TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Probleemstellingen en Oplossingen bij het

MODELLENPRACTICUM

Practicumleiding:

Dr. J. Thiemann

1974

Inhoudsbeschrijving
MODELLENPRACTICUM
J. Thiemann
1974

Vraagstellingen en Oplossingen

JdG, 28 Augustus 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Opzet en organisatie van het modellenpracticum

1. Het doel van het modellenpracticum is het leren toepassen van wiskunde op problemen met een niet-wiskundige context (probleemformulering, probleem-analyse, interpretatie en rapportage van resultaten).

2. De werkwijze is als volgt: Aan de studenten wordt elke 14 dagen een probleem opgegeven, dat thuis bestudeerd moet worden en zo mogelijk opgelost. Van de resultaten van dit onderzoek wordt een verslag gemaakt. Tenslotte wordt het probleem in groepsverband besproken.

3. De deelnemers aan het modellenpracticum worden ingedeeld in 6 groepen van ongeveer 10 personen.
Het practicum heeft plaats op woensdagmiddag om de 14 dagen, te beginnen op 11 september. Plaats en uur zijn voor de verschillende groepen aldus:

groep	tijd	zaal
1, 2 en 3	13.30 - 15.00	5.50, 5.51 en 5.52
4, 5 en 6	15.15 - 16.45	5.50, 5.51 en 5.52.

De zalen 5.01, 5.77 en 5.78 zijn op practicummiddagen als werkruimte beschikbaar. In verband met de gang van zaken bij bestudering en rapportage van problemen (zie hieronder), vormen de studenten van elke groep koppels van 2 bij uitzondering 3 personen. Deze indeling geschiedt naar vrije keuze, maar is daarna in principe vast.

4. Op elke practicummiddag wordt een (nieuw) probleem opgegeven ter bestudering in de daaropvolgende 11 dagen. Het is de bedoeling dat koppelgenoten hierbij samenwerken; in ieder geval maakt elk koppel een verslag van de bevindingen en resultaten m.b.t. het probleem. Het verslag wordt door de leven van het koppel bij toerbeurt geschreven. De namen van de leden van het koppel, de naam van de schrijver, alsmede het nummer van de groep worden in het verslag vermeld. Het verslag wordt ingeleverd bij mevrouw A. Vrins (kamer 8.69 in het hoofdgebouw), uiterlijk maandagmorgen 10.00 uur voorafgaand aan de practicummiddag waarop het probleem besproken zal worden.

/2

Het kan voorkomen dat men naar eigen opvatting niet slaagt in een bevredigende formulering en/of oplossing van het probleem. Ook dan dient een verslag te worden ingeleverd, waarin van dit niet-slagen mededeling wordt gedaan en de aard van de moeilijkheden (zo mogelijk) duidelijk worden aangegeven.
Bij niet tijdig inleveren van een verslag wordt het koppel geacht niet deelgenomen te hebben aan het betreffende practicum-onderdeel.
Het leren van adequaat verslaggeven is één van de doelstellingen van het modellenpracticum. De kwaliteit van het verslag wordt dan ook betrokken bij het beoordelen van de gemaakte vorderingen.

5. Aan elk probleem wordt een groepsbespreking gewijd op de practicummiddag 14 dagen nadat het probleem opgegeven is. Genoemde verslagen vormen hierbij het uitgangspunt. Door de practicumleiding wordt van deze verslagen een samenvatting met commentaar gemaakt en aan de deelnemers aan de groepsbespreking uitgereikt.
De groepsdiscussie wordt als een van de belangrijkste aspecten van het practicum gezien.

6. Voor hen, die dat wensen is er gelegenheid tot een kort gesprek over het op te lossen probleem tijdens het spreekuur van de practicumleiding op maandag- en dinsdagmiddag. Men dient daartoe tijdig een afspraak te maken bij mevrouw A. Vrins, (kamer 8.69, tel. 2986; zij is elke ochten en op woensdag- en vrijdagmiddag aanwezig).

7. Het modellenpracticum wordt als voltooid beschouwd als minstens 10 van de 12 in het 1e jaar te behandelen problemen bestudeerd zijn, verslag ervan gemaakt is en als aan de groepsdiscussie ervan actief is deelgenomen. Bij voltooid practicum wordt één van de kwalificaties "goed" en "voldoende" gegeven, afhankelijk van de kwaliteit der verslagen en de inbreng bij de groepsdiscussie.

8. Bij een niet te grote achterstand in de afwerking van het practicum aan het eind van het studiejaar bestaat eventueel de mogelijkheid tot inhalen in september; dit in afhankelijkheid van de oorzaak der achterstand.
Deelname aan het 2e jaars modellenpracticum is slechts mogelijk na voltooiing van het 1e jaars modellenpracticum.

9. Zij die door bijzondere omstandigheden dit reglement niet kunnen volgen, dienen zich zo spoedig mogelijk met de practicumleiding in verbinding te stellen. In de meeste gevallen zal in onderling overleg een oplossing voor de moeilijkheden gevonden kunnen worden.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

Het Modellenpracticum

Inleiding: De primaire taak van de wiskundig ingenieur is het exploiteren van de wiskunde als hulpmiddel en gereedschap voor het oplossen van problemen welke zich voordoen in niet-wiskundige situaties; in de natuurwetenschappen, techniek, economie, econometrie, bedrijfskunde, sociale wetenschappen, enz. Aan deze taak kan hij op velerlei wijzen deelnemen; o.a. door

a) in een bepaald vakgebied (fysica, bedrijfskunde, sociologie, etc.), veelal in samenwerking met specialisten uit dat gebied, direkt te werken aan het formuleren en analyseren van zich daar voordoende problemen; de daarvoor nodige wiskundige methoden, zo hij ze niet reeds kent, in de literatuur op te sporen en zo nodig aan de specifieke behoefte aan te passen; de gewenste computerprogramma's op te sporen, aan te passen of zo nodig te ontwerpen en te construeren (applicatie software); te helpen bij de interpretatie van de resultaten van de wiskundige analyse;

b) op een ietwat grotere afstand van direkte toepassingen, maar toch met een goed inzicht in de behoeften aan wiskundig gereedschap in toepassingsgebieden, dit gereedschap door ontwerp en constructie van rekenmachine-programma's operationeel beschikbaar te maken, en door doelgericht wiskundig onderzoek inzicht te verschaffen in de toepassingsaspecten daarvan (opbouw programma bibliotheek).

c) ontwerp en constructie van die rekenmachineprogramma's, welke noodzakelijk zijn voor het vlot functioneren van een rekencentrum (informatica).

d) via het verrichten van fundamenteel wiskundig onderzoek, de weg te banen voor nieuwe toepassingsmogelijkheden van de wiskunde, of te komen tot verdieping van inzicht in bestaande methoden.

Hoewel de wiskundig ingenieur zich in zijn praktijk in het algemeen zal concentreren op één van deze activiteiten, moet hij een goed inzicht hebben in de centrale problemen en de methodiek van de andere activiteiten en in hun onderlinge relatie. De opleiding tot wiskundig ingenieur zal zich derhalve moeten richten op het aanbrengen van een brede kennis en vaardigheid in de wiskunde en in de informatica (gebruiken en doen gebruiken van rekenautomaten).

/2

Dit hoeft uiteraard niet te beletten dat de individuele student het zwaartepunt van zijn studie, in het bijzonder in de latere studiefasen, laat corresponderen met zijn persoonlijke interesse.

Het onderwijs in de wiskunde* in het kader van de opleiding tot wiskundig ingenieur beoogt de student

1) nuttige, bruikbare onderdelen van de wiskunde te leren en bij hem gevoel aan te kweken voor één of meer gebieden van de wiskunde. Dit moet er toe leiden dat hij de vakliteratuur op voor hem relevante gebieden van de wiskunde kan lezen, verwerken en erop kan voortbouwen;
2) een gevoel bij te brengen voor het gebruiken van de wiskunde. Hierdoor moet hij een idee krijgen over de rijkdom van de wiskunde als gereedschap en zelf vertrouwd raken met het gebruik van wiskunde bij het oplossen van problemen in de natuur- en technische wetenschappen, economie en econometrie, bedrijfskunde, sociale wetenschappen, enz.;
3) inzicht te geven in de soms aanzienlijk van de wiskundige verschillende denkwijze en wetenschappelijke benadering van problemen in gebieden van wetenschap, waarmee hij als wiskundige in aanraking kan komen;
4) verantwoordelijkheidsbesef bij te brengen t.a.v. zijn wiskundige activiteiten.

Deze veelzijdige doelstellingen van het wiskunde onderwijs brengen in het bijzonder de eerste en tweedejaars wiskundestudent in een moeilijke situatie. In het wiskunde onderwijs ligt het accent op het aanbrengen van wiskundekennis en vaardigheid. Een moeizaam proces, waarbij het voor de student soms nog niet te doorzien is waarom bepaalde onderdelen van de wiskunde tot de noodzakelijke basiskennis behoren.

/3

* In de opleiding tot wiskundig ingenieur neemt ook de informatica, de wetenschap van de informatieverwerking via rekenautomaten, een essentiële plaats in. Aangezien de informatica in haar fundamentele aspecten gezien kan worden als een speciale tak van de wiskunde, en dit geschrift betrekking heeft op een modellenpracticum waarin de informatica slechts een bescheiden rol zal spelen, wordt de langere maar wellicht juistere aanduiding "wiskunde en informatica" hier vermeden.

Tevens wordt hij geconfronteerd met een voor hem tot dan toe ongewone mate van abstractie en exactheid en met een voornamelijk deductieve redeneertrant. Daarnaast wordt ook begonnen met onderwijs in de natuurkunde waarop het onderwijs in de toepassing van de wiskunde sterk zal steunen. Dit natuurkunde onderwijs wil de student echter niet alleen de noodzakelijk geachte natuurkundekennis bijbrengen, maar wil hem ook de natuurwetenschappelijke, sterk inductieve denkwijze illustreren. De soms weinig exacte wijze waarop daarbij met begripsomschrijvingen en met wiskundige hulpmiddelen wordt omgesprongen heeft, naar de ervaring leert, op de beginnende wiskunde student vaak een bijzonder frustrerend effect. Nu moet echter bedacht worden dat dit niet alleen een probleem is voor de eerstejaars student. Het is een algemeen verschijnsel waarmee de wiskundige die zijn werk verricht binnen of in nauw contact met een niet-wiskundig wetenschapsgebied telkens opnieuw wordt geconfronteerd. Het is derhalve een essentieel onderdeel van de opleiding tot wiskundig ingenieur de student hiermee vertrouwd te maken en hem te leren door geschikt tegenspel te komen tot een adequate en wiskundig hanteerbare beschrijving van de hem voorgelegde situatie.
Het modellenpracticum beoogt reeds in het eerste studiejaar een begin te maken met dit onderdeel van de opleiding. Waar in de wiskunde colleges een basis gelegd wordt voor de verdere opbouw van de wiskunde kennis en de structuur en onderlinge samenhang van wiskundige theorieën, methoden en technieken hoofddoel vormen, gaat het in het modellenpracticum om het gebruik van de wiskunde. De aandacht gaat hierbij niet primair naar het oplossen van een reeds duidelijk gesteld wiskundig probleem, maar veeleer naar het wiskundig formuleren vanuit een min of meer vage probleemstelling in niet-wiskundige termen en naar het interpreteren van de verkregen oplossing in het (wetenschaps)gebied vanwaar het probleem afkomstig is. De student zal hierbij ervaren dat hij zelf doorgaans nog een belangrijke bijdrage moet geven aan de verduidelijking van het probleem, dat een verbaal geformuleerd probleem soms tot verscheidene, wiskundig sterk verschillende probleemstellingen kan leiden, dat abstractie nodig is van bijkomstigheden, dat soms bewust beperkingen moeten worden opgelegd om een wiskundig hanteerbare formulering te krijgen, dat de verkregen oplossing kan leiden tot een verbeterde herformulering van het probleem, dat soms eerst verwante problemen moeten worden opgelost voordat het eigenlijke probleem kan worden aangepakt, dat bijzondere gevallen soms controle leveren op de uitkomst verkregen voor een meer algemeen geval, etc.

Een bijzondere moeilijkheid biedt uiteraard het feit dat de eerstejaars student slechts over een zeer summiere wiskundekennis en -vaardigheid beschikt en weinig substantiële kennis van toepassingsgebieden bezit. De gebruikte wiskunde is dan ook zeer simpel, hetgeen echter nogmaals benadrukt dat niet de wiskunde als zodanig, maar het gebruik van wiskunde hoofdzaak is in dit practicum.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum

De exponentiële functie

In fysische, chemische, biologische, bedrijfskundige situaties stoot men vaak op processen waarbij een grootheid die het procesverloop beschrijft een verandering ondergaat die evenredig is met de momentane waarde van die grootheid zelf. Zo'n relatie

(1) $\qquad f'(t) = \alpha f(t)$

is een eenvoudig voorbeeld van de in wiskundige modelformulering veelvuldig voorkomende differentiaalvergelijkingen, d.w.z. relaties tussen een functie en haar afgeleiden.
Een eerste behandeling van differentiaalvergelijkingen wordt gegeven in het college Wiskunde 10/20.

Ten behoeve van het modellenpracticum zal hier al een beschouwing gegeven worden over differentiaalvergelijkingen van het type (1).
Oplossen van een differentiaalvergelijking betekent het bepalen van alle functies die aan zo'n vergelijking voldoen. Voor differentiaalvergelijkingen van type (1) is de oplossing zeer eenvoudig. Vermenigvuldiging van beide leden van (1) met $e^{-\alpha t}$ leidt voor elke $t \in (-\infty,\infty)$ tot de relatie

$$e^{-\alpha t}f'(t) - \alpha e^{-\alpha t}f(t) = 0$$

welke equivalent is met

$$\frac{d}{dt}\, e^{-\alpha t}f(t) = 0 \ .$$

Het voor elke $t \in (-\infty,\infty)$ gelijk aan 0 zijn van de afgeleide van de functie $e^{-\alpha t}f(t)$, houdt in dat deze functie over het interval $(-\infty,\infty)$ constant moet zijn. Hieruit volgt dat elke oplossing van (1) van de vorm

(2) $\qquad f(t) := ce^{\alpha t}$

moet zijn. Daar echter omgekeerd de functie (2) voor elke c aan (1) voldoet, kan gesteld worden: een functie $f(t)$ voldoet dan en slechts dan aan de differentiaalvergelijking $f'(t) = \alpha f(t)$ als zij een veelvoud is van de exponentiële functie $e^{\alpha t}$.

Voorbeelden van het optreden van de exponentiële functie.

a) Het afkoelen van hete lichamen.

Een lichaam L met een temperatuur T_0 wordt op moment t_0 ter afkoeling in een ruimte gebracht welke op constante temperatuur $T_r < T_0$ gehouden wordt. Wat is het temperatuurverloop van L voor $t \geq t_0$?

De fysica leert ons het volgende over de in een lichaam opgehoopte hoeveelheid warmte $\varphi(t)$ en de temperatuur $T(t)$ van dat lichaam

- als het lichaam warmte opneemt, dan stijgt de temperatuur evenredig met de warmte opname

$$(3) \qquad \frac{dT(t)}{dt} = \alpha \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

- als een lichaam van temperatuur $T(t)$ zich bevindt in een ruimte van temperatuur T_0, dan is de momentane warmte opname door het lichaam evenredig met het temperatuurverschil $T_r - T(t)$:

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta[T_r - T(t)] \ .$$

Uit deze twee fysische gegevens volgt

$$(5) \qquad \frac{dT(t)}{dt} = -\alpha\beta[T(t) - T_r] \ ,$$

d.w.z.: de verandering van de temperatuur van het lichaam L is evenredig met het verschil in temperatuur tussen het lichaam en de omgevende ruimte. Aangezien T_0 niet van t afhangt (en stellend $\gamma := \alpha\beta$) volgt uit (5)

$$\frac{d[T(t) - T_r]}{dt} = -\gamma[T(t) - T_r]$$

dus

$$T(t) - T_r = ce^{-\gamma t} \ .$$

Aangezien $T(0) = T_0$ is $c = T_0 - T_r$, zodat het temperatuurverloop beschreven wordt door

$$(6) \qquad T(t) = T_r + (T_0 - T_r)e^{-\gamma t} \ .$$

b) Verval van radioactief materiaal.

