

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

ACHTERGRONDEN

van de

SCHOOLWISKUNDE

(Encyclopedie van de Meetkunde)

Prof. Dr. J.J. Seidel

Voorjaarssemester 1982

2278

B. J. J. Meijer



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.278
Prijs f. 6,50

Onderafdeling der Wiskunde^{B M A}
en Informatica



A T C
0 1
T H E

Achtergronden van de Schoolwiskunde

(Encyclopedie van de meetkunde)

Prof.dr. J.J. Seidel

Wij verzoeken U, dit collegedictaat
niet mee te nemen buiten de leeszaal
en het na lezing terug te leggen op
de ladenkasten. Dank U!

2.278

Leeszaal
Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

en Informatica

BIBLIOTHEEK
T. H. EINDHOVEN

8110464

Achtergronden van de Schoolwiskunde

(Encyclopedie van de meetkunde)

Prof. dr. J.J. Seidel

Voorjaarssemester 1982

Jan 1982.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1. <u>Projectieve meetkunde</u>	blz.
1.1. Vectorruimten	1
1.2. Het affiene vlak $A(2, \mathbb{F})$	3
1.3. Het Euclidische vlak $E(2, \mathbb{F})$	5
1.4. Het projectieve vlak $PG(2, \mathbb{F})$	7
1.5. Projectieve transformaties	10
1.6. Harmonische scheiding	11
1.7. Dualiteit	13
1.8. Kegelsneden in $PG(2, \mathbb{F})$	15
1.9. Synthetische projectieve meetkunde	17
Hoofdstuk 2. <u>Niet-euclidische meetkunde</u>	
2.1. Inleiding	19
2.2. Euclidische vlakke meetkunde	20
2.3. Het elliptische vlak	22
2.4. Het hyperbolische vlak	24
2.5. Het elliptische vlak op basis van projectieve meetkunde	26
2.6. Het hyperbolische vlak op basis van projectieve meetkunde	29
Hoofdstuk 3. <u>Meerdimensionale meetkunde</u>	
3.1. Stereografische projectie	32
3.2. Cirkelmeetkunde van Möbius	33
3.3. Vezelingen	33
3.4. Regelmatige polytopen in \mathbb{R}^n	35
3.5. De Icosaëder en de voetbal	38
Hoofdstuk 4. <u>Homologie</u>	
4.1. Het (abstracte) simplex	45
4.2. Het complex	48
4.3. De stelling van Euler-Poincaré	54

Inhoudsopgave (vervolg)

Hoofdstuk 5. <u>Topologie</u>	blz.
5.1. Topologische afbeeldingen	57
5.2. Continue afbeeldingen	59
5.3. De dekpuntstelling van Brouwer	61
Hoofdstuk 6. <u>Homotopie</u>	
6.1. Homotope afbeeldingen	64
6.2. De fundamenteaalgroep	65
6.3. Omloopsgetallen, pro memorie	67
Hoofdstuk 7. <u>Vraagstukken</u>	
7.1 Voorbeeld bij affiene transformaties	68
7.2 Voorbeeld bij projectieve afbeeldingen	69
7.3 Schriftelijke tentamens	73
Hoofdstuk 8. <u>Bijlagen</u>	
8.1 Isometriën van het Euclidische vlak, door C.P. van Nieuwkastele	86
8.2 Meetkunde van de ruimte	104
8.3 In memoriam L.E.T. Brouwer, door H. Freudenthal	110

Hoofdstuk 1. Projectieve Meetkunde

1.1. Vectorruimten

Zij \mathbb{F} een lichaam, bijvoorbeeld \mathbb{R} , \mathbb{C} , of een eindig Galoislichaam \mathbb{F}_q .
Noem *rijtjesruimte* van dimensie n het Cartesisch product

$$\mathbb{F}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}\},$$

met de gewone optelling en vermenigvuldiging met scalaren $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Een *vectorruimte* V over \mathbb{F} is een commutatieve groep $(V, +)$ voorzien van vermenigvuldiging met scalaren

$$\mathbb{F} \times V \rightarrow V: (\alpha, \underline{v}) \rightarrow \alpha \underline{v},$$

zodat voor alle $\underline{v}, \underline{w} \in V$ en voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ geldt

$$\alpha(\beta \underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}, \alpha(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha \underline{v} + \alpha \underline{w}, (\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}, 1 \underline{v} = \underline{v}.$$

Een vectorruimte V over \mathbb{F} van dimensie n , notatie $V(n, \mathbb{F})$, heeft een basis van n vectoren, waarin elke vector van V eenduidig kan worden uitgedrukt:

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

$V(n, \mathbb{F})$, voorzien van basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, is gelijkwaardig met de rijtjesruimte \mathbb{F}^n . Voor eigenschappen van lineaire afhankelijkheid, deelruimten, lineaire afbeeldingen, etc., zie Wis 10, 20, 30.

De niet-singuliere lineaire afbeeldingen $A: V \rightarrow V$ vormen een *groep*, genaamd $GL(n, \mathbb{F})$. Deze groep kan worden voorgesteld door de groep van alle niet-singuliere $n \times n$ matrices over \mathbb{F} , met de matrixvermenigvuldiging als operatie.

Voorbeeld. In $V(2, \mathbb{F})$ bestaat $GL(2, \mathbb{F})$ uit alle niet-singuliere transformaties $\underline{y} = A\underline{x}$. In \mathbb{F}^2 komt dit neer op alle transformaties

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ met } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Voorbeeld. $GL(2, \mathbb{F}_q)$ heeft $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ elementen (tel het aantal bases).

Een *metrische ruimte* is een verzameling V voorzien van een afstand $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, zodat voor alle $x, y, z \in V$ geldt

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) .$$

De *Hamming afstand* $d_H(\underline{x}, \underline{y})$ van $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{F}_q^n$ wordt gedefinieerd door

$$d_H(\underline{x}, \underline{y}) = \# \text{ coördinaten waarin } \underline{x} \text{ en } \underline{y} \text{ verschillen} .$$

\mathbb{F}_q^n , voorzien van Hamming afstand, is een metrische ruimte (ga na).

Voorbeeld. In \mathbb{F}_3^4 spannen de vectoren

$$(1, 0, 1, 2) \text{ en } (0, 1, 1, 1)$$

een deelruimte op van dimensie 2. De 9 vectoren van deze deelruimte hebben paarsgewijs Hamming afstand 3. Dit maakt de deelruimte tot een perfecte 1-error-correcting code.

Voorbeeld. In \mathbb{F}_2^5 vormen de vectoren

$$(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1)$$

een 1-error-correcting code.

Een *inproduct* in $V(n, \mathbb{F})$ is een afbeelding $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ waarvoor geldt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x}), \quad (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}, \underline{z}) = \alpha (\underline{x}, \underline{z}) + \beta (\underline{y}, \underline{z}), \quad (\forall \underline{v} \in V \quad (\underline{v}, \underline{z}) = 0) \Rightarrow (\underline{z} = \underline{0}),$$

voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ en $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$.

Een lineaire afbeelding $A: V \rightarrow V$ heet *orthogonaal* als

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \quad ((A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})) .$$

De orthogonale lineaire afbeeldingen vormen een groep (waarom?).

Voorbeeld. In \mathbb{R}^3 worden inproducten gedefinieerd door

$$(\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 ;$$

het eerste inproduct is positief definitief, het tweede niet.

Voorbeeld. In \mathbb{F}_5^2 bestaan vectoren \underline{x} zodat

$$(\underline{x}, \underline{x}) = 0, \text{ waarin } (\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

1.2. Het affiene vlak $A(2, \mathbf{F})$

Een *affien vlak* is een verzameling P (noem de elementen *punten*), en een collectie L van deelverzamelingen (noem *lijnen*) waarvoor geldt:

- 1) elke twee punten liggen op één lijn,
- 2) elke twee lijnen hebben ten hoogste één punt gemeen (noem twee lijnen *evenwijdig* als ze samenvallen of geen punt gemeen hebben),
- 3) gegeven een punt en een lijn, dan is er één lijn door het punt en evenwijdig aan de lijn,
- 4) er zijn drie punten die niet op een lijn liggen.

Wij zullen ons beperken tot affiene vlakken $A(2, \mathbf{F})$ die als volgt worden verkregen uit het vectorvlak $V(2, \mathbf{F})$ over een lichaam \mathbf{F} . De punten van $A(2, \mathbf{F})$ zijn de vectoren van $V(2, \mathbf{F})$. De lijnen van $A(2, \mathbf{F})$ zijn de verzamelingen

$$\{\underline{a} + \lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbf{F}\} .$$

De lijnen van $A(2, \mathbf{F})$ zijn de translaties van de één dimensionale deelruimten van $V(2, \mathbf{F})$. Door invoering van de translaties $T_{\underline{a}}$:

$$\forall_{\underline{x} \in V} (T_{\underline{a}}(\underline{x}) := \underline{x} + \underline{a})$$

wordt in $V(2, \mathbf{F})$ de oorsprong van zijn geprivilegeerde positie ontdaan.

De *affiene groep* $AG(2, \mathbf{F})$ is de groep van de affiene transformaties

$$T(\underline{x}) := \underline{a} + A\underline{x} \quad , \quad \underline{a} \in V(2, \mathbf{F}) \quad , \quad A \in GL(2, \mathbf{F}) .$$

Deze transformaties vormen inderdaad een groep, o.a. omdat

$$\underline{x} \rightarrow \underline{a} + A\underline{x} \rightarrow \underline{b} + B(\underline{a} + A\underline{x}) = \underline{b} + B\underline{a} + BA\underline{x} \quad \text{ten gevolge heeft dat}$$
$$\underline{x} \rightarrow \underline{a} + A\underline{x} \quad \text{heeft inverse} \quad \underline{x} \rightarrow -A^{-1}\underline{a} + A^{-1}\underline{x} .$$

Opgave. Ga na dat de affiene groep lijnen overvoert in lijnen, en evenwijdigheid bewaart.

Opgave. Toon aan dat bij twee gegeven (echte) driehoeken een affiene transformatie te vinden is die de ene driehoek afbeeldt op de andere.

Opgave. Bewijs dat $GL(2, \mathbf{F})$ een ondergroep is van $AG(2, \mathbf{F})$.

De affiene groep heeft nog meer ondergroepen. Een vermenigvuldiging (dilatatie) is een affiene transformatie van de soort

$$T(\underline{x}) := \underline{c} + \alpha \underline{x}, \quad \underline{c} \in V(2, \mathbf{F}), \quad \alpha \in \mathbf{F}.$$

Voor $\alpha = 1$ is dit een translatie, voor $\alpha = -1$ een puntspiegeling ten opzichte van $2^{-1}\underline{c}$ (voor $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$). Voor $\alpha \neq \pm 1$ is dit een vermenigvuldiging met de factor α , niet ten opzichte van \underline{c} maar ten opzichte van het centrum $\underline{c}(1 - \alpha)^{-1}$. Inderdaad, de vectoren $\underline{c}(1 - \alpha)^{-1}$, \underline{x} , $\underline{c} + \alpha \underline{x}$ liggen op één lijn omdat

$$\alpha(\underline{x} - \underline{c}(1 - \alpha)^{-1}) = \underline{c} + \alpha \underline{x} - \underline{c}(1 - \alpha)^{-1}.$$

Opgave. Bewijs dat de vermenigvuldigingen een ondergroep van $AG(2, \mathbf{F})$ vormen.

Opgave. Bewijs dat de translaties en de puntspiegelingen een ondergroep vormen van de groep der vermenigvuldigingen.

Opgave. Bewijs dat de translaties een groep vormen die isomorf is met $(V, +)$. Deze groep is een normale ondergroep van $AG(2, \mathbf{F})$, en ook van de groep der vermenigvuldigingen.

Voorbeeld. Een parallellogram wordt tegenwoordig gedefinieerd als een punt-symmetrische vierhoek.

Voorbeeld. In $A(2, \mathbf{F})$ met $\text{char } \mathbf{F} \neq 2, 3$ gaan de zwaartelijnen van een driehoek door één punt Z . Wat gebeurt er in $A(2, \mathbf{F}_3)$?

Voorbeeld. $A(2, \mathbf{F}_q)$ heeft q^2 punten en $q^2 + q$ lijnen.

Voorbeeld. Een equivalentieklasse van evenwijdige rechten in $A(2, \mathbb{F}_q)$ vormt een Latijns vierkant van de orde q .

Een *Latijns vierkant* van de orde n is een $n \times n$ matrix waarvan elke rij en elke kolom een permutatie van n letters is.

Twee Latijnse vierkanten van de orde n heten *orthogonaal*, als hun superpositie elk van de n^2 geordende paren (i, j) , met $i, j \in \{n \text{ letters}\}$ precies éénmaal bevat.

Voorbeeld.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

orthogonaal wegens

$$\begin{bmatrix} aa & bb & cc \\ bc & ca & ab \\ cb & ac & ba \end{bmatrix} .$$

Stelling. Er bestaan $q-1$ twee aan twee orthogonale Latijnse vierkanten van de orde q , waarin $q = p^m \geq 3$, p priem.

1.3. Het Euclidische vlak $E(2, \mathbb{F})$

Een *Euclidisch vlak* $E(2, \mathbb{F})$ is een affien vlak waarvan het vectorvlak een inproduct bezit. Wij nemen verder de karakteristiek van \mathbb{F} ongelijk aan 2 en 3. In $E(2, \mathbb{F})$ heten de rechten AB en CD *loodrecht* als

$$(\underline{b} - \underline{a}, \underline{d} - \underline{c}) = 0 .$$

De *afstand*² van twee punten A en B wordt gedefinieerd door

$$\|AB\|^2 := (\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}) .$$

Voorbeeld. Pas op dat de afstand² van 2 verschillende punten nul kan zijn. Dit doet zich bijvoorbeeld voor bij $(\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_1 - x_2 y_2$.

Voorbeeld. Zij D het midden van de zijde AB van driehoek ABC . Dan geldt dat $\|DA\|^2 = \|DC\|^2$ dan en slechts dan als $AC \perp CB$.

Voorbeeld. P ligt op de middelloodlijn van AB dan als $\|PA\|^2 = \|PB\|^2$. Inderdaad,

$$(\underline{p} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = (\underline{p} - \underline{b}, \underline{p} - \underline{b})$$

ddan

$$(\underline{a}, \underline{a}) - 2(\underline{p}, \underline{a}) = (\underline{b}, \underline{b}) - 2(\underline{p}, \underline{b}) ,$$

ddan

$$(\underline{p} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}), \underline{a} - \underline{b}) = 0 .$$

Voorbeeld. De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt H. Inderdaad, trek in driehoek ABC de loodlijnen uit B en C naar de overstaande zijden. Neem het snijpunt als oorsprong dan is $(\underline{b}, \underline{c} - \underline{a}) = 0 = (\underline{c}, \underline{a} - \underline{b})$, waaruit volgt $(\underline{a}, \underline{c} - \underline{b}) = 0$.

Voorbeeld. De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt M.

Voorbeeld. (De stelling van Euler). De punten H, Z, M liggen op één rechte, in de verhouding 2:1. Inderdaad, geef de hoekpunten van de driehoek aan door de vectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Het zwaartepunt is dan $\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$. Neem de oorsprong in het snijpunt van de middelloodlijnen, dan moeten wij bewijzen dat het hoogtepunt wordt aangegeven door $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. Dit is eenvoudig in te zien.

Voorbeeld. (De 9-punts cirkel van Feuerbach). Er is een cirkel gaande door de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen, en de middens van de lijnstukken van het hoogtepunt naar de hoekpunten van een driehoek.

Afstand² en loodrechtheid blijven bewaard bij toepassing van een Euclidische transformatie

$$T(\underline{x}) := \underline{a} + A\underline{x}, \quad A \text{ orthogonaal.}$$

De groep van deze transformaties is een ondergroep van de affiene groep. Bijzondere Euclidische transformaties zijn de spiegelingen. Voor \underline{a} met $(\underline{a}, \underline{a}) \neq 0$ wordt de *spiegeling met as* $\lambda_{\underline{a}}$ gedefinieerd door

$$T_{\underline{a}} \underline{x} := -\underline{x} + \frac{2(\underline{x}, \underline{a})}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a} .$$

Uit directe verificatie volgt dat dit een orthogonale transformatie is met

$$T_{\underline{a}} \underline{a} = \underline{a}, \quad T_{\underline{a}}^2 = \text{Identiteit} .$$

Voor elke \underline{x} is $\frac{1}{2}(\underline{x} + T\underline{x})$ het voetpunt van de loodlijn op de as. De spiegeling S met as $\underline{b} + \lambda \underline{a}$ wordt gegeven door

$$S\underline{x} - \underline{b} = T(\underline{x} - \underline{b}) ,$$

$$S\underline{x} = T\underline{x} + (I - T)\underline{b} .$$

De puntspiegeling P t.o.v. \underline{b} wordt gegeven door

$$P\underline{x} = 2\underline{b} - \underline{x} .$$

Stelling. In het reële Euclidische vlak kunnen twee congruente driehoeken in elkaar worden overgevoerd door ten hoogste 3 spiegelingen.

Bewijs. Stel ΔABC en $\Delta A'B'C'$ hebben de eigenschap dat

$$\|AB\|^2 = \|A'B'\|^2, \|BC\|^2 = \|B'C'\|^2, \|CA\|^2 = \|C'A'\|^2 .$$

Spiegel ten opzichte van de middelloodlijn van AA' , dan gaat $\Delta A'B'C'$ over in $\Delta AB''C''$. Spiegel vervolgens (indien nodig) ten opzichte van de middelloodlijn van BB'' , en tenslotte (indien nodig) nogmaals t.o.v. AB .

Voorbeeld. In $E(2, \mathbb{F}_3)$ met inproduct $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ geldt deze stelling niet. Inderdaad, beschouw de punten

$$A = (0,0), B = (1,0), C = (1,1), A' = (1,2), B' = (2,2), C' = (2,0) .$$

Nu zijn ΔABC en $\Delta A'B'C'$ congruent. Er zijn echter tenminste 4 spiegelingen nodig om A op A' , B op B' en C op C' af te beelden. De moeilijkheid is dat men niet kan spiegelen ten opzichte van een lijn $\lambda \underline{p}$ met $(\underline{p}, \underline{p}) = 0$.

Opmerking. Voor een systematische behandeling van isometriën van het Euclidische vlak, zie bijlage 1.

1.4. Het projectieve vlak $PG(2, \mathbb{F})$

Motivatie: het uitbannen van (en onderzoek naar) evenwijdigheid en oneindigheid.

Ga uit van de vectorruimte $V := V(3, \mathbb{F})$ van dimensie 3 over \mathbb{F} . Definieer het projectieve vlak $\pi := PG(2, \mathbb{F})$ door zijn projectieve punten en zijn projectieve rechten als volgt.

Definitie. Een *projectief punt* van π is een rechte door de oorsprong in V .
Een *projectieve rechte* van π is een vlak door de oorsprong in V .
Een projectief punt *ligt op* (is incident met) een projectieve rechte als in V de corresponderende rechte ligt in het corresponderende vlak.

In formule komt dit neer op de volgende voorstellingen.

Een projectief punt A door $\langle \underline{a} \rangle := \{ \lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{F} \}$, dus door (a_1, a_2, a_3) op verhouding na.

Een projectieve rechte AB door $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle := \{ \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{F} \}$, of door $\{ (x_1, x_2, x_3) \mid (px_1 + qx_2 + rx_3 = 0), p, q, r \in \mathbb{F} \}$.

Twee belangrijke eigenschappen:

Door twee verschillende projectieve punten gaat precies één projectieve rechte.

Twee verschillende projectieve rechten hebben precies één projectief punt gemeen.

Voorbeeld. $PG(2, \mathbb{F}_2)$ heeft 7 projectieve punten en 7 projectieve rechten. Elk proj. punt ligt op 3 proj. rechten, en elke proj. rechte bevat 3 proj. punten.

Voorbeeld. $V(3, \mathbb{F}_q)$ heeft $q^3 - 1$ vectoren $\neq \underline{0}$. Elke rechte $\langle \underline{a} \rangle$ heeft $q - 1$ vectoren $\neq \underline{0}$. Daarom zijn er $q^2 + q + 1$ proj. punten in $PG(2, \mathbb{F}_q)$. Er zijn evenveel proj. rechten in $PG(2, \mathbb{F}_q)$. Elke proj. rechte bevat $q + 1$ proj. punten, en elk proj. punt ligt op $q + 1$ proj. rechten.

Wij onderzoeken het verband tussen het projectieve vlak $PG(2, \mathbb{F})$ en het affiene vlak $A(2, \mathbb{F})$.

Zij α een vlak in $V(3, \mathbb{F})$ dat niet door de oorsprong gaat. Dit vlak α kan worden opgevat als een affien vlak, wanneer de translaties in α in de beschouwing worden betrokken. Wij definiëren een afbeelding van het affiene vlak α in het projectieve vlak π als volgt. Beeld elk punt van α af op zijn verbindingsrechte met de oorsprong. Dan wordt elke rechte van α afgebeeld op zijn verbindingsvlak met de oorsprong. Hierdoor is een één-éénduidige afbeelding van het affiene vlak α in het projectieve vlak π gedefinieerd. Deze afbeelding is niet een afbeelding van α op π . Inderdaad, de projectieve punten die corresponderen met rechten evenwijdig aan α treden niet als beeld op.

Wij herhalen het bovenstaande met behulp van coördinaten. Neem een basis in $V(3, \mathbb{F})$, geef de vectoren \underline{x} aan door de coördinaten (x_1, x_2, x_3) , en beschouw het vlak α met de vergelijking $x_3 = 1$. Elk punt P van het vlak α wordt afgebeeld op een projectief punt (de rechte OP), en elke rechte ℓ van het vlak α wordt afgebeeld op een projectieve rechte (het vlak door O en ℓ). Deze afbeelding is één-éénduidig, en wordt als volgt beschreven met behulp van een (x, y) -stelsel in het vlak α .

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right) \leftrightarrow (x, y),$$

$$\left. \begin{array}{l} px_1 + qx_2 + rx_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow (px + qy + r = 0),$$

waarin $x := x_1/x_3$, $y := x_2/x_3$.

Deze afbeelding is niet een afbeelding van α op π . Inderdaad, de projectieve punten in het (x_1, x_2) -vlak hebben geen snijpunt met α , en het (x_1, x_2) -vlak heeft geen snijlijn met α . Daarom is het vlak α slechts een onvolledig model voor het projectieve vlak π . Om een volledig model voor π te verkrijgen, dienen wij het vlak α uit te breiden met de "oneigenlijke" punten (één voor elk projectief punt van het (x_1, x_2) -vlak) en met de "oneigenlijke" rechte (voor het (x_1, x_2) -vlak). Anders gezegd, het affiene vlak α ontstaat uit het projectieve vlak π door weglating van een projectieve rechte (de "oneigenlijke" rechte voor het affiene vlak).

