TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

VERZAMELINGSLEER II

(Achtergronden van de Analyse)

Dr. P.L.Cijsouw

Drs. W.H.J.H. van Meeuwen

Drs. C.P. van Nieuwkasteele

Voorjaarssemester 1982

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Dr. P.L. Cijsouw
Drs. W.H.J.H. van Meeuwen
Drs. C.P. van Nieuwkasteele

Verzamelingsleer II

(Achtergronden van de Analyse)

Wij verzoeken U, dit collegedictaat niet mee te nemen buiten de leeszaal en het na lezing terug te leggen op de ladenkasten. Dank U!

Dictaatnr. 2.209 Prijs f 3,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VERZAMELINGSLEER II
(Achtergronden van de Analyse)

Dr. P.L. Cijsouw
Drs. W.H.J.H. van Meeuwen
Drs. C.P. van Nieuwkasteele

Tweede, gecorrigeerde druk: voorjaarssemester 1982.

november

Inhoudsopgave

1.

Inleiding

In dit college worden gehele, rationale en reële getallen bestudeerd, er wordt meetkunde op de reële rechte bedreven, zulks in verband met bijv. de begrippen rij, convergentie en continuïteit. De Riemann-integraal en de e-macht zullen op een "nette" manier worden gedefinieerd.

Als hulpmiddelen gebruiken we de begrippen afbeelding, samengestelde afbeelding, injectie, surjectie, bijectie en inverse afbeelding (alles te vinden in het dictaat verzamelingsleer I).

Wellicht ten overvloede enige opgaven:

1.1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is de afbeelding gedefinieerd door:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad (f(x) := x(x-1)(x+1)).$$

a) bewijs dat f niet injectief is

b) bewijs dat f wel surjectief is.

1.2 $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Onderzoek de volgende afbeeldingen op injectiviteit en surjectiviteit:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ met $\forall_{x\in\mathbb{R}} \ (f(x) = x^2)$.

b) $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ met $\forall_{x\in\mathbb{R}^+} \ (g(x) = x^2)$

c) $h: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ met $\forall_{x\in\mathbb{Q}^+} \ (h(x) = x^2)$

1.3 De afbeelding $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door: $\forall_{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2} (f(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi))$ voegt aan de poolcoördinaten van een vector in het platte vlak zijn rechthoekige coördinaten toe.

a) Bewijs dat f wel surjectief maar niet injectief is.

b) Bepaal een deelverzameling P van $\mathbb{R}^2$, zó dat de bedoelde afbeelding, beperkt tot P, bijectief is.

c) Bepaal van de onder b) bedoelde afbeelding ook de inverse.

1.4 Laten $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ en $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^+} \quad (f(x) = \ln x) \text{ en } \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad (g(x) = x^3).$$

a) Bepaal: $g \circ f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

b) Bewijs dat $g \circ f$ bijectief is en bepaal $(g \circ f)^{-1}$.

Tevens worden vaak gebruikt de begrippen: relatie, equivalentierelatie, equivalentieklasse en de notaties ϕ, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, enz. T.a.v. $\cup$ en $\cap$ hebben we behoefte aan enige uitbreiding. Laat X ("universum") en A ("indexverzameling") verzamelingen zijn; laat voor iedere $\alpha \in A$ een deelverzameling V_α van X gegeven zijn. Dan is

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha := \{x \in X \mid \exists_{\alpha\in A}\ (x \in V_\alpha)\} \qquad \text{(de \underline{vereniging} der } V_\alpha\text{'s)}$$

en

$$\bigcap_{\alpha\in A} V_\alpha := \{x \in X \mid \forall_{\alpha\in A}\ (x \in V_\alpha)\} \qquad \text{(de \underline{doorsnede} der } V_\alpha\text{'s).}$$

Is $A = \mathbb{N}$, zodat de V_α's een rij verzamelingen $V_1, V_2, ..$ vormen, dan wordt de notatie $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ resp. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

Is $A = \{1,\dots,n\}$, zodat we n verzamelingen $V_1, V_2, \dots, V_n$ hebben, dan gebruiken we de notaties $\bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$ en $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k$. Merk op dat $\bigcup\limits_{k=1}^{2} V_k = V_1 \cup V_2$ en $\bigcap\limits_{k=1}^{2} V_k = V_1 \cap V_2$.

Voorbeeld. $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Voor alle x uit A definiëren we $V_x := \{y \in \mathbb{R} \mid x \le y \le \frac{1}{x}\}$.

Nu is $\bigcap\limits_{x\in A} V_x = \{1\}$. Ga dit na.

Opgaven:

1.5 Zij $V_n := \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}\}$ met $n \in \mathbb{N}$.

Bepaal $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

1.6 $J := \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$. Bepaal $\bigcup\limits_{x\in J} \{\tan x\}$.

Van de elementaire analyse worden gebruikt de notaties (a,b), [a,b), [a,b], [a,∞) enz. voor intervallen, terwijl de begrippen rij, convergentie, continuïteit en de hoofdzaken van de differentiaal- en integraalrekening bekend worden ondersteld (wiskunde 10).

Anders dan U tot nu toe gewend bent, wordt in dit college de nadruk gelegd op de begripsvorming, terwijl de techniek niet zozeer aan de orde komt. Speciale aandacht vragen we voor het principe van volledige inductie:
Zij $A \subset \mathbb{N}$. Als geldt: $1 \in A$ én $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$ dan is $A = \mathbb{N}$.

<u>Voorbeeld</u>: Beschouw een rij getallen $a_1, a_2, \ldots$.

We definiëren $\sum_{k=1}^{n} a_k$ als volgt:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \text{ én } \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} .$$

Met het principe van volledige inductie is nu $\sum_{k=1}^{n} a_k$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ gedefinieerd.

Zij $A(n)$ een bewering over een natuurlijk getal n. Wanneer we willen aantonen dat $A(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$, kunnen we vaak een <u>bewijs door volledige inductie</u> geven. We tonen dan aan:

1^o). $A(1)$ is waar

2^o). uit de waarheid van $A(n)$ volgt de waarheid van $A(n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Hieruit volgt al: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (A(n))$. Immers: zij $A := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Dan geldt $1 \in A$ en $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$. Volgens het principe van volledige inductie is dan $A = \mathbb{N}$.

<u>Opgaven:</u>

1.7 Zij $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$. Van een rij getallen $t_1, t_2, \ldots$ is gegeven $t_1 = a$ en $t_{n+1} = t_n + v$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Bewijs dat $t_n = a + (n-1)v$.

b) Als $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$, bewijs dan dat $S_n = \frac{1}{2}vn^2 - \frac{1}{2}vn + an$.

1.8 Bewijs dat $2^{2n} \geq n^2 + 3$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Het <u>principe van uitgebreide volledige inductie</u> luidt als volgt:

Zij $B \subset \mathbb{N}$ terwijl B twee eigenschappen heeft:

1^o). $1 \in B$

2^o). Als $\{1,2,\ldots,n\} \subset B$, dan $n+1 \in B$. $(n \in \mathbb{N})$.

Dan is $B = \mathbb{N}$

<u>Bewijs</u>: Zij $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \{1,2,\ldots,n\} \subset B\}$.

Dan geldt $1 \in A$ en, op grond van 2^o, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$.

Het principe van volledige inductie geeft nu: $A = \mathbb{N}$, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\{1,2,\ldots,n\} \subset B$ en zeker $n \in B$. Dus $\mathbb{N} \subset B$; ook $B \subset \mathbb{N}$ en dus $B = \mathbb{N}$. □

Opgave:

1.9 Van een rij getallen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is gegeven

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Bewijs dat $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

b) Bewijs dat $a_n \in \mathbb{N} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Als voorbeeld behandelen we nog:

Stelling: Is $V \subset \mathbb{N}$, $V \neq \emptyset$, dan heeft V een kleinste element.

Bewijs: Stel V heeft geen kleinste element. Dan geldt met $V^* := \mathbb{N} \setminus V$:

1^o. $1 \notin V$ dus $1 \in V^*$ (anders was 1 kleinste element)

2^o. Stel voor $n \in \mathbb{N}$ dat $\{1,2,\ldots,n\} \subset V^*$, dus $1 \notin V$, $2 \notin V, \ldots, n \notin V$. Dan geldt ook $n+1 \notin V$ (anders was $n+1$ kleinste element) zodat $n+1 \in V^*$.

Het principe van uitgebreide volledige inductie (toegepast op V^*) geeft nu $V^* = \mathbb{N}$ ofwel $V = \emptyset$.

Tegenspraak. Dus V heeft wel een kleinste element. $\square$

2. Machtigheden

In dit hoofdstuk beschouwen we niet-lege verzamelingen U,V,W,... .

Zij $U = \{a_1,\dots,a_n\}$ en $V = \{b_1,\dots,b_m\}$. Wanneer $n = m$, dan bevatten U en V evenveel elementen; we zeggen dat zij gelijkmachtig zijn. Ons doel is eerst het begrip gelijkmachtigheid algemener in te voeren, zonder van de aantallen elementen gebruik te maken. Hierdoor wordt het een begrip dat ook zinvol is voor "oneindige" verzamelingen.

Def. $U \sim V$ betekent dat er een bijectieve afbeelding $U \to V$ bestaat.

Voorbeeld 1. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Beschouw n.l. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, gedefinieerd door

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(n-1) & \text{als } n \text{ oneven} \\ \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even.} \end{cases}$$

Voorbeeld 2.

$[0,1] \sim [3,5]$. Beschouw n.l. de afbeelding $f(x) := 2x + 3$.

Voorbeeld 3.

Voor $\{1,2,3\}$ en $\{3,5,11,19\}$ bestaat de relatie $\sim$ niet.

Voorbeeld 4.

Ook voor $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ bestaat deze relatie niet. Wel hebben beide verzamelingen oneindig veel elementen, maar er bestaat geen bijectie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Stel n.l. dat er wel één was, zeg φ, dan zou gelden:

$$\mathbb{R} = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots\}.$$

Een reëel getal is te schrijven in de gedaante $b_0 + 0{,}b_1b_2b_3\dots$ met $b_0 \in \mathbb{Z}, b_1,b_2,\dots \in \{0,1,2,3,\dots,9\}$. Deze decimale schrijfwijze is echter niet steeds eenduidig. Zo is $36{,}12 = 36 + 0{,}12000\dots$ maar ook $36{,}12 = 36 + 0{,}11999\dots$. In zo'n geval zullen we voor de notatie met nullen kiezen.

Stel nu $\varphi(n) = a_{n0} + 0{,}a_{n1}a_{n2}\dots$ en maak de volgende lijst:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= a_{10} + 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\
\varphi(2) &= a_{20} + 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\
\varphi(3) &= a_{30} + 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\
&\ \vdots \\
\varphi(n) &= a_{n0} + 0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Omdat volgens de onderstelling φ een bijectie is, komt elk reëel getal in deze lijst voor.
Beschouw nu echter het getal $c := 0, c_1c_2c_3\ldots$, waarbij c_i zodanig gekozen wordt dat $c_i \neq a_{ii}$ en $\neq 9$, dan komt c in de lijst niet voor. Dit is in strijd met de onderstelling. (waarom moet $\neq 9$ erbij?).

Stelling. $\sim$ is een equivalentierelatie.

Bewijs: 1) $U \sim U$, want als bijectie kan de identieke afbeelding genomen worden.
2) Als $U \sim V$ dan $V \sim U$. Immers als $f: U \to V$ is een bijectie is dan is $f^{-1}: V \to U$ ook een bijectie.
3) Als $U \sim V$ en $V \sim W$ dan $U \sim W$.
Immers zijn $f: U \to V$ en $g: V \to W$ beide bijecties dan is $g \circ f: U \to W$ dat ook. □

Gevolg: Verzamelingen kunnen op boven beschreven manier worden ondergebracht in equivalentieklassen. Zo'n klasse heet een machtigheid of een kardinaalgetal.
De equivalentieklasse van de verzamelingen met n elementen ($n \in \mathbb{N}$) wordt aangeduid met $\underline{n}$. De klasse van de verzamelingen, equivalent met $\mathbb{N}$, heet $\underline{a}$ (aftelbaar) en de klasse van de verzamelingen, equivalent met $\mathbb{R}$, heet $\underline{c}$ (continu).

Definitie. $U \preccurlyeq V$ betekent: er is een injectieve afbeelding $U \to V$.

Opmerking. $U \preccurlyeq U$, want de identieke afbeelding $U \to U$ is injectief. Als $U \subset V$, dan is ook $U \preccurlyeq V$.

Voorbeelden.

1. $\{1,2,3\} \preccurlyeq \{9,10,11,12\}$
2. $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Z}$; immers $f(n) = n$ is een injectie $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{R}$; immers $f(n) = n$ is, zoals we reeds eerder zagen, een injectie.

Stelling: Als $U \preccurlyeq V$ en $V \preccurlyeq W$, dan $U \preccurlyeq W$.

Bewijs: Als $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, met f en g injecties, dan $U \xrightarrow{g \circ f} W$ met $g \circ f$ een injectie. □

Definitie. Zij $\underline{p}$ en $\underline{q}$ twee kardinaalgetallen, dan heet $\underline{p} \leq \underline{q}$ wanneer voor verzamelingen $U \in \underline{p}$ en $V \in \underline{q}$ geldt dat $U \preccurlyeq V$.

Ter rechtvaardiging van de definitie tonen we aan dat deze onafhankelijk is van de keuze van de representanten U en V, d.w.z.
als $U \preccurlyeq V$, $U_1 \sim U$ en $V_1 \sim V$ dan ook $U_1 \preccurlyeq V_1$.

Bewijs: Zij $f\colon U \to V$ met f injectief,

$g\colon U_1 \to U$ met g bijectief, en

$h\colon V_1 \to V$ met h bijectief.

We vinden dan een injectie $k\colon U_1 \to V_1$ door te definiëren $k := h^{-1} \circ f \circ g$. □

Voorbeelden. $\underline{n} \le \underline{n+1}$; $\underline{n} \le \underline{a}$; $\underline{a} \le \underline{c}$.
Als $U \subset V$, $\underline{p}$ het kardinaalgetal van U, $\underline{q}$ dat van V, dan is $\underline{p} \le \underline{q}$. Als voor kardinaalgetallen $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ geldt $\underline{p} \le \underline{q}$ en $\underline{q} \le \underline{r}$, dan is $\underline{p} \le \underline{r}$.

Stelling van Bernstein.
Is $\underline{p} \le \underline{q}$ èn $\underline{q} \le \underline{p}$ dan is $\underline{p} = \underline{q}$.
Het bewijs laten we hier achterwege.

Notatie: met $\underline{p} < \underline{q}$ wordt bedoeld $\underline{p} \le \underline{q}$ èn $\underline{p} \ne \underline{q}$.
Zo is $\underline{n} < \underline{n+1}$ en $\underline{a} < \underline{c}$.

Opgaven

2.1 Bewijs dat $\mathbb{Z}$ gelijkmachtig is met de verzameling der gehele drietallen.

2.2 $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$; $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
en $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$.
Bewijs dat A, B en C gelijkmachtig zijn.

Definities:
$\underline{q}$ heet oneindig als $\underline{a} \le \underline{q}$. Het kardinaalgetal van de verzameling wordt aangeduid met $\mu(U)$, dus: $\mu(U) = \underline{p}$ betekent: $U \in \underline{p}$.
U heet een oneindige verzameling als $\underline{a} \le \mu(U)$, d.w.z. U heet oneindig als er een injectieve afbeelding $f\colon \mathbb{N} \to U$ bestaat.
Is U niet oneindig dat heet hij eindig.

Stelling. De eindige kardinaalgetallen zijn juist de kardinaalgetallen $\underline{n}$ met $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs:

1° Is $n \in \mathbb{N}$, dan is het duidelijk dat $\underline{n}$ eindig is.

2° Zij omgekeerd $\underline{p}$ eindig, dan moeten we aantonen dat $\underline{p} = \underline{n}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Is $U \in \underline{p}$, dan betekent dat dat we moeten bewijzen dat $U \sim \{1,2,\dots,n\}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Zij $u_1 \in U$. Als $U \setminus \{u_1\} = \phi$, dan zijn we klaar, zo niet, dan kiezen we $u_2 \in U \setminus \{u_1\}$. Is $U \setminus \{u_1,u_2\} = \phi$, dan klaar, zo niet dan kiezen we $u_3 \in U \setminus \{u_1,u_2\}$, enz.

Er zijn nu twee mogelijkheden.

a) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ (U \setminus \{u_1,u_2,\ldots,u_n\} = \phi)$.

b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (U \setminus \{u_1,u_2,\ldots,u_n\} \neq \phi)$.

ad a) Blijkbaar is $U = \{u_1, u_2,\ldots,u_n\}$.
De afbeelding φ: $\{1,2,\ldots,n\} \to U$, gedefinieerd door $\varphi(i) = u_i$ is een bijectie, zodat $\mu(U) = \underline{n}$.

ad b) De afbeelding: ψ: $\mathbb{N} \to U$, gedefinieerd door $\psi(i) = u_i$ is een injectie, dus $\mathbb{N} \preccurlyeq U$, zodat $\underline{a} \leq \underline{p}$, maar dan is $\underline{p}$ oneindig, in tegenspraak met het gegeven.

Conclusie: $\underline{p} = \underline{n}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. □

<u>Stelling</u>. (Intrinsiek kenmerk voor oneindigheid) Een verzameling U is oneindig, dan en slechts dan als er een echte deelverzameling U_1 van U is, die gelijkmachtig is met U.

<u>Bewijs.</u> Als U eindig is, dan is $\mu(U) = \underline{n}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$; iedere mogelijke echte deelverzameling U_1 van U heeft dus ten hoogste n-1 elementen. Een bijectieve afbeelding $U_1 \to U$ is dus niet mogelijk.
Is U oneindig, dan $\underline{a} \leq \mu(U)$; er is een injectieve afbeelding $\mathbb{N} \to U$, of te wel er is een rij van verschillende elementen $u_1, u_2,\ldots$ in U.
Neem $U_1 := U \setminus \{u_1\}$. Definieer f: $U_1 \to U$ door

$f(u_i) := u_{i-1}$ voor $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$f(u) := u$ voor alle andere elementen in U_1.
f is bijectief, dus $U_1 \sim U$. □

<u>Stelling</u>. Als er een surjectieve afbeelding $\mathbb{N} \to U$ bestaat, dan is $\mu(U) \leq \underline{a}$.

<u>Bewijs</u>. Zij f: $\mathbb{N} \to U$ surjectief. Definieer voor alle $u \in U$ de verzameling V_u door $V_u := \{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = u\}$, dan $V_u \neq \phi$ en $V_u \subset \mathbb{N}$. Zij m_u het kleinste element van V_u.
Definieer nu g: $U \to \mathbb{N}$ door $g(u) = m_u$, dan is g een injectieve afbeelding.
Immers is $u_1 \neq u_2$ ($u_1 \in U$ ën $u_2 \in U$), dan is

$$\{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = u_1\} \cap \{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = u_2\} = \phi ,$$

zodat $m_{u_1} \neq m_{u_2}$. Conclusie $\mu(U) \leq \underline{a}$. □

Merk op dat uit de definitie van oneindig zijn van een verzameling U (dus van $\underline{a} \leq \mu(U)$, bovenstaande stelling en de stelling van Bernstein, het volgende gemakkelijk te gebruiken criterium volgt:
Als bij een verzameling U een injectieve afbeelding $\mathbb{N} \to U$ én een surjectieve afbeelding $\mathbb{N} \to U$ bestaan, dan is $\mu(U) = \underline{a}$.

<u>Opgave</u>

2.3 Zij $U = \{1 + \cos\frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Bewijs dat $\mu(U) = \underline{a}$.

<u>Stelling</u>: Is $\mu(U) = \mu(V) = \underline{a}$ dan ook $\mu(U \cup V) = \underline{a}$.

