zijn van de variabelen een essentieel onderdeel, zodat met het oog daarop de standaardvorm II veel gebruikt wordt. Bij veel praktische L.P.-problemen stellen de variabelen x_j (d.w.z. de komponenten van de vektor $\underline{x}$) produktiefaktoren voor, kapitaal, goederen, grondstoffen, machines, e.d., die dus van nature niet-negatief zijn. Zodra dit optreedt voegen we deze eis $x_j \ge 0$ voor de betreffende variabelen aan de voorwaarden voor ons L.P.-probleem toe.

Voor de variabelen waarvoor deze eis niet van nature geldt, kunnen we de operaties (3) en (4) uit 2.2 gebruiken om toch de standaardvorm II voor het L.P.-probleem te bereiken.

Voor de toepassing van de later te bespreken simplexmethode moeten de beperkingen geschreven worden als vergelijkingen en niet als ongelijkheden, terwijl bovendien de nieuwe koëfficiëntenmatrix een E-matrix moet bevatten. Hebben we nu een L.P.-probleem in de standaardvorm II voor ons, dan kunnen we aan deze eis onmiddellijk voldoen door de ongelijkheden met niet-negatieve restvariabelen aan te vullen.

<u>Voorbeeld</u>. Laat gegeven zijn het L.P.-probleem in standaardvorm II:

$$\max \{\underline{c}^T \underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$$

met

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix},$$

dat wil zeggen het L.P.-probleem:

$$\max\ (3x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$

onder de beperkingen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\le 8 \\ x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 10 \end{aligned}$$

en met de eisen $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Wanneer we nu de beperkingen door het invoeren van restvariabelen als vergelijkingen schrijven en de eisen $y_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3$, toevoegen, krijgt het probleem de gedaante (standaardvorm III):

$$\max\ (3x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$

onder de beperkingen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + y_1 &= 8 \\ x_2 + x_3 + y_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + y_3 &= 10 \end{aligned}$$

en met de eisen $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$.

De laatstgevonden vorm ziet er schematisch dus als volgt uit:

Standaardvorm III

$$\max\ (\underline{c}^T\underline{x}) \text{ onder de voorwaarden } (A\quad E)\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix} = \underline{b}\ , \qquad \underline{x} \in R^n$$

$$\underline{y} \in R^m$$

$$\underline{x} \geq \underline{o} \qquad \underline{c} \in R^n$$

$$\underline{y} \geq \underline{o} \qquad \underline{b} \in R^m$$

$\underline{o}$ steeds in de passende ruimte
A een (m,n)-matrix
E een (m,m)-eenheidsmatrix.

We zullen voor de standaardvorm III ook de volgende schrijfwijze gebruiken, waarbij de vektor $\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}$ van zo even $\underline{x}$ wordt genoemd, de matrix (A E) door A wordt weergegeven, en het in het midden wordt gelaten of de doelfunktie $\underline{c}^T\underline{x}$ nu de hele vektor $\underline{x}$ bestrijkt of slechts een deel er van, zoals boven:

$$\max\ (\underline{c}^T\underline{x}) \text{ onder de voorwaarden } A\ \underline{x} = \underline{b}\ , \qquad \underline{x} \in R^{n+m}$$

$$\underline{x} \geq \underline{o}\ , \qquad \underline{c} \in R^{n+m}$$

$$\underline{o} \in R^{n+m}$$

$$\underline{b} \in R^m$$

A een (m,n+m)-matrix, die een (m,m)-eenheidsmatrix E bevat.

2.4. Opgaven

2.4.1. Gegeven is het onderstaande L.P.-probleem:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 6\\
2x_1 \qquad - x_3 - x_4 &\leq 1\\
x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 3\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\text{Minimaliseer } z = 4x_1 - x_3 + 2x_4\ .$$

Breng dit probleem achtereenvolgens in de standaardvorm II en in standaardvorm III.

Geef wiskundige formuleringen voor onderstaande optimaliseringsproblemen.

2.4.2. Te fabriceren 100 kg mengvoeder met een zetmeelwaarde van ten minste 0,68 en een eiwitgehalte van ten minste 16,5 % tegen de laagste kostprijs.
Aanwijzing: De hoeveelheid eiwit in het eindprodukt is de som van de hoeveelheden die de in het eindprodukt opgenomen grondstoffen bevatten. Hetzelfde geldt voor de zetmeelwaarde: rekentechnisch kan de zetmeelwaarde behandeld worden als een zetmeelgehalte.

Gegevens:

Grondstoffen	minimaal	maximaal	zetmeel-waarde	eiwitge-halte (%)	prijs in gld/kg
lijnzaadschilfers	5 kg		0,70	33,7	0,39
sojaschroot			0,67	46,2	0,36
koolzaadschilfers		5 kg	0,57	34,2	0,25
mais			0,80	9,5	0,26
melasse	10 kg	12 kg	0,46	3,7	0,12

Vraag. Men kan de minimumeisen verwerken zonder daarvoor extra vergelijkingen of ongelijkheden op te nemen. Welke kunstgreep zal daarbij van dienst kunnen zijn?

2.4.3.
a) Twee magazijnen hebben kisten met blikken van een bepaald levensmiddel in voorraad; in magazijn I zijn 100 kisten en in magazijn II 200 kisten. Drie winkels, A, B en C doen bestellingen; A vraagt 75 kisten, B 125 en C 100. Men wil het transport van de kisten zo organiseren, dat de totale transportkosten minimaal zijn. De transportkosten in guldens van de magazijnen naar de winkels zijn per kist:

	naar	A	B	C
van	I	1	1,4	3
	II	1,2	2	1,7

(Merk op dat dit transportprobleem geen L.P.-probleem is in de eigenlijke zin, omdat de variabelen in de oplossing gehele waarden zullen moeten aannemen. Een bijzonderheid is, dat de oplossing van het L.P.-probleem dat ontstaat als we deze eis van geheelzijn buiten beschouwing laten, toch juist gehele waarden voor de variabelen oplevert. Het transportprobleem kan dus als L.P.-probleem behandeld worden.)

Laat zien, dat de vergelijkingen voor de beperkingen lineair afhankelijk zijn.

b) Formuleer het probleem nog eens, maar nu met de veronderstelling dat in B slechts 60 kisten gevraagd worden, terwijl in de magazijnen opslagaktiviteiten worden ingevoerd, met verlieskosten per opgeslagen kist van ƒ 0,50 in I en van ƒ 0,75 in II.

2.4.4. Uit een raffinaderij komen vier verschillende produkten (alkylaat, kataline, strabine en isopentaan), die na menging benzine opleveren. Men produceert drie soorten (A, B, C) vliegtuigbenzine, terwijl alles wat niet hiervoor gebruikt wordt, als autobenzine wordt verkocht. Aan de vliegtuigbenzine worden kwaliteitseisen gesteld wat betreft dampspanning (D) en oktaangetal (OG); aan de autobenzine stelt men deze eisen niet. D en OG van een mengsel worden gevonden als de gewogen sommen van D en OG van de produkten die het mengsel samenstellen.
Door toevoeging van tetraethyllood (aan het eindprodukt) wordt het OG verhoogd. Aan vliegtuigbenzine A wordt 0,5 ml/gallon en aan vliegtuigbenzine B en C 4 ml/gallon toegevoegd. In onderstaande tabel is bij de opgave van het OG van de grondprodukten reeds met deze toevoeging-achteraf rekening gehouden.

Gegevens:

Grondstoffen:	D	OG (0,5)	OG (4)	kapaciteit in m^3 per dag
Alkylaat	5	94	107,5	3800
Katalyne	8	83	93	2650
Strabine	4	74	87	4080
Isopentaan	20,5	95	108	1300

Kwaliteitseisen aan en winst op de eindprodukten:

	D	OG	winst in $\$/m^3$
Vliegtuigbenzine A	≤ 7	≥ 80	24,5
" B	≤ 7	≥ 91	27,2
" C	≤ 7	≥ 100	30,2
Autobenzine	-	-	22,9

Men wil de winst maximaliseren, daarbij ervan uitgaande dat alles wat men maakt verkocht wordt.

Opmerking 1. Stel de matrix op zonder variabelen in te voeren voor die gedeelten der grondstoffen, die als autobenzine worden verkocht.

Opmerking 2. Het volume van het toegevoegde tetraethyllood mag verwaarloosd worden.

Opmerking 3. Verwerk eerst de kwaliteitseisen en dan de kapaciteitsbeperkingen. De matrix krijgt dan een zg. blokstruktuur.

2.4.5. In een papierfabriek worden uit zg. moederrollen van standaardlengte d en standaardbreedte 1,95 smallere rollen gesneden van dezelfde lengte.
Er worden besteld N_1 rollen van 60 cm breedte, N_2 rollen van 40 cm breedte en N_3 rollen van 30 cm breedte. Men wenst deze rollen zo uit de moederrollen te snijden, dat het aantal benodigde moederrollen minimaal is; daardoor is ook de hoeveelheid afval minimaal.
Men kan dit probleem (bijna) als een L.P.-probleem formuleren door de mogelijke snijkombinaties te nummeren en door vervolgens als onbekenden x_i te kiezen het aantal moederrollen, dat in de i-de snijkombinatie wordt versneden. Voer deze formulering, althans in schema, uit. Is het aantal (n) variabelen groot? De snijkombinaties worden voorgesteld door kolommen van een (3,n)-matrix. Zou het toegestaan zijn het aantal variabelen te beperken door die snijkombinaties te schrappen waarvan alle komponenten kleiner dan of gelijk zijn aan de overeenkomstige komponenten van een andere snijkombinatie, m.a.w. door $x_r = 0$ te nemen indien er een kolom $\underline{a}_s$ in de matrix voorkomt zodanig, dat $a_{jr} \leq a_{js}$ voor $j = 1,2,3$?
Is het probleem door het stelsel beperkingen en de objektfunktie volledig beschreven? Is het een L.P.-probleem?

3. Meetkundige interpretatie

3.1. Rechten, halfrechten, hypervlakken, halfruimten in R^n

Wij willen van het algebraïsche L.P.-probleem

$$\max\ (\underline{c}^T \underline{x}) \text{ onder de voorwaarden}$$

$$\underline{a}_{i*}^T \underline{x} \leq b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \text{ en } \underline{x} \geq \underline{o}$$

een meetkundig idee krijgen. Daartoe herhalen we enkele begrippen uit de analytische meetkunde.

Een lijn in R^n is een verzameling $\{\underline{x} \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda\, \underline{b},\ \lambda \text{ reëel}\}$, met steunvektor $\underline{a}$ en richtingsvektor $\underline{b}$. Een halfrechte uitgaande van een punt $\underline{a}$ in de richting van $\underline{b}$ is de verzameling $\{\underline{x} \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda\, \underline{b},\ \lambda \geq 0\}$.

(De "richting" van een vektor wordt als volgt gedefinieerd. We zeggen dat een vektor $\underline{x}$ dezelfde richting heeft als een gegeven vektor $\underline{y} \neq \underline{o}$, als er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodanig, dat $\underline{x} = \lambda\, \underline{y}$. De eigenschap "dezelfde richting hebben als" is:

1) reflexief: $\underline{y}$ heeft dezelfde richting als $\underline{y}$,

2) symmetrisch: als $\underline{x}$ dezelfde richting heeft als $\underline{y}$ dan heeft ook $\underline{y}$ dezelfde richting als $\underline{x}$,

3) transitief: heeft $\underline{x}$ dezelfde richting als $\underline{y}$ en heeft $\underline{y}$ dezelfde richting als $\underline{z}$, dan heeft $\underline{x}$ dezelfde richting als $\underline{z}$.

De relatie is een ekwivalentierelatie. De "richting van $\underline{y}$" kan nu gedefinieerd worden als de klasse van de vektoren die dezelfde richting hebben als $\underline{y}$).

Een verzameling $V = \{\underline{x} \mid \underline{p}^T \underline{x} = q\}$ heet een <u>hypervlak</u>. In R^3 is het een vlak, in R^2 een lijn, algemeen een (n-1)-dimensionale deelruimte (als $q = 0$) of nevenruimte (als $q \neq 0$) in R^n. Het hypervlak verdeelt de rest van R^n in twee delen, nl. een deel I waar $\underline{p}^T \underline{x} > q$, en een deel II waar $\underline{p}^T \underline{x} < q$. Beide delen zijn open halfruimten. (Een verzameling $\{\underline{x} \mid \underline{p}^T \underline{x} \geq q\}$ heet een gesloten halfruimte.) De vektor $\underline{p}$ heet een normaalvektor van V; hij valt langs een lijn die loodrecht op V staat en "wijst" in de richting van deel I.

Bewijs: Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee vektoren (of punten) in V, dan is $\underline{p}^T(\underline{x} - \underline{y}) = 0$.

En voor een willekeurig punt $\underline{z}$ van de halfrechte $\{\underline{z} \mid \underline{z} = \underline{x} + \lambda \underline{p},\ \lambda \geq 0\}$, uitgaande van $\underline{x} \in V$ in de richting van $\underline{p}$, geldt (indien we $\underline{z} = \underline{x}$ uitzonderen):

$$\underline{p}^T \underline{z} = \underline{p}^T(\underline{x} + \lambda\, \underline{p}) = q + \lambda\, \underline{p}^T \underline{p} > q.$$

$\underline{z}$ ligt dus in I, en $\underline{p}$ "wijst" naar I. $\square$

De hypervlakken met vergelijkingen $\underline{p}^T\underline{x} = q$, q veranderlijk, zijn <u>hyper-vlakken van gelijke waarde</u> van de lineaire funktie in R^n

$$f(\underline{x}) = \underline{p}^T\underline{x}.$$

Vektor $\underline{p}$ heet de gradiënt van $f(\underline{x})$; hij wijst in de richting van toenemende funktiewaarde.

Het L.P.-probleem vraagt naar een punt van een gebied G waar een lineaire funktie $\underline{c}^T\underline{x}$ zijn hoogste waarde aanneemt. G is dan de doorsnee van m+n gesloten halfruimten

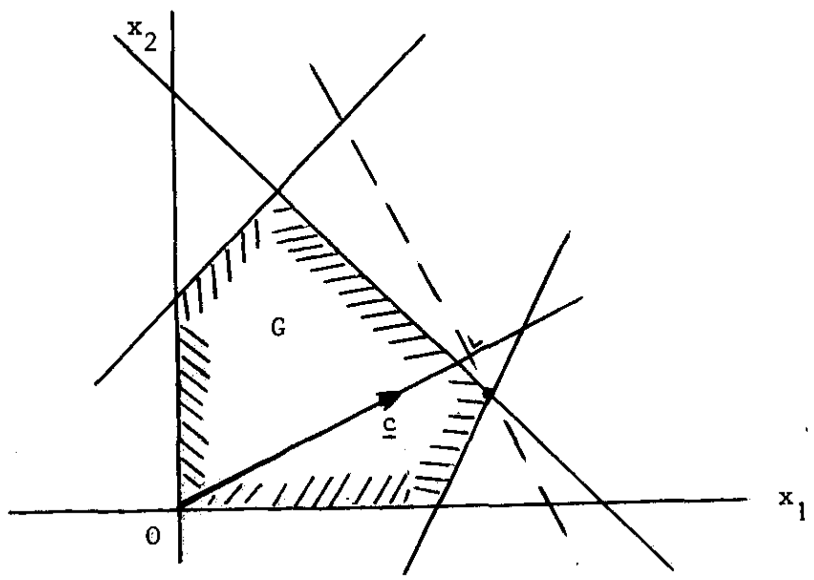
$$\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i,\ i = 1,2,\ldots,m,$$

$$x_j \ge 0\ ,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

In R^2 kunnen we een L.P.-probleem grafisch voorstellen, bij voorbeeld het probleem:

$$\max \left\{ 4x_1 + 2x_2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_1 + x_2 \le 8; & x_1 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \le 4; & x_2 \ge 0 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 & \end{array} \right\}.$$

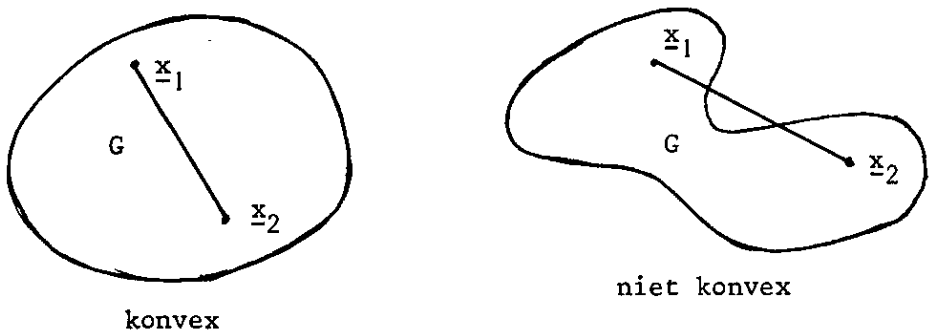
We tekenen de begrenzende lijnen van G en bepalen welk gebied G moet voorstellen. We tekenen de gradiënt (4,2) van de objectfunktie en vinden grafisch (en door uitrekenen van de coördinaten van het betreffende hoekpunt) de oplossing van het probleem:



$4x_1 + 2x_2$ is op G maximaal 28 en wel in (6,2).

3.2. Konvexiteit

Een verzameling G is konvex als voor elk tweetal punten $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ in G ook alle punten op het lijnstuk tussen $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ tot G behoren.



Het verbindingslijnstuk van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ heeft de vektorvoorstelling

$\underline{x} = \underline{x}_1 + \lambda(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, of, zoals ook wel gebruikelijk is,

$\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + (1 - \lambda)\underline{x}_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

$G \subset R^n$ is dus een konvexe verzameling als uit $\underline{x}_1 \in G$ en $\underline{x}_2 \in G$ volgt, dat

$\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + (1 - \lambda)\underline{x}_2 \in G$ voor $0 \leq \lambda \leq 1$.

We kunnen het verbindingslijnstuk van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ ook schrijven:

$\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2$, met $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Stelling. Het (n-1)-dimensionale hypervlak $H := \{\underline{x} \mid \underline{p}^T\underline{x} = q\}$ in R^n is konvex.

Bewijs. Zij $\underline{x}_1 \in H$ en $\underline{x}_2 \in H$; dan geldt voor $\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$:

$\underline{p}^T\underline{x} = \underline{p}^T(\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2) = \lambda\underline{p}^T\underline{x}_1 + \mu\underline{p}^T\underline{x}_2 = \lambda q + \mu q = (\lambda + \mu)q = q$.

Dus $\underline{x} \in H$. H is dus konvex.

Opmerking. We hebben de voorwaarden $\lambda \geq 0$ en $\mu \geq 0$ bij het bewijs niet gebruikt. We vinden dus, dat niet alleen het verbindingslijnstuk van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ in H ligt, maar de hele lijn door $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$.

Stelling. De n-dimensionale halfruimte $H := \{\underline{x} \mid \underline{p}^T\underline{x} \leq q\}$ is konvex.

Bewijs. Zij $\underline{x}_1 \in H$ en $\underline{x}_2 \in H$; dan geldt voor $\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$:

$\underline{p}^T\underline{x} = \underline{p}^T(\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2) = \lambda\underline{p}^T\underline{x}_1 + \mu\underline{p}^T\underline{x}_2 \le \lambda q + \mu q = (\lambda + \mu)q = q.$
Dus $\underline{x} \in H$; het verbindingslijnstuk van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ behoort geheel tot H; H is konvex.

<u>Stelling</u>. De doorsnee van willekeurig veel konvexe verzamelingen is konvex.

<u>Bewijs</u>. Stel G_1, G_2,... konvex. Noem de doorsnee van alle G_i:

$$G := \bigcap_i G_i$$

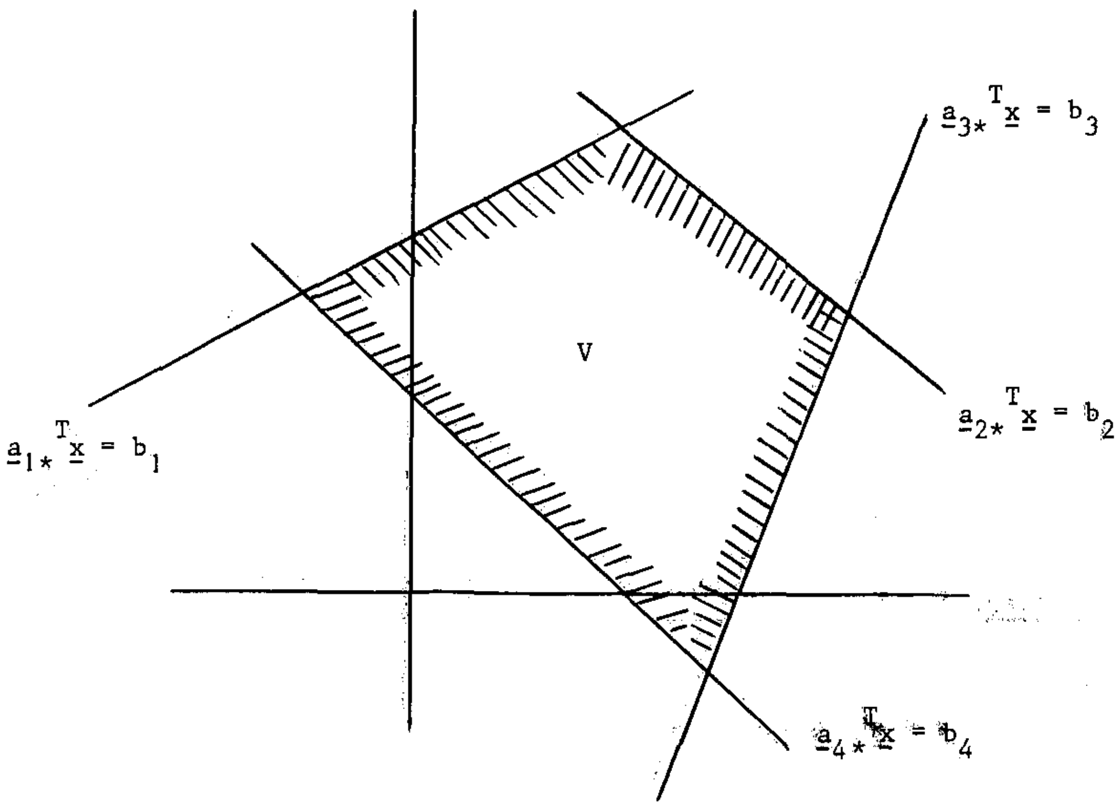
Als $\underline{x}_1 \in G$ en $\underline{x}_2 \in G$, dan ook $\underline{x}_1 \in G_i$ en $\underline{x}_2 \in G_i$ voor alle i. Omdat de G_i konvex zijn, is ook $\underline{x} = \lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2 \in G_i$ voor alle i, indien $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$. Maar dan behoort deze $\underline{x}$ tot G, dus is ook G konvex.

3.3. Konvexe veelvlakken en konvexe veelhoeken

Wij hebben gezien dat een verzameling $V_i := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}{}^T\underline{x} \le b_i\}$ een gesloten halfruimte voorstelt. Dan stelt de verzameling

$$V := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}{}^T\underline{x} \le b_i;\ i = 1,2,\dots,m\}$$

de doorsnee voor van de m halfruimten V_i (zie figuur).

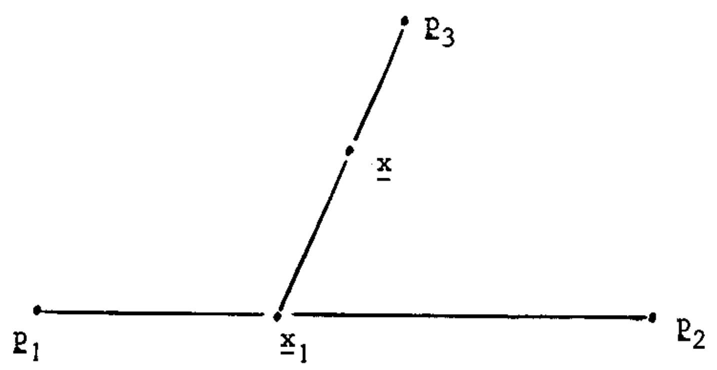


Definitie. De doorsnee van eindig veel gesloten halfruimten in R^n heet een konvex veelvlak (in R^n)
We willen trachten, een konvex veelvlak ook te beschouwen als het konvex omhulsel van zijn hoekpunten.

Definitie. Is Z een deelverzameling van R^n dan heet de kleinste konvexe verzameling in R^n die Z bevat het konvex omhulsel van Z, geschreven KH(Z).
Zonder bewijs geven we de stelling, dat, indien Z uit een eindig aantal punten $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \ldots, \underline{p}_k$ bestaat, KH(Z) geschreven kan worden in de vorm

$$\{\underline{x} \mid \underline{x} = \lambda_1\underline{p}_1 + \lambda_2\underline{p}_2 + \ldots + \lambda_k\underline{p}_k;\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0, \ldots,\ \lambda_k \geq 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1\}.$$

De vorming van KH(Z) noemt men in dit geval het konvex-lineair kombineren of ook wel het konvex kombineren van de punten $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \ldots, \underline{p}_k$.
Men kan zelf nagaan dat deze KH(Z) konvex is. Meetkundig kan een punt van KH(Z) steeds ontstaan gedacht worden uit een herhaald konvex kombineren van telkens twee gegeven of al eerder gevonden punten. Aan een voorbeeld met k = 3 kunnen we illustreren hoe dan zo'n punt ontstaan kan als hierboven algebraïsch aangegeven.
Stel $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$ en $\underline{p}_3$ vormen een echte driehoek. Zij $\underline{x}_1$ een konvexe kombinatie



van $\underline{p}_1$ en $\underline{p}_2$: $\underline{x}_1 = \mu_1\underline{p}_1 + \mu_2\,\underline{p}$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, en zij $\underline{x}$ dan een konvexe kombinatie van $\underline{p}_3$ en $\underline{x}_1$: $\underline{x} = \mu_3\underline{x}_1 + \mu_4\underline{p}_3$, $\mu_3 \geq 0, \mu_4 \geq 0$, $\mu_3 + \mu_4 = 1$.
Dan is

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \mu_3(\mu_1\underline{p}_1 + \mu_2\underline{p}_2) + \mu_4\underline{p}_3 \\ &= \mu_1\mu_3\underline{p}_1 + \mu_2\mu_3\underline{p}_2 + \mu_4\underline{p}_3 \\ &= \lambda_1\,\underline{p}_1 + \lambda_2\underline{p}_2 + \lambda_3\underline{p}_3\ , \end{aligned}$$

met $\lambda_1 = \mu_1\mu_3 \geq 0$, $\lambda_2 = \mu_2\mu_3 \geq 0$, $\lambda_3 = \mu_4 \geq 0$,

en $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (\mu_1 + \mu_2)\mu_3 + \mu_4 = \mu_3 + \mu_4 = 1$.

Definitie. Onder een konvexe veelhoek in R^n verstaan wij het konvexe omhulsel van een eindig aantal punten in R^n.

Eveneens zonder bewijs geven we de

Stelling. Elk begrensd konvex veelvlak V is *ook* een konvexe veelhoek.

Is $V := \{\underline{x} \mid \underline{a}_i^T\underline{x} \leq b_i;\ i = 1,2,\ldots,m\}$, dan bestaat er een eindig aantal punten $\underline{p}_s$ in V, $s = 1,2,\ldots,k$, zodat ook geldt:

$$V = \{\underline{x} \mid \underline{x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\underline{p}_s;\ \lambda_s \geq 0;\ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s = 1\}.$$

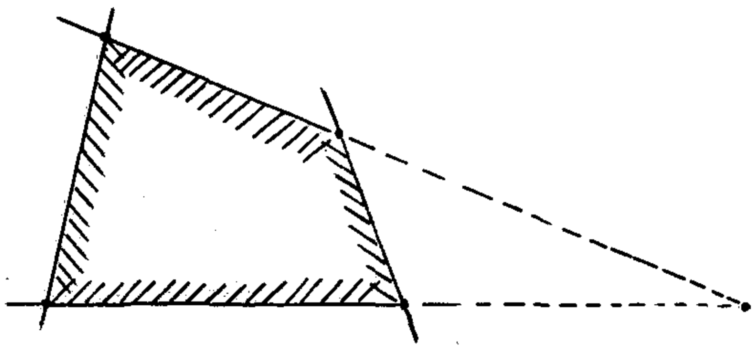
Bij een konvexe veelhoek moeten zeker de "hoekpunten" tot de verzameling der $\underline{p}_s$ behoren om de veelhoek zelf als konvex omhulsel terug te krijgen. Deze "hoekpunten" noemen we de extreme punten van de veelhoek.

Definitie. Een punt $\underline{p}$ heet extreem punt van een konvexe verzameling V als $\underline{p}$ niet te schrijven is als konvexe kombinatie van twee andere punten van V.

De vraag doet zich voor, hoe we die hoekpunten van een konvex veelvlak kunnen vinden. In R^2 kunnen we dat probleem wel door uitrekenen oplossen. Is bijv.

$$V := \left\{ (x_1,x_2) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 \leq 4; & 6x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -3x_1 + 7x_2 \leq 6; & 4x_1 - 6x_2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

gegeven, dan bestaat de begrenzing uit vier rechten, die twee aan twee zes snijpunten hebben: $S_{12} = (\frac{13}{21}, \frac{3}{7})$, $S_{13} = (-\frac{1}{18}, \frac{5}{6})$,...; voldoet zo'n snijpunt aan de andere beide ongelijkheden, dan is het een extreem punt, een hoekpunt van V.



Voldoet het punt niet aan alle beperkingen, dan is het geen hoekpunt van V (snijpunt van de stippellijnen).

Tweede definitie van hoekpunt:

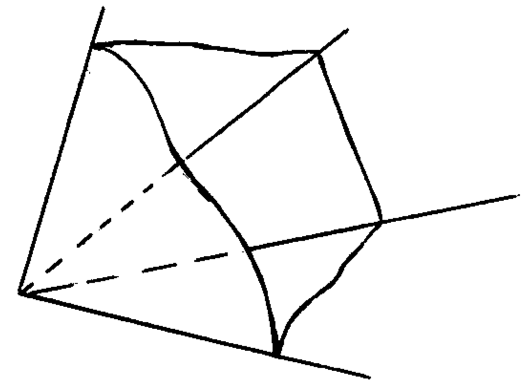
Een hoekpunt van een konvex veelvlak $V := \{\underline{x} \mid \underline{a}_i{}^T\underline{x} \le b_i;\ i = 1,2,\ldots,m\}$ in R^n is een punt $\hat{\underline{x}}$ van V, waarvoor n gelijkheden $\underline{a}_{i*}{}^T\hat{\underline{x}} = b_i$, met lineair onafhankelijke normaalvektoren $\underline{a}_{i*}$, gelden.

De gelijkwaardigheid van beide definities is eenvoudig te bewijzen.

3.4. Onbegrensde konvexe veelvlakken

Een onbegrensd konvex veelvlak is bijvoorbeeld een konvex veelvlak begrensd door vlakken door **0**:

$$K := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}{}^T\underline{x} \le 0;\ i = 1,2,\ldots,m\}.$$



Algemeen verstaat men onder een kegel K een verzameling met de eigenschap dat er een punt $\underline{a} \in K$ is zodanig, dat voor elke $\underline{p} \in K$ ook de halfrechte

$$\{\underline{x} \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{p} - \underline{a});\ \lambda \ge 0\}$$

tot K behoort.

Een kegel kan dus bestaan uit een eindig aantal halfrechten uitgaande van één punt. Bovengenoemd veelvlak voldoet aan de definitie van een kegel (nagaan!) en is dus een kegel, een konvexe veelvlakskegel.

In het vervolg zullen we gemakshalve voor $\underline{a}$ steeds de oorsprong nemen.

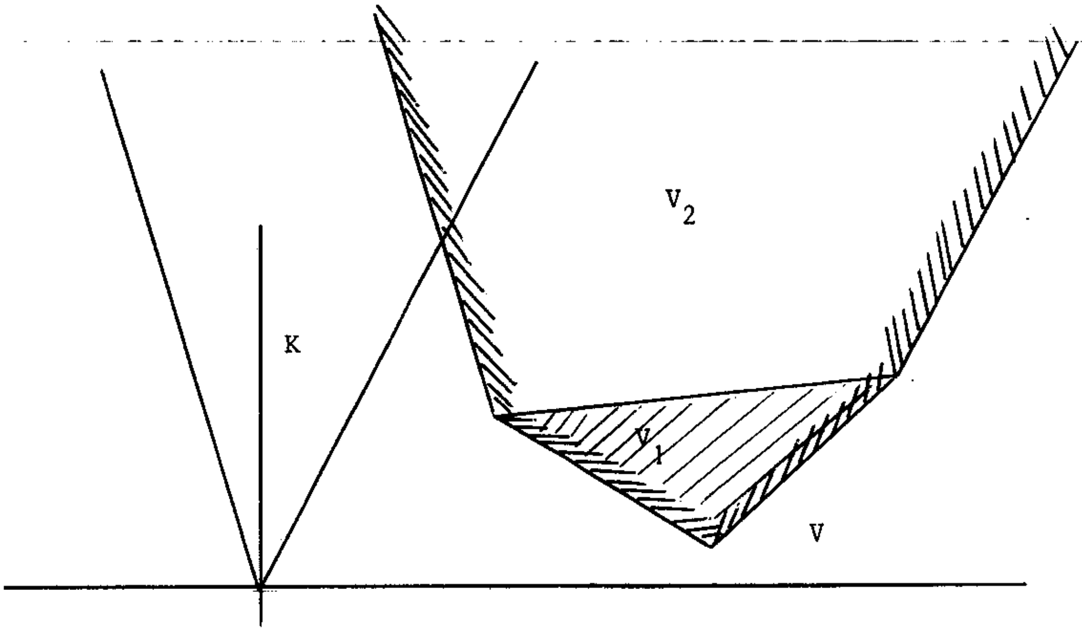
Zonder bewijs geven we de stelling: Als de oorsprong 0 een extreem punt is van $K := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}{}^T\underline{x} \le 0;\ i = 1,2,\ldots,m\}$, dan bevat K een eindig aantal punten $\underline{p}_s$, $s = 1,2,\ldots,k$, zodat K ook geschreven kan worden als

$$K = \{\underline{x} \mid \underline{x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\underline{p}_s;\ \lambda_s \ge 0\}.$$

In de laatste vorm heet K een konvexe veelhoekskegel.