Voorbeeld. Twee verschillende evenwijdige rechten in α

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by + d = 0, \quad c \neq d,$$

corresponderen in $V(3, \mathbb{F})$ met de vlakken

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \quad ax_1 + bx_2 + dx_3 = 0,$$

met snijlijn $\lambda(b, -a, 0)$, dus met twee projectieve rechten waarvan het projectieve snijpunt geen beeld in α heeft. Men zegt dat de evenwijdige rechten in α een "oneigenlijk" snijpunt hebben.

1.5. Projectieve transformaties

Een reguliere lineaire afbeelding $A: V \rightarrow V$ heeft tengevolge (induceert) een afbeelding van π op zichzelf. Zo'n afbeelding heet een *projectieve transformatie* A_π van π . Elke projectieve transformatie is een één-éénduidige afbeelding van π op zichzelf, en voert projectieve rechten over in projectieve rechten. De projectieve transformaties vormen een groep, genaamd de *projectieve groep*.

Stelling. Gegeven 4 projectieve punten $\langle \underline{a} \rangle, \langle \underline{b} \rangle, \langle \underline{c} \rangle, \langle \underline{d} \rangle$ waarvan geen 3 op een projectieve rechte, en 4 projectieve punten $\langle \underline{p} \rangle, \langle \underline{q} \rangle, \langle \underline{r} \rangle, \langle \underline{s} \rangle$ waarvan geen 3 op een projectieve rechte. Dan is er een projectieve transformatie die $\langle \underline{a} \rangle \rightarrow \langle \underline{p} \rangle, \langle \underline{b} \rangle \rightarrow \langle \underline{q} \rangle, \langle \underline{c} \rangle \rightarrow \langle \underline{r} \rangle, \langle \underline{d} \rangle \rightarrow \langle \underline{s} \rangle$ overvoert.

Bewijs. Zij $\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ een basis voor V . Het gestelde is bewezen als kan worden aangetoond dat er een reguliere lineaire afbeelding bestaat zodat

$$\langle \underline{a} \rangle \rightarrow \langle \underline{e}_1 \rangle, \langle \underline{b} \rangle \rightarrow \langle \underline{e}_2 \rangle, \langle \underline{c} \rangle \rightarrow \langle \underline{e}_3 \rangle, \langle \underline{d} \rangle \rightarrow \langle \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \rangle .$$

Welnu, wij weten dat $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineair onafhankelijk, en dat $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineair afhankelijk zijn. Schrijf

$$\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\} .$$

Definieer nu de lineaire afbeelding A door

$$A \underline{e}_1 = \alpha \underline{a}, A \underline{e}_2 = \beta \underline{b}, A \underline{e}_3 = \gamma \underline{c} ,$$

dan is A regulier en $A(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) = \underline{d}$.

Stelling. Zij A een lineaire afbeelding die de projectieve punten $\langle \underline{a} \rangle, \langle \underline{b} \rangle, \langle \underline{c} \rangle, \langle \underline{d} \rangle$, waarvan geen 3 op een projectieve rechte, in zichzelf overvoert. Dan is A een veelvoud van de identiteit.

Bewijs. Op grond van het bewijs van de vorige stelling mogen wij nemen

$$\underline{a} = \underline{e}_1, \underline{b} = \underline{e}_2, \underline{c} = \underline{e}_3, \underline{d} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 .$$

Wanneer A voldoet aan

$$A \underline{e}_1 = \alpha \underline{e}_1, A \underline{e}_2 = \beta \underline{e}_2, A \underline{e}_3 = \gamma \underline{e}_3, A(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) = \delta(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3) ,$$

dan geldt $\alpha = \beta = \gamma$, en A is een veelvoud van de identiteit.

Gevolg. De projectieve groep (de groep der projectieve transformaties) is isomorf met $GL(3, \mathbb{F})$ (de groep der reguliere lineaire afbeeldingen van V) modulo $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ (de scalairen).

Gevolg. De affiene groep is isomorf met de ondergroep van de projectieve groep die de oneigenlijke rechte van het affiene vlak in zichzelf overvoert. In matrixtaal:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} .$$

In § 1.4 hebben wij gezien dat een affien vlak α door toevoeging van de oneigenlijke rechte ℓ_∞ kan worden uitgebreid tot een projectief vlak π . Door een geschikte projectieve transformatie van π kan ℓ_∞ worden getransformeerd in een gewone rechte van α en kan een gewone rechte van α worden getransformeerd in ℓ_∞ .

Voorbeeld. Twee evenwijdige rechten en de oneigenlijke rechte van een affien vlak gaan na een geschikte projectieve transformatie over in drie door één punt gaande affiene rechten.

Voorbeeld. Een hyperbool en de oneigenlijke rechte van het affiene vlak gaan na een geschikte projectieve transformatie over in een kegelsnede en een snijlijn.

Voorbeeld. Een parabool en de oneigenlijke rechte van het affiene vlak gaan na een geschikte projectieve transformatie over in een kegelsnede en een raaklijn.

1.6. Harmonische scheiding

Vier projectieve punten in $PG(2, \mathbb{F})$ vormen een *harmonisch viertal* als ze van de vorm

$$\langle \underline{a} \rangle, \langle \underline{b} \rangle, \langle \underline{a} + \underline{b} \rangle, \langle \underline{a} - \underline{b} \rangle$$

zijn, voor geschikte keuze van \underline{a} en \underline{b} in $V(3, \mathbb{F})$. Wij zeggen dat de paren

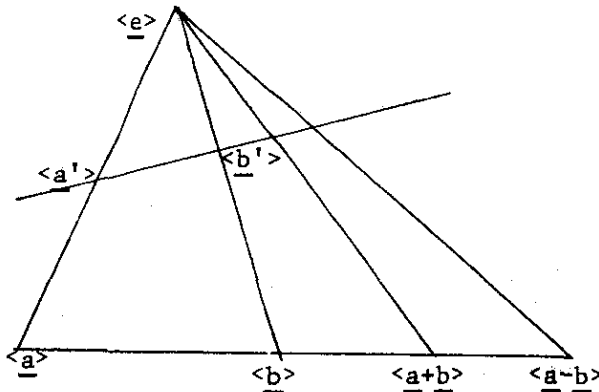
$$\langle \underline{a} \rangle, \langle \underline{b} \rangle \text{ en } \langle \underline{a} + \underline{b} \rangle, \langle \underline{a} - \underline{b} \rangle$$

elkaar *harmonisch scheiden*. Deze definitie is symmetrisch in de paren.

Een harmonisch viertal is collineair.

Een harmonisch viertal gaat na projectieve transformatie over in een harmonisch viertal.

Centrale projectie van een harmonisch viertal levert weer een harmonisch viertal. Inderdaad,



Kies $\underline{a}' = \underline{a} + \alpha \underline{e}$, $\underline{b}' = \underline{b} + \beta \underline{e}$, dan volgt uit

$$\lambda \underline{a}' + \mu \underline{b}' = \delta (\underline{a} \pm \underline{b}) + \epsilon \underline{e}$$

dat $\lambda = \mu = \delta$, omdat $\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}$ onafhankelijk zijn.

Voorbeeld. $(m, 0, 1)$ $(n, 0, 1)$ $(p, 0, 1)$ $(q, 0, 1)$.

De vier hierboven aangegeven punten zijn harmonisch als

$$\lambda \binom{m}{1} + \mu \binom{n}{1} = \rho \binom{p}{1}, \quad \lambda \binom{m}{1} - \mu \binom{n}{1} = \sigma \binom{q}{1}.$$

Deze 4 vergelijkingen hebben een oplossing $(\lambda, \mu, \rho, \sigma) \neq (0, 0, 0, 0)$ als

$$(m - p)(n - q) + (m - q)(n - p) = 0,$$

en dit is de voorwaarde voor harmonische ligging.

Voorbeeld. $(m, 0, 1)$, $(n, 0, 1)$, $(i, 0, 1)$, $(-i, 0, 1)$, met $i = \sqrt{-1}$, liggen harmonisch wanneer

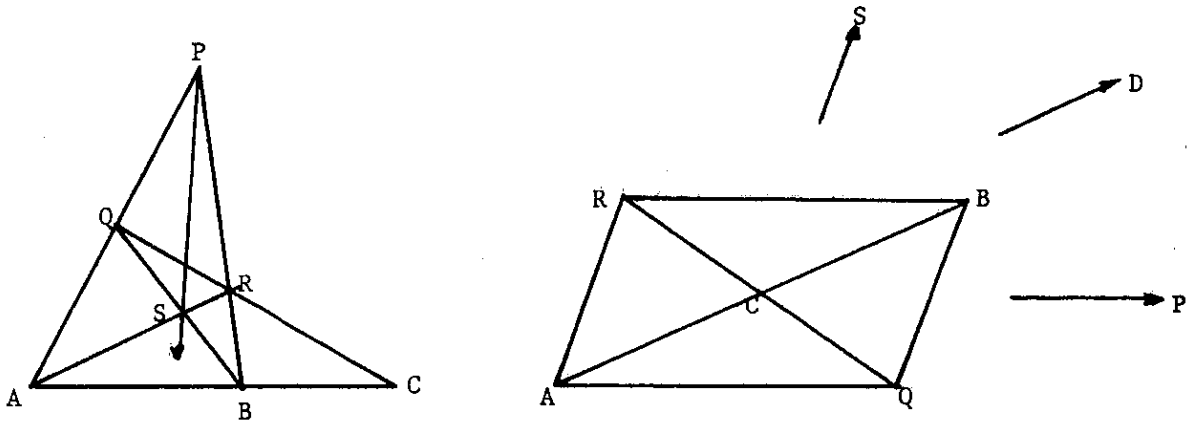
$$mn = -1.$$

Voorbeeld. $(a, 0, 1)$ $(\frac{1}{2}(a+b), 0, 1)$ $(b, 0, 1)$ $(a-b, 0, 0) = (1, 0, 0)$

In $A(2, \mathbb{F})$ wordt elk tweetal punten harmonisch gescheiden door hun midden en het oneigenlijke punt van hun rechte.

Constructie van de vierde harmonische.

Gegeven A, B, C op een rechte. Construeer D op die rechte zodat A, B en C, D elkaar harmonisch scheiden.



Neem P willekeurig, neem Q willekeurig op AP , construeer R en vervolgens S .
Dan is $D = PS \cap AB$.

Bewijs. Maak het probleem affien door PSD als oneigenlijke rechte te nemen.
Dan wordt $ARBQ$ een parallellogram, en C het midden van AB .

1.7. Dualiteit

Verwissel de woorden "projectief punt" en "projectieve rechte", dan blijven de stellingen van $PG(2, \mathbb{F})$ waar. Wij preciseren deze uitspraak door terug te gaan naar de vectorruimte.

Een *lineaire vorm* van $V = V(3, \mathbb{F})$ is een afbeelding $f: V \rightarrow \mathbb{F}$ met $f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y})$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\underline{x}, \underline{y} \in V$. De lineaire vormen van V vormen een vectorruimte V^* van dimensie 3, genaamd de *duale ruimte* van V . Laat f, g, h onafhankelijke lineaire vormen van V zijn.

$$\{\underline{x} \in V \mid \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} (\lambda f(\underline{x}) = 0)\} \text{ is een 2-dimensionale deelruimte van } V,$$

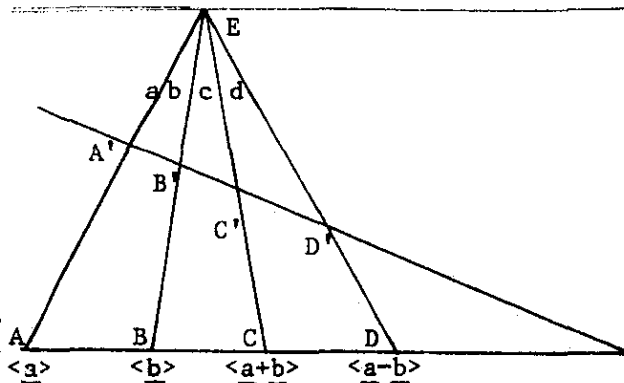
$$\{\underline{x} \in V \mid \forall_{\lambda, \mu \in \mathbb{F}} (\lambda f(\underline{x}) + \mu g(\underline{x}) = 0)\} \text{ is een 1-dimensionale deelruimte van } V,$$

$$\{\underline{x} \in V \mid \forall_{\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{F}} (\lambda f(\underline{x}) + \mu g(\underline{x}) + \nu h(\underline{x}) = 0)\} = \{\underline{0}\}.$$

Het hierdoor aangegeven verband (correlatie) tussen de deelruimten van V en V^* induceert de dualiteit tussen proj. punten en proj. rechten in $PG(2, \mathbb{F})$.

Voorbeeld. De duale uitspraak van "3 proj. punten liggen op één proj. rechte" luidt "3 proj. rechten gaan door één proj. punt".

Voorbeeld. Een vierhoek met 4 proj. punten, 6 proj. verbindingsrechten en 3 diagonale punten, heeft als duale figuur een vierzijde met 4 proj. rechten, 6 proj. snijpunten en 3 diagonale rechten.



Wij zeggen dat 4 projectieve rechten a, b, c, d door een projectief punt E een *harmonisch viertal rechten* vormen, wanneer hun snijpunten A, B, C, D met een rechte niet door E een harmonisch viertal punten vormen. Deze definitie is gerechtvaardigd op grond van de uitspraak op pag. 12, regel 4, en past in de dualiteit.

Voorbeeld. Neem een vaste lijn in $PG(2, \mathbb{C})$ als oneigenlijke rechte, en beschouw het Euclidische vlak $E(2, \mathbb{C})$ met coördinaten (x, y) , dat is $(x_1, x_2, 1)$ voor de eigenlijke en $(x_1, x_2, 0)$ voor de oneigenlijke punten. De rechte met vergelijking $y = mx$ heeft $(1, m, 0)$ als oneigenlijk punt (snijdt $x_2 = mx_1$ met $x_3 = 0$).

Uit de voorbeelden van bladz. 12 blijkt dat het viertal punten $(1, m, 0)$, $(1, n, 0)$, $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$ een harmonische viertal is als $mn = -1$. De rechten $y = mx$, $y = nx$, $y = ix$, $y = -ix$ vormen een harmonisch viertal als $mn = -1$.

Een willekeurige cirkel $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ heeft de projectieve vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 + cx_3^2 = 0$.

De oneigenlijke punten van de cirkel op $x_3 = 0$ volgen uit $x_1^2 + x_2^2 = 0 = (x_2 - ix_1)(x_2 + ix_1)$ en zijn $I = (1, i, 0)$ en $J = (1, -i, 0)$. Omgekeerd is elke kegelsnede door I en J een cirkel. In verband met het bovenstaande trekken wij de volgende conclusie:

Twee rechten in het reële Euclidische vlak zijn loodrecht wanneer hun oneigenlijke punten met de cirkelpunten I en J een harmonisch viertal vormen.

1.8. Kegelsneden in PG(2,F)

Zij $(,)$ een inproduct in $V(3,F)$, dat is, een afbeelding $V \times V \rightarrow F$ zodat geldt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x}), (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}, \underline{z}) = \alpha(\underline{x}, \underline{z}) + \beta(\underline{y}, \underline{z}), (\forall_{\underline{x} \in V} (\underline{x}, \underline{z}) = 0) \Rightarrow (\underline{z} = \underline{0}),$$

voor alle $\alpha, \beta \in F, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$.

Beschouw de (niet ontaarde) kegel

$$K = \{ \underline{x} \in V \mid (\underline{x}, \underline{x}) = 0 \}.$$

Definitie. De bij $(,)$ behorende *kegelsnede* in $PG(2,F)$ is de verzameling der projectieve punten op de kegel K.

Voorbeeld.

$$\{ \underline{x} \in V(3,R) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \} = \{ \underline{0} \},$$

$$\begin{aligned} \{ \underline{x} \in V(3,R) \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \} \cap \{ \underline{x} \in V \mid x_3 = 1 \} = \\ = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \underline{x} \in V(3,R) \mid x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \} \cap \{ \underline{x} \in V \mid x_3 = 1 \} = \\ = \{ (x,y) \mid x^2 + xy + y^2 = 1 \}. \end{aligned}$$

In coördinaten luidt de vergelijking van de kegel

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

waarin $[a_{ij}]$ een symmetrische reguliere matrix is. Er bestaat een basis van eigenvectoren bij de kwadratische vorm. Daarom kan bij een geschikte basis-keuze de vergelijking van de kegel en de vergelijking van de doorsnede met het vlak $x_3 = 1$, als volgt worden geschreven

$$ax_1^2 + bx_2^2 - x_3^2 = 0; ax^2 + by^2 = 1.$$

Sommige kegelsneden bevatten geen enkel projectief punt.

Voorbeeld. In $PG(2,R)$ heeft $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ geen proj. punten.

In $PG(2,C)$ heeft $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ wel proj. punten.

In $PG(2,F_5)$ heeft $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ wel proj. punten.

Uit het niet-ontaard zijn van het inproduct volgt onder andere het volgende lemma.

Lemma. Voor twee verschillende punten $\langle \underline{a} \rangle$ en $\langle \underline{b} \rangle$ op een kegelsnede geldt

$$(\underline{a}, \underline{b}) \neq 0 .$$

Bewijs. Stel $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$. Neem $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$. Dan is de vector

$$(\underline{b}, \underline{c}) \underline{a} - (\underline{a}, \underline{c}) \underline{b}$$

loodrecht op \underline{a} , op \underline{b} , en op \underline{c} , dus op elke vector in de vectorruimte. Maar

$$(\underline{b}, \underline{c}) \underline{a} = (\underline{a}, \underline{c}) \underline{b}$$

is een tegenspraak daar $\langle \underline{a} \rangle$ en $\langle \underline{b} \rangle$ verschillend zijn.

Wij behandelen vervolgens enige begrippen en eigenschappen betreffende niet-lege kegelsneden $k = \{ \langle \underline{x} \rangle \mid (\underline{x}, \underline{x}) = 0 \}$ in $PG(2, \mathbb{F})$, tegen de achtergrond van de lineaire algebra in $V(3, \mathbb{F})$ en de kegel $K = \{ \underline{x} \in V \mid (\underline{x}, \underline{x}) = 0 \}$.

Twee projectieve punten $\langle \underline{p} \rangle$ en $\langle \underline{q} \rangle$ heten *geconjugueerd* t.o.v. de kegelsnede k wanneer geldt $(\underline{p}, \underline{q}) = 0$. De *poollijn* van $\langle \underline{p} \rangle$ t.o.v. k is de verzameling der met $\langle \underline{p} \rangle$ geconjugeerde punten, dat is, de projectieve rechte $\{ \langle \underline{x} \rangle \mid (\underline{p}, \underline{x}) = 0 \}$. Als $\langle \underline{p} \rangle$ op de poollijn van $\langle \underline{q} \rangle$ ligt, dan ligt $\langle \underline{q} \rangle$ op de poollijn van $\langle \underline{p} \rangle$. Het paar bestaande uit een projectief punt $\langle \underline{p} \rangle$ en de projectieve rechte $\{ \langle \underline{x} \rangle \mid (\underline{p}, \underline{x}) = 0 \}$ wordt aangeduid als *pool* en *poollijn* t.o.v. de kegelsnede k . Wij onderzoeken de meetkundige betekenis van deze begrippen.

Een projectieve rechte $\{ \langle \underline{x} \rangle \mid \underline{x} = \lambda \underline{p} + \mu \underline{y} \}$ door $\langle \underline{p} \rangle$, en de kegelsnede k hebben snijpunten die worden bepaald door de oplossing λ, μ van de vergelijking

$$0 = (\underline{x}, \underline{x}) = \lambda^2 (\underline{p}, \underline{p}) + 2\lambda\mu (\underline{p}, \underline{y}) + \mu^2 (\underline{y}, \underline{y}) .$$

1) Zij $\underline{p} \in k$, dan luidt de vergelijking

$$n(2\lambda (\underline{p}, \underline{y}) + \mu (\underline{y}, \underline{y})) = 0$$

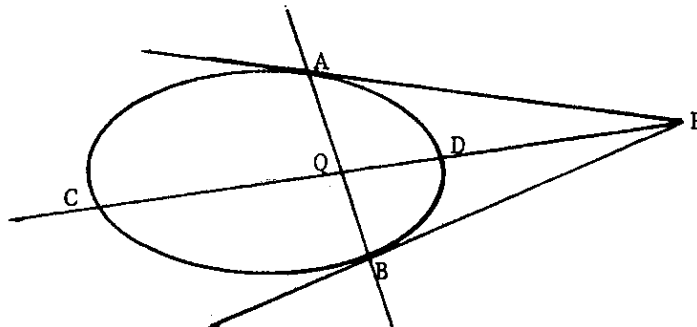
en dit levert $\lambda = 1, \mu = 0$ en $\lambda = \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle, \mu = -2\langle \underline{p}, \underline{y} \rangle$, dus tweemaal $\lambda = 1, \mu = 0$ wanneer $\langle \underline{p}, \underline{y} \rangle = 0$. De poollijn van een punt op de kegelsnede is de raaklijn.

- 2) Zij $\underline{p} \notin K$ en $\underline{y} \in K$, dan luidt de vergelijking

$$\lambda(\lambda \langle \underline{p}, \underline{p} \rangle + 2\mu \langle \underline{p}, \underline{y} \rangle) = 0 .$$

Dit levert tweemaal $\lambda = 0, \mu = 1$ wanneer $\langle \underline{p}, \underline{y} \rangle = 0$. De poollijn van een punt buiten een kegelsnede is de verbindingslijn van de raakpunten van de raaklijnen uit het punt aan de kegelsnede (als tenminste die raakpunten bestaan, m.a.w. als tenminste de poollijn de kegelsnede snijdt).

- 3) Als $\underline{p} \in K$ en de poollijn snijdt de kegelsnede niet, dan volgt de meetkundige betekenis uit de eigenschap: als $\langle \underline{p} \rangle$ ligt op de poollijn van $\langle \underline{q} \rangle$, dan ligt $\langle \underline{q} \rangle$ op de poollijn van $\langle \underline{p} \rangle$.
- 4) Laat een proj. rechte de kegelsnede $(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ snijden in de proj. punten A en B. Het snijpunt P van de raaklijnen in A en B is geconjugueerd met A en met B, dus is de pool van de proj. rechte AB.