<u>Bewijs</u>: Zij $f: \mathbb{N} \to U$ bijectief en
$g: \mathbb{N} \to V$ bijectief.

Definieer nu $h: \mathbb{N} \to U \cup V$, door:

$$h(m) = \begin{cases} f(\frac{m+1}{2}) & \text{als } m \text{ oneven} \\ g(\frac{m}{2}) & \text{als } m \text{ even,} \end{cases}$$ dan is h een surjectieve afbeelding.

(maar niet noodzakelijk bijectief; ga na).

Gevolg: $\mu(U \cup V) \leq \underline{a}$. Echter $\underline{a} = \mu(U) \leq \mu(U \cup V)$. □

<u>Opgave</u>

2.4 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ zijn aftelbare verzamelingen.

Bewijs dat $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ aftelbaar is.

<u>Stelling</u>. Als $\forall_{i\in\mathbb{N}} \ (\mu(U_i) = \underline{a})$, dan $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) = \underline{a}$.

<u>Bewijs</u>: Zij $f_i: \mathbb{N} \to U_i$ een bijectie ($i \in \mathbb{N}$) en $u_{ik} := f_i(k)$ $(i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$.

We kunnen de elementen van de U_i in een lijst opschrijven:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, \ldots\} \\ U_2 &= \{u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots\} \\ U_3 &= \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

We maken nu de afbeelding $\varphi: \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, door

$\varphi(1) = u_{11}$, $\varphi(2) = u_{12}$, $\varphi(3) = u_{21}$, $\varphi_3 = u_{13}$, $\varphi_4 = u_{22}$ enz.

(zie figuur). Achtereenvolgens worden de diagonalen "afgewerkt" (z.g. <u>diagonaal proces</u> v. Cantor).

We zien dat φ surjectief is, dus $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \leq \underline{a}$. Ook is $\underline{a} = \mu(U_i) \leq \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i)$, dus $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) = \underline{a}$. $\square$

Voorbeeld. $\mathbb{Q}$ is een aftelbare verzameling.
Immers $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.
Is $U_i = \{\frac{a}{i} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, zodat U_i aftelbaar, dan $\mathbb{Q} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, dus $\mathbb{Q}$ is aftelbaar.

Opgaven

2.5 Bewijs dat $\mu(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \underline{a}$.

2.6 Bewijs dat $(0,1]$ en $[0,1]$ gelijkmachtige intervallen zijn.

Tot hiertoe hebben we kennisgemaakt met de machtigheden $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, ..., $\underline{a}$, $\underline{c}$. De onderstaande stelling duidt op het bestaan van "willekeurig" grote machtigheden.

Stelling. Is $U \neq \phi$ en V de verzameling van alle deelverzamelingen van U, dan is $\mu(U) < \mu(V)$.
Alvorens deze stelling te bewijzen geven we een voorbeeld.
Zij $U = \{1,2,3\}$ dan is

$$V = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

$\mu(U) = \underline{3}$ en $\mu(V) = \underline{8}$.

Bewijs: De afbeelding $\varphi: U \to V$, gedefinieerd door $\varphi(u) := \{u\}$ is injectief dus $\mu(U) \leq \mu(V)$.
Stel dat $f: U \to V$ een bijectieve afbeelding is. Als $u \in U$, dan $f(u) \in V$, dus $f(u) \subset U$; het is dus mogelijk dat $u \in f(u)$.
Zij $U_1 = \{u \in U \mid u \in f(u)\}$en $U_2 = \{u \in U \mid u \notin f(u)\}$; $U = U_1 \cup U_2$ èn $U_1 \cap U_2 = \phi$.
Omdat f bijectief is geldt $\exists_{v\in U} (f(v) = U_2)$: immers $U_2 \in V$.

Stel $v \in U_1$ dan is $v \in f(v)$, dus $v \in U_2$, in strijd met $U_1 \cap U_2 = \phi$.

Stel $v \in U_2$ dan is $v \notin f(v)$, dus $v \notin U_2$, eveneens strijdig.
Conclusie: er is geen bijectie f. Dus $\mu(U) < \mu(V)$. $\square$

3. Getalsystemen

In dit hoofdstuk bespreken we de getalsystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. We merken hier alvast op, dat deze getalsystemen in de genoemde volgorde, een steeds rijkere structuur hebben.
Zo kunnen we binnen $\mathbb{N}$ optellen en vermenigvuldigen, maar i.h.a. niet aftrekken en delen. Binnen $\mathbb{Z}$ is aftrekken steeds ook mogelijk, binnen $\mathbb{Q}$ komt delen (behalve door 0) erbij. De overgang van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$ verrijkt de structuur op een andere wijze, die met limieten samenhangt. Alle genoemde getalsystemen hebben bovendien een ordening: van twee elementen x,y kunnen we steeds zeggen dat $x < y$ of $x = y$ of $x > y$.
We zullen zien, dat steeds volgende getalsystemen op constructieve wijze uit vorige zijn op te bouwen; deze constructies gaan we ook uitvoeren (waarbij, met het oog op de tijd, vele details overgeslagen zullen worden). De lezer wordt alvast gewaarschuwd, dat hij bij de constructie van zo'n getalsysteem uit een vorig, zich op het standpunt moet stellen dat het in te voeren getalsysteem hem niet bekend is: we zullen onze kennis van getallen moeten "vergeten".
Uiteindelijk worden zo de reële getallen constructief ingevoerd vanuit de natuurlijke getallen. We beginnen daarom met een bespreking van de natuurlijke getallen met hun optelling, vermenigvuldiging en ordening.

1^o opzet. (steunend op de verzamelingsleer). De natuurlijke getallen zijn de kardinaalgetallen van eindige, niet lege verzamelingen. (wordt de lege verzameling ook toegelaten, dan moet men 0 ook tot de natuurlijke getallen rekenen). Hierbij is eindig bedoeld als niet oneindig in de zin van het intrinsieke kenmerk van oneindigheid. We gebruiken voor deze natuurlijke getallen symbolen als $1,2,3,\ldots$. Voor natuurlijke getallen n en m wordt $n + m$, $n.m$ en $n < m$ als volgt gedefinieerd: Kies verzamelingen U en V met $\mu(U) = n$, $\mu(V) = m$ en $U \cap V = \phi$. Dan is $n + m := \mu(U \cup V)$, $m.n := \mu(U \times V)$ en $n < m \Leftrightarrow \mu(U) < \mu(V)$. Men kan aantonen, dat nu alle gewone (reken)regels voor natuurlijke getallen gelden.

2^o opzet. (axiomatisch). De natuurlijke getallen zijn de elementen van een verzameling $\mathbb{N}$ waarin aan de volgende axioma's (Peano) voldaan is:

i) Er is een natuurlijk getal, dat wordt aangeduid met 1.
ii) Er is een afbeelding $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($S(n)$ noemen we de opvolger van n).
iii) 1 is geen beeld onder S
iv) S is injectief
v) Is $U \subset \mathbb{N}$ met de eigenschappen:

a) $1 \in U$

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in U \Rightarrow S(n) \in U)$

dan is $U = \mathbb{N}$.

We noteren deze natuurlijke getallen weer met $1, 2 = S(1), 3 = S(2), \ldots$

Axioma v) heet het axioma van volledige inductie. De optelling wordt nu met behulp van dit axioma gedefinieerd: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $n + 1 := S(n)$; als $n + k$ ($k \in \mathbb{N}$) al bekend is, dan is $n + (k+1) := S(n+k)$.

De vermenigvuldiging gaat analoog: voor $n \in \mathbb{N}$ is $1.n := n$; als $k.n$ ($k \in \mathbb{N}$) al bekend is, dan is $(k+1).n := k.n + n$.

De ordening voeren we in via: $n < m \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} (m = n+k)$. Alle gebruikelijke eigenschappen kunnen nu weer afgeleid worden. Als voorbeeld:

3.1 Opgave: Bewijs de volgende eigenschappen ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

a) Als $a + b = c + b$, dan is $a = c$

b) als $a + b < c + b$, dan is $a < c$

c) als $a < b$ en $b < c$, dan is $a < c$

d) als $a < b$, dan is $ac < bc$.

Een vergelijkende studie van 1^e en 2^e opzet toont aan, dat beide verkregen verzamelingen natuurlijke getallen equivalent zijn. Van nu af aan zullen we de natuurlijke getallen als bekend veronderstellen, en wel naar keuze vanuit 1^e of 2^e opzet.

Invoering van de gehele getallen.

In $\mathbb{N}$ kennen we nu $+$, $\times$ en $<$. De invoering van de aftrekking geeft moeilijkheden. Daarom willen we naar $\mathbb{Z}$ toe.

De constructie hiervan verloopt via equivalentieklassen.

(idee: $-3 = 1 - 4 = 2 - 5 = 3 - 6, \ldots$;

$0 = 1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3, \ldots$.)

Definitie. Voor n, m, k, ℓ uit $\mathbb{N}$ definiëren we de relatie $\sim$ aldus:

$$(n,m) \sim (k,\ell) \text{ betekent } n + \ell = m + k.$$

Stelling. $\sim$ is een equivalentierelatie.

Bewijs: a) $(n,m) \sim (n,m)$, want $n + m = n + m$.

b) stel $(n,m) \sim (k,\ell)$ dus $n + \ell = m + k$; nu ook $k + m = \ell + n$, dus $(k,\ell) \sim (n,m)$.

c) Stel $(a,b) \sim (c,d)$ èn $(c,d) \sim (e,f)$, dan:

$$\begin{array}{l} a + d = b + c \\ \underline{c + f = d + e} \; + \end{array}$$

$a + c + d + f = b + c + d + e$, dus $a + f = b + e$, zodat $(a,b) \sim (e,f)$. □

Gevolg. Met behulp van de genoemde equivalentierelatie is $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in equivalentieklassen te verdelen. De klasse, behorend bij (a,b) wordt hieronder (voorlopig) aangeduid met $[(a,b)]$.

Definitie. $\mathbb{Z} := \{[(a,b)] \mid a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}\}$.

Definitie optelling in $\mathbb{Z}$

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)] := [(a + c,\ b + d)]$$

Rechtvaardiging.
Een definitie, als genoemd, is alleen maar zinvol als hij onafhankelijk is van de keuze van de representanten. We tonen dit aan.
Zij $(a',b') \sim (a,b)$ en $(c',d') \sim (c,d)$. We moeten aantonen dat $[(a' + c',\ b' + d')] = [(a+c,\ b + d)]$, dus dat $(a'+c',\ b' + d') \sim (a + c,\ b + d)$.
Wegens $a' + b = b' + a$ en $c' + d = d' + c$ is $a' + b + c' + d = b' + a + d' + c$, dus $(a' + c') + (b + d) = (b' + d') + (a + c)$. □

Voorbeeld:
$[(2,5)] +_{\mathbb{Z}} [(6,1)] = [(2 + 6,\ 5 + 1)] = [(8,6)]$ $(= [(3,1)])$.

Stelling: $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$ is een commutatieve groep.

Bewijs: $+_{\mathbb{Z}}$ is associatief en commutatief, hetgeen door uitschrijven direct uit de eigenschappen van $\mathbb{N}$ volgt. Het neutrale element, $0_{\mathbb{Z}}$ is $[(1,1)]$. Immers:

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(1,1)] = [(a + 1,\ b + 1)] = [(a,b)].$$

De tegengestelde van $[(a,b)]$, $-_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$, is $[(b,a)]$. Immers:

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(b,a)] = [(a + b,\ a + b)] = [(1,1)] = 0_{\mathbb{Z}}.$$ □

Definitie.

$$[(a,b)] \times_{\mathbb{Z}} [(c,d)] := [(ac + bd,\ ad + bc)].$$

Rechtvaardiging.

Zij $(a',b') \sim (a,b)$ en $(c',d') \sim (c,d)$, dan moeten we aantonen dat $(a'c' + b'd',\ a'd' + b'c') \in [(ac + bd,\ ad + bc)]$.
Wegens $a' + b = b' + a$ en $c' + d = d' + c$ gelden:

$$\begin{array}{llll}
(a' + b)c' & = (b' + a)c' & \text{dus} & a'c' + bc' = b'c' + ac' \\
(b' + a)d' & = (a' + b)d' & \text{dus} & b'd' + ad' = a'd' + bd' \\
(c' + d)a & = (d' + c)a & \text{dus} & ac' + ad = ad' + ac \\
(d' + c)b & = (c' + d)b & \text{dus} & bd' + bc = bc' + bd \\
\hline
 & & & (a'c' + b'd') + (ad+bc) = (a'd'+b'c')+(ac+bd).
\end{array}$$
□

Stelling. $(\mathbb{Z}, \times_{\mathbb{Z}})$ is een commutatieve semi-groep met eenheid.

Bewijs: Dat $\times_{\mathbb{Z}}$ commutatief en associatief is, volgt uit de eigenschappen van $\mathbb{N}$. Het neutraal element is $[(2,1)]$. Immers:

$$[(a,b)] \times_{\mathbb{Z}} [(2,1)] = [(2a + b,\ a + 2b)] = [(a,b)].$$ □

Stelling: $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \times_{\mathbb{Z}})$ is een commutatieve ring met eenheid en zonder nuldelers.

Bewijs: Er zijn nog twee zaken te bewijzen, n.l. de distributieve eigenschap en de stelling dat $\mathbb{Z}$ geen nuldelers bezit.
De eerste wordt aan de lezer overgelaten. Voor de tweede:
Stel $[(a,b)] \times_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(1,1)]$, dus

$$[(ac + bd,\ ad + bc)] = [(1,1)] \text{ dan is}$$

$$ac + bd + 1 = ad + bc + 1, \text{ dus } ac + bd = ad + bc.$$

Stel $a \neq b$, dus $(a,b) \notin [(1,1)]$, dan moeten we bewijzen dat $(c,d) \in [(1,1)]$ d.w.z. $c = d$.

1^o. Stel $a < b$, dus $b = a + s$ voor zekere $s \in \mathbb{N}$.
Substitutie levert:

$$ac + (a + s)d = ad + (a + s)c\ , \text{ dus: } sd = sc \text{ zodat } c = d.$$

2^o. Stel $a > b$; dit bewijs verloopt analoog en leidt eveneens tot $c = d$. □

Rest ons nog een ordening in te voeren.

<u>Definitie</u>: $[(a,b)] <_{\mathbb{Z}} [(c,d)]$ betekent $a + d < b + c$.

<u>Rechtvaardiging.</u>

Stel $a + d < b + c$. Zij $(a',b') \sim (a,b)$ en $(c',d') \sim (c,d)$, dan moeten we bewijzen dat $a' + d' < b' + c'$.

Nu geldt: $a + d < b + c$,

$$(b' + a) + (c' + d) < b' + b + c' + c,$$
$$(a' + b) + (d' + c) < b' + c' + b + c,$$
$$\text{dus } a' + d' < b' + c'. \qquad \square$$

<u>Voorbeeld:</u>

Als $x,y,z \in \mathbb{Z}$, met $x <_{\mathbb{Z}} y$ en $y <_{\mathbb{Z}} z$, dan is ook $x <_{\mathbb{Z}} z$

<u>Bewijs</u>: Zij $x = [(x_1,x_2)]$, $y = [(y_1,y_2)]$ en $z = [(z_1,z_2)]$.

Nu is $x_1 + y_2 < x_2 + y_1$

$$\underline{y_1 + z_2 < y_2 + z_1} \; +$$
$$x_1 + y_2 + y_1 + z_2 < x_2 + y_1 + y_2 + z_1 \text{ (waarom?), dus:}$$
$$x_1 + z_2 < x_2 + z_1, \text{ zodat } [(x_1,x_2)] <_{\mathbb{Z}} [(z_1,z_2)]. \qquad \square$$

<u>Opgaven</u>

3.2 Zijn x, y, $z \in \mathbb{Z}$, bewijs dan:

a) $x <_{\mathbb{Z}} x$ is niet waar.

b) $(x <_{\mathbb{Z}} y)$ óf $(x = y)$ óf $(y <_{\mathbb{Z}} x)$, d.w.z. $\mathbb{Z}$ is totaal geordend.

c) Als $x <_{\mathbb{Z}} y$ dan ook $x +_{\mathbb{Z}} z <_{\mathbb{Z}} y +_{\mathbb{Z}} z$.

d) Als $x <_{\mathbb{Z}} y$ en $[(1,1)] <_{\mathbb{Z}} z$ dan is $x \times_{\mathbb{Z}} z <_{\mathbb{Z}} y \times_{\mathbb{Z}} z$

We willen $\mathbb{N}$, met behoud van structuur, inbedden in $\mathbb{Z}$.
Als met $m \in \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N}$ de elementen $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}$ corresponderen, dan betekent dit dat moet gelden:

$$\bar{m} +_{\mathbb{Z}} \bar{n} = \overline{m + n},\ \bar{m} \times_{\mathbb{Z}} \bar{n} = \overline{mn},\ \bar{m} <_{\mathbb{Z}} \bar{n} \Leftrightarrow m < n.$$

Neem voor elke $m \in \mathbb{N}$: $\bar{m} := [(m + 1, 1)]$, dan is inderdaad

$$\bar{m} +_{\mathbb{Z}} \bar{n} = [(m + 1, 1)] +_{\mathbb{Z}} [(n + 1, 1)] = [(m + n + 1, 1)] = \overline{m + n}.$$

Het verifiëren van de beide andere eigenschappen wordt aan de lezer overgelaten.
Beschouw nu $(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Er zijn drie mogelijkheden:

1°. $k > i$, dus $\exists_{m \in \mathbb{N}}\ (k = i + m)$, zodat

$$[(k,i)] = [(i + m, i)] = [(m + 1, 1)] = \bar{m}.$$

2°. $k = i$, dus $[(k,i)] = [(i,i)] = [(1,1)] = 0_{\mathbb{Z}}$.

3°. $k < i$, dus $\exists_{n \in \mathbb{N}}\ (k + n = i)$, zodat

$$[(k,i)] = [(k,k+n)] = [(1,n+1)] = -_{\mathbb{Z}} [(n+1,1)] = -_{\mathbb{Z}} \bar{n}.$$

Het weglaten van indices $\mathbb{Z}$ en het streepje boven de letters geeft de bekende notaties binnen $\mathbb{Z}$, die we van nu af aan zullen gebruiken.
Aldus is $\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

<u>Opgaven.</u>

3.3 a) Zij $a \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $[(a + 1, 1)]$ positief is.
b) Bewijs dat elk positief getal van de vorm $[(a + 1, 1)]$ is met $a \in \mathbb{N}$.

3.4 Als $a \in \mathbb{Z}$ en $a > 0$, bewijs dan dat $-a < 0$.

3.5 Bereken $2 \times (-3)$.

3.6 Bereken $2 + (-3) \times (-5)$.

3.7 Het algorithme van Euclides luidt als volgt:
Zij $n \in \mathbb{N}$ en $d \in \mathbb{N}$. Er bestaan getallen $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en $r \in \{0,1,2,3,\ldots,d-1\}$, zodat $n = dv + r$.
Bewijs dit (met volledige inductie naar n, bij vaste d).

Intermezzo: enige stellingen over delers en priemgetallen.

Definitie: Als $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dan heet n een deler van m (notatie: $n|m$) als geldt $\exists_{k\in\mathbb{Z}}$ $(m = nk)$.

Voorbeeld: $2|-6$ want $-6 = 2.(-3)$.
$1|n$ want $n = n.1$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$k|0$ want $0 = 0.k$ $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$.

Stelling. Als $n \mid m_1$ en $n \mid m_2$, dan $n \mid (m_1 + m_2)$.
Als $n \mid m_1$ en $k \in \mathbb{Z}$, dan $n \mid km$.
Als $n \mid m_1$ en $n \mid m_2$, $k \in \mathbb{Z}$ en $\ell \in \mathbb{Z}$ dan $n \mid (km_1 + \ell m_2)$.
$(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z})$.
De bewijzen laten we aan de lezer over.