Radioactief materiaal bevat een groot aantal deeltjes die radioactief kunnen reageren en daarna radioactief neutraal zijn. Uit fysische waarnemingen weet men dat deze deeltjes volkomen onafhankelijk van elkaar reageren, en dat er een tijdsonafhankelijke kans λ bestaat dat zo'n reactie in een zeer klein tijdsinterval Δt plaats heeft. De sterkte van een hoeveelheid radioactief materiaal op een tijdstip t wordt bepaald door het aantal deeltjes V(t) dat nog niet neutraal is.

Op grond van bovenstaande overwegingen geldt hiervoor

$$V(t + \Delta t) - V(t) = -\lambda\, V(t)\Delta t$$

of, overgaand op het limietgeval voor $\Delta t \to 0$,

(7) $$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda V(t) \ .$$

Uitgaande van een radioactieve sterkte V(0) op moment t = 0, volgt hieruit voor het verloop van de radioactieve sterkte V(t) voor $t \geq 0$:

(8) $$V(t) = V(0)e^{-\lambda t} \ .$$

Voor een meer verfijnde behandeling zie:

c) Continue samengestelde interestrekening.

Is k(t) het kapitaal dat in continue samengestelde interestrekening tegen een rentefactor α is uitgezet, dan geldt voor een kleine tijdseenheid Δt

$$k(t + \Delta t) = k(t) + \alpha k(t)\Delta t \ .$$

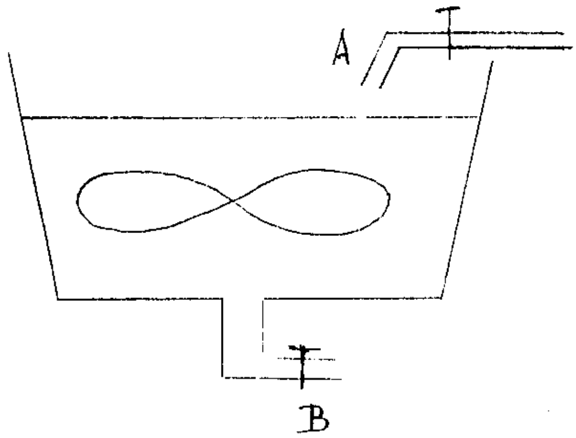
Door limiet overgang $\Delta t \to 0$ verkrijgt men voor $t \geq 0$

(9) $$\frac{dk(t)}{dt} = \alpha k(t) \ .$$

Uitgaande van een kapitaal k(0) op t = 0 volgt hieruit voot het kapitaalsverloop voor $t \geq 0$

(10) $$k(t) = k(0)e^{\alpha t} \ .$$

d) Mengen van materialen (poeders en vloeistoffen). De ideale menger.
In een continu proces worden aan een menger (zie figuur) bij A stoffen toegevoegd terwijl het mengstel bij B wordt afgetapt.



De totale hoeveelheid stof in de menger wordt constant gehouden, V; de toe- en afvoer snelheden zijn dus gelijk. Als op moment $t = 0$ de menger geheel gevuld is met stof m_1, en vanaf dat moment met snelheid R, de stof m_2 in concentratie c_2 wordt toegevoegd, wat is dan het concentratieverloop van m_2 in het bij B afgetapte mengsel?
De oplossing van dit probleem is eenvoudig als aangenomen mag worden dat op elk moment t de concentratie van m_2 in de gehele menger dezelfde waarde $c(t)$ heeft; d.w.z. als men te doen heeft met een ideale menger. Dan geldt nl:

$$Vc(t + \Delta t) = [Vc(t) - Rc(t) + Rc_2]\Delta t \ .$$

Door limiet overgang $\Delta t \to 0$ leidt dit tot de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{R}{V}(c_2 - c(t)) \ . \tag{11}$$

Rekening houdend met de aanname $c(0) = 0$ volgt hieruit voor het concentratieverloop van m_2 in het mengsel is:

$$c(t) = c_2(1 - e^{-\frac{R}{V}t}) \ . \tag{12}$$

e) Bevolkingsverloop in een insectenkolonie.
Bij de bestudering van de omvang van uit veel insecten bestaande insectenkolonies, gaat men soms uit van de volgende veronderstellingen:
- het aantal insecten dat per tijdseenheid sterft, is evenredig met het totaal aanwezige aantal;
- het aantal per tijdseenheden nieuw geboren insecten is evenredig met het aantal aanwezige vrouwelijke insecten;
- de verhouding tussen het aantal mannelijke en vrouwelijke insecten is constant in de tijd.

Duidt b(t) de totale bevolkingsomvang van de insectenkolonie aan op moment t dan geldt op grond van deze aannamen:

(13) $$\frac{db(t)}{dt} = -\alpha b(t) + \beta b(t) .$$

toename = afname + toename.
bevolking = door sterfte + door geboorte.

Uitgaande van een bevolkingsomvang b(0) op moment t = 0 volgt hieruit voor het bevolkingsverloop in de tijd $t \geq t_0$

(14) $$b(t) = b(0)e^{(-\alpha+\beta)t} .$$

Het is duidelijk uit (14) dat de insectenkolonie op den duur zal uitsterven als $\alpha > \beta$ is. Dit is intuitief ook duidelijk omdat α de sterfte snelheid representeert en β de geboorte snelheid. Voor $\alpha = \beta$ blijft de kolonieomvang constant.
Is $\alpha < \beta$ dan leert (14) dat de insectenkolonie zal blijven groeien en op den duur een zeer grote (∞ grote) omvang zal aannemen. Bij veel groeiprocessen is echter bekend dat onbeperkte groei niet optreedt maar dat op den duur een verradigingswaarde benaderd wordt. In welke gevallen wordt vaak verondersteld dat de groei van de betreffende grootheid evenredig is zowel met haar momentane waarde als met haar verschil t.a.v. de verzadigingswaarde v:

(15) $$\forall_{t>0} \ \frac{d}{dt} f(t) = \alpha f(t)[v - f(t)] .$$

Aanname van voortdurende groei impliceert

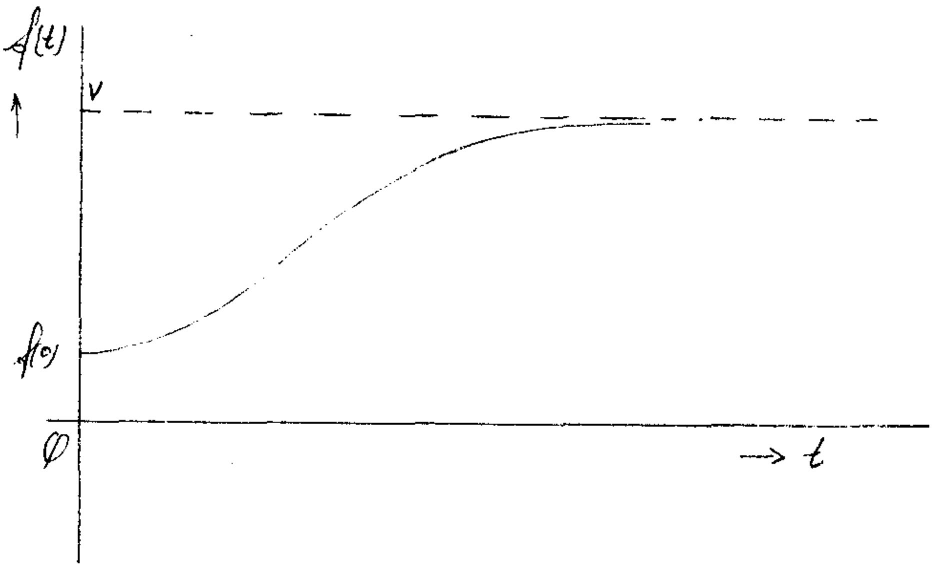
(16) $$\forall_{t>0} \ 0 < f(t) < v$$

terwijl het begrip verzadigingswaarde impliceert

(17) $$v = \lim_{t\to\infty} f(t) .$$

Uitgaande van een beginwaarde f(0) voor t = 0 (en f(t) rechts continu veronderstellend in t = 0) vindt men via partiële breuksplitsing (zie als oplossing van de differentiaalvergelijking (15):

$$\forall_{t\geq 0} \quad f(t) = \frac{vf(0)}{f(0) + (v - f(0))e^{-\alpha vt}} .$$



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum, probleem 1.

Railvervoer in een bos.

Een stuk bos wordt in exploitatie genomen. De in het bos gekapte bomen zullen naar een langs het bos lopende weg vervoerd moeten worden en daartoe wil men een aantal smalspoorlijnen in het bos leggen. Een gekapte boom wordt dan naar de dichtsbijzijnde rail gesleept en vandaar over deze rail naar de weg gereden.

Gevraagd wordt een spoorwegnet te ontwerpen waarvoor het totaal van de kosten voor transport van de bomen en exploitatie van het spoorwegnet zo laag mogelijk is.

Verdere gegevens:

Het stuk bos is rechthoekig met een lengte van 40 km en een breedte van 20 km. Genoemde weg loopt langs een der lange zijden.

Om organisatorische redenen dient het spoorwegnet te bestaan uit rechte stukken rail, loodrecht op de weg. De jaarlijkse kosten aan rente over de investering, afschrijving en onderhoud van een stuk rail van 20 km, inclusief wagentjes, bedragen ƒ 72.000.-.

De kosten voor het verslepen van een boom bedragen gemiddeld ƒ 8.- per km; transport-, laad- en loskosten voor railvervoer zijn verwaarloosbaar.

Tenslotte wordt de opbrengst van het bos geschat op gemiddeld 200 bomen per km^2 per jaar.

Onderwerp : Railvervoer in een bos (probl. 1)

Toepassingsgebied : bedrijfskunde

Hoofdaspecten : modelformulering, optimalisering van obj. fie, modelkritiek

Probleemformulering: zie uitgereikte stencil

Analyse van het probleem

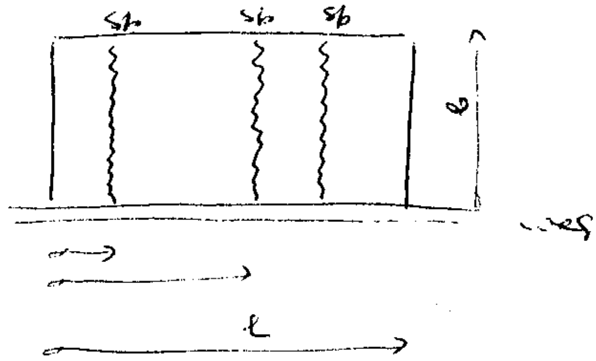


fig.1

def. gebruikte symb.

- n aantal sporen
- l lengte bos 40 km
- b diepte 20 km
- a gem. aantal bomen per km^2/jr 200 st
- s sleepkosten per boomkm f 8.-
- r railkosten (incl. wag.) per railkm f 7 voor

Het probleem luidt: Door ontwerp van optimaal net de transportkosten van kapplaats naar weg te minimaliseren. Deze transportkosten bestaan uit sleepkosten (naar dichtstbijzijnd spoor) en expl. kosten van het net.

Een spoornet wordt beschreven door aantal en ligging der lijnen. Intuitief schetsen we de lijnen op gelijke afstanden. We tonen aan dat dit terecht is: Gaan we uit van een gegeven aantal sporen dan zullen we deze zó moeten leggen dat de sleepkosten minimaal zijn. De ligging der lijnen bepaalt een aantal stroken (in elke strook wordt gesleept naar de in de strook gelegen lijn). Als er nu een spoor is dat niet in het midden van zijn strook ligt, dan leidt verschuiving van dat spoor naar het midden tot een lagere totaal van sleepkosten:

fig.2

Door verschuiving van één of meer sporen kan dus een gunstiger spoornet worden verkregen. Voor de gunstigste ligging moet zo'n verschuiving onmogelijk zijn. Conclusie: elk spoor moet in het midden van zijn strook liggen. Bijgevolg zijn de stroken even breed.

Opstellen van objectfie

di. tot. transportkosten f(n), van gehele bos, gemiddeld per jaar, bij n spoorlijnen

Veronderstellingen

1) de bomen die in een reeks van jaren gekapt zullen worden staan regelmatig verspreid
2) de ruimte ingenomen door de sporen is verwaarloosbaar
3) we kunnen slepen langs de kortste weg.

Tot. sleepkosten per jaar (gem) voor alle bomen, gem over $\frac{l}{4n}$ km bedragen $al.\frac{l}{4n}.s$. Tot. spoorkosten rn

Tot. transportkosten : $f(n) = \dfrac{al^2 bs}{4n} + rn \quad (n \in N) \quad (1)$

We kunnen deze fie voortzetten tot een diffbare fie op $(0,\infty)$. Daartoe definiëren we

$$f(x) := \frac{al^2 bs}{4x} + rx \qquad (x>0) \qquad (2)$$

Uit het tekenverloop van $f'(x)$: $\underset{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{asb}{r}}}{- - - \quad + + +}$

volgt dat $f(x)$ monotoon dalend is voor $x < \frac{l}{2}\sqrt{\frac{asb}{r}}$ en monotoon stijgend voor $x > \frac{l}{2}\sqrt{\frac{asb}{r}}$, zodat met

$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{asb}{r}} = 13\frac{1}{3}$, $f(n)$ minimaal is voor $n = 13$ of 14

Nu is $f(13) = 1.921.000,-$ en $f(14) = 1.922.000,-$; zodat n optimaal 13 bedraagt

We kunnen het minimum van f ook anders bepalen. Als n het optimale aantal lijntjes is, dan geldt voor alle $m \in N$.

$$f(n) \leq f(m)$$

of $\quad n + \frac{t}{n} \leq m + \frac{t}{m}$, met $t = \dfrac{al^2 bs}{4r}$

of $\quad mn^2 + tm \leq nm^2 + tn$

of $\quad mn(n-m) \leq t(n-m)$, dus

$mn \leq t$ voor $m<n$ en $mn \geq t$ voor $m>n$

Voldoende hiervoor is

$$(n-1)n \leq t \quad \text{en} \quad (n+1)n \geq t$$

dwz. $\quad \sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leq n_{opt} \leq \sqrt{t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

Met $\sqrt{t+\frac{1}{4}} = 13,\ldots$ volgt $n_{opt} = 13$

Discussie va het resultaat

$f(13) = 1.921.000,-$, $f(14) = 1.922.000,-$

$f(12) = 1.931.000,-$

Hiernaast de tot. transportkosten bij $n = 0$: $12.800.000,-$

Merk op hoe gering de verschillen zijn, tussen $f(12)$, $f(13)$ en $f(14)$. De uiteindelijke keuze van n zal niet op grond van het hier becijferde verschil worden gedaan, maar zal veeleer afhangen van door ons nog niet beschouwde details (waaronder ook ons nog onbekende informatie)

We komen nog terug op de conclusie: het opt. aantal lijnen verschilt minder dan 1 van

$$\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{asb}{z}}$$ (controleer de dimensie)

dit betekent ruwweg: aantal sporen evenredig met ℓ, met $\sqrt{a}$ etc. Dit inzicht willen we niet graag missen.

Kritiek op de vraagstelling

1) het ligt bepaald niet voor de hand de dichtbij de weg gekapte boom naar het spoor te slepen als deze afstand beduidend groter is

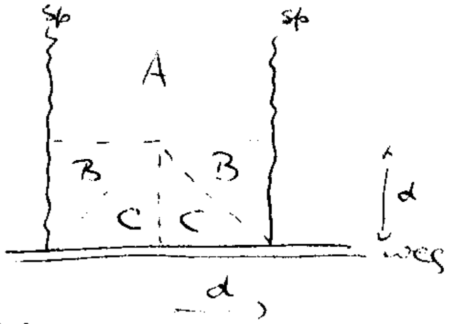


fig.3

Zij $d :=$ halve spoorafst $= \frac{\ell}{2n}$

In $f(n)$ is voor alle bomen in rekening gebracht de gem. sleepafst $= \frac{1}{2}d$. Voor de bomen op afstand kleiner dan d van de weg is de gemiddelde afstand kleiner, nl $\frac{1}{3}d$. (voor bomen B naar het spoor, voor bomen C naar de weg)

Tot besparing bij deze werkwijze

$$a\ell d\left(\frac{1}{2}d - \frac{1}{3}d\right).s = \frac{a\ell^3 s}{24n^2}$$, zodat we in plaats van met $f(n)$, te maken krijgen met $f_1(n)$

$$f_1(n) = zn + \frac{a\ell^2 bs}{4n} - \frac{a\ell^3 s}{24n^2}$$

kritiek 2) Als we bv. i.v.m. beperkte financieringsmogelijkheden op de spooraanleg zouden moeten besparen ontstaat een geheel nieuw probleem. Maar wat zijn de gevolgen van het weglaten van een klein stukje aan het einde van de sporen?