Definitie. Een extreme halfrechte van K is een halfrechte van K die niet geschreven kan worden als nietnegatief-lineaire kombinatie van twee andere halfrechten van K.

Op ons meetkundig gevoel (zonder bewijs) konstateren we, dat een willekeurig onbegrensd veelvlak V (zie plaatje) kan worden gesplitst in een begrensd konvex veelvlak V_1 en een verzameling V_2 van halfrechten uitgaande van punten in V_1 die elk gelijkgericht zijn met een halfstraal uit een konvexe kegel K.



Bovendien volgt dan hieruit en uit twee eerdergenoemde stellingen:

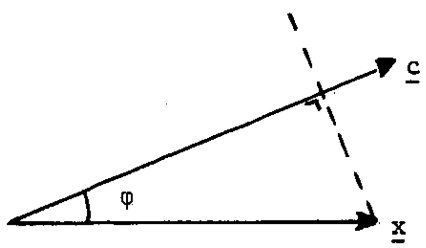
als $V := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}^T \underline{x} \leq b_i;\ i = 1,2,\ldots,m\}$ een konvex veelvlak is in R^n,

dan zijn er een eindig aantal punten $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_k$ in V en een eindig aantal vektoren $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}_l$ in R^n zodanig, dat V voor te stellen is als

$$V = \{\underline{x} \mid \underline{x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \underline{p}_s + \sum_{t=1}^{l} \mu_t \underline{q}_t;\ \lambda_s \geq 0;\ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s = 1;\ \mu_t \geq 0\}.$$

3.5. De objectfunktie

De meetkundige interpretatie van de objectfunktie $\underline{c}^T\underline{x}$ is het inwendig produkt van $\underline{x}$ met een vaste vektor $\underline{c}$: $\underline{c}^T\underline{x} = |\underline{c}|\cdot|\underline{x}|\cdot \cos\varphi$.

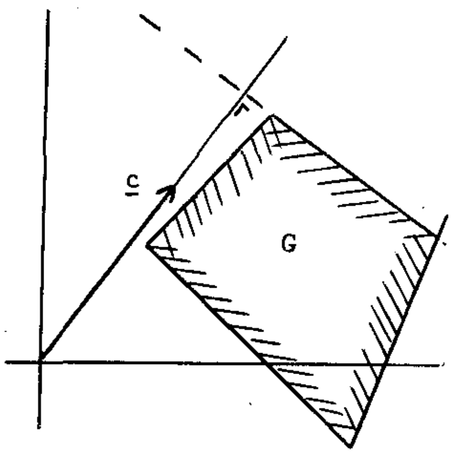


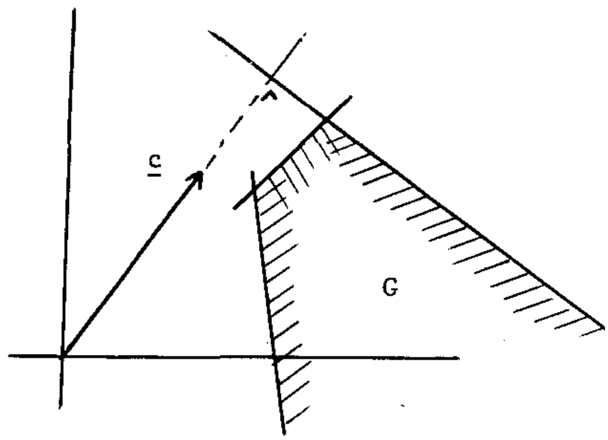
$\underline{c}$ is de gradiënt van de objectfunktie, zoals al in 3.1 opgemerkt.

We bekijken nu een aantal voorbeelden van L.P.-problemen in standaardvorm I:

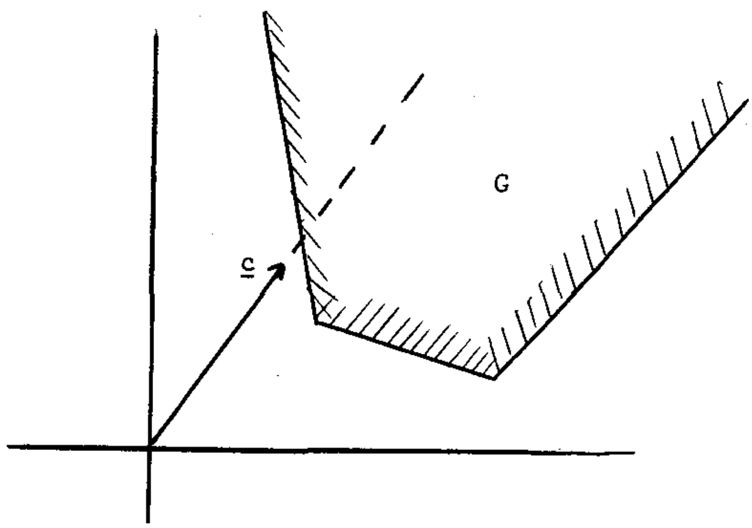
$$\max \ \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b}\}.$$

Hierbij is A een (m,n)-matrix, $\underline{x} \in R^n$, $\underline{b} \in R^m$. De schrijfwijze $A\,\underline{x} \leq \underline{b}$ betekent zoals bekend hetzelfde als de notatie $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \leq b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$. In 3.1 hebben we een voorbeeld ontmoet waar het maximum van de objectfunktie in één punt, een hoekpunt van G, wordt aangenomen. We willen nog 3 andere voorbeelden van mogelijke situaties aan figuren in R^2 laten zien.
Als de gradiënt van de objectfunktie loodrecht staat op een begrenzend hypervlak van $G := \{\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b}\}$, zijn er meerdere optimale oplossingen, die een konvex deel van de "buitenkant" van G uitmaken. (Zie de stelling aan het slot van deze paragraaf.) In R^2 is dat een lijnstuk, of een halfrechte als G onbegrensd is.





Als G onbegrensd is en $\underline{c}$ wijst naar het binnengebied van G, is er geen bovengrens voor de projektie van $\underline{x} \in G$ op de lijn waarlang $\underline{c}$ valt, en zeggen we, dat het probleem een "oneindige oplossing" toelaat.



Ten slotte kan zich het geval voordoen, dat de beperkingen $A\,\underline{x} \le \underline{b}$ strijdig zijn. Het probleem bezit dan geen toegelaten oplossing, dus evenmin een optimale.

Resumee: Het oplossen van een L.P.-probleem $\max\{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b}\}$ kan beschouwd worden als te bestaan uit de volgende procedures:

1. Nagaan of het stelsel $A\,\underline{x} \le \underline{b}$ al dan niet strijdig is. (In de praktijk is strijdigheid van de restrikties vaak te wijten aan een fout in de modelformulering.)
2. Als het stelsel niet strijdig is, nagaan of $\underline{c}^T\underline{x}$ naar boven begrensd is. (Als in de praktijk $\max[\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b}] = \infty$, betekent ook dit vaak een fout in de modelformulering.)
3. Als het stelsel niet strijdig is en het probleem geen oneindige oplossing heeft, de verzameling van de optimale oplossingen bepalen.

Opmerking. Als het L.P.-probleem een optimale oplossing bezit, dan wordt de optimale waarde van de objectfunktie zeker (ook) aangenomen in een hoekpunt van het door de restrikties gedefinieerde gebied G. Zie hoofdstuk 4.

Stelling. De verzameling van de optimale oplossingen van het L.P.-probleem $\max\{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b}\}$ is een konvex veelvlak.

Bewijs. Stel $\max[\underline{c}^T\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i;\ i = 1,2,\ldots,m] = \alpha$; dan wordt de verzameling M van alle optimale oplossingen gevormd door

$$M := \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i;\ i = 1,2,\ldots,m;\ \underline{c}^T\underline{x} \ge \alpha\},$$

of in woorden: $\underline{x}$ ligt in de doorsnee van m+1 (konvexe) halfruimten. Dus M is een konvex veelvlak.

3.6. Opgaven

3.6.1. Teken in R^2 de konvexe veelvlakskegel $G := \{\underline{x} \mid A\underline{x} \ge \underline{o}\}$ met

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Gegeven is dat de lineaire funktie $\underline{p}^T\underline{x}$ op G een minimum aanneemt. Welke betrekking bestaat er dan tussen $\underline{p}$ en een willekeurige $\underline{x} \in G$? Welke betrekking bestaat er vervolgens tussen $\underline{p}$ en de rijen van A? Schets in de figuur de verzameling van mogelijke vektoren $\underline{p}$ (konvexe veelhoekskegel).

3.6.2. Gegeven is in R^n een gebied $G := \{\underline{x} \mid A\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$ met een (m,n)-matrix A, $\underline{x} \in R^n$, $\underline{b} \in R^m$.

a) Voor welke vektoren $\underline{b}$ is de oorsprong een hoekpunt van G?

b) Veronderstel nu $\underline{b} \geq \underline{o}$. Toon aan dat de voorwaarde $\underline{p} \leq \underline{o}$ voldoende is opdat de funktie $\underline{p}^T\underline{x}$ op G een maximum bereikt in de oorsprong. Is deze voorwaarde ook noodzakelijk? Zo neen, geef een tegenvoorbeeld.

3.6.3. Teken in R^2 het konvexe gebied $G := \{\underline{x} \mid A\underline{x} \geq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$ met

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

a) Schrijf G als de som van een konvexe veelhoek en een konvexe veelhoekskegel, d.w.z. bepaal vektoren $\underline{f}_j$, $j = 1,2,\ldots,J$, en $\underline{g}_k$, $k = 1,2,\ldots,K$, zodanig dat elke $\underline{x} \in G$ te schrijven is:

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \underline{f}_j + \sum_{k=1}^{K} \mu_k \underline{g}_k, \quad \text{met } \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1, \text{ en } \mu_k \geq 0.$$

b) Lees uit de figuur af voor welke waarden van p het L.P.-probleem: "maximaliseer $px_1 - x_2$ onder de voorwaarden $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G$"

1) een eindige oplossing,
2) een oneindige oplossing,
3) oneindig veel eindige oplossingen

bezit.

Geef de oplossingen bij 3) in parametervorm.

4. Basisoplossingen

In dit hoofdstuk worden toegelaten basisoplossingen van een L.P.-probleem gedefinieerd. Analytisch wordt aangetoond, dat deze oplossingen hoekpunten representeren van het z.g. toegelaten gebied G, bepaald door de beperkingen van het probleem. Ook zal blijken hoe -wat meetkundig al in hoofdstuk 3 duidelijk was- het maximum op G van de objectfunktie altijd (ook) in een hoekpunt van G bereikt wordt.
We duiden in dit hoofdstuk de kolomvektoren van een matrix A aan met $\underline{a}_j$ in plaats van met $\underline{a}_{*j}$.

4.1. Bases in een matrix

Beschouw het L.P.-probleem in standaardvorm III:

$$\begin{aligned} &\max\ (\underline{c}^T \underline{x}) \text{ onder de voorwaarden} \\ &A\ \underline{x} = \underline{b} \\ &\underline{x} \geq \underline{o}\ . \end{aligned}$$

De beperkingen van het probleem zijn ook te schrijven als:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \dots & a_{mn}x_n & = b_m \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_n \geq 0 & \end{array}$$

of als

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,n.$$

De kolomvektoren (n in getal) zijn vektoren in R^m; onafhankelijke m-kolomvektoren spannen de ruimte R^m op.

<u>Definitie</u>: Onder een <u>basis</u> van een stelsel (kolom)vektoren $\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$ verstaan wij een deelverzameling $\{\underline{a}_j,\dots,\underline{a}_k\}$ van deze kolommen, <u>onderling onafhankelijk</u>, zodat alle gegeven kolommen linear uit te drukken zijn in die basiskolommen.

<u>Voorbeeld</u>:

$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$
3	7	5	4	-2	8
4	2	3	9	1	7
2	0	1	5	1	3

basis

In het voorbeeld kunnen wij als basis $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_3\}$ kiezen:

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_1 + 0.\underline{a}_3$$

$$\underline{a}_2 = -\underline{a}_1 + 2\underline{a}_3$$

$$\underline{a}_3 = 0.\underline{a}_1 + \underline{a}_3$$

$$\underline{a}_4 = 3\underline{a}_1 - \underline{a}_3$$

$$\underline{a}_5 = \underline{a}_1 - \underline{a}_3$$

$$\underline{a}_6 = \underline{a}_1 + \underline{a}_3 .$$

De rang van de matrix $(\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n)$ is blijkbaar 2.
Wij hadden in plaats van $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_3\}$ ook bijv. $\{\underline{a}_2,\ \underline{a}_4\}$ als basis kunnen kiezen; het aantal elementen van een basis blijft gelijk.
Het aantal vektoren uit een basis is steeds hetzelfde, nl. gelijk aan de rang van de matrix gevormd door de kolomvektoren. Dit is ook de dimensie van de deelruimte opgespannen door deze kolomvektoren. In veel gevallen is deze dimensie juist m.

We beschouwen nog eens het stelsel vergelijkingen

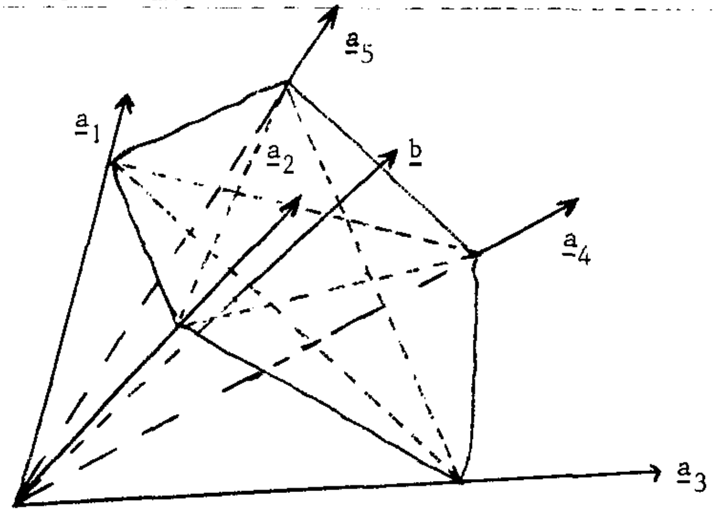
$$A\ \underline{x} = \underline{b} \text{ of}$$

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_1 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}\ ,$$

onder de voorwaarden $x_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,n$.

We tekenen eens de konvexe veelvlakskegel V := $\{A\,\underline{x} \mid \underline{x} \geq \underline{0}\}$, en een vektor $\underline{b}$ zodanig, dat het stelsel een oplossing heeft. We nemen hier aan, dat A een (3,5)-matrix is van rang 3 en $\underline{b} \in R^3$. Elk drietal onafhankelijke kolommen van A vormt dus een basis.

V bestaat uit alle vektoren, die door de kolomvektoren van A positief-lineair opgespannen worden. Met 5 kolomvektoren:



Wij zien in de figuur, dat $\underline{b}$ een positief-lineaire kombinatie is van $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ of van $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4\}$. De vektor $\underline{b}$ is echter geen positief-lineaire kombinatie van de vektoren $\{\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ of $\{\underline{a}_1, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
Op grond hiervan kunnen wij onderscheid maken in <u>toegelaten</u> en <u>niet-toegelaten</u> bases.

<u>Definitie</u>: Een basis $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ van $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ heet <u>toegelaten t.o.v. de vektor $\underline{b}$</u> als $\underline{b}$ met <u>niet-negatieve</u> koëfficiënten lineair uit te drukken is in de basiskolommen.
Een basis $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ die niet toegelaten is t.o.v. $\underline{b}$ heet een t.o.v. $\underline{b}$ <u>niet-toegelaten</u> basis.

De matrix A kan gesplitst worden in een basismatrix B en een restmatrix N: A = (B N). Wij krijgen hierdoor ook een splitsing in de vektoren $\underline{x}$ en $\underline{c}$:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} \text{ en } \underline{c} = \begin{pmatrix} \underline{c}_B \\ \underline{c}_N \end{pmatrix}.$$

Deze splitsing kunnen wij ook in de vergelijkingen opnemen:

$$A\,\underline{x} = (B \quad N) \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} = B\,\underline{x}_B + N\,\underline{x}_N = \underline{b}\,.$$

Als B een toegelaten basis is, is er een $\hat{\underline{x}}_B \geq \underline{o}$, zodat B $\hat{\underline{x}}_B = \underline{b}$, dus $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \hat{\underline{x}}_N \end{pmatrix}$ is een toegelaten oplossing van A $\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{o}$, als $\hat{\underline{x}}_N = \underline{o}$ gesteld wordt. We noemen zo'n $\begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \hat{\underline{x}}_N \end{pmatrix}$ een <u>basisoplossing</u> behorende bij de basis B.

<u>Definities</u>:

1. Is B een basis van (A $\underline{b}$) bestaande uit kolomvektoren van A en is $\hat{\underline{x}}$ een oplossing van A $\hat{\underline{x}} = \underline{b}$, dan heet $\hat{\underline{x}}$ een <u>basisoplossing</u> behorende bij de basis B, als
   $\hat{\underline{x}}_N = \underline{o}$ of $\hat{x} := \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \hat{\underline{x}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \underline{o} \end{pmatrix}$.

2. Is $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \underline{o} \end{pmatrix}$ een basisoplossing van A $\underline{x} = \underline{b}$ met $\hat{\underline{x}}_B \geq \underline{o}$, dan heet $\hat{\underline{x}}$ een <u>toegelaten basisoplossing</u>. Een basisoplossing die geen toegelaten oplossing is, heet een niet-toegelaten basisoplossing.

3. Is $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_B \\ \hat{\underline{x}}_N \end{pmatrix}$ een basisoplossing van A $\underline{x} = \underline{b}$, dan noemt men de komponenten van $\hat{\underline{x}}_B$ basisvariabelen (bij deze oplossing) en de komponenten van $\hat{\underline{x}}_N$ <u>niet-basisvariabelen</u> (bij deze oplossing).

4.2. <u>Basisoplossingen en hoekpunten</u>

Wij willen nu aantonen, dat een toegelaten basisoplossing van E $\underline{y}$ + A $\underline{x} = \underline{b}$; $\underline{x} \geq 0$; $\underline{y} \geq 0$; $\underline{x} \in R^n$, $\underline{y} \in R^m$ een <u>hoekpunt</u> is van het konvexe veelvlak in R^n:

$$\{\underline{x} \mid \underline{a}_{i*}^T \underline{x} \leq b_i;\ \underline{x} \geq \underline{o};\ i = 1,\ldots,m\}.$$

Dat $\hat{\underline{x}}$ een hoekpunt is van V := $\{\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$ betekent dat:

1. $\hat{\underline{x}}$ voldoet aan A $\underline{x} \leq \underline{b}$; $\underline{x} \geq \underline{o}$;

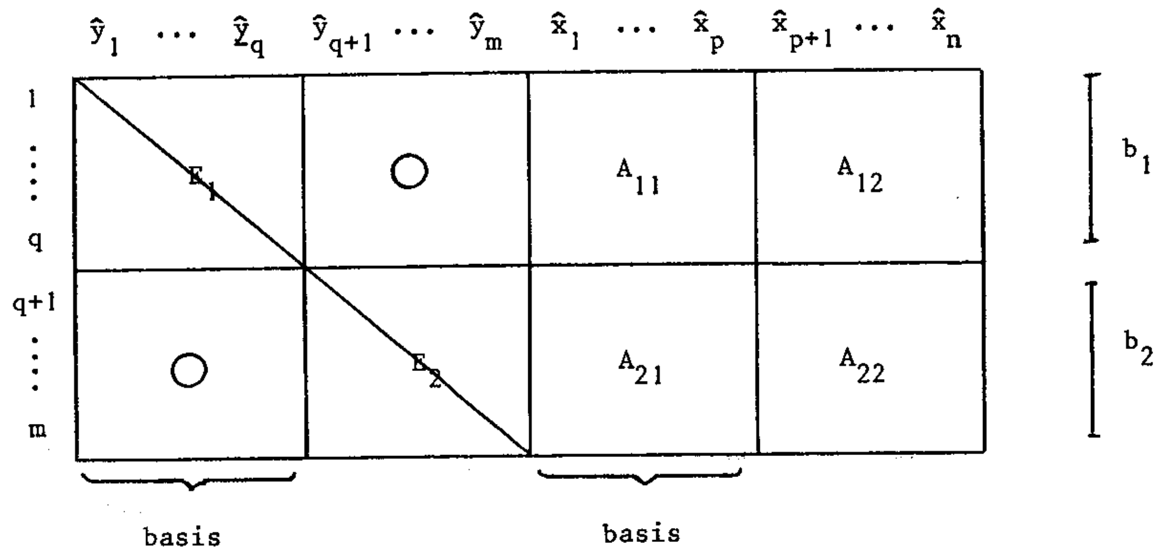
2. $\hat{\underline{x}}$ voldoet aan n onafhankelijke van de m+n vergelijkingen (definitie van een hoekpunt, hoofdstuk 3):

$$\begin{aligned} a_{1*}^T \underline{x} &= b_1 \\ \vdots\ &\quad \vdots \\ a_{m*}^T \underline{x} &= b_m \\ x_1 &= 0 \\ &\ \vdots \\ x_n &= 0\,. \end{aligned}$$

Zij nu $\binom{\hat{y}}{\hat{x}}$ een toegelaten basisoplossing van

$$\begin{aligned} E\,\underline{y} + A\,\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{y} \qquad &\geq \underline{o} \\ \underline{x} &\geq \underline{o} \end{aligned}$$

De bijbehorende basis uit (E A) bevat wellicht kolommen uit E en kolommen uit A. Wij geven de vergelijkingen schematisch weer in het volgende tableau, waarbij de voorwaarden $\underline{y} \geq \underline{o}$ en $\underline{x} \geq \underline{o}$ niet worden vermeld. (Dit kan zo steeds door verwisseling van rijen en kolommen bereikt worden.)



Let op: $p = m-q$.

De basis B wordt gevormd door de kolommen onder de basisvariabelen $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_q, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_p$.

$$B = \begin{pmatrix} E_1 & A_{11} \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix} .$$

De basisvektoren zijn onafhankelijk, dus

$$\det(B) = \begin{vmatrix} E_1 & A_{11} \\ 0 & A_{21} \end{vmatrix} = \det(A_{21}) \neq 0.$$

De matrix A_{21} is dus niet-singulier.

Daar B een basis is van $(E \quad A)$ met bijbehorende basisvariabelenvektor $\begin{pmatrix}\hat{\underline{y}}_B\\ \hat{\underline{x}}_B\end{pmatrix}$, geldt:

$$B\begin{pmatrix}\hat{\underline{y}}_B\\ \hat{\underline{x}}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_1 & A_{11}\\ 0 & A_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\underline{y}}_B\\ \hat{\underline{x}}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{b}_1\\ \underline{b}_2\end{pmatrix},$$

ofwel

$$\begin{cases} E_1\,\hat{\underline{y}}_B + A_{11}\,\hat{\underline{x}}_B = \underline{b}_1\\ \qquad\qquad A_{21}\,\hat{\underline{x}}_B = \underline{b}_2 \end{cases}.$$

Uiteraard geldt, met $\hat{\underline{x}}_N = \underline{o}$ (de niet-basisvariabelen zijn $\hat{y}_{q+1},\dots,\hat{y}_m$, $\hat{x}_{p+1},\dots,\hat{x}_n$) :

$$(A_{21} \quad A_{22})\begin{pmatrix}\hat{\underline{x}}_B\\ \hat{\underline{x}}_N\end{pmatrix} = A_{21}\,\hat{\underline{x}}_B + A_{22}\,\hat{\underline{x}}_N = A_{21}\,\hat{\underline{x}}_B = \underline{b}_2 .$$

Zij $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix}\hat{\underline{x}}_B\\ \hat{\underline{x}}_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\underline{x}}_B\\ \underline{o}\end{pmatrix}$, dan geldt dus:

1. $\left.\begin{array}{l} A\,\hat{\underline{x}} \le \underline{b}\\ \hat{\underline{x}} \ge \underline{o}\end{array}\right\}$ dus $\hat{\underline{x}}$ <u>behoort</u> <u>tot</u> $V = \{x \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$.

2. $\hat{\underline{x}}$ voldoet aan:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a}^T_{q+1*}\hat{\underline{x}} = b_{q+1}\\ \underline{a}^T_{q+2*}\hat{\underline{x}} = b_{q+2}\\ \qquad\vdots\\ \underline{a}^T_{m*}\hat{\underline{x}} = b_m \end{array}\right\}\quad \text{m-q vergelijkingen}$$

en $\hat{\underline{x}}_N = \underline{o}$:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x}_{p+1} = 0\\ \hat{x}_{p+2} = 0\\ \qquad\vdots\\ \hat{x}_n = 0 \end{array}\right\}\quad \text{n-p vergelijkingen.}$$

De oplossing $\hat{\underline{x}}$ voldoet dus aan $m-q+n-p = n$ vergelijkingen $(m-q = p)$, waarmee bewezen is, dat $\hat{\underline{x}}$ een <u>hoekpunt</u> is van $V := \{\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$.

4.3. Optimale basisoplossingen

Stelling: Als het L.P.-probleem max ($\underline{c}^T\underline{x}$) onder de voorwaarden $A\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{o}$ een optimale oplossing heeft, dan heeft het ook een optimale basisoplossing.

Bewijs: Het veelvlak $V := \{\underline{x} \mid A\,\underline{x} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$ kan ook geschreven worden als:

$$V := \{\underline{x} \mid \underline{x} = \lambda_1\underline{p}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{p}_k + \mu_1\underline{q}_1 + \ldots + \mu_\ell\underline{q}_\ell;$$
$$\lambda_1 + \ldots \lambda_k = 1;\ \lambda_s \geq 0;\ \mu_t \geq 0\}.$$

De vektoren $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_k$ spannen zo een konvexe veelhoek op en de vektoren $\underline{q}_1,\ldots,\underline{q}$ een konvexe veelhoekskegel (zie hoofdstuk 3).
Stel $\underline{x}$ is een oplossing van $A\,\underline{x} = \underline{b}$; $\underline{x} \geq \underline{o}$; dan zijn er λ_s en μ_t, zodat

$$\underline{x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\underline{p}_s + \sum_{t=1}^{\ell} \mu_t\underline{q}_t .$$

Hierbij gelden als voorwaarden:

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s = 1;\ \lambda_s \geq 0;\ \mu_t \geq 0.$$

De waarde van de objectfunktie $\underline{c}^T\underline{x}$ wordt dan:

$$\underline{c}^T\underline{x} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s\underline{c}^T\underline{p}_s + \sum_{t=1}^{\ell} \mu_t\underline{c}^T\underline{q}_t .$$

Hierin is $\underline{x}$ niet noodzakelijk optimaal, want dit geldt voor elke toegelaten oplossing.

In $\underline{c}^T\underline{x}$ is de term $\sum_{s=1}^{k} \lambda_s\underline{c}^T\underline{p}_s$ altijd begrensd, omdat 1) $\sum_1^k \lambda_s = 1$,

2) $\lambda_s \geq 0$ en dus $0 \leq \lambda_s \leq 1$,

3) de vektoren $\underline{p}_s$ zijn hoekpunten van een veelhoek en zijn dus begrensd.

De term $\sum_{t=1}^{\ell} \mu_t\underline{c}^T\underline{q}_t$ wordt bepaald door termen $\underline{c}^T\underline{q}_t$. Hiervan kunnen we zeggen:

1) Indien een $\underline{c}^T\underline{q}_t > 0$, dan is de waarde van $\sum_{t=1}^{\ell} \mu_t \underline{c}^T \underline{q}_t$ onbegrensd, aangezien μ_t niet naar boven begrensd is.

2) Indien alle $\underline{c}^T\underline{q}_t \leq 0$, dus voor $t = 1,\ldots,\ell$, dan is $\sum_{t=1}^{\ell} \mu_t \underline{c}^T \underline{q}_t \leq 0$, dus $\underline{c}^T\underline{x} \leq \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \underline{c}^T \underline{p}_s$.

Dit is ook te noteren als:

$$\underline{c}^T\underline{x} \leq \lambda_1 \underline{c}^T \underline{p}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{c}^T \underline{p}_k \; .$$

Zij van deze veelterm $\underline{c}^T\underline{p}_u$ de grootste van de termen.
Als wij nu alle termen $\underline{c}^T\underline{p}_s$ voor $s = 1,\ldots,k$ majoreren door $\underline{c}^T\underline{p}_u$, dan krijgen wij:

$$\underline{c}^T\underline{x} \leq \lambda_1 \underline{c}^T \underline{p}_u + \lambda_2 \underline{c}^T \underline{p}_u + \ldots + \lambda_u \underline{c}^T \underline{p}_u + \ldots + \lambda_k \underline{c}^T \underline{p}_u$$

of

$$\underline{c}^T\underline{x} \leq \underline{c}^T\underline{p}_u \sum_{k=1}^{k} \lambda_k = \underline{c}^T\underline{p}_u \; .$$

Wij zien nu, dat de maximale waarde van $\underline{c}^T\underline{x}$ bereikt wordt in het hoekpunt $\underline{p}_u$ van de veelhoek, waarmee het gestelde bewezen is (zie ook 4.2). □

<u>Opmerking 1</u>: Als er <u>meerdere</u> punten $\underline{p}_i$ zijn, waarvoor geldt: $\underline{c}^T\underline{p}_i = \underline{c}^T\underline{p}_u$, dan krijgen wij een aantal optimale basisoplossingen, die een konvexe veelhoek opspannen (zie slot hoofdstuk 3).

<u>Opmerking 2</u>: Als er een $\underline{q}_v$ is met $\underline{c}^T\underline{q}_v = 0$, dan is naast $\underline{x} = \underline{p}_u$ als optimale oplossing ook de halfrechte $\underline{x} = \underline{p}_u + \mu_v \underline{q}_v$, $\mu_v \geq 0$, een optimale oplossing, want

$$\underline{c}^T\underline{x} = \underline{c}^T(\underline{p}_u + \mu_v\underline{q}_v) = \underline{c}^T\underline{p}_u + \underline{c}^T\mu_v\underline{q}_v = \underline{c}^T\underline{p}_u .$$

Dit kan nog veralgemeend worden; we gaan daarop hier niet in.

4.4. Wij geven nu een alternatieve bewijsvoering van de stelling uit 4.3:
Als max $(\underline{c}^T\underline{x})$ onder de voorwaarden

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{o}$$

een optimale oplossing heeft, dan heeft dit probleem ook een optimale basisoplossing.

Bewijs: Schrijf de voorwaarden op als volgt:

$A\,\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$ met $x_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Stel $\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$ is een optimale oplossing, of $\underline{c}^T\underline{\hat{x}} \geq \underline{c}^T\underline{x}$ voor alle $\underline{x}$ die voldoen aan $A\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{o}$.

De optimale oplossing voldoet dus aan

$$\hat{x}_1\underline{a}_1 + \ldots + \hat{x}_n\underline{a}_n = \underline{b}, \text{ en we nemen aan:}$$

$$\hat{x}_1 > 0;\ldots;\ \hat{x}_k > 0;\ \hat{x}_{k+1} = 0;\ldots;\ \hat{x}_n = 0.$$

1) Als $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ een basis is van $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\}$, dan is $\underline{\hat{x}}$ een basisoplossing.

2) Als $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ lineair onafhankelijk zijn, maar niet een basis vormen, dan moeten wij onafhankelijke vektoren er bij vinden om een basis te konstrueren. Dan moeten we basisvariabelen met waarde 0 toevoegen.
Als $\underline{a}_{k+1}$ lineair afhankelijk is van $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$, dan is $\underline{a}_{k+1}$ geen kandidaat voor de basis, en bekijken wij $\underline{a}_{k+2}$, etc.
Als $\underline{a}_{k+1}$ lineair onafhankelijk is van $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$, beschouw dan verder $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{k+1}\}$; kijk of dit wel een basis vormt, etc.
Op deze manier verkrijgen wij een basis $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k, \underline{a}_{k+1},\ldots,\underline{a}_r\}$ met basisoplossing: $\underline{\hat{x}}_B = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_k, 0,\ldots,0)$, $\underline{\hat{x}}_N = \underline{o}$.

3) Stel, dat $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ lineair afhankelijk zijn.
Uit $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ moeten ℓ vektoren ontslagen worden, zodat $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{k-\ell}\}$ onafhankelijk zijn, waarmee wij in 1) of 2) terecht zijn gekomen.
In $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ is dan een $\underline{a}_s$ te vinden, zodat geldt

$$\underline{a}_s = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\underline{a}_t \text{ met } t \neq s \text{ met minimaal één } \lambda_t \neq 0.$$

Dit is ook te schrijven als:

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \ldots - \underline{a}_s + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k = \underline{o} \qquad \text{(I)}$$

Als wij I met θ vermenigvuldigen en optellen bij de oorspronkelijke vergelijking voor $\underline{\hat{x}}$, krijgen wij

$$
\begin{array}{lllllll}
\hat{x}_1\underline{a}_1 & + \dots + & \hat{x}_s\underline{a}_s & + \dots + & \hat{x}_k\underline{a}_k & = \underline{b} & \\
\theta[\lambda_1\underline{a}_1 & + \dots - & \underline{a}_s & + \dots + & \lambda_k\underline{a}_k & = \underline{o}] & \\
\hline
\underline{a}_1(\hat{x}_1+\lambda_1\theta) & + \dots + & \underline{a}_s(\hat{x}_s-\theta) & + \dots + & \underline{a}_k(\hat{x}_k+\lambda_k\theta) & = b & \quad (\mathrm{II})
\end{array}
$$

Wij definiëren nu

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_1(\theta) &:= \hat{x}_1 + \lambda_1\theta \\
&\vdots \\
\hat{x}_s(\theta) &:= \hat{x}_s - \theta \\
&\vdots \\
\hat{x}_k(\theta) &:= \hat{x}_k + \lambda_k\theta .
\end{aligned}
$$

$\underline{\hat{x}}(\theta)$ is een oplossing van A $\underline{x} = \underline{b}$. Deze oplossing is toegelaten als

$$\underline{\hat{x}}(\theta) \geq \underline{o} .$$

Dit kan ook genoteerd worden als:

$$
\begin{pmatrix} \hat{x}_1 + \lambda_1\theta \\ \vdots \\ \hat{x}_s - \theta \\ \vdots \\ \hat{x}_k + \lambda_k\theta \end{pmatrix} \geq \underline{o}
$$

Voor $\hat{x}_j + \lambda_j\theta \geq 0$ geldt:

1. als $\lambda_j > 0$, dan $-\dfrac{x_j}{\lambda_j} \leq \theta$
2. als $\lambda_j < 0$, dan $\theta \leq -\dfrac{x_j}{\lambda_j}$
3. als $\lambda_j = 0$, dan $\hat{x}_j \geq 0$ voor alle θ.