Definitie. Is $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dan heet p priem wanneer 1 en p de enige positieve delers van p zijn.

Opmerking: Enige priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Stelling. Elk natuurlijk getal ongelijk 1 kan in priemfactoren worden ontbonden.

Bewijs: Als $n = 2$ dan is de ontbinding duidelijk. Zij verder $n > 2$.
Stel dat de stelling waar is voor alle natuurlijke getallen $k < n$. Beschouw n:
1° Als n priem is, dan zijn we klaar.
2° Als n niet priem is, dan is $n = k_1 k_2$ $(k_1 \neq 1, k_2 \neq 1)$ maar $k_1 < n$ en $k_2 < n$, dus k_1 en k_2 zijn zelf te ontbinden in priemfactoren, dus n ook (met het principe van uitgebreide volledige inductie). □

Opmerking. Later zal bewezen worden dat deze ontbinding uniek is, op volgorde na.

Definitie. Zijn a en b natuurlijke getallen. Het natuurlijke getal d heet grootste gemene deler van a en b (notatie $d = \text{ggd}(a,b)$) als geldt:
1° $d \mid a$ en $d \mid b$.
2° $\forall_{q\in\mathbb{N}}$ $(((q \mid a) \wedge (q \mid b)) \Rightarrow (q \leq d))$.

<u>Stelling</u>. Als $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ en $d = \text{ggd}(a,b)$ dan geldt:

$$\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ (d = xa + yb).$$

<u>Bewijs</u>: Zij $I := \{ax + yb \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$, dan $I \neq \phi$.
$(I,+)$ is commutatieve groep, die positieve elementen bevat (bijv. a en b).
Zij d_1 het kleinste positieve element van I en wel $d_1 = x_1a + y_1b$.
Dan geldt $d|a$ èn $d|b$ zodat $d \mid d_1$, dus $d \le d_1$. (1)
Zij verder $a = d_1v + r$ voor zekere $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en $0 \le r < d_1$.
Er geldt $0 \le r = (1 - x_1v)a - vy_1b$ dus $r \in I$, maar $r < d_1$, dus $r = 0$.
Gevolg: $d_1|a$. Analoog bewijst men $d_1|b$, zodat volgens voorgaande definitie
$d_1 \le d$. (2)
Uit (1) en (2) volgt $d = d_1$. □

<u>Gevolg</u>: Is $d = \text{ggd}(a,b)$, dan is de vergelijking $ax + by = d$ oplosbaar in $\mathbb{Z}$.

<u>Stelling</u>. Zijn $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ en p priem, dan geldt: als $p|ab$ dan $p|a$ òf $p|b$.

<u>Bewijs:</u> Stel p geen deler van a, dan moeten we bewijzen dat $p|b$. Wegens $\text{ggd}(a,p) = 1$, is de vergelijking $xp + ya = 1$ oplosbaar met gehele x en y, dus ook zijn er gehele x en y waarvoor geldt: $xpb + yab = b$.
Wegens $p|xpb$ èn $p|yab$ is dus $p|b$. □

<u>Gevolg</u>. Zijn $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, p priem, dan geldt:
Als $p \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ dan $\exists_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ (p \mid a_i)$.

<u>Bewijs</u>: met volledige inductie. □

<u>Stelling</u>: Ieder natuurlijk getal ($\neq 1$) kan op precies één manier als produkt van priemgetallen geschreven worden (één manier, afgezien van de volgorde van de priemgetallen).

<u>Bewijs</u>: Voor $n = 2$ is dit waar. Stel dat het gestelde waar is voor alle getallen die kleiner zijn dan n.
Stel $n = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_\ell$ met $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_\ell$ priem.
$p_1 \mid n$, dus $p_1 \mid q_1 \cdots q_\ell$ zodat $\exists_{j\in\{1,\ldots,\ell\}} (p_1 \mid q_j)$, maar voor die j is dan $p_1 = q_j$. Deel deze faktoren links en rechts weg, dan is
$p_2 \cdots p_k = q_1 \cdots q_{j-1} q_{j+1} \cdots q_\ell$.

Links en rechts staan er nu ontbindingen van een getal $< n$; deze ontbinding is uniek, dus ook de ontbinding van n is uniek. $\square$

Opgaven:

3.8 Zij $a,b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ met ggd $(|a|,|b|) = 1$. Zij $c \in \mathbb{Z}$ en $d \in \mathbb{Z}$ zò dat $ac = bd$. Bewijs dat $a \mid d$ èn $b \mid c$.

3.9 Zij $a \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{N}$, met ggd $(a,b) = 1$. Zij $m \in \mathbb{N}$.
Als $b \mid a^m$ dan is $b = 1$. Bewijs dit.

3.10 Zij $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, beide ontbonden in factoren:

$$a = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} \text{ en } b = p_1^{\ell_1} \cdots p_s^{\ell_s} \text{ met } k_i, \ \ell_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bewijs dat ggd $(a,b) = p_1^{\min(k_1,\ell_1)} \cdots p_s^{\min(k_s,\ell_s)}$.

Invoering van de rationale getallen

Zoals we hebben gezien is $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ een commutatieve ring met eenheid. Echter niet elk getal heeft een inverse t.a.v. de vermenigvuldiging; anders gezegd: vergelijkingen als $3x = 5$ zijn in $\mathbb{Z}$ niet oplosbaar. Dat is de reden om de "getallenvoorraad" uit te breiden tot een lichaam, waar $\mathbb{Z}$ dan deel van uit maakt.
Beschouw $V := \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Definitie: Op V wordt een relatie $\sim$ gedefinieerd door:

$$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc.$$

Stelling: $\sim$ is equivalentierelatie.

Bewijs: 1) $(a,b) \sim (a,b)$. (triviaal)
2) als $(a,b) \sim (c,d)$ dan ook $(c,d) \sim (a,b)$ (triviaal)
3) zij $(a,b) \sim (c,d)$ èn $(c,d) \sim (e,f)$, dus

$$ad = bc \text{ èn } cf = de, \text{ dan ook}$$
$$acdf = bcde, \text{ dus } cd(af - be) = 0.$$

Wegens $d \neq 0$ is $c(af - bc) = 0$.
Is $c = 0$, dan $ad = 0$, dus $a = 0$, èn $de = 0$ dus $e = 0$, zodat dan ook $af - be = 0$ dus $(a,b) \sim (e,f)$.
Is $c \neq 0$, dan $af - be = 0$ dus eveneens $(a,b) \sim (e,f)$. $\square$

<u>Gevolg</u>. V kan worden opgedeeld in equivalentieklassen, die wij voorlopig noteren als $[(a,b)]$.

<u>Opmerking</u>. Raak niet in de war bij het hernieuwd gebruik van deze notatie in een andere betekenis dan bij de invoering van $\mathbb{Z}$.

<u>Definitie:</u> $\mathbb{Q} := \{[(a,b)] \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

De elementen van $\mathbb{Q}$ heten <u>rationale</u> <u>getallen</u>.

<u>Definitie</u>: $[(a,b)] +_{\mathbb{Q}} [(c,d)] := [(ad+bc,bd)]$.

<u>Rechtvaardiging</u>. Is $(a',b') \sim (a,b)$ en $(c',d') \sim (c,d)$ dan is

$$[(a'd' + b'c',\ b'd')] = [(ad + bc,\ bd)].$$

Immers: $(a'd' + b'c')bd = (a'b)(d'd) + (c'd)(bb') = ab'd'd + cd'bb' =$
$= (ad + bc)b'd'$. Conclusie: De definitie van optelling $+_{\mathbb{Q}}$ is onafhankelijk van de keuze van de representanten van de klassen. $\square$

<u>Definitie</u>: $[(a,b)] \times_{\mathbb{Q}} [(c,d)] := [(ac,bd)]$.

De rechtvaardiging wordt aan de lezer overgedragen.

<u>Stelling</u>. $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}})$ is een (commutatief) lichaam.

<u>Bewijs</u>: Ga zelf de associativiteit en commutativiteit van $+_{\mathbb{Q}}$ na.
Het neutrale element $0_{\mathbb{Q}}$ t.a.v. $+_{\mathbb{Q}}$ is $[(0,1)]$, immers

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Q}} [(0,1)] = [(a,b)].$$

De tegengestelde $-_{\mathbb{Q}}[(a,b)]$ van $[(a,b)]$ is $[(-a,b)]$, want
$[(a,b)] +_{\mathbb{Q}} [(-a,b)] = [(0,1)]$.
$(\mathbb{Q} \setminus \{[(0,1)]\}, \times_{\mathbb{Q}})$ is eveneens een commutatieve groep met $[(1,1)]$ als neutraal element.
De inverse van $[(a,b)]$ met $[(a,b)] \neq [(0,1)]$ is $[(b,a)]$.
De lezer kan zelf nagaan dat ook de distributieve wet geldt. $\square$

<u>Definitie</u>. $[(a,b)] <_{\mathbb{Q}} [(c,d)] :\leftrightarrow (ad - bc)bd < 0$.

<u>Rechtvaardiging</u>. Stel $(p,q) \sim (a,b)$, $(r,s) \sim (c,d)$ en $(ad - bc)bd < 0$.
Dan $pb = aq$ en $rd = sc$. Nu is $(ps - qr)qs(b^2d^2) = (bp)(bd^2qs^2) - (dr)(b^2dq^2s) =$
$= (aq)(bd^2qs^2) - (cs)(b^2dq^2s) = (ad - bc)bd(q^2s^2) < 0$ dus $(ps - qr)qs < 0$ $\square$

<u>Stelling</u>. $\mathbb{Q}$ is totaal geordend, d.w.z. als $x \in \mathbb{Q}$ en $y \in \mathbb{Q}$, dan geldt:
òf $x = y$ òf $x <_{\mathbb{Q}} y$ òf $y <_{\mathbb{Q}} x$.

<u>Bewijs</u>. Zij $x = [(x_1,x_2)]$ en $y = [(y_1,y_2)]$.
Stel $x \neq y$ en $\neg(x <_{\mathbb{Q}} y)$, dus:

$$x_1y_2 \neq x_2y_1 \text{ en } \neg((x_1y_2 - x_2y_1)x_2y_2 < 0), \text{ dan is}$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \text{ en } (x_1y_2 - x_2y_1)x_2y_2 \geq 0.$$

Wegens $x_2 \neq 0$ en $y_2 \neq 0$ is $(x_1y_2 - x_2y_1)x_2y_2 > 0$ zodat $y <_{\mathbb{Q}} x$.
Er geldt dus steeds minstens één van de drie mogelijkheden. Ga zelf na dat niet twee mogelijkheden tegelijk kunnen gelden. □

<u>Opgaven</u>.

3.11 Als $x <_{\mathbb{Q}} y$ en $y <_{\mathbb{Q}} z$, bewijs dan dat $x <_{\mathbb{Q}} z$ $(x,y,z \in \mathbb{Q})$.

3.12 Als $x,y,z \in \mathbb{Q}$, met $x <_{\mathbb{Q}} y$ dan geldt $x +_{\mathbb{Q}} z <_{\mathbb{Q}} y +_{\mathbb{Q}} z$.
Bewijs dit.

3.13 Als $x,y,z \in \mathbb{Q}$ met $x <_{\mathbb{Q}} y$ en $[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} z$, dan geldt $x \times_{\mathbb{Q}} z <_{\mathbb{Q}} y \times_{\mathbb{Q}} z$.
Bewijs dit.

3.14 Zij $a \in \mathbb{Q} \setminus [(0,1)]$, $b \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat

$$\exists_{x \in \mathbb{Q}} (a \times_{\mathbb{Q}} x = b).$$

<u>Stelling</u>: Als $x \in \mathbb{Q}$ met $[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} x$, dan is x van de gedaante $[(a,b)]$ met $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, en omgekeerd.

<u>Bewijs:</u> 1) Zij $x = [(x_1,x_2)]$, dan geldt volgens het gegeven $(0-x_1)x_2 < 0$, dus $x_1x_2 > 0$. Daar $[(x_1,x_2)] = [(-x_1,-x_2)]$ mogen we schrijven $x = [(a,b)]$ waar $a = |x_1|$, $b = |x_2|$, dus $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.
2) Voor $a \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{N}$ geldt

$$[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} [(a,b)].$$

□

<u>Opgaven:</u>
3.15. Als $[(a,b)] <_{\mathbb{Q}} [(0,1)]$, dan geldt voor zijn tegengestelde $[(-a,b)]$ dat $[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} [(-a,b)]$.
Bewijs dit.
3.16. Als $x \in \mathbb{Q}$ met $x <_{\mathbb{Q}} [(0,1)]$, dan is x van de gedaante $[(-a,b)]$ met $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, en omgekeerd. Bewijs dit.

We zoeken nu een eenvoudige schrijfwijze voor de verkregen equivalentieklassen. Daartoe zullen we eerst met behulp van de grootste gemene deler een representant van eenvoudige vorm uit iedere klasse aangeven.

<u>Stelling</u>: Zij $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ met $[(a,b)] \neq [(0,1)]$.
Dan bestaan getallen $a_1 \in \mathbb{N}$, $b_1 \in \mathbb{N}$ met ggd $(a_1,b_1) = 1$ zo dat
$[(a,b)] = \{(ka_1,kb_1) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ wanneer $[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$, en
$[(a,b)] = \{(-ka_1,kb_1) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ wanneer $[(a,b)] <_{\mathbb{Q}} [(0,1)]$.

<u>Bewijs</u>: 1) Stel $[(0,1)] <_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$. We mogen aannemen dat $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.
Is $d = \text{ggd}(a,b)$, dan is $a = da_1$ en $b = db_1$ voor zekere $a_1 \in \mathbb{N}$, $b_1 \in \mathbb{N}$ met ggd $(a_1,b_1) = 1$.
Zij (r,s) een willekeurig element uit $[(a,b)]$, zodat $(r,s) \sim (a,b)$ ofwel $rdb_1 = sda_1$, dus $rb_1 = sa_1$. Wegens $a_1 \mid rb_1$ en ggd $(a_1,b_1) = 1$ is $a_1 \mid r$, dus $r = ka_1$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$. Invullen levert $ka_1b_1 = sa_1$, dus $s = kb_1$, zodat $(r,s) = (ka_1,kb_1)$. Hierbij is $k = 0$ onmogelijk daar $s \neq 0$.
Aangetoond is nu, dat $[(a,b)] \subset \{(ka_1,kb_1) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Omgekeerd geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dat $(ka_1,kb_1) \sim (a,b)$, dus $(ka_1,kb_1) \in [(a,b)]$.
2) Het geval $[(a,b)] <_{\mathbb{Q}} [(0,1)]$ wordt analoog bewezen. $\square$

<u>Gevolg:</u> Ieder rationaal getal kan weergegeven worden in de vorm $[(a_1,b_1)]$ met $a_1,b_1 \in \mathbb{N}$ en ggd $(a_1,b_1) = 1$, of $[(0,1)]$, of $[(-a_1,b_1)]$ met $a_1,b_1 \in \mathbb{N}$ en ggd $(a_1,b_1) = 1$.

Daar $[(0,1)] = 0_{\mathbb{Q}}$ en $[(-a_1,b_1)] = -_{\mathbb{Q}} [(a_1,b_1)]$ kunnen we ook zeggen:
Ieder rationaal getal verschillend van $0_{\mathbb{Q}}$ heeft de vorm $[(a_1,b_1)]$ of $-_{\mathbb{Q}} [(a_1,b_1)]$, waar $a_1,b_1 \in \mathbb{N}$, ggd $(a_1,b_1) = 1$.
We willen $\mathbb{Z}$ met zijn structuur inbedden in $\mathbb{Q}$. Laten $\bar{a}$ en $\bar{b}$ de elementen in $\mathbb{Q}$ zijn die corresponderen met de elementen a resp. b uit $\mathbb{Z}$, dan moet dus gelden

$$\bar{a} +_{\mathbb{Q}} \bar{b} = \overline{a+b}\ , \quad \bar{a} \times_{\mathbb{Q}} \bar{b} = \overline{ab} \text{ en } \bar{a} <_{\mathbb{Q}} \bar{b} \Leftrightarrow a < b.$$

Neem $\bar{a} := [(a,1)]$ met $a \in \mathbb{Z}$ en ga na dat dit voldoet.

Voor $[(a,b)]$ uit $\mathbb{Q}$ geldt nu:

$$[(a,b)] = [(a,1)] \times_{\mathbb{Q}} [(1,b)] = [(a,1)] \times_{\mathbb{Q}} [(b,1)]^{-1} = \bar{a} \times_{\mathbb{Q}} \bar{b}^{-1}.$$

Weglating van de streepjes en de index $\mathbb{Q}$ in $+_{\mathbb{Q}}$, $\times_{\mathbb{Q}}$ en $<_{\mathbb{Q}}$ geeft de notatie $a \times b^{-1}$, waarvoor we ook schrijven ab^{-1} of $\frac{a}{b}$.
Zo wordt bijv. $[(a,b)] +_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [ad + bc, bd]$ genoteerd als $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Tevens zal voortaan $>$ in de bekende betekenis worden gebruikt.

Maken we nu de afspraak (zoals in het Basisonderwijs) dat deze "breuken" $\frac{a}{b}$ resp. $\frac{-a}{b}$ $(a,b \in \mathbb{N})$ steeds worden "vereenvoudigd" tot $\frac{a_1}{b_1}$ resp. $-\frac{a_1}{b_1}$ met ggd $(a_1,b_1) = 1$, terwijl in plaats van $\frac{a_1}{1}$ gewoon a_1 en in plaats van het nulelement slechts 0 wordt geschreven, dan hebben we een eenduidige schrijfwijze voor de rationale getallen verkregen. Vaak zullen we echter een rationaal getal weergeven door "zo maar" een representant uit z'n klasse in breukvorm op te schrijven. Zo zien we $\frac{2}{3}$ ook wel staan als $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$.

Opgaven:

3.17 Toon aan dat voor $x,y \in \mathbb{Q}$ geldt:
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ en $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

3.18 Zij $x,y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Bewijs: als x en y beide positief of beide negatief zijn, dan is $xy > 0$; in de andere gevallen is $xy < 0$.

3.19 We definiëren $|x|$ voor $x \in \mathbb{Q}$ door $|x| = x$ als $x \geq 0$ en $|x| = -x$ als $x < 0$. Toon aan:

a) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $|x| = \max(x,-x)$ en $|x| = |-x|$.

c) $|x|^2 = x^2$.

d) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

e) $x^2 \geq y^2 \Leftrightarrow |x| \geq |y|$.

3.20 Bewijs de driehoeksongelijkheid:
$|x + y| \leq |x| + |y|$ voor $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$.

Stelling. (Archimedes): Als $x,y \in \mathbb{Q}$ met $x > 0$, dan geldt: $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ (nx > y)$.

Bewijs: Als $y \leq 0$ dan voldoet $n = 1$. Als $y > 0$:

Zij $x = \frac{p}{q}$ en $y = \frac{r}{s}$ $(p,q,r,s \in \mathbb{N})$. Met $n = q(r+1)$ geldt $n \in \mathbb{N}$ en

$$nx = q(r+1)\,\frac{p}{q} = (r+1)p \geq r+1 > r \geq \frac{r}{s} = y. \qquad \square$$

Stelling. Er is geen kleinste positief getal in $\mathbb{Q}$.