Neem een willekeurige snijlijn door P, dan liggen C, D; P, Q harmonisch. Inderdaad,

$$C = \langle \underline{c} \rangle, D = \langle \underline{d} \rangle, P = \langle \underline{c} + \underline{d} \rangle, Q = \langle \underline{c} + k\underline{d} \rangle,$$

$$0 = (\underline{c} + \underline{d}, \underline{c} + k\underline{d}) = (1 + k) \langle \underline{c}, \underline{d} \rangle .$$

Omdat $\langle \underline{c}, \underline{d} \rangle \neq 0$ volgt $k = -1$.

Het affiene vlak $A(2, \mathbb{F})$ wordt verkregen door in $PG(2, \mathbb{F})$ één proj. rechte te selecteren als oneigenlijke rechte L_∞ . Een ellips, hyperbool, parabool in $A(2, \mathbb{F})$ is een kegelsnede die L_∞ snijdt in respectievelijk 0, 2, 1 punten. Uit de figuur van 4) lezen wij door diverse keuzen voor L_∞ onder andere het volgende af.

De asymptoten van een hyperbool zijn de raaklijnen in de snijpunten met de oneigenlijke rechte (neem $L_\infty = AB$). Het middelpunt van een ellips (hyperbool) is de pool van de oneigenlijke rechte (neem $L_\infty =$ poollijn van Q). Een parabool raakt de oneigenlijke rechte, en het raakpunt bepaalt de asrichting (neem $L_\infty = AP$).

Opmerking. Ontaarde kegelsneden (zoals lijnenparen) kunnen worden behandeld met behulp van een ontaard inproduct (een singuliere matrix $[a_{ij}]$).

Stelling. In $PG(2, \mathbb{F}_q)$, $q = p^k$, p priem, heeft elke kegelsnede $q + 1$ proj. punten.

Bewijs. Een kegelsnede heeft tenminste één punt (zie Verzamelingsleer, p. 55). Beschouw de rechten door dat punt. Eén van deze rechten is de raaklijn, en de q andere rechten zijn snijlijnen. Daarom heeft de kegelsnede $1 + q$ proj. punten. □

1.9. Synthetische projectieve meetkunde

Een (*abstract*) *projectief vlak* is een verzameling (noem de elementen projectieve punten) en een collectie deelverzamelingen (genaamd projectieve rechten) zodat

- i) elke 2 verschillende proj. punten liggen op één proj. rechte.
- ii) elke 2 verschillende proj. rechten snijden in één proj. punt.
- iii) er zijn 4 proj. punten, waarvan geen 3 op een proj. rechte.
- iv) er zijn 4 proj. rechten, waarvan geen 3 door een proj. punt.

Voorbeeld. $PG(2, \mathbb{F})$.

Een *eindig* projectief vlak van de orde n heeft $n^2 + n + 1$ proj. punten, $n^2 + n + 1$ proj. rechten, $n + 1$ proj. punten per proj. rechte, $n + 1$ proj. rechten per proj. punt.

Voorbeeld. $PG(2, F_q)$, voor $n = q = p^\alpha$, p priem.

Er bestaan projectieve vlakken die niet met behulp van een lichaam worden gedefinieerd. Wij zullen ze niet behandelen. Er bestaat geen eindig proj. vlak van de orde 6 (er bestaat geen paar orthogonale Latijnse vierkanten van de orde 6). Het is onbekend of er een eindig projectief vlak van de orde 10 bestaat.

Literatuur.

I. Kaplansky, Linear algebra and Geometry, Chelsea, second edition (1974), hoofdstuk 3.

H.S.M. Coxeter, Projective geometry, Blaisdell (1964).

Veel geavanceerder:

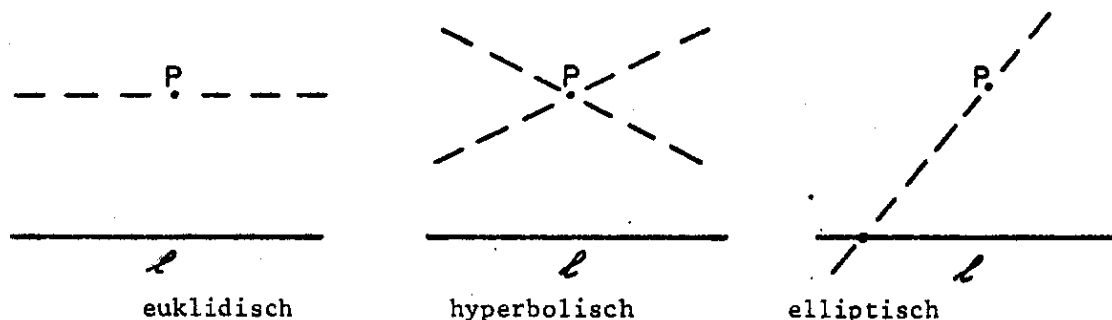
E. Artin, Geometric algebra, Interscience 1957.

D.R. Hughes, F.C. Piper, Projective planes, Springer (1973).

Hoofdstuk 2. Niet-euclidische meetkunde *)

2.1. Inleiding

In het hierna volgende zullen twee vlakke meetkonden worden bekeken, de elliptische en de hyperbolische meetkunde, die in bepaalde opzichten afwijken van de gewone vlakke schoolmeetkunde. Deze laatste, die ter ere van Euklides (300 a.c.) de euclidische meetkunde heet, gold eeuwenlang als de enige ware meetkunde. Pas in de 19^e eeuw hebben de duitser Gauss (1777-1855), de hongaar Bolyai (1802-1860) en de rus Lobatschewski (1793-1856) onafhankelijk van elkaar een andere, de hyperbolische meetkunde geconstrueerd. Later vond de duitser Riemann (1826-1866) de elliptische meetkunde. Wij zullen zien dat de euclidische en de beide niet-euclidische meetkonden zich onder andere van elkaar onderscheiden in de volgende eigenschap. In de euclidische meetkunde gaat door een punt P buiten een rechte l precies één rechte die l niet snijdt. In de hyperbolische meetkunde gaan door P meer dan één rechte die l niet snijden, terwijl in de elliptische meetkunde elke rechte door P de rechte l snijdt.

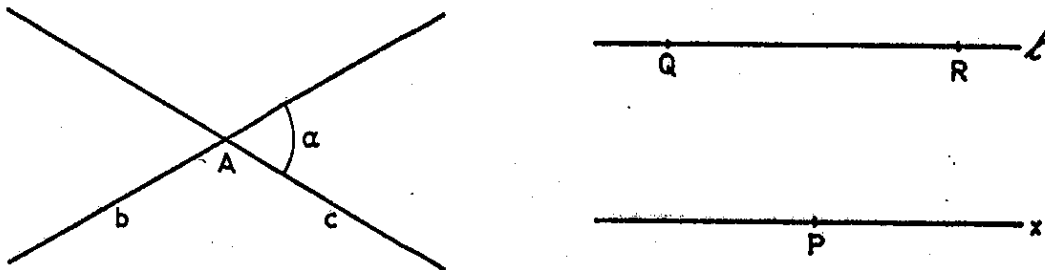


Figuur 1.

Dat klinkt wonderlijk. Om een beeld te kunnen geven zullen wij eerst de gewone euclidische meetkunde van een hoger standpunt bekijken, zowel lettelijk als figuurlijk. Daarna pas komen de nieuwe meetkonden aan de orde. Wij gebruiken wel een beetje stereometrie, maar we doen daarbij alleen een beroep op inzicht in een eenvoudige ruimtelijke figuur.

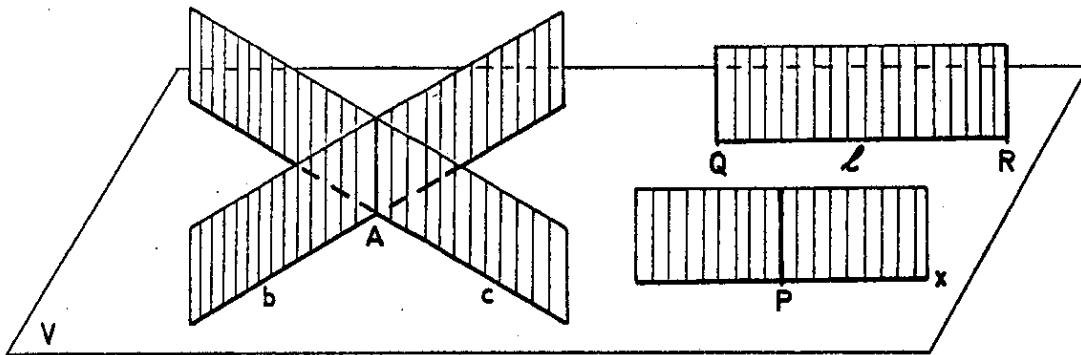
*) De inleidende paragrafen 2.1-2.4 zijn geschreven voor scholieren. De in hoofdstuk 1 ontwikkelde theorie wordt voortgezet in de paragrafen 2.5 en 2.6, die onafhankelijk van 2.1-2.4 zouden kunnen worden gelezen.

2.2. Euklidische vlakke meetkunde



Figuur 2.

In bovenstaande figuur zijn in het euklidische vlak V getekend snijdende rechten, evenwijdige rechten; een hoek en een afstand, allemaal bekende begrippen. Wij halen het nu ter inleiding eens in ons hoofd om, loodrecht op het vlak V waarin wij tekenden, stokken op de punten en schuttingen op de rechten te zetten, allemaal van dezelfde hoogte.

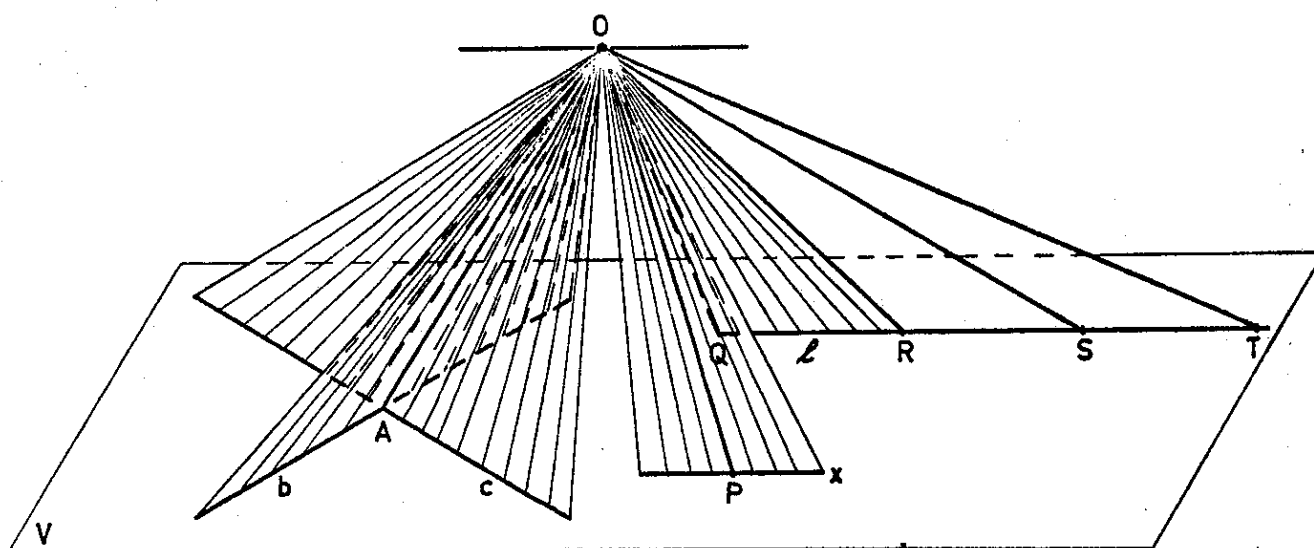


Figuur 3.

Wij zien meteen dat twee stokken door één schutting kunnen worden verbonden, dat twee schuttingen elkaar volgens een stok snijden of evenwijdig zijn, en dat door een stok buiten een schutting precies één daaraan evenwijdige schutting gaat. Verder is het direct duidelijk wat wij bedoelen met de begrippen afstand tussen twee stokken en hoek tussen twee schuttingen. Laten wij maar ophouden, de meetkunde van stokken en schuttingen is precies de eerde genoemde euklidische vlakke meetkunde. Het doet er niet toe of wij over punten en rechten, dan wel over stokken en schuttingen spreken. Zelfs zouden de stokken en schuttingen eenvoudig punten en rechten kunnen worden genoemd.

Vervolgens gaan wij onze euklidische meetkunde op nog een andere manier bekijken en om deze manier draait ons verhaal.

Wij plaatsen ons oog in een boven het euklidische vlak V gelegen punt O . De rechte lijnen door O heten *stralen*, (denk maar aan lichtstralen; wij bedoelen echter de hele lijn die zo'n lichtstraal draagt). De punten van V zien wij volgens zulke stralen, de rechten van V volgens vlakken. Zo'n verbindingsvlak heet een *waaier* (namelijk waaier van de stralen die O verbinden met de punten van de rechte)



Figuur 4.

Wij constateren dat twee stralen Q en R door één waaier l kunnen worden verbonden. De waaiers b en c snijden volgens de straal A . De waaiers l en x snijden echter volgens een horizontale straal. Als wij zulke waaiers evenwijdig noemen, dan gaat door een straal buiten een waaier precies één daaraan evenwijdige waaier. Weer zien wij dat meetkunde van stralen en waaiers de euklidische vlakke meetkunde is.

Of wij nu spreken over stokken en schuttingen, over punten en rechten, of over stralen en waaiers, het is allemaal om het even, mits wij maar goed definiëren wat wij onder evenwijdigheid, afstanden en hoeken verstaan. Wat dit laatste betreft beschouwen wij ons stralenmodel nog wat nader en merken wij twee eigenaardigheden op die typisch zijn voor de euklidische vlakke meetkunde.

Met elk punt van V correspondeert een straal en met elke rechte een waaier. Omgekeerd correspondeert met elke straal een punt V , behalve met de horizontale. Voorts correspondeert met elke waaier een rechte, behalve met de horizontale. Die uitzonderingen zijn opvallend.

Nog iets eigenaardigs. Beschouw in figuur 4 de oneindige rij punten Q, R, S, T, \dots op ℓ zodat $QR = RS = ST = \dots$. De bijbehorende stralen OQ, OR, OS, OT, \dots maken geen gelijke hoeken en naderen tot een horizontale straal.

Van stralenstandpunt bekeken zou het veel eenvoudiger zijn als alle stralen gelijkwaardig zouden zijn. Voorts zou het fraaiër zijn als wij voor de afstand van twee stralen konden nemen de hoek ertussen. Dan zouden wij geen uitzonderingen als nu de horizontale stralen behoeven te maken en dan zouden wij geen ingewikkelde stralenmaat hebben. Van stralenstandpunt bekeken is de euclidische vlakke meetkunde een ingewikkelde aangelegenheid.

2.3. Het elliptische vlak

Wij gaan een nieuwe meetkunde opbouwen, waarin sommige stellingen overeenkomen met stellingen uit de euclidische meetkunde, maar andere daarvan afwijken. Daartoe worden de hierbovengenoemde suggesties uitgevoerd. Wij beschouwen alle stralen door het vaste punt O , zonder uitzondering, en definiëren als afstand tussen twee stralen de kleinste hoek die door deze stralen wordt gevormd. Wij noemen de stralen *elliptische punten* en de waaiers *elliptische rechten*. Dan is direct duidelijk:

Door twee verschillende elliptische punten gaat precies één elliptische rechte .

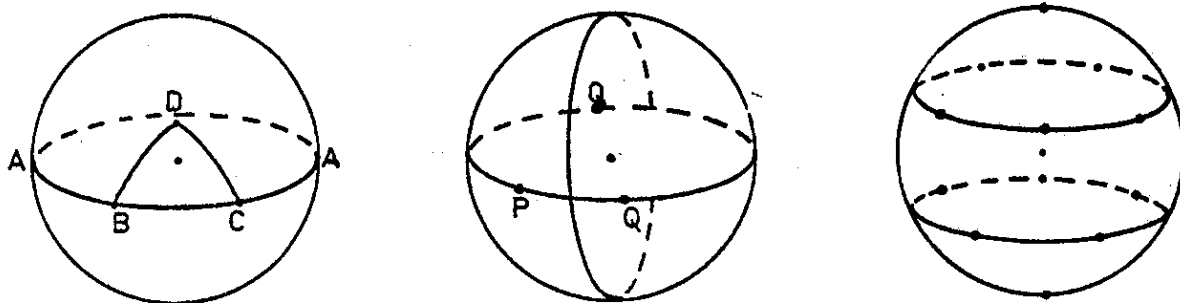
En voorts:

Twee verschillende elliptische rechten hebben precies één elliptisch punt gemeen.

De eerstgenoemde stelling geldt ook in het euclidisch vlak, de laatstgenoemde stelling echter niet! Evenwijdigheid is een begrip dat in de elliptische meetkunde niet voorkomt.

Het vlak V is nu niet meer voldoende om alle elliptische punten, i.e. alle stralen, op te vangen, immers de horizontale stralen, die ook meedoen als elliptische punten, hebben geen snijpunt met V. Wel kunnen wij een stuk van de elliptische meetkunde met V beschrijven. Ook andere stukken die wel met horizontale stralen overeenkomende elliptische punten bevatten, kunnen wij wel beschrijven, namelijk met een ander vlak W.

Een wellicht meer vertrouwd beeld van de elliptische meetkunde is het volgende. Geef elke straal aan door zijn beide snijpunten met een om 0 als middelpunt beschreven bol. Dan wordt een elliptisch punt voorgesteld door een antipodaal^{*)} puntenpaar en een elliptische rechte door een grote cirkel. Zo is de elliptische meetkunde te beschouwen als een soort meetkunde op de bol, met dien verstande dat twee antipodale punten hetzelfde elliptische punt aanduiden. De afstand van twee elliptische punten is dan de kortste van de afstanden langs de bol tussen de beide antipodale puntenparen. Met dit beeld kunnen wij een merkwaardige eigenschap van de elliptische meetkunde inzien: het uit de euklidische meetkunde bekende congruentiegeval ZZZ geldt niet. Immers beschouw

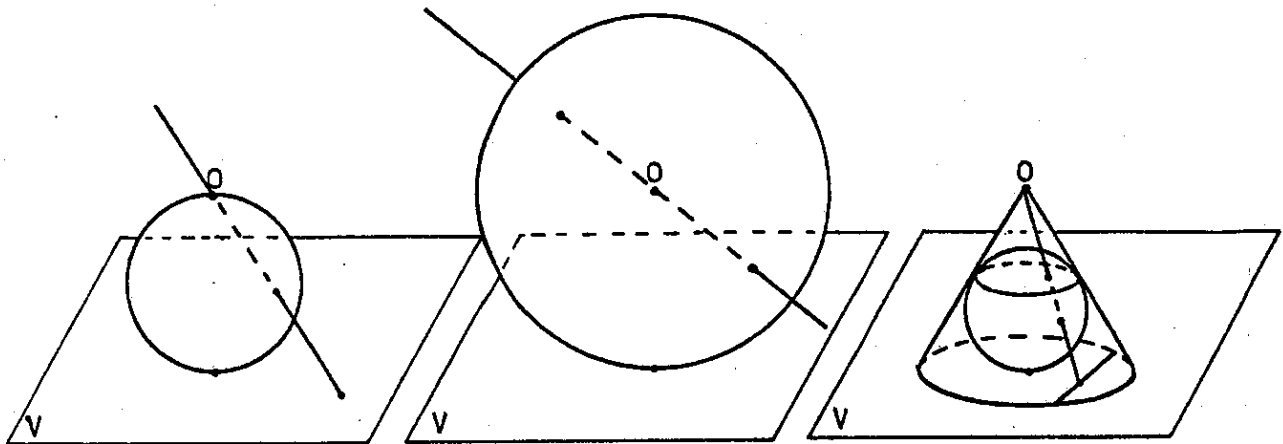


Figuur 5.

op een grote cirkel drie punten A,B,C zodat de afstanden van A en B en van B en C beide $\frac{1}{3} \pi$ zijn. De elliptische afstand van A en C is ook $\frac{1}{3} \pi$. De elliptische drietal A,B,C is dus gelijkzijdig. Het is gemakkelijk een punt D niet op de genoemde grote cirkel te vinden zodat drietal B,C,D eveneens gelijkzijdig is. De twee drietallen hebben dus wél drie zijden gelijk, maar zijn bezwaarlijk als congruente driehoeken te beschouwen. Probeer zelf eens te ontdekken, wat de meetkundige plaats is van de elliptische punten, die tot twee gegeven elliptische punten P en Q gelijke afstand hebben. Probeer verder in te zien, dat er een zestal elliptische punten bestaat met de eigenschap dat de afstand van elk tweetal gelijk is.

^{*)} Antipoden = tegenvoeters

2.4. Het hyperbolische vlak



Figuur 6.

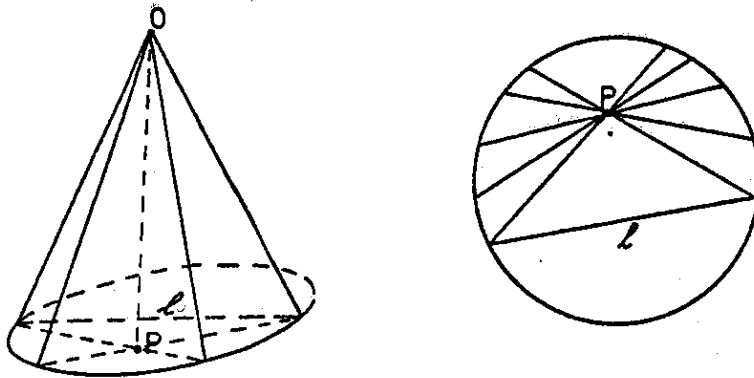
In 2.2 hebben wij gezien hoe de euclidische vlakke meetkunde kan worden opgevat als de meetkunde van de niet-horizontale stralen en waaiers door een punt O . Zo'n straal snijdt de bol, die de loodlijn uit O op V als middellijn heeft, volgens één van O verschillend punt. Zo'n waaier snijdt deze bol volgens een door O gaande cirkel. Ziedaar alweer een manier om het euclidische vlak te beschrijven: de bol met al zijn punten behalve O en met al zijn door O gaande cirkels. Dit is het *bolmodel* van het euclidische vlak.

In 2.3 maakten wij kennis met de elliptische meetkunde van alle stralen en alle waaiers door O . Ook daar ontmoetten wij reeds een bolmodel: de om O als middelpunt geslagen bol met al zijn antipodale puntenparen en al zijn grote cirkels.