Hieruit volgen als grenzen voor θ:

$$\max_j \left[-\frac{\hat{x}_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j > 0\right] \leq \theta \leq \min_j \left[-\frac{\hat{x}_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j < 0\right] .$$

$\underline{\hat{x}}(\theta)$ is voor willekeurige θ binnen deze grenzen optimaal:

$$
\begin{aligned}
\underline{c}^T\underline{\hat{x}}(\theta) &= c_1(\hat{x}_1 + \lambda_1\theta) + \dots + c_k(\hat{x}_k + \lambda_k\theta) = \\
&= c_1\hat{x}_1 + \dots + c_k\hat{x}_k + \theta[c_1\lambda_1 + \dots + c_k\lambda_k] \\
&= \underline{c}^T\underline{\hat{x}} + \theta\cdot f(\underline{c},\underline{\lambda}) .
\end{aligned}
$$

Stel nu, dat $f(\underline{c},\underline{\lambda}) < 0$, dan geldt voor $\theta < 0$:

$$\underline{c}^T\underline{\hat{x}}(\theta) = \underline{c}^T\underline{\hat{x}} + \text{(iets positiefs)}.$$

Dit is in tegenspraak met $\underline{c}^T\hat{\underline{x}}$ = maximaal.

Evenzo voor het geval $f(\underline{c}, \underline{\lambda}) > 0$; dan is met $\theta > 0$ weer $\underline{c}^T\hat{\underline{x}}(\theta) > \underline{c}^T\hat{\underline{x}}$.

Ook dit is in tegenspraak met $\underline{c}^T\hat{\underline{x}}$ = maximaal.

Uit het bovenstaande volgt, dat

$$f(\underline{c},\underline{\lambda}) = 0 \text{ en dus } \underline{c}^T\hat{\underline{x}}(\theta) = \underline{c}^T\hat{\underline{x}} .$$

Wij hebben gezien, dat $\hat{\underline{x}}(\theta)$ optimale oplossing is voor

$$\max_j \left[-\frac{\hat{x}_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j > 0\right] \leq \theta \leq \min_j \left[-\frac{\hat{x}_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j < 0\right] .$$

Neem bijv. $\theta_1 = \min_j \left[-\frac{\hat{x}_j}{\lambda_j} \mid \lambda_j < 0\right] = -\frac{x_d}{\lambda_d}$; dan is

$$\hat{\underline{x}}(\theta_d) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 + \lambda_1\theta_d \\ \vdots \\ \hat{x}_d + \lambda_d\theta_d \\ \vdots \\ \hat{x}_s - \theta_d \\ \vdots \\ \hat{x}_k + \lambda_k\theta_d \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \vdots \\ = 0 \\ \vdots \\ \geq 0 \\ \vdots \\ \geq 0 \end{matrix} .$$

Deze oplossing is: 1. toegelaten,
2. optimaal,
3. opgebouwd uit hoogstens k-1 komponenten > 0.

Voor de kolommen van de komponenten > 0 geldt, òf 1. zij vormen een basis; òf 2. zij zijn onafhankelijk; òf 3. zij zijn afhankelijk, waarna wij de in 3. beschreven procedure herhalen. Hiermee is het bewijs voltooid.

4.5. Stelsels vergelijkingen in basische vorm

Een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n variabelen heet een stelsel <u>in basische vorm</u> indien de matrix van de linkerleden een (m,m)-eenheidsmatrix bevat. Eventueel na verwisseling van kolommen (en variabelen) kan zo'n stelsel voorgesteld worden als

$$(E \quad A)\, \underline{x} = \underline{b}.$$

Onder de <u>bijbehorende basisoplossing</u> $\hat{\underline{x}}$ verstaan we nu de basisoplossing behorende bij de basis E; dus $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_E \\ \underline{o} \end{pmatrix}$.

4.5.1. Opgaven.

Gegeven het stelsel lineaire vergelijkingen in basische vorm $A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \in R^7$, $\underline{b} \in R^3$, met

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Geef de bijbehorende basisoplossing.

b) Bereken de basisoplossing van het stelsel, waarbij x_2, x_5, x_7 basisvariabelen zijn en de overige niet-basisvariabelen.

c) Bestaat er een nietnegatieve basisoplossing, waarbij x_2 en twee van de oorspronkelijke basisvariabelen als basisvariabelen optreden? Motivering!

d) Bepaal de nietnegatieve basisoplossing van het stelsel waarbij als basisvariabelen optreden x_1 en twee van de oorspronkelijke basisvariabelen.

e) Bepaal een matrix M waarmee men de matrix $(A,\underline{b})$ moet vermenigvuldigen om een gelijkwaardig stelsel vergelijkingen $MA\underline{x} = M\underline{b}$ te verkrijgen, eveneens in basische vorm, dat de in d) bedoelde bijbehorende basisoplossing bezit. (Op twee manieren te beredeneren.) Hoeveel van deze matrices M zijn er?

f) Geef een meetkundige interpretatie van deze linksvermenigvuldiging van de kolomvektoren van $(A,\underline{b})$ met M.

4.5.2. Teken in R^2 het gebied

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{rl} x_1 + x_2 \le 8; & x_1 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \le 4; & x_2 \ge 0 \\ 2x_1 - x_2 \le 10; & \end{array} \right\} .$$

Vul de eerste drie ongelijkheden tot vergelijkingen aan door toevoeging van restvariabelen y_1, y_2, y_3. Noem de koëfficiëntenmatrix van deze vergelijkingen (E A), de rechterlidkolom $\underline{b}$.

a) Bepaal de getallen y_1, y_2, y_3 die behoren bij het punt P(2,3) van G. Wat betekenen deze getallen meetkundig? Teken een aantal van de lijnen $y_i = 1$, $y_i = 2, \ldots$ voor $i = 1,2,3$, en eveneens een aantal lijnen $x_j = 1$, $x_j = 2, \ldots$ voor $j = 1,2$. Welke variabelen van de vijf zijn nu basisvariabelen en welke niet-basisvariabelen? Bereken de waarden van deze variabelen ook voor de hoekpunten O(0,0), Q(0,4) en R(2,6) van G.

b) We willen een spil-operatie ("vegen") op het stelsel vergelijkingen $(E \quad A)\begin{pmatrix}\underline{y}\\ \underline{x}\end{pmatrix} = \underline{b}$ uitvoeren zodanig, dat daarna het punt Q de bijbehorende basisoplossing is. Welke variabelen moeten dan basisvariabelen en welke niet-basisvariabelen worden?
~~Wat wordt de basis B_Q voor R^3 (kolommenruimte van (E A)) die behoort~~ bij deze basisoplossing? Voer de bedoelde spil-operatie uit.
Ga na, dat we deze transformatie kunnen beschouwen als een overgang in R^2 naar een nieuw (scheefhoekig) koördinatenstelsel met Q als oorsprong, waarbij G weer in het eerste kwadrant ligt.
Beschrijf G in de nieuwe koördinaten, zonder gebruik van de restvariabelen. Geef de transformatievergelijkingen voor de overgang van oude naar nieuwe koördinaten.

c) Breng de vergelijkingen in een zodanige basische vorm, dat het hoekpunt R de bijbehorende basisoplossing wordt. (Welke variabelen worden basisvariabelen?)
Eerste manier: spil-operatie toepassen op de onder b) gevonden matrix; tweede manier: zoek in (E A) de basis B_R die behoort bij R als basisoplossing; en vermenigvuldig de matrix $(E \quad A|\underline{b})$ met B_R^{-1}.
Geef de overgangsvergelijkingen van de koördinatentransformatie van het oude x_1-x_2-stelsel met **O** als oorsprong naar het laatst gevonden koördinatenstelsel met R als oorsprong.

d) Beschouw het L.P.-probleem: maximaliseer $-2x_1 + 3x_2$ onder de voorwaarde $\underline{x} \in G$. Bereken ten opzichte van elk van de drie hierboven optredende koördinatenstelsels de gradiënt van de objektfunktie; teken deze in de figuur telkens als een pijl uitgaande van de betreffende oorsprong.
Merk op, dat deze pijlen van elkander verschillend zijn in lengte en richting.

5. De simplexmethode

5.1. Speciaal geval: $\underline{b} \geq \underline{o}$

Wij zullen eerst een speciaal geval bekijken en later aantonen, dat wij alle andere gevallen daartoe kunnen herleiden.

Wij gaan uit van

$$\max \{\underline{c}^T \underline{x} \mid A\, \underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o};\ \underline{b} \geq \underline{o}\}\ ,$$

en transformeren dit naar standaardvorm III:

$$\max \{\underline{c}^T \underline{x} \mid \underline{y} + A\, \underline{x} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o};\ \underline{y} \geq \underline{o};\ \underline{b} \geq \underline{o}\}\ ,$$

of in matrixvorm:

$$\max \left((\underline{o}^T \quad \underline{c}^T) \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} \right) \text{ onder de voorwaarden}$$

$$(E \quad A) \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \underline{b}\ ,$$

$$\begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} \geq \underline{o}\ .$$

(A is een (m,n)-matrix, $\underline{x} \in R^n$, $\underline{c} \in R^n$, $\underline{b} \in R^m$, $\underline{y} \in R^m$.)

Het "speciale" is hier:

1) $\underline{b} \geq \underline{o}$,
2) de matrix van het stelsel lineaire vergelijkingen dat de beperkingen voorstelt, bevat een basis van eenheidskolommen voor zijn kolommenruimte (stelsel in basische vorm).

Naast deze basis van eenheidskolommen bevat $(E \quad A)$ nog andere bases voor zijn kolommenruimte, b.v. zulke die men verkrijgen kan door het ruilen van een kolom van E met een kolom van A. Door een lineaire basistransformatie kan men zorgen, dat deze laatste een eenheidskolom wordt, en wel juist die, die in de oude basis tegen hem geruild is. Hierdoor gaan de vergelijkingen over in een stelsel dat, na passende verwisseling van kolommen, weer een analoge vorm heeft (en dat gelijkwaardig is met het vorige):

$$(E \quad A') \begin{pmatrix} \underline{y}' \\ \underline{x}' \end{pmatrix} = \underline{b}'\ .$$

Vergelijken we de waarden van de objectfunktie bij substitutie van de beide bijbehorende basisoplossingen, dan kan het zijn, dat die waarde in het tweede geval hoger is dan die in het eerste geval. We noemen dan die tweede basisoplossing "beter" dan de eerste. De simplexmethode nu is een iteratieve methode om bij elke stap een nieuwe basis te vinden door ruil van een oude basiskolom tegen een nieuwe, tevens de basistransformatie in de kolomruimte uit te voeren, en ten slotte de waarde te berekenen die de objectfuntie aanneemt bij substitutie van de nieuwe bijbehorende basisoplossing, en wel zodanig, dat deze waarde bij elke stap stijgt, althans niet daalt. Bovendien wordt de eis dat alle variabelen uiteindelijk nietnegatief moeten zijn, bij elke iteratie in het oog gehouden.

De bovenbeschreven objectfunktie ($\underline{c}^T\underline{x}$) is niet algemeen genoeg; het kan zijn dat aan de restvariabelen y_i ook nog een prijs is verbonden (b.v. een dumpprijs voor overgebleven hoeveelheden goederen). Daarom willen we in het vervolg de objectfunktie de algemene vorm geven:

$$\underline{w} := \underline{q}^T\underline{y} + \underline{p}^T\underline{x} = q_1y_1 + q_2y_2 + \ldots + q_my_m + p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n .$$

Aan de hand van een voorbeeld zullen we de simplexmethode stap voor stap beschrijven.

Voorbeeld. Gegeven het L.P.-probleem

$$\max\ (w = -y_1 - 2y_2 - y_3 + 2x_1 - 3x_2 + 4x_3)$$

onder de voorwaarden

$$\begin{array}{rrrrrrl} y_1 & & & - x_1 & & - 2x_3 & = 5 \\ & y_2 & & + 2x_1 & - 3x_2 & + x_3 & = 3 \\ & & y_3 & + 2x_1 & - 5x_2 & + 6x_3 & = 5 , \end{array} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \underline{o} .$$

Hier is dus m = 3 en n = 3.

We noteren dit probleem in de z.g. tableauvorm. We schrijven bovenaan de variabelen, met daaronder de corresponderende coëfficiënten uit de objectfunktie, de z.g. *objectrij* of *c-rij*. Onder de streep komen de beperkingen in vergelijkingsvorm (de vertikale streep stelt de =-tekens voor), en onder de tweede streep komt de lineaire relatie tussen w en de niet-basisvariabelen die ontstaat door eliminatie van de basisvariabelen uit de beperkingen en de gegeven betrekking voor w:

	w	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3		
objectrij		-1	-2	-1	2	-3	4		
matrix		1	0	0	-1	0	-2	5	b-kolom
		0	1	0	2	-3	1	3	
		0	0	1	2	-5	6	5	
	1	0	0	0	-7	14	-10	-16	basiswaarde van w

d-rij

De onderste regel wordt gevonden als volgt:

$$w = - y_1 - 2y_2 - y_3 + 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 =$$
$$= - (x_1 + 2x_3 + 5) - 2(- 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3) - (- 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 5) +$$
$$+ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7x_1 - 14x_2 + 10x_3 - 16,$$

zodat dus

$$w - 7x_1 + 14x_2 - 10x_3 = -16.$$

We zullen later een snelle manier geven om de d-rij te berekenen.
De (aktuele) <u>basiswaarde</u> van w is de waarde van w verkregen door substitutie van de direkt uit het tableau af te lezen aktuele bijbehorende basisoplossing

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

deze is inderdaad gelijk aan $- 5 - 6 - 5 + 0 - 0 + 0 = - 16$.
De kolom der rechterleden van de vergelijkingen wordt de <u>b-kolom</u> genoemd.
De w links boven en de 1 voor de d-rij worden in het vervolg altijd weggelaten, omdat deze 1 toch steeds onveranderd blijft.
Bij de simplexiteraties zal het tableau telkens veranderen, maar de volgende eigenschappen zullen gelden:

1) de b-kolom zal $\geq \underline{o}$ blijven,
2) de matrix zal steeds, eventueel na verwisseling van kolommen, een E-matrix bevatten van afmetingen $m \times m$,
3) in de d-rij zullen onder de kolommen van de basisvariabelen steeds nullen staan.

Het feit dat alle variabelen nietnegatief moeten zijn bij een eventuele optimale oplossing van het probleem, wordt niet expliciet genoteerd (maar wel degelijk in gedachten gehouden).
Vorenstaand tableau heet ook wel het starttableau. De bijbehorende basis-oplossing, de start-basisoplossing, is hiervoor al genoemd. Op grond van genoemde eigenschappen (1) en (2) kunnen we zeggen: na elke iteratie is er een basisoplossing van de vergelijkingen uit het tableau af te lezen, en wel een toegelaten basisoplossing.

Als we $\underline{x}$ zien als de produktie van een aantal machines en $\underline{y}$ als de overgebleven grondstoffen, dan is de start-basisoplossing een slechte oplossing, want $\underline{x} = \underline{o}$ betekent, dat er niets geproduceerd wordt. We zullen dus in het algemeen zoeken naar een betere oplossing, waarbij we $\underline{x} \geq \underline{o}$ hopen te vinden, met de nadruk op $> \underline{o}$. Hoewel dat op het eerste oog niet noodzakelijk lijkt, willen we in het bijzonder gaan zoeken naar een betere basisoplossing, en wel naar een die ontstaat uit de vorige door ruil van een oude basisvariabele tegen een niet-basisvariabele.

Om de bewerkingen te kunnen beschrijven stellen we het simplextableau algemeen als volgt voor (waarbij de d-rij voorlopig niet wordt beschouwd):

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
y_1 & \cdots & y_m & x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & \\
q_1 & \cdots & q_m & p_1 & \cdots & p_s & \cdots & p_n & \\
\hline
1 & & & a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & 1 & a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Kies nu een (voorlopig) willekeurige kolom $\underline{a}_{*s}$ onder de variabele x_s (een van de variabelen x_j, $j = 1, 2, .., n$) tot kandidaat voor een nieuwe basiskolom. Geef x_s de waarde θ, terwijl de overige x_j, dus voor $j = 1,2,.., n$, $j \neq s$, bij de komende basisoplossing weer niet-basisvariabelen zullen zijn en dus de waarde 0 behouden. We lossen de y_i op, nu niet meer uit de vergelijkingen

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
y_1 & & & = b_1 \\
 & y_2 & & = b_2 \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & y_m & = b_m
\end{array}
\right.
$$

maar uit het stelsel

$$\begin{array}{lllr} y_1(\theta) & & & + \theta\, a_{1s} = b_1 \\ & y_2(\theta) & & + \theta\, a_{2s} = b_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & y_m(\theta) & + \theta\, a_{ms} = b_m \end{array}$$

De veranderde waarde van $\underline{y}$ wordt $\underline{y}(\theta)$; de gehele oplossing (nog geen basis-oplossing) wordt:

$$\begin{array}{lll} y_1(\theta) = b_1 - \theta\, a_{1s} & \qquad & x_1 = 0 \\ y_2(\theta) = b_2 - \theta\, a_{2s} & & \vdots \\ \vdots & & x_{s-1} = 0 \\ y_m(\theta) = b_m - \theta\, a_{ms} & & x_s = \theta \\ & & x_{s+1} = 0 \\ & & \vdots \\ & & x_n = 0 \end{array}$$

Dit is een toegelaten oplossing van het L.P.-probleem mits $\underline{y}(\theta) \geq \underline{o}$, d.w.z. alle $y_i(\theta) \geq 0$, en $\theta \geq 0$.

Als $a_{is} \leq 0$ is, dan is $b_i - \theta\, a_{is} \geq 0$ voor alle $\theta \geq 0$,

als $a_{is} > 0$ is, dan is $b_i - \theta\, a_{is} \geq 0$ alleen als $\theta \leq \dfrac{b_i}{a_{is}}$.

Hieruit volgt voor θ een bovengrens, naast de al bekende ondergrens 0:

$$0 \leq \theta \leq \min_i \left[\frac{b_i}{a_{is}} \;\middle|\; a_{is} > 0\right].$$

Voorbeeld.

In ons voorbeeld hadden we de start-basisoplossing waarbij

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{voor} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

we gaan nu een andere basis zoeken met b.v. $x_3 = \theta$; we vinden eerst de niet-basisoplossingen

$$y_1(\theta) = 5 + 2\theta, \qquad x_1 = 0,$$
$$y_2(\theta) = 3 - \theta\ , \qquad x_2 = 0,$$
$$y_3(\theta) = 5 - 6\theta, \qquad x_3 = \theta.$$

Deze oplossingen zijn toegelaten als

$$5 + 2\theta \geq 0, \text{ of } \theta \geq -2\tfrac{1}{2}$$
$$3 - \theta \geq 0\ , \text{ of } \theta \leq 3$$
$$5 - 6\theta \geq 0, \text{ of } \theta \leq \frac{5}{6}\,.$$

We krijgen als grenzen voor θ: $0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}$.

Neem nu voor θ de gevonden bovengrens $\frac{5}{6}$; we vinden dan de oplossing

$$y_1 = 5 + \frac{10}{6} = 6\tfrac{2}{3} \qquad x_1 = 0$$
$$y_2 = 3 - \frac{5}{6} = 2\tfrac{1}{6} \qquad x_2 = 0$$
$$y_3 = 5 - 5 = 0 \qquad x_3 = \frac{5}{6}\,.$$

Maar dit is nu wel weer een basisoplossing, want de kolommen onder de variabelen y_1, y_2 en x_3 zijn onafhankelijk.

Algemeen: kies θ gelijk aan zijn bovengrens: $\theta^* = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min\limits_i \left[\frac{b_i}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} > 0\right]$;
dan wordt de nieuwe basisoplossing:

$$\begin{array}{llll}
y_1(\theta^*) = b_1 - \theta^* a_{1s} & & x_1(\theta^*) & = 0 \\
y_2(\theta^*) = b_2 - \theta^* a_{2s} & & \vdots & \\
\vdots & & x_{s-1}(\theta^*) & = 0 \\
 & & x_s(\theta^*) & = \theta^* \\
y_r(\theta^*) = b_r - \theta^* a_{rs} = 0 & & x_{s+1}(\theta^*) & = 0 \\
\vdots & & \vdots & \\
y_m(\theta^*) = b_m - \theta^* a_{ms} & & x_n(\theta^*) & = 0
\end{array}$$

Het is een basisoplossing, omdat de kolommen onder de variabelen

$$y_1, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_m \text{ en } x_s$$

onafhankelijk zijn (definitie van een basis).
Dit is in het tableau direct te zien:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
y_1 \;\cdots\; y_{r-1} & y_r & y_{r+1} \;\cdots\; y_m & x_1 \;\cdots & x_s & \cdots \quad x_n & \\
\hline
1 & & & a_{11} \;\cdots & a_{1s} & \cdots \quad a_{1n} & b_1 \\
\ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & & & & & & \\
 & 1 & & a_{r1} \;\cdots & a_{rs} & \cdots \quad a_{rn} & b_r \\
 & & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & 1 & a_{m1} \;\cdots & a_{ms} & \cdots \quad a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Bedenk dat $a_{rs} > 0$ en dus $\neq 0$ is.
De nieuwe basis bestaat uit de kolommen die met accoladen gemerkt zijn.
We willen door "vegen" bewerken, dat de kolom onder x_s een eenheidskolom wordt en wel de r-de eenheidskolom $\underline{e}_r$. Dit "vegen" betekent een basistransformatie (coördinatentransformatie) in de kolommenruimte R^m van de matrix.
Het element a_{rs} zal hierbij als spil ("pivot") dienst moeten doen.
We komen hierop later terug.

Eerst gaan we na wat de waarde van w zal worden als we de nieuwe basisoplossing invullen.

$$
\begin{aligned}
w(\theta^*) &= \underline{q}^T\underline{y}(\theta^*) + \underline{p}^T\underline{x}(\theta^*) = \\
&= q_1(b_1 - \theta^* a_{1s}) + \ldots + q_m(b_m - \theta^* a_{ms}) + p_s\theta^* = \\
&= q_1b_1 + \ldots + q_mb_m - \theta^*(q_1a_{1s} + \ldots + q_ma_{ms} - p_s)
\end{aligned}
$$

of in vektornotatie

$$w(\theta^*) = \underline{q}^T\underline{b} - \theta^*(\underline{q}^T\underline{a}_{*s} - p_s)\ .$$

Dit wordt dus de nieuwe basiswaarde van w, terwijl de oorspronkelijke bedroeg $w(0) = \underline{q}^T\underline{b}$. Wil de nieuwe basisoplossing "beter" zijn, dan moet gelden:

1) $\theta^* \neq 0$,

2) $w(\theta^*) > w(0)$ of $-\theta^*(\underline{q}^T\underline{a}_{*s} - p_s) > 0$, of $\underline{q}^T\underline{a}_{*s} - p_s < 0$,

omdat nu immers $\theta^* > 0$ is.

De voorwaarde $\underline{q}^T\underline{a}_{*s} - p_s < 0$ is dus een van r onafhankelijk kriterium waaraan de kolom $\underline{a}_{*s}$ onder de variabele x_s moet voldoen opdat er een betere basisoplossing ontstaat als we hem in de basis opnemen in ruil voor een oude basiskolom.

We rekenen nu in de beginsituatie voor elke j, $j = 1,2,\ldots,n$, de grootheid $\underline{q}^T\underline{a}_{*j} - p_j$ uit, en kunnen dan dadelijk zien, welke kolommen aan dit kriterium voldoen. We noemen deze grootheden d_j. Het blijken precies de getallen te zijn onder de kolom $\underline{a}_{*j}$ in de al eerder genoemde d-rij, die ontstaat door eliminatie van de basisvariabelen uit de objectfunctie (pag. 5.3). En ook de nullen uit de d-rij onder de kolommen bij de basisvariabelen y_i voldoen aan een analoge relatie:

$$d_i := \underline{q}^T\underline{e}_i - q_i = q_i - q_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,m.$$

Kontroleer deze uitspraken! (Als we in het vervolg spreken over een grootheid d_j bedoelen we hiermee een willekeurig element uit de d-rij, hetzij onder een basisvariabele, hetzij onder een niet-basisvariabele.)

De waarde van w bij substitutie van de aktuele basisoplossing (de aktuele basiswaarde van w) noteren we in het tableau als d_0. Bij de start geldt:

$$d_0 = w(0) = \underline{q}^T\underline{b}. \quad \text{Ga dit zelf na.}$$

Het volledig simplextableau ziet er nu als volgt uit:

$$
\begin{array}{r|cccc:cccc|c|l}
\multicolumn{1}{r}{} & y_1 & y_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{y_m} & x_1 & x_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{x_n} & \multicolumn{1}{c}{} & \\
\multicolumn{1}{r}{\text{objectrij}} & q_1 & q_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{q_m} & p_1 & p_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{p_n} & \multicolumn{1}{c}{} & \\
\cline{2-10}
 & 1 & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \\
 & & 1 & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \text{b-kolom} \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m & \\
\cline{2-10}
\text{d-rij} & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_n & d_0 & \text{basiswaarde van w} \\
\cline{2-10}
\end{array}
$$

Het simplextableau bij ons voorbeeld hadden we reeds ontmoet op pag. 5.3; we herhalen het nog eens:

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	
-1	-2	-1	2	-3	4	
1	0	0	-1	0	-2	5
0	1	0	2	-3	1	3
0	0	1	2	-5	6	5
0	0	0	-7	14	-10	-16

Wij zien, dat de kolommen van x_1 en x_3 mogelijke kandidaten zijn voor uitwisseling met een kolom van de aktuele basis (hier dus de startbasis), omdat d_1 en d_3 voldoen aan het kriterium voor een verbeterde basisoplossing: $d_j < 0$. Kunnen we een argument vinden om tot een bepaalde voorkeur uit deze twee te komen? We bepalen het bedrag waarmee de basiswaarde zal stijgen, indien de kolom bij x_1, resp. die bij x_3, in de basis wordt opgenomen, en kunnen dan bij voorkeur die van de twee kiezen, waarvoor deze toename het grootst is. Voor de j-de kolom is deze toename gelijk aan

$- \theta_j^*(\underline{q}^T \underline{a}_{*j} - p_j) = - \theta_j^* d_j$ (vergelijk pag. 5.7).

Dat wordt hier:

$$j = 1: \theta_1^* = \min[\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}] = \tfrac{3}{2} \quad \text{en} \quad - \theta_1^* d_1 = - \tfrac{3}{2}(-7) = 10\tfrac{1}{2};$$

$$j = 3: \theta_3^* = \min[\tfrac{3}{1}, \tfrac{5}{6}] = \tfrac{5}{6} \quad \text{en} \quad - \theta_3^* d_3 = - \tfrac{5}{6}(-10) = 8\tfrac{1}{3}.$$

Er zou dus reden zijn om hier aan kolom $\underline{a}_{*1}$ de voorkeur te geven. Men bedenke dat dan wel de eerste stap zo groot mogelijk is, maar dat dat nog niets zegt over het totaal aantal iteraties nodig om het optimum te bereiken.
We kunnen ook de grootte van θ_j^* buiten beschouwing laten en de bedragen vergelijken waarmee de basiswaarde zal stijgen <u>per eenheid</u> x_j, indien de kolom bij x_j in de basis wordt opgenomen. Dat zijn nl. de tegengestelden van de getallen d_j zelf. Dat is hier dus

voor $j = 1: - d_1 = 7$,
voor $j = 3: - d_3 = 10$.

Kiest men dit als vergelijkingsgetal, dan wordt aan de kolom $\underline{a}_{*3}$ de voorkeur gegeven. Rekentechnisch is dit laatste systeem gemakkelijker te programmeren; we kiezen daarmee dan eerst de kolom $\underline{a}_{*s}$ die in de basis zal worden opgenomen, en berekenen daarna pas het bijbehorende getal θ_s^*.
Wij zullen dit systeem aanhouden. Ook hierbij weten we nog niets aangaande het totaal aantal benodigde iteraties. In de praktijk werkt het systeem goed.
We zullen de iteratie in ons voorbeeld uitvoeren; de spil wordt $a_{33} = 6$.
Na "vegen", om de kolom onder x_3 gelijk te maken aan die van de oude y_3, wordt het tableau:

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	
-1	-2	-1	2	-3	4	
1	0	1/3	-1/3	- 5/3	0	20/3
0	1	-1/6	5/3	-13/6	0	13/6
0	0	1/6	1/3	- 5/6	1	5/6
0	0	5/3	-11/6	17/3	0	-23/3

Opmerkingen.

1. Als in de gekozen spilkolom $\underline{a}_{*s}$ elk element $a_{is} \leq 0$ is, dan geldt, dat voor elke i, $i = 1,2,\ldots,m$, $b_i - a_{is} \geq 0$ is voor elke $\theta > 0$ (vergelijk blz. 5.5). Omdat de bij de spilkolom behorende d_s negatief is, is nu de waarde van w naar boven niet begrensd. We zeggen dat het probleem een "oneindige oplossing" heeft: $w(\theta) \to \infty$ als $\theta \to \infty$, want

$$w(\theta) = \underline{g}^T\underline{b} - \theta\, d_s,$$

waarbij θ geen bovengrens heeft.

Bezit de matrix dus een niet-positieve kolom boven een negatieve d_j, dan heeft het probleem een oneindige oplossing (voldoende voorwaarde).

2. Als na de keuze van een spilkolom $\underline{a}_{*s}$ blijkt dat bij een positief element a_{is} in de b-kolom een element $b_i = 0$ voorkomt, wordt blijkbaar

$$\theta_s^* = \min_i \left[\frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0\right] = 0 .$$

Wordt dan deze kolom toch in de basis opgenomen, in ruil tegen een oude basiskolom, dan zal de basiswaarde van w niet veranderen, immers

$$w(\theta_s^*) = \underline{g}^T\underline{b} - \theta_s^*\, d_s = \underline{g}^T\underline{b} .$$

De nieuwe basisoplossing zal dan dus niet beter zijn dan de vorige.

5.2. Schema van de berekeningen

Gezien opmerking 2 van de vorige paragraaf zullen we onderscheid maken tussen de volgende twee gevallen:

1. Geval $\underline{b} > \underline{o}$: voor elke iteratie is de b-kolom strikt positief,
2. Geval $\underline{b} \geq \underline{o}$, en niet $\underline{b} > \underline{o}$: de b-kolom bevat één of meer nullen. (<u>Degeneratie</u> of ontaarding van de bijbehorende basisoplossing.)

In geval 1 kunnen we aantonen, dat de bovenbeschreven iteratieprocedure convergeert en in een eindig aantal stappen voert, hetzij naar een optimale oplossing, hetzij naar de uitspraak, dat het probleem een "oneindige oplossing" bezit. Voor geval 2 moeten we, niet zo zeer om praktische maar wel om theoretische redenen, een extra hulpmiddel inschakelen (lexicografische methode).