Bewijs: Als $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, dan is $\frac{1}{2}x \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2}x > 0$ en $\frac{1}{2}x < x$. $\square$

Stelling. Als $x \in \mathbb{Q}$, dan geldt

$$\exists_{a \in \mathbb{Z}} \; (a \leq x < a+1).$$

Bewijs: Wanneer $x \in \mathbb{Z}$, dan voldoet $a = x$. Voor $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\exists_{k \in \mathbb{N}} \; (k.1 > |x|), \text{ m.a.w. } \{k \in \mathbb{N} \mid |x| < k\} \neq \phi.$$

Zij ℓ het kleinste element uit deze verzameling, zodat

$$\ell - 1 < |x| < \ell.$$

Wanneer $x > 0$, dus $|x| = x$, dan voldoet $a = \ell - 1$. Is $x < 0$, dus $|x| = -x$, dan voldoet $a = -\ell$. $\square$

Opmerking: De gevonden a heet de entier van x, notatie: $E(x)$ of $[x]$.

Motivering en voorbereiding voor de invoering van de reële getallen.

De vergelijking $x^2 = 2$ is niet oplosbaar binnen $\mathbb{Q}$. Stel n.l. dat $x = \frac{p}{q}$ een oplossing is, dan is $p^2 = 2q^2$. Er geldt $p = 2^k s$ en $q = 2^\ell t$ waar $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en s en t oneven; dus bevatten p^2 en q^2 een even aantal factoren 2. Dit is in strijd met de priemfactorontbinding van $p^2 = 2q^2$.

Algemener geldt: Als $n, m \in \mathbb{N}$ zó dat n niet m-de macht van een natuurlijk getal is, dan is de vergelijking $x^m = n$ niet oplosbaar binnen $\mathbb{Q}$. Stel n.l. dat $x = \frac{a}{b}$ met $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$ een oplossing was. Dan gold $a^m = n.b^m$, dus $b \mid a^m$. Uit opgave 3.9 volgt dan $b = 1$, in strijd met het gegeven.

Opgave:

3.21 Zij $\alpha \in \mathbb{Q}$ oplossing van de vergelijking

$$x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

waar $m \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}$. Toon aan, dat $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Wanneer we over getallen als $\sqrt{2}$, $\sqrt[m]{n}$ e.d. willen beschikken, zullen we dus ons getalsysteem moeten uitbreiden. Dit gaan we doen aan de hand van equivalentierelaties tussen bepaalde rijen van rationale getallen.

Definitie. Een rij van rationale getallen (of: een rij in $\mathbb{Q}$) is een afbeelding $a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. In plaats van de schrijfwijze $a(1), a(2), \ldots$ gebruiken we kortweg $a_1, a_2, \ldots$.

We noteren zo'n rij met $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ of, wat slordiger, met (a_n).

Definitie: Een rij (a_n) heet

monotoon zwak stijgend als $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; (a_{n+1} \geq a_n)$

monotoon stijgend als $\forall_{n\in\mathbb{N}} (a_{n+1} > a_n)$

naar boven begrensd als $\exists_{M\in\mathbb{Q}} \; \forall_{n\in\mathbb{N}} \; (a_n \leq M)$.

De definities voor monotoon zwak dalend, monotoon dalend en naar beneden begrensd zijn analoog.

Een rij heet begrensd als hij zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

Definitie. Een rij (a_n) in $\mathbb{Q}$ heet convergent naar $a \in \mathbb{Q}$ (notatie: $a_n \to a$, of: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$) als geldt:

$$\forall_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \; \exists_{N\in\mathbb{N}} \; \forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>N}} \; (|a_n - a| < \varepsilon).$$

Een rij (a_n) in $\mathbb{Q}$ heet een nulrij als hij naar 0 convergeert. Een rij die niet convergeert heet divergent.

Voorbeelden:

1) Een constante rij convergeert naar die constante.

2) De rij $(\frac{1}{n})$ convergeert naar 0.

3) De rij (n) is divergent.

4) De rij $(-1)^n$ is divergent.

Stelling: Als de rij (a_n) convergeert, dan is (a_n) begrensd.

Bewijs: wordt aan de lezer overgelaten. □

Stelling: Als $a_n \to a$ en $b_n \to b$, dan geldt $a_n + b_n \to a + b$ en $a_n b_n \to ab$. In het bijzonder is de som en het produkt van twee nulrijen ook weer een nulrij.

Bewijs: wordt aan de lezer overgelaten. □

Voorbeeld: De rij (a_n) met $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ is (rationaal gezien) divergent.

Stel n.l. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{p}{q}$ met $p,q \in \mathbb{N}$.

Merk op, dat $\frac{p}{q} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > 0$, zodat het getal $n!\,(\frac{p}{q} - a_n)$, dat geheel is voor n voldoende groot, minstens 1 moet zijn. Maar

$$n!\left(\frac{p}{q} - a_n\right) = n!\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = \lim_{m\to\infty} n! \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ldots m}\right) \le \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n+1}\,\frac{1-(1/(n+1))^{m-n}}{1-1/(n+1)} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1-1/(n+1)} = \frac{1}{n} < 1.$$

Blijkbaar zijn er rijen die reëel wel, maar rationaal niet convergeren.

<u>Definitie</u>. Een rij (a_n) van rationale getallen heet <u>fundamentaalrij</u> (of <u>Cauchy-rij</u>) als geldt

$$\forall_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n>N\\ m>N}}\ (|a_n - a_m| < \varepsilon).$$

<u>Stelling.</u> Als (a_n) convergeert, dan is het een fundamentaalrij.

<u>Bewijs:</u> Zij $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Nu is $|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a|$.

Kies een $\varepsilon > 0$. Neem N zo dat voor $k > N$ geldt $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n,m > N$ is dan $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ en $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, dus $|a_n - a_m| < \varepsilon$. □

<u>Opgaven:</u>

3.22 Zij $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Bewijs, dat (a_n) een fundamentaalrij is.

3.23 Zij (a_n) een fundamentaalrij en (b_n) een nulrij. Toon aan, dat $(a_n + b_n)$ weer een fundamentaalrij is.

3.24 Laat (a_n) een fundamentaalrij, maar geen nulrij zijn. Bewijs, dat er een $N \in \mathbb{N}$ en een $\eta \in \mathbb{Q}$, $\eta > 0$ bestaan, zó dat $a_n \ge \eta$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$, òf $a_n \le -\eta$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$.

<u>Stelling</u>. Een fundamentaalrij is begrensd.

<u>Bewijs:</u> Kies $\varepsilon = 1$. Er is een $N \in \mathbb{N}$ zodat $|a_n - a_m| < 1$ als $n > N$ en $m > N$.

I.h.b. geldt $|a_n - a_{N+1}| < 1$, dus $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$, als $n > N$.

De (eindige) rij $a_1, a_2, \ldots, a_N$ bevat een kleinste en een grootste element, zeg K resp G.

Is $M_1 := \min(K, a_{N+1} - 1)$ en $M_2 := \max(G, a_{N+1} + 1)$, dan is $M_1 \le a_n \le M_2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

Stelling: Zijn (a_n) en (b_n) fundamentaalrijen dan zijn $(a_n + b_n)$ en $(a_n b_n)$ dat ook.

Bewijs: 1$^{\underline{e}}$ Kies $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$.
Er is een $N_1 \in \mathbb{N}$ zò dat $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor $n > N_1$ en $m > N_1$.
Er is een $N_2 \in \mathbb{N}$ zò dat $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor $n > N_2$ en $m > N_2$.
Zij $N := \max(N_1, N_2)$ dan is

$$|(a_n+b_n) - (a_m+b_m)| \le |a_n-a_m| + |b_n-b_m| < \varepsilon \text{ voor } n > N \text{ en } m > N.$$

2$^{\underline{e}}$ $|a_nb_n - a_mb_m| = |a_nb_n - a_nb_m + a_nb_m - a_mb_m| \le$

$$\le |a_n|\,|b_n - b_m| + |b_m|\,|a_n - a_m|.$$

Kies $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$. Er is een N_1 zò dat $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$ voor $n > N_1$ en $m > N_1$. Hierbij is B zo gekozen dat $B > 0$ en $|b_m| \le B$ voor alle $m \in \mathbb{N}$.
Ook is er een N_2, zo dat $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$ van $n > N_2$, $m > N_2$. Hierbij is A zo gekozen dat $A > 0$ eñ $|a_n| \le A$ voor $n \in \mathbb{N}$.
Is $N := \max(N_1, N_2)$ dan is $|a_nb_n - a_mb_m| < \varepsilon$ voor $n > N$ en $m > N$. □

Opgave:
3.25 Laten (a_n) en (b_n) fundamentaalrijen, maar geen nulrijen zijn. Toon aan, dat de fundamentaalrij (a_nb_n) weer geen nulrij is.

De onderstaande stelling geeft een handig criterium om te verifiëren of een rij een fundamentaalrij is.

Stelling: Is (a_n) een rij rationale getallen, monotoon zwak stijgend en naar boven begrensd, dan is de rij een fundamentaalrij.

Bewijs: Zij M de bedoelde bovengrens.
Stel (a_n) is geen fundamentaalrij, dus geldt:

$$\exists_{\varepsilon>0}\, \forall_{N\in\mathbb{N}}\, \exists_{m>N}\, \exists_{n>N}\, (|a_n - a_m| \ge \varepsilon).$$

Neem $N = 1$; dan zijn er m_1 en n_1 met $m_1 > n_1 > 1$ zò dat $a_{m_1} - a_{n_1} \ge \varepsilon$ (monotonie!)
Neem $N = m_1$; dan zijn er m_2 en n_2 met $m_2 > n_2 > m_1$ zò dat $a_{m_2} - a_{n_2} \ge \varepsilon$.
Neem $N = m_2$; enzovoorts. We vinden zo de monotoon zwak stijgende rij $a_{n_1}, a_{m_1}, a_{n_2}, a_{m_2}, \ldots$ met $a_{m_k} - a_{n_1} \ge k\varepsilon$. Voor $k > \frac{1}{\varepsilon}(M - a_{n_1})$ is zo $a_{m_k} > M$, in strijd met het gegeven. □

Opmerking. Op analoge wijze geldt: Is (a_n) een rationale, zwak dalende en naar onder begrensde rij, dan is (a_n) een fundamentaalrij.

Voorbeelden

1. Is $a_n = \frac{1}{n}$, dan is (a_n) een fundamentaalrij. Immers: (a_n) is monotoon zwak dalend en naar onderen begrensd. Het kan ook anders: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dus (a_n) is convergent in $\mathbb{Q}$, dus een fundamentaalrij.

2. Is $a_n = \dfrac{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}{1.3^2.5^2.\ \ldots\ (2n-1)^2(2n+1)}$, dan is (a_n) een fundamentaalrij.

Immers $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1 + \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} \geq 1$, dus (a_n) is monotoon stijgend. Tevens is

$$a_n = 2 \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{4.6}{5^2} \cdots\cdots \frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2} \cdot \frac{2n}{2n+1} < 2.$$

(In $\mathbb{R}$ blijkt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$, dus (a_n) convergeert niet in $\mathbb{Q}$).

3. Laten $a \in \mathbb{Z}$ en $b_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ $(n = 1,2,..)$ gegeven zijn. Beschouw de rij decimale breuken gedefinieerd door:

$$a_1 = a + b_1 .\ 10^{-1},$$

$$a_n = a_{n-1} + b_n . 10^{-n} \text{ voor } n \geq 2.$$

(a_n) is fundamentaalrij. We geven twee bewijzen:

1^o. (a_n) is monotoon zwak stijgend en naar boven begrensd (bijv. door $a + 1$).

2^o. Voor $n < m$ is $a_m - a_n = b_{n+1}\ 10^{-(n+1)} + \ldots + b_m . 10^{-m} <$

$$\leq 9(10^{-(n+1)} + \ldots + 10^{-m}) < 9 . \frac{10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} = 10^{-n} < \varepsilon$$

als n (en dus m) voldoende groot is.

Invoering van de reële getallen.

Definitie. De relatie $\sim$ tussen fundamentaalrijen (a_n) en (b_n) wordt gedefinieerd door: $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n)$ is een nulrij.

Stelling: $\sim$ is een equivalentierelatie.

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

Gevolg. De fundamentaalrijen worden door de genoemde equivalentierelatie in equivalentieklassen verdeeld; de klasse waartoe (a_n) behoort, noteren we door $[(a_n)]$.

<u>Definitie</u>. Een reëel getal is een equivalentieklasse van fundamentaalrijen. De verzameling van alle reële getallen wordt genoteerd als $\mathbb{R}$.

<u>Opgave:</u>

3.26 Zij $c \in \mathbb{Q}$. Toon aan, dat alle rijen die convergeren naar c, tezamen één klasse vormen. In het bijzonder vormen alle nulrijen één klasse.

<u>Definitie:</u>

$$[(a_n)] +_{\mathbb{R}} [(b_n)] := [(a_n + b_n)].$$

<u>Rechtvaardiging</u>

Is $(a'_n) \sim (a_n)$ en $(b'_n) \sim (b_n)$ dan is

$$\lim_{n\to\infty}((a'_n+b'_n) - (a_n+b_n)) = \lim_{n\to\infty} ((a'_n-a_n) + (b'_n-b_n)) = 0,$$

dus $(a'_n + b'_n) \sim (a_n + b_n)$. □

<u>Definitie</u>. $[(a_n)] \times_{\mathbb{R}} [(b_n)] := [(a_n b_n)]$.

<u>Rechtvaardiging</u>

Zij $(a'_n) \sim (a_n)$ en $(b'_n) \sim (b_n)$.

Kies $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ dan is er een N_1 zodat $|a'_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2B}$ als $n > N_1$ en een N_2 zò dat $|b'_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$ als $n > N_2$. Hierbij zijn A en B rationale getallen die zo gekozen zijn dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $|a'_n| \leq A$ en $|b_n| \leq B$.

Zij $N := \max(N_1, N_2)$, dan is

$$|a'_n b'_n - a_n b_n| \leq |a'_n||b'_n - b_n| + |b_n||a'_n - a_n| < \varepsilon \text{ voor } n > N, \text{ zodat}$$

$(a'_n b'_n) \sim (a_n b_n)$. □

<u>Definitie</u>. $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)] :\Leftrightarrow$

$$\exists_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} (a_n \leq b_n - \varepsilon).$$

<u>Rechtvaardiging</u>. Zij $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)]$. Stel $(a'_n) \sim (a_n)$ en $(b'_n) \sim (b_n)$.

Kies $\varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{Q})$, dan is er een N_1 zō dat $a_n \le b_n - \varepsilon$ als $n > N_1$.
Er is ook een N_2 zō dat $|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ als $n > N_2$ en een N_3 zō dat $|b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ als $n > N_3$.

Is $N := \max(N_1, N_2, N_3)$ dan geldt $a'_n < a_n + \frac{\varepsilon}{3} \le b_n - \frac{2}{3}\varepsilon < b'_n - \frac{\varepsilon}{3}$, dus

$$[(a'_n)] <_{\mathbb{R}} [(b'_n)]. \qquad \square$$

In het vervolg zullen we naast een rij (b_n) ook de rij $(\frac{1}{b_n})$ beschouwen; dit kan uiteraard zonder meer als alle b_n ongelijk nul zijn. Ingeval slechts eindig vele b_n nul zijn, zodat $b_n \neq 0$ voor $n \ge N$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$, zullen we ook over $(\frac{1}{b_n})$ spreken. Hieronder verstaan we dan de rij $(\frac{1}{b_n})_{n=N}^{\infty}$.

<u>Opgave:</u>

3.27. Zij (b_n) een fundamentaalrij, die geen nulrij is.
Toon aan, dat $(\frac{1}{b_n})$ in bovenbedoelde zin bestaat, en weer een fundamentaalrij is.

Verder zullen we voor $c \in \mathbb{Q}$ willeurig de constante rij c,c,c,... aangeven met (c). Merk op, dat uit opgave 3.22 volgt, dat $[(c)]$ bestaat uit alle rijen die naar c convergeren.

<u>Stelling:</u> $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}})$ is een commutatief lichaam.

<u>Bewijs</u>: De verificatie der lichaamsaxioma's is eenvoudig. We maken slechts enkele opmerkingen.

1) Het neutrale element voor de opstelling $0_{\mathbb{R}}$ is $[(0)]$; tegengestelde van $[(a_n)]$ is $[(-a_n)]$.
2) Het neutrale element voor de vermenigvuldiging $1_{\mathbb{R}}$ is $[(1)]$; inverse van $[(a_n)]$ is $[(\frac{1}{a_n})]$ voor $[(a_n)] \neq 0_{\mathbb{R}}$, dus voor (a_n) geen nulrij. $\square$

<u>Stelling</u>: $<_{\mathbb{R}}$ geeft een volledige ordening op $\mathbb{R}$, d.w.z. voor $[(a_n)]$ en $[(b_n)]$ willekeurig geldt precies één van de volgende beweringen:

$$[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)] \text{ of } [(a_n)] = [(b_n)] \text{ of } [(b_n)] <_{\mathbb{R}} [(a_n)].$$

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

<u>Opgaven:</u>

3.28 Als $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)]$ en $[(b_n)] <_{\mathbb{R}} [(c_n)]$ dan is $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(c_n)]$.
Bewijs dit.

3.29. Als $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)]$, dan is $[(a_n)] +_{\mathbb{R}} [(c_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)] +_{\mathbb{R}} [(c_n)]$.
Bewijs dit.

3.30. Als $[(a_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)]$ en $0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} [(c_n)]$, dan is $[(a_n)] \times_{\mathbb{R}} [(c_n)] <_{\mathbb{R}} [(b_n)] \times_{\mathbb{R}} [(c_n)]$. Bewijs dit.

We zullen nu een inbedding van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ aangeven; bij $a \in \mathbb{Q}$ beschouwen we $\bar{a} = [(a)] \in \mathbb{R}$. Nu geldt:

$$\overline{a + b} = \bar{a} +_{\mathbb{R}} \bar{b}$$
$$\overline{ab} = \bar{a} \times_{\mathbb{R}} \bar{b}$$

en $a < b \Leftrightarrow \bar{a} <_{\mathbb{R}} \bar{b}$ (ga na!)

Na identificering van $a \in \mathbb{Q}$ met $[(a)] \in \mathbb{R}$ kunnen we nu $\mathbb{Q}$ als deelverzameling van $\mathbb{R}$ zien. Vervolgens vereenvoudigen we de notaties in $\mathbb{R}$ door de index $\mathbb{R}$ in $+_{\mathbb{R}}$, $\times_{\mathbb{R}}$ en $<_{\mathbb{R}}$ weg te laten, waarmee we dan de gebruikelijke notaties binnen $\mathbb{R}$ verkregen hebben. Tenslotte zullen we gemakshalve ook een aantal afgeleide notaties (zo als $x > y$, hetgeen betekent $y < x$) gebruiken, steeds met de voor de hand liggende betekenis.

Hulpstelling: Bij iedere $\alpha \in \mathbb{R}$ is er een $N \in \mathbb{Z}$ met $\alpha < N$.
Bewijs: zij $\alpha = [(a_n)]$; als fundamentaalrij is (a_n) begrensd, dus zeker naar boven begrensd: er is een getal $M \in \mathbb{Q}$ met $a_n \le M$. Als rationaal getal heeft M een entier $[M]$; zij $N = [M] + 2$. Dan is $a_n \le N - 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $[(a_n)] < [(N)]$ ofwel $\alpha < N$. □

Stelling: $\mathbb{R}$ is archimedisch geordend, d.w.z. bij iedere $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ met $\alpha > 0$ is er een $n \in \mathbb{N}$ met $n\alpha > \beta$.
Bewijs: Als $\beta \le 0$ dan voldoet $n = 1$. Anders: Laat $N \in \mathbb{N}$ zo gekozen zijn dat $\frac{1}{\alpha} < N$ (dus: $N\alpha > 1$) en M zo dat $\beta < M$. Dan is $MN\alpha > M > \beta$, zodat $n = MN$ voldoet. □

Opgave
3.31. Toon aan: $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{Z}} (n \le \alpha < n + 1)$. ($n$ heet weer de entier van α, notatie $E(\alpha)$ of $[\alpha]$).