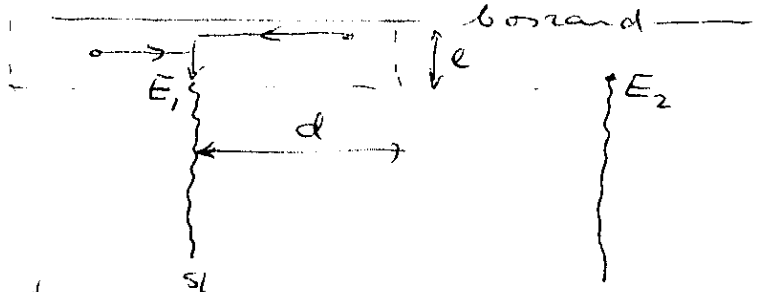


fig. 4

De bomen uit een strook ter breedte e moeten nu naar het einde E van één der sporen worden gesleept. De figuur suggereert al dat hier misschien iets in zit.

Een gemakkelijke overschatting (slepen langs onderling loodrechte trajecten, zie fig 4) leidt tot

Tot extra sleepkosten $< a l . e . \frac{1}{2} e s$, terwijl op railkosten wordt bespaard $n e \rho$ ($\rho :=$ kosten rail excl wagentjes, per km)

De besparing is dus minstens $n e \rho - \frac{1}{2} a l s e^2$

Hieruit volgt dat voor niet te grote e de besparing positief is.

We hebben hier dus een detail te pakken dat de moeite van nader onderzoek waard kan zijn. Als we ook nog een overschatting weten te vinden, kan worden beoordeeld of een nauwkeuriger berekening de moeite waard is. We voeren dit niet uit.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum, probleem 2

De weg door het moeras.

Een dorp, gelegen in een moerassig gebied, moet door een weg verbonden worden met een stad, gelegen aan de rand van dit gebied. De aanleg van een weg over moerasgrond is duurder dan die van een weg over vaste grond. Men zal daarom wellicht kunnen besparen op de aanlegkosten, door de weg vanaf de stad eerst een eind langs de rand van het moeras over vaste grond te laten lopen. (De rand van het moeras is recht; het dorp ligt 8 km van de rand van het moeras en hemelsbreed 11 km van de stad).

De aanlegkosten van een weg over vaste grond zijn bekend, t.w. ƒ 66.000.- per km, maar die van een weg over moerasgrond kent men slechts bij benadering, t.w. tussen ƒ 100.000.- en ƒ 200.000.- per km.
Door onderzoek van de moerasgrond zal men eventueel een nauwkeuriger schatting van deze aanlegkosten kunnen maken. De kosten van zo'n onderzoek mogen niet meer bedragen dan de besparingen die eruit kunnen voortvloeien.

Ga na, hoeveel men hoogstens voor zo'n onderzoek mag uitgeven.

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum, uitwerking probleem 2:

De weg door het moeras

Toepassingsgebied: Bedrijfskunde
Hoofdaspecten: probleemformulering
minimaliseren door differentieren
analyse van een functie van twee variabelen

Situatieschets.

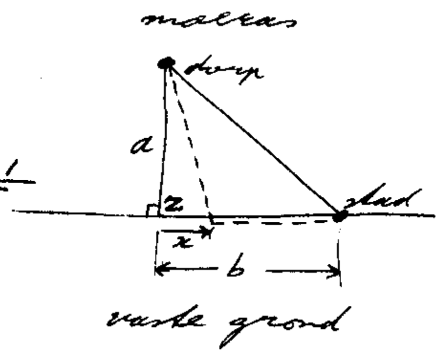


fig. 1

Laten a en b de in de figuur aangegeven afstanden; uit de gegevens volgt:

$$a = 8 \text{ km.} \quad , \quad b = \sqrt{57} \text{ km.}$$

Een weg van het dorp naar de rand van het moeras is minstens 8 km lang. We veronderstellen nu dat het moeras zo homogeen is, dat we als de gemiddelde kilometerprijs voor zo'n weg de gemiddelde kilometerprijs voor het hele moeras kunnen nemen. Op grond van deze veronderstelling is het voldoende slechts wegen te beschouwen die bestaan uit een recht stuk door het moeras en een stuk langs de rand van het moeras. Zo'n weg (zie stippellijn in fig. 1) karakteriseren we door een parameter x; de waarde van x is gelijk aan de afstand van de knik in de weg tot het punt z als die knik tussen z en de stad ligt en minus deze afstand in het andere geval.

Verder definiëren we
p: de gemiddelde kilometerprijs voor wegen over moerasgrond
q: de kilometerprijs voor een weg over vaste grond.
Gegeven is

$$100.000 \text{ gld/km} \leq p \leq 200.000 \text{ gld/km} \quad , \quad q = 66.000 \text{ gld/km.}$$

Probleemformulering. Wanneer géén onderzoek gedaan wordt, is het enige dat men kan doen: een of andere weg aanleggen en achteraf berekenen hoeveel het goedkoper had gekund. Een onderzoek mag niet meer kosten dan dit verschil, anders kan men i.p.v. dit onderzoek uit te voeren beter direct genoemde weg aanleggen. De aldus gevonden bovengrens voor de onderzoekkosten maken we nu zo laag mogelijk door de beschouwde weg zo geschikt mogelijk te kiezen.

<u>Oplossing.</u> Laat $f(x,p)$ de prijs zijn van een weg met parameter x bij kilometerprijs p voor moerasgrond, dan geldt

(1) $$f(x,p) = p\sqrt{a^2+x^2} + q(b-x)$$

Deze prijs hangt van x af, en zal voor zekere waarde x_p van x het kleinst zijn. Door differentiëren van $f(x,p)$ naar x en beschouwing van de afgeleide volgt voor parameter en prijs van de (voor kilometerprijs p) goedkoopste weg

(2) $$x_p = \frac{qa}{\sqrt{p^2-q^2}} \quad \text{en} \quad f(x_p,p) = \sqrt{p^2-q^2}\cdot a + qb$$

Bij aanleg van de weg met parameter x zal het teveel betaalde $V(x,p)$ dus achteraf blijken te zijn: $f(x,p) - f(x_p,p)$, dat is

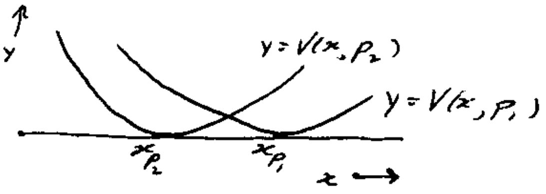
$$V(x,p) = p\sqrt{a^2+x^2} - qx - \sqrt{p^2-q^2}\, a$$

Dit bedrag is afhankelijk van p en we willen weten wat de maximale waarde ervan is voor p in het interval $[p_1, p_2]$ ($p_1 := 100.000$ gld/km, $p_2 := 200.000$ gld/km)

Differentiëren we $V(x,p)$ naar p, dan blijkt dat deze afgeleide positief resp. negatief is voor $p > p_0$ resp. $p < p_0$ voor zekere p_0 (afhankelijk van x). Hieruit volgt, dat het gezochte maximum van $V(x,p)$ gelijk is aan $V(x,p_1)$ of $V(x,p_2)$ en dus aan de grootste van de twee:

$$\max\{V(x,p_1), V(x,p_2)\}.$$

We moeten nu x zo kiezen dat deze bovengrens $\max\{\cdots\}$ voor de onderzoekkosten zo laag mogelijk is. Door differentiatie van $V(x,p_1)$ naar x blijkt, dat $V(x,p_1)$ een dalende functie van x is op het interval $(-\infty, x_{p_1})$ en stijgend op (x_{p_1}, ∞). Evenzo is $V(x,p_2)$ dalend op $(-\infty, x_{p_2})$ en stijgend op (x_{p_2}, ∞).



$\max\{V(x,p_1), V(x,p_2)\}$ is dus minimaal voor die x waarvoor geldt:

$$x_{p_2} < x < x_{p_1} \quad \text{en} \quad V(x,p_1) = V(x,p_2).$$

Substitutie hierin van uitdrukking (3) voor $V(x,p)$ geeft een vierkantsvergelijking in x. Substitutie van de oplossing hiervan in $V(x,p_1)$ of $V(x,p_2)$ levert de gezochte bovengrens voor de onderzoekkosten: $f\,23.000,=$.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 3

Zoutwinning

Bij het winnen van zout in een z.g. natte zoutmijn pompt men water in een bekken dat zich bevindt in een ondergrondse zoutlaag en tegelijkertijd pompt men water uit het bekken omhoog. In het opgepompte water is zout opgelost en door verdamping van het water wordt dit zout vrijgemaakt. Bij deze vorm van zoutwinning is de verdamping van het water de belangrijkste kostenfactor. Deze factor kan beïnvloed worden door wijziging van de pompsnelheid; bij zo'n wijziging verandert n.l. de concentratie van de opgepompte zoutoplossing en daarmee de verdampingskosten per kilo gewonnen zout.

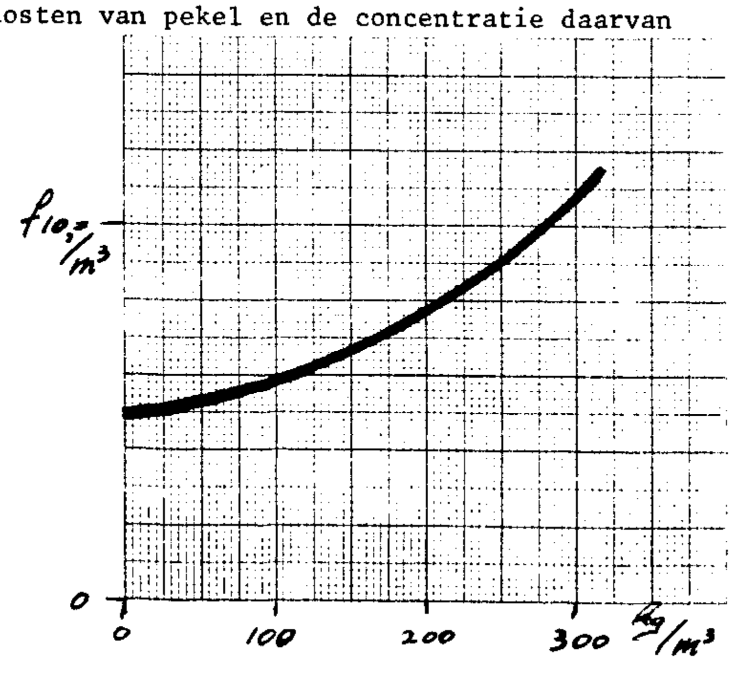
Bij een bepaalde zoutmijn gaat men over tot vernieuwing van de verdampingsinstallatie en men wil de capaciteit van de nieuwe installatie zó groot kiezen, dat bij de meest rendabele pompsnelheid gewerkt kan worden. Bepaal deze pompsnelheid met behulp van de volgende gegevens.

1) De hoeveelheid zout die van de bekkenwand in oplossing gaat per tijdseenheid per oppervlakte-eenheid is evenredig met het verschil tussen de concentratie van de zoutoplossing bij de wand en de verzadigingsconcentratie; de laatste is 317 kg/m^3.

2) Bij de tot nu toe gebezigde pompsnelheid van 10 m^3/h is de concentratie van de opgepompte pekel 210 kg/m^3.

3) De opbrengst van het zout bedraagt, na aftrek van de kosten voor verpakking, verzending etc. ƒ 53,- per ton, terwijl jaarlijks minstens 25.000 ton afgezet kan worden.

4) Het verband tussen de verdampingskosten van pekel en de concentratie daarvan is gegeven in de volgende grafiek.



Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

modellenpracticum, uitwerking probleem 3

Zoutwinning

Toepassingsgebied: bedrijfskunde

Hoofdaspecten ! modelformulering in fysische situatie met toepassing van enige natuurkunde
verwerking van grafische gegevens

bet. gebruikte symbolen

C_0 zoutconcentratie van verz. pekel ($C_0 = 317\ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$)

p gecorr. prijs v zout ($p = 0{,}053\ \mathrm{fl}/\mathrm{kg}$)

$g(C)$ verdampingskosten bij concentratie C

Per tijdseenh. en per eenh. van wandopp lost op een hoeveelh zout

$$\lambda_1 (C_0 - C)$$

waarin C de concentratie ter plaatse, en λ_1 een fysische const. is.

Veronderstellen we nu 1) de concentratie heeft over het gehele bekken dezelfde waarde, 2) de zoutformatie is homogeen (d.i. λ_1 heeft overal dezelfde waarde), 3) het bekken is groot, zodat de oppervlakte van de wand slechts verwaarloosbaar weinig verandert in de tijd,

dan lost in totaal per tijdseenheid op een hoeveelh. zout

$$\lambda_2 (C_0 - C_1)$$

(waarin λ_2 een constante is).

De gemaakte veronderstellingen sluiten blijkbaar aan bij het gegeven onder 2): Door het oppompen van een constante hoeveelheid pekel per tijdseenh. en het aan het bekken toevoeren van de constante (aangepaste) hoeveelh. water wordt een stationaire situatie teweeg gebracht: de concentratie is constant in de tijd.

Per tijdseenheid wordt evenveel zout opgepompt als er oplost.

Dus bij pompsnelheid V en concentratie C geldt:

$$V \cdot C = \lambda_2 (C_0 - C) \tag{1}$$

met geg. 2) volgt

$$\lambda_2 = \frac{2100}{107}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h} \tag{2}$$

De zoutproductie per tijdseenh. is V.C, de opbrengst hiervan is p.v.C, de verdampingskoste bedragen per tijdseenh V. q(C). Voor de winst F(C) per tijdseenh. bij concentratie C geldt dus

$$F(C) = pvC - v\,q(C) \qquad \text{en mbv (2) volgt}$$

$$F(C) = \lambda_2 (C_0 - C)\left(p - \frac{q(C)}{C}\right) \qquad (3)$$

De functie F moet worden geoptimaliseerd
We beginnen met een globale verkenning

C (kg/m³)	q(C) (gld/m³)	$F(C)/\lambda_2$ (gld/h)
	5.90	−1.30
100	6.25	0,58
125	6.65	1,45
150	7.15	1,72
175	7.70	1,70
200	8.35	1,46
225	9.05	1,13
250	7.35	1,75
185		

De hiermee verkregen indruk wordt nog wat gedetailleerd:

C	< q(C) <		< $F(C)/\lambda_2$ <	
175	7.00	7.30	1.60	1,85
180	7.10	7.40	1,63	1,86
185	7.20	7.50	1,64	1.86
190	7.30	7.60	1,65	1.85
195	7.40	7.70	1,65	1,84

Een beoordelaar van deze situatie, die beschikt over extra informatie: „de objectfie is glad" zal nu in staat zijn te besluiten: $C = 185$ kg/m³ is een gunstige concentratie, of

$185 < C < 190$ is een gunstig C-interval; dus met (1) en (2)

$V = 13,4$ m³/h of $12,1 < V < 13,4$ m³/h is gunstige pompsnelh.