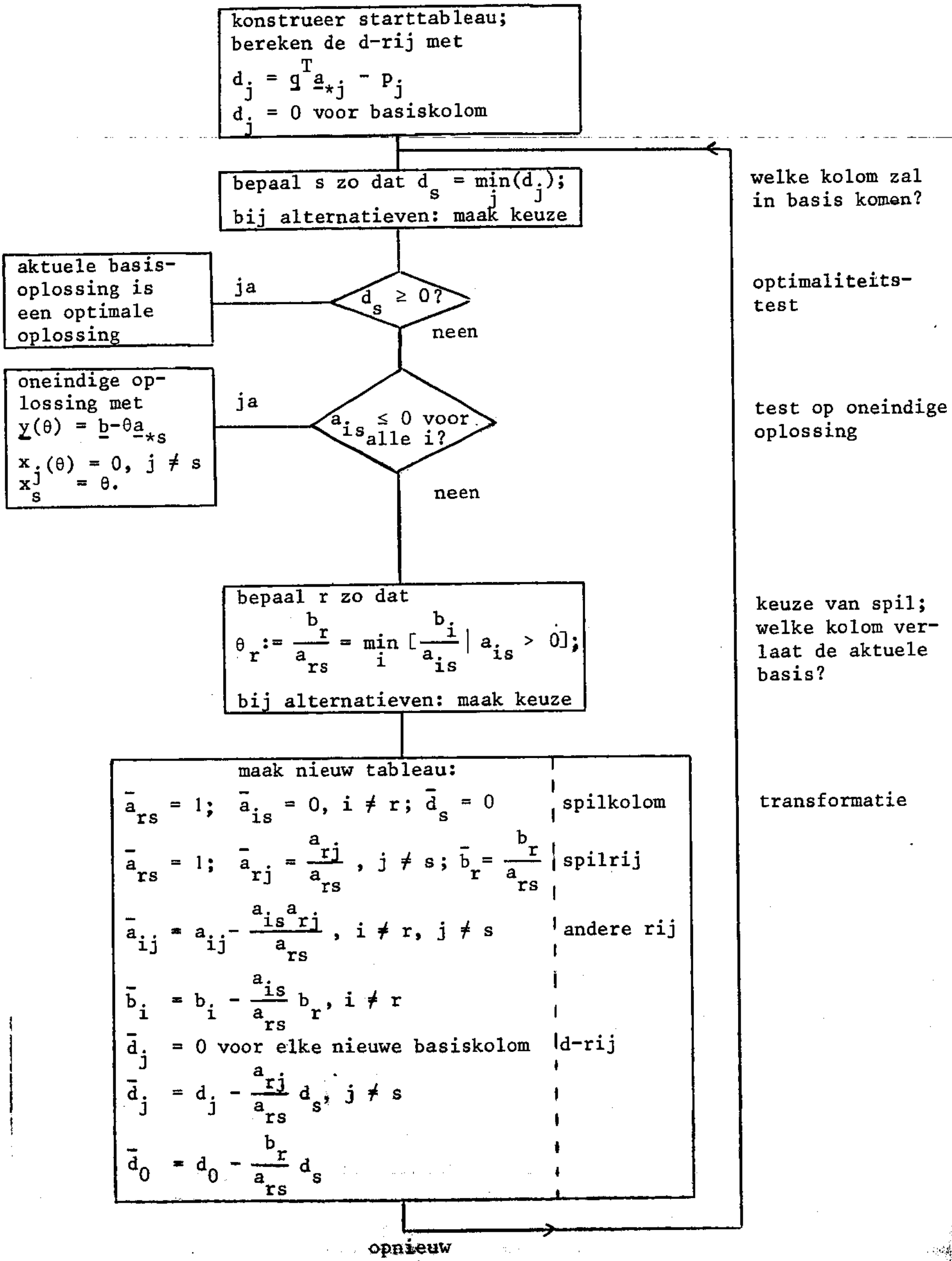
In het blokschema stelt d_j het algemene element van de d-rij voor; de index j doorloopt hierbij zowel de verzameling $\{1,2,\ldots,m\}$, behorend bij de y_i-kolommen, als de verzameling $\{1,2,\ldots,n\}$, behorend bij de x_j-kolommen.

Om bij de door ons gebruikte notatie het iteratieve in het blokschema goed te kunnen lezen moeten we ons voorstellen, dat na de transformatie de namen van de variabelen x_s en y_r worden verwisseld, evenals de namen van de coëfficiënten p_s en q_r, de kolommen $\underline{a}_{*s}$ en $\underline{e}_r$, en de elementen d_s en d_r. Zo krijgen we (na plaatsverwisseling van deze beide kolommen in het tableau) na de iteratie weer precies zo'n tableau, in een overeenkomstige notatie maar in feite met andere getallen in matrix, b-kolom en d-rij, als vóór de iteratie. Ieder aktueel tableau kan weer als starttableau gelezen worden voor een volgende iteratie. (Het kan trouwens ook weer als een L.P.-probleem terugvertaald worden, een probleem dat men als gelijkwaardig kan beschouwen met het oorspronkelijke.)

Blokschema voor de simplexalgoritme

Voorwaarden: 1. de matrix bevat een (m,m)-eenheidsmatrix,

2. vóór elke iteratie is $b_i > 0$ voor $i = 1,2,\ldots,m$.



Het resultaat van het vegen kan als volgt worden uitgeschreven.
Was het oorspronkelijke tableau

$$
\begin{array}{ccccc:ccccc|c}
y_1 & \cdots & y_r & \cdots & y_m & x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & \\
\hline
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} & b_r \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_1 & \cdots & d_s & \cdots & d_n & d_0 \\
\hline
\end{array}
$$

dan wordt het nieuwe tableau, na "vegen" met a_{rs} als spil:

$$
\begin{array}{ccccc:ccccc|c}
y_1 & \cdots & y_r & \cdots & y_m & x_1 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & \\
\hline
1 & \cdots & -\dfrac{a_{1s}}{a_{rs}} & \cdots & 0 & a_{11}-\dfrac{a_{1s}a_{r1}}{a_{rs}} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}-\dfrac{a_{1s}a_{rn}}{a_{rs}} & b_1-\dfrac{a_{1s}b_r}{a_{rs}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{rs}} & \cdots & 0 & \dfrac{a_{r1}}{a_{rs}} & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & \dfrac{a_{rn}}{a_{rs}} & \dfrac{b_r}{a_{rs}} \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\dfrac{a_{ms}}{a_{rs}} & \cdots & 1 & a_{m1}-\dfrac{a_{ms}a_{r1}}{a_{rs}} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn}-\dfrac{a_{ms}a_{rn}}{a_{rs}} & b_m-\dfrac{a_{ms}b_r}{a_{rs}} \\
\hline
0 & \cdots & -\dfrac{d_s}{a_{rs}} & \cdots & 0 & d_1-\dfrac{d_s a_{r1}}{a_{rs}} & \cdots & 0 & \cdots & d_n-\dfrac{d_s a_{rn}}{a_{rs}} & d_0-\dfrac{d_s b_r}{a_{rs}} \\
\hline
\end{array}
$$

We bewijzen nog de in het blokschema verwerkte stelling, dat het tableau optimaal is, d.w.z. dat de aktuele basisoplossing optimaal is, wanneer alle $d_j \geq 0$ zijn. Voor elke toegelaten oplossing $(\underline{y}^T \;\; \underline{x}^T)$ geldt:

$$\underline{y} + A\,\underline{x} = \underline{b}\,, \quad \underline{y} \geq \underline{o}, \; \underline{x} \geq \underline{o}\,.$$

Beschouw nu $w(\underline{y}, \underline{x}) = \underline{q}^T \underline{y} + \underline{p}^T \underline{x} =$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{q}^T (\underline{b} - A\,\underline{x}) + \underline{p}^T \underline{x} \\
&= \underline{q}^T \underline{b} - \underline{q}^T A\,\underline{x} + \underline{p}^T \underline{x} \\
&= \underline{q}^T \underline{b} - (\underline{q}^T A - \underline{p}^T)\,\underline{x} \\
&= \underline{q}^T \underline{b} - \underline{d}^T \underline{x} \\
&= \underline{q}^T \underline{b} - d_1 x_1 - d_2 x_2 - \ldots - d_n x_n\,.
\end{aligned}
$$

Hierin is $\underline{q}^T \underline{b}$ de waarde van w bij substitutie van de aktuele basisoplossing (basiswaarde), terwijl voor iedere toegelaten oplossing geldt:

$$- d_1 x_1 - d_2 x_2 - \ldots - d_n x_n \le 0,$$

omdat immers gegeven is dat alle $d_j \le 0$ zijn. Maar voor een toegelaten oplossing geldt $x_j \ge 0$ voor elke j; hieruit volgt: $w(\underline{y}, \underline{x}) \le w(\underline{b}, \underline{o}) = \underline{q}^T \underline{b}$. De aktuele basisoplossing is dus optimaal.

Opmerking. Het bovenstaande is niet anders dan de weergave van de d-rij als vergelijking, zoals we dat in het begin van dit hoofdstuk reeds afgeleid hebben; we voegen de variabele w in het tableau weer toe. Dan betekent de d-rij

w	y_1	$\ldots$	y_m	x_1	x_2	$\ldots$	x_2	
1	0	$\ldots$	0	d_1	d_2	$\ldots$	d_n	d_0

niets anders dan

$$w + d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n = d_0$$

of

$$w = - d_1 x_1 - d_2 x_2 - \ldots - d_n x_n + d_0$$

hetgeen voor elke toegelaten oplossing moet gelden. Dus $\max[w] = d_0$.

Uit de simplexalgoritme volgt, dat het rekenproces na een eindig aantal iteraties stopt. We kunnen dit op de volgende manier inzien. Bij het maken van een nieuwe basis eisen wij: $d_s < 0$. Omdat verondersteld is dat de hele b-kolom echt $> \underline{o}$ is, is de basiswaarde $\bar{d}_0$ van w bij de volgende basisoplossing ook groter dan de basiswaarde d_0 bij de aktuele basisoplossing,

want $\bar{d}_0 = d_0 - \dfrac{d_r}{a_{rs}} d_s$, met $b_r > 0$, $d_s < 0$ en $a_{rs} > 0$.

Tijdens het rekenproces vinden we een rij basisoplossingen waarvan de bijbehorende rij basiswaarden van w monotoon stijgt, omdat

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_i \left[\frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0\right] > 0.$$

We kunnen dus nooit meer dan één keer eenzelfde basis tegenkomen. Er is in de matrix echter maar een eindig aantal verschillende bases aanwezig. Onze rij van basisoplossingen is dus eindig. Voor de lengte van de rij kan men ook gemakkelijk een bovengrens aangeven.
Als het rekenproces stopt, hebben we hetzij de situatie

$$d_s < 0,\ a_{is} \leq 0 \text{ voor alle } i = 1,2,\ldots,m \rightarrow \text{oneindige oplossing},$$

hetzij de situatie

$$d_j \geq 0 \text{ voor alle } j = 1,2,\ldots,n \rightarrow \text{optimale basisoplossing}.$$

5.3. Vektor- en matrixnotatie voor de iteraties

De transformaties ("vegen"), zoals wij die bij de simplexiteraties uitvoeren, kunnen beschreven worden als resultaat van een links-vermenigvuldiging met een vierkante, niet-singuliere, matrix. "Vegen" we b.v. de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met als spil het element $a_{13} = 2$, dan *ontstaat* de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen we nu A links met de vierkante matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dan ontstaat B: $B = MA$. (Ga zelf na, hoe we M konstrueren: de eerste rij van A moet door 2 gedeeld worden, bij de tweede rij moet de eerste opgeteld worden, van de derde moet de eerste 2 maal afgetrokken worden.)

De transformatie is een basisovergang in de ruimte R^3 der kolommen van A. Iedere veegtransformatie kan weer gerepresenteerd worden door een nieuwe faktor links. Een aantal transformaties achter elkaar wordt dus ook door een links-vermenigvuldiging met een vierkante, niet-singuliere, matrix voorgesteld (het produkt van de faktoren die achtereenvolgens alle stappen representeren).

Passen we dit toe op onze simplexiteraties, dan moet opgemerkt worden, dat we het bovenste deel van de matrix (boven de streep) op de bovenbeschreven manier behandelen, maar de d-rij niet; die krijgt een aparte beschrijving. Nemen we nog eens ons voorbeeld, waarbij we starttableau en tweede tableau onder elkaar plaatsen:

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3		$\underline{c}_B$
objectrij $\underline{c}^T$	-1	-2	-1	2	-3	4		
tableau 1	1	0	0	-1	0	-2	5	-1
	0	1	0	2	-3	1	3	-2
	0	0	1	2	-5	6	5	-1
	0	0	0	-7	14	-10	-16	
tableau 2	1	0	1/3	-1/3	-5/3	0	20/3	-1
	0	1	-1/6	5/3	-13/6	0	13/6	-2
	0	0	1/6	1/3	-5/6	1	5/6	4
	0	0	5/3	-11/6	17/3	0	-23/3	

Tableau 2 (boven de streep) ontstaat uit tableau 1 (boven de streep) door links-vermenigvuldiging met

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

die we in tableau 2 onmiddellijk kunnen aflezen op de plaats waar in tableau 1 de eenheidsmatrix E stond, omdat immers M E = M.

In tableau 1 zijn de y_1-kolom, de y_2-kolom en de y_3-kolom de basis. We lezen hier af, dat de b-kolom = 5 (y_1-kolom) + 3 (y_2-kolom) + 4 (y_3-kolom).

Maar ditzelfde geldt in tableau 2 ook, alleen heten de kolommen hier anders. In tableau 2 zijn de y_1-kolom, de y_2-kolom en de x_3-kolom de basis (let op de volgorde!). Hier lezen we af:

$$\text{b-kolom} = 20/3\ (y_1\text{-kolom}) + 13/6\ (y_2\text{-kolom}) + 5/6\ (x_3\text{-kolom}).$$

(Dit geldt echter ook in tableau 1.) We noemen de deelmatrix van de startmatrix gevormd door deze basiskolommen (in de juiste volgorde) de aktuele basis B. Hier is

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Op de plaats waar B staat in de startmatrix, staat E in de aktuele matrix (tableau 2). Dit betekent, dat $M = B^{-1}$.

Door de iteratie gaan de beperkende vergelijkingen van het probleem

$$(E \quad A) \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \underline{b}$$

over in de vorm $(B^{-1} \quad B^{-1}A) \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = B^{-1}\underline{b}$.

Dit betreft het deel van het tableau boven de streep. Het gedeelte onder de streep, de d-rij wordt als volgt beschreven.

We stellen daartoe de hele objectrij als één vektor $\underline{c}^T$ voor. Met $\underline{c}^T\underline{x}$ symboliseren we de hele objectfunktie $\underline{q}^T\underline{y} + \underline{p}^T\underline{x}$; de nieuwe $\underline{x} \in R^{n+m}$ is dus de oude $\begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix}$.

We splitsen nu de bij het aktuele tableau behorende basisoplossing $\underline{x}$ in een aktuele $\underline{x}_B \in R^m$, samengesteld uit de basisvariabelen, waarvoor geldt: $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$, en een aktuele $\underline{x}_N \in R^n$, samengesteld uit de niet-basisvariabelen, waarvoor dus geldt: $\underline{x}_N = \underline{o}$. Overeenkomstig deze splitsing splitsen we ook $\underline{c}$ in een $\underline{c}_B \in R^m$, komponentsgewijs behorend bij $\underline{x}_B$, en $\underline{c}_N \in R^n$, behorend bij $\underline{x}_N$.

In het voorbeeld zijn bij beide tableau's de aktuele vektoren $\underline{c}_B$ rechts, op de juiste regels, bijgeplaatst.

De d-rij (een vektor in R^{n+m}) ontstaat nu door eliminatie van de basisvariabelen uit de beperkende vergelijkingen en de vergelijking

$$w - \underline{c}^T\underline{x} = 0.$$

(Bedenk dat de w in het tableau niet wordt opgenomen.)

Hieruit volgt voor j = 1,2,...,m+n:

$$d_j = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_{*j} - c_j$$

en voor j = 0:

$$d_0 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b}.$$

Na elke iteratie kan het tableau schematisch worden voorgesteld (weer in de oude $\underline{y}$ en $\underline{x}$ genoteerd):

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & \cdots & y_m & x_1 & \cdots & x_n \\ c_1 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n} \end{array}$$

$B^{-1}E$	$B^{-1}A$	$B^{-1}\underline{b}$
$\underline{c}_B^T B^{-1}(E \;\; A) - \underline{c}^T$		$\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}$

De aktuele basisoplossing luidt $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$, $\underline{x}_N = \underline{o}$, en de aktuele basiswaarde van w bedraagt $\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}$.
In ons voorbeeld is tableau 2 nog niet optimaal. We voeren nog een iteratie uit, met de omcirkelde 5/3 als spil. We vinden het optimale eindtableau:

		y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3		
	$\underline{c}^T$	-1	-2	-1	2	-3	4		$\underline{c}_B$
tableau 3		1	1/5	3/10	0	-21/10	0	71/10	-1
		0	3/5	-1/10	1	-13/10	0	13/10	2
		0	-1/5	2/10	0	-4/10	1	4/10	4
		0	11/5	13/10	0	9/10	0	-29/10	

De d-rij is nu niet-negatief. De aktuele basis is nu $(\underline{e}_1 \;\; \underline{a}_{*1} \;\; \underline{a}_{*3}) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ (zie tableau 1, op de plaats waar nu E staat).

Nu is

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & -1/10 \\ 0 & -1/5 & 2/10 \end{pmatrix},$$

te vinden in tableau 3 op de plaats waar in tableau 1 E stond.

Optimale oplossing:

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71/10 \\ 13/10 \\ 4/10 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_N = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

met de optimale waarde van het probleem

$$\underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} = -\ 29/10\ .$$

Opmerking. Door vermenigvuldiging met B^{-1} van het starttableau en omwerking van de d-rij krijgt men het eindtableau. In de praktijk komt het veel voor dat men een aantal L.P.-problemen bestudeert met dezelfde matrix maar met betrekkelijk geringe wijzigingen in b-kolom of objectfunktie. Men kan dan zonder opnieuw alle iteraties te herhalen onmiddellijk nagaan of het "vroegere" eindtableau ook optimaal is voor de gewijzigde gegevens; eventueel is nog een klein aantal iteraties nodig om dan een optimaal tableau te verkrijgen.

5.4. De lexicografische methode

Wanneer in de b-kolom een element 0 voorkomt heet de aktuele basisoplossing ontaard. Wordt dan een simplexiteratie voorbereid en een spil gezocht, dan kan het voorkomen dat bij een positief element a_{is} in de spilkolom een getal $b_i = 0$ behoort, waarvoor dan $\min\limits_i \left[\frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0\right] = 0$ is. Zo'n a_{is} wordt dan als spil a_{rs} gekozen.

Bij de daaropvolgende simplexiteratie zal de basiswaarde d_0 niet veranderen, immers $\bar{d}_0 = d_0 - \frac{d_s}{a_{rs}} b_r$.

Het convergentiebewijs van de algoritme in een eindig aantal stappen mislukt in dit geval. De stelling is dan ook niet juist. Er zijn voorbeelden gekonstrueerd waarbij de simplexalgoritme, uitgevoerd volgens de ingevoerde regels, gaat cykelen; d.w.z. na een aantal iteraties komen we weer terug in eenzelfde tableau als we al eens eerder hebben gehad. (N.B. De computer merkt dit cykelen niet.)

Voorbeeld van cykelen.

$$\max\left\{\frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \le 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \le 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0 \text{ voor } j = 1,2,3,4 \end{array}\right\}$$

Keuzeregel voor spilkolom: bepaal min $[d_j \mid j = 1,2,\ldots,7]$ en kies voor s de kleinste index j waarvoor dit minimum wordt aangenomen.

Keuzeregel voor spilrij : bepaal min $[\frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0]$ en kies voor r de kleinste index i waarvoor dit minimum wordt aangenomen.

Na zes iteraties is het aktuele tableau identiek aan het starttableau:

Opmerking. Het is niet eenvoudig om een voorbeeld van cykelen te konstrueren. In de praktijk heeft een L.P.-probleem nog nooit tot cykelen aanleiding gegeven.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
c-rij	$\frac{3}{4}$	-150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0	
starttableau tableau 1	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1			0
	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3		1		0
	0	0	1	0			1	1
d-rij	$-\frac{3}{4}$	150	$\frac{1}{50}$	6	0	0	0	0
tableau 2	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4			0
		30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1		0
		0	1	0	0		1	1
	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	0
tableau 3	1		$\frac{8}{25}$	-84	-12	8		0
		1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$		0
			1	0	0	0	1	1
	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	0
tableau 4	$\frac{25}{8}$		1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25		0
	$-\frac{1}{160}$	1		$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$		0
	$-\frac{25}{8}$			$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	1
	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
c-rij	$\frac{3}{4}$	-150	$\frac{1}{50}$	-6	0	0	0	
tableau 5	$-\frac{125}{2}$	10.500	1		50	-150		0
	$-\frac{1}{4}$	40		1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		0
	$\frac{125}{2}$	$-$ 10.500			-50	150	1	1
	$-\frac{1}{2}$	$+120$			-1	1	0	0
tableau 6	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$		1	-3		0
	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1		$\frac{1}{3}$		0
	0	0	1			0	1	1
	$-\frac{7}{4}$	330	$-\frac{1}{50}$			-2		0
tableau 7 identiek met starttableau	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1			0
	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3		1		0
	0	0	1	0			1	1
	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	0

Voortzetting van de berekening leidt weer tot dezelfde rij van tableau's als hierboven reeds verkregen: de algoritme is in een kringloop terecht gekomen zonder dat een optimaal tableau verkregen is. Steeds bevat de d-rij ten minste één negatief element bij een kolom waarin ten minste één positief element voorkomt.

We definiëren een <u>lexicografische ordening</u> voor vektoren uit eenzelfde R^n. Zijn $\underline{a}$ en $\underline{b}$ twee vektoren in R^n dan heet $\underline{a}$ lexicografisch kleiner dan $\underline{b}$ ($\underline{b}$ lexicografisch groter dan $\underline{a}$), geschreven $\underline{a} \overset{\text{lex}}{<} \underline{b}$, indien er een i uit $\{1,2,\ldots,n\}$ is waarvoor geldt:

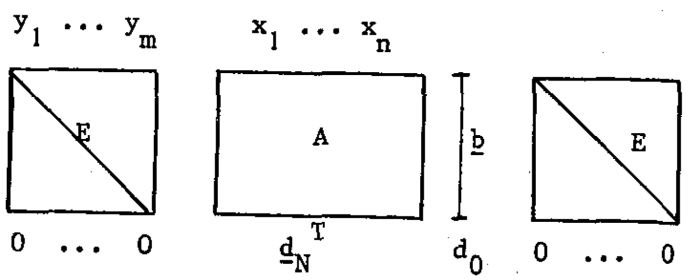
$$a_k = b_k \text{ voor } k < i, \text{ en } a_i < b_i.$$

Bestaat een dergelijke i niet, dan zijn $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gelijk: $\underline{a} = \underline{b}$, en ook lexicografisch gelijk: $\underline{a} \overset{\text{lex}}{=} \underline{b}$.

Voorbeeld:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}; \; a_1 = b_1,\; a_2 = b_2,\; a_3 < b_3 \text{ dus } \underline{a} \overset{\text{lex}}{<} \underline{b}.$$

We zullen aantonen hoe men met dit begrip een wijziging in de algoritme kan aanbrengen, met name bij de keuze van de spilrij, waardoor de mogelijkheid van cykelen wordt uitgesloten en waardoor de simplexalgoritme ook konvergeert (in een eindig aantal stappen) bij degeneratie.
We voegen aan het starttableau rechts naast de b-kolom een nieuwe (m,m)-eenheidsmatrix toe en rechts naast d_0 een $\underline{o}^T$ in R^m:



De rechts ontstane matrix noemen we de hulpmatrix H:

$$H = \left[\begin{array}{c|ccc} b_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_m & & & 1 \\ \hline d_0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

De matrix H zal met de veegoperaties van de iteraties meebehandeld worden, zodat we steeds over de aktuele H kunnen psreken. Bij de start heeft H de vorm als hierboven aangegeven. De <u>rijen</u> van H zullen worden aangeduid als $\underline{h}_1^T, \underline{h}_2^T, \ldots, \underline{h}_m^T$ en de onderste als $\underline{h}_0^T$.

We kunnen dan opmerken:

1. Voor $i = 1,2,\ldots,m$ geldt: $\underline{h}_i^T \overset{lex}{>} \underline{o}^T$.
2. De rijen $\underline{h}_1^T,\ldots,\underline{h}_m^T$ zijn lineair onafhankelijk, ofwel: de rang van de deelmatrix ($\underline{b}$ E) van H bedraagt m. Na een aantal iteraties gaat deze deelmatrix over in een matrix die geschreven kan worden ($B^{-1}\underline{b}$ B^{-1}), waarbij B^{-1} niet-singulier is. De lineaire onafhankelijkheid van de rijen $\underline{h}_1^T,\ldots,\underline{h}_m^T$ blijft dus bij de iteraties gehandhaafd: de rang blijft m.
3. Uit 2 volgt, dat nooit een rij $\underline{h}_i$ ($i = 1,2,\ldots,m$) gelijk kan worden aan $\underline{o}^T$.

Het gaat er nu om, een spil te vinden in de kolom $\underline{a}_{*s}$ (die op de gewone manier gevonden is) zo, dat voor $i = 1,2,\ldots,m$ blijft gelden: $\underline{h}_i^T \overset{lex}{>} \underline{o}^T$.
De spilrij wordt nu zo bepaald, dat voor $i = 1,2,\ldots,m$ alle rijvektoren $\underline{h}_i^T$ lexicografisch positief <u>blijven</u> (vroeger: alle b_i positief). (Zie 1.)

In de zg. *lexicografische simplexmethode* kiezen we nu r zo, dat

$$\frac{\underline{h}_r}{a_{rs}} = \underset{i}{\text{lexmin}} \left[\frac{\underline{h}_i}{a_{is}} \;\middle|\; a_{is} > 0\right].$$

(lexmin := lexicografisch minimum.)

Na de transformatie wordt de aktuele H:

$$\bar{\underline{h}}_i = \underline{h}_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}}\underline{h}_r \quad \text{voor alle } i \neq r,\ i \neq 0;$$

$$\bar{\underline{h}}_r = \frac{\underline{h}_r}{a_{rs}};$$

$$\bar{\underline{h}}_0 = \underline{h}_0 - \frac{d_s}{a_{rs}}\underline{h}_r .$$

Ga na, dat nu inderdaad voor $i = 1,2,\ldots,m$ geldt dat $\bar{\underline{h}}_i \overset{lex}{>} \underline{o}$ is. Ga ook na, waarom bij deze methode geen dubbelzinnigheid in de keuze van r optreedt.
Wij definiëren $\underline{h}_0^T$ als de basiswaarde van de objektfunktie bij de nieuwe methode.
Omdat bij elke iteratie $d_s < 0$, $a_{rs} > 0$, $\underline{h}_r \overset{lex}{>} \underline{o}$, stijgt de basiswaarde strikt lexicografisch. Hierdoor kan eenzelfde basis tijdens de algoritme niet meer dan één keer voorkomen. Daar weer het totaal aantal mogelijke bases eindig is (er is immers een eindig aantal kolomvektoren), leidt de boven voorgestelde lexicografische keuzeprocedure voor r tot een simplexalgoritme dat in een eindig aantal stappen levert: hetzij een optimale oplossing (met

als optimale waarde het aktuele element d_0, eerste element van $\underline{h}_0$), hetzij een uitspraak dat het probleem een zg. oneindige oplossing toelaat (evenals vroeger).

Vervolg voorbeeld.

Bij de onderstaande tableau's wordt de lexicografische methode toegepast op ons voorbeeld van cykelen.

Keuzeregel voor spilkolom: bepaal min $[d_j \mid j = 1,\ldots,7]$. Kies voor s de kleinste index j waarvoor dit minimum wordt aangenomen.

Keuzeregel voor spilrij : bepaal $\underset{i}{\text{lexmin}} \left[\frac{\underline{h}_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0\right]$; r is dan de (eenduidig bepaalde) index i waarvoor dit lexicografisch minimum wordt aangenomen.

De rij $\underline{h}_0^T$ is lexicografisch stijgend; hij is achtereenvolgens:

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$(0 \quad 0 \quad \tfrac{3}{2} \quad 0),$$

$$(\tfrac{1}{20} \quad 0 \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{20}).$$

Na twee iteraties is de aktuele basisoplossing optimaal.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3		H		
c-rij	$\frac{3}{4}$	-150	$+\frac{1}{50}$	-6	0	0	0				
start-tableau	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1			0	1		
	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3		1		0		1	
	0	0	1	0			1	1			1
	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	0	0	0	0
		-15	$-\frac{3}{100}$	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$		0	1	$-\frac{1}{2}$	
	1	-180	$-\frac{1}{25}$	6		2		0		2	
		0	1	0		0	1	1		0	1
	0	15	$-\frac{1}{20}$	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0
eind-tableau		-15		$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$
	1	-180		6		2	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$		2	$\frac{1}{25}$
		0	1	0		0	1	1		0	1
	0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{20}$

Het simplextableau is ten slotte optimaal wegens $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$. Optimale oplossing: $x_1 = \frac{1}{25}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, met de optimale waarde $\frac{1}{20}$.

5.5. Alternatieve oplossingen

Wij hebben gezien dat een optimale oplossing is bereikt, als $d_j \geq 0$ voor alle j. Indien wij nu een $d_s = 0$ vinden onder een kolom s die niet tot de aktuele basis behoort, dan zouden wij deze kolom in de basis kunnen brengen. De nieuwe basiswaarde $\bar{d}_0$ zal dan gelijk blijven aan de vorige d_0, omdat

$$\bar{d}_0 = d_0 - \frac{b_r}{a_{rs}} d_s \text{ , met } d_s = 0.$$

De nieuwe basisoplossing geeft dezelfde basiswaarde en is dus ook optimaal, een zg. alternatieve (optimale) basisoplossing.
Dit in de basis brengen van de kolom $\underline{a}_{*s}$ lukt alleen als er in deze kolom een spil $a_{rs} > 0$ gevonden kan worden. Zijn alle $a_{is} \leq 0$, dan gaat dat niet, maar ook dan zijn er alternatieve optimale oplossingen.
Om het antwoord te vinden op de vraag, hoe we alle alternatieve (optimale) oplossingen vinden, gaan we uit van het optimale tableau (dus $\underline{b} \geq \underline{o}$ en $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$):

$y_1 \dots y_m$	$x_1 \dots x_k$	$x_{k+1} \dots x_n$	
			b_1 $\vdots$ b_m
$0 \dots 0$	$0 \dots 0$	$d_{k+1} \dots d_n$	d_0

met $d_{k+1} > 0, \dots, d_n > 0$. De objectfunktie w is hier terug te lezen uit de onderste regel van het tableau:

$$w + d_{k+1}x_{k+1} + \dots + d_n x_n = d_0 \text{ of}$$

$$w = d_0 - d_{k+1}x_{k+1} - \dots - d_n x_n \text{ .}$$

Dit geldt voor elke toegelaten oplossing. Is er dus een alternatieve oplossing, d.w.z. een oplossing waarin een x-variabele een waarde $\neq 0$ heeft, dan kan dat alleen het geval zijn met een van de variabelen $x_1,\dots,x_k$, omdat voor elke toegelaten oplossing voor alle variabelen de eis $x_j \geq 0$ geldt.
Een kolom $\underline{a}_{*s}$ met $d_s = 0$ in een optimaal tableau noemen we een kandidaatkolom (kandidaat om in de basis gebracht te worden). Merk op dat na de simplexiteratie die dat eventueel doen zal, de d-rij niet verandert: alle

nullen blijven daarin staan. De basiskolom waartegen de kandidaat dan geruild wordt, wordt dan weer kandidaatkolom.
Er zijn drie mogelijkheden:

1. Er is in de kandidaatkolom een spil $a_{rs} > 0$, maar de bijbehorende $b_r = 0$. De nieuwe oplossing is dan geen echt nieuwe oplossing: een basisvariabele met waarde 0 wordt verwisseld met een niet-basisvariabele met waarde 0. Toch is het wel een andere basisoplossing!

2. Er is in de kandidaatkolom een spil $a_{rs} > 0$, met $b_r \neq 0$. Er wordt nu een andere oplossing gevonden.

3. Er is in de kandidaatkolom geen spil $a_{rs} > 0$ voorhanden. Er is nu als het ware een basisoplossing "naar oneindig verdwenen". Toon zelf aan, dat in dit geval voor elke $\theta \geq 0$ de oplossing

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_1 - \theta\, a_{1s} \\
y_2 &= b_2 - \theta\, a_{2s} \\
&\vdots \\
y_m &= b_m - \theta\, a_{ms} \\
x_s &= \theta, \text{ alle overige } x_j = 0
\end{aligned}
$$

toegelaten en optimaal is.
We vinden hieruit een halfrechte van alternatieve (niet-basis) oplossingen.

Zijn er meerdere $d_j = 0$ onder niet-basiskolommen, dan kunnen bovenstaande gevallen in kombinaties voorkomen. Treedt geval 3 hierbij op, dan moeten we elke basisoplossing (geval 1 of geval 2) met elke kolom bij geval 3 kombineren. We gaan daarop niet algemeen in; zie het voorbeeld.
Door alle mogelijke kombinaties van m kandidaatkolommen af te gaan vinden we alle mogelijke alternatieve basisoplossingen en alle oneindige richtingen van alternatieve oplossingen. We bewijzen dit niet volledig. Aan het slot van hoofdstuk 3 bewezen we, dat de verzameling van optimale oplossingen van een L.P.-probleem een konvex veelvlak is. Dit konvexe veelvlak wordt dan beschreven als de vektorsom van een begrensd konvex veelvlak en een konvexe kegel; dat zijn hier het konvex omhulsel van de gevonden alternatieve basisoplossingen en de konvexe kegel, opgespannen door de extreme halfrechten van alternatieve oplossingen.

Voorbeeld. Probleem:

$$\max\left\{x_1 - x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \quad - x_3 \le 2; \\ \quad x_2 - x_3 \le 3 \end{array} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \right\}.$$

Oplossing met simplexmethode:

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	
	0	0	1	0	-1	
starttableau	1		1	0	-1	2
		1	0	1	-1	3
			-1	0	1	0
eindtableau	1		1	0	-1	2
	0	1		1	-1	3
	1			0	0	2

Optimaal tableau; optimale oplossing: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
y_2 en x_1 zijn basisvariabelen. Kandidaatkolommen zijn de x_2-kolom en de x_3-kolom. De x_2-kolom kan in de basis gebracht worden en geeft de nieuwe basisoplossing (nagaan!) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. De x_3-kolom kan niet in de basis gebracht worden; we vinden de twee extreme halfrechten
$y_1 = 0$, $y_2 = 3 + \theta$, $x_1 = 2 + \theta$, $x_2 = 0$, $x_3 = \theta$, voor $\theta \ge 0$, uitgaande van de eerstgevonden optimale basisoplossing, en (nagaan!)
$y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = 2 + \theta$, $x_2 = 3 + \theta$, $x_3 = \theta$, voor $\theta \ge 0$, uitgaande van de tweede basisoplossing. Brengen we ze terug naar de R^3 waarin de opgave gesteld is, dan vinden we resp.: $\underline{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\underline{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;
in beide gevallen $\theta \ge 0$.

De konvexe verzameling van optimale oplossingen is nu:

$$\{\underline{x} \mid \underline{x} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1;\ \mu_1 \ge 0,\ \mu_2 \ge 0\}.$$

(Konvex kombineren van de alternatieve basisoplossingen en niet-negatief kombineren van de halfrechten van alternatieve oplossingen.)
Schets een stereometrische figuur bij dit voorbeeld!