Stelling: $\mathbb{Q}$ ligt dicht in $\mathbb{R}$, d.w.z. voor alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ met $\alpha < \beta$ geldt dat er een rationaal getal r bestaat met $\alpha < r < \beta$.
Bewijs: Als $\alpha < 0$ en $\beta > 0$, dan voldoet 0.
Als $0 \le \alpha < \beta$: Er is een natuurlijk getal n met $n(\beta - \alpha) > 1$, dus $\frac{1}{n} < \beta - \alpha$.
Ook zijn er natuurlijke getallen m met $m \cdot \frac{1}{n} > \alpha$.
Is p het kleinste onder die getallen, d.w.z. $(p - 1)\frac{1}{n} \le \alpha < p \cdot \frac{1}{n}$, dan geldt $\alpha < \frac{p}{n} \le \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ zodat $r = \frac{p}{n}$ voldoet.
Behandel zelf het geval $\alpha < \beta \le 0$. □

Opmerking: Er liggen zelfs oneindig veel rationale getallen tussen α en β. Toon dit aan!

Definitie: Een rij reële getallen is een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$. De notaties zullen geheel dezelfde zijn als voor rijen rationale getallen.

De diverse soorten monotonie en begrensdheid worden geheel analoog als bij rationale rijen gedefinieerd.

Definitie: Een rij (α_n) in $\mathbb{R}$ heet convergent naar $\alpha \in \mathbb{R}$ (notatie: $\alpha_n \to \alpha$ of $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$) als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>N}}\ (|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon).$$

Merk op, dat nu ε een willekeurig reeël getal is.

Opgaven:

3.32. Toon aan, dat een convergente rij begrensd is.

3.33. Bewijs: als $\alpha_n \to \alpha$ en $\beta_n \to \beta$, dan $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$ en $\alpha_n\beta_n \to \alpha\beta$.

Stelling: Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = [(a_n)]$ voor een rationale fundamentaalrij (a_n). Voor deze rij (a_n), nu als reële rij gezien, geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Bewijs: Zij $\varepsilon \in \mathbb{R}$ willekeurig met $\varepsilon > 0$. Neem hierbij $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ met $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Daar (a_n) een fundamentaalrij is, bestaat een $N \in \mathbb{N}$ met:

$$\forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ (|a_n - a_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_1).$$

We nemen nu $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ voorlopig vast; dan geldt dus voor alle $m \in \mathbb{N}$ met $m > N$

$$|a_n - a_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 ,$$
$$a_n - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 < a_m < a_n + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 ,$$
$$(a_n - \varepsilon_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 < a_m < (a_n + \varepsilon_1) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 , \text{ zodat}$$
$$[(a_n - \varepsilon_1)] < [(a_m)] < [(a_n + \varepsilon_1)].$$

Dit houdt, reëel gezien, in dat

$$a_n - \varepsilon_1 < \alpha < a_n + \varepsilon_1 \quad \text{ofwel}$$

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_1 \text{ en zeker } |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

Daar dit geldt voor alle $n > N$ is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. $\square$

Gevolg 1: Een reëel getal α bestaat, achteraf gezien, uit alle rationale fundamentaalrijen die als reële rij beschouwd naar α convergeren.

Gevolg 2: Ieder reëel getal is limiet van een rij rationale getallen.

Zoals we vroeger gezien hebben, heeft de vergelijking $x^2 = 2$ geen oplossing in $\mathbb{Q}$. We zullen nu laten zien, dat er binnen $\mathbb{R}$ inderdaad precies één positief getal x bestaat waarvoor $x^2 = 2$. (Deze $x \in \mathbb{R}$ wordt, zoals gebruikelijk, met $\sqrt{2}$ aangeduid).

Bewijs: 1) Eerst tonen we aan dat er hoogstens één positief reëel getal x is met $x^2 = 2$. Stel $x = [(a_n)]$ en $y = [(b_n)]$ zijn verschillende positieve reële getallen met $x^2 = 2$ en $y^2 = 2$. We tonen aan, dat dan $x = y$. Hierbij zullen we gebruiken, dat $\mathbb{R}$(als lichaam) geen nuldelers heeft: zijn $a,b \in \mathbb{R}$ met $ab = 0$, dan geldt $a = 0$ of $b = 0$. (ga na!)
Wegens $x^2 = y^2 = 2$ is $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, waar bij $x + y > 0$ omdat $x > 0$ en $y > 0$. Dus zeker $x + y \neq 0$, zodat $x - y = 0$ ofwel $x = y$.
2) We construeren een reëel getal, dus een fundamentaalrij rationale getallen, die aan het gestelde voldoet. Definieer $x_0 = 1$ en $y_0 = 2$, dan geldt $y_0 - x_0 = 1$ en $x_0^2 < 2 < y_0^2$. Hiervan uitgaande definiëren we recurrent de rijen rationale getallen (x_n) en (y_n): als $x_n \in \mathbb{Q}$ en $y_n \in \mathbb{Q}$ reeds bekend zijn met $y_n - x_n = \frac{1}{2^n}$ en $x_n^2 < 2 < y_n^2$, dan delen we het interval $[x_n,y_n]$ in twee helften $[x_n, \frac{1}{2}(x_n + y_n)]$ en $[\frac{1}{2}(x_n + y_n),y_n]$. Nu is $x_{n+1} := x_n$ en $y_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ wanneer $x_n^2 < 2 < (\frac{1}{2}(x_n + y_n))^2$, en

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n) \text{ en } y_{n+1} := y_n \text{ wanneer } (\tfrac{1}{2}(x_n + y_n))^2 < 2 < y_n^2.$$

Merk op, dat in beide gevallen $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$.
Verder is duidelijk, dat $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, $y_{n+1} \in \mathbb{Q}$ en dat $x_n \leq x_{n+1}$, $y_{n+1} \leq y_n$. (Het gebruikte proces heet de halveringsmethode).
We vinden rijen rationale getallen (x_n) en (y_n) met: $x_n^2 < 2 < y_n^2$, $y_n - x_n = \frac{1}{2^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \ldots \leq y_0 = 2.$$

De rij (x_n) is monotoon zwak stijgend en naar boven begrensd (bijvoorbeeld door 2), dus een fundamentaalrij. (Uiteraard is evenzo (y_n) een fundamentaalrij). Verder is

$$0 \leq 2 - x_n^2 \leq y_n^2 - x_n^2 = (y_n + x_n)(y_n - x_n) \leq 4 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

zodat $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2$. Er geldt dus $(x_n^2) \sim (2)$ ofwel $[(x_n^2)] = [(2)]$ ofwel, als $\alpha = [(x_n)]$, $\alpha^2 = 2$. $\square$

Opgaven:

3.34. Toon aan, dat $\sqrt[3]{10}$ "bestaat" in $\mathbb{R}$, d.w.z. dat de vergelijking $x^3 = 10$ een reële oplossing heeft.

3.35. Laat zien, dat $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Definitie: Een reële rij (α_n) heet een fundamentaalrij wanneer geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ \forall_{m>N}\ (|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon).$$

Opmerking: Het enige verschil met rationale fundamentaalrijen is dus, dat α_n en ε nu reële i.p.v. rationale getallen zijn.

Opgave:

3.36. Ga na, dat voor reële fundamentaalrijen de volgende eigenschappen (al bekend voor rationale fundamentaalrijen) gelden:

a) Iedere reële fundamentaalrij is begrensd.

b) Iedere begrensde en monotone rij in $\mathbb{R}$ is een fundamentaalrij.

c) Iedere reële convergente rij is een fundamentaalrij.

d) Als (α_n) en (β_n) reële fundamentaalrijen zijn, dan zijn $(\alpha_n + \beta_n)$ en $(\alpha_n\beta_n)$ dat ook.

De volgende stelling zegt, dat iedere reële fundamentaalrij ook (reëel gezien) convergeert. Dit houdt in, dat de constructie van equivalentieklassen van fundamentaalrijen, waarmee we uitgaande van $\mathbb{Q}$ op $\mathbb{R}$ uitkwamen, geen nieuwe resultaten oplevert wanneer we beginnen bij $\mathbb{R}$. Equivalentieklassen van fundamentaalrijen van reële getallen gaan dan immers bestaan uit alle rijen die één zelfde limiet α hebben; de klasse wordt dan door α bepaald en omgekeerd. Men drukt dit ook wel uit door te zeggen dat de stelling uitspreekt, dat $\mathbb{R}$ volledig of compleet is.

In het bewijs van de stelling zullen we gebruik maken van de volgende consequentie van het dicht liggen van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (één maal met ε vervangen door $\frac{1}{n}$): Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dan is er een $a \in \mathbb{Q}$ zodanig dat $|\alpha - a| < \varepsilon$.

(immers, tussen de reële getallen $\alpha - \varepsilon$ en $\alpha + \varepsilon$ ligt een rationaal getal).

<u>Stelling:</u> Iedere reële fundamentaalrij is convergent in $\mathbb{R}$.

<u>Bewijs:</u> Zij (α_n) een fundamentaalrij van reële getallen.

We tonen aan, dat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaat met $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Bij α_n is er een $a_n \in \mathbb{Q}$ zó dat $|\alpha_n - a_n| < \frac{1}{n}$.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er geldt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - a_m| < \frac{1}{n} + |\alpha_n - \alpha_m| + \frac{1}{m}$$

dus $|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ als n en m voldoende groot zijn (hier is gebruikt, dat (α_n) een fundamentaalrij is). Dus is (a_n) een rationale fundamentaalrij. Stel $\alpha = [(a_n)]$, zodat α het reële getal is met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Zij weer $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ met $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $n > N$. Ook is er een $M \in \mathbb{N}$ met $|a_n - \alpha_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $n > M$. Voor $n > \max(M,N)$ geldt dus

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - a_n| + |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. □

De laatste stelling van dit hoofdstuk markeert $\mathbb{R}$ als slot van onze getallenopbouw op nog meer stringente wijze. Zij zegt in feite, dat uitbreidingen van $\mathbb{R}$ met behoud van de binnen $\mathbb{R}$ verkregen eigenschappen niet meer mogelijk zijn.

<u>Stelling:</u> Zij Y een getalsysteem met optelling $+_Y$, vermenigvuldiging $\times_Y$ en ordening $<_Y$, zodanig dat $\mathbb{R}$ met zijn optelling, vermenigvuldiging en ordening daar een deel van is. Wanneer geldt:

1) $(Y, +_Y, \times_Y)$ is een lichaam

2) $<_Y$ is een volledige ordening op Y met voor alle $x,y,z \in Y$

   a) $x <_Y y$ en $y <_Y z \Rightarrow x <_Y z$

   b) $x <_Y y \Rightarrow x +_Y z <_Y y +_Y z$

   c) $x <_Y y$ en $0_Y <_Y z \Rightarrow x \times_Y z <_Y y \times_Y z$

   d) als $0_Y <_Y x$, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $y <_Y n \times_Y x$. (dus: $<_Y$ is archimedisch)

dan geldt: $Y = \mathbb{R}$.

<u>Bewijs:</u> We geven eerst een paar losse overwegingen.

i) $0_Y = 0$; immers 0_Y is neutraal element t.a.v. $+_Y$ en dus ook t.a.v. $+$, zodat 0_Y moet samenvallen met het unieke neutrale element 0 voor $+$. Evenzo geldt, dat $1_Y = 1$ en dat $-_Y r = -r$ voor $r \in \mathbb{R}$.

ii) Voor iedere $z \in Y$ geldt: er is een $m \in \mathbb{N}$ met $-m <_Y z <_Y m$. Voor $z = 0$ is dit duidelijk (dan voldoet iedere $m \in \mathbb{N}$). Als $0 <_Y z$ vinden we met het archimedisch zijn van de ordening dat er een $m \in \mathbb{N}$ is met $z <_Y m.1$, dus met $0 <_Y z <_Y m$.
Als $z <_Y 0$, dus $0 <_Y -_Y z$, is er net zo een $m \in \mathbb{N}$ met $-_Y z <_Y m$, dus $0 <_Y m +_Y z$, dus $-m <_Y z$, zodat $-m <_Y z <_Y 0$.
In beide gevallen is inderdaad $-m <_Y z <_Y m$.

iii) Als $\alpha,\beta,x,y \in Y$ met $\alpha <_Y x <_Y \beta$ en $\alpha <_Y y <_Y \beta$, dan is $y -_Y x <_Y \beta -_Y \alpha$.
Wegens $0 <_Y \beta -_Y \alpha$ is dit duidelijk wanneer $y <_Y x$ en wanneer $y = x$.
Ingeval $x <_Y y$ redeneren we als volgt: $y <_Y \beta$ en $\alpha <_Y x$, dus $y +_Y \alpha <_Y \beta +_Y \alpha <_Y \beta +_Y x$. Tel links en rechts $-_Y x$ en $-_Y \alpha$ op, dan volgt het gestelde.

We geven nu het eigenlijke bewijs van de stelling.
Stel dat $Y \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$; zij $z \in Y \setminus \mathbb{R}$. Kies $m \in \mathbb{N}$ zodanig, dat $-m <_Y z <_Y m$.
We definiëren de rijen rationale getallen (x_n) en (y_n) met behulp van de halveringsmethode: neem $x_0 = -m$, $y_0 = m$. Als x_n, y_n al bekend zijn met $x_n <_Y z <_Y y_n$ en $y_n - x_n = \frac{2m}{2^n}$, dan is

$$x_{n+1} := x_n,\ y_{n+1} := \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) \text{ als } x_n <_Y z <_Y \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) \text{ en}$$

$$x_{n+1} := \tfrac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} := y_n \text{ als } \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) <_Y z < y_n.$$

In beide gevallen is $x_{n+1} <_Y z <_Y y_{n+1}$ en $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{2m}{2^{n+1}}$.
De rationale rij (x_n) is monotoon zwak stijgend en naar boven begrensd (bijvoorbeeld door m); (x_n) is dus een rationale fundamentaalrij, die dus reëel gezien convergeert naar zeg $x \in \mathbb{R}$. Volgens het gestelde is $z \neq x$.
Stel $\eta := z -_Y x$ als $x <_Y z$,
$\eta := x -_Y z$ als $z <_Y x$,
dan is in beide gevallen $0 <_Y \eta$. Daar de ordening $<_Y$ archimedisch is, bestaat een $k \in \mathbb{N}$ met $1 <_Y k \times_Y \eta$, zodat $0 < \frac{1}{k} <_Y \eta$.
Door de constructie van (x_n) en (y_n) is $0 < y_n - x_n = \frac{2m}{2^n} < \frac{1}{k}$ voor n voldoende groot. Daar zowel x als z tussen x_n en y_n liggen, is

$$\eta <_Y y_n - x_n < \frac{1}{k} <_Y \eta.$$

Tegenspraak, dus $Y = \mathbb{R}$. □

4. Meetkunde op de reële rechte

Definitie: Zij $a \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$. De ε-omgeving van a is

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Definitie: Als $U \subset \mathbb{R}$, dan heet U open als geldt:

$$\forall_{u \in U} \exists_{\varepsilon > 0} (U_\varepsilon(u) \subset U).$$

Voorbeelden:

1) $(2,4)$ is open.
2) $[1,5]$ is niet open. Immers, $U_\varepsilon(1) \subset [1,5]$ is onwaar voor alle $\varepsilon > 0$.
3) $\mathbb{R}$ is open.
4) $\{a\}$ is niet open.

Stelling: De vereniging van willekeurig veel open verzamelingen is open. De doorsnede van eindig veel open verzamelingen is open.

Bewijs: 1). Zij U_α een open verzameling voor alle $\alpha \in A$ (A een indexverzameling). We tonen aan dat $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ open is. Zij $u \in U$; dan is er een $\alpha \in A$ met $u \in U_\alpha$. Daar U_α open is geldt $U_\varepsilon(u) \subset U_\alpha$ voor zekere $\varepsilon > 0$; dan is ook $U_\varepsilon(u) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = U$.

2) Laat $U_1, \ldots, U_n$ open zijn; we tonen aan dat $V = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ open is. Zij $v \in V$, dus $v \in U_k$ voor $k = 1, \ldots, n$. Voor alle k is er een ε_k met $U_{\varepsilon_k}(v) \subset U_k$, want U_k is open. Met $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ is dan $U_\varepsilon(v) \subset U_k$ voor $k = 1, \ldots, n$, dus $U_\varepsilon(v) \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_k = V$. □

Opgaven:

4.1 Toon aan, dat intervallen van de vorm (a,b) met $a < b$, (a,∞) en $(-\infty,b)$ open zijn.

4.2 Zij $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$. Laat zien dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ geen open verzameling is, alhoewel alle I_n's wel open zijn.

Definitie: Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{R}$. Nu heet p verdichtingspunt van A als geldt:

$$\forall_{\varepsilon > 0} ((U_\varepsilon(p) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset).$$

Voorbeelden:

1) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ heeft 0 als verdichtingspunt.
2) $(0,1)$ heeft onder andere 1 als verdichtingspunt, evenals $[0,1]$.
3) $\mathbb{Z}$ heeft geen verdichtingspunten.

Opgaven:

4.3 Bepaal de verzameling verdichtingspunten van:

a) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$

b) $\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, p < q\}$

d) $\mathbb{Q}$.

4.4 Zij $p \in \mathbb{R}$ en $A \subset \mathbb{R}$. Als er een rij (a_n) bestaat met de eigenschappen

i) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (a_n \in A)$

ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (a_n \neq p)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$,

dan is p verdichtingspunt van A, en omgekeerd. Bewijs dit.

4.5 Zij $A \subset \mathbb{R}$. Men zegt dat A dicht ligt in $\mathbb{R}$ wanneer tussen ieder tweetal verschillende reële getallen een element van A ligt; zo ligt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
Bewijs: Als A dicht ligt in $\mathbb{R}$, dan is ieder reëel getal verdichtingspunt van A, en omgekeerd.

4.6 Toon aan, dat $\{\frac{p}{2^k} \mid p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$.

Definitie: Zij $A \subset \mathbb{R}$. A heet gesloten als alle verdichtingspunten van A ook element van A zijn, m.a.w. als A al zijn verdichtingspunten bevat.

Voorbeelden:

1) $[2,5]$ is gesloten.

2) $(1,3)$ is niet gesloten; immers, 3 is verdichtingspunt maar $3 \notin (1,3)$.

3) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is niet gesloten, want 0 is verdichtingspunt en behoort niet tot de verzameling.

4) $\{a\}$ is gesloten, want $\{a\}$ heeft geen verdichtingspunten.

Stelling: Zij $A \subset \mathbb{R}$. Dan geldt: A is gesloten dan en slechts dan als $\mathbb{R} \setminus A$ open is.

Bewijs: 1) Stel A gesloten. Kies nu $p \in \mathbb{R} \setminus A$, dus $p \notin A$; dan is p geen verdichtingspunt van A, dat wil zeggen $\exists_{\varepsilon>0} ((U_\varepsilon(p) \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset)$.
Dus geldt ook $U_\varepsilon(p) \cap A = \emptyset$, zodat $U_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R} \setminus A$ voor die ε.

2) Stel $\mathbb{R} \setminus A$ open. Zij $p \in \mathbb{R} \setminus A$. Er is dus een omgeving $U_\varepsilon(p)$ zodat $U_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R} \setminus A$, ofwel $U_\varepsilon(p) \cap A = \emptyset$. Hieruit volgt, dat p geen verdichtingspunt van A is. A bevat dus al zijn verdichtingspunten. □

Gevolgen:

1) $[a,b]$ is gesloten, in samenhang met het open zijn van $(-\infty,a) \cup (b,\infty)$.
2) De doorsnede van willekeurig veel gesloten verzamelingen is gesloten, de vereniging van eindig veel gesloten verzamelingen is gesloten.

Opgaven

4.7 Bedenk zelf de definitie van $U_\varepsilon(\underline{a})$ voor $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$.