De derde te behandelen meetkunde, de hyperbolische meetkunde, is ook een meetkunde van stralen door O . Nu beperken wij ons echter tot de stralen die een onder O gelegen bol in twee verschillende punten snijden, dus tot de stralen die binnen een kegel met top O liggen. Ook de waaiers beperken we tot degenen die de kegel snijden en dan bij elke waaier nog tot het gedeelte dat binnen de kegel ligt. In figuur 6 zijn drie (eigenlijk vier) modellen van het hyperbolische vlak te onderscheiden: de stralen en de waaiers door O voor zover zij binnen de kegel liggen, de punten en de cirkelstukken die zich op één van de beide supplementaire boldelen bevinden, en de punten en de rechten van V voorzover zij zich binnen de grondcirkel van de kegel bevinden stralen, resp. bolpunten, resp. punten van V binnen de grondcirkel heten *hyperbolische punten*. Waaiers resp. cirkelstukken op de bol, resp. koorden van

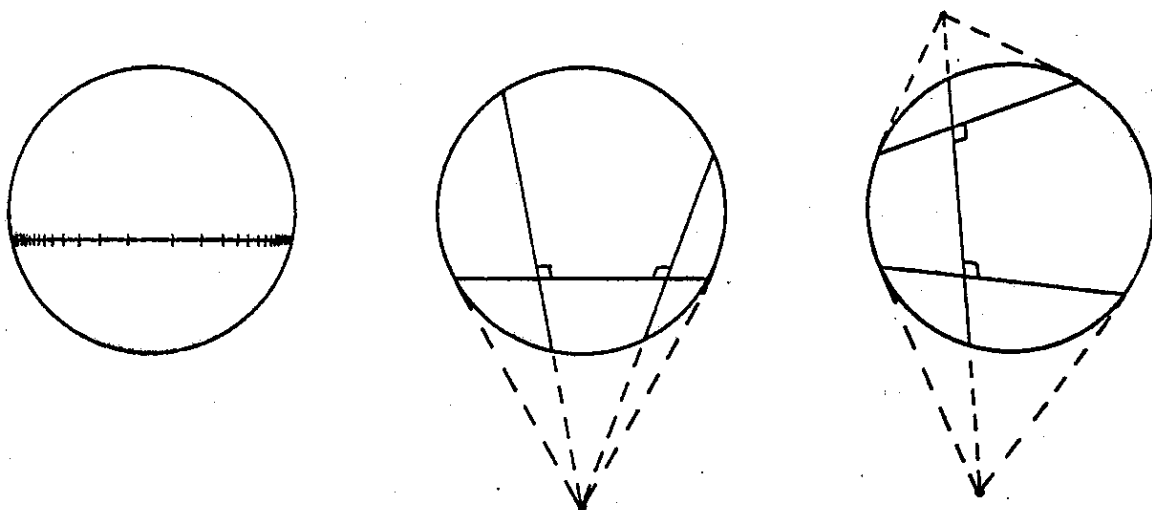
de grondcirkel heten *hyperbolische rechten*. Uit het kegelmodel en nogmaals uit het grondcirkelmodel van figuur 7 volgt nu onmiddellijk de volgende, voor de hyperbolische vlakke meetkunde typische, stelling:

Door een hyperbolisch punt P buiten een hyperbolische rechte l gaan oneindig veel verschillende hyperbolische rechten die de eerstgenoemde rechte niet snijden.



Figuur 7.

Voor de definitie van de hyperbolische afstand van twee hyperbolische punten is hyperbolische analytische meetkunde nodig. Wij laten deze definitie, die verschilt van die voor het euklidische geval, achterwege en beperken ons tot het tekenen, in figuur 8, op een hyperbolische rechte van een groot aantal hyperbolische punten die op gelijke hyperbolische afstand van elkaar liggen. Zo wordt aannemelijk dat een hyperbolische rechte "oneindig lang" is.



Figuur 8.

Ook de hyperbolische hoeken stemmen niet overeen met de euklidische. Zonder nadere uitleg delen wij mee dat twee hyperbolische rechten hyperbolisch loodrecht heten als in het grondcirkelmodel de drager van de ene door de pool van de andere gaat. Het blijkt dan dat elk tweetal niet snijdende hyperbolische rechten een gemeenschappelijke hyperbolische loodrechte hebben.

2.5. Het elliptische vlak op basis van projectieve meetkunde

Beschouw de vectorruimte $V(3, \mathbb{R})$ voorzien van een positief definitief inproduct, dat is een inproduct in de zin van 1.1 met de eigenschap

$$\forall \underline{a} \in V \setminus \{0\} \quad ((\underline{a}, \underline{a}) > 0) .$$

Door beschouwing van de kwadratische vorm

$$(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}, \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda^2 (\underline{a}, \underline{a}) + 2\lambda\mu (\underline{a}, \underline{b}) + \mu^2 (\underline{b}, \underline{b}) \geq 0$$

volgt de ongelijkheid van Schwarz:

$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V \quad ((\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})) .$$

Met behulp van het inproduct willen wij in het projectieve vlak $PG(2, \mathbb{R})$ een afstand definiëren tussen de projectieve punten

$$A = \{\lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{en} \quad B = \{\mu \underline{b} \mid \mu \in \mathbb{R}\} .$$

Hiertoe moet aan de volgende eisen worden voldaan:

- i) Het afstandsbegrip moet afhangen van de projectieve punten A en B, en niet van de keuze van de vectoren \underline{a} op A en \underline{b} op B, m.a.w. het moet invariant zijn t.o.v. de transformaties

$$\underline{a} \rightarrow \lambda \underline{a} \quad \text{en} \quad \underline{b} \rightarrow \mu \underline{b} .$$

- ii) Het afstandsbegrip moet invariant zijn t.o.v. orthogonale lineaire afbeeldingen.
- iii) Het afstandsbegrip moet voeren tot een metrische ruimte.

Vanwege i) en ii) ligt voor de hand een functie van

$$\frac{(\underline{a}, \underline{b})^2}{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})} .$$

Omdat deze uitdrukking wegens de ongelijkheid van Schwarz tussen 0 en 1 ligt, wordt hij als \cos^2 geïnterpreteerd.

Definitie. De *elliptische afstand* van $A = \langle \underline{a} \rangle$ en $B = \langle \underline{b} \rangle$ is

$$d(A,B) := \arccos \frac{|(\underline{a}, \underline{b})|}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}} .$$

Het *elliptische vlak* is het projectieve vlak voorzien van elliptische afstand, de *elliptische punten* zijn de projectieve punten, de *elliptische rechten* zijn de projectieve rechten. Merk op dat $0 \leq d(A,B) \leq \frac{1}{2}\pi$.

Stelling. Het elliptische vlak is een metrische ruimte.

Bewijs. Zij $A = \langle \underline{a} \rangle$, $B = \langle \underline{b} \rangle$, $C = \langle \underline{c} \rangle$, voor eenheidsvectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Noem

$$d(A,B) = r, \quad d(B,C) = p, \quad d(A,C) = q .$$

De eigenschappen $0 \leq d(A,B)$, $0 = d(A,A)$, $d(A,B) = d(B,A)$ zijn triviaal. Wij bewijzen nu de driehoeksongelijkheid. Kies een basis in $V(3, \mathbb{R})$ ten opzichte waarvan het inproduct luidt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\underline{a}, \underline{b}) & (\underline{a}, \underline{c}) \\ (\underline{b}, \underline{a}) & 1 & (\underline{b}, \underline{c}) \\ (\underline{c}, \underline{a}) & (\underline{c}, \underline{b}) & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \pm \cos r & \pm \cos q \\ \pm \cos r & 1 & \pm \cos p \\ \pm \cos q & \pm \cos p & 1 \end{bmatrix} .$$

Neem determinanten, dan volgt

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos r & \cos q \\ \cos r & 1 & \cos p \\ \cos q & \cos p & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos r & \cos q \\ \cos r & 1 & -\cos p \\ \cos q & -\cos p & 1 \end{vmatrix} \geq 0 ,$$

met het gelijkteken dan en slechts dan als A, B, C op een elliptische rechte ($\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in een vlak) liggen. Nu geldt

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos r & \cos q \\ \cos r & 1 & \cos p \\ \cos q & \cos p & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r + 2 \cos p \cos q \cos r =$$

$$= -\cos^2 p - \frac{1}{2}(\cos 2q + \cos 2r) + \cos p(\cos(q+r) + \cos(q-r)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\cos^2 p - \cos(q+r)\cos(q-r) + \cos p \cos(q+r) + \cos p \cos(q-r) = \\
 &= (\cos(q+r) - \cos p)(\cos p - \cos(q-r)) = \\
 &= 4 \sin \frac{1}{2}(p+q+r) \sin \frac{1}{2}(-p+q+r) \sin \frac{1}{2}(p-q+r) \sin \frac{1}{2}(p+q-r).
 \end{aligned}$$

Stel nu dat $0 \leq r \leq q \leq p \leq \frac{1}{2}\pi$, dan volgt $-p + q + r \geq 0$, en dit is de driehoeksongelijkheid. In geval de tweede determinant ≥ 0 is, volgt dat de eerste determinant ≥ 0 is en weer geldt de driehoeksongelijkheid.

Opmerking. Als de tweede determinant ≥ 0 is, dan geldt (vervang p door $\pi - p$):

$$4 \sin \frac{1}{2}(\pi - p + q + r) \sin \frac{1}{2}(p - \pi + q + r) \sin \frac{1}{2}(\pi - p - q + r) \sin \frac{1}{2}(\pi - p + q - r) \geq 0,$$

$$-4 \cos \frac{1}{2}(p - q - r) \cos \frac{1}{2}(p + q + r) \cos \frac{1}{2}(p - q + r) \cos \frac{1}{2}(p + q - r) \geq 0,$$

dus $p + q + r \geq \pi$, $p + q \geq \pi - r \geq r$.

Voorbeeld. Zij $p = q = r = \frac{1}{3}\pi$, dan

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Opmerking. Uit 3 getallen $\neq \frac{1}{2}\pi$ met som $\geq \pi$ zijn twee niet-congruente elliptische driehoeken te maken. Uit 3 getallen met som $< \pi$ is slechts één elliptische driehoek te maken. (Dit zijn niet-triviale uitspraken.)

Wij zullen twee elliptische rechten *loodrecht* noemen wanneer de bijbehorende vlakken in $V(3, \mathbb{R})$ loodrecht zijn. Voor de elliptische rechten die corresponderen met de vlakken $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ betekent dit dat

$$(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Voorbeeld. Twee verschillende elliptische punten hebben twee middelloodlijnen, die beide loodrecht staan op de elliptische rechte door de elliptische punten. Inderdaad, opdat voor gegeven $P = \langle \underline{p} \rangle$, $Q = \langle \underline{q} \rangle$ met eenheidsvectoren \underline{p} en \underline{q} geldt dat $d(P, X) = d(Q, X)$, moet $X = \langle \underline{x} \rangle$ voldoen aan

$$|(\underline{p}, \underline{x})| = |(\underline{q}, \underline{x})|,$$

$$(\underline{p}, \underline{x}) = (\underline{q}, \underline{x}) \quad \text{of} \quad (\underline{p}, \underline{x}) = -(\underline{q}, \underline{x}),$$

$$(\underline{p} - \underline{q}, \underline{x}) = 0 \quad \text{of} \quad (\underline{p} + \underline{q}, \underline{x}) = 0.$$

Het elliptische snijpunt van de middelloodlijnen ligt op afstand $\pi/2$ van P en van Q.

2.6. Het hyperbolische vlak op basis van projectieve meetkunde

Beschouw nu \mathbb{R}^3 voorzien van een indefiniet inproduct, door voor elk paar $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ te definiëren

$$(\underline{a}, \underline{b}) := -a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Dit is een inproduct in de zin van 1.1. De verzameling

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\underline{x}, \underline{x}) = 0\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$$

is een kegel K. Binnen K geldt $(\underline{x}, \underline{x}) > 0$, en buiten K geldt $(\underline{x}, \underline{x}) < 0$. Laat \underline{a} en \underline{b} twee vectoren binnen K voorstellen. De kwadratische vorm

$$(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}, \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda^2 (\underline{a}, \underline{a}) + 2\lambda\mu (\underline{a}, \underline{b}) + \mu^2 (\underline{b}, \underline{b})$$

is > 0 , $= 0$, < 0 wanneer $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ opvolgend binnen, op of buiten K ligt. Hieruit volgt

Stelling. Voor \underline{a} en \underline{b} binnen K geldt

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \geq (\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b}) .$$

Met behulp van dit inproduct willen wij een afstand definiëren tussen de binnen de kegel gelegen projectieve punten $A = \langle \underline{a} \rangle$ en $B = \langle \underline{b} \rangle$. Weer willen wij dat het afstandsbegrip voldoet aan de eisen i), ii) en iii) van 2.5. Vanwege i) en ii) ligt weer voor de hand een functie van

$$\frac{(\underline{a}, \underline{b})^2}{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})} .$$

Omdat deze uitdrukking ≥ 1 is, wordt hij als \cosh^2 geïnterpreteerd.

Wij definiëren nu als volgt. Een *hyperbolisch punt* is een projectief punt binnen de kegel. Een *hyperbolische rechte* is een projectieve rechte voor zover hij binnen de kegel ligt. De *hyperbolische afstand* tussen twee hyperbolische punten $A = \langle \underline{a} \rangle$ en $B = \langle \underline{b} \rangle$ is

$$d(A, B) := \operatorname{arcosh} \frac{|(\underline{a}, \underline{b})|}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}} .$$

Het *hyperbolische vlak* bestaat uit de hyperbolische punten en rechten, voorzien van hyperbolische afstand.

Opmerking. Door geschikte keuze van de vectoren op dragers $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kunnen wij zorgen dat $a_3 > 0$ en $b_3 > 0$, zodat $(\underline{a}, \underline{b}) > 0$. Onder deze keuze kunnen wij volstaan met de definitie

$$d(A, B) := \operatorname{arcosh} \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}} .$$

Merk op dat deze uitdrukking niet is gedefinieerd voor vectoren op de kegel. Voor een rij vectoren $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n, \dots$ die convergeert naar een vector op de kegel, geldt $d(A, B_n) \rightarrow \infty$. Daarom geldt

$$0 \leq d(A, B) < \infty, \quad d(A, A) = 0, \quad d(A, B) = d(B, A) .$$

Stelling. Het hyperbolische vlak is een metrische ruimte.

Bewijs. Analoog aan het elliptische geval, wederom met eenheidsvectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ geldt

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\underline{a}, \underline{b}) & (\underline{a}, \underline{c}) \\ (\underline{a}, \underline{b}) & 1 & (\underline{b}, \underline{c}) \\ (\underline{a}, \underline{c}) & (\underline{b}, \underline{c}) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{ch} r & \operatorname{ch} q \\ \operatorname{ch} r & 1 & \operatorname{ch} p \\ \operatorname{ch} q & \operatorname{ch} p & 1 \end{bmatrix} .$$

$$0 \leq 4 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(p+q+r) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(-p+q+r) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(p-q+r) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(p+q-r) .$$

Hieruit volgt de driehoeksongelijkheid.

Wij zullen twee hyperbolische rechten *loodrecht* noemen wanneer voor de bijbehorende vlakken in \mathbb{R}^3

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

geldt dat

$$(\underline{a}, \underline{b}) = -a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

Het hyperbolische vlak heeft een eenvoudig model in het vlak $x_3 = 1$, waarin de punten $(x_1, x_2, 1)$ genoteerd worden als (x, y) . De hyperbolische punten zijn dan de punten binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. De hyperbolische rechten zijn de koorden van deze cirkel.

Stelling. Twee hyperbolische rechten zijn loodrecht wanneer de ene rechte gaat door de pool ten opzichte van $x^2 + y^2 = 1$ van de andere rechte.

Bewijs. Geef de rechten aan door de vergelijkingen

$$l: a_1x + a_2y + a_3 = 0; m: b_1x + b_2y + b_3 = 0.$$

De pool van l ten opzichte van $x^2 + y^2 = 1$ is het punt

$$(-a_1/a_3, -a_2/a_3).$$

Deze pool ligt op m wanneer

$$b_1(-a_1/a_3) + b_2(-a_2/a_3) + b_3 = 0,$$

$$-a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

dus wanneer $l \perp m$, en omgekeerd.

Opmerking. Men kan de punten van het elliptische vlak met parameter r voorstellen als antipodale paren op de sfeer met straal r in \mathbb{R}^3 . De elliptische afstand van twee elliptische punten is dan de lengte van de kortste boog, dat is $r\alpha$ als α de hoek is van de door de elliptische punten bepaalde diagonalen. Evenzo kan men de punten van de elliptische ruimte met parameter r voorstellen als antipodale paren op de sfeer met straal r in \mathbb{R}^4 . Weer is de elliptische afstand de lengte $r\alpha$ van de kortste boog. De afstanden worden groter evenredig met de straal van de sfeer. Dit leidt tot het wereldbeeld van het uitdijend heelal, dat oorspronkelijk door de oerknal is ontstaan uit een samengeperste klomp materie, 15 miljard jaar geleden. Zo komt de elliptische meetkunde voor in de theoriën van Lemaitre, Hubble, Gamow, en de Nobelprijswinnaars 1978 Wilson en Penzias.

Ook de hyperbolische meetkunde is toepasbaar, o.a. in de relativiteitstheorie.

Hoofdstuk 3. Meerdimensionale meetkunde

3.1. Stereografische projectie

Zij S^2 het boloppervlak in \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

met noordpool $NP = (0,0,1)$. Zij \mathbb{R}^2 het grondvlak van \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^2 = \{(u,v) \mid (u,v,0) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Definieer de afbeelding $\varphi: S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ door

$$\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) =: (u,v).$$

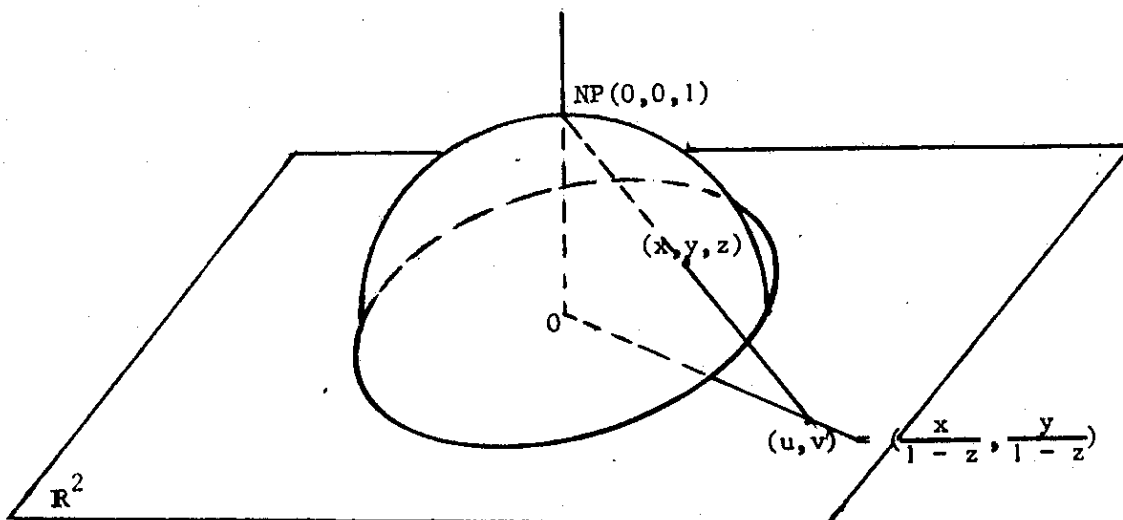
De afbeelding φ is inverteerbaar, dat is, $\varphi^{-1}(u,v)$ is eenduidig bepaald. Om dat in te zien merken wij op dat

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1.$$

Bij gegeven (u,v) is dus z , en daarom ook (x,y,z) bepaald. Merk op dat de punten

$$(x,y,z), \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right), (0,0,1)$$

op één rechte liggen.



3.2. Cirkelmeetkunde van Möbius

Voeg aan \mathbb{R}^2 toe één punt ∞ , en interpreteer het verkregen vlak als het complexe vlak \mathbb{C} . Breid de afbeelding φ uit door $\varphi(NP) = \infty$. Dan is de uitgebreide φ een 1-1 afbeelding van S^2 op \mathbb{C} . Bij deze afbeelding corresponderen de cirkels van S^2 door NP met de rechten van \mathbb{R}^2 , en de cirkels van S^2 niet door NP met de cirkels van \mathbb{R}^2 . De eerste bewering is duidelijk. De tweede bewering volgt uit de equivalentie van

$$u^2 + v^2 + 2au + 2bv + c = 0, \quad \frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + \frac{2ax}{1-z} + \frac{2by}{1-z} + c = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + c(1-z)^2 = 0,$$

$$1 + z + 2ax + 2by + c(1-z) = 0,$$

wegens $x^2 + y^2 = 1 - z^2$.

Zo'n cirkelmeetkunde is rijker in eigenschappen dan een rechtenmeetkunde.

Confronteer de volgende eigenschappen:

door 3 punten gaat één cirkel,
2 cirkels snijden in ten hoogste 2 punten,
geg. cirkel γ , punt P erop, punt Q erbuiten, dan is er één cirkel door P en door Q, die geen verdere punten met γ gemeen heeft.

door 2 punten gaat één rechte,
2 rechten snijden in ten hoogste 1 punt,
geg. rechte l , punt Q erbuiten, dan is er één rechte door Q, die l niet snijdt.

Het verband met de projectieve vlakke meetkunde over \mathbb{R} kan worden ingezien door beschouwing van de stralen door NP, en hun doorsnijdingen (en de oneigenlijke punten) met \mathbb{R}^2 .

3.3. Vezelingen

Twee verschillende grote cirkels op de sfeer S^2 in \mathbb{R}^3 hebben twee (antipodale) punten gemeen. Daarom is het niet mogelijk om een familie grote cirkels op S^2 aan te geven zodanig dat door elk punt van S^2 precies één grote cirkel van de familie gaat. Wij zullen aantonen dat zulk een "vezeling" met grote cirkels voor de sfeer S^3 in \mathbb{R}^4 wel mogelijk is.

Wij bespreken eerst een algebraïsch hulpresultaat. Beschouw de volgende stelsels

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ y = 2(x_2x_3 - x_1x_4) \\ z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xx_4 + yx_3 + (z-1)x_2 = 0 \\ xx_3 - yx_4 + (z-1)x_1 = 0 \end{cases}$$

waarin x_1, x_2, x_3, x_4 gebonden zijn door

$$(3) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 .$$

Door (1) worden x, y, z expliciet voorgesteld als functies van x_1, x_2, x_3, x_4 .

Door (2) worden x, y, z impliciet voorgesteld als functies van x_1, x_2, x_3, x_4 .