5.6. Een technische toepassing

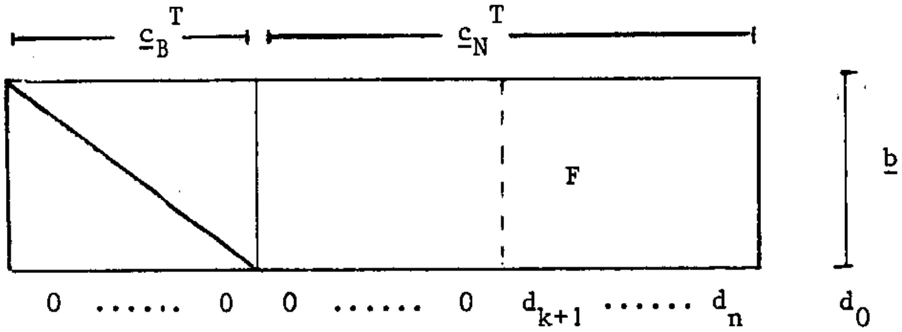
Een mogelijke toepassing van alternatieve optimale oplossingen is het volgende. Bij een olieraffinaderij wordt geëist, dat eerst de hoeveelheid kerosine wordt gemaximaliseerd en dat vervolgens van het residu de hoeveelheid gasolie wordt gemaximaliseerd.
Stel dat voor de eerste eis het L.P.-probleem

$$\max \{w_1 = \underline{c}^T \underline{x} \mid A\,\underline{x} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\} \tag{1}$$

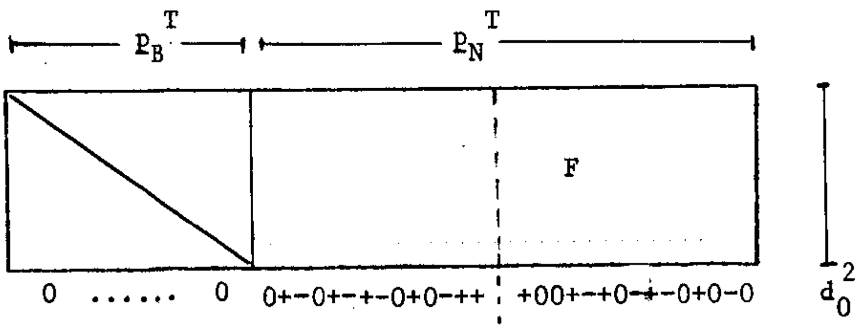
is opgelost. Voor het tweede moet dan een andere objectfunktie gemaximaliseerd worden: we moeten oplossen

$$\max \{w_2 = \underline{p}^T \underline{x} \mid A\,\underline{x} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o};\ \underline{c}^T \underline{x} \text{ is reeds maximaal}\}. \tag{2}$$

Dit betekent, dat wij $\underline{p}^T \underline{x}$ moeten maximaliseren over de verzameling van alternatieve optimale oplossingen van (1). In tableauvorm:
Eindtableau van (1):



met $\underline{d}^T = \underline{c}_B^T A - \underline{c}^T$; bij het maximaliseren van $\underline{p}^T \underline{x}$ mogen we alleen die kolommen gebruiken die in het bovenstaande tableau kandidaatkolommen zijn. De variabelen $x_{k+1}, \ldots, x_n$ moeten 0 blijven, want de gelijkheid $w_1 + d_{k+1}\, x_{k+1} + \ldots + d_n x_n = d_0$ moet blijven gelden. Voldoende om dit te bereiken is, de kolommen van F voor de spilkolomkeuze te blokkeren. Het starttableau voor probleem (2) kan dan voorgesteld worden door:



waarbij $\underline{d}_2^T = \underline{p}_B^T A - \underline{p}^T$.

De d_2-rij kan positieve, negatieve en nul-elementen bevatten; de negatieve onder de matrix F zullen nooit aanleiding geven tot keuze van de bijbehorende kolom als spilkolom. In het eindtableau van probleem (2) is het deel van $\underline{d}_2^T$ links van de stippellijn niet-negatief. Wat er rechts van de stippellijn in $\underline{d}_2^T$ staat, interesseert ons niet meer.

5.7. Tweefasenmethode

Voor toepassing van de simplexalgorithme is het noodzakelijk dat de matrix A van de coëfficiënten der restrikties een (m,m)-eenheidsmatrix bevat en dat de b-kolom niet-negatief is. Staat ons probleem in standaardvorm II, met de beperkingen in de vorm $A\,\underline{x} \le \underline{b}$, $\underline{b} \ge \underline{o}$, dan bereiken we dat direkt door niet-negatieve restvariabelen toe te voegen: standaardvorm III, met $A\,\underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$, $\underline{b} \ge \underline{o}$.

Staat het probleem niet in de gewenste gemakkelijke vorm, dan moet een hulpmiddel toegepast worden. Stel we hebben een L.P.-probleem, waarvan de restrikties gegeven zijn in algemene vorm. Maak nu eerst de b-kolom niet-negatief; dan ontstaan er drie soorten beperkingen:

$$A_1\underline{x} \le \underline{b}_1, \quad \underline{b}_1 \ge \underline{o},$$
$$A_2\underline{x} = \underline{b}_2, \quad \underline{b}_2 \ge \underline{o},$$
$$A_3\underline{x} \ge \underline{b}_3, \quad \underline{b}_3 \ge \underline{o}.$$

Vervolgens gaan wij restvariabelen $\underline{y}_i$ toevoegen om de ongelijkheden om te zetten in gelijkheden:

$$\begin{aligned} A_1\underline{x} \quad\quad + \underline{y}_1 &= \underline{b}_1 \\ A_2\underline{x} \quad\quad\quad\quad &= \underline{b}_2 \\ A_3\underline{x} - \underline{y}_3 \quad\quad &= \underline{b}_3 . \end{aligned}$$

Het tableau van deze vergelijkingen zal nog geen eenheidsmatrix bevatten, zodat de simplexmethode niet toepasbaar is.

Om toch een eenheidsmatrix E in het tableau te krijgen voegen wij "artificial slacks" $\underline{z}_i$ toe op de plaatsen, waar nog geen eenheidskolommen staan:

$$\begin{array}{llllll} A_1\underline{x} & & + \underline{y}_1 & & & = \underline{b}_1 \\ A_2\underline{x} & & & + \underline{z}_2 & & = \underline{b}_2 \\ A_3\underline{x} & - \underline{y}_3 & & & + \underline{z}_3 & = \underline{b}_3 \; . \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{E}$$

Voor de optimale oplossing moet uiteraard gelden: $\underline{z}_2 = \underline{o}$ èn $\underline{z}_3 = \underline{o}$, omdat anders niet aan de beperkingen voldaan wordt.
De variabelen z_i heten daarom ook wel <u>nulvariabelen</u>.
De aktuele basisoplossing van bovenstaand stelsel is:

$$\begin{array}{l} \underline{y}_1 = \underline{b}_1 \\ \underline{z}_2 = \underline{b}_2 \\ \underline{z}_3 = \underline{b}_3 \; , \end{array}$$

$$\underline{x} = \underline{o}, \; \underline{y}_3 = \underline{o} \; .$$

Het betreffende L.P.-probleem wordt nu in twee fasen opgelost. In fase I wordt een toegelaten oplossing gezocht waarbij de nulvariabelen z_i de waarde 0 aannemen. Lukt dat, dan wordt in fase II het eigenlijke probleem opgelost, waarbij de z_i hun waarde 0 behouden.
We veronderstellen nu dat ons L.P.-probleem gebracht is in de vorm

$$\begin{array}{l} \max\ (\underline{c}^T\underline{x}) \text{ onder de voorwaarden} \\ A\,\underline{x} + E'\underline{y} + E''\underline{z} = \underline{b} \; , \\ \underline{x} \geq \underline{o}, \; \underline{y} \geq \underline{o}, \; \underline{z} \geq \underline{o} \; , \\ \text{met } \underline{b} \geq \underline{o} \; , \end{array}$$

waarin E' een diagonaalmatrix voorstelt met op de diagonaal de elementen 1, 0 of -1, en E" een diagonaalmatrix met op de diagonaal de elementen 1 of 0.
In fase I wordt nu het hulpprobleem opgelost:

$$\max\ \{-\underline{e}^T\underline{z} \mid A\,\underline{x} + E'\underline{y} + E''\underline{z} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o};\ \underline{y} \geq \underline{o};\ \underline{z} \geq \underline{o}\} \; ,$$

waarbij $-\underline{e}^T\underline{z} = -z_1 - z_2 - \ldots - z_m$ beduidt.
Heeft dit hulpprobleem het maximum 0, dan vinden we in het eindtableau van fase I een <u>toegelaten basisoplossing</u> van ons probleem. Het eindtableau van fase I wordt nu starttableau voor fase II, waarbij de oorspronkelijke objectfunktie wordt geoptimaliseerd over de <u>alternatieve optimale oplossingen</u> van het hulpprobleem.

Voorbeeld. Gevraagd:

$$\max \left\{ w = 4x_1 - 2x_2 - x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ll} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \le 25; & x_1 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8; & x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 18; & x_3 \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Het probleem is niet zonder meer in standaardvorm III met $\underline{b} \ge \underline{o}$ te brengen; we hebben twee nulvariabelen nodig.

Fase I: Los op het hulpprobleem: max $(w^* = -z_2 - z_3)$ onder dezelfde voorwaarden als het gestelde probleem.

	x_1	x_2	x_3	y_1	z_2	y_3	z_3	
$\underline{c}^{*T}$	0	0	0	0	-1	0	-1	
$\underline{c}_B^*$:								
0	2	-3	-1	1		0		25
-1	1	2	-3		1	0		8
-1	2	1	-4			-1	1	18
$\underline{d}^{*T}$	-3	-3	7			1		-26

	x_1	x_2	x_3	y_1	z_2	y_3	z_3	
		-7	5	1	-2	0		9
	1	2	-3		1	0		8
		-3	2		-2	-1	1	2
		3	-2		3	1		-2

	x_1	x_2	x_3	y_1	z_2	y_3	z_3	
$\underline{c}^{T}$	4	-2	-1	0	0	0	0	
$\underline{c}_B$:								
0		½		1	3	2½	-2½	4
4	1	-2½			-2	-1½	1½	11
-1		-1½	1		-1	-½	½	1
$\underline{d}^{*T}$		0			1	0	1	0
$\underline{d}^{T}$		-6½			-7	-5½	5½	43

Nu is max $[-z_2 - z_3] = 0$. Deze waarde wordt aangenomen voor de toegelaten oplossing $x_1 = 11$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Het eindtableau van fase I kan nu als starttableau dienen voor fase II, waarin met de simplexmethode het maximum gezocht wordt van $\underline{c}^T\underline{x} = 4x_1 - 2x_2 - x_3$, over de verzameling van alternatieve optimale oplossingen van het hulpprobleem. We plaatsen de nieuwe objectrij $\underline{c}^T$ boven het tableau, bepalen $\underline{c}_B$ en $\underline{d}^T$. Bij dit laatste blokkeren we de kolommen onder een $d_j^* > 0$ ten opzichte van de keuze van een spilkolom. We hebben daarvoor onder het tableau een kruis geschreven. De betreffende kolommen mogen niet meer als spilkolom gekozen worden. Letten we nl. nog eens op de betekenis van de d^*-rij: $w^* + \underline{d}^{*T} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} = 0$. Dit moet blijven gelden voor de gevraagde eindoplossing, waarin alle variabelen niet-negatief zijn. Dus moeten de variabelen met positieve coëfficiënt in deze uitdrukking 0 blijven; en dat lukt door ze niet-basisvariabelen te laten blijven.
De kolommen zelf kunnen we wel in de iteratie mee betrekken; dan bevat de matrix steeds de aktuele B^{-1} uitgaande van de oorspronkelijke startmatrix. Na nog een iteratie is fase II in ons voorbeeld ten einde: het maximum 95 wordt bereikt voor de optimale basisoplossing: $x_1 = 31$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$.
Eindtableau:

	x_1	x_2	x_3	y_1	z_2	y_3	z_3	
		1		2	6	5	-5	8
	1			5	13	11	-11	31
			1	3	8	7	-7	13
$\underline{d}^T$				13	32	27	-27	95
					X		X	

<u>Opmerking</u>. Dikwijls, zoals ook in bovenstaand voorbeeld, zijn de kolommen met positieve d_j^* juist de z_i-kolommen, d.w.z. de kolommen onder de nulvariabelen. Dan zijn de z_i nul geworden als nietbasisvariabelen in fase I. Maar dat hoeft niet: ze kunnen ook nul worden als basisvariabelen; in dat geval staan de positieve elementen d_j^* deels ook onder andere kolommen dan z_i-kolommen. Overigens verloopt fase II dan precies zo als hierboven beschreven: de kolommen bij een positieve d_j^* blijven geblokkeerd voor de keuze van de spilkolom voor een iteratie.

Samenvatting.

Beschouw nog eens het originele probleem

$$\max \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A_1\underline{x} \le \underline{b}_1;\ A_2\underline{x} = \underline{b}_2;\ A_3\underline{x} \ge \underline{b}_3;\ \underline{x} \ge \underline{o}\} \qquad \text{(I)}$$

en het hulpprobleem

$$\max \{-\underline{e}^T\underline{z} \mid A\underline{x} + E'\underline{y} + E''\underline{z} = \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o},\ \underline{y} \ge \underline{o},\ \underline{z} \ge \underline{o},\ \underline{b} \ge \underline{o}\} \quad \text{(II)}$$

waarbij $\underline{y}$ de gewone restvariabelen en $\underline{z}$ de kunstmatige restvariabelen (nulvariabelen) voorstelt. Dan geldt:

1. Als er een toegelaten oplossing $\hat{\underline{x}}$ bestaat van I, dan is er ook een toegelaten oplossing $(\hat{\underline{x}}\ \ \hat{\underline{y}}\ \ \hat{\underline{z}})$ van II met $\hat{\underline{z}} = \underline{o}$, waarvoor dus $\max\ [-\underline{e}^T\underline{z}] = 0$.

2. Als II een optimale oplossing $(\hat{\underline{x}}\ \ \hat{\underline{y}}\ \ \hat{\underline{z}})$ heeft met $\max\ [-\underline{e}^T\underline{z}] = 0$, dan impliceert dit $\hat{\underline{z}} = \underline{o}$, zodat dan die bijbehorende $\hat{\underline{x}}$ een toegelaten oplossing is van I.

3. Heeft II een optimale oplossing met $\max\ [-\underline{e}^T\underline{z}] < 0$, dan heeft I geen toegelaten oplossing: de voorwaarden voor I zijn strijdig.

4. Heeft II een optimale oplossing met $\underline{z} = \underline{o}$, dan lossen we probleem I op in een tweede fase, over de verzameling van alternatieve optimale oplossingen van II. Dit leidt dan in een eindig aantal stappen (eventueel met behulp van de lexicografische methode), hetzij tot een optimale oplossing voor I, hetzij tot een aanwijzing dat I een oneindige oplossing toelaat.

Meetkundige interpretatie

Tijdens de eerste fase van de tweefasenmethode zijn de aktuele basisoplossingen, voordat het hulpprobleem het optimum 0 bereikt heeft, niet-toegelaten. Deze basisoplossingen kunnen dus geen hoekpunten zijn van het toegelaten gebied G in de R^n waar het probleem is gegeven. Het zijn wel snijpunten van (minstens) n hypervlakken met lineair onafhankelijke gradiënten die mede G bepalen. Bij elke iteratie verspringt de basisoplossing naar een "naburig" snijpunt, totdat, indien $\max\ [-\underline{e}^T\underline{z}] = 0$, een hoekpunt van G bereikt wordt.

5.8. Opgaven

5.8.1.

Bepaal met behulp van de simplexmethode

$$\max \left\{ x_0 = 2x_1 + 5x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 400 \\ 0 \le x_2 \le 300 \\ x_1 \quad x_2 \le 600 \end{array} \right\}.$$

a) Stel het starttableau op en bepaal de twee elementen a_{rs} die als eerste spil kunnen dienen.
Voer de berekening uit voor elk van de beide mogelijkheden. Schrijf in het begin en na elke stap de basisoplossing op.

b) Teken in R^2 het door de beperkingen gedefinieerde gebied en los het vraagstuk grafisch op. Geef in de figuur de punten aan die corresponderen met de in a) gevonden basisoplossingen.

c) Teken een stereometrische figuur in R^3; x_1-as en x_2-as in het horizontale vlak, x_0-as vertikaal. Teken de doorsnijding van de prismatische figuur bepaald door de beperkingen, met het vlak $x_0 = 2x_1 + 5x_2$. (Neem de schaal in de x_0-richting kleiner dan die in de x_1- en x_2-richting.) Geef in de figuur de punten aan die corresponderen met de in a) gevonden basisoplossingen.

5.8.2.

Gevraagd het maximum van $x_0 = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ onder de beperkingen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\le 8 \\ x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 10\,, \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3\,. \end{aligned}$$

5.8.3.

a) Gegeven is het simplextableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	0	1	2	-1	0	8
-1	1	0	1	4	0	3
2	0	0	-3	0	1	4
7	0	0	0	5	0	16

Welk L.P.-probleem kan dit voorstellen?
Toon aan dat er meer dan één optimale oplossing is. Geef een parametervoorstelling voor alle optimale oplossingen.

b) Dezelfde vragen voor het simplextableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	0	1	-2	-1	0	8
-1	1	0	-1	4	0	3
2	0	0	-3	0	1	4
7	0	0	0	5	0	16

5.8.4.

Gegeven is het L.P.-probleem:

$$\max\left\{ x_1 + 2x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_3 \le 14 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{array} \right\}.$$

a) Voeg restvariabelen en nulvariabelen toe en bepaal met de simplexmethode en een geschikt gekozen hulpobjektfunktie een basisoplossing van het ontstane stelsel vergelijkingen zodanig, dat de nulvariabelen hierbij de waarde 0 aannemen.

b) Stel een starttableau op voor het oplossen van het gevraagde probleem met de simplexmethode, uitgaande van de onder a) gevonden basisoplossing. Bepaal hierbij de nieuwe d-rij bijv. volgens de formules

$$d_j = \bar{p}_B\, B^{-1}\, \underline{a}_{*j} - p_j \;.$$

5.8.5.

Gegeven is het L.P.-probleem

$$\max\left\{ 2x_1 - x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 - x_2 \le -1 \\ 3x_1 - x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}.$$

a) Maak de b-kolom positief, voeg restvariabelen toe om de ongelijkheden in vergelijkingen om te zetten, en breng een eenheidsmatrix in de matrix aan door nulvariabelen toe te voegen.
Los het probleem op met de tweefasenmethode.

b) Teken een figuur in R^2 van het gebied, dat door de gegeven ongelijkheden wordt bepaald. Teken de vektor (2,-1). Los het gegeven vraagstuk grafisch op. Markeer vervolgens de punten die behoren bij de basisoplossingen, die men tijdens de berekeningen onder a) achtereenvolgens heeft gevonden.

5.8.6.

Toon aan, dat er geen getallen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ bestaan die tegelijkertijd aan de volgende ongelijkheden voldoen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\leq -10 \\ 4x_1 + x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 8 \;. \end{aligned}$$

5.8.7.

Los op het L.P.-probleem:

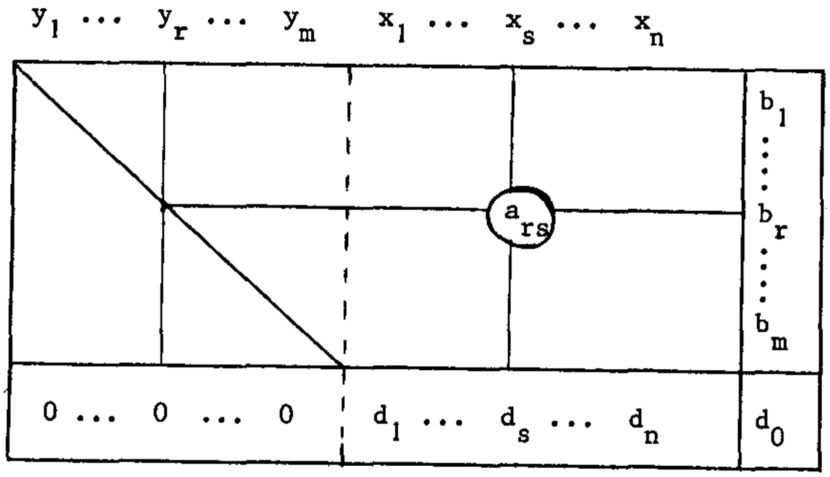
$$\max\left\{ 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 5x_5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \leq 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_5 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array} \right\}.$$

Merk op dat de hulpobjektfunktie optimaal wordt terwijl nog een nulvariabele (op niveau 0) basisvariabele is.

6. De duale simplexmethode

6.1. Algemeen geval: geen duale degeneratie

Is gegeven een simplextableau



dan kan in principe met elk element $a_{rs} \neq 0$ als spil een simplexiteratie uitgevoerd worden. Door de keuze van a_{rs} zoals die in de tot nu toe gebruikte simplexmethode gebeurde, wordt er bovendien steeds voor gezorgd dat geldt:

1. voor en na elke iteratie is $\underline{b} \geq \underline{o}$,
2. bij elke iteratie stijgt de basiswaarde d_0, althans daalt d_0 niet.

Bij een willekeurige keuze van $a_{rs} \neq 0$ verliezen we in het algemeen deze systematische regels. Er is van alles mogelijk. Bij het voorbeeld

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	2	-3	7
0	1	0	-2	4	-3
0	0	1	-1	3	-2
0	0	0	3	-5	18

is noch $\underline{b} \geq \underline{o}$, noch $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$. Het tableau stelt het L.P.-probleem voor:

$$\max \left\{ -3x_4 + 5x_5 + 18 \;\middle|\; \begin{array}{ll} 2x_4 - 3x_5 \leq 7 \;; & x_4 \geq 0 \\ -2x_4 + 4x_5 \leq -3; & x_5 \geq 0 \\ -x_4 + 3x_5 \leq -2 & \end{array} \right\}.$$

De aktuele basisoplossing is niet optimaal maar ook niet toegelaten. Na een spiloperatie met $a_{34} = -1$ als spil vinden we in eens een optimaal tableau met een toegelaten optimale basisoplossing:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	0	3	3
0	1	-2	0	-2	1
0	0	-1	1	-3	2
0	0	3	0	4	12

Er is nog een tweede methode in gebruik die systeem brengt in de keuze van de spil en die de duale simplexmethode genoemd wordt. Ter onderscheiding hiervan heet de eerder genoemde methode de primale simplexmethode.

Wij hebben met 4 mogelijkheden te doen:

1. $\underline{b} \geq \underline{o}$ en $\underline{d} \geq \underline{o}$, dan is het tableau optimaal;
2. $\underline{b} \geq \underline{o}$ en enkele $d_j < 0$, dan de primale simplexmethode toepassen;
3. enkele $b_j \leq 0$ en d willekeurig, dan de tweefasenmethode toepassen;
4. enkele $b_j \leq 0$ en $\underline{d} \geq \underline{o}$, dan de duale simplexmethode toepassen. (De tweefasenmethode kan hier ook toegepast worden.)

Bij de duale simplexmethode gelden de regels:

1. voor en na elke iteratie is $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$,
2. bij elke iteratie daalt de basiswaarde d_0, althans stijgt d_0 niet.

Is $\underline{b} \geq \underline{o}$, dan is het tableau optimaal. Zijn er b_i negatief, dan willen we er naar streven, dat $\underline{b} \geq \underline{o}$ wordt. We kiezen de spil a_{rs} nu als volgt.

a) Kies de spil a_{rs} negatief in een rij $\underline{a}_{r*}^T$ waarvan de bijbehorende b_r negatief is. Hiermee wordt bereikt, dat ten minste deze b_r na de komende iteratie positief wordt.

b) Kies vervolgens de spilkolom $\underline{a}_{*s}$ zo, dat na de iteratie weer $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$ is. Daartoe is nu nodig en voldoende, dat

$$\frac{d_s}{-a_{rs}} = \min_j \left[\frac{d_j}{-a_{rj}} \mid a_{rj} < 0\right],$$

immers $\bar{d}_j = d_j - \dfrac{d_s a_{rj}}{a_{rs}}$ voor $j \neq s$, en $\bar{d}_s = 0$.

Gevolg

Wegens $\bar{d}_0 = d_0 - \frac{d_s b_r}{a_{rs}}$, $d_s \geq 0$, $b_r < 0$, $a_{rs} < 0$, daalt bij de iteratie d_0, althans stijgt d_0 niet.

Zolang het tableau niet optimaal is, is de aktuele basisoplossing niet toegelaten.

Opmerking. Het verschil tussen de duale simplexmethode en de primale simplexmethode is gelegen in de spilkeuze. De daarna volgende simplexiteraties zijn bij beide gelijk: "vegen" met de spilrij van de matrix.

In bepaalde praktische situaties is de duale methode direkt toepasbaar.

Voorbeeld. Bij een produktieproces worden de eindprodukten P_1, P_2 en P_3 gemaakt, die worden verkregen uit twee grondstoffen G_1 en G_2 die aangekocht worden. Een eenheid G_1 kost ƒ 96,--, een eenheid G_2 kost ƒ 72,--.
Onderstaand tableau geeft aan hoeveel eenheden P_i er uit éénzelfde eenheid G_j verkregen worden:

	P_1	P_2	P_3
G_1	3	2	4
G_2	1	3	2

Van P_1, P_2, P_3 zijn resp. nodig 12, 20, 24 eenheden. Gevraagd de aantallen x_j eenheden G_j die moeten worden gekocht opdat er in de vraag voorzien wordt en de totale kosten minimaal zijn.
De wiskundige formulering wordt:

$$\min\left\{ 96x_1 + 72x_2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} 3x_1 + x_2 \geq 12; & x_1 \geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 20; & x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 24 & \end{array} \right\}$$

of, in standaardvorm II:

$$\max\left\{ -96x_1 - 72x_2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} -3x_1 - x_2 \leq -12; & x_1 \geq 0 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -20; & x_2 \geq 0 \\ -4x_1 - 2x_2 \leq -24 & \end{array} \right\}.$$

Het probleem kan worden opgelost met de tweefasenmethode, maar ook direkt met de duale methode:

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	
0	0	0	-96	-72	
1	0	0	-3	-1	-12
0	1	0	-2	-3	-20
0	0	1	-4	-2	-24
0	0	0	96	72	0

1	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	6
0	1	$-\frac{1}{2}$	0	-2	-8
0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	6
0	0	24	0	24	-576

1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{8}$	0	0	4
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	4
0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	1	0	4
0	12	18	0	0	-672

Optimale oplossing: $x_1 = 4$, $x_2 = 4$; minimale kosten ƒ 672,--.

Voordat we het blokschema voor de duale methode geven nog een opmerking. Ook hier zullen we twee gevallen moeten onderscheiden. We verdelen daartoe de d-rij in twee deelvektoren: $\underline{d}_B^T = \underline{o}^T$ ($\in R^m$), geplaatst onder de basiskolommen, en $\underline{d}_N^T \in R^n$, geplaatst onder de niet-basiskolommen. De laatste is de interessantste. We onderscheiden nu:

1. Geval $\underline{d}_N^T > \underline{o}^T$: voor elke iteratie is de d-rij -afgezien van de nullen onder de basiskolommen- strikt positief.

2. Geval $\underline{d}_N^T \geq \underline{o}^T$, niet $\underline{d}_N^T > \underline{o}^T$: de d-rij bevat naast de nullen onder de basiskolommen nog één of meer nullen.

In geval 1 voert de algoritme in een eindig aantal stappen hetzij naar een optimale oplossing, hetzij naar de uitspraak dat de voorwaarden voor het probleem strijdig zijn. Het laatste doet zich voor als in de gekozen spilrij $\underline{a}_{r*}^T$ bij $b_r < 0$ geen negatieve elementen a_{rj} voorkomen; immers de vergelijking

$$\underline{a}_{r*}^T \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = b_r, \text{ met } \underline{a}_{r*} \geq \underline{o} \text{ en } b_r < 0$$

is bij de voorwaarden $\underline{y} \geq \underline{o}$, $\underline{x} \geq \underline{o}$, zeker vals.

Het eerste zien we als volgt in. Bij het maken van een nieuwe basis eisen we: $b_r < 0$; omdat verondersteld is dat $\underline{d}_N^T > \underline{o}^T$, is de basiswaarde $\bar{d}_0$ van de objectfunktie w na de iteratie strikt <u>kleiner</u> dan de basiswaarde d_0 voor de iteratie, want $\bar{d}_0 = d_0 - \frac{d_s}{a_{rs}} b_r$, met $d_s > 0$, $b_r < 0$ en $a_{rs} < 0$.

Tijdens het rekenproces wordt weer een rij basisoplossingen gevonden waarvan de bijbehorende rij basiswaarden van w monotoon daalt, omdat

$$\frac{d_s}{-a_{rs}} = \min_j \left[\frac{d_j}{-a_{rj}} \mid a_{rj} < 0\right] > 0.$$

We kunnen dus nooit meer dan een keer eenzelfde basis tegenkomen. Er is in de matrix maar een eindig aantal verschillende bases aanwezig. De rij van basisoplossingen is dus eindig.
Zie het blokschema op blz. 82.

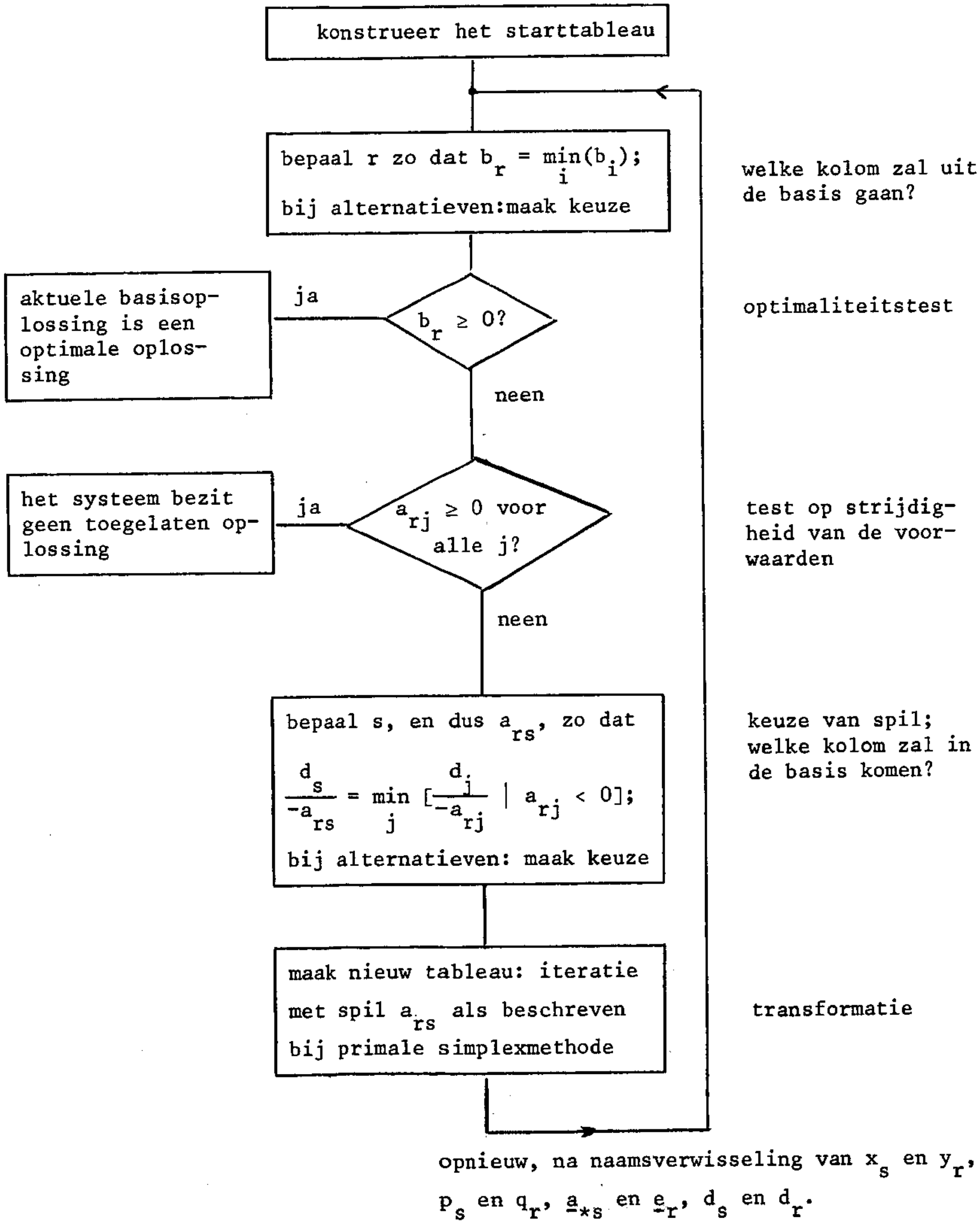
<u>Opgave</u> <u>6.1.1.</u> Los op met de duale simplexmethode

$$\min \left\{ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8; & x_1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 6; & x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_3 \geq 3; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Blokschema voor de duale simplexalgoritme

Voorwaarden: 1. de matrix bevat een (m,m)-eenheidsmatrix,

2. vóór elke iteratie is $d_j \geq 0$ voor $j = 1,2,\ldots,m+n$.



Vraag. Bij de primale methode vindt men alternatieve optimale oplossingen indien in het optimale eindtableau elementen 0 optreden in $\underline{d}_N^T$. Wat is hiervan het pendant in de duale methode?

6.2. Duale degeneratie

Treden er elementen 0 op in $\underline{d}_N^T$ terwijl het tableau niet optimaal is, dan spreken we van duale degeneratie. De spil kan dan gekozen worden in zo'n kolom met $d_s = 0$, nl. als in die kolom a_{rs} negatief is. Ook hier kan cykelen optreden; een duale lexicografische methode helpt ons theoretisch en praktisch uit deze moeilijkheid.