4.8 Zij $A \subset \mathbb{R}^2$. Bedenk zelf de definitie voor: A is open.

4.9 $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$. Bewijs dat V open is.

4.10 Stel $A \subset \mathbb{R}^2$ en $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$. Bedenk zelf de definitie voor:
a) $\underline{p}$ is verdichtingspunt van A
b) A is gesloten.

4.11 $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Bepaal alle verdichtingspunten van V.

4.12 $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bewijs dat W gesloten is.

4.13 Bewijs dat $(0,1]$, d.w.z. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ noch open noch gesloten is.

4.14 $A := \{\frac{n-3}{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bepaal de verdichtingspunten van A.
Behoren deze tot A?

Definitie: Zij $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Men noemt A naar boven begrensd wanneer een $M \in \mathbb{R}$ bestaat met: $\forall_{a\in A} (a \leq M)$; in dit geval heet M een bovengrens van A. Analoog wordt naar beneden begrensd en ondergrens gedefinieerd. Verder heet A begrensd als A zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

Stelling (Bolzano-Weierstrass)
Elke oneindige en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft tenminste één verdichtingspunt (al dan niet tot de verzameling behorend).

Bewijs: Zij $A \subset \mathbb{R}$, A een oneindige, begrensde verzameling. Wanneer m een ondergrens en M een bovengrens van A is, geldt dus $A \subset [m,M]$.
Zij $x_0 = m$, $y_0 = M$; dan is $y_0 - x_0 = M - m$ terwijl $[x_0,y_0]$ oneindig veel elementen van A bevat. We passen de halveringsmethode toe: is x_n, y_n al bekend, zodanig dat $y_n - x_n = \frac{M-m}{2^n}$ en dat $[x_n,y_n]$ oneindig veel elementen van A bevat, dan beschouwen we de deelintervallen $[x_n, \frac{1}{2}(x_n + y_n)]$ en $[\frac{1}{2}(x_n + y_n), y_n]$.
Minstens één van deze deelintervallen moet weer oneindig veel elementen uit A bevatten. Zij $x_{n+1} := x_n$, $y_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ als $[x_n, \frac{1}{2}(x_n + y_n)]$

oneindig veel elementen van A bevat, en $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} := y_n$ in het andere geval. Dan is $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{M-m}{2^{n+1}}$ terwijl $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ oneindig vele elementen uit A bevat.

Zo ontstaat een tweetal rijen (x_n) en (y_n) met:

1) $y_n - x_n = \frac{M-m}{2^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

2) voor alle $n \in \mathbb{N}$ bevat $[x_n, y_n]$ oneindig veel elementen van A

3) (x_n) is monotoon zwak stijgend, (y_n) is monotoon zwak dalend.

Daar (x_n) behalve monotoon zwak stijgend ook naar boven begrensd is (bijvoorbeeld door M) is hij convergent; zij $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Wegens $y_n - x_n = \frac{M-m}{2^n}$ is $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, zodat ook

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + (y_n - x_n)) = x + 0 = x.$$

Omdat (x_n) monotoon zwak stijgend is, geldt $x_n \le x$; omdat (y_n) monotoon zwak dalend is, geldt $x \le y_n$, zodat $x \in [x_n, y_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Met behulp hiervan tonen we tenslotte aan, dat x verdichtingspunt van A is.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en beschouw $U_\varepsilon(x)$.

Voor voldoend grote n is $\frac{M-m}{2^n} < \varepsilon$, zodat dan $[x_n, y_n] \subset U_\varepsilon(x)$. Omdat $[x_n, y_n]$ oneindig veel punten van A bevat, is $(U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ □

In het vervolg worden systemen van verzamelingen reële getallen gebruikt. Met behulp van een indexverzameling A geven we zo'n systeem weer met $V_\alpha \mid \alpha \in A$. Voor alle $\alpha \in A$ is V_α hierin een verzameling reële getallen.

<u>Voorbeeld</u>:

$$U_{\frac{1}{n}}(1) \mid n \in \mathbb{N} = \{(1 - \tfrac{1}{n}, 1 + \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Definitie:</u> Zij $K \subset \mathbb{R}$. Een systeem $V_\alpha \mid \alpha \in A$ heet een <u>overdekking</u> van K wanneer $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$.

Een overdekking $V_\alpha \mid \alpha \in A$ van K heet een <u>open</u> overdekking, <u>eindige</u> overdekking, resp. <u>aftelbare</u> overdekking wanneer iedere V_α open is, A eindig is, resp. A aftelbaar is.

Een <u>deeloverdekking</u> van een overdekking $V_\alpha \mid \alpha \in A$ van K is een deelsysteem $V_\alpha \mid \alpha \in B$ met $B \subset A$, dat ook reeds een overdekking van K is.

Voorbeeld: Het systeem $U_{\frac{1}{n}}(r) \mid (n,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ vormt een aftelbare open overdekking van $\mathbb{R}$.

Bewijs: $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar, dus $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ ook. Verder is $U_{\frac{1}{n}}(r)$ open voor alle $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$. Tenslotte is $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} U_1(z)$, dus zeker

$$\mathbb{R} = \bigcup_{(n,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}} U_{\frac{1}{n}}(r). \qquad \square$$

Stelling: Zij V een open deelverzameling van $\mathbb{R}$. Er is een A met $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ zodat $\bigcup_{(n,r) \in A} U_{\frac{1}{n}}(r) = V$.

Bewijs: Zij $v \in V$. Voor zekere $\varepsilon > 0$ geldt $U_\varepsilon(v) \subset V$, omdat V open is.
Kies n uit $\mathbb{N}$ zó dat $\frac{1}{n} < \varepsilon$, dan is $U_{\frac{1}{n}}(v) \subset V$.

Kies binnen $U_{\frac{1}{2n}}(v)$ een rationaal getal r, en beschouw $U_{\frac{1}{2n}}(r)$.

Bij elke $v \in V$ vinden we op deze wijze een $U_{\frac{1}{2n}}(r)$ met $v \in U_{\frac{1}{2n}}(r)$ en $U_{\frac{1}{2n}}(r) \subset U_{\frac{1}{n}}(v) \subset V$.

De vereniging van deze $U_{\frac{1}{2n}}(r)$ is dus precies V. $\square$

Stelling van Lindelöf

Zij $K \subset \mathbb{R}$ en laat $V_\alpha \mid \alpha \in A$ een open overdekking van K zijn; dan bevat $V_\alpha \mid \alpha \in A$ een hoogstens aftelbare deeloverdekking.

Bewijs: Zij $\alpha \in A$ en beschouw de open verzameling V_α.
Volgens de vorige stelling is er een indexverzameling $B_\alpha \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ zó, dat $V_\alpha = \bigcup_{(n,r) \in B_\alpha} U_{\frac{1}{n}}(r)$.

Neem $B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$; wegens $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ is dan B hoogstens aftelbaar terwijl $\bigcup_{(n,r) \in B} U_{\frac{1}{n}}(r)$ een overdekking van $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ is, en dus zeker een overdekking van K. Voor iedere $U_{\frac{1}{n}}(r)$ met $(n,r) \in B$ is er een $\alpha' \in A$ zodanig dat $U_{\frac{1}{n}}(r) \subset V_{\alpha'}$. De verzamelingen $V_{\alpha'}$ die we zo krijgen voor alle mogelijke

$(n,r) \in B$ vormen een hoogstens aftelbaar deelsysteem van $V_\alpha \mid \alpha \in A$ dat K reeds overdekt. □

Definitie: Zij $K \subset \mathbb{R}$. Men noemt K compact wanneer iedere open overdekking van K een eindige deeloverdekking heeft.

Voorbeelden:

1) Beschouw $V := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. We zullen aantonen dat V niet compact is.
   Neem $\varepsilon_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ en beschouw de open overdekking $U_{\varepsilon_n}(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}$ van V.
   Er geldt: $U_{\varepsilon_n}(\frac{1}{n})$ bevat precies één element van V, namelijk $\frac{1}{n}$; immers

   $$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \varepsilon_n \text{ en } \frac{1}{n} + \varepsilon_n < \frac{1}{n-1} \quad \text{(ga na)}.$$

   Elke eindige deelcollectie van onze overdekking bevat dus slechts eindig veel punten van V, en overdekt V dus niet.

2) $W := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ is wel compact.
   Beschouw namelijk een open overdekking $V_\alpha \mid \alpha \in A$ van W. Daar $0 \in W$, is er een $\alpha_0 \in A$ met $0 \in V_{\alpha_0}$; omdat V_{α_0} open is, bestaat een $\varepsilon > 0$ met $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset V_{\alpha_0}$. Deze V_{α_0} overdekt dus reeds bijna de gehele W, n.l. zeker alle punten $\frac{1}{n}$ met $\frac{1}{n} < \varepsilon$, dus met $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Er blijven slechts eindig vele punten van W over, zeg $\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_k}$, die uiteraard al door eindig vele V_α's overdekt worden. Deze laatste V_α's vormen samen met V_{α_0} een eindige deeloverdekking van W.

3) $\mathbb{N}$ is niet compact. Het systeem $U_{\frac{1}{4}}(n) \mid n \in \mathbb{N}$ is een open overdekking van $\mathbb{N}$, maar een eindige deeloverdekking is er niet.

Opgave:

4.15 Zij $V := (0,1)$ en beschouw het systeem van open verzamelingen $V_\alpha \mid \alpha \in A$ met

$$V_\alpha := \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right) \text{ en } A := (0,1).$$

   a) Toon aan, dat $V_\alpha \subset V$ voor alle $\alpha \in A$.
   b) Bewijs, dat $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = V$.
   c) Laat zien, dat V niet compact is.

Voorbeeld: Een begrensd, gesloten interval is compact.

Bewijs: Zij $a,b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en beschouw $I = [a,b]$; we moeten bewijzen dat I compact is. Stel I is niet compact; dan is er een open overdekking $V_\alpha \mid \alpha \in A$ van I, die geen eindige deeloverdekking heeft. We construeren nu een rij intervallen $[x_n,y_n]$ met de halveringsmethode: $x_0 = a$, $y_0 = b$, zodat $[x_0,y_0]$ geen eindige deeloverdekking uit $V_\alpha \mid \alpha \in A$ heeft, terwijl $y_0 - x_0 = b - a$.

Laat x_n,y_n al bekend zijn zó, dat $[x_n,y_n]$ geen eindige deeloverdekking uit $V_\alpha \mid \alpha \in A$ heeft, terwijl $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Minstens één van de intervallen $[x_n, \frac{1}{2}(x_n + y_n)]$ en $[\frac{1}{2}(x_n + y_n), y_n]$ heeft dan geen eindige deeloverdekking uit $V_\alpha \mid \alpha \in A$.

Zij $x_{n+1} := x_n$, $y_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ als dit voor het eerste interval geldt; $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} := y_n$ anders. Dan heeft $[x_{n+1},y_{n+1}]$ geen eindige deeloverdekking van $V_\alpha \mid \alpha \in A$, terwijl $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Zo ontstaat een monotoon zwak stijgende rij (x_n) en een monotoon zwak dalende rij (y_n), waarvan we weten dat ze een gemeenschappelijke limiet x hebben. Hiervoor geldt bovendien $x \in [x_n,y_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Daar $x \in [a,b]$ ligt x in zeg V_{α_0} voor zekere $\alpha_0 \in A$. Omdat V_{α_0} open is, bestaat een $\varepsilon > 0$ met $U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$. Voor n zo groot dat $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$ geldt dan $[x_n,y_n] \subset V_{\alpha_0}$. Dit is in tegenspraak met de constructie van de intervallen $[x_n,y_n]$. □

Hulpstelling: Een gesloten deelverzameling van een compacte verzameling is compact.

Bewijs: Stel $F \subset K \subset \mathbb{R}$ met F gesloten en K compact. Zij $F^* = \mathbb{R} \setminus F$, zodat F^* open is.

Laat $V_\alpha \mid \alpha \in A$ een open overdekking van F zijn; dan is dit systeem, aangevuld met F^* een open overdekking van K. Dit aangevulde systeem heeft een eindige deeloverdekking van K, dus ook van F. Wanneer F^* nog tot deze eindige deeloverdekking behoort, kunnen we hem zonder meer weglaten. We krijgen dan een eindige deeloverdekking van F uit het systeem $V_\alpha \mid \alpha \in A$. Dus is F compact. □

<u>Stelling</u> (Heine-Borel): Zij $K \subset \mathbb{R}$. Dan geldt: K is compact $\Leftrightarrow$ K is begrensd en gesloten.

<u>Bewijs:</u> 1) Laat K compact zijn. Het systeem $U_1(k) \mid k \in K$ is een open overdekking van K en heeft dus een eindige deeloverdekking $U_1(k_j) \mid j \in \{1,\ldots,n\}$.

Zij $m := \min(k_1-1,\ldots,k_n-1)$ en $M := \max(k_1+1,\ldots,k_n+1)$. Dan is kennelijk $K \subset [m,M]$, dus K begrensd.

Om aan te tonen dat K gesloten is nemen we een willekeurig punt $p \in \mathbb{R} \setminus K$. Dan geldt voor alle $k \in K$ dat $\varepsilon_k = |p - k| > 0$. Beschouw $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_k}(k)$ voor willekeurige $k \in K$; we merken op, dat de afstand van p tot ieder punt van $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_k}(k)$ meer dan $\frac{1}{2}\varepsilon_k$ is. Het systeem $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_k} \mid k \in K$ is een open overdekking van K, en heeft dus een eindige deeloverdekking $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_{k_j}}(k_j) \mid j \in \{1,\ldots,n\}$. Nu geldt, dat de afstand van p tot ieder punt van iedere $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_{k_j}}(k_j)$ meer is dan $\delta := \frac{1}{2}\min(\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_n})$. Omdat $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\frac{1}{2}\varepsilon_{k_j}}(k_j)$ is de afstand van p tot ieder punt van K dan ook meer dan δ, zodat $U_\delta(p) \cap K = \emptyset$. Hieruit volgt dat p geen verdichtingspunt van K is. Alle verdichtingspunten van K behoren dus tot K.

2) Laat K begrensd en gesloten zijn. Zij m een ondergrens en M een bovengrens van K, zodat $K \subset [m,M]$. Volgens de hulpstelling is K dan als gesloten deelverzameling van de compacte verzameling $[m,M]$ zelf ook compact. $\square$

<u>Stelling</u>: Zij V een niet-lege, naar boven begrensde verzameling reële getallen. Dan is er een kleinste bovengrens van V (al dan niet tot V behorend); d.w.z., er is een getal $x \in \mathbb{R}$ zó dat x bovengrens van V is terwijl $x - \varepsilon$ voor alle $\varepsilon > 0$ geen bovengrens van V is.

<u>Bewijs</u>: Daar $V \neq \emptyset$ is er een element $a \in V$. Neem $x_0 = a - 1$; dan is x_0 geen bovengrens van V. Daar V naar boven begrensd is, bestaat een bovengrens M van V; we nemen $y_0 = M$. Nu is $y_0 - x_0 = M - a + 1$, x_0 is geen bovengrens van V, y_0 is wel bovengrens van V.

We passen de halveringsmethode toe. Laat x_n, y_n al bekend zijn met $y_n - x_n = \frac{M-a+1}{2^n}$, x_n geen bovengrens van V, y_n wel bovengrens van V.

Beschouw $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$; is dit een bovengrens van V neem dan $x_{n+1} := x_n$, $y_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$; anders, neem dan $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_{n+1} := y_n$. In beide gevallen is $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{M-a+1}{2^{n+1}}$, x_{n+1} geen bovengrens van V, y_{n+1} wel bovengrens van V. Zoals bekend, hebben de rijen (x_n) en (y_n) een gemeenschappelijke limiet, zeg x. Nu geldt voor alle $v \in V$ dat $y_n \geq v$ voor $n = 0,1,2,\dots$, zodat $x \geq v$. Hieruit volgt dat x bovengrens van V is. Voor $\varepsilon > 0$ willekeurig is $x_n > x - \varepsilon$ voor n voldoende groot; x_n is geen bovengrens en $x - \varepsilon$ dus ook niet. $\square$

Analoog geldt: Zij V een niet-lege, naar beneden begrensde verzameling reële getallen. Dan is er een grootste ondergrens van V.

<u>Definitie</u>: Zij $V \subset \mathbb{R}$, $V \neq \emptyset$, V naar boven begrensd. De kleinste bovengrens van V heet het <u>supremum</u> van V; notatie: sup V. Is $V \subset \mathbb{R}$, $V \neq \emptyset$, V naar beneden begrensd, dan heet de grootste ondergrens het <u>infimum</u> van V; notatie: inf V.

<u>Opgaven:</u>

4.16 Bewijs het volgende kenmerk: Zij M een bovengrens van een verzameling V van reële getallen, terwijl $M \in V$. Dan geldt: $\sup V = M$.
Analoog voor ondergrens en infimum.

4.17 Bepaal supremum en infimum van de volgende verzamelingen:
a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
b) $[0,1)$
c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

4.18 Zij V een niet-lege, naar boven begrensde verzameling reële getallen, zij $M = \sup V$. Dan geldt: $M \in V$ óf M is verdichtingspunt van V.
Bewijs dit.
Analoog voor naar beneden begrensd en infimum.

4.19 Laat V een niet-lege, naar boven begrensde, gesloten verzameling reële getallen zijn.
Toon aan, dat $\sup V \in V$.
Analoog voor naar beneden begrensd en infimum.

4.20 Als K een compacte verzameling reële getallen is, dan bevat K een grootste element en een kleinste element. Bewijs dit.

5. Continuïteit

Definities: Zij $A \subset \mathbb{R}$; beschouw de afbeelding $f: A \to \mathbb{R}$.

1) f heet continu in a ($a \in A$) als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in A}\ ((|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)).$$

2) f heet continu op V ($V \subset A$) als *f continu is in ieder punt van V*.

3) f heet continu wanneer f continu is op A.

Uit Wiskunde 10 is bekend, dat som, product, quotient en samenstelling van continue functies weer continu zijn. Ook de inverse functie van een bijectieve continue functie is continu. Verder zijn constante functies continu, en de functies x, x^n ($n \in \mathbb{N}$), x^p ($p \in \mathbb{R}$, $x > 0$), $\cos x$, $\sin x$, e^x, $\ell n\, x$ ($x > 0$) eveneens. Als gevolg krijgen we tenslotte, dat alle "formulefuncties" continu zijn.

Definitie: Zij $A \subset \mathbb{R}$, $V \subset A$, $W \subset \mathbb{R}$, en $f: A \to \mathbb{R}$ een afbeelding.
Het beeld van V onder f (notatie: $f(V)$) is $\{f(v) \mid v \in V\}$.
Het volledig origineel van W onder f (notatie: $\overleftarrow{f}(W)$) is $\{x \in A \mid f(x) \in W\}$.

Opgave:

5.1. Zij $f: [-2,\infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$.
1) Bepaal $f((-1,2))$.
2) Bepaal $\overleftarrow{f}([4,9))$.
3) Bewijs, dat f continu is in 5.

De definitie van continuïteit in een punt laat zich op de volgende wijze herformuleren (ga de equivalentie met de oorspronkelijke formulering na):

Zij $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$.
f heet continu in $a \in A$ als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ (f(U_\delta(a) \cap A) \subset U_\varepsilon(f(a))).$$

Een herformulering van de continuïteit van een functie wordt in de volgende stelling omschreven:

Stelling: Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $f: A \to \mathbb{R}$. Nu geldt: f is continu dan en slechts *dan als er voor iedere open verzameling* $V \subset \mathbb{R}$ een open verzameling $U \subset \mathbb{R}$ bestaat zó dat $\overleftarrow{f}(V) = U \cap A$.