Wij tonen aan dat deze voorstellingen dezelfde zijn.

(1) \rightarrow (2): Substitueer x, y, z uit (1) in (2), gebruik (3), dan ontstaan identiteiten in x_1, x_2, x_3, x_4 .

(2) \rightarrow (1): Merk eerst op dat $(x, y, z) = (0, 0, 1) =: N$ voldoet aan alle vergelijkingen van (2). Voor gegeven x_1, x_2, x_3, x_4 worden de oplossingen x, y, z van (2) in \mathbb{R}^3 voorgesteld door de doorsnede (x, y, z) van een sfeer en één of twee vlakken. Voor $x_3 = x_4 = 0$ is er slechts één vlak; dit vlak raakt de sfeer in het punt N . Anders zijn er twee vlakken; de snijlijn van deze vlakken snijdt de sfeer in N en in precies één ander punt (x, y, z) . De gevraagde expliciete voorstelling (1) van x, y, z als functies van x_1, x_2, x_3, x_4 wordt nu uit (2) gevonden door dat andere punt voor $(x_3, x_4) \neq (0, 0)$, en door N voor $(x_3, x_4) = (0, 0)$.

Na dit algebraïsche hulpresultaat construeren wij de aangekondigde vezeling.

In \mathbb{R}^3 , met coördinaten (x, y, z) , zij gegeven de sfeer

$$S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} .$$

In \mathbb{R}^4 , met coördinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) zij gegeven de sfeer

$$S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} .$$

Zij de afbeelding $\varphi: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijkingen van (1). Wij concluderen nu achtereenvolgens:

- a) $\varphi(S^3) \subset S^2$. Dit volgt uit de eerste vergelijking van (2).
- b) $\varphi^+(0,0,1) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 = x_4 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, een grote cirkel op S^3 . Dit volgt uit (1).
- c) Voor $(x, y, z) \in S^2$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$ is $\varphi^+(x, y, z)$ een grote cirkel op S^3 . Inderdaad, met de gegeven x, y, z interpreteren wij (2) en (3) in \mathbb{R}^4 als twee hypervlakken door de oorsprong en de sfeer S^3 . Deze snijden in een grote cirkel.
- d) $\varphi(S^3) = S^2$. Dit volgt uit b) en c).
- e) Voor $(x, y, z) \neq (x', y', z')$, beide op S^2 , geldt $\varphi^+(x, y, z) \cap \varphi^+(x', y', z') = \emptyset$. Inderdaad, zou de doorsnede een punt (x_1, x_2, x_3, x_4) bevatten, dan zou $(x, y, z) = (x', y', z')$ volgens (1).
- f) S^3 is de vereniging van disjuncte grote cirkels $\varphi^+(x, y, z)$, voor $(x, y, z) \in S^2$. Inderdaad, elke $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ heeft één (x, y, z) als beeld, en ligt op één grote cirkel $\varphi^+(x, y, z)$. Wij zeggen dat S^3 gevezeld is, met de grote cirkels als vezels (H. Hopf, 1935).

Opmerking. Als \mathbb{R}^4 wordt opgevat als de faseruimte van een 2-dimensionale isotrope harmonische oscillator met frequentie $\omega = 1$, dan geeft S^3 precies de verzameling van toestanden met energie $E = 1$ weer.

De grote cirkels op S^3 zijn de mogelijke trajecten met energie $E = 1$. Deze grote cirkels kunnen gekarakteriseerd worden door de getallen a , $0 \leq a \leq 1$ en b , $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$ met de volgende fysische betekenis: $a =$ de energie in de x -richting, $1 - a =$ de energie in de y -richting, $b =$ het impulsmoment

$$x^2 + p^2 = a, \quad y^2 + q^2 = 1 - a, \quad xq - yp = b.$$

3.4. Regelmatige polytopen in \mathbb{R}^n

De standaardbasis B_n in \mathbb{R}^n bestaat uit de vectoren $\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

Wij definiëren de regelmatige polytopen in \mathbb{R}^n door de verzameling van hun hoekpunten:

een *kubus* γ_n door $\left\{ \sum_{i=1}^n \epsilon_i \underline{e}_i \mid \epsilon_i \in \{0, 1\}, \underline{e}_i \in B_n \right\}$,

een *kruispolytoop* β_n door $\{ \pm \underline{e}_i \mid \underline{e}_i \in B_n \}$,

een *simplex* α_n door $\{ \underline{e}_i \mid \underline{e}_i \in B_{n+1} \}$.

γ_1 is een lijnstuk, γ_2 een vierkant, γ_3 een gewone kubus; γ_n heeft 2^n hoekpunten. Soms werkt men handiger met

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \eta_i \underline{e}_i \mid \eta_i \in \{1, -1\}, \underline{e}_i \in B_n \right\}.$$



β_1 is een lijnstuk, β_2 een vierkant, β_3 een regelmatig achthoek; β_n heeft $2n$ hoekpunten.

α_1 is een lijnstuk, α_2 een gelijkzijdige driehoek, α_3 een regelmatig vierhoek; α_n is n -dimensionaal, want ligt in

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1.$$

Elk van α_n , β_n , γ_n heeft een omgeschreven bol. De verhouding van straal tot ribbe is, respectievelijk,

$$\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ als } n > 1 \text{ en } \frac{1}{2} \text{ voor } n = 1, \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Dit is triviaal voor β_n . Voor γ_n gebruikte men de tweede voorstelling. Voor α_n is $(1, 1, \dots, 1)/(n+1)$ het middelpunt, $\sqrt{1 - 1/(n+1)}$ de straal, en $\sqrt{2}$ de ribbe.

Er bestaat een eenvoudig verband tussen β_n en γ_n . Met de tweede voorstelling van γ_n ziet men het volgende in:

de middens van de grens γ_{n-1} van γ_n vormen een β_n ,
de middens van de grens α_{n-1} van β_n vormen een γ_n .

Wij tellen het aantal $N(n, k)$ der grenspolytopen van dimensie k van een regelmatig polytoop van dimensie n .

α_n heeft $n+1$ hoekpunten, $\binom{n+1}{2}$ ribben, $\binom{n+1}{3}$ driehoeken, $\binom{n+1}{4}$ viervlakken. Het aantal grens α_k in α_n is

$$N(n, k) = \binom{n+1}{k+1}, \text{ voor } 0 \leq k \leq n-1.$$

Dit getal is precies de coëfficiënt van x^{k+1} in de ontwikkeling van $(1+x)^{n+1}$. β_n heeft slechts grens α_k , en hun aantal is

$$N(n, k) = 2^{k+1} \binom{n}{k+1}, \text{ voor } 0 \leq k \leq n-1,$$

dat is, de coëfficiënt van x^{k+1} in de ontwikkeling van $(1+2x)^n$.

Bewijs. Kies $k+1$ coördinaatassen; dit kan op $\binom{n}{k+1}$ manieren. Kies op elk der gekozen coördinaatassen één van de 2 basisvectoren; dit kan op 2^{k+1} manieren. Nu ligt de grens α_k vast.

γ_n heeft slechts grens γ_k , en hun aantal is

$$N(n,k) = 2^{n-k} \binom{n}{k}, \quad \text{voor } 0 \leq k \leq n,$$

dat is, de coëfficiënt van x^k in de ontwikkeling van $(2+x)^n$.

Bewijs. Kies k coördinaatassen; dit kan op $\binom{n}{k}$ manieren. Kies op elk der niet-gekozen coördinaatassen één van de 2 basisvectoren; dit kan op 2^{n-k} manieren. Nu ligt de grens γ_k vast.

Samenvattend concluderen wij

$$\sum_{k=0}^{n-1} N(n,k)x^{k+1} = \begin{cases} (1+x)^{n+1} - x^{n+1} - 1 & \text{voor } \alpha_n, \\ (1+2x)^n - 1 & \text{voor } \beta_n, \\ x(2+x)^n - x^{n+1} & \text{voor } \gamma_n. \end{cases}$$

Substitueer $x = -1$, dan volgt in elk der gevallen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} N(n,k)(-1)^{k+1} = (-1)^n - 1,$$

$$N(n,0) - N(n,1) + \dots + (-1)^{n-1} N(n,n-1) = 1 - (-1)^n.$$

Dit is de *formule van Euler voor regelmatige polytopen in \mathbb{R}^n* .

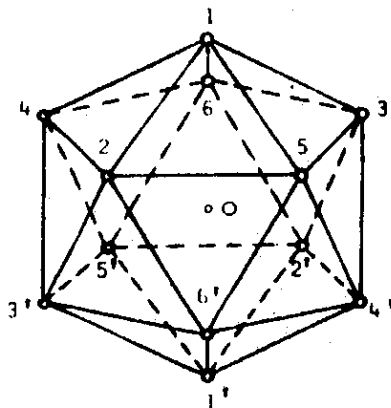
Wij zullen later zien dat er ook een formule van Euler voor niet-regelmatige polytopen bestaat.

3.5. De Icosaëder en de Voetbal*)

Introduction.

As a polytope, the football with its black pentagons and white hexagons is a truncated icosahedron. Its edges have equal length, its 5-gons and 6-gons are regular, so it seems that its 60 vertices provide a "good" approximation for the sphere. However, in the present paper it turns out that among the orbits of the icosahedral group the current football is nothing special. On the contrary, we show that there exists an "improved" football whose 60 vertices provide a "better" approximation for the sphere. After some preliminaries about the icosahedral group and its orbits we define the strength t of an approximation in section 4. The tools to investigate this notion are provided by the theory of invariants, which in the case of finite real reflection groups is well-known. The present observation is part of a more general investigation concerning spherical designs and cubature formulae, cf. [4], [6].

The icosahedron.



The icosahedron is one of the Platonic regular polytopes. It has 12 vertices, 30 edges and 20 triangular faces. The vertices are pairwise antipodal with respect to the centre, and the 6 diagonals connecting antipodal vertices are equiangular, that is, each pair of diagonals has the same angle. The reader should verify these facts from a model of the icosahedron. In terms of coordinates the vertices may be given by the following set of 12 unit vectors :

*) J.M. Goethals, J.J. Seidel, The Football, Nieuw Archief voor Wiskunde 29 (1981), 50-58.

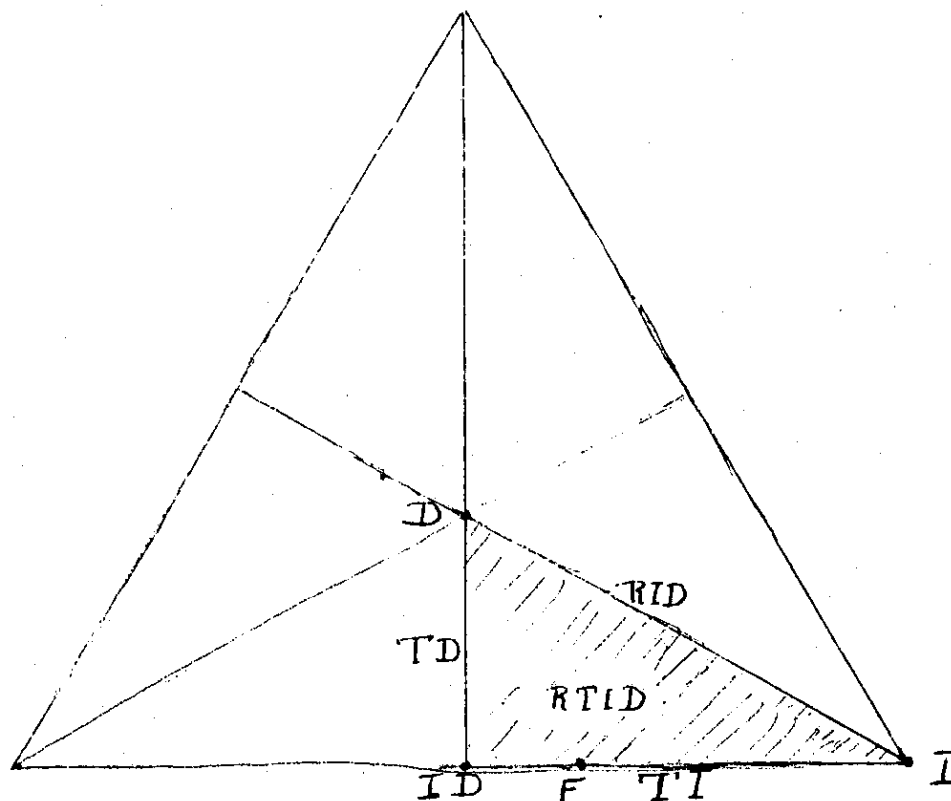
Zie ook bijlage 2.

$$X = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ (\pm\tau^{1/2}, \pm\tau^{-1/2}, 0), (\pm\tau^{-1/2}, 0, \pm\tau^{1/2}), (0, \pm\tau^{1/2}, \pm\tau^{-1/2}) \}.$$

Here $I = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 2 \cos \pi/5$ is the golden ratio.

We shall be concerned with the symmetry group I_3 of the icosahedron, that is, the group of the orthogonal transformations of 3-space which map the vertex set X onto itself. This group contains 6×4 rotations around diagonals, 10×2 rotations around faces, 15×1 rotations around edges and the identity, so 60 rotations altogether. In addition, there are 60 reflections generated by the rotations and the reflection of the icosahedron in its centre. Hence there are 120 symmetries of the icosahedron, constituting the full icosahedral group I_3 . It is well-known that I_3 is isomorphic to the direct product $C(2) \times \text{Alt}(5)$ of the cyclic group of order 2 and the alternating group of order 60, cf. [7],[2].

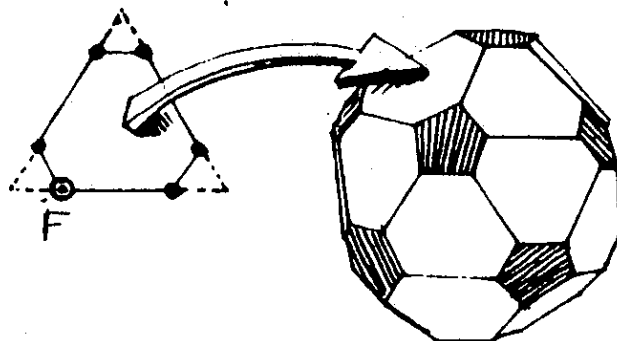
Orbits.



We fix the vertex set X of the icosahedron and consider the orbits under the group I_3 of various points of the unit sphere. To that end it suffices to consider the orbits of the points in one sixth of a triangular face of X .

The orbits fall into the following classes, named after the corresponding semi-regular convex polytopes with n vertices, $([1],[2],[9])$.

- I = icosahedron ; $n = 12$; only 3-gons.
- D = dodecahedron ; $n = 20$; only 5-gons.
- ID = icosidodecahedron ; $n = 30$; 3-gons, 5-gons.
- TI = truncated icosahedron ; $n = 60$; 5-gons, 6-gons.
- TD = truncated dodecahedron ; $n = 60$; 3-gons, 10-gons.
- RID = rhombicosidodecahedron ; $n = 60$; 3-gons, 4-gons, 5-gons.
- RTID = rhombitruncated icosidodecahedron ; $n = 120$; 4-gons, 6-gons, 10-gons.



The orbit of any point F of an edge of X consists of the 60 vertices of a truncated icosahedron, whose faces are regular pentagons and (not necessarily regular) hexagons. If F is at $1/3$ of the edge of X , then these faces are regular pentagons and regular hexagons, and we recognize the 60 vertices of the football.

The considerations above deal with group-orbits in space. Also in the plane we may consider orbits under a group.



Let H_5 denote the group of the 10 symmetries of the regular pentagon Y . The orbit under H_5 of any point x_0 consists of 10 points. It is possible to choose the starting point x_0 in such a way that the orbit forms a regular 10-gon.

Approximation of strength t.

How well is the sphere approximated by a finite point set? To answer this question we need a criterion. Recall that the k-th moments of a vector $\underline{x} = (x, y, z)$ with respect to the origin are the monomials $x^a y^b z^c$ of total degree $k = a + b + c$ in x, y, z . There are $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$ such moments. Indeed, the k-th moments are described by putting $k + 2$ marks in a row and crossing out any two of them (yielding $a + b + c = k$).

Our criterion for the approximation of strength t of the unit sphere Ω by a finite point set X will be that the k-th moments of X equal the k-th moments of Ω , that is,

$$|X|^{-1} \sum_{\underline{x} \in X} x^a y^b z^c = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \xi^a \eta^b \zeta^c d\omega(\underline{\xi}),$$

for $a + b + c = k, k = 1, 2, \dots, t$. Thus, we require X and Ω to have the same mass ($t = 0$), the same centre of gravitude ($t = 1$), the same inertia-ellipsoid ($t = 2$), etc., cf. [4],[6].

We prefer to state the criterion as follows, in terms of the linear space $\text{Pol}(t)$ of the polynomials in 3 variables of total degree not exceeding t, for which a basis is provided by the monomials $x^a y^b z^c$ with $a + b + c \leq t$.

Definition. A finite subset X approximates the unit sphere Ω with strength t if

$$|X|^{-1} \sum_{\underline{x} \in X} f(\underline{x}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\underline{\xi}) d\omega(\underline{\xi})$$

holds for all $f \in \text{Pol}(t)$.

In section 7 we shall find the strength of various orbits under the group I_3 . Our definition also applies to finite subsets of the unit circle in \mathbb{R}^2 .

It follows that the set Y of the vertices of a regular pentagon has strength 4. Indeed, in order to check whether

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\cos \frac{2\pi i}{5} \right)^a \left(\sin \frac{2\pi i}{5} \right)^b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi)^a (\sin \varphi)^b d\varphi$$

holds for $a + b \leq 4$, it suffices to observe that

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \cos \frac{2\pi ki}{5} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \, d\varphi$$

holds for $k \not\equiv 0 \pmod{5}$.

Invariants.

A finite subgroup G of the orthogonal group acts on the points $\underline{\xi}$ of the unit sphere Ω by

$$G \ni g : \underline{\xi} \rightarrow g(\underline{\xi}),$$

and on polynomials f restricted to Ω by

$$G \ni g : f \rightarrow f^g, \text{ where } f^g(\underline{\xi}) := f(g(\underline{\xi})).$$

Thus, we have a representation of G in the linear space $\text{Pol}(t)$, for any t . A polynomial f restricted to Ω is called G-invariant whenever $f^g = f$ for all $g \in G$. A trivial example is provided by the inner product $(\underline{\xi}, \underline{\xi})$; trivial indeed, since it is an invariant for the full orthogonal group. Another example of a G -invariant is provided by the average \bar{f} over the group G of any polynomial f :

$$\bar{f} = \text{ave}_G f := |G|^{-1} \sum_{g \in G} f^g.$$

In fact, every G -invariant equals its own average, hence is of this form. Let us go back to the criterion of section 4. For the orbit X_0 under G of any $\underline{x}_0 \in \Omega$ we have

$$|X_0|^{-1} \sum_{\underline{x} \in X_0} f(\underline{x}) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(g(\underline{x}_0)) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f^g(\underline{x}_0) = \bar{f}(\underline{x}_0).$$

Therefore, our criterion for the orbit X_0 to have strength t reads

$$f(\underline{x}_0) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\underline{\xi}) \, d\omega(\underline{\xi}),$$

for all $f \in \text{Pol}^G(t)$. Here $\text{Pol}^G(t)$ denotes the linear space of the G -invariant polynomials of degree $\leq t$. Clearly, our criterion works for trivial invariants such as $(\underline{\xi}, \underline{\xi})$. However, for a more complete answer we need the theory of invariants of finite subgroups of the orthogonal group.

The dihedral group of order 10.

As a first example we consider the group G of the symmetries of the regular pentagon. From the general theory, cf. [3], [5], [8], it follows that the G -invariant polynomials are $\cos 5k\varphi$ (a polynomial of degree $5k$ in $\cos \varphi$ and $\sin \varphi$) for $k = 0, 1, 2, \dots$. For $k = 0$ we have a constant hence trivial polynomial. Since the first nontrivial polynomial $\cos 5\varphi$ has degree 5, two conclusions may be drawn (which we have seen earlier in section 4).

For degree less than 5, the only G -invariant polynomials are constants, which trivially satisfy our criterion. Therefore, every G -orbit has strength 4. This conclusion does not hold for degree 5, since the non-trivial G -invariant $\cos 5\varphi$ spoils things. However, if the orbit is chosen such that

$$\cos 5\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \pi/10,$$

then the criterion is satisfied for polynomials of degree < 10 . Hence the corresponding orbit (which constitutes a regular 10-gon) has strength 9. Thus, knowledge of the G -invariants helps to determine the strength of the orbits, in particular for these orbits on which the G -invariant vanishes.

The icosahedral group.

The symmetry group I_3 of the icosahedron is a finite group generated by reflections. For such groups the degrees of the invariant polynomials are known, cf. [2, 3, 5, 8]. In the case of the icosahedral group I_3 there are three basic invariant polynomials, of degrees 2, 6 and 10, and all other invariants are algebraically expressible in these. The invariant of degree 2 is the trivial invariant (ξ, ξ) . These facts imply that all orbits of I_3 discussed in section 3 have strength 5. Indeed, our criterion is satisfied trivially for $t = 5$. Moreover, if the nontrivial I_3 -invariant of degree 6 is annihilated (or trivialized) for a special starting point, then the corresponding orbit has strength 9. Such a special point is a solution $\underline{\xi} \in \Omega$ of the equation

$$\frac{1}{12} \sum_{\underline{x} \in X} (\underline{x}, \underline{\xi})^6 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\underline{\eta}, \underline{\xi})^6 d\omega(\underline{\eta}),$$

where X denotes the vertices of the icosahedron, cf. section 2. Indeed, this equation is our criterion for the nontrivial I_3 -invariant polynomial of degree 6 at the left-hand side. In fact, the right-hand side is independent of $\underline{\xi}$ and equals $1/7$, as elementary calculations show.

Working out the equation for $\underline{\xi} = (\xi, \eta, 0) \in \Omega$, we obtain $\xi^2 + \eta^2 = 1$ and

$$\frac{1}{60\sqrt{5}} \left[2 \left(\xi \tau^{\frac{1}{2}} + \eta \tau^{-\frac{1}{2}} \right)^6 + 2 \left(\xi \tau^{\frac{1}{2}} - \eta \tau^{-\frac{1}{2}} \right)^6 + 4 \left(\xi \tau^{-\frac{1}{2}} \right)^6 + 4 \left(\eta \tau^{\frac{1}{2}} \right)^6 \right] = \frac{1}{7},$$
$$(\xi^6 + \eta^6)(\tau^3 + \tau^{-3}) + 15\xi^2\eta^2(\xi^2\tau + \eta^2\tau^{-1}) = \frac{15\sqrt{5}}{7}.$$

A solution is provided by

$$\xi \approx 0.984, \quad \eta \approx 0.178, \quad \zeta = 0.$$

The orbit of this point consists of the 60 points of a truncated icosahedron. It approximates the unit sphere with strength 9, so "better" than the current football which achieves only strength 5.