Deze lexicografische methode wordt toegepast bij de gekondenseerde tableauvorm van de simplexmethode. Hierbij worden de eenheidsmatrix en de vektor $\underline{d}_B^T = \underline{o}^T$ niet steeds overgenomen (besparing van geheugenruimte in de computer). Daartegenover staat dan een handige administratie van de variabelen.

Voorbeeld. We geven naast elkaar de uitgebreide en de gekondenseerde tableauvorm van een simplexiteratie (primale methode) bij een eenvoudig voorbeeld:

Uitgebreide tableauvorm

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	2	0	-1	6	-2	
2	1			2	5	8
0		1		-1	3	5
-1			1	2	-2	3
				-4	14	13

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	2	0	-1	6	-2	
2	1		-1		7	5
0		1	½		2	6½
6			½	1	-1	1½
			2		10	19

Gekondenseerde tableauvorm

		x_4	x_5	
		6	-2	
x_1	2	2	5	8
x_2	0	-1	3	5
x_3	-1	2	-2	3
		-4	14	13

		x_3	x_5	
		-1	-2	
x_1	2	-1	7	5
x_2	0	½	2	6½
x_4	6	½	-1	1½
		2	10	19

De transformatieformules voor de simplexiteraties bij de gekondenseerde vorm luiden (spil a_{rs}):

$$\text{spilrij} \quad : \bar{a}_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \text{ voor } j \neq s; \quad \bar{a}_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}; \quad \bar{b}_r = \frac{b_r}{a_{rs}};$$

$$\text{spilkolom} : \bar{a}_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}} \text{ voor } i \neq r; \quad \bar{d}_s = -\frac{d_s}{a_{rs}};$$

$$\text{algemeen} \quad : \bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \text{ voor } i \neq r,\ j \neq s;$$

$$\text{d-rij} \quad : \bar{d}_j = d_j - \frac{a_{rj}d_s}{a_{rs}} \text{ voor } j \neq s; \quad \bar{d}_0 = d_0 - \frac{b_r d_s}{a_{rs}}.$$

De vektor $\underline{c}_B$ wordt steeds geadministreerd. Ga na, hoe ook de matrix B^{-1} uit een gekondenseerd tableau is terug te vinden, aangenomen dat men weet wat de oorspronkelijke eenheidskolommen waren.
Bij de duale lexicografische methode nu wordt in het starttableau onder de rijvektor $\underline{d}_N^T$ een (n,n)-eenheidsmatrix toegevoegd, en onder de basiswaarde d_0 een $\underline{o}$-kolom in R^n. De nieuwe elementen worden overeenkomstig de zo juist gegeven rekenregels meegetransformeerd. Alleen de keuze van de spilkolom gaat als volgt.
Noem de $(n+1,n+1)$-hulpmatrix onderaan het tableau H. Bij de start is dat

$$H = \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{d}_N^T & d_0 \\ \hline E & \underline{o} \\ \hline \end{array}$$

Na elke iteratie spreken we van de aktuele H. De kolommen van H zullen worden aangeduid als $\underline{h}_1, \underline{h}_2, \ldots, \underline{h}_n, \underline{h}_0$.
Nadat nu de spilrij op de gewone manier is gekozen (bij $b_r < 0$) wordt de spilkolom zo gekozen dat

$$\frac{\underline{h}_s}{-a_{rs}} = \underset{j}{\text{lexmin}} \left[\frac{\underline{h}_j}{-a_{rj}} \;\middle|\; a_{rj} < 0\right].$$

We kunnen nu opmerken:

1. De rang van de (n,n)-deelmatrix links-beneden van H is en blijft n; er kan bij de keuze van s geen dubbelzinnigheid ontstaan;

2. elke kolom $\underline{h}_j$ ($j \neq 0$) is en blijft lexicografisch positief;

3. $\underline{h}_0$ daalt bij elke iteratie strikt lexicografisch; in een eindig aantal stappen vinden we dus hetzij een optimale oplossing, hetzij een aanwijzing dat het probleem geen toegelaten oplossingen bezit.

<u>Voorbeeld</u>.

		x_3	x_4	x_5	x_6		
		-8	7	5	-1		
x_1	3	-1	2	1	-1	-3	
x_2	-1	4	-1	-2	-2	-4	
		1	0	0	0	-5	H
		1				0	H
			1			0	H
				1		0	H
					1	0	H
		$\underline{h}_1$	$\underline{h}_2$	$\underline{h}_3$	$\underline{h}_4$	$\underline{h}_0$	

Volgens de gestelde regel wordt $a_{42} = -2$ de spil. Na de iteratie wordt het tableau

		x_3	x_4	x_5	x_2	
		-8	7	5	-1	
x_1	3	-3	$2\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	-1
x_6	-1	-2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
		1	0	0	0	-5
		1				0
			1			0
				1		0
		2	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-2

7. Postoptimale analyse en parametrische programmering

Heeft men in de praktijk een bepaald L.P.-probleem opgelost, dan is men dikwijls geïnteresseerd in de vraag of de gevonden oplossing optimaal blijft bij variaties in de gegeven grootheden c_j of b_i (de prijzen of kosten, de beschikbaarheden van grondstoffen, de vraag naar eindprodukten, enz.). We willen hier de eenvoudigste vragen van dit type beantwoorden:

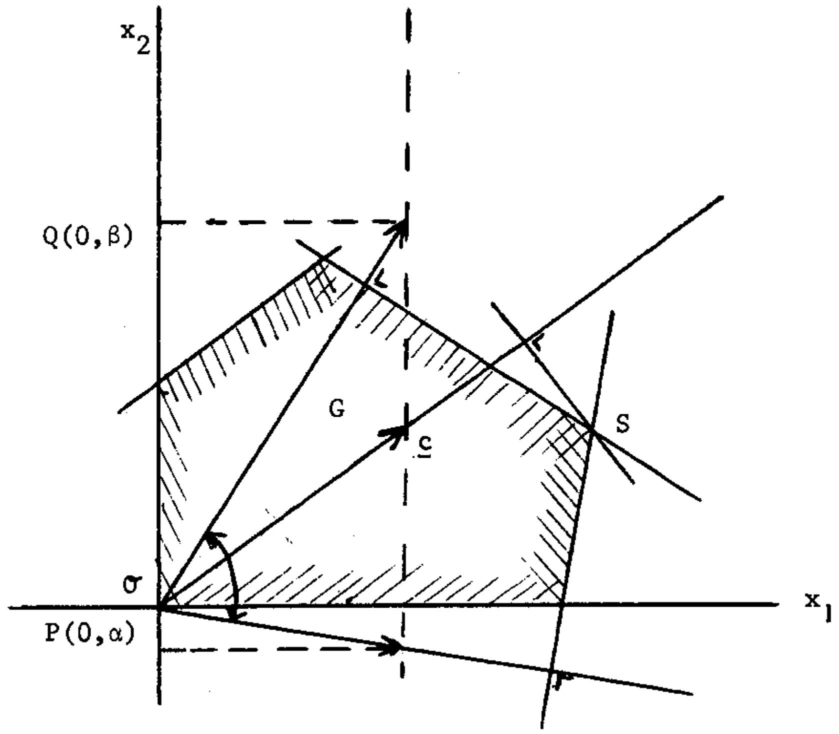
1. Welke variatie kan men toelaten in een komponent c_j (resp. b_i) van de objectvektor $\underline{c}$ (resp. van de rechterlidvektor $\underline{b}$), bij konstant blijven der overige komponenten, zodat de gevonden oplossing optimaal blijft (postoptimale analyse).

2. Hoe gedraagt zich het optimum van ons probleem als de objectvektor $\underline{c}$ (resp. de rechterlidvektor $\underline{b}$) een lineaire funktie wordt van een parameter (parametrische programmering)?

Variatie in koëfficiënten van de matrix A wordt niet behandeld. Er is nog weinig literatuur over.
Bij de analyse van de overgang van een vektor $\underline{c}$ naar een vektor $\underline{c} + \underline{\Delta c}$ (of van een vektor $\underline{b}$ naar een vektor $\underline{b} + \underline{\Delta b}$) starten we in het reeds bekende eindtableau verkregen bij de objectvektor $\underline{c}$, resp. de rechterlidkolom $\underline{b}$.
In de praktijk zullen de variaties niet al te groot zijn, zodat de postoptimale oplossing niet ver van de optimale oplossing ligt (zie plaatje), zodat na een enkele iteratie vanuit het optimale tableau bovengenoemde postoptimale oplossing gevonden wordt. Bovendien is er een nevenvoordeel: "de eerste fase" (indien nodig) is dan al achter de rug.

7.1. Postoptimale analyse t.a.v. de kostenvektor

Variatie in een komponent c_k van de objectvektor $\underline{c}$ (bij konstant blijven der overige komponenten) wordt meetkundig geïllustreerd in de figuur op de volgende bladzijde.
Stel dat bij objectvektor $\underline{c}$ het maximum van $\underline{c}^T\underline{x}$ (voor $x \in G$) wordt aangenomen in S. Als we variatie in de tweede komponent c_2 van $\underline{c}$ toelaten, dan zijn de uiterste standen waarbij het maximum nog in S wordt aangenomen, aangegeven met de gemerkte hoek. Door projektie op de x_2-as krijgen we de twee punten P en Q, en twee getallen α en β waartussen c_2 zich mag bevinden zonder dat de optimale basisoplossing verandert. (De optimale basiswaarde verandert wel.)



Stel dat het L.P.-probleem max $\{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$ opgelost is.

Vervang nu $\underline{c}^T\underline{x}$ door $(\underline{c} + \lambda\underline{e}_k)^T\underline{x}$, $\underline{e}_k \in R^{m+n}$, waardoor de aktuele d-rij overgaat in

$$\underline{d}^T + \lambda\,\underline{\Delta d}^T = (\underline{c} + \lambda\underline{e}_k)_B{}^T B^{-1}(E\quad A) - (\underline{c} + \lambda\underline{e}_k)^T =$$

$$= \underline{c}_B{}^T B^{-1}(E\quad A) - \underline{c}^T + \lambda\{\underline{e}_{k_B}{}^T\, B^{-1}(E\quad A) - \underline{e}_k{}^T\}\ .$$

Schrijf onder de objectrij $\underline{c}^T$, boven het tableau, de $\underline{e}_k{}^T$ er bij, en onder de d-rij een Δd-rij:

$$\begin{array}{lccccccc}
 & x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \cdots & x_{m+n} \\
\underline{c}^T & c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{m+n} \\
\underline{e}_k{}^T & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{array}$$

	$B^{-1}(E\quad A)$	$B^{-1}\underline{b}$	
d-rij	$\underline{c}_B{}^T B^{-1}(E\quad A) - \underline{c}^T$	$\underline{c}_B{}^T B^{-1}\underline{b}$	1
Δd-rij	$\underline{e}_{k_B}{}^T\, B^{-1}(E\quad A) - \underline{e}_k{}^T$	$\underline{e}_{k_B}{}^T\, B^{-1}\underline{b}$	λ

Dit tableau stelt het oorspronkelijke optimale eindtableau voor, met toevoeging van een rij $\underline{e}_k^T$ en een Δd-rij. Wil dat na variatie van c_k nog optimaal zijn, dan moet gelden: $\underline{d}^T + \lambda\, \underline{\Delta d}^T \geq \underline{o}^T$.

We onderscheiden nu:

1. x_k is <u>geen basisvariabele</u>.

Nu is $\underline{e}_{k_B} = \underline{o}$ en $\underline{\Delta d} = \underline{e}_{k_B}^T B^{-1}(E\ \ A) - \underline{e}_k^T = -\underline{e}_k$.

De eis voor optimaliteit is nu: $\underline{d} + \lambda\, \underline{\Delta d} \geq \underline{o}$ of $\underline{d} - \lambda \underline{e}_k \geq \underline{o}$, dus $d_k - \lambda \geq 0$ of $\lambda \leq d_k$.

Vervanging van c_k door $c_k + \lambda$, $\lambda \leq d_k$, laat de optimale oplossing onveranderd. Ook de basiswaarde verandert niet, omdat alleen c_k (een niet-basiskomponent) varieert en $x_k = 0$ is in de optimale oplossing, want x_k is geen basisvariabele.

Als wij λ groter kiezen dan d_k, geldt blijkbaar $d_k - \lambda < 0$, zodat het tableau een negatief element in de d-rij bevat. Om weer een optimaal tableau te krijgen moet er blijkbaar een primale simplexiteratie uitgevoerd worden, waarbij kolom k de spilkolom wordt en waardoor x_k basisvariabele wordt.

<u>Voorbeeld</u>.

Gegeven onderstaand tableau, optimaal voor $\lambda = 0$. Beschouw variatie in c_3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$\underline{c}^T$	1	3	-1	-1	3		
$\underline{e}_3^T$	0	0	1	0	0		
	0	0	-2	1	-3	14	
	0	1	-1	0	2	10	
	1	0	2	0	1	6	
$\underline{d}^T$	0	0	2	0	7	22	1
$\underline{\Delta d}^T$	0	0	-1	0	0	0	λ

Optimaal voor $2 - \lambda \geq 0$, of $\lambda \leq 2$. Overschrijdt λ de grens 2, dan wordt $2 - \lambda < 0$: primale simplexiteratie met spil in de x_3-kolom; x_3 wordt basisvariabele, in de plaats van x_1.

2. x_k is basisvariabele

Nu is $\underline{e}_{k_B}$ een eenheidsvektor in R^m, zeg $\underline{e}_t$, en $\underline{\Delta d}^T = \underline{e}_t^T B^{-1}(E \quad A) - \underline{e}_k^T$.

$\underline{e}_t^T B^{-1}(E \quad A)$ is de t-de rij van de matrix $B^{-1}(E \quad A)$, die we noemen $\underline{a}_{t*}^T$ (de aktuele $\underline{a}_{t*}^T$).

De eis voor optimaliteit is weer: $\underline{d} + \lambda\, \underline{\Delta d} \geq \underline{o}$. De beide d-rijen zien er nu als volgt uit:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & & & & (k) & & & & \\
\hline
\underline{d}^T & d_1 & \cdots & d_{k-1} & 0 & d_{k+1} & \cdots & d_{m+n} & 1 \\
\hline
\underline{\Delta d}^T & a_{t1} & \cdots & a_{t,k-1} & 0 & a_{t,k+1} & \cdots & a_{t,m+n} & \lambda \\
\hline
\end{array}
$$

We willen x_k basisvariabele houden, en daarom wordt $d_k + \lambda\, \Delta d_k = 0$, en dus wegens $d_k = 0$, ook $\Delta d_k = 0$. De overige elementen Δd_j van de Δd-rij zijn ieder gelijk aan a_{tj}. Hieruit volgen de grenzen voor λ:

$$- \min_j \left[\frac{d_j}{a_{tj}} \mid a_{tj} > 0,\ j \neq k\right] \leq \lambda \leq \min_j \left[\frac{d_j}{-a_{tj}} \mid a_{tj} < 0\right],$$

onder het voorbehoud dat er geen bovengrens voor λ is als alle $a_{tj} \geq 0$ zijn, en dat er geen ondergrens voor λ is als alle $a_{tj} \leq 0$ zijn.

Vervanging van c_k door $c_k + \lambda$, λ tussen deze grenzen, laat de optimale oplossing onveranderd. De basiswaarde wordt een lineaire funktie van λ.

Bij overschrijding van een der grenzen door λ moet een primale simplex-iteratie gedaan worden. Het hangt weer van de regels voor de spilkeuze af, welke variabele basisvariabele en welke niet-basisvariabele wordt.

Voorbeeld.

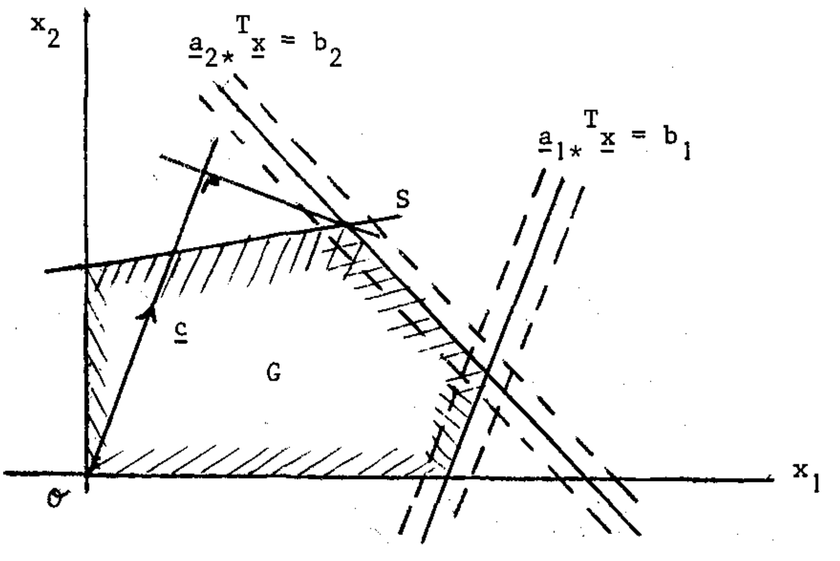
Gegeven onderstaand tableau, optimaal voor $\lambda = 0$. Beschouw variatie in c_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$\underline{c}^T$	1	3	-1	-1	3		
$\underline{e}_2^T$	0	1	0	0	0		
	0	0	-2	1	-3	14	
	0	1	-1	0	2	10	
	1	0	2	0	1	6	
$\underline{d}^T$	0	0	2	0	7	22	1
$\underline{\Delta d}^T$	0	0	-1	0	2	10	λ

We hebben $t = 2$. Het tableau is optimaal voor $2 - \lambda \geq 0$ en $7 + 2\lambda \geq 0$, dus voor $-3\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2$. De basiswaarde is $22 + 10\lambda$. Overschrijdt λ de bovengrens 2, dan wordt x_3 basisvariabele en x_1 niet-basisvariabele; overschrijdt λ de benedengrens $-3\frac{1}{2}$, dan wordt x_5 basisvariabele en x_2 niet-basisvariabele.

7.2. Postoptimale analyse t.a.v. de b-kolom.

Variatie in een komponent b_k van de b-kolom (bij konstant blijven der overige komponenten) komt meetkundig neer op het evenwijdig aan zichzelf verplaatsen van een begrenzend hypervlak, bijv. met vergelijking $\underline{a}_{i*}^T \underline{x} = b_i$, van het toegelaten gebied G.



Bevat zo'n hypervlak (in de figuur $\underline{a}_{1*}^{T}\underline{x} = b_1$) het optimale punt S van G niet, dan blijft S bij een kleine verschuiving van het hypervlak onveranderd; bevat het het punt S wel (in de figuur $\underline{a}_{2*}^{T}\underline{x} = b_2$), dan verplaatst S zich mee met de verschuiving van het hypervlak, hoewel het tot op zekere hoogte "hetzelfde" punt blijft: het snijpunt van het verplaatste hypervlak en dezelfde n-1 niet-verplaatste hypervlakken als te voren. Dat zullen we in deze paragraaf verstaan onder "dezelfde optimale oplossing": de basisvariabelen blijven dezelfde.
Zij het L.P.-probleem $\max\{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$ opgelost. Vervang nu $\underline{b}$ door $\underline{b} + \lambda\,\underline{e}_k$, $\underline{e}_k \in R^m$, waardoor de aktuele b-kolom overgaat in $B^{-1}\underline{b} + \lambda\,B^{-1}\underline{e}_k$.
Schrijf rechts naast de b-kolom nog een Δb-kolom

	$x_1 \;\cdots\cdots\; x_{m+n}$		
$\underline{c}^T$	$c_1 \;\cdots\cdots\; c_{m+n}$	1	λ
	$B^{-1}(E\quad A)$	$B^{-1}\underline{b}$	$B^{-1}\underline{e}_k$
d-rij	$\underline{c}_B^T B^{-1}(E\quad A) - \underline{c}^T$	$\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b}$	$\underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_k$

Zonder de laatste kolom is dit het oorspronkelijke optimale eindtableau.
Wil dat na variatie van b_k nog optimaal zijn, dan moet geldt $B^{-1}\underline{b} + \lambda B^{-1}\underline{e}_k \ge \underline{o}$.
Noemen we even $\underline{b}^* := B^{-1}\underline{b}$ en $\underline{\Delta b}^* := B^{-1}\underline{e}_k$, dan is dit tableau optimaal voor

$$-\min_i \left[\frac{b_i^*}{\Delta b_i^*} \;\middle|\; \Delta b_i^* > 0\right] \le \lambda \le \min_i \left[\frac{b_i^*}{\Delta b_i^*} \;\middle|\; \Delta b_i^* < 0\right],$$

onder het voorbehoud, dat er geen bovengrens voor λ is als alle $\Delta b_i^* \ge 0$ zijn, en dat er geen ondergrens voor λ is als alle $\Delta b_i^* \le 0$ zijn.
Merk op: $\underline{\Delta b}^* = B^{-1}\underline{e}_k$ is de k-de kolom van B^{-1}.
Vervanging van b_k door $b_k + \lambda$, λ tussen deze grenzen, laat de optimale oplossing onveranderd, met inachtneming van de hiervoor gemaakte opmerking.
De basiswaarde $\underline{c}_B^T B^{-1}(\underline{b} + \lambda\,\underline{e}_k)$ wordt een lineaire funktie van λ. Bij overschrijding van één der grenzen door λ moet een <u>duale</u> simplexiteratie gedaan worden, omdat de b-kolom dan een negatief element gaat bevatten, terwijl de d-rij $\ge \underline{o}^T$ blijft. Het hangt weer van de regels voor de spilkeuze af, welke variabele basisvariabele wordt, en welke als zodanig verdwijnt.

Voorbeeld

We geven nog eens starttableau en eindtableau van het voorbeeld uit hoofdstuk 5. We brengen variatie aan in b_3. We voegen de Δb-kolom toe.

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	1	λ
$\underline{c}^T$	-1	-2	-1	2	-3	4		
	1			-1	0	-2	5	0
		1		2	-3	1	3	0
			1	2	-5	6	5	1
	0	0	0	-7	14	-10	-16	-1
	1	1/5	3/10	0	-21/10	0	71/10	3/10
	0	3/5	-1/10	1	-13/10	0	13/10	-1/10
	0	-1/5	2/10	0	-4/10	1	4/10	2/10
	0	11/5	13/10	0	9/10	0	-29/10	3/10

Het tableau is optimaal voor

$$\frac{71}{10} + \frac{3}{10}\lambda \geq 0 \text{ of } \lambda \geq \frac{-71}{3}$$

$$\frac{13}{10} - \frac{1}{10}\lambda \geq 0 \text{ of } \lambda \leq 13$$

$$\frac{4}{10} + \frac{2}{10}\lambda \geq 0 \text{ of } \lambda \geq -2$$

ofwel voor $-2 \leq \lambda \leq 13$. Basisoplossing: $x_1 = 13/10 - 1/10\,\lambda$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4/10 + 2/10\,\lambda$, $y_1 = 71/10 + 3/10\,\lambda$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$.
De basiswaarde is $-29/10 + 3/10\,\lambda$.
Overschrijdt λ de bovengrens 13, dan wordt x_1 niet-basisvariabele (duale spilkeuze met spil in rij 2) en x_2 basisvariabele, omdat $\frac{9/10}{13/10} < \frac{13/10}{1/10}$.
Overschrijdt λ de benedengrens -2, dan wordt x_3 niet-basisvariabele en weer x_2 basisvariabele, omdat $\frac{9/10}{4/10} < \frac{11/5}{1/5}$.

7.3. Parametrische programmering met parameter in de objectfunktie

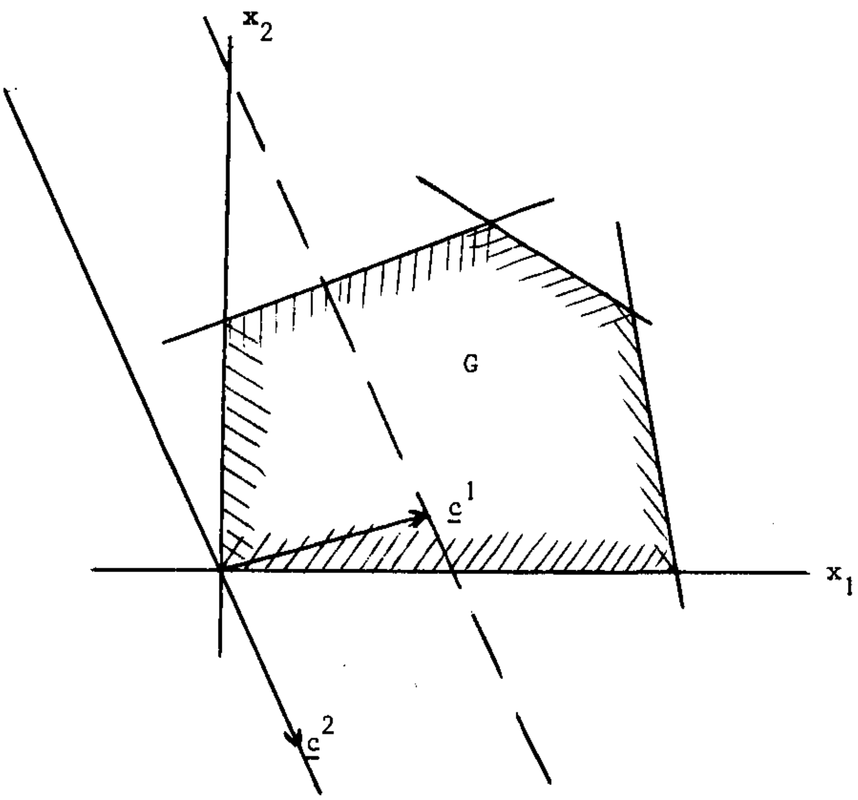
Gevraagd de oplossing van het L.P.-probleem

$$\max \{(\underline{c}^1 + \lambda\, \underline{c}^2)^T \underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$$

als funktie van λ, $-\infty < \lambda < \infty$. We nemen aan dat het probleem

$$\max \{\underline{c}^{1T}\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$$

al is opgelost en een optimum heeft. In onderstaande figuur tekenen we het toegelaten gebied G, de vektoren $\underline{c}^1$ en $\underline{c}^2$, en de lijn waarlangs het uiteinde van $\underline{c}^1 + \lambda\,\underline{c}^2$ zich verplaatst als λ varieert.



In principe is er niet veel verschil met het begin van 7.1.
Bij het tableau schrijven we beide c-rijen uit, en ook de beide d-rijen die er mee korresponderen. Het tableau is het optimale tableau voor $\lambda = 0$.

	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_{m+n}	
$\underline{c}^{1T}$	c^1_1	c^1_2	$\cdots\cdots$	c^1_{m+n}	1
$\underline{c}^{2T}$	c^2_1	c^2_2	$\cdots\cdots$	c^2_{m+n}	λ

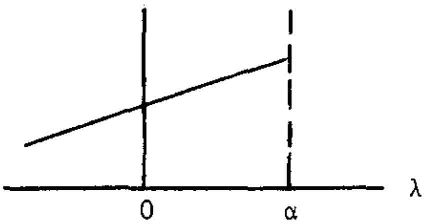
	$B^{-1}(E\ \ A)$	$B^{-1}\underline{b}$	
$\underline{d}^{1T}$	$\underline{c}^{1\ T}_{B}B^{-1}(E\ \ A) - \underline{c}^{1T}$	$\underline{c}^{1\ T}_{B}B^{-1}\underline{b}$	1
$\underline{d}^{2T}$	$\underline{c}^{2\ T}_{B}B^{-1}(E\ \ A) - \underline{c}^{2T}$	$\underline{c}^{2\ T}_{B}B^{-1}\underline{b}$	λ

De optimaliteitseis $\underline{d}^T \geq \underline{o}^T$ geeft in het algemeen een optimaliteitsinterval voor λ, dat de 0 bevat (omdat we voor $\lambda = 0$ in een optimaal tableau starten):

zijn alle $d^2_j \geq 0$, dan is er geen bovengrens voor λ,
zijn alle $d^2_j \leq 0$, dan is er geen benedengrens voor λ,
en anders geldt

$$-\min_j \left[\frac{d^1_j}{d^2_j} \;\middle|\; d^2_j > 0\right] \leq \lambda \leq \min_j \left[\frac{d^1_j}{-d^2_j} \;\middle|\; d^2_j < 0\right] .$$

De basiswaarde is een lineaire funktie van λ op dit interval.
Stel nu, dat er een bovengrens α is: $\lambda \leq \alpha$.

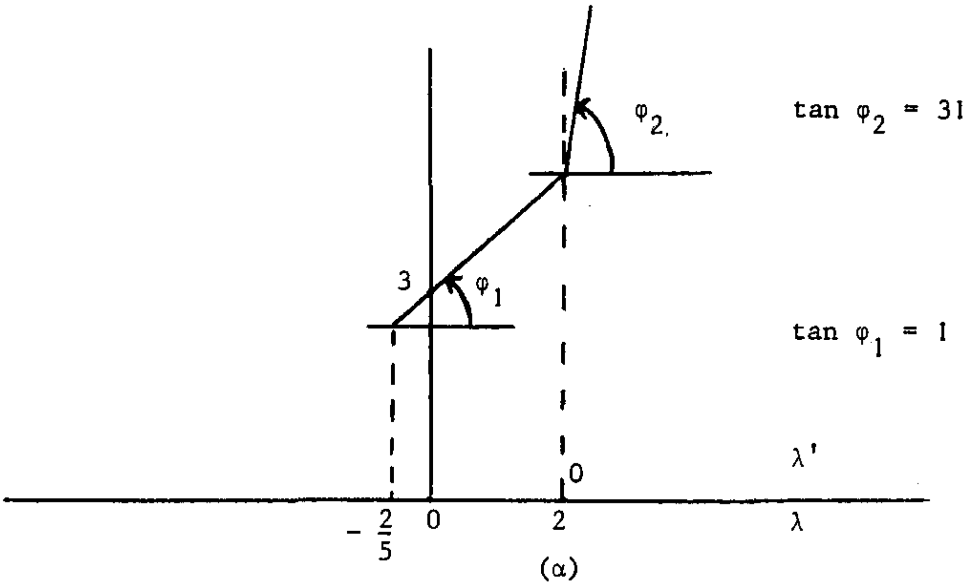


We willen nu naar rechts de grens overschrijden.

Voorbeeld (eindtableau voor $\lambda = 0$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	1			2	1	-1	10	
		1		-4	0	-2	4	
			1	2	-3	1	4	
$\underline{d}^{1T}$				2	6	6	3	1
$\underline{d}^{2T}$				5	-3	-1	1	λ

$\underline{d}^T = \underline{d}^{1T} + \lambda\, \underline{d}^{2T} \geq \underline{o}^T$ voor $-\frac{2}{5} \leq \lambda \leq \frac{6}{3}$; basiswaarde $d_0 = 3 + \lambda$.
In de grafiek van d_0 voor dit interval is $d^2_0 = 1$ de richtingscoëfficiënt van de lijn die de basiswaarde voorstelt.



(α)

We voeren nu eerst in de d-rijen een <u>substitutie</u> uit:
$\lambda' = \lambda - \alpha$, dus $\lambda = \lambda' + \alpha$; in ons geval: $\lambda' = \lambda - 2$, $\lambda = \lambda' + 2$.
In de grafiek betekent dit een verlegging van de oorsprong: het punt 0 komt te liggen waar eerst α lag; de schaal en alle richtingscoëfficiënten blijven overigens onveranderd. Doel van de substitutie is om het de computer eenvoudig te maken om te beoordelen welke d_j voor een volgende iteratie het eerst negatief wordt.
In ons voorbeeld worden de nieuwe d-rijen, wegens
$2 + 5\lambda = 2 + 5(\lambda'+2) = 2 + 5\lambda' + 10 = 12 + 5\lambda'$, enz.

$\underline{d}^{1T}$		12	0	4	5	1
$\underline{d}^{2T}$		5	−3	−1	1	λ'
			↑			

Merk op:

1. Is s de index waarvoor in de oude d-rijen $d^1_s - \alpha\, d^2_s = 0$ wordt, dan wordt nu d^1_s een 0, en blijft d^2_s <u>negatief</u> (zie pijl).
2. De d^2-rij verandert bij de substitutie niet.
3. Bij de komende simplexiteratie moet de spil gekozen worden in de kolom s, want d_s is negatief voor λ' in een rechteromgeving van 0, d.w.z. voor λ in een rechteromgeving van α (primale spilkeuze).