Bewijs: 1) Laat f continu zijn. Zij $V \subset \mathbb{R}$, V open. Als $\overleftarrow{f}(V) = \emptyset$, dan is $\overleftarrow{f}(V) = \emptyset \cap A$ met $\emptyset$ open. We beperken ons daarom tot $\overleftarrow{f}(V) \neq \emptyset$. Voor iedere $a \in \overleftarrow{f}(V)$, dus voor iedere $a \in A$ met $f(a) \in V$, is er een $\varepsilon(a) > 0$ met $U_{\varepsilon(a)}(f(a)) \subset V$, want V is open.

Bij deze $\varepsilon(a)$ is er een $\delta(a) > 0$ zō, dat

$$f(U_{\delta(a)}(a) \cap A) \subset U_{\varepsilon(a)}(f(a)) \subset V,$$

dus $\quad (U_{\delta(a)}(a) \cap A) \subset \overset{\leftarrow}{f}(U_{\varepsilon(a)}(f(a))) \subset \overset{\leftarrow}{f}(V).$

Zij $U := \bigcup_{a \in \overset{\leftarrow}{f}(V)} U_{\delta(a)}(a);$

dan is U open. Bovendien is$(U \cap A) \subset \overset{\leftarrow}{f}(V)$. Maar ook is $\overset{\leftarrow}{f}(V) \subset A$ ēn $\overset{\leftarrow}{f}(V) \subset U$, wegens de definitie van U. Dus geldt

$$\overset{\leftarrow}{f}(V) = U \cap A.$$

2) Zij $a \in A$ en $\varepsilon > 0$. Omdat $U_\varepsilon(f(a))$ open is, bestaat een open verzameling U zō, dat $\overset{\leftarrow}{f}(U_\varepsilon(f(a))) = U \cap A$. Omdat $f(a) \in U_\varepsilon(f(a))$, geldt $a \in \overset{\leftarrow}{f}(U_\varepsilon(f(a)))$, zodat $a \in U$. Daar U open is, bestaat een $\delta > 0$ met $U_\delta(a) \subset U$. Dan is$(U_\delta(a) \cap A) \subset (U \cap A)$, zodat

$$(U_\delta(a) \cap A) \subset \overset{\leftarrow}{f}(U_\varepsilon(f(a))).$$

Gevolg: $f(U_\delta(a) \cap A) \subset U_\varepsilon(f(a))$, dus f is continu in a. $\square$

<u>Stelling</u>
Zij A een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$ en
$f: A \to \mathbb{R}$ continu. Dan is $f(A)$ compact.

<u>Bewijs:</u> Zij $V_\beta \mid \beta \in B$ een open overdekking van $f(A)$.
Omdat V_β open is, geldt $\overset{\leftarrow}{f}(V_\beta) = U_\beta \cap A$ voor zekere open $U_\beta \subset \mathbb{R}$.
Het systeem $U_\beta \mid \beta \in B$ vormt een open overdekking van A.
Immers: Is $a \in A$, dus $f(a) \in f(A)$, dan is $f(a) \in V_\beta$ voor zekere $\beta \in B$, maar dan is $a \in \overset{\leftarrow}{f}(V_\beta)$, dus $a \in (U_\beta \cap A)$,zodat $a \in U_\beta$.
A is compact, dus het systeem $U_\beta \mid \beta \in B$ bevat een eindige deeloverdekking van A, zeg $U_{\beta_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}$.

We zullen nu aantonen dat $V_{\beta_i} \mid i \in \{1,\dots,n\}$ een eindige deeloverdekking is van $f(A)$.
Is n.l. $y \in f(A)$, dus $y = f(b)$ voor zekere $b \in A$, dan is $b \in U_{\beta_i}$ voor zekere $i \in \{1,\dots,n\}$, dus $b \in (U_{\beta_i} \cap A)$. Nu geldt

$$f(b) \in f(U_{\beta_i} \cap A) \text{ dus } f(b) \in V_{\beta_i}.$$ $\square$

Stelling van Weierstrass

Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Als f continu is dan bestaan $c_1, c_2 \in [a,b]$ zodat

$$\forall_{x\in[a,b]} \; (f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)).$$

Opmerking. De laatste zin kan ook aldus gezegd worden: als f continu is dan heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum.

Bewijs: $[a,b]$ is gesloten en begrensd, dus compact; $f([a,b])$ is dan ook compact dus gesloten en begrensd; deze verzameling bevat daarom zijn supremum en infimum. We bewijzen dit slechts voor het supremum M. Stel $M \notin f([a,b])$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is $M - \varepsilon$ geen bovengrens van $f([a,b])$, zodat er een $y \in f([a,b])$ bestaat met $M - \varepsilon < y < M$. Hieruit volgt dat M verdichtingspunt van de gesloten verzameling $f([a,b])$ is. Tegenspraak. $\square$

Tussenwaardestelling. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, terwijl $f(a) \ne f(b)$. Als η een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$ is, dan is er een $\xi \in (a,b)$ met $f(\xi) = \eta$.

Bewijs: We behandelen slechts het geval waarin $f(a) < \eta < f(b)$; het geval $f(b) < \eta < f(a)$ gaat analoog. We passen het halveringsprincipe toe. Neem $x_0 := a$, $y_0 := b$; dan is $y_0 - x_0 = b - a$ en $f(x_0) \le \eta < f(y_0)$. Als x_n en y_n al bekend zijn met $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$ en $f(x_n) \le \eta < f(y_n)$, dan beschouwen we $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$. Is $f(\frac{1}{2}(x_n + y_n)) \le \eta$, dan is $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ en $y_{n+1} := y_n$; in het andere geval is $x_{n+1} := x_n$ en $y_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + y_n)$.

Nu is $y_{n+1} - x_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ en $f(x_{n+1}) \le \eta < f(y_{n+1})$. Zo ontstaat een monotoon zwak stijgende rij (x_n) en een monotoon zwak dalende rij (y_n), waarvan we weten dat ze een gemeenschappelijke limiet, zeg ξ hebben. Omdat $x_n \ge x_0 = a$ is $\xi \ge a$; omdat $y_n \le y_0 = b$ is $\xi \le b$; dus $\xi \in [a,b]$. Daar f continu is in ξ, volgt uit $f(x_n) \le \eta$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $f(\xi) \le \eta$. Evenzo volgt uit $\eta < f(y_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $\eta \le f(\xi)$. Dus $\eta = f(\xi)$. Wegens $f(a) < \eta < f(b)$ is $\xi \ne a$ en $\xi \ne b$, zodat $\xi \in (a,b)$. $\square$

Stelling: Is $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, dan is $f([a,b]) = [m,M]$, waarin m het globale minimum en M het globale maximum van f is.

Bewijs: Dit volgt direct uit beide vorige stellingen. $\square$

Ter inleiding van de volgende definitie behandelen we eerst een voorbeeld. Beschouw de continue functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Zij $a \in (0,\infty)$ en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Er geldt:

$$f^{\leftarrow}\left(U_\varepsilon\left(\tfrac{1}{a}\right)\right) = \begin{cases} \left(a - \dfrac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon},\ a + \dfrac{a^2\varepsilon}{1-a\varepsilon}\right) & \text{voor } \varepsilon < \dfrac{1}{a} \\[2ex] \left(a - \dfrac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon},\ \infty\right) & \text{voor } \varepsilon \geq \dfrac{1}{a}\,. \end{cases}$$

Als we $\delta > 0$ nemen zō dat

$$\delta \leq \frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}\text{, dan geldt } f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a)).$$

Hieruit blijkt dat f continu is in a; f is dus inderdaad continu op $(0,\infty)$.

De maximum waarde die voor δ genomen mag worden, hangt af van a. We zien, dat bij vaste $\varepsilon > 0$ de waarde van δ steeds kleiner moet worden naarmate a dichter bij 0 komt. □

Definitie: Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $f: A \to \mathbb{R}$. Men zegt dat f uniform continu is als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{a\in A}\ (f(U_\delta(a) \cap A) \subset U_\varepsilon(f(a))).$$

Opmerkingen:

1) Bedoeld is dus, dat bij gekozen $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ moet bestaan die voldoet voor alle $a \in A$.
2) Een equivalente formulering is:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in A}\ \forall_{y\in A}\ ((|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

Voorbeeld: Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = \cos x$.
Dan is f uniform continu. Kies n.l. $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Er geldt:

$$|\cos x - \cos y| = 2\left|- \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y|.$$

Als $\delta := \varepsilon$, dan geldt voor alle $x,y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$ dat

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

□

<u>Stelling</u>: Laat $A \subset \mathbb{R}$, A compact en $f: A \to \mathbb{R}$ continu zijn, dan is f uniform continu op A.

<u>Bewijs</u>: Kies $\varepsilon > 0$. Bij elke $a \in A$ is er een $\delta(a)$ zodat

$$f(U_\delta(a) \cap A) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a)).$$

Omdat $a \in U_{\frac{1}{2}\delta(a)}(a)$ is het systeem $U_{\frac{1}{2}\delta(a)}(a) \mid a \in A$ een open overdekking van A. Omdat A compact is bevat dit systeem een eindige deeloverdekking, zeg $U_{\frac{1}{2}\delta(a_i)}(a_i) \mid i \in \{1,\dots,n\}$.

Zij $\delta := \min(\frac{1}{2}\delta(a_1),\dots,\frac{1}{2}\delta(a_n))$.

Kies x en y in A zodat $|x - y| < \delta$.

Nu geldt $x \in U_{\frac{1}{2}\delta(a_i)}(a_i)$ voor zekere $i \in \{1,\dots,n\}$.

Dus $|y - a_i| \le |y - x| + |x - a_i| \le \frac{1}{2}\delta(a_i) + \frac{1}{2}\delta(a_i) = \delta(a_i)$

zodat $x \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$ én $y \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$.

Hieruit volgt $f(x) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a_i))$ en $f(y) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a_i))$

en $\quad |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(y)| < \varepsilon.$ □

<u>Opgaven</u>

5.2 Zij $f: [1,10] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$. Dan is f uniform continu.
Geef bij een $\varepsilon > 0$ expliciet een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x,y \in [1,10]$ met $|x - y| < \delta$ geldt: $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon$.

5.3 Toon aan, dat $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \ln x$ uniform continu is.

5.4 Is $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ uniform continu?

6. Integreren

In dit hoofdstuk zal steeds het volgende gelden:

1. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
2. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is een begrensde functie.
3. Een verdeling van $[a,b]$ is een eindige deelverzameling

$$V := \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \text{ met } a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

4. De verzameling van alle verdelingen van $[a,b]$ wordt met $\mathcal{V}$ aangegeven.
5. $m := \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$,

$M := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$,

$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

$M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, voor $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Definitie.

De bovensom $S_V(f)$ van f bij de verdeling V wordt gedefinieerd door $S_V(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ en de ondersom $s_V(f)$ door $s_V(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$.

Opmerkingen

1. We noteren S_V en s_V in plaats van $S_V(f)$ resp. $s_V(f)$ zolang geen verwarring mogelijk is.
2. Voor alle $V \in \mathcal{V}$ geldt:

$$m(b - a) \le s_V \le S_V \le M(b - a). \quad \text{(Ga dit na).}$$

Gevolg: $\{S_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ is begrensd, evenals $\{s_V \mid V \in \mathcal{V}\}$.

Definitie. Als V en W elementen van $\mathcal{V}$ zijn én $V \subset W$ dan heet W een verfijning van V.

Stelling. Als W een verfijning van V is, dan is

$$S_W \le S_V \text{ en } s_W \ge s_V .$$

Bewijs: We bewijzen dat $S_W \le S_V$ (het bewijs dat $s_W \ge s_V$ gaat analoog).

Stel $V := \{x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ en neem aan dat W maar een punt meer heeft, n.l. y, met $x_{i-1} < y < x_i$.

Zij $M_{i1} := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, y]\}$ en $M_{i2} := \sup\{f(x) \mid x \in [y, x_i]\}$,

zodat $S_V - S_W = M_i(x_i - x_{i-1}) - M_{i1}(y - x_{i-1}) - M_{i2}(x_i - y)$.

Wegens $M_{i1} \le M_i$ en $M_{i2} \le M_i$ is $S_V - S_W \ge M_i(x_i - x_{i-1} - y + x_{i-1} - x_i + y) = 0$,

dus $S_W \le S_V$.

Indien W k punten meer bevat dan V $(k > 1)$ houden we deze redenering k maal. □

<u>Stelling</u>. Als V en W elementen van $\mathcal{V}$ zijn, dan is

$$S_V \geq s_W \text{ en } S_W \geq s_V .$$

<u>Bewijs</u>. Zij U een gemeenschappelijke verfijning van V en W (bijv. $U = V \cup W$), dan geldt:

$$s_W \leq s_U \leq S_U \leq S_V \text{ en } s_V \leq s_U \leq S_U \leq S_W .$$ □

<u>Definities</u>: De <u>bovenintegraal</u> $\bar{I}_{[a,b]}(f)$ van f over [a,b] wordt gedefinieerd door $\bar{I}_{[a,b]}(f) := \inf\{S_V(f) \mid V \in \mathcal{V}\}$, de <u>onderintegraal</u> $\underline{I}_{[a,b]}(f) := \sup\{s_V(f) \mid V \in \mathcal{V}\}$.

<u>Opmerking</u>: Waar geen verwarring mogelijk is, worden de aanduidingen van het interval en de functie in de notatie weggelaten.

<u>Opgave</u>:

6.1. Bewijs dat geldt: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{V\in\mathcal{V}}(\bar{I} \leq S_V < \bar{I} + \varepsilon)$.
Evenzo dat geldt: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{V\in\mathcal{V}}(\underline{I} - \varepsilon < s_V \leq \underline{I})$.

<u>Stelling</u>: $\bar{I} \geq \underline{I}$.

<u>Bewijs</u>: $\forall_{V\in\mathcal{V}}\ \forall_{W\in\mathcal{V}}(S_V \geq s_W)$, dus ook $\inf\{S_V \mid V \in \mathcal{V}\} \geq \sup\{s_W \mid W \in \mathcal{V}\}$ ofwel $\bar{I} \geq \underline{I}$. □

<u>Gevolg</u>:

$$\forall_{V\in\mathcal{V}} (m(b - a) \leq s_V \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_V \leq M(b - a)).$$

<u>Definitie</u>: f heet <u>Riemann-integreerbaar</u> (of kortweg <u>integreerbaar</u>) over [a,b] als geldt $\bar{I} = \underline{I}$.

<u>Notaties</u>. Als f integreerbaar is over [a,b], dan noemen we de gemeenschappelijke waarden van $\bar{I}$ en $\underline{I}$ de <u>integraal</u> van f over [a,b] en deze waarde duiden we aan met $\int_a^b f(x)dx, I_{[a,b]}(f)$ of kortweg I.

<u>Voorbeelden</u>:

1. Zij $f(x) := \begin{cases} 1 \text{ als } x \in [a,b] \text{ en } x \text{ rationaal} \\ 0 \text{ als } x \in [a,b] \text{ en } x \text{ irrationaal} \end{cases}$, dan is f niet integreerbaar over [a,b].

Immers: Zij $V = \{x_0,\dots,x_n\}$, dan geldt op elk interval dat $M_i = 1$ en $m_i = 0$, dus $S_V = b - a$, en $s_V = 0$, zodat $\bar{I} = b - a$, maar $\underline{I} = 0$.

2. Zij $c \in \mathbb{R}$ en $f(x) := c$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is f integreerbaar en $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

Bewijs: zij $V \in \mathcal{V}$, dan $M_i = m_i = c$ op elk deelinterval; dus $S_V = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$ en evenzo is $s_V = c(b - a)$, dus $\bar{I} = \underline{I} = c(b - a)$. □

Stelling: De volgende uitspraken zijn equivalent:

1^o. f is integreerbaar over $[a,b]$

2^o. $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{V\in\mathcal{V}}\ (S_V - s_V < \varepsilon)$.

Bewijs: "$1^o \to 2^o$". Kies een $\varepsilon > 0$. Daar $\bar{I} = \inf\{S_V \mid V \in \mathcal{V}\}$, is er een $V_1 \in \mathcal{V}$ met $S_{V_1} - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Evenzo is er een $V_2 \in \mathcal{V}$ met $\underline{I} - s_{V_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Bedenk dat $I = \bar{I} = \underline{I}$. Als V een gemeenschappelijke verfijning van V_1 en V_2 is, dan geldt

$$S_V - s_V \le S_{V_1} - s_{V_2} = (S_{V_1} - I) + (I - s_{V_2}) < \varepsilon .$$

"$2^o \to 1^o$": $\forall_{V\in\mathcal{V}}(s_V \le \underline{I} \le \bar{I} \le S_V)$.

Kies een $\varepsilon > 0$, dan is er een $V \in \mathcal{V}$, waarvan geldt $S_V - s_V < \varepsilon$, dus ook $\bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$, zodat $\forall_{\varepsilon>0}\ (\bar{I} - \underline{I} < \varepsilon)$, maar dan is $\bar{I} = \underline{I}$. □

Voorbeeld. Zij $f(x) := x$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is f integreerbaar op $[a,b]$ en $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

Bewijs: $S_V = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1})$ en

$$s_V = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \text{ dus}$$

$$S_V - s_V = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 .$$

Kies de verdeling V van $[a,b]$ zó dat $x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}$ voor alle $i \in \{1,\dots,n\}$, dan is $S_V - s_V = \frac{(b - a)^2}{n}$.

Bij een $\varepsilon > 0$ is $S_V - s_V < \varepsilon$ als $n > \frac{(b - a)^2}{\varepsilon}$, dus $\int_a^b x dx$ bestaat.

Voor de gekozen verdeling V geldt $S_V = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) =$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + i\,\frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n}(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(na + \frac{(b-a)(n+1)}{2}) = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n},$$

dus $\overline{I} = \inf\{S_V \mid V \in \mathcal{V}\} \le \frac{b^2-a^2}{2}$.

Analoog geldt:

$$s_V = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}, \text{ dus } \underline{I} \ge \frac{b^2-a^2}{2}$$

Dus geldt: $\frac{b^2-a^2}{2} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \frac{b^2-a^2}{2}$, zodat $I = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$. $\square$

Opgaven:

6.2 Zij f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ voor alle $x \in [0,1]$.
Bewijs dat f integreerbaar is over $[0,1]$.

6.3 Laat f integreerbaar zijn over $[a,b]$; zij $c \in \mathbb{R}$ zó dat $|f(x)| \le c$ voor alle $x \in [a,b]$.
Toon aan, dat $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le c(b-a)$.

6.4 Zij f integreerbaar over $[a,b]$ terwijl $f(x) \ge 0$ voor alle $x \in [a,b]$.
Bewijs dat $I_{[a,b]}(f) \ge 0$.

6.5 De functie f: $[0,2] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = 0$ voor $x \in [0,2]$, $x \ne 1$ en $f(1) = 1$.
Toon aan, dat f integreerbaar is over $[0,2]$ en dat $\int_0^2 f(x)dx = 0$.

Stelling: Laten a, b en c reële getallen zijn met $a < b < c$.
Als f: $[a,c] \to \mathbb{R}$ begrensd is dan geldt: $\overline{I}_{[a,c]} = \overline{I}_{[a,b]} + \overline{I}_{[b,c]}$ en $\underline{I}_{[a,c]} = \underline{I}_{[a,b]} + \underline{I}_{[b,c]}$.

Bewijs: Zij V_1 een verdeling van $[a,b]$, V_2 een verdeling van $[b,c]$; dan is $V := V_1 \cup V_2$ een verdeling van $[a,c]$ en $\overline{I}_{[a,c]} \le S_V = S_{V_1} + S_{V_2}$ zodat $\overline{I}_{[a,c]} \le \overline{I}_{[a,b]} + \overline{I}_{[b,c]}$.