References.

- [1] W.W. Rouse Ball, H.S.M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, twelfth edit., Univ. of Toronto Press, 1974.
- [2] H.S.M. Coxeter, *Regular polytopes*, third edition, Dover 1973.
- [3] H.S.M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Cambr. Univ. Press, 1974.
- [4] P. Delsarte, J.M. Goethals, J.J. Seidel, *Spherical codes and designs*, *Geometriae Dedicata* 6 (1977), 363 - 388.
- [5] L. Flatto, *Invariants of finite reflection groups*, *l'Enseignement mathém.* 24 (1978), 237 - 292.
- [6] J.M. Goethals, J.J. Seidel, *Cubature formulae, polytopes and spherical designs*, *Proc. Coxeter-Symposium*, to appear.
- [7] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig, Teubner, 1884.
- [8] T.A. Springer, *Invariant theory*, *Lecture Notes in Math.* 585, Springer 1977.
- [9] M.J. Wenninger, *Spherical models*, Cambr. Univ. Press 1979.

Hoofdstuk 4. Homologie

4.1. Het (abstracte) simplex

Een n -simplex α_n is een verzameling van $n+1$ verschillende elementen. Noem de elementen punten en noteer

$$\alpha_n = p_0 p_1 p_2 \cdots p_n .$$

Een deelsimplex α_k van α_n is een deelverzameling met $k+1$ punten. Ook $\alpha_{-1} := \emptyset$ is deelsimplex. Dus α_n en zijn deelsimplexen vormen een partieel geordende verzameling ten opzichte van "bevatten". Daarom schrijven we voor deelsimplexen: $\alpha_k < \alpha_n$.

De rand van α_n , schrijf $\partial\alpha_n$, bestaat uit de $(n-1)$ -simplexen $p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_n$ (laat p_i weg), $i = 0, 1, \dots, n$. De rand van de rand van α_n , schrijf $\partial\partial\alpha_n$, bestaat uit de $(n-2)$ -simplexen $p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_n$, die elk twee keer voor komen. Dit nodigt uit tot rekenen modulo 2. Voor vaste k , zij

$$\{\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, \dots, \alpha_k^{(N_k)}\},$$

de verzameling van de k -simplexen van α_n , waarin N_k het totale aantal α_k in α_n is. Een deelverzameling hiervan heet een k -keten van α_n , en wordt voorgesteld door

$$\gamma_k := g_1 \alpha_k^{(1)} + g_2 \alpha_k^{(2)} + \dots + g_{N_k} \alpha_k^{(N_k)} ; \quad g_i \in GF(2) .$$

De k -ketens van α_n vormen een vectorruimte $V(N_k, 2)$ van dimensie N_k over $GF(2)$. Zo ontstaan $n+2$ vectorruimten, voor $k = n, n-1, \dots, 1, 0, -1$, waarvan de eerste en de laatste de dimensie 1 hebben:

$$V(N_n, 2) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} V(N_k, 2) \xrightarrow{\partial} V(N_{k-1}, 2) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} V(N_{-1}, 2) .$$

De *rand* van een simplex $\alpha_k = p_0 p_1 \cdots p_k$ wordt gedefinieerd door

$$\partial\alpha_k := \sum_{i=0}^k p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_k .$$

De *rand* van een k -keten γ_k wordt gedefinieerd door

$$\partial\gamma_k := \sum_{i=1}^{N_k} g_i \partial\alpha_k^{(i)} .$$

∂ is een lineaire afbeelding van $V(N_k, 2)$ in $V(N_{k-1}, 2)$. Omdat wij modulo 2 rekenen is $\partial\partial\alpha_k^{(i)} = 0$, dus heeft ∂ de eigenschap $\partial\partial = 0$.

Voorbeeld. Het viervlak $p_0p_1p_2p_3$ in \mathbb{R}^3 . De incidenties van de deelsimplexen worden beschreven door de volgende incidentie-matrices A_0, A_1, A_2, A_3

A_0	p_0	p_1	p_2	p_3	A_1	p_0p_1	p_0p_2	p_0p_3	p_2p_3	p_1p_3	p_1p_2
\emptyset	1	1	1	1	p_0	1	1	1	0	0	0
					p_1	1	0	0	0	1	1
					p_2	0	1	0	1	0	1
					p_3	0	0	1	1	1	0

A_2	$p_1p_2p_3$	$p_0p_2p_3$	$p_0p_1p_3$	$p_0p_1p_2$	A_3	$p_0p_1p_2p_3$
p_0p_1	0	0	1	1	$p_1p_2p_3$	1
p_0p_2	0	1	0	1	$p_0p_2p_3$	1
p_0p_3	0	1	1	0	$p_0p_1p_3$	1
p_2p_3	1	1	0	0	$p_0p_1p_2$	1
p_1p_3	1	0	1	0		
p_1p_2	1	0	0	1		

De eigenschap $\partial\partial = 0$ wordt in matrixtaal uitgedrukt door

$$A_0A_1 = 0, A_1A_2 = 0, A_2A_3 = 0, \text{ modulo } 2.$$

$$\begin{aligned} \partial(p_0p_1p_2 + p_1p_2p_3) &= p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 = \\ &= p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_3 + p_2p_3, \end{aligned}$$

$$\partial(p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) = p_0 + p_1 + p_0 + p_2 + p_1 + p_3 + p_2 + p_3 = 0.$$

Een k -cykel van α_n is een k -keten waarvan de rand nul is. Een rand- k -keten van α_n is een k -keten die rand is van een $(k+1)$ -keten.

Voorbeeld. $\gamma_1 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$ is een 1-cykel omdat $\partial\gamma_1 = 0$. Ook is γ_1 een randketen omdat $\gamma_1 = \partial p_1p_2p_3$.

Stelling. Elke randketen is een cykel.

Bewijs. Als $\alpha = \partial\beta$, dan $\partial\alpha = \partial\partial\beta = 0$.

Stelling. In een n -simplex ($n > 0$) is elke k -cykel ($k > 0$) een randketen.

Bewijs. Zij

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N_k} g_i \alpha_k^{(i)}$$

een cykel. Neem eerst aan dat α_n een punt p bevat dat niet in de cykel γ voorkomt. Dan voldoet de "pyramide" $\sum g_i p \alpha_k^{(i)}$ wegens

$$\partial(\sum g_i p \alpha_k^{(i)}) = \sum g_i p \partial \alpha_k^{(i)} + \sum g_i \alpha_k^{(i)} = \sum g_i \alpha_k^{(i)} = \gamma .$$

Neem vervolgens aan dat alle punten van α_n in de cykel voorkomen. Fixeer dan een willekeurige p van α_n en schrijf

$$\gamma = \sum_{i=1}^s e_i \alpha_k^{(i)} + \sum_{i=s+1}^{N_k} f_i p \alpha_{k-1}^{(i)} ,$$

waarin geen der $\alpha_k^{(i)}$ en $\alpha_{k-1}^{(i)}$ het punt p bevatten. Nu is

$$0 = \partial \gamma = \sum_{i=1}^s e_i \partial \alpha_k^{(i)} + \sum_{i=s+1}^{N_k} f_i \alpha_{k-1}^{(i)} + p \sum_{i=s+1}^{N_k} f_i \partial \alpha_{k-1}^{(i)} ,$$

dus de coëfficiënt van p , en de som der termen zonder p zijn beide nul. Maar

dan voldoet $\sum_{i=1}^s e_i p \alpha_k^{(i)}$ want

$$\begin{aligned} \partial \left(\sum_{i=1}^s e_i p \alpha_k^{(i)} \right) &= \sum_{i=1}^s e_i \alpha_k^{(i)} + p \sum_{i=1}^s e_i \partial \alpha_k^{(i)} = \\ &= \sum_{i=1}^s e_i \alpha_k^{(i)} + p \sum_{i=s+1}^{N_k} f_i \alpha_{k-1}^{(i)} = \gamma . \end{aligned}$$

Opmerking. Hierboven gebruikten wij coëfficiënten g_i uit $GF(2)$. Men kan de coëfficiënten ook uit andere getalsystemen nemen, bijvoorbeeld uit \mathbb{Z} of uit \mathbb{Q} . Dan wordt $-\alpha_k$ als volgt gedefinieerd. Een oriëntatie $\epsilon \in \{1, -1\}$ van een simplex is één van de twee klassen van permutaties van de hoekpunten. Een *georiënteerd simplex* is een simplex voorzien van oriëntatie, schrijf

$$\alpha_k = \epsilon p_0 p_1 \dots p_k .$$

De *rand* van een georiënteerd simplex is

$$\partial\alpha_k := \sum_{i=0}^k (-1)^i \varepsilon_{p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_k} .$$

Ook nu geldt $\partial\partial\alpha_k = 0$. Inderdaad, de term $p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_k$ heeft coëfficiënt $(-1)^i (-1)^{j-1} + (-1)^j (-1)^i = 0$.

4.2. Het complex

Definitie. Een *complex* is een eindige verzameling C van simplexen zodat met elk simplex ook al zijn deelsimplexten tot C behoren:

$$\forall_{\alpha \in C} \forall_{\beta < \alpha} (\beta \in C) .$$

Merk op dat $\emptyset \in C$. Wij spreken van een n -complex wanneer ten hoogste n -simplexten voorkomen.

Voorbeelden. Een n -simplex en al zijn deelsimplexten vormen een n -complex.

De knopen en de ribben van een graaf, en \emptyset , vormen een 1-complex. Inderdaad, de paren verbonden punten zijn de 1-simplexten.

Een eindig aantal driehoeken in \mathbb{R}^2 die slechts zijden, hoekpunten of \emptyset gemeen hebben, benevens de zijden, hoekpunten en \emptyset vormen een 2-complex. Inderdaad, de drietallen punten van de driehoeken zijn de 2-simplexten, etc.

Een getrianguleerd boloppervlak vormt een 2-complex. Hiermee bedoelen wij een boloppervlak dat is verdeeld in kromlijnige driehoeken die slechts zijden, hoekpunten en \emptyset gemeen hebben. Weer zijn de drietallen punten van de driehoeken de 2-simplexten.

Een getrianguleerde torus vormt een 2-complex.

Een getrianguleerd projectief vlak vormt een 2-complex.

Een in viervlakken verdeelde kubus vormt een 3-complex. Inderdaad, de viertallen punten van de viervlakken zijn de 3-simplexten, de drietallen punten van de bijbehorende zijvlakken zijn de 2-simplexten, de paren punten van de bijbehorende ribben zijn de 1-simplexten, de punten van de verdeling zijn de 0-simplexten, en \emptyset is het (-1)-simplex.

Een ringvormig geschakeld stelsel viervlakken, met de bijbehorende zijvlakken, ribben, hoekpunten, \emptyset , vormt een 3-complex.

Zij C een n -complex. Voor vaste k zij

$$\{\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, \dots, \alpha_k^{(N_k)}\}$$

de verzameling van de k -simplexen van C . Een deelverzameling hiervan heet een k -keten van C , en wordt voorgesteld door

$$\gamma_k := g_1 \alpha_k^{(1)} + \dots + g_{N_k} \alpha_k^{(N_k)}; \quad g_i \in GF(2).$$

De rand $\partial\gamma_k$ van een k -keten γ_k is de $(k-1)$ -keten gedefinieerd door

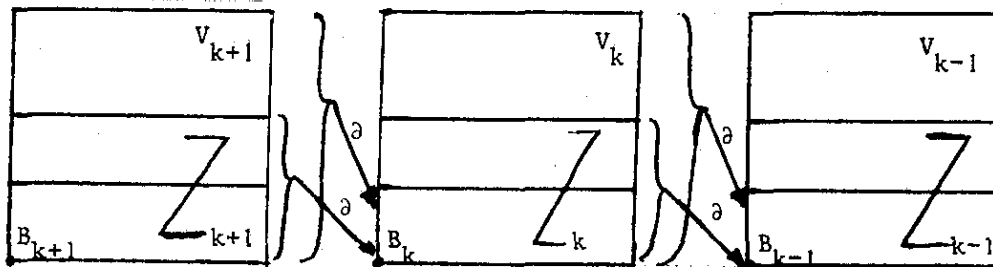
$$\partial\gamma_k := g_1 \partial\alpha_k^{(1)} + \dots + g_{N_k} \partial\alpha_k^{(N_k)}.$$

Stelling. $\partial\partial = 0$.

Bewijs. $\partial\partial\alpha_k = 0$ voor elk k -simplex α_k .

Een k -keten γ_k heet een k -cykel als $\partial\gamma_k = 0$. Een k -keten γ_k heet een rand- k -keten als $\gamma_k = \partial\xi_{k+1}$ voor zekere $(k+1)$ -keten ξ_{k+1} . Uit de stelling volgt dat elke randketen een cykel is.

$V_k := V(N_k, 2)$ is de vectorruimte van alle k -ketens. Z_k is de deelruimte van V_k bestaande uit alle k -cyclen (de nulruimte van $\partial: V_k \rightarrow V_{k-1}$); $Z_0 := V_0$. B_k is de deelruimte van V_k bestaande uit alle rand- k -ketens (de beeldruimte van $\partial: V_{k+1} \rightarrow V_k$); $B_n := \{0\}$. B_k is een deelruimte van Z_k , wegens $\partial\partial = 0$.



De \overline{k} -de homologie groep van het complex C is de factorgroep

$$H_k := Z_k / B_k, \text{ de klassen } z + B \text{ onder } (z_1 \sim z_2) : \Leftrightarrow (z_1 + z_2 \in B).$$

Het k -de samenhangsgetal h_k van het complex C is de dimensie van H_k

$$h_k := \dim H_k,$$

dat is, het maximum aantal onafhankelijke k -cyclen modulo rand- k -ketens.

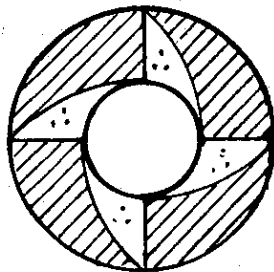
Voorbeeld 1. Een 1-complex is een graaf. De 1-simplexen worden door de ribben, en de 0-simplexen door de punten van de graaf voorgesteld. h_0 is het aantal samenhangende delen van de graaf. Inderdaad, een punt is een 0-cykel; twee punten vormen een 0-cykel die rand is van een 1-keten dan en slechts dan als de punten in dezelfde component van de graaf liggen. In 4.3 zullen wij een gemakkelijke manier ontmoeten ter berekening van h_1 , het maximum aantal onafhankelijke circuits in de graaf.

Voorbeeld 2. Trianguleer de 2-sfeer met behulp van een octaeder. Dan ontstaat een 2-complex C met $h_0 = 1$, $h_1 = 0$, $h_2 = 1$. Inderdaad, C is samenhangend ($h_0 = 1$), elke 1-cykel is rand van een 2-keten ($h_1 = 0$), en $\sum_{i=1}^8 \alpha_2^{(i)}$ is de enige 2-cykel ($h_2 = 1$).

Voorbeeld 3. De 2-sfeer getrianguleerd volgens een icosaeeder vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 0$, $h_2 = 1$.

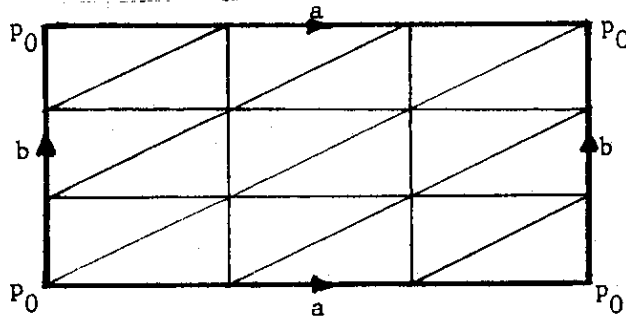
Voorbeeld 4. Een 2-simplex met zijn deelsimplexen vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$. Inderdaad, er is geen 2-cykel (zie stelling op blz. 41).

Voorbeeld 5. Een platte ring, met de aangegeven triangulering, vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 0$. Inderdaad, $h_2 = 0$ omdat er geen 2-cykels



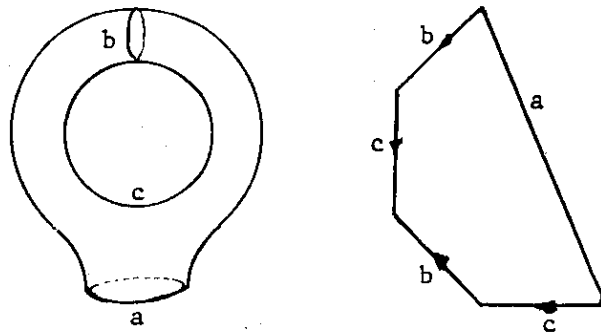
zijn. Voorts is $h_1 = 1$ omdat er slechts één 1-cykel is (bijvoorbeeld de binnencirkel) modulo rand-1-ketens; de rand van de som van alle driehoeken wordt gevormd door de binnen- en de buitencirkel.

Voorbeeld 6. Het oppervlak van een torus met de aangegeven triangulering in

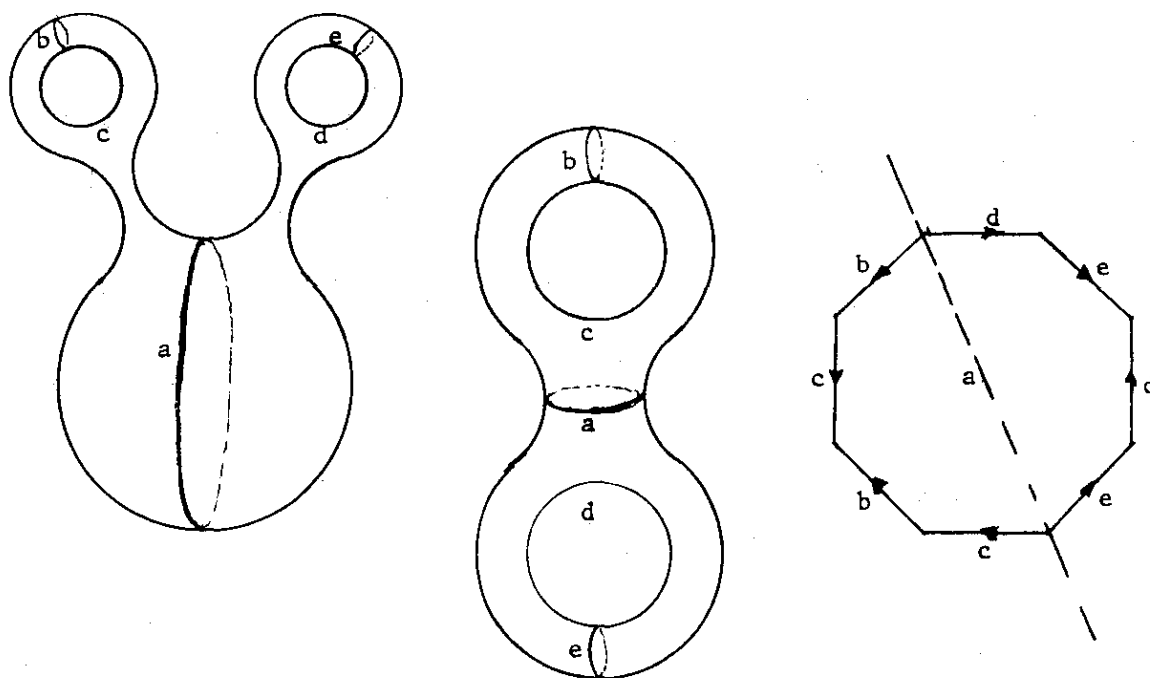


18 driehoeken vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$. Inderdaad, $h_2 = 1$ omdat de som van alle driehoeken een 2-cykel is. Voorts is $h_1 = 2$ omdat a en b onafhankelijke 1-cykels zijn die geen van beide rand van een 2-keten zijn.

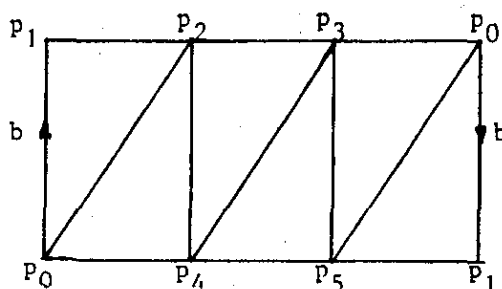
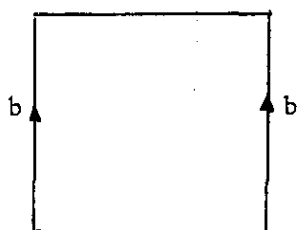
Voorbeeld 7. Het torusoppervlak waaruit een kapje is weggesneden, voorzien van een triangulering, vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 0$.



Voorbeeld 8. De volgende oppervlakken, voorzien van een triangulering, hebben alle de samenhangsgetallen $h_0 = 1$, $h_1 = 4$, $h_2 = 1$:
een 2-sfeer met twee hengsels,
een krakeling,
twee exemplaren van voorbeeld 7, aaneengelijmd volgens de rand van de kapjes.

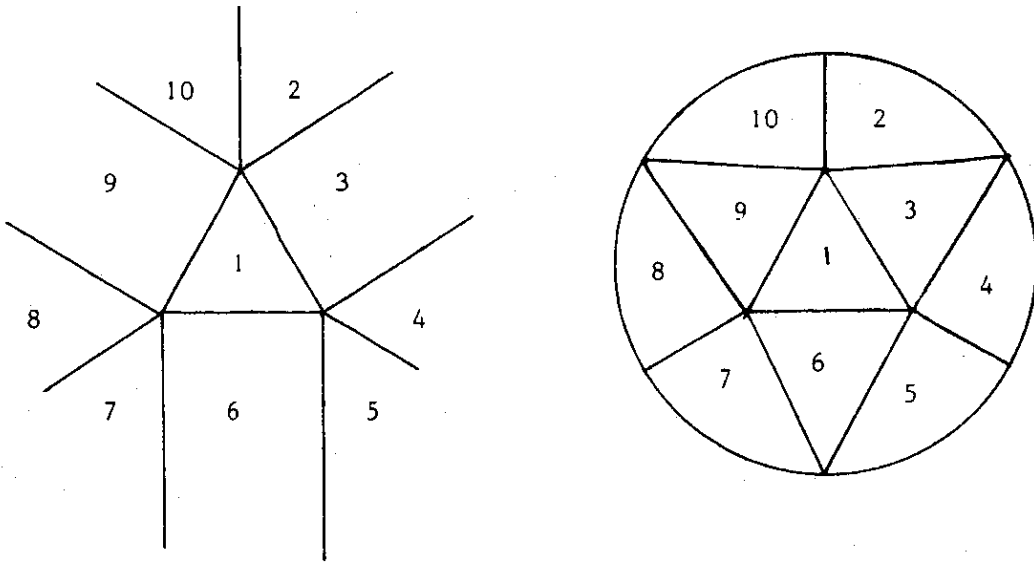


Voorbeeld 9. Een cylinder, voorzien van triangulatie, is een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 0$.