Een onderzoekprocedure waarbij dergelijke extra informatie geheel overbodig is, is bv de volgende: We vermoeden dat het optimum in de buurt van $C = 185$ kg/m³ ligt. Daarom benaderen we q in de buurt van dat punt door een lineaire fie $\tilde{q}$ ..., en wel zó, dat de grafiek van $\tilde{q}$ raakt ~~aan de~~ onderkant van de „grafiek" van q in het punt $C = 185$ kg/m³

We vinden dan $\tilde{q}(c) = \alpha + \beta C$ met

$\alpha = 3{,}30$ gld/m³ en $\beta = 0{,}021$ gld/kg

Laat $\tilde{F}$ de obj. fie zijn met kostenfie $\tilde{q}$ i.p.v. q:

$$\tilde{F}(c) = \lambda_2 (C_0 - C)\left(p - \frac{\alpha + \beta C}{C}\right) \tag{4}$$

We bepalen door differentiatie de waarde C^* van C, waarvoor $\tilde{F}$ maximaal is en vinden $C^* = 180{,}8$ kg/m³

Nu zal ook $F(C)$ in de buurt van C^* maximaal zijn omdat $\tilde{F}$ in deze buurt een goede benadering is van F en verder een overschatting van F. Preciezer:

$$F(c) \leq \tilde{F}(c) \leq \tilde{F}(c^*) = F(c^*) + \left(\tilde{F}(c^*) - F(c^*)\right) =$$

$$= F(c^*) + \frac{\lambda (C_0 - C^*)}{C^*}\left(q(C^*) - \tilde{q}(C^*)\right) \leq F(C^*) + \Delta$$

met $\Delta = 5{,}10$ gld/h.

Dit geldt voor elke C en dus geldt ook voor de maximale waarde F_{max} van F:

$$F_{max} \leq F(C^*) + \Delta$$

Tevens geldt $F(C^*) \leq F_{max}$, zodat $F(C^*)$ en F_{max} niet meer dan Δ verschillen.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 4.

De besteldienst

Een firma heeft te A. drie verkooppunten:
Eén centrale winkel met daaraan verbonden magazijn en kantoor en twee filialen. Tussen de centrale winkel en elk der filialen heeft dagelijks postverkeer plaats bestaande uit brieven, pakjes e.d. Om dit postverkeer te verzorgen laat de firma gedurende de hele dag een bestelwagen rijden tussen de centrale winkel en de filialen.

Nu is het postverkeer met een der filialen intensiever dan dat met het andere filiaal en op grond daarvan heeft men besloten telkens vijf maal naar het eerste filiaal te rijden en vervolgens één maal naar het andere. Ga na of deze dienstregeling de best mogelijke is en, zo nee, bepaal de best mogelijke dienstregeling.

Gegevens: het aantal poststukken per dag bedraagt gemiddeld:
Van centrale winkel naar 1e filiaal 170 en in omgekeerde richting 15; voor het 2e filiaal zijn deze aantallen 22 resp. 9. De filialen liggen beide op 15 minuten rijden van de centrale winkel verwijderd; hun onderlinge afstand is 30 minuten rijden.

Modellenpracticum, uitwerking probleem 4.

De besteldienst

Hoofdaspecten: probleemformulering
modelbouw

Probleemanalyse. Gevraagd wordt een dienstregeling te ontwerpen, d.w.z. een lijstje van bestemmingen (centrale winkel, 1e en 2e filiaal) die door de bestelwagen achtereenvolgens bezocht moeten worden.

De huidige dienstregeling is opgebouwd uit ritten van de centrale winkel naar een filiaal en terug. Dit aspect van de dienstregeling kan niet verbeterd worden. Het levert immers geen tijdwinst op als van het ene naar het andere filiaal gereden wordt zonder de centrale winkel aan te doen en verder behoeft de bestelwagen bij deze manier van rijden steeds slechts de post te bevatten voor de eerstvolgende bestemming, zodat overschrijding van de capaciteit van de bestelwagen slechts in het onvermijdelijke geval zal optreden.

Onafhankelijk van de gebruikte dienstregeling is het aantal poststukken dat per dag verwerkt wordt en het aantal ritten dat de bestelwagen maakt; slechts de verdeling van de poststukken over de verschillende ritten hangt af van de dienstregeling. M.b.t. de capaciteit van de bestelwagen dient slechts erop gelet te worden, dat de dienstregeling geen aanleiding geeft tot 'n ophoping van post op één punt, welke deze capaciteit te boven gaat.

Het enige relevante verschil tussen dienstregelingen bestaat daarom uit het verschil in de optredende wachttijden voor de poststukken. We moeten dus een dienstregeling ontwerpen, die wat betreft de optredende wachttijden zo gunstig mogelijk is.

Oplossing. Structuur van de dienstregeling.

We duiden de centrale winkel aan met C en het 1e resp. 2e filiaal met A resp. B. De dienstregeling noteren we als een rijtje a's en b's; hierbij betekent a een rit van C naar A en terug en b een rit van C naar B en terug.

(1e fil.) (centr. w.) (2e fil)

$$A \overset{a}{\rightleftarrows} C \overset{b}{\leftrightarrows} B$$

Dat na de voltooiing van een rit de beste keus is voor de volgende rit, a of b, hangt af van de voorraden post die in A, B en C liggen te wachten. Deze voorraden zullen i.h.a. afhangen van de manier waarop tot dan toe gereden is. Dit is echter niet het geval als tijdens de laatste twee ritten zowel A als B bezocht is; in dat geval bevatten de voorraden in A, B en C n.l. geen poststukken die langer dan twee rittijden geleden geproduceerd zijn en deze voorraden zijn dus bepaald door het laatste paar ritten: ab of ba.

Beschouw een willekeurig paar ab in de dienstregeling (d.w.z. een rit a gevolgd door een rit b). Het rijtje bestaande uit alle ritten die hierop volgen, tot en met het eerstvolgende paar ab zal zich nu steeds herhalen; immers, na elk paar ab in de dienstregeling hebben we dezelfde voorraden in A, B en C en moeten we dus dezelfde keus doen. De dienstregeling bestaat dus uit herhalingen van een rijtje van de vorm:

"nul of meer b's, nul of meer a's, a, b"

en dit is hetzelfde als herhalingen van een rijtje van de vorm

"één of meer a's, een of meer b's"

Dat de beste keus voor de volgende rit slechts zou afhangen van de voorraden in A, B en C en niet van het uur van de dag steunt op de veronderstelling, dat de productie van poststukken homogeen over de dag verdeeld is. De huidige dienstregeling, d.w. herhalingen van steeds hetzelfde sextal ritten, maakt deze veronderstelling plausibel.

Verder hebben we bij de bovenstaande afleiding gedaan alsof de dienstregeling een onbeperkte lengte heeft (we hebben n.l. aangenomen dat steeds minstens tweemaal het paar ab optreedt). Dit kan gerechtvaardigd worden door de aanname dat aan het eind van de werktijd zowel de productie als de bestelling van poststukken stopt en dat beide weer beginnen bij de aanvang van de werktijd. We kunnen dus de dienstregeling voor opvolgende dagen aaneengeregen denken tot één oneindig lange dienstregeling (we laten hier de mogelijkheid van verschillende dienstregelingen voor verschillende dagen even open.

Berekening van de wachttijden. Elke reis van C naar A wordt 15 min. later gevolgd door de terugreis van A naar C. De tijdstippen waarop post van A naar C vertrekt vallen dus steeds 15 min. later dan de tijdstippen waarop post van C naar A vertrekt. Voor beide soorten post zijn de optredende wachttijden dus hetzelfde en we mogen daarom veronderstellen, dat alle post die tussen A en C uitgewisseld wordt, van C naar A gaat. Analoog voor C en B.

We definiëren nu:

p: het aantal poststukken bestemd voor uitwisseling tussen A en C dat gemiddeld per tijdseenheid geproduceerd wordt

q: idem voor B en C

τ: rijtijd van C naar A (of B) en terug.

Uit de gegevens volgt: $p = 185$ per dag, $q = 31$ per dag,

$\tau = 30$ min.

Beschouw nu een dienstregeling bestaande uit herhalingen van de cyclus

"m ritten a, n ritten b".

Bepalen we voor elk tweetal opvolgende ritten a de tijdsduur tussen deze ritten, dan vinden we in één cyclus:

(1) $(m-1)$ maal 'n tijd τ en 1 maal 'n tijd $(n+1)\tau$;

voor de ritten b analoog:

(2) $(n-1)$ maal 'n tijd τ en 1 maal 'n tijd $(m+1)\tau$.

Als tussen twee opvolgende ritten a (resp b) een tijd t verloopt, dan betekent dit voor de poststukken voor A (resp. B) die in deze tijd geproduceerd worden een wachttijd die ligt tussen t en o, en afhankelijk is van het tijdstip van productie

Criterium voor de "beste" dienstregeling.

We moeten nu een criterium hebben om een dienstregeling op grond van wachttijden te kunnen beoordelen. We kiezen (!) nu als objectfunctie de som van alle wachttijden die optreden gedurende een bepaald tijdsverloop, zeg één dag; de dienstregeling waarvoor deze som het kleinst is beschouwen we als de best mogelijke.

Het gekozen criterium houdt in, dat elk gewacht uur even zwaar telt. Dit is b.v. zo in het geval dat het postverkeer aanvulling van winkelvoorraden betreft; elk uur, dat de voorraad niet aangevuld is levert evenveel gemiste verkoopkansen op. Verder wordt bij keuze van dit criterium aangenomen dat elk poststuk even belangrijk is

Een andere mogelijke objectfunctie is b.v. het maximum van de optredende wachttijden. Het minimaal zijn van deze grootheid zou een geschikt criterium kunnen zijn in het geval er b.v. aan bederf onderhevige waar of ijsblokjes vervoerd worden.

Om tot een gefundeerde keuze van een criterium te komen zijn verdere gegevens nodig, waaruit blijkt hoe zwaar de verschillende wachttijden voor de diverse poststukken wegen.

Bepaling van de objectfunctie.

We gaan verder met de gekozen objectfunctie, de som van alle wachttijden op één dag. Daar het aantal poststukken per dag niet afhangt van de gebruikte dienstregeling, kunnen we als objectfunctie net zo goed de gemiddelde wachttijd per poststuk nemen.

Als tussen twee opeenvolgende ritten a een tijd t verloopt, dan betekent dit voor de pt poststukken voor A, die in deze tijd geproduceerd worden, een gemiddelde wachttijd van $\frac{1}{2}t$. Voor deze poststukken is de som der wachttijden dus $pt \cdot \frac{1}{2}t$, dat is $\frac{1}{2}pt^2$

M.b.v. de gevonden tussentijden (1) voor ritten a vinden we voor de post naar A als som van de wachttijden in één cyclus:

(3) $$(m-1)\cdot\tfrac{1}{2}p\tau^2 + 1\cdot\tfrac{1}{2}p\left[(n+1)\tau\right]^2.$$

Voor post naar B analoog:

(4) $$(n-1)\cdot\tfrac{1}{2}q\tau^2 + 1\cdot\tfrac{1}{2}q\left[(m+1)\tau\right]^2.$$

Het in één cyclus geproduceerde aantal poststukken is

(5) $(p+q)(n+m)\tau$, zodat de gemiddelde wachttijd per poststuk bedraagt:

$$\frac{p\left[m-1+(n+1)^2\right]+q\left[n-1+(m+1)^2\right]}{m+n}\cdot\frac{\tau}{2(p+q)}$$, dat is

(6) $$\left\{\frac{pn(n+1)+qm(m+1)}{n+m}+p+q\right\}\cdot\frac{\tau}{2(p+q)}.$$

(7) Zij nu $F(m,n) := \dfrac{pn(n+1)+qm(m+1)}{n+m}$ $(m,n=1,2,\dots)$,

dan moeten we dus díe waarden van m en n bepalen, waarvoor $F(m,n)$ het kleinst is.

<u>Bepaling van het extremum van de objectfunctie.</u>

Vergelijken we $F(m,n)$ met z'n buren $F(m+1,n)$, $F(m,n-1)$, $F(m-1,n+1)$ etc., dan blijkt te gelden:

$$F(m+1,n+1)-F(m,n) = 2\cdot\frac{pm(n+1)+qn(m+1)}{(n+m)(n+m+2)} > 0$$, zodat

$F(m,n) < F(m+1,n+1)$ $(m,n=1,2,\dots)$

Dit betekent, dat we slechts paren (m,n) waarvoor $m=1$ of $n=1$ hoeven te onderzoeken.

Daar $p>q$, volgt uit (7) dat $F(k,1)<F(1,k)$ $(k=2,3,\dots)$

Dus moet gelden $n=1$.

Minimaliseren van $F(m,1)$, dus van

$$\frac{2p+qm(m+1)}{m+1}$$ geeft $m = 2$.

Bij het gekozen criterium is de beste dienstregeling dus: 2 maal naar A en 1 maal naar B enz.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 5.

Levensduur van isolatiemateriaal

De isolatie van een bepaald type electromotor gaat tijdens het gebruik van de motor in kwaliteit achteruit. De oorzaak hiervan is de geleidelijke omzetting van één der bestanddelen van het isolatiemateriaal.
Als dit bestanddeel voor 60% is omgezet, dan voldoet de isolatie niet langer aan de gestelde eisen en moet een en ander vervangen worden.

Nu heeft de genoemde omzetting sneller plaats naarmate de temperatuur hoger is en als gevolg hiervan zal de levensduur van de isolatie afhangen van de bedrijfstemperatuur van de motor (die weer bepaald wordt door de belasting van de motor). De fabrikant van het isolatiemateriaal verstrekt hierover de volgende informatie.

Temperatuur	Levensduur		
$40^{\circ}C$	$210 \cdot 10^3 h$	$90^{\circ}C$	$30 \cdot 10^3 h$
50	115	100	25
60	80	110	20
70	55	120	16
80	40	130	13
		140	11

Een motor van het beschouwde type draait met wisselende belasting: 4 uur per etmaal met hoge belasting en 12 uur met lagere belasting. De met deze belastingen corresponderende motortemperaturen zijn resp. $120^{\circ}C$ en $80^{\circ}C$. Hoe groot is de levensduur van de isolatie onder deze omstandigheden.

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde

modellenpracticum uitwerking probleem 5

Levensduur van isolatiemateriaal

Hoofdaspecten: modelformulering, modelcritiek; schatten

model

De nog (na zekere belastingstijd van de motor) resterende levensduur van de isolatie wordt bepaald door de nog aanwezige hoeveelheid van het betr. bestanddeel in de isolatie. Zij $X(t,T)$ de nog niet omgezette fractie van deze stof, na t t.e. draaien onder constante temp T

(α) Veronderstellen we dat per t.e. de fractie α (afh. van T) van de nog aanwezige hoeveelheid wordt omgezet, dan

$$X(t+\Delta t,T) - X(t,T) = -\alpha(T) \cdot X(t,T)\,\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t,T) - X(t,T)}{\Delta t} = -\alpha(T) \cdot X(t,T)$$

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha(T) \cdot X(t,T) \qquad (0)$$

met $X(0,T) = 1$ volgt $\underline{X(t,T) = e^{-\alpha(T) \cdot t}}$ (1)

Analyse van het model

De levensduur $L(T)$ bij constante temp T is de wortel van

$$e^{-\alpha(T) \cdot L(T)} = 0{,}4, \quad \text{zodat}$$

$$L(T) = \frac{\log 2{,}5}{\alpha(T)} \qquad (2)$$

Onze motor wordt aan wisselende belasting en temp onderworpen. We beschouwen gemakshalve eerst de geïdialiseerde situatie, waarin de nieuwe evenwichtstemp. na sprongsgewijze verandering van de belasting, direct wordt bereikt

Uit (1) volgt dat als $\alpha(T_1) \cdot t_1 = \alpha(T_2) \cdot t_2$ $\left(\text{of } \frac{t_1}{L(T_1)} = \frac{t_2}{L(T_2)} \right)$

t_1 t.e. draaien bij temp T_1 een even grote reductie van X teweegbrengt als t_2 te bij T_2.