Er zijn nu twee mogelijkheden: in de kolom $\underline{a}_{*s}$ is geen positief element: het probleem heeft dan een oneindige oplossing voor alle $\lambda' > 0$, dus voor alle $\lambda > \alpha$; of er is wel een positief element als spil te kiezen en de simplextransformatie kan worden uitgevoerd. In het laatste geval verandert nu de d^1-rij niet, en ook $d^1{}_0$ niet, omdat $d^1{}_s = 0$. En $d^2{}_0$ stijgt bij de iteratie, althans daalt niet (in het geval $b_r = 0$). De richtingscoëfficiënt van de grafiek rechts van $\lambda = \alpha$ is dus niet kleiner dan die van de grafiek links van $\lambda = \alpha$.
In ons voorbeeld wordt het volgende tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	1			2	1	-1	10	
	0	1		-4		-2	4	
	3		1	8		-2	34	
$\underline{d}^{1T}$	0			12		4	5	1
$\underline{d}^{2T}$	3			11		-4	31	λ'

Dit tableau is nu optimaal voor $0 \le \lambda' \le 1$, en dat betekent voor $2 \le \lambda \le 3$. De richtingscoëfficiënt van de grafiek wordt 31. (Zie de laatste figuur.) Noemen we nu λ' weer λ, dan kan men het proces herhalen: zo wisselen beurteling substitutie en transformatie elkaar af. Bij de eerste is de d^2-rij invariant, bij de transformatie de d^1-rij.
We veronderstellen hier, dat er geen storende degeneratie optreedt, d.w.z. geen cykelen. Eventueel zou men een lexicografische methode te hulp kunnen roepen. Omdat we nooit terug kunnen keren bij een basis die we al eens gehad hebben, loopt het proces in een eindig aantal stappen af. Om dit aan te tonen merken we op, dat we het proces wat de simplexiteraties betreft kunnen zien als een primale simplexmethode t.a.v. de d^2-rij, die immers bij de substitutie niet verandert.
Voortzetting naar links, uitgaande van het eerste tableau, zou op een analoge manier beschreven en uitgevoerd kunnen worden. Gemakkelijker is het om deze terug te brengen tot het vorige geval door λ te vervangen door $-\mu$; dan kan alles precies herhaald worden, echter gespiegeld ten opzichte van de as door het oude nulpunt. De richtingscoëfficiënt (in λ) van de grafiek links van een grenspunt is dan niet groter dan die van de grafiek rechts ervan. En ook naar links loopt het proces in een eindig aantal stappen af:

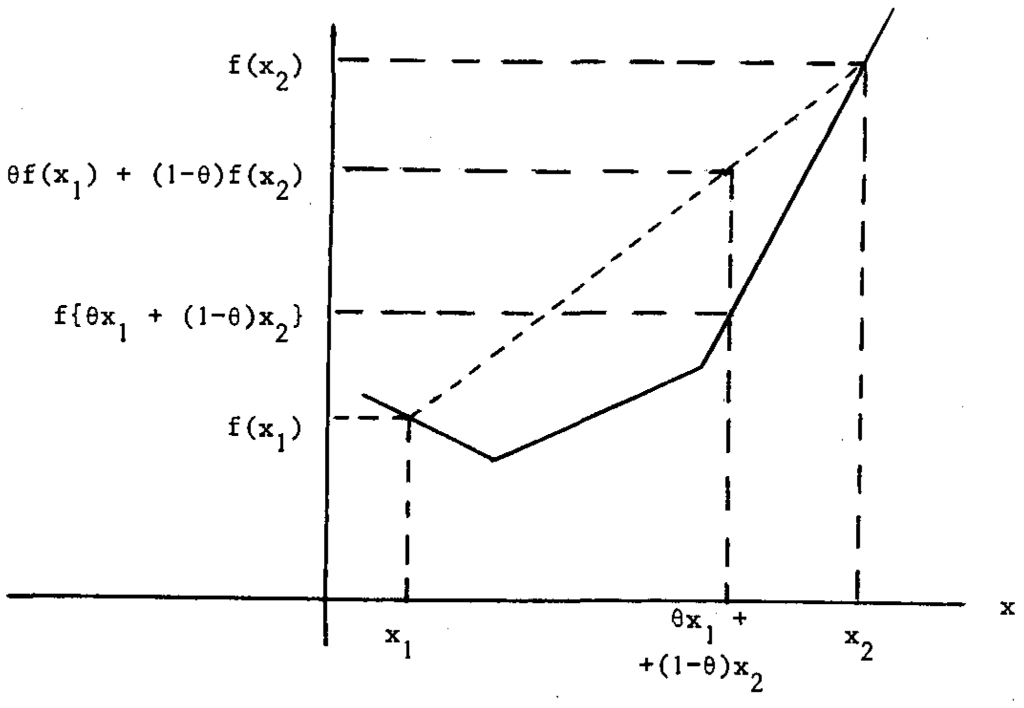
of een oneindige oplossing of een lineaire funktie van λ als optimale oplossing, voor alle λ kleiner dan een zeker getal. Ga dit in ons voorbeeld zelf na.

De basiswaarde is op het gebied waar hij bestaat een funktie van λ die in de grafiek voorgesteld wordt door een gebroken rechte. Op grond van het gedrag van de richtingscoëfficiënt bij de voortzettingen naar links en naar rechts bij de grenspunten kunnen we konkluderen, dat deze funktie konvex is.

Definitie: Een funktie $f(x)$ gedefinieerd op een interval I heet konvex als voor elk getal $x_1 \in I$ en elk getal $x_2 \in I$ en voor elke θ, $0 \le \theta \le 1$, geldt:

$$f\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2\} \le \theta\, f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)\ .$$

(Standaardvoorbeeld: kwadratische funktie met dalparabool als grafiek.)



7.4. Parametrische programmering met parameter in de rechterlidkolom

Gevraagd de oplossing van het L.P.-probleem

$$\max\ \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\ \underline{x} \le \underline{b}^1 + \lambda\ \underline{b}^2;\ \underline{x} \ge \underline{o}\},$$

als funktie van λ, $-\infty < \lambda < \infty$. We nemen aan dat het probleem

$$\max\ \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\ \underline{x} \le \underline{b}^1;\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$$

is opgelost en een optimum heeft.

In principe is er niet veel verschil met de beginselen uit 7.2; bij het tableau zijn we nu geïnteresseerd in de aktuele b-kolom, die weer geschreven zal worden $\underline{b}^* + \lambda\ \underline{\Delta b}^* = B^{-1}(\underline{b}^1 + \lambda\ \underline{b}^2) = B^{-1}\underline{b}^1 + \lambda\ B^{-1}\underline{b}^2$.

Zij het tableau, dat optimaal is voor $\lambda = 0$:

x_1 ...... x_{m+n} c_1 ...... c_{m+n}		
$B^{-1}(E\ \ A)$	$\underline{b}^*$	$\underline{\Delta b}^*$
d-rij	d_0^*	Δd_0^*

De optimaliteitseis $\underline{b}^* + \lambda\ \underline{\Delta b}^* \geq \underline{o}$ geeft een optimaliteitsinterval voor λ, dat $\lambda = 0$ bevat:

zijn alle $\Delta b_i^* \geq 0$, dan is er geen bovengrens voor λ,

zijn alle $\Delta b_i^* \leq 0$, dan is er geen benedengrens voor λ,

en anders geldt

$$-\min_i \left[\frac{b_i^*}{\Delta b_i^*} \mid \Delta b_i^* > 0\right] \leq \lambda \leq \min_i \left[\frac{b_i^*}{-\Delta b_i^*} \mid \Delta b_i^* < 0\right] .$$

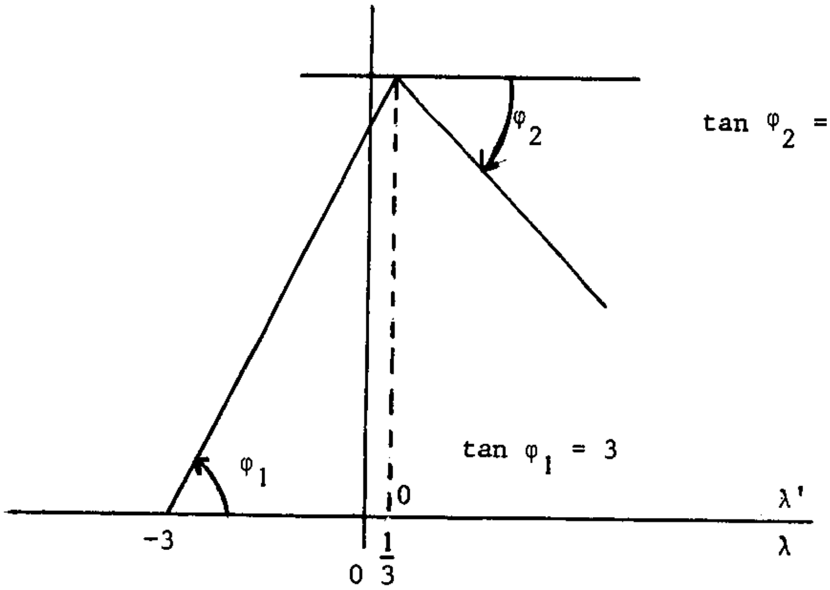
De basiswaarde is een lineaire funktie van λ op dit interval.

Stel nu, dat er een bovengrens is: $\lambda \leq \alpha$. We willen naar <u>rechts</u> de grens overschrijden. We geven een voorbeeld:

Eindtableau voor $\lambda = 0$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\underline{b}^*$ 1	$\underline{\Delta b}^*$ λ
1			3	7	0	-2	1	-3
	1		-2	-3	1	1	3	1
		1	5	9	-6	-2	6	-2
			1	1	6	3	9	3

$\underline{b} + \lambda\ \underline{\Delta b}^* \geq \underline{o}$ voor $-\frac{3}{1} \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$; basiswaarde $d_0 = 9 + 3\lambda$. In de grafiek van d_0 voor dit interval is $\Delta d_0^* = 3$ de richtingscoëfficiënt van de lijn die deze basiswaarde voorstelt.



Voer nu in de b-kolommen een <u>substitutie</u> uit: $\lambda' = \lambda - \alpha$, of $\lambda = \lambda' + \alpha$; in ons geval: $\lambda = \lambda' + \frac{1}{3}$. Wegens $1 - 3\lambda = 1 - 3(\lambda' + \frac{1}{3}) = 1 - 3\lambda' - 1 = 0 - 3\lambda'$, enz., worden de nieuwe b-kolommen:

1	λ	
0	-3	←
$3\frac{1}{3}$	1	
$5\frac{1}{3}$	-2	
10	3	

Nu geldt:

1. Is r de index waarvoor in de oude b-kolommen $b_r^* - \lambda\, \Delta b_r^* = 0$ wordt, dan wordt nu b_r^* een 0, en blijft Δb_r^* <u>negatief</u> (zie pijl).
2. De Δb^*-kolom verandert bij de substitutie niet.
3. Bij de komende simplexiteratie moet de spil gekozen worden in de rij r, want $b_r^* + \alpha\, \Delta b_r^*$ is negatief voor λ' in een rechteromgeving van 0, d.w.z. voor λ in een rechteromgeving van α (<u>duale</u> spilkeuze).

Er zijn nu twee mogelijkheden: in rij $\underline{a}_{r*}^T$ is geen negatief element: het probleem heeft dan geen toegelaten oplossing meer voor $\lambda' > 0$, en dus voor $\lambda > \alpha$; of er is wel een negatief element als spil te kiezen en de simplex-iteratie kan worden uitgevoerd. In het laatste geval verandert nu de b^*-kolom niet, en ook d_0^* niet, omdat $b_r^* = 0$. En Δd_0^* <u>daalt</u> bij de iteratie, althans stijgt niet (in het geval $d_s = 0$). De richtingscoëfficiënt van de grafiek rechts van $\lambda = \alpha$ is dus niet groter dan die van de grafiek links van $\lambda = \alpha$.

Na de iteratie wordt het tableau van ons voorbeeld

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\frac{b^*}{1}$	$\frac{\Delta b^*}{\lambda}$
$-\frac{1}{2}$			$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	0	1	0	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1		10/3	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$		1	2	2	-6		16/3	1
$1\frac{1}{2}$			$5\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	6		10	$-1\frac{1}{2}$

Dit tableau is optimaal voor $0 \le \lambda' \le 6\frac{2}{3}$, en dat betekent voor $\frac{1}{3} \le \lambda \le 7$. De richtingscoëfficiënt van de grafiek wordt $-1\frac{1}{2}$. (Zie laatste figuur.) Ook hier kan men λ' weer λ noemen en het proces herhalen. Substitutie en iteratie wisselen elkaar af; bij de substitutie is de b^*-kolom invariant, bij de transformatie de Δb^*-kolom.

Evenals in 7.3 veronderstellen we ook hier, dat er geen storende degeneratie optreedt, die in elk geval met de duale lexicografische methode kan worden voorkomen. Ook hier loopt het proces in een eindig aantal stappen af: wat de simplexiteraties betreft kunnen we het zien als een duale simplexmethode, toegepast t.a.v. de Δb^*-kolom, die immers bij de substitutie niet verandert.

Voortzetting naar <u>links</u>, uitgaande van het eerste tableau, kan tot het bovenbeschreven geval teruggebracht worden door λ te vervangen door $-\mu$; dan kan alles precies herhaald worden, alleen gespiegeld t.o.v. de as door het punt $\lambda = 0$, of ook $\mu = 0$. De richtingscoëfficiënt (in λ) van de grafiek links van een grenspunt is dan niet kleiner dan die van de grafiek rechts er van. En ook naar links loopt het proces dan in een eindig aantal stappen af: of een strijdig systeem en dus geen toegelaten oplossing meer, of een lineaire funktie van λ als optimale oplossing voor alle λ kleiner dan een zeker getal. Ga dit in ons voorbeeld zelf na.

De basiswaarde is op het gebied waar hij bestaat een funktie van λ die in de grafiek voorgesteld wordt door een gebroken rechte. Op grond van het gedrag van de richtingscoëfficiënt bij de voortzettingen naar links en naar rechts bij de grenspunten kunnen we zeggen dat deze funktie <u>konkaaf</u> is.

<u>Definitie</u>: Een funktie $f(x)$ gedefiniëerd op een interval I heet <u>konkaaf</u>, als de funktie $-f(x)$ op I konvex is. (Standaardvoorbeeld: kwadratische funktie met bergparabool als grafiek.)

7.5. Opgaven.

7.5.1.

a) Bepaal met de simplexmethode het optimum van het L.P.-probleem:

$$\max\left\{ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \le 3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 12 \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\}.$$

b) Ga na welke waarden elke komponent van $\underline{c}$ bij gelijkblijven van de overige komponenten kan aannemen, zodat dezelfde basisoplossing als optimale oplossing optreedt als boven.

c) Ga na welke waarden elke komponent van de b-kolom bij gelijkblijven van de overige komponenten kan aannemen, zodat de optimale oplossing "dezelfde" blijft, d.w.z. dezelfde basisvariabelen bevat als in a).

7.5.2.

a) Los op het L.P.-probleem

$$\max\left\{ -4x_1 + 3x_2 - 7x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0 \text{ voor } j = 1,2,3 \end{array} \right\}.$$

b) Pas de methode der parametrische programmering toe op het probleem

$$\max(-4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + \lambda(6x_1 - x_2))$$

onder dezelfde voorwaarden.

Schets een grafiek van de optimale basiswaarde als funktie van λ.

c) Vervang de b-kolom van het probleem uit a) door $\binom{5 + 7\lambda}{2 - 2\lambda}$ en pas parametrische programmering toe op het nieuwe probleem.

Schets een grafiek van de optimale basiswaarde als funktie van λ.

8. Dualiteit

8.1. Duale tableaus

We beschouwen eens een tableau, zoals dat gebruikelijk is in de gekondenseerde tableauvorm van de simplexmethode:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & \underline{b} \\ \hline \underline{d}^T & g \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

(Hierin is g een nieuwe letter, in de plaats van de vroegere d_0.) Het is te beschouwen als het tableau van het L.P.-probleem:

$$\max \{g - \underline{d}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}\ . \qquad \text{(I)}$$

We definiëren nu het <u>duale tableau</u> hiervan:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -A^T & \underline{d} \\ \hline \underline{b}^T & -g \\ \hline \end{array}\ . \qquad (2)$$

Ook dit laatste stelt een L.P.-probleem voor, dat we in een andere vektorvariabele $\underline{u}$ uitdrukken:

$$\max \{-g - \underline{b}^T\underline{u} \mid -A^T\underline{u} \le \underline{d};\ \underline{u} \ge \underline{o}\}\ . \qquad \text{(II)}$$

Is A een (m,n)-matrix, dan is $\underline{b} \in R^m$ en $\underline{d} \in R^n$; dan is ook $\underline{x} \in R^n$ en $\underline{u} \in R^m$.
We merken op: tableau (1) is weer het duale van tableau (2). Beide tableaus zijn dus elkanders duale.
Willen we de twee tableaus van een duaal stel onderscheiden, dan noemen we het ene wel het <u>primale</u> en het andere het <u>duale</u> tableau. Met (1) zal dan het primale tableau bedoeld worden, met (2) het duale.
We zeggen dat door deze dualisering de elementen a_{ij}, b_i, d_j en g van (1) zijn <u>toegevoegd</u> aan de elementen resp. $-a_{ji}$, b_i, d_j en $-g$ van (2).

Zijn nu gegeven twee duale tableaus, en zij $a_{ij} \neq 0$ een element van A, en $-a_{ji}$ het daaraan toegevoegde element van $-A^T$, dan kunnen we in beide tableaus een simplexiteratie uitvoeren, volgens de regels van het gekondenseerde tableau, met beide toegevoegde elementen als spil. Doen we dit, dan geldt de volgende <u>stelling</u>:
Het getransformeerde tableau van (2) is weer het duale van het getransformeerde van (1).

Voorbeeld.

(1)

2	-1	2
1	2	3
-4	-5	-6
7	8	9

duaal $\longleftrightarrow$

(2)

-2	-1	4	7
1	-2	5	8
2	3	-6	-9

iteratie $\downarrow$ (1)

-2	-5	-4
1	2	3
4	3	6
-7	-6	-12

duaal $\longleftrightarrow$

iteratie $\downarrow$ (2)

2	1	-4	-7
5	-2	-3	-6
-4	3	6	12

Bewijs. De transformatieformules die bij deze iteraties gelden (spil a_{rs}), zijn :

Spilrij : $\bar{a}_{rs} = \dfrac{1}{a_{rs}}$; $\bar{a}_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}}$ voor $j \neq s$; $\bar{b}_r = \dfrac{b_r}{a_{rs}}$;

Spilkolom : $\bar{a}_{is} = -\dfrac{a_{is}}{a_{rs}}$ voor $i \neq r$; $\bar{d}_s = \dfrac{d_s}{a_{rs}}$;

en verder : $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$ voor $i \neq r$, $j \neq s$;

$\bar{b}_i = b_i - \dfrac{a_{is}}{a_{rs}} b_r$ voor $i \neq r$; $\bar{d}_j = d_j - \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}} d_s$ voor $j \neq s$;

$\bar{g} = g - \dfrac{b_r d_s}{a_{rs}}$.

Deze formules gelden hier voor tableau (1). Om de formules te krijgen voor (2) moeten we de dualisatieregels toepassen en de formules vertalen. Bedenk, dat bij het dualiseren zowel i en j als r en s verwisseld worden, terwijl bij de a-elementen en g nog een minteken toegevoegd moet worden. Dan volgt hieruit de stelling. □

8.2. Duale L.P.-problemen

Zijn $\begin{array}{|c|c|} \hline A & \underline{b} \\ \hline \underline{d}^T & g \\ \hline \end{array}$ en $\begin{array}{|c|c|} \hline -A^T & \underline{d} \\ \hline \underline{b}^T & -g \\ \hline \end{array}$ onderling duale tableaus,

dan noemen we de hiermee geassocieerde L.P.-problemen

$$\max \{g - \underline{d}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{o}\} \quad \text{en}$$

$$\max \{-g - \underline{b}^T\underline{u} \mid -A^T\underline{u} \le \underline{d},\ \underline{u} \ge \underline{o}\}$$

onderling duale L.P.-problemen. Willen we de problemen van een stel duale onderscheiden, dan noemen we het ene het primale probleem (I) en het tweede het duale probleem (II).

Via de duale tableaus behoort bij elke (al dan niet toegelaten) basisoplossing van I een (al dan niet toegelaten) basisoplossing van II. We noemen dit toegevoegde basisoplossingen.

Vullen we de duale tableaus uit het voorbeeld van 8.1. met variabelen aan (v_1 en v_2 als niet-negatieve restvariabelen voor probleem II):

(1)

	x_1	x_2	
y_1	2	-1	2
y_2	1	2	3
y_3	-4	-5	-6
	7	8	9

(2)

	u_1	u_2	u_3	
v_1	-2	-1	4	7
v_2	1	-2	5	8
	2	3	-6	-9

dan zijn die toegevoegde basisoplossingen in dat geval

voor I : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -6$, basiswaarde 9,

voor II : $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $v_1 = 7$, $v_2 = 8$, basiswaarde -9.

Merk op, dat we deze basisoplossing voor II ook af kunnen lezen uit tableau (1), en de basisoplossing voor I ook uit tableau (2). De struktuur van het tableau geeft ons aanleiding om bepaalde variabelen voor beide problemen elkaars komplementaire te noemen: x_1 en v_1, x_2 en v_2, y_1 en u_1,

y_2 en u_2, y_3 en u_3. De restvariabelen van het ene probleem zijn komplementair met de hoofdvariabelen van het andere. v_1 is de komplementaire restvariabele van x_1, y_1 is de komplementaire restvariabele van u_1, enz.
We zien dat voor toegevoegde basisoplossingen de volgende stelling voor de komplementaire variabelen geldt: als een variabele (van I, resp. van II) ongelijk is aan 0, is zijn komplementaire variabele (van II, resp. van I) gelijk aan 0. (Het kan zijn, dat twee komplementaire variabelen beide 0 zijn, nl. bij degeneratie.)
We geven er de voorkeur aan om het duale probleem van een gegeven L.P.-probleem iets anders te formuleren dan boven is gebeurd. We gaan uit van een primaal probleem in standaardvorm II

$$\max \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}\ .$$

Het duale probleem wordt dan als volgt geformuleerd, uitgedrukt in $\underline{b}$ en $\underline{c}$ in plaats van in $\underline{b}$ en $\underline{d}$ (standaardvorm II van het duale probleem):

$$\min \{\underline{b}^T\underline{u} \mid A^T\underline{u} \ge \underline{c};\ \underline{u} \ge \underline{o}\}\ .$$

In deze formulering treden de restvariabelen niet op. Dit gebeurt wel als we uitgaan van de standaardvorm III, waarbij de restvariabelen v_j van het duale probleem met een minteken voor de dag komen:
Primaal probleem:

$$\max \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} + \underline{y} = \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o};\ \underline{y} \ge \underline{o}\}\ ,$$

duaal probleem (standaardvorm III):

$$\min \{\underline{b}^T\underline{u} \mid A^T\underline{u} - \underline{v} = \underline{c};\ \underline{u} \ge \underline{o};\ \underline{v} \ge \underline{o}\}\ .$$

Als voorbeeld kiezen we een primaal probleem met de speciale eis $\underline{b} \ge \underline{o}$, zodat het tableau (1) gereed staat voor toepassing van de primale simplexmethode. Het duale tableau staat dan tevens gereed voor toepassing van de duale simplexmethode. We voeren bij beide de optimalisatie uit. Bij elke iteratie zijn telkens de spillen aan elkaar toegevoegde elementen!
De tussentijdse basisoplossingen van I zijn toegelaten, die van II niet.
In de eindtableaus zijn beide basisoplossingen toegelaten.
Bij start- en eindtableau plaatsen we in (1) tegenover elke variabele zijn komplementaire van II.

I

max $(x_1 + 2x_2)$ o.d.v.

$$\begin{array}{rcl|l}
2x_1 - x_2 & \le & 6 & (u_1) \\
-3x_1 + 4x_2 & \le & 9 & (u_2) \\
-x_1 + 2x_2 & \le & 4 & (u_3) \\
x_1 & \ge & 0 & (v_1) \\
x_2 & \ge & 0 & (v_2)
\end{array}$$

II

min $(6u_1 + 9u_2 + 4u_3)$ o.d.v.

$$\begin{array}{rcl|l}
2u_1 - 3u_2 - u_3 & \ge & 1 & (x_1) \\
-u_1 + 4u_2 + 2u_3 & \ge & 2 & (x_2) \\
u_1 & \ge & 0 & (y_1) \\
u_2 & \ge & 0 & (y_2) \\
u_3 & \ge & 0 & (y_3)
\end{array}$$

(1)

	x_1	x_2		
y_1	2	-1	6	(u_1)
y_2	-3	4	9	(u_2)
y_3	-1	2	4	(u_3)
	-1	-2	0	
	(v_1)	(v_2)		

(2)

	u_1	u_2	u_3	
v_1	-2	3	1	-1
v_2	1	-4	-2	-2
	6	9	4	0

	x_1	y_3	
y_1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8
y_2	-1	-2	1
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
	-2	1	4

	u_1	u_2	v_2	
v_1	$-1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-2
u_3	$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	1
	8	1	2	-4

	y_1	y_3		
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$	(v_1)
y_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{19}{3}$	(u_2)
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	(v_3)
	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{44}{3}$	
	(u_1)	(u_3)		

	v_1	u_2	v_2	
u_1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
u_3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
	$\frac{16}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{14}{3}$	$-\frac{44}{3}$

Beide tableaus zijn nu optimaal. I heeft het maximum $\frac{44}{3}$, II heeft het minimum $\frac{44}{3}$ (!).

De toegevoegde basisoplossing van II wordt ook teruggevonden in de uitgebreide tableaus, waarmee we probleem I gewoonlijk oplossen. We geven start- en eindtableau voor de oplossing van I van hetzelfde voorbeeld. De komplementaire variabelen worden onder de kolommen bijgeschreven: de toegevoegde basisoplossing van II komt volledig in de d-rij van I te staan:

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2		
$\underline{c}^T$	0	0	0	1	2		
	1			2	−1	6	starttableau
		1		−3	4	9	
			1	−1	2	4	
				−1	−2	0	

2/3		1/3	1		16/3	
2/3	1	−5/3			19/3	eindtableau
1/3		2/3		1	14/3	
4/3		5/3			44/3	
(u_1)	(u_2)	(u_3)	(v_1)	(v_2)		

De optimale oplossing (minimum) van het duale probleem is dus 44/3 (!), en wordt aangenomen voor de optimale basisoplossing $u_1 = 4/3$, $u_2 = 0$, $u_3 = 5/3$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

Opmerking. We beschouwen hier het geval $\underline{b} \geq \underline{o}$; er zou zich dus ontaarding kunnen voordoen. In dat geval roepen we de lexicografische methode te hulp. Merk op dat de lexicografische methode bij (1) (primale methode), die bij de start schematisch kan worden voorgesteld als

A	$\underline{b}$	E
$-\underline{c}^T$	g	$\underline{o}^T$

,

precies hetzelfde doet als de duale lexicografische methode bij (2) (duale simplexmethode), die bij de start de gedaante heeft:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline -A^T & -\underline{c}^T \\ \hline \underline{b}^T & -g \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline E & \underline{o} \\ \hline \end{array}$$

Alleen stijgt bij (1) de vektor $(g \quad \underline{o}^T)$ lexicografisch bij elke iteratie, en daalt bij (2) de vektor $\binom{-g}{\underline{o}}$ lexicografisch.

Om een willekeurig L.P.-probleem te dualiseren kan men op verschillende wijzen te werk gaan. Ten eerste kan men het probleem in standaardvorm II of III brengen (waarbij $\underline{b} \geq \underline{o}$ dus geen eis is) en dan handelen zoals hierboven aangegeven. Soms is het gemakkelijker om gebruik te maken van een algemeen schema, waarin alle mogelijke ongelijkheden en gelijkheden verwerkt zijn. (Zie bl.8.8.) Is dan bijv. het gegeven L.P.-probleem:

$$\begin{aligned}
&\max\ (4x_1 - x_2 + 8x_3) \text{ onder de voorwaarden} \\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -10 \\
&3x_1 + 7x_2 \geq 5 \\
&x_1 - 2x_3 \geq -6 \\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \ \text{ vrij},
\end{aligned}$$

dan is volgens het schema, na passende plaatsing der variabelen:

$\underline{x}_1 = \binom{x_1}{x_2}$, $\underline{x}_2 = x_3$, $\underline{x}_3 = \underline{o}$; dus zijn A_{13}, A_{23} en A_{33} nulmatrices. Ook $\underline{b}_2 = \underline{o}$, zodat ook A_{21}, A_{22} en A_{23} weer nulmatrices zijn. Vervolgens zijn

$$\begin{aligned}
&A_{11} = (2 \quad 1),\quad A_{12} = (3),\quad \underline{b}_1 = (-10); \\
&A_{31} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}; \\
&\underline{p}_1^T = (4 \quad -1);\quad \underline{p}_2^T = (8);\quad \underline{p}_3^T = \underline{o}^T .
\end{aligned}$$

Schema

Formulering van het duale probleem bij een algemeen gegeven primaal probleem.

I. Primaal probleem

$$\max(\underline{p}_1^T \underline{x}_1 + \underline{p}_2^T \underline{x}_2 + \underline{p}_3^T \underline{x}_3) \qquad \underline{p}_1 \in R_{n_1},\ \underline{p}_2 \in R_{n_2},\ \underline{p}_3 \in R_{n_3}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leq \underline{b}_1 \\ = \underline{b}_2 \\ \geq \underline{b}_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{b}_1 \in R_{m_1} \\ \underline{b}_2 \in R_{m_2} \\ \underline{b}_3 \in R_{m_3} \end{array}$$

$$\underline{x}_1 \geq \underline{o} \qquad \underline{x}_1 \in R_{n_1}$$

$$\underline{x}_2 \text{ vrij} \qquad \underline{x}_2 \in R_{n_2}$$

$$\underline{x}_3 \leq \underline{o} \qquad \underline{x}_3 \in R_{n_3}$$

II. Duaal probleem

$$\max(-\underline{b}_1^T \underline{u}_1 - \underline{b}_2^T \underline{u}_2 - \underline{b}_3^T \underline{u}_3)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -A_{11}^T & -A_{21}^T & -A_{31}^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & -A_{32}^T \\ -A_{13}^T & -A_{23}^T & -A_{33}^T \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leq -\underline{p}_1 \\ = -\underline{p}_2 \\ \geq -\underline{p}_3 \end{array}$$

$$\underline{u}_1 \geq \underline{o} \qquad \underline{u}_1 \in R_{m_1}$$

$$\underline{u}_2 \qquad \underline{u}_2 \in R_{m_2}$$

$$\underline{u}_3 \leq \underline{o} \qquad \underline{u}_3 \in R_{m_3}$$

Het duale probleem wordt:

$$\max\left(-(-10)u_1 - (5 \quad -6)\binom{u_2}{u_3} \right) \text{ onder de voorwaarden}$$

$$\left(\begin{array}{c:cc} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -7 & 0 \\ \hdashline -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \le -4 \\ \le -(-1) \\ = -8 \end{array}$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \le 0,\ u_3 \le 0.$$

Ga zelf na, dat dit probleem gelijkwaardig is met dat, wat op de andere manier verkregen wordt.

De vorm waarin het duale probleem voor de dag komt (bij gebruik van het schema) hangt af van de vorm waarin het primale probleem gegoten is. Wat wij komplementaire variabelen genoemd hebben, zijn de variabelen die bij elkaar horen als het primale en duale probleem in de standaardvorm II of III gegeven zijn.

Voorbeeld:

Primaal: $\max\ \{-x_1 - 2x_2 \mid -3x_1 - 4x_2 \le -12;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0\}$;

duaal, volgens schema, maar ook als we het opvatten in standaardvorm II:

$$\min \left\{ -12u \;\middle|\; \begin{array}{ll} -3u \ge -1; & u \ge 0 \\ -4u \ge -2 & \end{array} \right\}.$$

Schrijven we de restriktie $-3x_1 - 4x_2 \le -12$ eerst andersom:

$3x_1 + 4x_2 \ge 12$, dan wordt het duale probleem, volgens het schema (we hebben te doen met $A_{31} = (3 \quad 4)$ en $b_3 = 12$):

$$\max \left\{ -12w \;\middle|\; \begin{array}{ll} -3w \le 1; & w \le 0 \\ -4w \le 2 & \end{array} \right\}.$$

We gebruiken hier een andere variabele voor het dualiseren; we zien dat beide duale problemen gelijkwaardig zijn, echter met $w = -u$. De komplementaire variabele van de restvariabele y voorkomend in $-3x_1 - 4x_2 + y = -12$, of ook in $3x_1 + 4x_2 - y = 12$ is, volgens onze afspraak, u en niet w. We zullen met deze opmerking rekening moeten houden bij het terugvinden van de optimale oplossing van het duale probleem in het eindtableau van het primale probleem in het geval dat de tweefasenmethode wordt toegepast, met name bij ongelijkheden van dit type. Zie 8.4.

8.3. De dualiteitseigenschappen

Zij een stel duale problemen gegeven in standaardvorm II

I. Primaal	II. Duaal
$\max(\underline{c}^T\underline{x})$ o.d.v.	$\min(\underline{b}^T\underline{u})$ o.d.v.
$A\,\underline{x} \le \underline{b}$	$A^T\underline{u} \ge \underline{c}$
$\underline{x} \ge \underline{o}$	$\underline{u} \ge \underline{o}$

Stelling 1:

Is $\hat{\underline{x}}$ een toegelaten oplossing van I en $\hat{\underline{u}}$ een toegelaten oplossing van II, dan is $\underline{c}^T\hat{\underline{x}} \le \underline{b}^T\hat{\underline{u}}$.

Bewijs. $$\underline{c}^T\hat{\underline{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegens } \hat{\underline{x}} \ge \underline{o}}}{\le} (A^T\hat{\underline{u}})^T\hat{\underline{x}} = (\hat{\underline{u}}^T A)\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{u}}^T(A\,\hat{\underline{x}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegens } \hat{\underline{u}} \ge \underline{o}}}{\le} \hat{\underline{u}}^T\underline{b} = b^T\hat{\underline{u}}.$$

Gevolg 1. Als I en II beide een toegelaten oplossing bezitten, dan hebben beide ook een optimale oplossing.

Bewijs. Het toegelaten gebied G_1 van I is gesloten; de kontinue lineaire funktie $\underline{c}^T\underline{x}$ is naar boven begrensd op G_1 en bereikt dus op G_1 een maximum. Evenzo toont men aan, dat $\underline{b}^T\underline{u}$ een minimum aanneemt op het toegelaten gebied G_2 van II.

Gevolg 2. Is $\hat{\underline{x}}$ een toegelaten oplossing van I en $\hat{\underline{u}}$ een toegelaten oplossing van II, en is bovendien $\underline{c}^T\hat{\underline{x}} = \underline{b}^T\hat{\underline{u}}$, dan zijn beide oplossingen optimaal.

Gevolg 3. Heeft I een oneindige oplossing, d.w.z. $\underline{c}^T\underline{x} \to \infty$ op G_1, dan heeft II geen toegelaten oplossingen: de voorwaarden voor II zijn strijdig. Heeft II een oneindige oplossing, d.w.z. $\underline{b}^T\underline{u} \to -\infty$ op G_2, dan heeft I geen toegelaten oplossingen.