Voorbeeld 10. Een Möbius-band, voorzien van de aangegeven triangulering, vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 0$. Inderdaad, $p_0p_1 + p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_0$ is een 1-cykel, maar is niet rand van een 2-keten.

Voorbeeld 11. Een projectief vlak, voorzien van de aangegeven triangulering, vormt een 2-complex met $h_0 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$. Inderdaad, $h_2 = 1$ omdat de som van de 10 driehoeken een 2-cykel is. Voorts is $h_1 = 1$ omdat er 1-cykels bestaan die niet rand van een 2-keten zijn, terwijl elk tweetal van zulke 1-cykels wel de rand van een 2-keten vormt.



Voorbeeld 12. Een kubus γ_3 verdeeld in 5 viervlakken, vormt een 3-complex met $h_0 = 1, h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$.

Voorbeeld 13. Een convex veelvlak in \mathbb{R}^3 , verdeeld in viervlakken, vormt een 3-complex met $h_0 = 1, h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

Voorbeeld 14. Een getrianguleerde 3-sfeer in \mathbb{R}^4 geeft een 3-complex met $h_0 = 1, h_1 = h_2 = 0, h_3 = 1$.

Voorbeeld 15. Een getrianguleerde $(n-1)$ -sfeer in \mathbb{R}^n geeft een $(n-1)$ -complex met $h_0 = 1, h_1 = \dots = h_{n-2} = 0, h_{n-1} = 1$.

Opmerking. In hoofdstuk 5 zal blijken dat in elk van de bovenstaande voorbeelden de waarden van de samenhangsgetallen onafhankelijk zijn van de gebruikte triangulering.

Opmerking. Ook voor complexen kan men orientaties invoeren, en gehele of rationale coëfficiënten gebruiken. De dimensies van de vectorruimten H_k heten dan de Betti-getallen. Soms stemmen de samenhangsgetallen modulo 2 niet overeen met de Betti-getallen (voorbeeld 11).

4.3. De stelling van Euler-Poincaré

Volgens 4.2 geldt voor een complex C dat

$$V_k/Z_k = B_{k-1}, H_k = Z_k/B_k,$$

voor $k = 0, 1, \dots, n$, met $B_{-1} = \{0\}$. Hieruit volgt

$$\dim V_k = \dim Z_k + \dim B_{k-1}, \dim Z_k = \dim H_k + \dim B_k,$$

en, na eliminatie van $\dim Z_k$,

$$\dim V_k = \dim H_k + \dim B_k + \dim B_{k-1},$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim V_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_k.$$

Hiermee is verkregen de stelling van Euler-Poincaré (1893).

Stelling. In een n -complex, met samenhangsgetallen h_k , en simplexaantallen N_k , geldt

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k N_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k h_k.$$

Opmerking. Voor de Betti-getallen geldt de analoge gelijkheid.

Voorbeeld 1. Voor een graaf met p punten en r ribben geldt

$$p - r = h_0 - h_1,$$

waarin h_0 het aantal componenten en h_1 het aantal onafhankelijke circuits voorstelt.

Voorbeeld 2. Zij Π_3 een polytoop in \mathbb{R}^3 , waarvan de ribben zich vanuit een inwendig punt vrij op een boloppervlak laten projecteren. Voor Π_3 met p punten, r ribben en z zijvlakken geldt de reeds aan Descartes (1650) bekende *formule van Euler* (1752)

$$p - r + z = 2 .$$

Bewijs. De projectie is op te vatten als een planaire graaf op het boloppervlak. Door in elk der vlakken een extra punt te kiezen en te verbinden met de hoekpunten van dat vlak wordt een triangulering van het boloppervlak verkregen. Toepassing van Euler-Poincaré levert

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - 0 + 1 .$$

Laat nu in elk vlak de triangulering weer weg. Per vlak scheelt dat 1 punt, x ribben en $x-1$ vlakjes. Het linkerlid is dus gelijk aan $p - r + z$, en de formule van Euler is bewezen.

Voorbeeld 3. Noem een *polytoop* Π_n in \mathbb{R}^n een begrensd deel van \mathbb{R}^n dat begrensd is door eindig veel hypervlakken. De grensruimten van Π_n laten zich vanuit een inwendig punt vrij op de $(n-1)$ -sfeer S^{n-1} projecteren. De samenhangsgetallen van S^{n-1} zijn bekend. Met de hierboven aangegeven bewijsmethode volgt de *formule van Euler-Schläfli* (1850):

$$N(n,0) - N(n,1) + N(n,2) - \dots + (-1)^n N(n,n-1) = 1 - (-1)^n ,$$

waarin $N(n,k)$ het aantal k -grensruimten van het polytoop Π_n is.

$$N(1,0) = 2, \quad N(3,0) - N(3,1) + N(3,2) = 2,$$

$$N(2,0) - N(2,1) = 0, \quad N(4,0) - N(4,1) + N(4,2) - N(4,3) = 0 .$$

Voorbeeld 4. Voor een samenhangende graaf in het projectieve vlak over \mathbb{R} , met p punten, r ribben en z gebieden, geldt (vergelijk 4.2, voorbeeld 11)

$$p - r + z = 1 .$$

Voorbeeld 5. Voor een samenhangende graaf op de torus, met p punten, r ribben en z gebieden, geldt (vergelijk 4.2, voorbeeld 6):

$$p - r + z = 0 .$$

Literatuur

- O. Veblen, Analysis situs, Amer. Math. Soc. 1931 (klassiek).
- Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Chelsea 1947 (klassiek).
- P. Alexandroff, Elementary concepts of topology, Dover 1961.
- E.M. Patterson, Topology, Oliver Boyd, 1956.
- H.B. Griffiths, Surfaces, Cambridge University Press, 1976 (didactisch).
- S. Lefschetz, Applications of algebraic topology, Springer 1975 (met toepassingen).
- E.H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill 1966 (geavanceerd standaardwerk).

Hoofdstuk 5. Topologie

5.1. Topologische afbeeldingen

Zij $S \subset \mathbb{R}^n$ en $T \subset \mathbb{R}^n$. Zij $\varphi: S \rightarrow T$ een één-éénduidige afbeelding van S op T . Wij noemen φ een *topologische afbeelding* (homeomorfie = van dezelfde vorm), wanneer φ continu is voor alle $s \in S$, en φ^{-1} continu is voor alle $t \in T$.

(Wij weten wat dit betekent, want φ kan worden beschreven door n functies in n variabelen.) S en T heten *topologisch equivalent* wanneer er een topologische afbeelding $\varphi: S \rightarrow T$ bestaat. De *topologie* houdt zich bezig met eigenschappen die invariant zijn t.o.v. topologische afbeeldingen.

Opmerking. Het begrip topologische afbeelding kan worden uitgebreid tot niet in \mathbb{R}^n liggende S en T , wanneer daarop maar het begrip "continuïteit" kan worden gedefinieerd. Daartoe dient het begrip *topologische ruimte* te worden ontwikkeld, zie elk boek over topologie.

Voorbeeld 1. De hoofdletters C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z zijn topologisch equivalent. Zo ook E, F, G, T, Y. Twee aan twee topologisch verschillend zijn de hoofdletters L, T, X, H, P, A, B.

Voorbeeld 2. De cirkelomtrek en de omtrek van het vierkant

$$S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad V = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\}$$

zijn topologisch equivalent. Inderdaad, de volgende continue afbeeldingen $f: S^1 \rightarrow V$ en $g: V \rightarrow S^1$ zijn elkaars inversen:

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{|x| + |y|}, \frac{y}{|x| + |y|} \right), \quad g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Voorbeeld 3. Topologisch equivalent zijn het vlak min een punt, de cylinder, en de eenbladige hyperboloïde

$$V = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\},$$

$$C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Inderdaad, neem $f: V \rightarrow C$, $g: C \rightarrow H$ volgens

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right),$$

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 e^{x_3}, x_2 e^{x_3}),$$

$$g(\underline{x}) = (x_1 \sqrt{1+x_3^2}, x_2 \sqrt{1+x_3^2}, x_3),$$

$$g^{-1}(\underline{x}) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1+x_3^2}}, x_3 \right).$$

Voorbeeld 4. Topologisch equivalent zijn de sfeer min een punt, het Euclidische vlak, en de open cirkelschijf. Inderdaad, de eerste equivalentie volgt uit de stereografische projectie, en de tweede uit

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right).$$

Voorbeeld 5. Topologisch equivalent zijn de gesloten cirkelschijf, het gesloten gebied begrensd door een vierkant (en dat begrensd door een driehoek).

Inderdaad, gebruik

$$f(x,y) = \left(\frac{x(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), f(0,0) = (0,0),$$

of, in poolcoördinaten,

$$F(r,\varphi) = (r(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|), \varphi),$$

$$F^{-1}(r,\varphi) = \left(\frac{r}{|\cos \varphi| + |\sin \varphi|}, \varphi \right).$$

Voorbeeld 6. Een *Jordankromme* in \mathbb{R}^2 is het topologische beeld van een cirkel. De stelling van Jordan-Brouwer zegt dat \mathbb{R}^2 door een Jordankromme wordt verdeeld in precies 2 gebieden, die elk die kromme tot rand hebben. (Voor een bewijs zie de vijfde voordracht in [3].)

Voorbeeld 7. Topologisch equivalent zijn de oppervlakken van een bol, een kubus, een octaeder, een tetraeder, een icosaeeder.

Voorbeeld 8. Topologisch equivalent zijn een massieve kubus, een massieve bol, en een speelgoed olifant.

Voorbeeld 9. Topologisch equivalent zijn een massieve ring, een portretlijst, en een theekopje. Een soepkop met 2 oren is topologisch equivalent met een massieve bol met 2 massieve hengsels.

Voorbeeld 10. Een geknoopt stuk touw is topologisch equivalent met een stuk touw zonder knopen.

Een fundamentele stelling uit de topologie (zie § 5.2) zegt dat twee topologisch equivalente topologische ruimten, die beide trianguleerbaar zijn, dezelfde samenhangsgetallen hebben. Deze stelling kan worden gebruikt om te bewijzen dat twee topologische ruimten niet equivalent zijn.

Voorbeeld. De cirkel en de rechte lijn zijn niet topologisch equivalent. Evenmin de sfeer en het Euclidische vlak, en de sfeer en de open cirkelschijf.

Een *topologisch n-simplex* is het topologische beeld van een regelmatig simplex α_n in \mathbb{R}^n .

Een *topologisch n-complex* is de vereniging van eindig veel topologische simplexen, die zo samenhangen dat de doorsnede van elk tweetal van deze simplexen een deelsimplex van beide is (ook \emptyset is deelsimplex!) en waarin ten hoogste topologische n-simplexen voorkomen.

Een topologisch n-complex en zijn topologische n-simplexen hebben dus de structuur van een abstract complex en zijn simplexen. Daarom heeft het zin om te spreken van de homologiegroepen en de samenhangsgetallen van een topologisch n-complex K . Zijn puntverzameling wordt aangeduid met $|K|$.

Wij hebben reeds vele voorbeelden van topologische n-complexen ontmoet.

5.2. Continue afbeeldingen

Laat K_1, K_2, K_3 topologische complexen aanduiden, en $|K_1|, |K_2|, |K_3|$ hun puntverzamelingen.

Stelling. De continue afbeeldingen

$$f: |K_1| \rightarrow |K_2|, \quad g: |K_2| \rightarrow |K_3|$$

induceren de homomorfismen

$$F_p: H_p(K_1) \rightarrow H_p(K_2), \quad G_p: H_p(K_2) \rightarrow H_p(K_3),$$

voor $p = 0, 1, 2, \dots$ zodanig dat

- 1) als f de identiteit is, dan is ook F_p de identiteit,
- 2) $g \circ f$ induceert $G_p \circ F_p$.

Wij zullen deze fundamentele stelling hier niet bewijzen, maar volstaan met een aanduiding van het bewijs. Eerst tracht men bij gegeven f een afbeelding tussen de vectorruimten der ketens van K_1 en K_2 te definiëren. Dit is een eenvoudige zaak wanneer f de simplexen van K_1 in simplexen van K_2 overvoert. Dit gaat ook nog wanneer de simplexen van K_2 niet al te ingewikkelde verenigingen van de simplexen van K_1 zijn. Dan constateert men het volgende. Wanneer f geleidelijk naar f' wordt verschoven, dan volgt dat $F_p = F'_p$. Daarom tracht men een willekeurige continue f te verschuiven naar een naburige f' die simplexen in simplexen overvoert. Als dat niet lukt, wordt hetzelfde geprobeerd met in stukjes verdeelde simplexen van K_1 , en van K_2 . Dit procédé, de simpliciale approximatie, leidt uiteindelijk tot het bewijs van de stelling. De eerste die deze simpliciale approximatie gebruikte voor het bewijs van topologische stellingen was onze landgenoot L.E.J. Brouwer.

Stelling. Wanneer twee topologische complexen topologisch equivalent zijn, dan zijn hun overeenkomstige homologiegroepen isomorf.

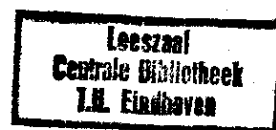
Bewijs. Zij K_1 en K_2 topologische complexen, en zij $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$ een topologische afbeelding. Dan is $g := f^{-1}: |K_2| \rightarrow |K_1|$ continu, en zijn $g \circ f$ en $f \circ g$ de identiteit, van K_1 resp. K_2 . De vorige stelling heeft tengevolge dat

$$G_p \circ F_p = \text{id.}, \quad \text{dus } F_p: H_p(K_1) \rightarrow H_p(K_2) \text{ is één-éénduidig,}$$

$$F_p \circ G_p = \text{id.}, \quad \text{dus } F_p \text{ is een afbeelding op.}$$

Dit betekent dat F_p een isomorfie is, dus dat

$$H_p(K_1) \cong H_p(K_2), \quad \text{voor } p = 0, 1, \dots, n.$$



Gevolg. De met verschillende triangulaties van een ruimte corresponderende homologiegroepen zijn isomorf. Het heeft dus zin om te spreken van de samenhangsgetallen van die ruimte. Op grond van § 2.7 concluderen wij:

De $(n-1)$ -sfeer $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ heeft de samenhangsgetallen

$$h_0 = 1, h_1 = \dots = h_{n-2} = 0, h_{n-1} = 1.$$

De massieve bol $B^n \subset \mathbb{R}^n$ heeft de samenhangsgetallen

$$h_0 = 1, h_1 = \dots = h_n = 0.$$

5.3. De dekpuntstelling van Brouwer

Stelling. Zij $f: B^n \rightarrow B^n$ een continue afbeelding van een massieve bol $B^n \subset \mathbb{R}^n$ in zichzelf. Dan bestaat er een punt $\underline{x} \in B^n$ zodat $f(\underline{x}) = \underline{x}$.

Bewijs. Stel dat voor elke $\underline{x} \in B^n$ geldt $f(\underline{x}) \neq \underline{x}$. Dan bepalen $f(\underline{x})$ en \underline{x} een rechte. Zij $g(\underline{x})$ het snijpunt van de halfrechte vanuit $f(\underline{x})$ naar \underline{x} met de randsfeer S^{n-1} van B^n . Dan definieert $\underline{x} \rightarrow g(\underline{x})$ een continue afbeelding $g: B^n \rightarrow S^{n-1}$. Onder de afbeelding g blijven de punten van S^{n-1} op hun plaats. Met behulp van de afbeelding $i: S^{n-1} \rightarrow B^n$, gedefinieerd door $i(\underline{x}) = \underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in S^{n-1}$, zeggen wij dit nogmaals als volgt:

De continue afbeeldingen

$$g: B^n \rightarrow S^{n-1} \quad \text{en} \quad i: S^{n-1} \rightarrow B^n$$

hebben de eigenschap dat $g \circ i$ de identiteit $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ is. Op grond van de hoofdstelling van § 3.2 induceren g en i de lineaire afbeeldingen

$$G_p: H_p(B^n) \rightarrow H_p(S^{n-1}), \quad I_p: H_p(S^{n-1}) \rightarrow H_p(B^n)$$

met de eigenschap dat $G_p \circ I_p$ de identiteit is. Dit is onmogelijk. Inderdaad, de samengestelde lineaire afbeelding

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{I_{n-1}} H_{n-1}(B^n) \xrightarrow{G_{n-1}} H_{n-1}(S^{n-1})$$

is wegens $h_{n-1}(S^{n-1}) = 1$ en $h_{n-1}(B^n) = 0$ niets anders dan

$$GF(2) \xrightarrow{I} \{0\} \xrightarrow{G} GF(2),$$

en kan dus niet de identiteit voorstellen.

Voorbeeld 1. Voor $n = 1$ zegt de stelling van Brouwer het volgende. Zij $f(x)$ een continue afbeelding van het segment $[a,b]$ in zichzelf. Dan bestaat er een $x \in [a,b]$ zodat $f(x) = x$.

Voorbeeld 2. Elk van de volgende functies beeldt het segment $[0,1]$ in zichzelf af.

$f(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$4x - 4x^2$	$x^2 - x + 1$
dekpunt	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0 en $3/4$	1

Voorbeeld 3. Ook voor $n = 2$ is de stelling van Brouwer intuïtief duidelijk. Een continue afbeelding van een cirkelschijf in zichzelf heeft een dekpunt. Merk op dat een rotatie over $\varphi \neq 0, 2\pi$ van een cirkel S^1 geen dekpunt heeft.

Voorbeeld 4. Op de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 1$ passen wij achtereenvolgens toe een vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ t.o.v. 0 en een translatie langs de x-as over $1/3$. Dekpunt is $(\frac{2}{3}, 0)$.

Voorbeeld 5. Op de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 1$ passen wij toe de spiegeling om de y-as, de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ t.o.v. 0, en een translatie langs de x-as over $1/3$. Dekpunt is $(2/9, 0)$.

Opmerking. Voor een "gewoon" bewijs van de stelling van Brouwer voor $n = 2$, zie [3], 251-255.

Literatuur

1. W. Franz, Topologie I, II, Sammlung Götschen, de Gruyter (1965), goedkope goede boekjes.
2. D.W. Blackett, Elementary topology, Academic Press (1967), elementair met veel plaatjes.
3. Courant-Robbins, What is mathematics, Oxford Univ. Press (1941).
4. Freudenthal-Peremans, Zeven voordrachten over topologie, Mathematisch Centrum (1950).
5. Griffiths-Hilton, Classical mathematics, a contemporary interpretation, Chapter 25, Van Nostrand (1970).
6. C.T.C. Wall, A geometric introduction to topology, Addison-Wesley (1972).
7. A.H. Wallace, An introduction to algebraic topology, Pergamon (1957).

Hoofdstuk 6. Homotopie

6.1. Homotope afbeeldingen

Zij R en S topologische complexen. Beschouw de continue afbeeldingen

$$f: R \rightarrow S, g: R \rightarrow S .$$

Wij zullen f en g *homotoop* noemen, notatie $f \sim g$, als de ene afbeelding in de andere kan worden overgevoerd via een continue familie van continue afbeeldingen, preciezer:

Definitie. $f \sim g$ als er een continue afbeelding

$$F: R \times I \rightarrow S, I = [0,1]$$

bestaat, zodat $F(p,0) = f(p)$, $F(p,1) = g(p)$ voor alle $p \in R$.

Voorbeeld 1. Zij $R = S = \mathbb{R}^2$ en zij

$$f: f(x,y) = (x,y), g: g(x,y) = (0,0) .$$

Dus f is de identiteit, id , en g is de afbeelding op één punt. Dan is $f \sim g$ met

$$F(x,y;t) = ((1-t)x, (1-t)y), t \in [0,1] .$$

Voorbeeld 2. Zij $R = S = S^1$, de 1-sfeer. Zij $f = id$ en $g: g(x,y) = (-x,-y)$. Dan is $f \sim g$ met

$$F(x,y;t) = (x \cos \pi t - y \sin \pi t, x \sin \pi t + y \cos \pi t) .$$

Opmerking. Men kan bewijzen dat voor $R = S = S^2$, de 2-sfeer, $f = id$, $g(x,y,z) = (-x,-y,-z)$, de afbeeldingen f en g niet homotoop zijn.

Men noemt een topologisch complex R *samentrekbaar* wanneer $f = id: R \rightarrow R$ homotoop is met een afbeelding $g: R \rightarrow R$ die R afbeeldt op één punt van R .

Voorbeeld 3. Een boom (een graaf zonder circuits) is samentrekbaar.

Voorbeeld 4. Een topologische simplex is samentrekbaar.

Stelling. Voor afbeeldingen $R \rightarrow S$ is homotopie een equivalentierelatie.

Bewijs. Reflexiviteit: neem $F(p,t) = f(p)$ voor alle $0 \leq t \leq 1$; symmetrie: bij de gegeven $F(p,t)$ definiëren wij $F'(p,t) := F(p,1-t)$; transitiviteit: bij de gegeven $F(p,t)$ en $G(p,t)$ definiëren wij

$$\begin{aligned} H(p,t) &:= F(p,2t) \quad \text{voor } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ &:= G(p,2t-1) \quad \text{voor } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Stelling. Als $f \sim f': R \rightarrow S$ en $g \sim g': S \rightarrow T$, dan
 $g \circ f \sim g' \circ f': R \rightarrow T$.

Zonder bewijs noemen wij het verlengstuk van de belangrijke stelling van blz. 60.

Stelling. Als $f \sim g: R \rightarrow S$, dan zijn de geïnduceerde lineaire afbeeldingen

$$F_p: H_p(R) \rightarrow H_p(S) \text{ en } G_p: H_p(R) \rightarrow H_p(S)$$

dezelfde afbeeldingen, voor $p = 0, 1, 2, \dots$.

Voorbeeld 5. Voor de samentrekbaarheid van een topologisch complex R is nodig dat $H_p(R) = 0$ voor alle $p > 0$.

Voorbeeld 6. De n -sfeer S^n is niet samentrekbaar, want $h_n(S^n) \neq 0$.

Voorbeeld 7. Er is geen continue afbeelding van een cirkelschijf op zijn rand.