Voor de kwaliteit van de isolatie na t_1 te bij T_1, t_2 t.e. bij T_2, -- etc, $X(t_1,T_1; t_2,T_2; \ldots; t_k,T_k)$ geldt:

$$X(t_1,T_1; t_2,T_2; \ldots; t_k,T_k) = e^{-\sum_{i=1}^{k} \alpha(T_i)\, t_i}$$

en voor de kwaliteit ná m van deze cycli

$$X(mt_1,T_1;\ mt_2,T_2;\ ----) = e^{-\sum \alpha(T_i).t_i.m} \qquad (3)$$

zodat voor de levensduur $M(T_1,T_2,--T_k)$ (in aantal cycli) geldt

$$M(T_1,T_2,--T_k) = \frac{\log 2{,}5}{\sum_i \alpha(T_i).t_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{L(T_i)}} \qquad (4)$$

<u>Nadere beschouwing van het model</u>

In (4), verkregen m.b.v. veronderstelling (α), die leidde tot (1), komt de door (1) beschreven afhankelijkheid van X van α en t niet tot uiting. De vraag rijst of (4) niet óók kan worden verkregen onder een ruimere veronderstelling dan (α).

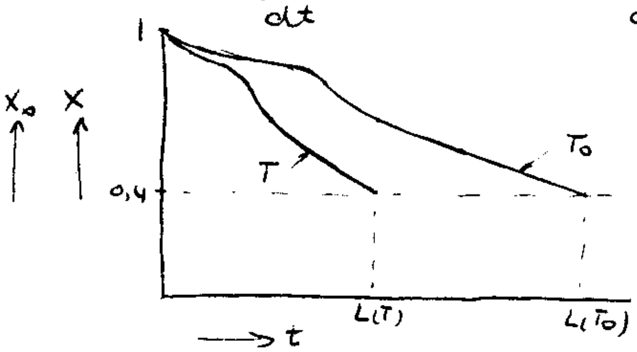
Vervangen we (0) door $\frac{dX}{dt} = f(X,T)$ en veronderstelling (α)

(β) door (β) : $f(X,T) = \lambda(T,T_0).f(X,T_0)$ (voor alle T, T_0)

dan volgt voor de fies X en X_0 (de laatste beschrijft de kwaliteit als fie van t bij const. temp T_0) :

$$\frac{dX}{dt} = \lambda(T,T_0)\,\frac{dX_0}{dt}$$

, dwz.



uitgaand van willekeurige kwaliteit v.d. isolatie, leidt t te draaien bij temp T tot evengrote achteruitgang v.d. isolatie als $t.\lambda(T,T_0)$ t.e draaien bij T_0, en

$$L(T) = \frac{L(T_0)}{\lambda(T,T_0)}$$

zodat ook onder (α^*) blijkt:

t te draaien bij temp T correspondeert met

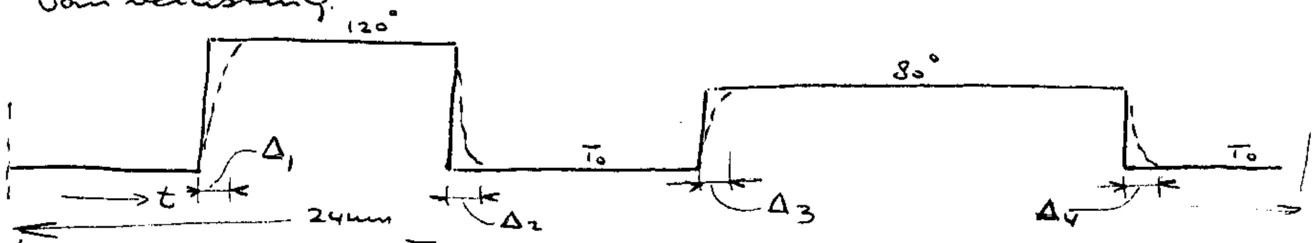
$t.\frac{L(T_0)}{L(T)}$ t.e. draaien bij temp T_0.

Dit leidt weer tot (4)

Het temperatuurverloop

De belastingssituatie van onze motor is slechts vaag beschreven. Het aantal onderbrekingen en de duur daarvan, de temp van de motor bij afwezigheid van belasting, het werkelijke temp. verloop bij wijziging van de belasting zijn niet bekend.

(γ) We veronderstellen dat er per etmaal 4 uur ononderbroken bij 120°C wordt gedraaid, id. 12 uur bij 80°C, dat er per etmaal 2 onderbrekingen zijn en dat de opwarm- en afkoelingsperioden slechts kort zijn vergeleken bij de perioden van belasting.



(δ) Veronderstellen we $T_0 \leq 40°$, dan levert (4) rechtstreeks een onderschatting en een overschatting van de levensduur M van het geïdealiseerde temp. verloop (getrokken lijn):

$$M \geq \frac{10^3}{\frac{4}{16} + \frac{12}{40} + \frac{8}{210}} = 1700 \text{ etmalen}$$

$$M \leq \frac{10^3}{\frac{4}{16} + \frac{12}{40} + 0} = 1818 \text{ etmalen}$$

De schatting $\hat{M} = 1760$ is behept met een rel. fout van max 3,5% t.g.v. onze onbekendheid met de temp T_0 en de levensduur $L(T_0)$.
Het werkelijke temp verloop gedurende de perioden $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ is zó, dat het achterblijven van de temp. gedurende Δ_1 en Δ_3 de levensduur gunstig, id. gedurende Δ_2 en Δ_4 de levensduur ongunstig beïnvloedt. Het is ons dus eigenlijk te doen om de som van twee tweetallen effecten. Met weinig moeite kunnen we de beide tweetallen effecten afzonderlijk schatten:

$$M \geq \frac{10^3}{\frac{4+\Delta_2}{16} + \frac{12+\Delta_4}{40} + \frac{8-\Delta_2-\Delta_4}{210}} =: M_-(\Delta_2, \Delta_4)$$

$$M \leq \frac{10^3}{\frac{4-\Delta_1}{16} + \frac{12-\Delta_3}{40} + 0} =: M_+(\Delta_1, \Delta_3)$$

(Σ) Veronderstellen we $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \frac{1}{4}$ mm, dan

$M_-\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1646$ etm.

$M_+\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1893$ etm.

De schatting $\hat{M} = 1770$ heeft 'n rel. fout van max. 7%, zodat (bij deze Δ'waarden) de onbekendheid met het werk. temp. verloop gedurende de opw. en afk. periode ook max 3,5% bedraagt.

Samenvatting v.h. resultaat

Voor ee zekere belastingssituatie is 'n schatting van de levensduur bepaald, met vermelding van de maximale relatieve fouten, die worden veroorzaakt door nog niet nader onderzochte details. Afhankelijk van de werkelijke belastingssituatie en van de gewenste nauwkeurigheid van de levensduurschatting, zal nu kunnen worden aangegeven welke aanvullende informatie nog nodig is om bedoelde schatting mogelijk te maken.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

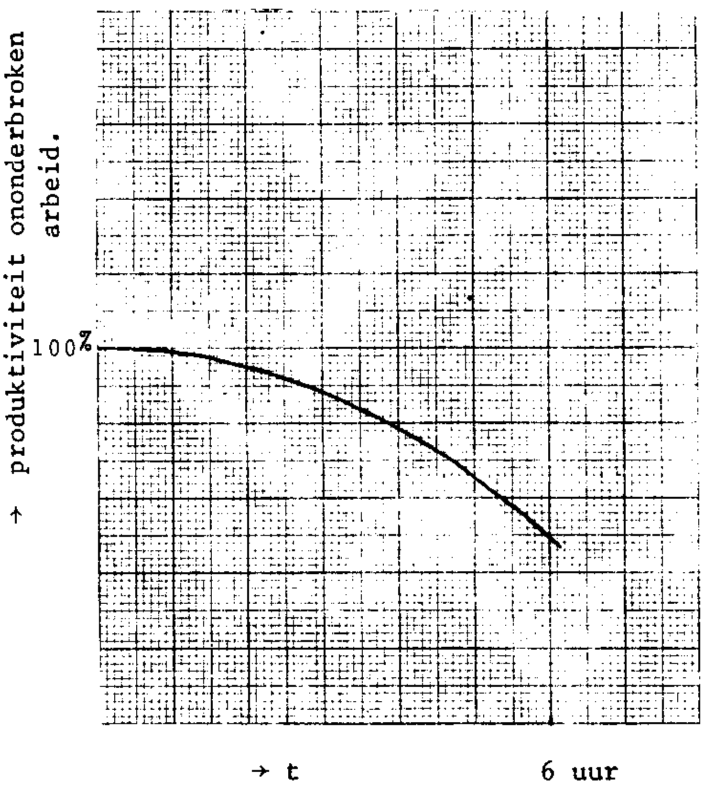
Modellenpraktikum: probleem 6.

De middagpauze

Bij een zeker bedrijf begint de werkdag om 8.30 uur en eindigt om 17.30 uur. Een onderzoek naar de afhankelijkheid van de productiviteit van de vermoeidheid, leverde als resultaat onderstaande grafiek.

In een rusttijd neemt de vermoeidheid af en dientengevolge de productiviteit. Experimenteel bleek dat een rusttijd r het productiviteitsniveau verhoogt tot het niveau, dat bereikt was op een tijdstip 3,5 r vóór het begin van de onderbreking.

Bepaal de middagpauze.



Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum, uitwerking probleem 6.

De middagpauze

Probleemanalyse. Gevraagd wordt, m.b.v. de gegevens die middagpauze te bepalen waarbij de dagproductie maximaal is

We onderzoeken eerst wat we van de optimale pauze kunnen zeggen, onafhankelijk van de preciese vorm van de gegeven grafiek.

Eerstens geldt voor de optimale pauze, dat een productieniveau van 100% op z'n vroegst bereikt wordt aan het eind van deze pauze. Werd dit niveau n.l. eerder bereikt, dan zou men het einde van de pauze kunnen vervroegen en daarmee de werkperiode na de pauze verlengen, terwijl deze periode toch zou beginnen met een niveau van 100%; de productie zou hierdoor stijgen, in strijd met de optimaliteit van de pauze.

Anderzijds wordt het 100%-niveau ook werkelijk bereikt aan het eind van de pauze. Stel n.l. dat dit niet zo is en beschouw een (voldoend kleine) vervroeging δ van zowel begin als einde van de pauze. Deze vervroeging komt erop neer, dat een werktijd δ van het begin van de pauze naar het eind van de pauze verhuist (en dus naar een hoger productieniveau), terwijl in de rest van de werkperiodes het productieniveau niet verandert. Deze verschuiving van de pauze geeft dus een productieverhoging, wederom in strijd met de optimaliteit.

Opmerking: tot nu toe hebben we slechts gebruikt, dat het productieniveau een dalende functie is van de arbeidstijd

Definities. Uit het voorgaande volgt, dat we alleen maar dagindelingen hoeven te bekijken waarvoor aan het eind van de pauze juist het 100%-niveau bereikt wordt. Deze dagindelingen zijn te karakteriseren door middel van één parameter; we kiezen hiervoor de lengte van de pauze.

Laat verder α de gegeven verhouding zijn tussen werk- en rusttijd corresponderend met eenzelfde niveauverandering: $\alpha = 3,5$, en x_0 de lengte van de werkdag: $x_0 = 9h$. Voor een dagindeling met parameterwaarde x is dan:

(1)
lengte 1e werkperiode	gelijk aan	αx
" pauze	" "	x ,
" 2e werkperiode	" "	$x_0 - (\alpha+1)x$.

Een maat voor de dagproductie bij een bepaalde dagindeling is het aantal uren waarin deze productie gerealiseerd zou kunnen worden, als zonder onderbreking en constant op een niveau van 100% gewerkt zou worden. Laat $F(x)$ dit aantal uren zijn voor een indeling met parameterwaarde x.

Tenslotte definiëren we: $p(t)$ is het productie-niveau na een tijd t van ononderbroken arbeid.

Oplossing. Ons probleem is nu geworden die waarde van x te vinden waarvoor $F(x)$ maximaal is. We onderzoeken daartoe de invloed op $F(x)$ van een kleine toename δ van x. Door zo'n toename neemt de lengte van de 1e werkperiode toe met een bedrag $\alpha\delta$. Daar het productieniveau aan het eind van de 1e werkperiode $p(\alpha x)$ is, betekent dit een toename van de productie in deze periode, waarvan de grootte (met willekeurige relatieve precisie voor voldoend kleine δ) gelijk is aan

(2) $$\alpha\delta \,.\, p(\alpha x) \,.$$

De 2e werkperiode wordt $(\alpha+1)\delta$ korter en de productie in deze periode neemt daardoor af met een bedrag

(3) $$(\alpha+1)\delta \,.\, p(x_0 - (\alpha+1)x) \,.$$

De totale toename van de productie tengevolge van een toename δ van de pauze is dus

(4) $$\delta \,.\, [\alpha\, p(\alpha x) - (\alpha+1)\, p(x_0 - (\alpha+1)x)] \,.$$

Een afname δ van x geeft een afname van de productie van dezelfde grootte.

Voor de optimale dagindeling leidt een verandering van de pauzelengte niet tot productieverhoging en de gezochte waarde van x moet dus voldoen aan de vergelijking

(5) $$[\alpha\, p(\alpha x) - (\alpha+1)\, p(x_0 - (\alpha+1)x)] = 0$$

Het oplossen van deze vergelijking betekent het bepalen van het nulpunt van een monotone functie. Een beetje proberen levert op:

(6) $$0{,}91\,h \le x \le 0{,}92\,h \quad ,$$

waaruit voor de optimale dagindeling volgt (tot op 0,04 h nauwkeurig):

(7)

1e werkperiode	:	3,2 h
pauze	:	0,9 h
2e werkperiode	:	4,9 h

Discussie resultaat. De tijden van de optimale dagindeling zijn wat ongebruikelijk. We gaan nog na, welke invloed het heeft op de productie als we afronden op halve uren. Als voorbeeld nemen we de dagindeling "3h - 1h - 5h" die weinig van de bovenstaande verschilt. We berekenen hoeveel de bij deze indeling behorende productie hoogstens verschilt van de optimale productie.

De 1e werkperiode van deze indeling is hoogstens 0,24 h korter dan die van de optimale indeling

Derhalve is de productie over deze periode hoogstens

$$p(3h)\cdot 0{,}24h\ ,\text{ dat is } 0{,}22\,h,$$ lager dan in het optimale geval. De 2e werkperiode is minstens $0{,}06\,h$ langer en de productie over deze periode bijgevolg minstens

$$p(5h)\cdot 0{,}06\,h\ ,\text{ dat is } 0{,}04\,h,$$ hoger dan in het optimale geval.

Samengevat dus een productie die hoogstens $0{,}18\,h$ lager is dan de optimale productie.

Om te zien hoeveel dit verschil relatief betekent, maken we een (onder-)schatting van de productie bij de indeling "3-1-5". Vervangen we over de beide werkperioden de grafiek van p door de corresponderende koorden, dan komen we tot de schatting:

$$3h\cdot\frac{p(0)+p(3h)}{2}+5h\cdot\frac{p(0)+p(5h)}{2}\ ,\text{ dat is } 6{,}9\,h. \tag{8}$$

Het relatieve verschil van de productie bij indeling "3-1-5" en de optimale productie is dus hoogstens

$\frac{0{,}18}{6{,}9}$, dat is 2,6 %.

Opmerking: uit het voorgaande volgt niet, dat "3-1-5" de enige dagindeling met ronde tijden is waarvoor de productie weinig verschilt van de optimale productie.

<u>Alternatieve oplossing</u>. De dagproductie $G(x,y)$ voor een dagindeling met pauzelengte x en lengte 1e werkperiode y is te schrijven als:

$$G(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y p(t)\,dt+\int_{y-\alpha x}^{x_0-(\alpha+1)x} p(t)\,dt & \text{als } \alpha x\le y\\[2ex] \displaystyle\int_0^y p(t)\,dt+\int_0^{x_0-x-y} p(t)\,dt & \text{als } y\le \alpha x.\end{cases} \tag{9}$$

Nu is $\frac{dG(x,y)}{dy}=p(y)-p(y-\alpha x)<0$ als $\alpha x\le y$, zodat voor de optimale indeling moet gelden: $y\le\alpha x$.

Evenzo is $\frac{dG(x,y)}{dx}=-p(x_0-x-y)<0$ als $y\le\alpha x$, zodat voor de optimale indeling ook moet gelden $\alpha x\le y$.

Hieruit volgt voor de optimale indeling $y=\alpha x$ en dus

$$F(x)=G(x,\alpha x)=\int_0^{\alpha x}p(t)\,dt+\int_0^{x_0-(\alpha+1)x}p(t)\,dt.$$

Wegens $F'(x)=\alpha p(\alpha x)-(\alpha+1)\,p\,(x_0-(\alpha+1)x)$, levert $F'(x)=0$ vergelijking (5) op.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpraktikum: probleem 7.