Zij V een verdeling van $[a,c]$ en $V' := V \cup \{b\}$, dan is V' een verfijning van V.
Er zijn nu verdelingen V_1 en V_2 van resp. $[a,b]$ en $[b,c]$ zodat $V' = V_1 \cup V_2$.
Dus is $\overline{I}_{[a,b]} + \overline{I}_{[b,c]} \le S_{V_1} + S_{V_2} = S_{V'} \le S_V$, zodat

$\bar{I}_{[a,b]} + \bar{I}_{[b,c]} \leq \bar{I}_{[a,c]}$. In totaal vinden we $\bar{I}_{[a,b]} + \bar{I}_{[b,c]} = \bar{I}_{[a,c]}$.
Het tweede deel van de stelling wordt analoog bewezen. □

Gevolg: Als f integreerbaar is over [a,b] en over [b,c], dan is f ook integreerbaar over [a,c] en

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Immers: $\bar{I}_{[a,b]} = \underline{I}_{[a,b]}$, $\bar{I}_{[b,c]} = \underline{I}_{[b,c]}$, zodat $\bar{I}_{[a,c]} = \underline{I}_{[a,c]}$.

Opgaven

6.6 Zij $a \leq p < q \leq b$. Als f integreerbaar is over [a,b], toon dan aan dat f ook integreerbaar is over [p,q].

6.7 Als f integreerbaar is over [a,b] terwijl $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ en tevens $f(c) > 0$ voor een punt $c \in [a,b]$ waar f continu is, dan geldt $\int_a^b f(x)dx > 0$. Bewijs dit.

6.8 Zij gegeven het interval [a,b], een verdeling
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ van [a,b] en getallen $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.
De functie f is gedefinieerd als volgt:
$f(a) = c_0$; voor $x_{i-1} < x \leq x_i$ is $f(x) = c_i$ $(i = 1,\ldots,n)$.
Bewijs dat f integreerbaar is over [a,b]. (functies als hier geschetst heten trapfuncties).

Stelling: Als $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is dan is f integreerbaar over [a,b].

Bewijs: f is continu en dus uniform continu op [a,b].
Kies een $\varepsilon > 0$ dus is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $x, y \in [a,b]$ geldt:
als $|x - y| < \delta$ dan $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Kies een verdeling V van [a,b] zo dat $x_i - x_{i-1} < \delta$ voor elk voorkomend deelinterval van [a,b]. Nu is $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, dus $S_V - s_V \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Conclusie: f is integreerbaar over [a,b]. □

Stelling: Als $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar en $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is, dan is $\varphi \circ f$ integreerbaar over [a,b].

Bewijs: Neem $h := \varphi \circ f$. De grootheden M, m, M_i, m_i hebben hun gebruikelijke betekenis. Met M^*, m^*, M_i^*, m_i^* duiden we de overeenkomstige grootheden voor h aan.

Op $[m,M]$ is φ uniform continu. Kies $\varepsilon > 0$ en neem $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{b-a+M^*-m^*}$; dan is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $x,y \in [m,M]$ geldt: als $|x - y| < \delta$ dan $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon_1$.

Omdat f integreerbaar is bestaat er een verdeling V van $[a,b]$ met $V = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zodanig dat

$$S_V(f) - s_V(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta\varepsilon_1.$$

Verdeel de getallen $1,2,\ldots,n$ in twee verzamelingen:

$A := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n \wedge M_i - m_i < \delta\}$. Voor $i \in A$ geldt dus $M_i^* - m_i^* < \varepsilon_1$.

$B := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n \wedge M_i - m_i \geq \delta\}$. Voor $i \in B$ geldt uiteraard $M_i^* - m_i^* \leq M^* - m^*$.

Nu is dus

$$\delta \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta\varepsilon_1 \text{ dus } \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon_1.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} S_V(h) - s_V(h) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i\in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \varepsilon_1(b - a) + (M^* - m^*)\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Opgaven:

6.9 Laat zien, dat de voorlaatste stelling als bijzonder geval van de laatste stelling gezien kan worden.

6.10 Toon aan: als f integreerbaar is over $[a,b]$, dan is ook f^2 integreerbaar over $[a,b]$.

6.11 Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie met $|f(x)| \geq \eta$ voor alle $x \in [a,b]$, waar η een gegeven positief getal is. Laat zien, dat als f integreerbaar is over $[a,b]$ ook $\frac{1}{f}$ integreerbaar is over $[a,b]$.

6.12 Als f integreerbaar is over $[a,b]$, dan is ook $|f(x)|$ integreerbaar over $[a,b]$. Toon dit aan; laat tevens zien dat geldt:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

(Vergelijk opgave 6.3).

<u>Stelling</u>: Laat f en g op $[a,b]$ begrensde functies zijn; zij h gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$ voor alle $x \in [a,b]$. Als f en g integreerbaar zijn, dan is ook h integreerbaar en $I(h) = I(f) + I(g)$.

<u>Bewijs</u>. Zij $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ een verdeling van $[a,b]$.
Voor alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ is dan

$$h(x) = f(x) + g(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x),$$

zodat $$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x).$$

Sommeren levert $S_V(h) \leq S_V(f) + S_V(g)$, zodat zeker $\overline{I}(h) \leq S_V(f) + S_V(g)$.
Dit geldt voor alle verdelingen V, waaruit volgt $\overline{I}(h) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$.
Analoog bewijst men $\underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(h)$. Wegens $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$ en $\underline{I}(g) = \overline{I}(g) = I(g)$ volgt hieruit $\underline{I}(h) = \overline{I}(h) = I(f) + I(g)$. □

<u>Opgaven</u>:
6.13 Zij f begrensd op $[a,b]$ en zij $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Bewijs dat $\overline{I}(\lambda f) = \lambda\, \overline{I}(f)$ als $\lambda \geq 0$,
$\overline{I}(\lambda f) = \lambda\, \underline{I}(f)$ als $\lambda < 0$
en formuleer en bewijs dergelijke uitdrukkingen voor $\underline{I}(\lambda f)$.
b) Als f bovendien integreerbaar is over $[a,b]$, bewijs dan dat ook λf integreerbaar is over $[a,b]$ en toon aan dat $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

6.14 Laat f en g over $[a,b]$ integreerbare functies zijn, waarvoor geldt $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a,b]$. Bewijs dat $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

6.15 Als f en g integreerbaar zijn over $[a,b]$, dan is $f(x).g(x)$ ook integreerbaar over $[a,b]$.
Bewijs dit. (Aanw.: $f(x).g(x) = (\frac{f(x) + g(x)}{2})^2 - (\frac{f(x) - g(x)}{2})^2$).

6.16 Laat f en g integreerbaar zijn over $[a,b]$ terwijl $|g(x)| \geq \eta$ voor alle $x \in [a,b]$, waar η een positief getal is. Laat zien, dat ook $\frac{f(x)}{g(x)}$ integreerbaar is over $[a,b]$.

Stelling (middelwaardestelling van de integraalrekening). Zij $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continu dan geldt:

$$\exists_{\xi \in [a,b]} \left(\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)\right).$$

Bewijs: Er geldt: f is integreerbaar over $[a,b]$ en $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq M$.
Volgens de tussenwaardestelling is er dus een $\xi \in [a,b]$ zô dat

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}.$$

□

Tot dusverre is de integraal $\int_a^b f(x)dx$ slechts gedefinieerd voor het geval $a < b$. We breiden deze definitie als volgt uit:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \text{en}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \text{als} \quad a > b.$$

Stelling: Zij f integreerbaar over $[a,b]$, $c \in [a,b]$ en zij $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) := \int_c^x f(t)dt$. Dan is F continu op $[a,b]$. Als bovendien f continu is in $x_0 \in (a,b)$ dan is F differentieerbaar in x_0 met $F'(x_0) = f(x_0)$.

Bewijs: f is begrensd op $[a,b]$ dus er is een $M > 0$ zodat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$. Dus geldt voor alle $x,y \in [a,b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq M|y - x|. \text{ Kies } \varepsilon > 0 \text{ en daarbij}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}, \text{ dan is } |F(y) - F(x)| \leq M|y - x| < \varepsilon \text{ als } |y - x| < \delta, \text{ dus F is}$$

(uniform) continu op $[a,b]$.
Zij bovendien f continu in x_0. Kies $\varepsilon > 0$, dan is er een $\delta > 0$ zodanig dat $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ als $|t - x_0| < \delta$. Voor $0 < |h| < \delta$ geldt nu

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - h.f(x_0) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \le \frac{1}{|h|} . |h|.\varepsilon = \varepsilon.$$

Dus $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$. □

Opgave:

6.17 Zij $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en $c \in [a,b]$. Als $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $F(x) := \int_c^x f(t)dt$, toon dan aan dat F rechtsdifferentieerbaar is in a, d.w.z. dat

$$F_R'(a) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \text{ bestaat.}$$

Geef en bewijs het analogon voor b i.p.v. a.

Definitie: Zij $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Als $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, dan heet F een primitieve functie van f als voor alle $x \in (a,b)$ geldt $F'(x) = f(x)$.

Opmerkingen:

1) Volgens voorgaande stelling heeft iedere continue functie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ een primitieve functie, namelijk $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ voor $c \in [a,b]$.

2) Als F een primitieve functie van f is, dan is ook $F(x) + C$ een primitieve functie van f. Omgekeerd, als F en G primitieve functies van f zijn, dan is $F'(x) = G'(x) = f(x)$ op (a,b), zodat $(F(x) - G(x))' = 0$ op (a,b). Met de middelwaardestelling van de differentiaalrekening volgt hieruit $F(x) - G(x) = C$ op (a,b). Primitieve functies zijn dus op (a,b) tot op een constante na bepaald.

Hoofdstelling van de integraalrekening

Zijn f en F afbeeldingen van $[a,b]$ naar $\mathbb{R}$, beide continu op $[a,b]$ en F differentieerbaar op (a,b), zodanig dat $\forall_{x\in(a,b)}\ (F'(x) = f(x))$, dan is $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Bewijs: Definieer $G: [a,b] \to \mathbb{R}$, door $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, dan is G een primitieve functie van f en dus is $G - F$ constant op (a,b).
Omdat G en F continu zijn op $[a,b]$ is $G - F$ ook constant op $[a,b]$.
Er is dus een $C \in \mathbb{R}$ zodat voor elke $x \in [a,b]$ geldt: $F(x) = G(x) + C$.
Bedenkend dat $G(a) = 0$, geldt nu:

$$F(b) - F(a) = G(b) + C - G(a) - C = G(b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad \square$$

Opmerking: Via de hoofdstelling is nu de aansluiting naar de techniek van het integreren gelegd, zoals de substitutieregel, de regel voor partiëel integeren, integeren van rationale functies via breuksplitsing enz.

7. Enige bijzondere functies

Zij $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. We zullen in dit hoofdstuk $e, e^x, \ln(x)$ invoeren; we onderstellen ze dus onbekend. Wel beschikken we voor $a \in \mathbb{R}^+$ over a^r voor $r \in \mathbb{Q}$; immers als $r = \frac{p}{q} (p,q \in \mathbb{N})$ dan is $a^r := \sqrt[q]{a^p}$ en als $r = -\frac{p}{q} (p,q \in \mathbb{N})$ dan is $a^r := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$. De invoering van e, e^x en $\ln(x)$ zal via integreren verlopen.

<u>Definitie</u>: De afbeelding $\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, wordt gedefinieerd door $\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Rechtvaardiging: De integrand is continu en dus integreerbaar op ieder interval $[1,x]$ resp. $[x,1]$.
Merk op, dat $\ln(1) = 0$.

<u>Stelling</u>: De functie $\ln$ is differentieerbaar op $\mathbb{R}^+$ en $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt direct uit de hoofdstelling van de integraalrekening. $\square$

Merk op, dat volgt dat de functie $\ln$ continu is.

<u>Stelling</u>: voor $x,y \in \mathbb{R}^+$ geldt: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

<u>Bewijs:</u> $\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt.$

Zij $u := \frac{t}{x}$, dan is $\ln(xy) = \ln(x) + \int_1^{y} \frac{du}{u} = \ln(x) + \ln(y).$ $\square$

<u>Gevolgen</u>:
1. Voor $x > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\ln(x^n) = n \ln(x)$ (volledige inductie!)
2. Voor $x > 0$ geldt $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$. (Neem $y = \frac{1}{x}$ in bovenstaande stelling).
3. Voor $x > 0$ en $n \in \mathbb{Z}$ geldt $\ln(x^n) = n \ln(x)$. (Combineer gevolg 1 en 2).

<u>Eigenschap</u>
$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$$
$$\ln(3) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt + \int_2^3 \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$\ln(4) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

<u>Stelling</u>. De functie $\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is bijectief.

<u>Bewijs</u>: De functie $\ln$ is monotoon stijgend. Immers, zij $0 < x < y$, dan is $\ln(y) - \ln(x) = \int_x^y \frac{1}{t}\,dt > 0$, zodat $\ln$ injectief is.

De functie ℓn is surjectief. Immers, zij $y_0 \in \mathbb{R}$, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $-n \le y_0 \le n$, dus $-n\,\ell n(4) \le y_0 \le n\,\ell n(4)$. Kies $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ zodanig dat $x_1 < 4^{-n}$ en $x_2 > 4^n$, dan $\ell n(x_1) < -n\,\ell n(4) < y_0 < n\,\ell n(4) < \ell n(x_2)$. Daar de functie ℓn continu is, volgt op grond van de tussenwaardestelling dat er een $x_0 \in (x_1, x_2)$ bestaat met $\ell n(x_0) = y_0$. □

<u>Definitie</u>. De afbeelding $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ is de inverse afbeelding van $\ell n: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

<u>Gevolgen</u>:

1. $\exp(0) = 1$ want $\ell n(1) = 0$.
2. Omdat ℓn monotoon stijgend is, is exp dat ook (zie Wisk. 10).
3. Omdat ℓn continu is, is exp dat ook. Dit volgt uit een algemene stelling, die in Wiskunde 10 niet bewezen wordt. In het geval van ℓn en exp is het volgende ad-hoc bewijs te geven:
   <u>Bewijs</u>. Zij $a \in \mathbb{R}$ en kies $\varepsilon > 0$. Zij $x_1 := \ell n(\exp(a) - \varepsilon)$ als $\exp(a) - \varepsilon > 0$ en $x_1 := a - 1$ anders en zij $x_2 := \ell n(\exp(a) + \varepsilon)$. Neem $\delta := \min(x_2 - a, a - x_1)$, dan geldt voor alle x met $|x - a| < \delta$ dat $x_1 < x < x_2$, dus $\exp(x_1) < \exp(x) < \exp(x_2)$, $\exp(a) - \varepsilon < \exp(x) < \exp(a) + \varepsilon$, ofwel $|\exp(x) - \exp(a)| < \varepsilon$. Dus exp continu in a.
4. Omdat ℓn differentieerbaar is en $\ell n'(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$, is exp ook differentieerbaar en

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ell n'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x). \text{ (zie Wis. 10)}$$

<u>Eigenschappen</u>

1. $\exp(x + y) = \exp(x).\exp(y)$

   <u>Bewijs</u>: $\exp(x + y) = \exp(\ell n(\exp(x)) + \ell n(\exp(y))) =$
   $\exp(\ell n(\exp(x)\exp(y))) = \exp(x)\exp(y)$.
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (Neem in 1: $y = -x$)
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
   <u>Bewijs</u>: Voor $n \in \mathbb{N}$ volgt dit met volledige inductie uit 1.
   Voor $n = 0$ is dit triviaal.
   Voor $n = -m$ met $m \in \mathbb{N}$ geldt $\exp(nx) = \dfrac{1}{\exp(mx)} = \dfrac{1}{(\exp(x))^m} = (\exp(x))^n$.

<u>Definitie.</u> Het getal e wordt gedefinieerd door $e := \exp(1)$.

<u>Eigenschappen</u>

1. $\ell n(e) = 1$. Wegens $\ell n(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t} < 1$ en $\ell n(4) > 1$ en de monotonie geldt $2 < e < 4$.

2. $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. $\exp(\frac{t}{n}) = (\sqrt[n]{e})^t = e^{\frac{t}{n}}$ $(n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{Z})$

Voor rationale argumenten valt exp dus met de bekende e-macht functie samen. Dit maakt de volgende definitie mogelijk.

Definitie: $e^x := \exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschappen

1. $e^{x+y} = e^x . e^y$
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Dit zijn herformuleringen van eerder genoemde eigenschappen.
Zij $a \in \mathbb{R}^+$, dan geldt

1. $\exp(\frac{\ell n(a)}{n}) = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$ (want $(\exp(\frac{\ell n(a)}{n}))^n = \exp(\ell n(a)) = a$).
2. $\exp(\frac{t}{n}\,\ell n(a)) = (\sqrt[n]{a})^t = a^{\frac{t}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Dit maakt de volgende definitie mogelijk:

Definitie $a^x := \exp(x\,\ell n(a))$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (zodat $\ell n(a^x) = x\,\ell n(a)$).

Eigenschappen

1. $a^{x+y} = e^{(x+y)\ell n(a)} = e^{x\,\ell n(a)} . e^{y\,\ell n(a)} = a^x . a^y$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $(a^x)^y = e^{y\,\ell n(a^x)} = e^{yx\,\ell n(a)} = a^{xy}$
4. i.h.b. geldt dus ook $(e^x)^y = e^{xy}$.

Zij voor $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ de functie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door $f_a(x) := a^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Stelling: f_a is bijectief voor $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

Bewijs: Zij $y \in \mathbb{R}^+$ en beschouw de vergelijking $a^x = y$. Deze is equivalent met $e^{x\,\ell n(a)} = y$, $\ell n(e^{x\,\ell n(a)}) = \ell n(y)$ dus met $x = \frac{\ell n(y)}{\ell n(a)}$. De vergelijking heeft dus precies één oplossing. $\square$

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. De afbeelding ${}^a\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is de inverse van $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Dus: ${}^a\log y = x$ betekent $a^x = y$.

Opmerking : Uit de equivalentie van $a^x = y$ en $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ volgt $^a\log y = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ $(y \in \mathbb{R}^+)$.

Stelling: Voor $a > 1$ zijn f_a en $^a\log$ monotoon stijgend.

Voor $0 < a < 1$ zijn f_a en $^a\log$ monotoon dalend.

Bewijs: $f_a'(x) = \exp'(x\ \ln(a)).\ \ln(a) = \ln(a).a^x$.

Dus $f_a'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ als $a > 1$

en $f_a'(x) < 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ als $0 < a < 1$.

De monotonie van $^a\log$ wordt op analoge wijze bewezen. □

Stelling: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Bewijs: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \ln'(x)_{x=1} = (\frac{1}{x})_{x=1} = 1$. □

Stelling: $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$ voor $a \in \mathbb{R}$.

Bewijs: $(1 + \frac{a}{x})^x = e^{x\ \ln(1 + \frac{a}{x})}$. Stel $h = \frac{a}{x}$ dan

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim_{h\to 0} e^{\frac{a\ \ln(1+h)}{h}} = e^{a.1} = e^a.$$ □

Opmerking: I.h.b. geldt dus $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

De goniometrische functies

Beschouw de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Deze functie is continu . Definieer voor $x \in \mathbb{R}$ de functie arctan door

$$\arctan(x) := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

. Dan is arctan continu, monotoon stijgend en oneven (Ga na).

Voor $x \geq 1$ geldt $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \leq 1$ dus $\arctan x \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + 1 \leq 2$.

De functie arctan is dus monotoon stijgend en naar boven begrensd voor $x \geq 1$, zodat $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ bestaat. Definieer het getal π door

$\pi = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$, dan is $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ en de functie arctan, gezien als afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is bijectief.

<u>Definitie</u>. De afbeelding $\tan: (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ is de inverse van $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. De periodieke voortzetting modulo π van tan noemen we gemakshalve ook tan. M.b.v. de betrekkingen $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ voor $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ zijn nu de andere goniometrische functies in te voeren, waarna de bekende eigenschappen zijn af te leiden.

Index