Opmerking. Er bestaan duale problemen die geen van beide een toegelaten oplossing hebben. Voorbeeld:

$$\text{I} \;:\; \max\left\{x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 \le -1 \\ -x_1 + x_2 \le -1 \end{array} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\right\} \text{ en}$$

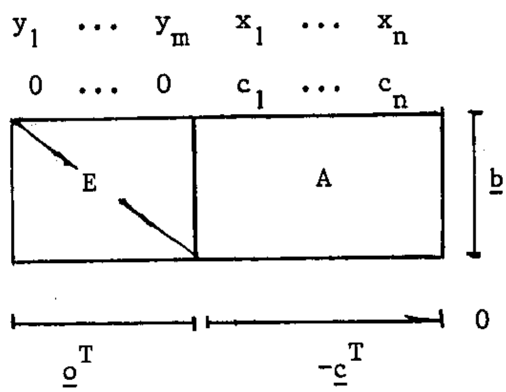
$$\text{II} \;:\; \min\left\{-u_1 - u_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 - u_2 \ge 1 \\ -u_1 + u_2 \ge 1 \end{array} \quad u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0\right\}.$$

Stelling 2:
(Hoofdstelling). Als I een optimale oplossing $\hat{\underline{x}}$ heeft, dan heeft ook II een optimale oplossing $\hat{\underline{u}}$, terwijl $\underline{c}^T\hat{\underline{x}} = \underline{b}^T\hat{\underline{u}}$.

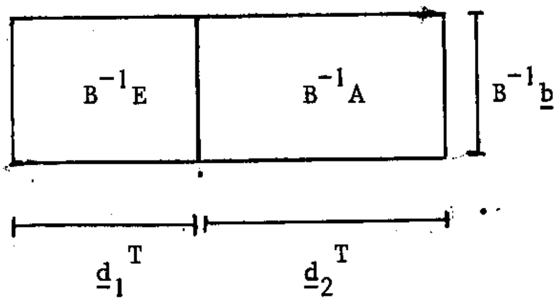
Bewijs. Breng de duale problemen in standaardvorm III

I. Primaal	II. Duaal
$\max(\underline{c}^T\underline{x})$ o.d.v.	$\min(\underline{b}^T\underline{u})$ o.d.v.
$A\,\underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$	$A^T\underline{u} - \underline{v} = \underline{c}$
$\underline{x} \geq \underline{o}$	$\underline{u} \geq \underline{o}$
$\underline{y} \geq \underline{o}$	$\underline{v} \geq \underline{o}$

en zij het tableau van I:



Als er een optimale oplossing bestaat, dan ook een optimale basisoplossing $(\hat{\underline{y}},\hat{\underline{x}})$ (zie hoofdstuk 4). Die is er dus hier ook; stel dat hierbij een (m,m)-deelmatrix B van (E A) behoort zo, dat het eindtableau



optimaal is. We noemen hier $\underline{d}^T = (\underline{d}_1^T \quad \underline{d}_2^T)$, met $\underline{d}_1 \in R^m$, $\underline{d}_2 \in R^n$.
Nu is

$$\underline{d}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}(E \quad A) - (\underline{o}^T \quad \underline{c}^T) \geq \underline{o}^T \text{ , of}$$

$$\underline{d}_1^T = \underline{c}_B^T B^{-1} \geq \underline{o}^T (\in R^m) \text{, en}$$

$$\underline{d}_2^T = \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T \geq \underline{o}^T (\in R^n) \text{ .}$$

Stel nu $(\hat{\underline{u}}^T \quad \hat{\underline{v}}^T) = (\underline{d}_1^T \quad \underline{d}_2^T)$; dan voldoet de vektor $\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{\underline{v}}\end{pmatrix}$ blijkbaar aan de voorwaarden van II:

$$A^T\hat{\underline{u}} - \hat{\underline{v}} = A^T(B^{-1})^T\underline{c}_B - (A^T(B^{-1})^T c_B + \underline{c}) = \underline{c}\ , \quad \hat{\underline{u}} \geq 0,\ \hat{\underline{v}} \geq 0;$$

de waarde van de objectfunktie van II wordt voor deze toegelaten oplossing bovendien:

$$\underline{b}^T\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{u}}^T\underline{b} = \underline{c}_B{}^T B^{-1}\ \underline{b} = \underline{c}_B{}^T\hat{\underline{x}}_B = \underline{c}^T\hat{\underline{x}}$$

($\hat{\underline{x}}_B$ is hier immers het basisgedeelte van de aktuele basisoplossing van I, behorend bij het eindtableau; $\hat{\underline{x}}_N = \underline{o}$).

$\begin{pmatrix}\hat{\underline{u}}\\ \hat{\underline{v}}\end{pmatrix}$ is dus een <u>optimale</u> oplossing van II op grond van stelling 1, gevolg 2. □

<u>Stelling 3</u>:

Nodig en voldoende opdat twee toegelaten oplossingen $\hat{\underline{x}}$ van I en $\hat{\underline{u}}$ van II optimaal zijn is, dat zij aan de relaties voldoen:

$$\underline{u}^T(\underline{b} - A\ \underline{x}) = 0 \text{ of } \underline{u}^T\underline{y} = 0, \qquad \text{en}$$

$$\underline{x}^T(A^T\underline{u} - \underline{c}) = 0 \text{ of } \underline{x}^T\underline{v} = 0.$$

<u>Bewijs</u>.(Nodig) We weten:

$$\alpha = \hat{\underline{u}}^T(\underline{b} - A\ \hat{\underline{x}}) \geq 0 \text{ en}$$

$$\beta = \hat{\underline{x}}^T(A^T\hat{\underline{u}} - \underline{c}) \geq 0, \text{ dus}$$

$\alpha + \beta = \hat{\underline{u}}^T\underline{b} - \hat{\underline{x}}^T\underline{c}$; maar dit is in het geval van optimale oplossingen gelijk aan 0. Dus $\alpha = 0$ en $\beta = 0$.

(Voldoende) Stel $\alpha = 0$ en $\beta = 0$; dan is $\alpha + \beta = \hat{\underline{u}}^T\underline{b} - \hat{\underline{x}}^T\underline{c} = 0$, dus $\hat{\underline{x}}$ en $\hat{\underline{u}}$ zijn optimale oplossingen (stelling 1, gevolg 2). □

We noemen deze relaties uit stelling 3 de <u>relaties voor de komplementaire variabelen</u> ("complementary slack relations").

8.4. <u>De basisoplossing van het duale probleem in de d-rij van het primale tableau</u>

Als een nevenresultaat van stelling 2 hebben we gevonden dat de d-rij in het optimale tableau van het primale probleem

$$\underline{d}^T = (\underline{d}_1{}^T \quad \underline{d}_2{}^T) = (\underline{c}_B{}^T B^{-1} \quad (\underline{c}_B^T\ B^{-1}A - \underline{c}^T))$$

een optimale basisoplossing van het duale probleem is. De komponenten van $\underline{d}^T$ zijn telkens de komplementaire variabelen van de variabelen uit het primale probleem die boven de matrixkolommen staan. Eén van de voorwaarden die hierbij geverifieerd zijn, is: $A^T\underline{d}_1 - \underline{d}_2 = \underline{c}$. *Deze betrekking geldt echter* niet alleen in het optimale tableau, maar altijd, in elk aktueel tableau. De d-rij is dus altijd een (in het algemeen niet-toegelaten) oplossing van de restrikties van het duale probleem, en wel een basisoplossing, omdat hoogstens n variabelen ongelijk zijn aan 0 (onder een basiskolom staat een 0 in de d-rij).

Is het L.P.-probleem gegeven in de gedaante

$$\max \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b};\ \underline{x} \ge \underline{o}\}$$

met de speciale eis $\underline{b} \ge \underline{o}$, dan kunnen we met de primale simplexmethode, eventueel lexicografisch, rechtstreeks naar het optimale eindtableau toewerken. Is echter aan deze speciale eis niet voldaan, dan passen we de tweefasenmethode toe, waarbij de ongelijkheden van de vorm $\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \le b_i$, $b_i < 0$, in eerste instantie worden vervangen door $-\underline{a}_{i*}^T\underline{x} \ge -b_i$, met $-b_i > 0$. Hierdoor ontstaat een komplikatie ten aanzien van de komplementaire variabelen, waarop we al in 8.2. wezen:

Zij gegeven het het L.P.-probleem

$$\max \left\{ \underline{c}^T\underline{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1\underline{x} \le \underline{b}_1 \text{ met } \underline{b}_1 \ge \underline{o} \\ A_2\underline{x} = \underline{b} \text{ met } \underline{b}_2 \ge \underline{o} \\ A_3\underline{x} \le \underline{b}_3 \text{ met } \underline{b}_3 < \underline{o} \end{array} \quad \underline{x} \ge \underline{o} \right\}. \tag{I}$$

Het duale probleem wordt:

$$\min \left\{ \underline{b}_1^T\underline{u}_1 + \underline{b}_2^T\underline{u}_2 + \underline{b}_3^T\underline{u}_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1^T\underline{u}_1 + A_2^T\underline{u}_2 + A_3^T\underline{u}_3 \ge \underline{c} \\ \\ \underline{u}_1 \ge \underline{o},\ \underline{u}_2 \text{ vrij},\ \underline{u}_3 \ge \underline{o} \end{array} \right\}. \tag{II}$$

Maken we nu de eerste voorbereiding voor de tweefasenmethode, dan wordt I geschreven:

$$\max \left\{ \underline{c}^T\underline{x} + \underline{o}^T\underline{y}_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1\underline{x} \le \underline{b}_1 \\ A_2\underline{x} = \underline{b}_2 \\ -A_3\underline{x} - E_3\underline{y}_3 = -\underline{b}_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{x} \ge \underline{o} \\ \underline{y}_3 \ge \underline{o} \end{array} \right\} \tag{I'}$$

en II, uitgedrukt in andere variabelen dan eerst:

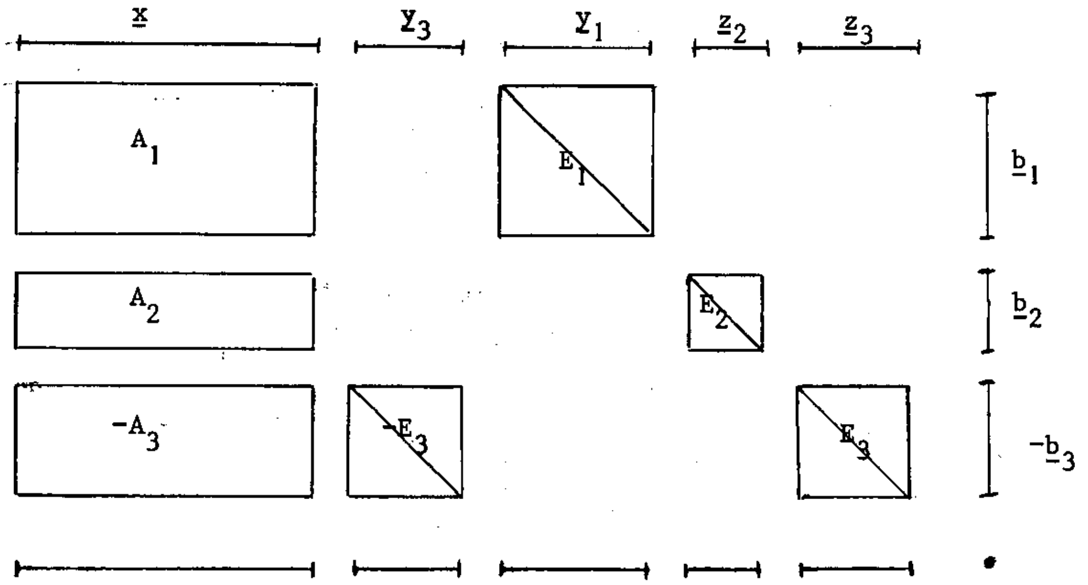
$$\min \left\{ \underline{b}_1^T \underline{w}_1 + \underline{b}_2^T \underline{w}_2 - \underline{b}_3^T \underline{w}_3 \;\middle|\; \begin{array}{r} A_1^T \underline{w}_1 + A_2^T \underline{w}_2 - A_3^T \underline{w}_3 \geq \underline{c} \\ - E_3^T \underline{w}_3 \geq \underline{o} \\ \underline{w}_1 \geq \underline{o},\ \underline{w}_2 \text{ vrij},\ \underline{w}_3 \text{ vrij} \end{array} \right\} \quad \text{(II')}$$

De problemen II en II' zijn gelijkwaardig ($\underline{u}_1 = \underline{w}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{w}_2$, $\underline{u}_3 = -\underline{w}_3$; op het eerste oog is $\underline{w}_3$ vrij en $\underline{u}_3 \geq \underline{o}$, maar de beperking $-E_3^T \underline{w}_3 \geq \underline{o}$ geeft toch weer $\underline{w}_3 \leq 0$).

Vullen we de beperkingen van I' met nulvariabelen aan en vormen we het simplextableau, dan zijn nu de komplementaire variabelen de w-variabelen, en de restvariabelen van II' die we $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ noemen. We geven hier dit starttableau, met er onder de komplementaire variabelen, zowel als w- als als u-variabelen. Onder een z_i-kolom van bovenbeschreven type vinden we de tegengestelde waarde van de oorspronkelijk komplementaire variabele u_i; de waarde van u_i is te vinden onder de echte restvariabele y_i die met deze z_i korrespondeert, omdat $-E_3^T \underline{w}_3 - \underline{v}_2 = \underline{o}$ of $\underline{v}_2 = -\underline{w}_3 = \underline{u}_3$.

Bij de z_i-variabele van het andere type (bij de gelijkheden $A_2\underline{x} + \underline{z}_2 = \underline{b}_2$) doet zich dit niet voor, mits natuurlijk al $\underline{b}_2 \geq \underline{o}$ is geschreven, wat hierboven ook verondersteld was.

Starttableau van I (we laten de T's bij de rijvektoren weg):



	$(\underline{v}_1)$	$(\underline{v}_2)$	$(\underline{w}_1)$	$(\underline{w}_2)$	$(\underline{w}_3)$	voor II'
of:	$(\underline{v}_1)$	$(\underline{u}_3)$	$(\underline{u}_1)$	$(\underline{u}_2)$	$(-\underline{u}_3)$	voor II

8.5. Meetkundige interpretatie

Beschouw nog eens het primale probleem in standaardvorm III:

$$\max \{\underline{c}^T \underline{x} \mid A\,\underline{x} + \underline{y} = \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o};\ \underline{y} \geq \underline{o}\}, \qquad \text{(I)}$$

met het duale probleem

$$\min \{\underline{b}^T \underline{u} \mid A^T \underline{u} - \underline{v} = \underline{c};\ \underline{u} \geq \underline{o};\ \underline{v} \geq \underline{o}\}\ . \qquad \text{(II)}$$

In de x-ruimte R^n wordt het toegelaten gebied G_1 van I beschreven door de m+n ongelijkheden

$$A\,\underline{x} \leq \underline{b}$$

$$-E\,\underline{x} \leq \underline{o}\ .$$

We kiezen deze notatie: de gradiënten van de G_1 begrenzende hypervlakken

$$\begin{aligned} \underline{a}_{1*}^T \underline{x} &\leq b_1 \\ &\vdots \\ \underline{a}_{m*}^T \underline{x} &\leq b_m \\ -x_1 &\leq 0 \\ &\vdots \\ -x_n &\leq 0 \end{aligned}$$

wijzen dan vanuit G_1 gezien naar buiten.
Bovendien is nu de tableaumatrix $(A^T \;\; -E)$ van II de getransponeerde van deze gradiëntenmatrix $\binom{A}{-E}$.
Zij $\binom{\hat{\underline{y}}}{\hat{\underline{x}}}$ een (al dan niet toegelaten) basisoplossing; de deelvektoren $\hat{\underline{x}}$ hiervan voldoen aan n onafhankelijke gelijkheden van de m+n ongelijkheden die G_1 bepalen. Deze n gelijkheden zijn de vergelijkingen van de n hypervlakken waarvan $\hat{\underline{x}}$ het snijpunt is. In het geval dat het om een toegelaten basisoplossing gaat, is dat tevens een hoekpunt van G_1. De n gradiënten van deze hypervlakken worden in het duale probleem de basiskolommen van de aan $\binom{\hat{\underline{y}}}{\hat{\underline{x}}}$ toegevoegde basisoplossing $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{v}}}$ van II. De basisvariabelen hiervan hebben als komplementaire variabelen in I variabelen met waarde 0. Het zijn dus juist de variabelen die overeenkomen met de n gelijkheden waaraan $\hat{\underline{x}}$ voldoet. Het zijn de coëfficiënten waarmee de gradiënt $\underline{c}$ van de objectfunktie van I lineair wordt uitgedrukt in de gradiënten van deze hyper-

vlakken, immers $A^T\underline{u} - \underline{v} = \underline{c}$, en in deze lineaire kombinatie treden alleen de basisvariabelen van $\binom{\hat{\underline{u}}}{\hat{\underline{v}}}$ echt op. Ook is deze lineaire kombinatie uniek, omdat de n gradiënten onafhankelijk zijn en dus een basis voor R^n vormen. In het optimale geval zijn $\hat{\underline{u}} \geq \underline{o}$ en $\hat{\underline{v}} \geq \underline{o}$, zodat we dan mogen konkluderen tot de stelling:

Is het gebied $G_I \subset R^n := \{\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$ niet leeg en is $\hat{\underline{x}}$ een hoekpunt van G_I, dan is nodig opdat $\hat{\underline{x}}$ een optimale oplossing is van het L.P.-probleem $\max\{\,\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}$, dat $\underline{c}$ is te schrijven als een niet-negatieve lineaire kombinatie van de t.o.v. G_I buitenwaarts gerichte gradiënten van de hypervlakken $\underline{a}_{i*}{}^T\underline{x} = b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, en $-\underline{e}_j{}^T\underline{x} = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, waarop $\hat{\underline{x}}$ ligt. □

De genoemde voorwaarde is ook voldoende. We bewijzen dat hier niet.

8.6. <u>Economische betekenis van de optimale duale basisoplossing</u>

Laat het L.P.-probleem

$$\max\ \{\underline{c}^T\underline{x} \mid A\,\underline{x} \leq \underline{b};\ \underline{x} \leq \underline{o}\} \qquad \text{(I)}$$

een produktieproces voorstellen van het type: gegeven beschikbare hoeveelheden b_i van grondstoffen G_i; de produktiematrix A geeft aan: per eenheid eindprodukt H_j zijn a_{ij} eenheden van de grondstof G_i nodig; de H_j kunnen <u>verkocht</u> worden tegen de prijs c_j per eenheid (<u>verkoopprobleem</u>).
Gevraagd de hoeveelheden x_j voor elk eindprodukt H_j zo te bepalen dat de opbrengst maximaal is terwijl aan de beperkingen voldaan is.
Maximale opbrengst: $w_{max} = \underline{c}^T\hat{\underline{x}} = \underline{b}^T\hat{\underline{u}}$, als $\hat{\underline{u}}$ de toegevoegde (optimale) basisoplossing is van het duale probleem.

Dus $\dfrac{\partial w_{max}}{\partial b_i} = \hat{u}_i$; we noemen $\hat{u}_i$ de <u>waarde per eenheid</u> G_i ten opzichte van de binnen de grenzen van het probleem mogelijke oplossingen (programma's). (Een verkoopprijs of verkoopwaarde per eenheid G_i.) Is in de optimale oplossing van I $\hat{y}_i > 0$, dan wordt blijkbaar niet alle grondstof G_i verbruikt; dan is de waarde $\hat{u}_i$ ervan per eenheid 0. Wordt daarentegen alle beschikbare G_i opgebruikt, dan is $\hat{y}_i = 0$ en kan $\hat{u}_i > 0$ zijn. Dit is dan de "prijs" per eenheid, waarvoor men bereid zou zijn van buiten af nog meer G_i bij te kopen. We noemen de $\hat{u}_i$ ook wel <u>schaduwprijzen</u> per eenheid G_i.

N.B. Deze schaduwprijzen hoeven niet ondubbelzinnig te zijn. Denk aan alternatieve optimale oplossingen van het duale probleem.
Een analoge maar omgekeerde redenering kan men houden bij het inkoopprobleem, dat met het bovenstaande duaal is:

$$\min \{\underline{c}^T \underline{x} \mid A\, \underline{x} \geq \underline{b};\ \underline{x} \geq \underline{o}\}\ .$$

Hier zijn bijv. de b_i bestelde hoeveelheden van eindprodukten H_i; de verwerkingsmatrix A geeft aan: uit elke eenheid grondstof G_j kunnen we a_{ij} eenheden eindprodukt H_i maken. De G_j moeten gekocht worden en kosten dan c_j per eenheid. Gevraagd de hoeveelheden x_j van elke grondstof G_j zo te bepalen, dat de kosten minimaal zijn, terwijl aan de voorwaarden voor de bestellingen wordt voldaan.
Minimale kosten: $w_{min} = \underline{c}^T \underline{\hat{x}} = \underline{b}^T \underline{\hat{u}}$, als $\underline{\hat{u}}$ weer de toegevoegde (optimale) basisoplossing is van het duale probleem.

Dus is weer: $\dfrac{\partial w_{min}}{\partial b_i} = \hat{u}_i$; $\hat{u}_i$ is de waarde per eenheid H_i ten opzichte van de binnen de grenzen van het probleem mogelijke programma's. (Een inkoopprijs of inkoopwaarde per eenheid H_i.) Is in de optimale oplossing van I $\hat{y}_i > 0$, dan houden we blijkbaar iets van eindprodukt H_i over; dan is de waarde $\hat{u}_i$ ervan per eenheid 0.
Wordt daarentegen precies zoveel H_i gemaakt als er besteld is, dan is $\hat{y}_i = 0$ en kan $\hat{u}_i > 0$ zijn. Dit is dan de "prijs" per eenheid, waarvoor men bereid zou zijn aan anderen nog meer H_i te leveren. Ook hier heten de $\hat{u}_i$ schaduwprijzen.

8.7. Opgaven

8.7.1.

Geef een formulering voor het duale probleem van het L.P.-probleem:

$$\max(-4x_1 + 3x_2) \quad \text{onder de voorwaarden}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\ \text{vrij.} \end{aligned}$$

8.7.2.

Voor een produktieproces zijn de grondstoffen g_1, g_2, g_3 en g_4 nodig. Deze grondstoffen verkrijgt men uit delfstoffen x_1, x_2, x_3, die aangekocht worden. Een eenheid x_1 kost *f* 96,-, een eenheid x_2 *f* 72,- en een eenheid x_3 eveneens *f* 72,-.
Onderstaand tableau geeft aan, hoeveel eenheden g_i er uit eenzelfde eenheid x_j verkregen kunnen worden ($i = 1,2,3,4$; $j = 1,2,3$):

	g_1	g_2	g_3	g_4
x_1	3	3	2	4
x_2	3	1	2	4
x_3	4	2	3	2

Van g_1 t/m g_4 zijn respectievelijk nodig 16, 12, 11 en 24 eenheden.
Men wenst de aantallen x_j te berekenen die moeten worden gekocht, zodanig, dat in de behoeften wordt voorzien en de totale kosten minimaal zijn.

a) Geef van dit probleem een wiskundige formulering.

b) Dualiseer dit probleem.

c) Los het duale probleem met de primale simplexmethode op en geef de oplossing van het duale en van het primale probleem.

d) Achteraf blijken nog 16 eenheden van een andere grondstof g_0 nodig te zijn. De aantallen eenheden van g_0, verkrijgbaar uit één eenheid x_1 t/m x_3 (waaruit ook al de overige g_i verkregen worden) zijn:

	g_0
x_1	3
x_2	2
x_3	3

Bepaal met gebruikmaking van de reeds gevonden resultaten, hoeveel eenheden x_j er nu gekocht moeten worden, opdat ook in de behoefte aan g_0 wordt voorzien en de kosten minimaal zijn.

<u>Antwoorden van de opgaven</u>

2.6.1. II : $\underline{c}^T = (-4,0,1,-1,-2,2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

III: $\underline{c}^T$ en $\underline{b}$ als bij II; A uitgebreid met (4,4)-eenheidsmatrix E.

2.6.2. max (-39 lijnz - 36 soys - 25 klzs - 26 mais - 12 mels) o.d.v.

lijnz	soys	klzs	mais	mels		
-33,7	-46,2	-34,2	-9,5	-3,7	≤	- 1650
-0,70	-0,67	-0,57	-0,80	-0,46	≤	- 68
-1					≤	- 5
		1			≤	5
				1	≤	12
				-1	≤	- 10
1	1	1	1	1	=	100

lijnz ≥ 0, soys ≥ 0, klzs ≥ 0, mais ≥ 0, mels ≥ 0.

2.6.3. a) $\min(x_{IA} + 1{,}4x_{IB} + 3x_{IC} + 1{,}2x_{IIA} + 2x_{IIB} + 1{,}7x_{IIC})$ o.d.v.

x_{IA}	x_{IB}	x_{IC}	x_{IIA}	x_{IIB}	x_{IIC}	
1	1	1				= 100
			1	1	1	= 200
1			1			= 75
	1			1		= 125
		1			1	= 100

alle variabelen geheel, ≥ 0.

b) $\min(x_{IA} + 1{,}4x_{IB} + 3x_{IC} + 1{,}2x_{IIA} + 2x_{IIB} + 1{,}7x_{IIC} + 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2)$ o.d.v.

x_{IA}	x_{IB}	x_{IC}	x_{IIA}	x_{IIB}	x_{IIC}	x_1	x_2	
1	1	1				1		= 100
			1	1	1		1	= 200
1			1					= 75
	1			1				= 60
		1			1			= 100

alle variabelen geheel, ≥ 0.

2.6.4. $\max(1{,}6(x_1+x_2+x_3+x_4) + 4{,}3(x_5+..+x_8) + 7{,}3(x_9+..+x_{12}))$ o.d.v.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}		
-2	1	-3	13,5									≤	0
-14	-3	6	-15									≤	0
				-2	1	-3	13,5					≤	0
				-16,5	-2	4	-17					≤	0
								-2	1	-3	13,5	≤	0
								-7,5	7	13	-8	≤	0
1				1				1				≤	3800
	1				1				1			≤	2650
		1				1				1		≤	4080
			1				1				1	≤	1300

$x_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,12$.

2.6.5. $\min(\sum_j x_j)$ o.d.v.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...		!!	...	
60 breed	3	2	2	1	1	1	...	0	2	1 ...	$= N_1$
40 breed	0	1	0	3	2	1	...	0	0	0 ...	$= N_2$
30 breed	0	1	2	0	1	3	...	6	0	0 ...	$= N_3$

alle x_j geheel, ≥ 0. (Geen L.P.-probleem.)

Schrappen laatste kolommen niet toegestaan als er staat: "$= N_i$", wel als geschreven wordt "$\geq N_i$", wat dezelfde optimale oplossing geeft.

3.6.2. a) $\underline{b} \geq \underline{o}$; b) niet noodzakelijk, bijv. in het probleem $\max(x_1 - 3x_2)$ o.d.v. $x_1 - x_2 \leq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

3.6.3. a) $\underline{f}_1 = \binom{4}{0}$, $\underline{f}_2 = \binom{0}{4}$, $\underline{f}_3 = \binom{0}{6}$, $\underline{g}_1 = \binom{2}{1}$, $\underline{g}_2 = \binom{2}{3}$.

b) eindige oplossing voor $p < -1$ en voor $-1 < p < \frac{1}{2}$, oneindige oplossing voor $p > \frac{1}{2}$, oneindig veel eindige oplossingen voor $p = -1$ en $p = \frac{1}{2}$.

$p = -1$: $\underline{x} = (4\lambda, 4 - 4\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$;

$p = \frac{1}{2}$: $\underline{x} = (4 + 2\lambda, \lambda)$, $0 \leq \lambda$.

4.5.1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 7$, $x_6 = 0$, $x_7 = 3$.

b) $x_1 = 0$, $x_2 = -6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = -5$, $x_6 = 0$, $x_7 = -3$.

c) neen; tweede kolom $< \underline{o}$.

d) $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{1}{2}$, $x_5 = 13$, overige 0.

e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ of $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ of ... ($3! = 6$ stuks).

4.5.2. a) $y_1 = 3$, $y_2 = 3$, $y_3 = 9$; basisvariabelen y_1, y_2, y_3; nietbasisvariabelen x_1, x_2; $\mathbf{O} = (0,0,8,4,10)$, $Q = (0,4,4,0,14)$, $R = (2,6,0,0,12)$.

b) x_2 wordt basisvariabele, y_2 nietbasisvariabele.

$$B_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \left\{ (x_1, y_2) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 2x_1 - y_2 \leq 4 & x_1 \geq 0 \\ -x_1 + y_2 \leq 4 & y_2 \geq 0 \\ x_1 + y_2 \leq 14 & \end{array} \right\}.$$

$$\text{Transformatievergelijkingen:} \begin{cases} x_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 4. \end{cases}$$

c) x_1, x_2, y_3 worden basisvariabelen, y_1 en y_2 nietbasisvariabelen;

$$\text{vergelijkingen:} \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \phantom{{}+y_3} = 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \phantom{{}+y_3} = 6 \\ -\frac{1}{2}y_1 + 1\frac{1}{2}y_2 + y_3 = 12 \; ; \end{cases}$$

Transformatievergelijkingen: $\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + 8 \\ y_2 = x_1 - x_2 + 4 \, . \end{cases}$

d) Gradiënt in O : (-2,3), in Q: $(\hat{x}_1,\hat{y}_2) = (1,-3)$, in R: $(\hat{y}_1,\hat{y}_2) = (-\frac{1}{2},-2\frac{1}{2})$.

5.8.1. Maximum 2100 voor $x_1 = 300$, $x_2 = 300$.

5.8.2. Maximum 20 voor $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

5.8.3. a) $\max(-7x_1 - 5x_5 + 16)$ o.d.v. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_4 - x_5 &\le 8 \\ -x_1 + x_4 + 4x_5 &\le 3 \\ 2x_1 - 3x_4 &\le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 &\ge 0. \end{aligned}$

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,3\lambda,2+6\lambda,3-3\lambda,0,13-9\lambda)$ voor $0 \le \lambda \le 1$.

b) tweede vraag:

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,3+\lambda,8+2\lambda,\lambda,0,4+3\lambda)$ voor $\lambda \ge 0$.

5.8.4. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $y_1 = 8$, $y_2 = 10$.

b)

y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	
1				-1	8
	1			7	10
		1		-2	2
			1	$\frac{1}{2}$	2
0	0	0	0	-2	6

5.8.5. a) Maximum 4 voor $x_1 = 5$, $x_2 = 6$.

5.8.6. Hulpmaximum na fase I is $-2 \neq 0$.

5.8.7. Maximum 100 voor $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 0$.

6.1.1. Minimum 27 voor $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

7.5.1. a) Maximum 9 voor $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

b) $0 \le c_1 \le 3\frac{1}{3}$; $c_2 \le 3$, $c_3 \le -6$, $c_4 \le -9$.

c) $b_1 \ge 6$, $b_2 \ge 0$, $b_3 \ge 6$.

7.5.2. a) Maximum 6 voor $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 2$.

b) maximum $6 - 2\lambda$ voor $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$; $-6 + 12\lambda$ voor $1 \leq \lambda \leq 1\frac{1}{4}$;

$-15\frac{1}{2} + 18\lambda$ voor $1\frac{1}{4} \leq \lambda \leq 1\frac{6}{17}$; oneindige oplossing voor $\lambda > 1\frac{6}{17}$

en voor $\lambda < -\frac{1}{2}$.

c) maximum $6 - 6\lambda$ voor $-3 \leq \lambda \leq 1$; $7 - 7\lambda$ voor $\lambda \geq 1$;

$7\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2}\lambda$ voor $\lambda \leq -3$.

8.7.1. $\min(4u_1 + 3u_2 - u_3)$ onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + u_3 &\geq -4 \\ u_1 + u_2 - 3u_3 &= 3 \\ u_1 \geq 0,\ u_2 \text{ vrij},\ u_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

8.7.2. a) $\min(96x_1 + 72x_2 + 72x_3)$ o.d.v.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geq 16 , \quad x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3) \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 11 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 24 . \end{aligned}$$

b) $\max(16u_1 + 12u_2 + 11u_3 + 24u_4)$ o.d.v.

$$\begin{aligned} 3u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 4u_4 &\leq 96 , \quad u_i \geq 0 \ (i = 1,2,3,4) \\ 3u_1 + u_2 + 2u_3 + 4u_4 &\leq 72 \\ 4u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 2u_4 &\leq 72 . \end{aligned}$$

c) Duaal: maximum 504 voor $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = 12$, $u_4 = 15$;
Primaal: minimum 504 voor $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

d) $x_1 = 2\frac{2}{5}$, $x_2 = 3\frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$; minimum $518\frac{2}{5}$.

Litteratuurlijst

G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions
Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963

S.I. Gass, Linear Programming
McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1958

G. Hadley, Linear Programming
Addison-Wesley Publishing Company, London/New York, 1962

M. Simonnard, Programmation linéaire
Dunod, Paris, 1962

S.I. Suchowitzki/L.I. Awdejewa, Lineare und konvexe Programmierung
Oldenburg Verlag, München/Wien, 1969

W. Vogel, Lineares Optimieren
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1967.

Engels-Nederlandse termenlijst

activity vector	aktiviteiten-of variabelenvektor
artificial variable	nulvariabele
assignment problem	toewijzingsprobleem
basic variable	basisvariabele
constraint	restriktie, beperking
cycling	cykelen
degeneracy	degeneratie, ontaarding
feasible solution	toegelaten oplossing, programma
generalized simplex method	lexicografische methode
integer programming problem	L.P.-probleem in gehelen
level	niveau (van een variabele)
lower bound	benedengrens
mixed integer problem	L.P.-probleem, gedeeltelijk in gehelen
objective function	objectfunktie, doelfunktie
pivot element	spil
polyhedron	veelhoek
polytope	veelvlak
ray	halfrechte
set	verzameling
slack (or surplus) variable	restvariabele
two phase method	tweefasenmethode
unrestricted variabele	vrije variabele (zonder onder- of bovengrens 0)
upper bound	bovengrens
vertex	hoekpunt