Bacteriënkweek

Bij een onderzoek worden bacteriën gekweekt door enige ervan in een oplossing van voedingsstoffen te brengen, waarin ze zich door deling kunnen vermeerderen.

Bij een bepaald soort bacterie neemt men waar, dat het delingsproces stopt, zodra de bacterieconcentratie een bepaalde waarde heeft bereikt. Verd~~ie~~unt men zo'n tot stilstand gekomen kweek door toevoeging van een hoeveelheid oplossing van voedingsstoffen, dan start het delingsproces weer, om te stoppen als het aantal bacteriën per volume-eenheid dezelfde waarde heeft bereikt als vóór het verdunnen. Herhaald verdunnen geeft steeds hetzelfde resultaat.

Men tracht dit verschijnsel te verklaren, door aan te nemen dat de bacteriën een stof afscheiden die bij voldoend hoge concentratie het delingsproces stopt. Ga na, of met deze hypothese (en zo nodig verdere aannames) ook de vaste eindconcentratie van de bacteriekweek verklaard kan worden.

Opmerking: voedingsstoffen zijn steeds in overvloed aanwezig en uitputting hiervan speelt dus geen rol.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum

Uitwerking probleem 7 Bacteriënweck

Het waargenomen verschijnsel

Het delingsproces komt tot stilstand zodra een bepaalde bacterieconcentratie is bereikt. Bij verdunning van de kweek komt de deling weer op gang, en deze stopt weer zodra de concentratie een bepaalde hoogte heeft bereikt. Deze max. bacteriënconcentratie is onafhankelijk van de mate van verdunning.
Men tracht dit verschijnsel te verklaren m.b.v. een afscheidingsproduct. Een voldoende hoge concentratie van deze stof zou in staat zijn het delingsproces tot staan te brengen.

Analyse

De momentane toestand van de kweek wordt beschreven door

$(x(t), y(t))$, waarin

$x(t)$ = de concentratie van het afscheidingsproduct op tijdstip t.

$y(t)$ = de bacteriën-concentratie.

x_o en y_o zijn de resp. concentraties op tijdstip o, d.i. direkt ná de verdunning.

Veronderstellen we 1) per bacterie en per tijdseenheid wordt een hoeveelheid $\alpha(x)$ (>o) afscheidingsproduct geproduceerd

2) per bacterie en per tijdseenheid worden $\beta(x)$ delingen uitgevoerd zolang $x < x_{cr}$; het delingsproces staat staat stil als $x \geq x_{cr}$.

Dus $x(t+\Delta t) - x(t) = \alpha(x(t)) \,.\, y(t)\Delta t$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \begin{cases} \beta(x(t)) \,.\, y(t)\Delta t & \text{voor } x < x_{cr} \\ 0 & \text{voor } x \geq x_{cr} \end{cases}$$

of $x'(t) = \alpha(x(t)) \,.\, y(t)$

$$y'(t) = \begin{cases} \beta(x(t)) \,.\, y(t) & \text{voor } x < x_{cr} \\ 0 & \text{voor } x \geq x_{cr} \end{cases} \qquad (1)$$

Stelsel (1) is gemakkelijk oplosbaar als α en β constanten zijn:

$$y(t) = y_o \cdot e^{\beta t}$$
zolang $x \leq x_{cr}$
$$x(t) = x_o + \frac{\alpha}{\beta} y_o (e^{\beta t} - 1) \qquad (2)$$

$$y(t) = y_{max} = y_o + \frac{\beta}{\alpha}(x_{cr} - x_o) \qquad \text{voor } x \geq x_{cr}$$

$$\text{of } y(t) - y_o = \frac{\beta}{\alpha}(x(t) - x_o) \qquad \text{voor } x \leq x_{cr}$$
$$y(t) - y_o = \frac{\beta}{\alpha}(x_{cr} - x_o) \qquad \text{voor } x \geq x_{cr} \qquad (3)$$

De parameter t is geëlimineerd.
De eliminatie van t voeren we ook rechtstreeks in (1) uit:
Gelijkwaardig met stelsel (1) is:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \qquad \text{voor } x < x_{cr}$$
$$(1^*)$$
$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{voor } x > x_{cr}$$

zodat $y = F(x) + C$, (voor $x < x_{cr}$) (waarin $\frac{dF}{dx} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$, en C bepaald is door x_o en y_o) en $Y = F(x_{cr}) + C$ (voor $x \geq x_{cr}$) (4)

Voor $\frac{\beta}{\alpha}$ = constante ontstaat fig. 1.

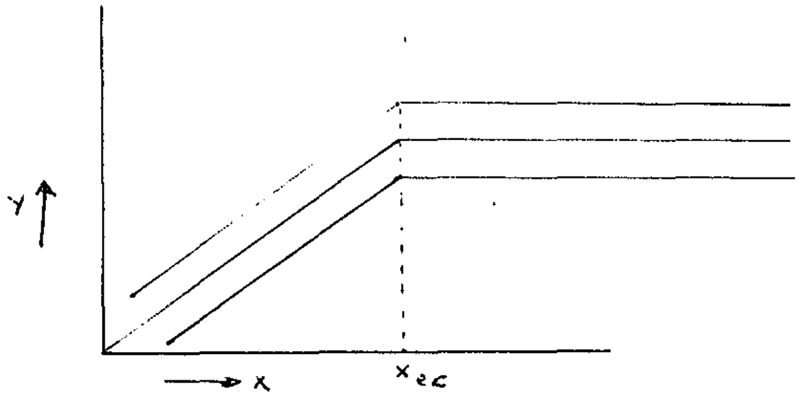


Fig. 1. Verloop van y als functie van x. onder de veronderstelling 1), 2) en $\frac{\beta}{\alpha}$ is constant.

Het blijkt dat het waargenomen verschijnsel niet wordt verklaard: Bij verdunning van een kweek met $x > x_{cr}$ blijkt de bereikbare y waarde afhankelijk te zijn van de mate van verdunning. Dit is ook het geval bij model (1^*), zie (4)).

Uit de waarnemingen volgt

$$\alpha(x) = 0 \text{ voor } x \geq x_{cr}$$

De ontwikkeling van de kweek wordt nu beschreven door

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad \text{voor } x < x_{cr} \tag{5}$$

Wanneer nu, zoals experimenteel bleek, onafhankelijk van de mate van verdunning telkens dezelfde eindtoestand (x_{cr}, y_{max}) wordt bereikt, wordt bij elke kweek het verloop van de toestand vanaf de betreffende begintoestand (x_o, y_o) tot (x_{cr}, y_{max}) blijkbaar gegeven door één en dezelfde oplossingsfunctie van (5). Noem deze oplossingsfunctie G(x), dan hebben we

a) $G(x_{cr}) = y_{max}$

b) $\frac{dG}{dx} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

c) Bij elke verdunning geldt $G(x_o) = y_o$.

Daar $\frac{y_o}{x_o} = \frac{y_{max}}{x_{cr}}$ volgt uit c): $G(x) = \frac{y_{max}}{x_{cr}} \cdot x$ voor alle $0 < x < x_{cr}$, dus

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{y_{max}}{x_{cr}} .$$

<u>Samenvatting</u>

Door de veronderstellingen

per bacterie en per tijdseenheid wordt een hoeveelheid $\alpha(x)$ afscheidingsproduct geproduceerd en worden $\beta(x)$ delingen uitgevoerd; $\alpha(x) = \beta(x) = 0$ voor $x \geq x_{cr}$, wordt het waargenomen verschijnsel verklaard; het waargenomene impliceert dat

$\frac{dy}{dx} = \gamma$ (γ is constante).

/4

De relatie $\frac{dy}{dx} = \gamma$ kan ook worden geschreven

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{dt} ,$$

d.w.z. de productie van het afscheidingsprodukt is evenredig met de productie van bacteriën; m.a.w.: per deling wordt een constante hoeveelheid afscheidingsproduct geproduceerd.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 8.

Het opwarmen van een zaal.

Een zaal wordt slechts in het weekend gebruikt. Als het koud is, wordt enige tijd vóór de opening van de zaal de oliekachel aangestoken om de ruimte tijdig op de gewenste temperatuur, 20°C, te hebben.

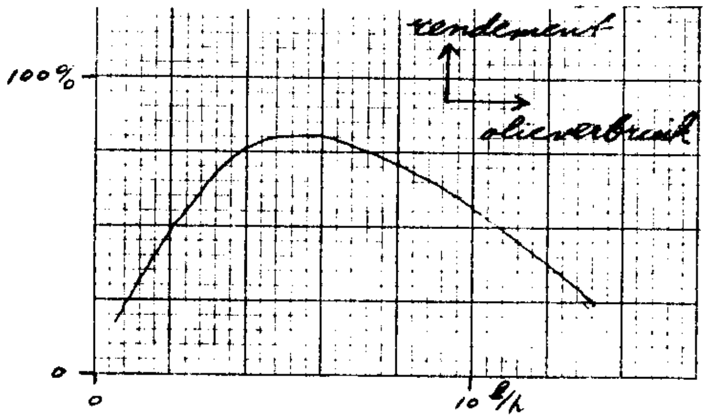
De beheerder van de zaal stelt tijdens het opwarmen de kachel zó af, dat deze brandt met maximaal rendement. Hij gaat daarbij uit van de (onderstaande) door de fabrikant van de kachel verstrekte grafiek.

Teneinde de kachel niet te vroeg te hoeven aansteken heeft hij bovendien nagegaan hoe groot de opwarmtijd is bij verschillende buitentemperaturen. Hij kwam tot het volgende tabelletje:

buitentemperatuur	opwarmtijd
15°C	2,5 uur
10°C	5,5 uur
5°C	9 uur
0°C	13,5 uur
-5°C	20 uur

Onderzoek, of er een voordeliger manièr van opwarmen is, er van uitgaande, dat het warmteverlies naar buiten per tijdseenheid evenredig is met het verschil tussen binnen en buitentemperatuur.

Maak een tabelletje waaruit, voor de bovenstaande buitentemperaturen, de stand van de kachel en de opwarmtijd zijn af te lezen voor de voordeligste manier van opwarmen.



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: uitwerking probleem 8.

Het opwarmen van een zaal

Analyse

Door een andere stand van de oliekraan te kiezen, dan die van de beheerder, veranderen het rendement waarmee gestookt wordt en de opwarmtijd van de zaal.

Rendementsverandering heeft een ongunstige invloed op het olieverbruik, daar de beheerder bij maximaal rendement stookt. Verandering van de opwarmtijd heeft een gunstige invloed op het olieverbruik, als de opwarmtijd daardoor korter wordt; in dat geval zal n.l. de warmtelek naar buiten tijdens het opwarmen kleiner zijn.

Omdat het rendement in een omgeving van de maximale waarde bijna constant is, zal bij een voldoend kleine verandering van de kraanstand het effect van de veranderde opwarmtijd overheersen. We moeten de kachel dus hoger laten branden dan de beheerder gewend is; d.w.z. 'n kraanstand hoger dan 5,5 $^{1}/h$ (zie grafiek).

Is r(v) het rendement van de kachel bij kraanstand (d.i. olieverbruik per tijds-eenheid) v, dan is de hoeveelheid warmte die de kachel per tijdseenheid produceert bij kraanstand v evenredig met v.r(v). Deze grootheid is maximaal voor $V \approx 9^{1}/h$ (schatting m.b.v. de grafiek). Bij een hogere kraanstand krijgen we minder warmte voor meer olie.

We moeten de optimale kraanstand dus zoeken tussen 5,5 $^{1}/h$ en 10 $^{1}/h$.

Het verband tussen buitentemperattur, kraanstand en opwarmtijd.

We definiëren:

V_o is de door de beheerder gebezigde kraanstand, waarbij het rendement maximaal is; $V_o = 5,5\ ^{1}/h$. r(v) is het rendement bij kraanstand v.

$\tau(v,\Delta)$ is de opwarmtijd bij kraanstand v en verschil Δ tussen buitentemperatuur en gewenste binnentemperatuur (20^oC).

We bepalen nu het temperatuurverloop van de zaal tijdens het opwarmen bij kraanstand v en buitentemperatuur T_u. Laat T(t) de temperatuur van de zaal zijn een tijd t na het aansteken van de kachel.

De warmteproductie per tijdseenheid is: $\alpha \, . \, v \, . \, r(v)$, de warmtelek naar buiten per tijdseenheid: $\beta(T(t) - T_u)$ en de warmte die per tijdseenheid nodig is voor de temperatuurstijging van de zaal: $\gamma \frac{dT(t)}{dt}$, waarbij α, β en γ constanten zijn onafhankelijk van t, v en T_u.
Warmtebalans geeft de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad \gamma \frac{dT(t)}{dt} + \beta(T(t) - T_u) = \alpha \, v \, r(v).$$

We nemen aan, dat de begintemperatuur van de zaal gelijk is aan de buitentemperatuur:

$$(2) \quad T(o) = T_u$$

De Oplossing van (1), (2) is:

$$(3) \quad T(t) - T_u = \lambda \, v \, r(v) \, [1 - e^{-\mu t}],$$

met λ en μ constanten onafhankelijk van t, v en T_u.
Is Δ het verschil tussen buitentemperatuur en gewenste binnentemperatuur, dan geldt aan het eind van de opwarmtijd:

$$(4) \quad T(t) - T_u = \Delta \quad \text{en} \quad t = \tau(v,\Delta).$$

Substitutie hiervan in (3) geeft:

$$(5) \quad \Delta = \lambda \, . \, v \, . \, r(v) \, [1 - e^{-\mu . \tau(v,\Delta)}].$$

M.b.v. het gegeven lijstje van Δ- en τ-waarden bepalen we de parameter μ; λ hebben we in het volgende niet nodig. Uit (5) volgt

$$(6) \quad \frac{1-e^{-\mu . \tau(v_o,\Delta)}}{\Delta} = \lambda \, v_o \, r(v_o),$$ zodat na substitutie van de gegevens uit het lijstje volgt:

$$(7) \quad \frac{1-e^{-2,5\mu}}{5} = \frac{1-e^{-5,5\mu}}{10} = \frac{1-e^{-9\mu}}{15} = \frac{1-e^{-13,5\mu}}{20} = \frac{1-e^{-20\mu}}{25} \, .$$

M.b.v. de iteratie-methode van Newton (grafisch) volgt uit (7):

/3

(8) $\mu = 0{,}059\ h^{-1}$

Het verband tussen v,Δ en τ kunnen we nu als volgt schrijven (zie (5)):

$$(9)\quad v \,.\, r(v)\ [1 - e^{-\mu.\tau(v,\Delta)}] = v_o \,.\, r(v_o)\ [1 - e^{-\mu.\tau(v_o,\Delta)}]\ .$$

Hierin komen geen onbekende parameters meer voor.

<u>De optimale kraanstand</u>

Het olieverbruik in de opwarmperiode bij kraanstand v en temperatuurverschil Δ bedraagt v. τ(v,Δ). Ons probleem is dus, om bij gegeven Δ die waarde van v te bepalen, waarvoor v.τ(v,Δ) minimaal is. Dit kunnen we b.v. doen door voor

$v = 5{,}0 \quad , \quad 5{,}5 \quad , \quad 6{,}0 \quad , \quad ..... \quad , \quad 9{,}5\ ^{1}/h$

m.b.v. (9) τ(v,Δ) te berekenen en vervolgens het olieverbruik voor elk van deze kraanstanden.

Aldus is de optimale kraanstand tot op 0,5 $^{1}/h$ nauwkeurig bepaald.

<u>Voorbeeld</u>

Voor 'n buitentemperatuur van $-5^{o}C$ is de optimale kraanstand 6,5 $^{1}/h$, de opwarmtijd 15,4 h en de besparing aan olie t.o.v. de huidige stookwijze 8%.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

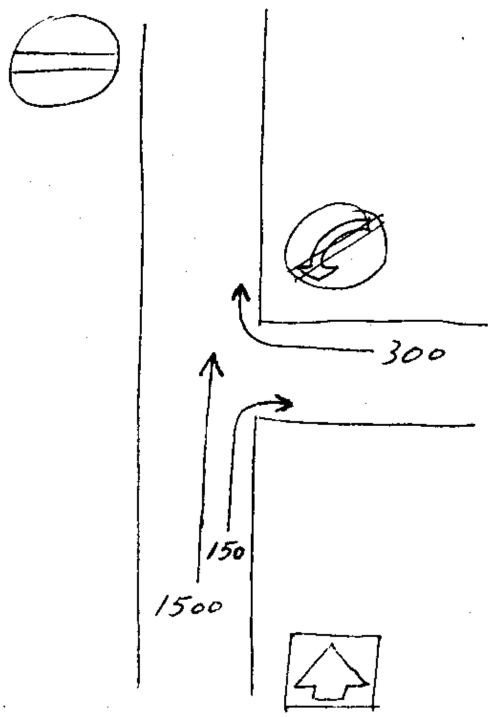
Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 9.

Stoplichten.

Een T-kruising, gevormd door een drukke weg met éénrichtingsverkeer en een minder drukke weg loodrecht daarop (zie figuur), moet voorzien worden van stoplichten.
Bepaal de gunstigste opstelling en afregeling voor zulke stoplichten.

Gegevens: in de figuur is voor de verschillende verkeersstromen het aantal auto's per uur gegeven.



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum - uitwerking probleem 9 Stoplichten

Discussie van de situatie

Afhankelijk van de ruimte ter plaatse zal het mogelijk zijn het kruispunt op verschillende wijzen in te richten. De gunstigste regeling zal afhankelijk zijn van de inrichting van het kruispunt.

Gemakshalve beschouwen we het probleem van de regeling van de stromen 1 en 2. De overeenkomst in de diverse mogelijke problemen zal ons in staat stellen later de benodigde detaillering (het aantal verkeersstroken) en aanvulling (b.v. het wel rekening houden met de derde verkeersstroom) aan te brengen.

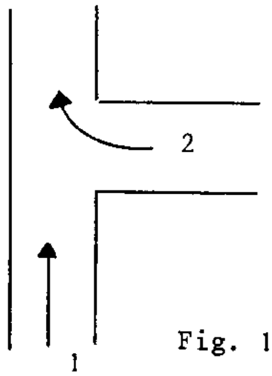


Fig. 1.

Discussie van het model

We zoeken een eenvoudige beschrijving van het bewegingspatroon van de auto's.

1) Afhankelijk van de fase, waarin het regelsysteem zich bevindt (doorrijden al of niet toegestaan) en afhankelijk van de aanwezigheid van e.v. "voorliggers", moeten auto's al of niet stoppen en wachten.

2) De laatste auto die de stopstreep passeren mag, moet voldoende tijd krijgen om het kruispunt over te steken.

3) Het bewegingspatroon van een rij auto's die mogen optrekken zal van belang zijn voor onze regeling. Dit is een gecompliceerd verschijnsel; we zullen hierin moeten schematiseren.

Geleid door deze overwegingen beschouwen we de volgende situatie:

a) de aanvoer van auto's is constant in de tijd,

b) de opvolgende wagens van een wachtrij passeren de stopstreep met gelijke tussenpozen.

Definities

c_1 is intensiteit stroom 1 (c_1 = 500 auto's per uur)

c_2 is intensiteit stroom 2 (c_2 = 100 auto's per uur)

t_1 is lengte interval waarin stroom 1 wordt geblokkeerd.

t_2 is lengte interval waarin stroom 2 wordt geblokkeerd.

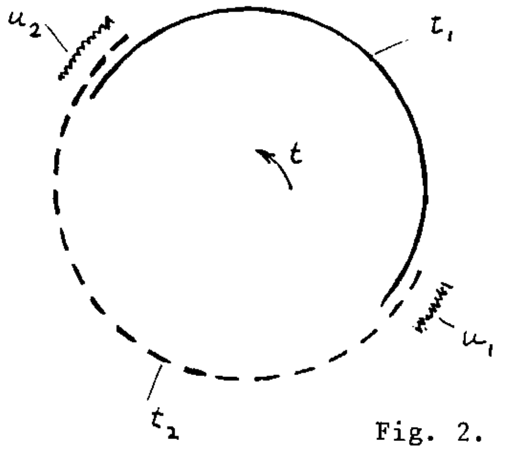
u_1 is tijd nodig voor het passeren van kruispunt voor auto's van stroom 1.

u_2 is tijd nodig voor het passeren van kruispunt voor auto's van stroom 2.

$u = u_1 + u_2$

v is tijd die verloopt tussen het passeren van de stopstreep door twee op elkaar volgende auto's van een wachtrij.

(Opm. De constanten u_1, u_2 en v kunnen ter plaatse of door vergelijking met overeenkomstige kruispunten worden geschat. E.v. zullen twee verschillende waarden v_1 en v_2 voor de resp. stromen worden ingevoerd).



Het verkeersaanbod is constant in de tijd. Hieruit vloeit een aan elke regeling op te leggen eis voort:
Het aanbod per cyclus moet voor elk van de stromen kunnen worden verwerkt binnen de eerste niet-blokkeertijd (na ev. stoppen) (1)

Fig. 2. Cyclustijd = t_1+t_2-u.

Keuze van een criterium

Het doel van de regeling is het voorkomen van ongelukken en het bevorderen van de doorstroming. Het laatste levert een uitgangspunt: Het stoppen en wachten wordt als onaangenaam ervaren. Het is dus in principe zinvol het aantal stops en/of wachttijden in te bouwen in de te minimaliseren objectfunctie. Elke keuze van object is arbitrair, evenals de keuze van de gewichten die nodig zijn zodra ongelijke grootheden een bijdrage tot de objectfunctie zullen gaan leveren.

/3

Enkele eenvoudige criteria zijn:

A De maximaal optredende wachttijd

B De gemiddelde wachttijd.

<u>Bepaling van objectfuncties</u>

De wachttijd van een auto bestaat uit de tijd dat hij stilstaat, vermeerderd met de tijd die nodig is om na vrijgeven van zijn wachtrij de stopstreep te passeren. We bepalen het aantal auto's van stroom 1, dat niet ongehinderd door de verkeersregeling of door "voorliggers" de stopstreep kan passeren. Zij n_1 het aantal auto's per cyclus, dat moet stoppen. De laatste auto uit deze groep (die de stopstreep moet kunnen passeren, zie (1)) passeert de stopstreep een tijd n_1v na het vrijgeven van stroom 1. Het aantal n_1 is met intensiteit c_1 aangevoerd in een tijd t_1+n_1v, zodat geldt

$$n_1 = c_1(t_1 + n_1v)$$

of (2)

$$n_1 = \frac{c_1t_1}{1-c_1v}$$

De maximale wachttijd bedraagt t_1, de gemiddelde wachttijd bedraagt $\frac{1}{2}\ t_1$, de totale wachttijd voor stroom 1 bedraagt per cyclus

$$n_1 \cdot \tfrac{1}{2}\ t_1 = \frac{\frac{1}{2}\ c_1t_1^{\ 2}}{1-c_1v}$$

Analoog voor stroom 2.

Voor de objectfuncties f_A en f_B, resp. behorende bij de criteria A en B, geldt dus:

$$f_A(t_1,t_2) = \max\{t_1,t_2\} \tag{3}$$

$$f_B(t_1,t_2) = \frac{\frac{\frac{1}{2}\ c_1}{1-c_1v} \cdot t_1^{\ 2} + \frac{\frac{1}{2}\ c_2}{1-c_2v} \cdot t_2^{\ 2}}{(c_1+c_2)(t_1+t_2-u)} \tag{4}$$

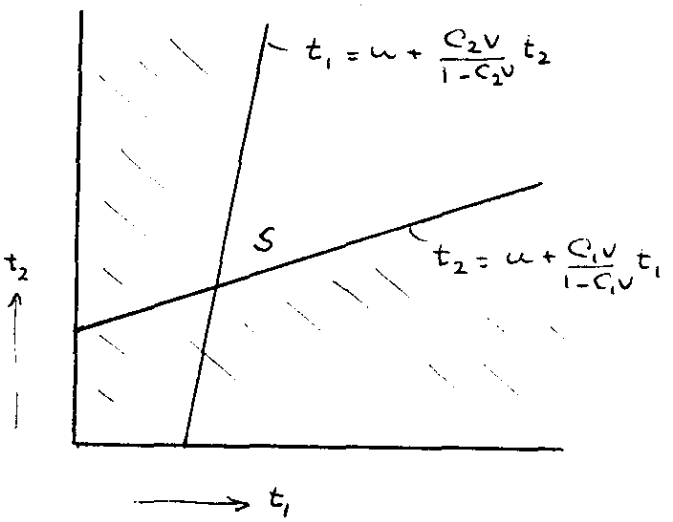
waarin (t_1,t_2) in het definitiegebied ligt, d.w.z. er is aan (1) voldaan: de niet-blokkeertijden zijn voldoende lang om het aanbod te kunnen verwerken.

De groep van n_1 auto's van stroom 1 moet in de tijd t_2-u de stopstreep kunnen passeren. Dit leidt tot de voorwaarde

$$\frac{t_2-u}{v} \geq \frac{c_1 t_1}{1-c_1 v}$$

en analoog (5)

$$\frac{t_1-u}{v} \geq \frac{c_2 t_2}{1-c_2 v}$$



Coordin. S:

$$t_1 = \frac{1-c_1 v}{1-c_1 v-c_2 v} \cdot u$$

$$t_2 = \frac{1-c_2 v}{1-c_1 v-c_2 v} \cdot u$$

Deze voorwaarden zijn niet zonder meer voldoende: Voor een punt (t_1,t_2) op de rand van het door (5) bepaalde gebied zullen i.h.a.

$\frac{c_1 t_1}{1-c_1 v}$ en/of $\frac{c_2 t_2}{1-c_2 v}$ niet geheel zijn. Dit betekent dat niet aan (1) wordt vol

voldaan, aangezien het aanbod per cyclus niet geheel binnen de eerste cyclus kan worden verwerkt.

Het aanbod per cyclus bedraagt $c_1(t_1+t_2-u)$, resp. $c_2(t_1+t_2-u)$.

Dit betekent dat voor alle (t_1,t_2) met

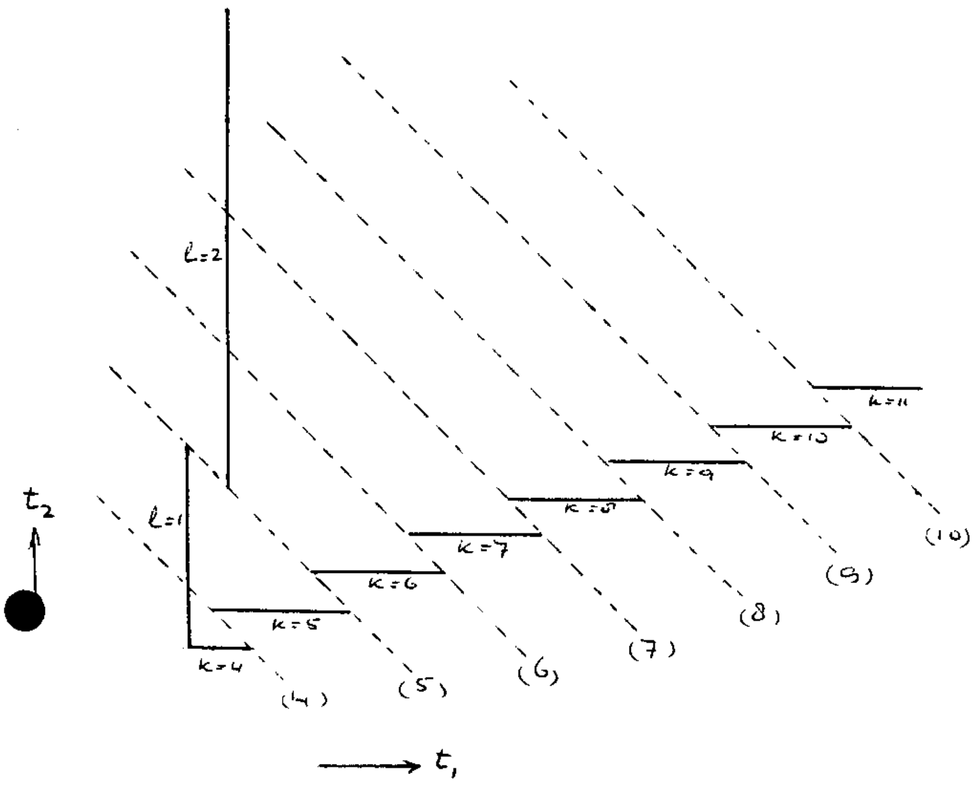
$$k-1 < c_1(t_1+t_2-u) \leq k \quad \text{moet worden geeist}$$

$$\frac{t_2-u}{v} \geq k$$

en analoog is voor alle (t_1,t_2) met (5*)

$$\ell -1 < c_2(t_1+t_2-u) \leq \ell, \text{ nodig: } \frac{t_1-u}{v} \geq \ell$$

/5



(4): $t_1+t_2 = u + \frac{4}{c_1}$

(5): $t_1+t_2 = u + \frac{5}{c_1} = u + \frac{1}{c_2}$

(6): $t_1+t_2 = u + \frac{6}{c_1}$

etc.

Fig. 4.

<u>Voorbeeld</u>

$c_1 = \frac{5}{36}$, $c_2 = \frac{1}{36}$ auto/sec. Zij u = 15 sec.

	v = 1 sec.	v = 2 sec.	v = 3 sec.
Coordin. S (eerste schatting t_1, t_2)	$(15\frac{1}{2}, 17\frac{1}{2})$	$(16\frac{1}{4}, 21\frac{1}{4})$	$(17\frac{1}{2}, 27\frac{1}{2})$
cyclustijd	18	$22\frac{1}{2}$	30
aanbod per cyclus (str. 1, str. 2)	$(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(3\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$	$(4\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$
t_2 mininaal	18	23	30
t_1 minimaal	16	17	18
cyclustijd 2e sch.	19	25	33
aanbod per cyclus	(< 3, < 1)	(< 4, < 1)	(< 5, < 1)

/6

Criterium A leidt niet tot één bepaald punt (t_1, t_2). Bij $v = 2$ b.v. leidt minimaliseren van f_A tot $t_2=23$ en $17 \leq t_1 \leq 20{,}8$ (wegens $c_1(t_1+t_2-u) \leq 4$). Zie fig. 4.

Criterium B

Beschouw $g(x,y) = \frac{ax^2+by^2}{x+y-c}$ met $x \geq c$, $y \geq c$

$a > b > o$, $c > o$

Uit onderzoek van de restrictie van $g(x,y)$ tot rechte $x+y=z$ blijkt dat deze restrictie zijn minimum $\frac{ab}{a+b}\ \frac{z^2}{z-c}$ bereikt in het punt

$(\frac{b}{a+b} \cdot z, \frac{a}{a+b} \cdot z)$.

Verder bereikt $\frac{z^2}{z-c}$ zijn minimum in $z=2c$. Hiermee is aangetoond dat de functie
(pt. R, fig. 5)

g geen stationaire punten heeft. Verder is aangetoond, dat het minimum van g ligt op het lijnstuk PQ (fig. 5)

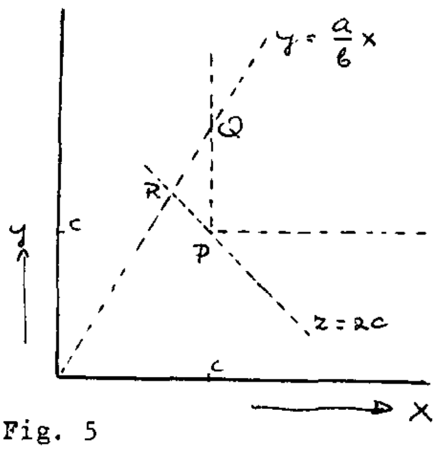


Fig. 5

Bij het minimaliseren van f_B (4) op zijn definitiegebied ((5^*), fig. 4) maken we bovendien gebruik van $\frac{\delta g}{\delta y} \geq 0$ voor $y \geq \sqrt{\frac{a}{b}}\,x$.

Voor $u = 15$, $v = 2$ blijkt f_B minimaal in $(t_1, t_2) = (17,34)$
$f(17,34) = 7{,}5$. Ter vergelijking $f_B(19; 44{,}6) = 7{,}9$.

/7

Interpretatie van de resultaten

We gaan na welk verkeersaanbod bij de diverse regelingen kan worden verwerkt zonder dat stagnatie van lange duur optreedt.

	Regeling sec. t_1	t_2	cyclusduur sec.	str.1 vrij sec.	str.2 vrij sec.	toelaatbaan per cyclus str.1	str.2	toelaatbaan per uur str.1	str.2
(A)	17	23	25	8	2	4	1	576	144
(B)	20,8	23	28,8	8	5,8	4	2	500	250
(C)	17	34	36	19	2	9	1	900	100

(Telkens u=15, v=2 sec)

Merk op dat bij het in de praktijk fluctuerende verkeersaanbod wèl stagnaties van korte duur zullen voorkomen. De max. en gem. wachttijd worden nu niet door (3) en (4) beschreven.

Uitbreiding van het model

Voor verkeerssituaties waarin meer dan twee stromen onderling moeten worden beveiligd kan de objectfunctie zonder meer worden aangepast. Ga na dat max. en gem. wachttijd onafhankelijk blijven van de volgorde waarin de diverse stromen het kruispunt mogen passeren.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 10

Het oplossen van aanslag.

Aan het eind van een fabricageproces van machineonderdelen moeten deze onderdelen ontdaan worden van een laag aanslag. Dit wordt gedaan door elk onderdeel in een hoeveelheid oplosmiddel te schudden tot het schoon is.

Oplosmiddel waarin vuïl is opgelost werkt minder goed dan schoon oplosmiddel en men vraagt zich daarom af, of geen tijd en/of oplosmiddel kan worden bespaard, door minder oplosmiddel te gebruiken en dit na enige tijd schudden te vervangen door schoon oplosmiddel.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum: probleem 11.

Afvalwater

Het afvalwater van een zeker chemisch bedrijf bevat een stof, waarvan de lozing beperkt is door wettelijke voorschriften; de hoeveelheid van deze stof die per etmaal geloosd wordt, mag een bepaalde grens niet overschrijden. Daar de produktie per etmaal van de genoemde stof boven deze grens ligt, kan het bedrijf zijn afvalwater niet zonder meer laten wegvloeien.

Nu is de stof in kwestie instabiel en valt gaandeweg uiteen in stoffen die onbeperkt geloosd mogen worden. Hiervan maakt het bedrijf gebruik om het teveel aan afvalstof weg te werken: het afvalwater wordt eerst een tijdje bewaard en pas daarna geloosd.
De praktische uitvoering hiervan in de vorm van een continuproces is als volgt. In een groot basin laat men aan de ene kant het afvalwater binnenstromen, terwijl aan de andere kan het te lozen water, via een overloop, het basin uitstroomt.

Door het toenemen van de produktie van het bedrijf gedurende de laatste jaren, nam ook de hoeveelheid afvalwater toe en daarmee de hoeveelheid afvalstof in het geloosde water. Tengevolge van de nog verwachte produktiestijging zal de wettelijke grens voor afvallozing weldra overschreden worden.

Ter oplossing van dit probleem overweegt men het volgende. In het basin wordt vuil afvalwater vermengd met water dat al wat minder vuil geworden is en men zou het basin mogelijk efficiënter gebruiken als men deze vermenging tegenging. Het laatste zou kunnen gebeuren door het basin d.m.v. een wand te splitsen in een "vuil" en een "schoon" gedeelte. Het afvalwater zou dan in het vuile deel binnenstromen, het vuile deel zou overlopen in het schone deel en het uit het schone deel overlopende water zou geloosd worden.

Ga na of een oplossing van deze vorm mogelijk is.

Gegevens:

- Bij het huidige produktieniveau wordt per etmaal 4,0 m^3 afvalwater geproduceerd, terwijl de geloosde hoeveelheid stof 2,0 kg per etmaal bedraagt.
- De concentratie van de stof in het geproduceerde afvalwater bedraagt, ongeacht de hoeveelheid afvalwater, 3,06 kg/m^3.
- De hoeveelheid stof die per etmaal maximaal geloosd mag worden bedraagt 2,5 kg.
- De afmetingen van het basin: 8 x 4 x 2 m^3.
- De snelheid waarmee de stof uiteenvalt is zodanig dat van een willekeurige hoeveelheid na 55 uur nog de helft over is.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum uitwerking probleem 11. Afvalwater

Probleemstelling

Het afvalwater afkomstig van een chemisch proces bevat een zo grote hoeveelheid van zekere stof, dat dit water niet zonder meer mag worden geloosd. De stof is instabiel. Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt in een bassin, met continue aan- en afvoer van afvalwater. Gevraagd wordt na te gaan hoe de capaciteit van de installatie verandert, als het bassin wordt onderverdeeld in een aantal compartimenten die in serie worden geschakeld.

Het uiteenvallen van de stof

Per t.e. valt een hoeveelheid stof uiteen, evenredig met de hoeveelheid

($x(t)$ op tijdstip t)

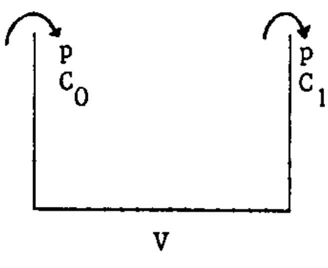
$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha\, x(t) \tag{1}$$

Hierin is α een pos. constante, n.l. de fractie van de aanwezige hoeveelheid die per t.e. uiteenvalt.

M.b.v. de gegeven halveringstijd volgt

$$\alpha = 0{,}3 \text{ etmaal}^{-1} \tag{2}$$

Analyse van de werking van de installatie



V is het volume van het bassin (= 64 m^3)

p is de per t.e. aangevoerde hoeveelheid afvalwater (= 4 m^3/etmaal)

C_0 is de stofconcentratie in de aanvoer (= 3,06 kg/m^3)

C_1 is de stofconcentratie in de afvoer (= 0,5 kg/m^3)

Q is de toegestane stoflozing per t.e. (= 2 kg/etmaal)

Blijkbaar heeft zich een stationaire toestand ingesteld (d.w.z. het stromingspatroon en de verdeling van de stof is onafhankelijk van de tijd). In de stationaire toestand is het verschil van de per t.e. aan- en afgevoerde hoeveelheid stof juist gelijk aan de afbraak per t.e. van de in het bassin aanwezige hoeveelheid:

/2

$$p(C_0 - C_1) = \alpha V \bar{C}, \qquad (3)$$

waarin $\bar{C}$ de over het gehele bassin gemiddelde stofconcentratie is. Substitu-van de gegevens leidt tot $\bar{C} = 0{,}53\ ^{kg}/_{m^3}$. Daar $\bar{C}$ niet gelijk is aan C_1 is er geen volledige menging (in overeenstemming met de verwachting), maar de toestand verschilt niet veel van de situatie met volledige menging, want $\bar{C}$ is (slechts) 6% groter dan C_1.

Daar bij wijziging van de installatie en van de aanvoer zeker $\bar{C} \leq C_0$ (4) volgt direct dat de hoeveelheid stof die per t.e. kan worden verwijderd kleiner dan αVC_0 is, zodat voor p_{max}, de maximale afvalwateraanvoer per t.e. geldt

$$p_{max} \leq \alpha V + \frac{Q}{C_0} \quad (= 20\ ^{m^3}/\text{etmaal}) \qquad (5)$$

Aangezien niet zonder meer duidelijk is, hoe de mate van menging in een compartiment afhangt van de uitvoering van de installatie, onderzoeken we eerst installaties waarin in elk compartiment volledige menging optreedt.

Installaties met ideale menging

Zij C_{i-1} de stofconcentratie van het in comp. i aangevoerde afvalwater,

V_i het volume van comp. i
C_i de stofconcentratie van het uit comp. i afgevoerde afvalwater
$(i = 1, \ldots, n)$

dan levert de stofbalans voor comp. i

$$p(C_{i-1} - C_i) = \alpha V_i C_i$$

of

$$\frac{C_{i-1}}{C_i} = 1 + \frac{\alpha V_i}{p} \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (6)$$

Deze grootheid bepaalt de werking van comp. i. We noemen $\frac{C_{i-1}}{C_i}$ de reductie-factor van comp. i.

Voor de reductiefactor $\frac{C_0}{C_n}$ van een uit n comp. bestaande installatie geldt

$$\frac{C_0}{C_n} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha V_i}{p}\right) \qquad (7)$$

We maximaliseren (7) onder de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V \tag{8}$$

Voor stationair punt is nodig (Lagrange)

$$\frac{\alpha}{p} \prod_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{n} \left(1 + \frac{\alpha V_i}{p}\right) + \lambda = 0 \qquad (k=1, \ldots, n)$$

of

$$V_i = \frac{V}{n} \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{9}$$

Er is dus slechts één Stat. punt. Dit levert inderdaad de maximale reductiefactor: Immers, op de rand van (8) wordt het maximum niet bereikt, want hier heeft minstens één der comp. het volume nul, terwijl elke splitsing van een compartiment gunstig is (want als $V_k = V_k' + V_k''$, dan

$$\left(1 + \frac{\alpha V_k'}{p}\right) \left(1 + \frac{\alpha V_k''}{p}\right) > 1 + \frac{\alpha V_k}{p})$$

Conclusie: De reductiefactor van een n comp. installatie is maximaal als $V_i = \frac{V}{n}$ $(i=1, \ldots, n)$:

$$\frac{C_0}{C_n} = \left(1 + \frac{\alpha V}{np}\right)^n \tag{10}$$

Hieruit volgt $\frac{C_0}{C_n} < e^{\frac{\alpha V}{p}}$

Hiermee is de grove capaciteitsgrens (5) achterhaald. Uit

$$p_{max} \cdot e^{-\frac{\alpha V}{p_{max}}} = \frac{Q}{C_0} \qquad \text{of}$$

$$\frac{\alpha V}{p_{max}} \cdot e^{\frac{\alpha V}{p_{max}}} = 23{,}5$$

volgt aan de hand van een e^x-tabel, met de monotonie van xe^x, dat $p_{max} = 8{,}3$ m^3/etmaal. (5*)

/4

<u>Capaciteit van een n.comp. installatie met ideale menging</u>

Definieren we p_{id} als de maximale afvalwateraanvoer per t.e., dan geldt

$$p_{id} \left(1 + \frac{\alpha V}{np_{id}}\right)^{-n} = \frac{Q}{C_0} \qquad \text{(zie (10))}$$

of

$$\frac{\alpha V}{p_{id}} \left(1 + \frac{\alpha V}{np_{id}}\right)^{n} = \frac{\alpha V C_0}{Q} \tag{11}$$

Gebruik makend van de monotonie in p van het linkerlid vinden we de wortel van (11) gemakkelijk. Resultaat:

n	1	2	3	4	8	16	32	∞
p_{id}	4,39	5,78	6,45	6,84	7,50	7,89	8,10	8,3

(12)

in m^3/etmaal.

<u>Schatting van de capaciteit</u> van de installatie bij onderverdeling in n comp.

Voor n gelijke comp. (met gemiddelde concentratie $\bar{C}_i$, waarbij $\bar{C}_i = \beta C_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ wordt de reductiefactor (analoog aan (10))

$$\frac{C_0}{C_n} = \left(1 + \frac{\alpha\beta V}{np}\right)^n$$

zodat p_{max}, de maximale afvalwateraanvoer per t.e. de wortel is van

$$\frac{\alpha V}{p} \left(1 + \frac{\alpha\beta V}{np}\right)^n = \frac{\alpha V C_0}{Q} \tag{13}$$

Hierin is β, afhankelijk van de onderverdeling, onbekend. Voor het oorspronkelijke bassin werd gevonden (bij $p = 4^{m^3}$/etmaal) $\beta = 1{,}06$.
Voor onderverdelingen waarbij de afmeting in stromingsrichting verkleind is, en waarbij bovendien p een hogere waarde heeft, lijkt het redelijk te veronderstellen dat de menging in elk compartiment minstens even intensief is als in het oorspronkelijke bassin. We veronderstellen dat voor dergelijke onderverdelingen geldt

$$1 \leq \beta \leq 1{,}06$$

/5

Daar het linkerlid van (13) monotoon daalt in p, geldt

$$p_{max} < \beta\, p_{id}$$

Anderzijds geldt ook

$$p_{max} \geq p_{id},$$

zodat voor dergelijke onderverdelingen geldt

$$p_{id} \leq p_{max} < 1{,}06\; p_{id} \tag{14}$$

Samenvatting:

Met (14) en (12) is een voldoende nauwkeurig overzicht verkregen van de mogelijkheden om de capaciteit van de installatie op te voeren.
Deze resultaten gelden onder de voorwaarde $1 \leq \beta \leq 1.06$

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum

Een bestelschema

Een bepaald bedrijf heeft voor zijn werkzaamheden zekere onderdelen nodig. Van deze onderdelen wordt een voorraad aangehouden om te voorkomen dat het werk stagneert door gebrek aan onderdelen. Zo'n voorraad brengt echter kosten met zich mee: rente over het in de voorraad geïnvesteerde kapitaal, gebruik van de opslagruimte en risico van incourant worden. In verband met deze kosten is men geneigd een zo klein mogelijke voorraad aan te houden. Bij een kleinere voorraad zal echter vaker een aanvullingsbestelling geplaatst moeten worden. Nu zijn aan het plaatsen van een bestelling ook kosten (voornamelijk administratiekosten) verbonden en men zal dus het aantal bestellingen anderzijds zo klein mogelijk willen houden.
Een concreet voorbeeld betreft één van de genoemde onderdelen, een bepaald type bout, waarvan per jaar 120.000 stuks verwerkt worden. Deze bouten kosten ƒ 18,- per 500 stuks. Bij de berekening van de voorraadkosten wordt uitgegaan van een rente van 8% per jaar en een risico van 2% per jaar. Op het ogenblik wordt viermaal per jaar een bestelling van 30.000 bouten gedaan, terwijl men 5000 bouten als minimale voorraad aanhoudt. De kosten voor de benodigde opslagruimte bedragen ƒ 16,- per jaar. Tenslotte bedragen de kosten van één bestelling ƒ 5,-.
Ga na of er in dit geval op een voordeliger manier besteld kan worden.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum

Huisvuil

In een grote stad wordt dagelijks, behalve zondags, het huisvuil opgehaald door de gemeentereiniging. Hierbij zijn 850 personeelsleden betrokken; van hen werkt telkens 5/6 deel en heeft 1/6 deel vrij. De dag waarop iemand vrij heeft verschuift elke week: is dit in een bepaalde week bijv. donderdag, dan in de volgende week vrijdag, dan zaterdag, vervolgens maandag, enz.
Nu is het aanbod van huisvuil niet elke dag hetzelfde, maar beduidend groter in het begin van de week. Daar de inzet van personeel echter van dag tot dag gelijk is, ontstaat in het begin van de week een achterstand in het ophalen, die pas aan het eind van de week is weggewerkt.
Ga na, of een andere werkverdeling hier uitkomst kan bieden en, zo ja, bepaal dan de meest geschikte verdeling.

Aanbod van huisvuil:

maandag	2700 ton	donderdag	2000 ton
dinsdag	2500 ton	vrijdag	2000 ton
woensdag	2350 ton	zaterdag	2000 ton .

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Modellenpracticum, probleem 303

De wandelaar

Onderzoek van de verrichtingen van sport-wandelaars bracht het volgende betreffende hun loopsnelheid aan het licht.

- Het verband tussen snelheid en tijd bij ononderbroken wandelen wordt, in goede benadering, gegeven door onderstaande grafiek.
- Tijdens een rustpauze herstelt de wandelaar zich en zal daardoor nadien met hogere snelheid verder kunnen wandelen. Gebleken is, dat door een rustpauze met lengte t de snelheid stijgt tot de waarde die zij had op het tijdstip 3,1t vóór het begin van de rustpauze.

Bepaal met behulp van deze gegevens hoe wandelaars hun rustpauzes het best kunnen kiezen.