6.2. De fundamentealgroep

Zij R een topologisch complex. Wij beschouwen de verzameling van de paden met beginpunt x_0 en eindpunt x_1 in R en definiëren daarop een equivalentierelatie. Paden met samenvallende begin- en eindpunt heten lussen. De verzameling van de equivalentieklassen van de lussen in x_0 wordt tot een groep $\pi(R, x_0)$ gemaakt. Tenslotte blijkt dat de keuze van het basispunt $x_0 \in R$ er niet toe doet, en is de fundamentealgroep (de eerste homotopiegroep) verkregen.

Een *pad* in R met beginpunt $x_0 \in R$ en eindpunt $x_1 \in R$ is een continue afbeelding $f: I \rightarrow R$, met $f(0) = x_0$ en $f(1) = x_1$.

Twee paden f en g met dezelfde begin- en eindpunten x_0 resp. x_1 heten *homotoop t.o.v. $\{x_0, x_1\}$* , notatie $f \sim g \text{ rel. } \{x_0, x_1\}$, wanneer zij homotoop zijn met vaste begin- en eindpunten, preciezer, wanneer er een continue $F: I \times I \rightarrow R$ bestaat, zodat $F(s, t)$ voor alle $0 \leq s \leq 1$ en $0 \leq t \leq 1$ voldoet aan

$$F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s), F(0, t) = x_0, F(1, t) = x_1 .$$

i) Homotopie $\text{rel. } \{x_0, x_1\}$ is een equivalentierelatie voor de verzameling van alle paden met beginpunt x_0 en eindpunt x_1 .

Het *product* van twee paden f en g met $f(1) = g(0)$ is het pad

$$\begin{aligned} f.g(s) &:= f(2s) && \text{voor } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} , \\ &:= g(2s - 1) && \text{voor } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 . \end{aligned}$$

ii) Uit $f \sim f' \text{ rel. } \{x_0, x_1\}$ en $g \sim g' \text{ rel. } \{x_1, x_2\}$ volgt

$$f.g \sim f'.g' \text{ rel. } \{x_0, x_2\} .$$

iii) Voor paden f, g en h met $f(0) = x_0, f(1) = g(0), g(1) = h(0)$ en $h(1) = x_3$ geldt:

$$(f.g).h \sim f.(g.h) \text{ rel. } \{x_0, x_3\} .$$

Volgens ii) kunnen we nu het product voor klassen van paden definiëren:

$$\text{kl}(f).\text{kl}(g) := \text{kl}(f.g) .$$

Uit iii) volgt: het product van klassen is associatief.

Voor $x \in R$ is $e_x: I \rightarrow R$ het pad met $e_x(s) = x$ voor alle $0 \leq s \leq 1$.

Is f een pad van x_0 naar x_1 dan is $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ een pad van x_1 naar x_0 .

Een pad f met $f(0) = f(1) = x$ heet een *lus* in $x \in R$. De verzameling van de homotopieklassen van lussen in x , is met de reeds gedefinieerde vermenigvuldiging een groep, notatie $\pi(R, x)$. Inderdaad, het eenheidselement is $\text{kl}(e_x)$, en $\text{kl}(\bar{f})$ is de inverse van $\text{kl}(f)$.

Is α een pad in R met beginpunt x en eindpunt y dan is er een isomorfisme $\alpha_*: \pi(R, x) \rightarrow \pi(R, y)$ als volgt:

$$\alpha_*(\text{kl}(f)) := \text{kl}(\bar{\alpha}.f.\alpha) .$$

Voor een samenhangende R is de groep $\pi(R,x)$ onafhankelijk van de keuze van het basispunt.

Voorbeeld 1. $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$.

Voorbeeld 2. $\pi(\text{simplex}) = \{e\}$.

Voorbeeld 3. $\pi(S^n) = \{e\}$, voor $n > 1$.

Voorbeeld 4. $\pi(\text{torus}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Voorbeeld 5. De tailecirkel van een dubbeltorus is niet samentrekbaar (niet nulhomotoop). De tailecirkel is wel homoloog nul omdat hij randketen is (zie figuur bij 4.2, voorbeeld 8, blz. 46).

Opmerking. Uit voorbeeld 5 kan men reeds zien dat de homotopie, met de fundamenteaalgroep, een fijner onderzoek toestaat dan de homologie. Inderdaad blijkt dat de eerste homologiegroep H_1 verband houdt met de commutatief gemaakte fundamenteaalgroep (de factorgroep van de fundamenteaalgroep naar zijn commutatorgroep).

6.3. Omloopsgetallen, pro memorie

Zie "Eenvoudige topologie", W.G. Chinn, N.E. Steenrod, bewerkt door J. van Dormolen, Wolters-Noordhoff 1971, bedoeld als keuzeonderwerp Wiskunde II voor het V.W.O.

Hoofdstuk 7. Vraagstukken

7.1 Voorbeeld bij affiene transformaties

In $A(2, \mathbb{F})$ zijn drie niet op één lijn gelegen punten A , B en C gegeven.

a) Is er een affiene transformatie T met

$$T(A) = B, T(B) = C, T(C) = A ?$$

b) Zo ja, onderzoek of T punten in $A(2, \mathbb{F})$ invariant laat.

Oplossing.

a) Laat A corresponderen met $\underline{0}$ en B en C met resp. \underline{b} en \underline{c} .

Stel er is een $T \in AG(2, \mathbb{F})$, dan geldt $T\underline{x} = \underline{p} + A\underline{x}$, voor zekere $\underline{p} \in V(2, \mathbb{F})$, $A \in GL(2, \mathbb{F})$ en alle $\underline{x} \in V(2, \mathbb{F})$.

Nu geldt:

$$T\underline{0} = \underline{p} + A\underline{0} = \underline{b},$$

$$T\underline{b} = \underline{p} + A\underline{b} = \underline{c},$$

$$T\underline{c} = \underline{p} + A\underline{c} = \underline{0},$$

zodat $\underline{p} = \underline{b}$, $A\underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$ en $A\underline{c} = -\underline{b}$.

Wegens A , B en C niet op één lijn, vormen \underline{b} en \underline{c} een basis voor $V(2, \mathbb{F})$

dus ook $\underline{c} - \underline{b}$ en $-\underline{b}$ zijn lineair onafhankelijk, zodat $A \in GL(2, \mathbb{F})$.

Conclusie. Er bestaat een $T \in AG(2, \mathbb{F})$ die aan de gegevens voldoet.

b) Is Q een dekpunt voor T , met $Q = \underline{q} \in V(2, \mathbb{F})$.

$$\underline{q} = \lambda \underline{b} + \mu \underline{c} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{F}).$$

Q is dekpunt zodat $T\underline{q} = \underline{q}$, dus

$$\underline{b} + A(\lambda \underline{b} + \mu \underline{c}) = \lambda \underline{b} + \mu \underline{c}.$$

$$\underline{b} + \lambda(\underline{c} - \underline{b}) + \mu(-\underline{b}) = \lambda \underline{b} + \mu \underline{c}.$$

$$(1 - 2\lambda - \mu)\underline{b} + (\lambda - \mu)\underline{c} = \underline{0},$$

dus:

$$\lambda = \mu \quad \text{en} \quad 2\lambda + \mu = 1.$$

We onderscheiden nu de volgende gevallen:

1) karakteristiek $\mathbb{F} = 2$. Nu geldt $\lambda = \mu$ en $\mu = 1$

$$\text{dus } \underline{q} = \underline{b} + \underline{c}.$$

2) karakteristiek $\mathbb{F} \neq 2$. Nu geldt $\lambda = \mu$ en $3\lambda = 1$.

Is karakteristiek $\mathbb{F} = 3$, dan is het stelsel strijdig.

Is karakteristiek $\mathbb{F} \neq 3$, dan $\lambda = \mu = 3^{-1}$, dus

$$\underline{q} = 3^{-1}(\underline{b} + \underline{c}) ,$$

d.w.z. Q is het zwaartepunt van $\triangle ABC$.

7.2. Voorbeeld bij projectieve afbeeldingen

In het onderstaande wordt één opgave uitgewerkt op twee manieren. De eerste met behulp van lineaire algebra, de tweede synthetisch.

I. In $\pi := \text{PG}(2, \mathbb{R})$ zijn gegeven de projectieve punten $\langle \underline{p} \rangle$, $\langle \underline{q} \rangle$, $\langle \underline{r} \rangle$, $\langle \underline{s} \rangle$ en $\langle \underline{s}' \rangle$, waarbij

$$\underline{p} = (0, 0, 1), \quad \underline{q} = (1, 0, 1), \quad \underline{r} = (0, 1, 1), \quad \underline{s} = (2, 2, 1), \quad \underline{s}' = (-1, -1, 1).$$

a) Bepaal de projectieve afbeelding A_π van π , zó dat

$$A_\pi \langle \underline{p} \rangle = \langle \underline{p} \rangle, \quad A_\pi \langle \underline{s} \rangle = \langle \underline{s}' \rangle \quad \text{en voor elke } \lambda \in \mathbb{R}, \quad A_\pi \langle \underline{q} + \lambda \underline{r} \rangle = \langle \underline{q} + \lambda \underline{r} \rangle .$$

Oplossing.

Is

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

de matrix, behorend bij de lineaire afbeelding A van A_π . De elementen van A worden berekend uit:

$$A(0, 0, 1) = (0, 0, \alpha) , \quad A(2, 2, 1) = (-\delta, -\beta, \delta) ,$$

$$A(1, \lambda, 1 + \lambda) = (\gamma\lambda, \gamma\lambda, \gamma(1 + \lambda)) \quad \text{voor alle } \lambda .$$

Men vindt:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\delta & 0 \\ -\frac{1}{2}\delta & -\frac{1}{2}\delta & \delta \end{bmatrix} \quad (\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) .$$

$\delta = 2$ stellend geldt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

$\det A \neq 0$, dus A_π is een projectieve afbeelding.

Tevens vindt men

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

- b) Bepaal (hoewel reeds gegeven) de invariante projectieve punten en rechten van A_π .

Oplossing. Uit $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ wordt gevonden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ met eigenruimte}$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

dus juist het vlak OQR.

$\lambda_3 = 2$ met eigenvector $(0,0,1)$, dus de rechte OP.

- c) Beschouw het affiene vlak $\alpha : x_3 = 1$. Bepaal de rechte in α die door A_π afgebeeld wordt op de oneigenlijke rechte.

Oplossing. Is (x,y) een punt in α en (x_1, x_2, x_3) het bijbehorende projectieve punt in π .

$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2 + 2x_3)$; dit is een oneigenlijk punt als $x_1 + x_2 = 2x_3$. In α is dat dus de rechte $x + y = 2$.

- d) Beschouw in α de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Bepaal in α het A_π -beeld van deze cirkel.

Oplossing. De bij de cirkel behorende verzameling van projectieve punten in π liggen op de kegel $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3^2$.

Is

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = A(x_1, x_2, x_3) ,$$

dan is

$$(x_1, x_2, x_3) = A^{-1}(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1, x'_2, \frac{1}{2}x'_1 + \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{2}x'_3) .$$

Het beeldpunt ligt dus op de kegel:

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = 2(\frac{1}{2}x'_1 + \frac{1}{2}x'_2 + \frac{1}{2}x'_3)^2 .$$

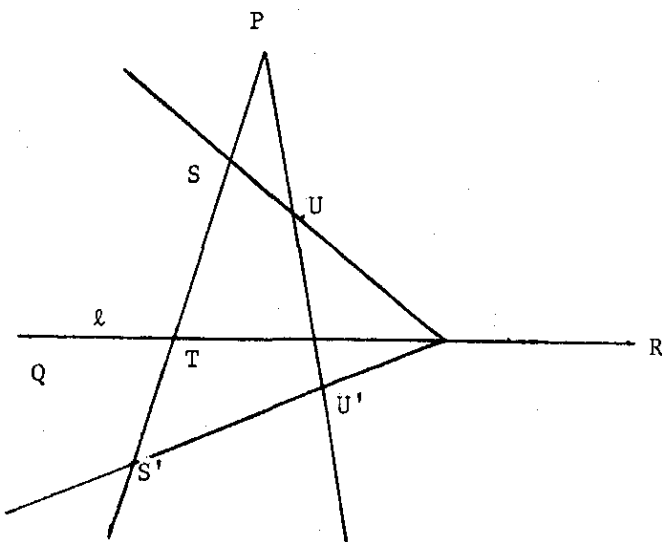
In α is dat de kromme:

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2,$$

dus $(x - y)^2 - 2x - 2y - 1 = 0$, d.i. een parabool.

Dit laatste kan zonder berekening ook ingezien worden omdat in α de cirkel n.l. aan $x + y = 2$ raakt.

II.



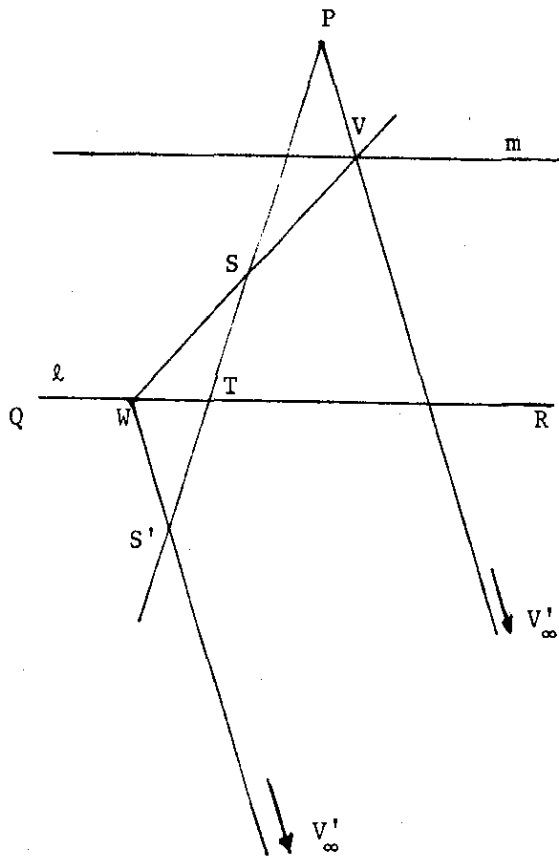
Dezelfde afbeelding als beschreven in I, wordt nu synthetisch bekeken.

Beschouw de projectieve afbeelding A_π , die P invariant laat, de lijn QR puntsgewijze invariant, terwijl $A_\pi(S) = S'$. In I waren de punten P, S en S' collineair gekozen. Dat moest ook wel, omdat PS twee vaste punten heeft, n.l. P en T. Deze afbeelding heet een quasiperspectiviteit. Het beeld U' van een punt U wordt aldus gevonden:

- 1° U' op PU
- 2° SU en $S'U'$ snijden elkaar op ℓ .

Dit levert tevens een methode om punten te vinden die door A_π overgaan in oneigenlijke punten (affien gesproken!).

Is n.l. V'_∞ zo'n oneigenlijk punt, dan wordt V gevonden als snijpunt van PV'_∞ en WS, als W het snijpunt is van $S'V'_\infty$ en ℓ . De rechte m die door A_π wordt afgebeeld op de oneigenlijke rechte, gaat door V en is $\parallel \ell$ (waarom?).



Gevolg. Een kegelsnede die m raakt wordt door A_π afgebeeld op een kegelsnede met één oneigenlijk punt.

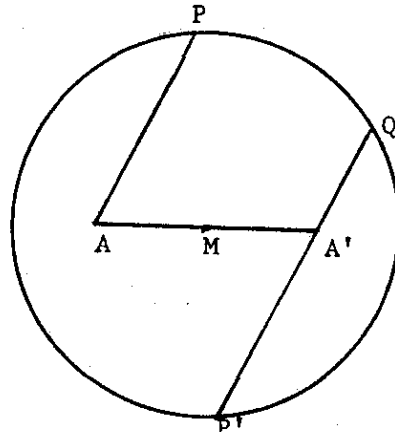
N.B. In deze synthetische beschrijving zitten axiomatische zaken verborgen, die niet besproken zijn in de syllabus.

7.3. Schriftelijke tentamens

1. In het Euclidische vlak $E(2, \mathbb{F})$ met karakteristiek $\neq 2$ geldt

$$\forall \underline{x} \in E \setminus \{0\} ((\underline{x}, \underline{x}) \neq 0).$$

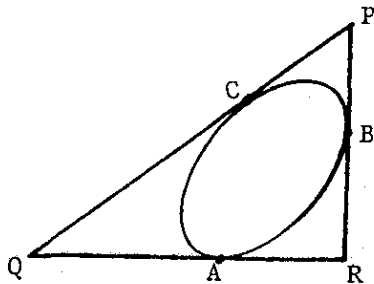
Het punt A ligt niet, het punt P ligt wel op de cirkel met middelpunt M en (straal)² = r . De punten A' en P' zijn de gespiegelden van A en P t.o.v. M . De lijn $P'A'$ snijdt de cirkel voor de tweede keer in Q .



Bewijs dat

- a) $PA \parallel P'A'$
- b) het product $\|PA\|^2 \cdot \|QA'\|^2$ is onafhankelijk van de ligging van P op de cirkel.

2.



In $PG(2, \mathbb{R})$ snijden de raaklijnen in de onderling verschillende punten A, B en C van een kegelsnede elkaar in de punten P, Q en R .

- a) Bewijs dat AP, BQ en CR door één punt gaan.
- b) Teken en formuleer de in a) genoemde eigenschap voor het affiene geval waarin QR de oneigenlijke rechte is.

i

3. In \mathbb{R}^3 wordt de cirkel met vergelijkingen $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ vanuit $C = (0,0,c)$ geprojecteerd op het vlak $z = 0$. (we nemen $c > 0$).
- Voor welke waarden van c is de projectie een ellips, hyperbool dan wel een parabool?
 - Bepaal de vergelijking van de bol die de gegeven cirkel bevat en $O = (0,0,0)$ tot middelpunt heeft.
 - Voor welke waarde van c is de projectie een cirkel?
4. Zij M een veelvlak in \mathbb{R}^3 met h hoekpunten, r ribben en z zijvlakken en waarvan de ribben zich vanuit een inwendig punt van M op een boloppervlak om M laten projecteren. Neem verder aan dat in M ieder zijvlak p ribben heeft en dat in ieder hoekpunt q zijvlakken samen komen. Zo'n veelvlak in \mathbb{R}^3 heet een regelmatig veelvlak.
- Bewijs dat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$.
 - Bewijs dat in \mathbb{R}^3 ten hoogste 5 regelmatige veelvlakken bestaan.
5. In de syllabus is de dekpuntstelling van Brouwer geformuleerd voor het speciale topologische complex B^n , de n -dimensionale massieve bol in \mathbb{R}^n . Geldt de dekpuntstelling voor een topologisch complex X in de onderstaande gevallen? (Geef een korte toelichting op Uw antwoord).
- $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.
 - $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$.
 - $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

In de opgaven 1, 2 en 3 wordt de karakteristiek van het lichaam \mathbb{F} ongelijk aan 2 en ongelijk aan 3 ondersteld.

1. In $A(3, \mathbb{F})$ zijn gegeven de punten B, C, D en E. Deze punten liggen niet in één vlak. Van een affiene transformatie T is gegeven:

$$T(B) = C, T^2(B) = B, T(D) = E, T^2(D) = D$$

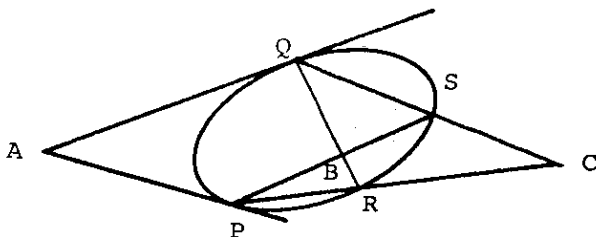
- Bepaal T.
 - Bepaal het T-beeld van het zwaartepunt van $\triangle BDC$.
 - Bepaal de punten die onder T in zichzelf overgaan.
2. In $E(2, \mathbb{F})$ geldt $\forall \underline{x} \in E \setminus \{0\} ((\underline{x}, \underline{x}) \neq 0)$.

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en (straal)² = r.

Een lijn ℓ raakt deze cirkel, d.w.z. ℓ heeft precies één punt met de cirkel gemeen.

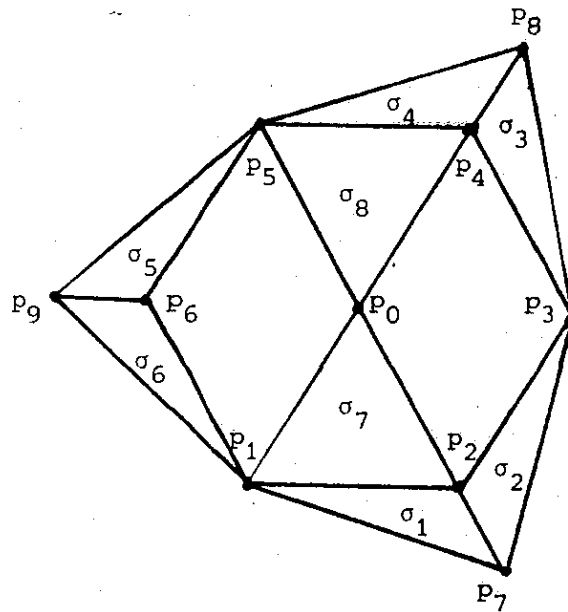
- Bewijs dat ℓ loodrecht op de bijbehorende straal staat.
- De raaklijn m aan de cirkel is evenwijdig ℓ .
Een derde raaklijn aan de cirkel snijdt ℓ in A en m in B.
Bewijs dat AM loodrecht op BM staat.

3. In $PG(2, \mathbb{F})$ is gegeven de kegelsnede K met daarop vier verschillende punten P, Q, R en S. De raaklijnen in P en Q aan K snijden elkaar in A, PS en QR snijden elkaar in B, terwijl RP en QS elkaar in C snijden.



- Bewijs dat A, B en C op één rechte liggen.
- Formuleer de in a) genoemde eigenschap in het affiene geval, waarbij PQ als oneigenlijke rechte genomen wordt.

4.



Gegeven is het 2-complex K (zie figuur), bestaande uit de 2-simplexen σ_1 t/m σ_9 , de op hun randen gelegen 1-simplex en de 0-simplex p_0 t/m p_9 .

Bepaal de samenhangsgetallen van K en motiveer Uw antwoord.

5. Gegeven zijn de volgende symbolen (op te vatten als topologische complexen).

ABDEOPQRT689

- a) Bepaal de samenhangsgetallen van ieder.
- b) Geef de verzamelingen van met elkaar topologisch equivalente symbolen.
- c) Welke van de volgende uitspraken is waar, resp. onwaar?
Geef een bewijs resp. een tegenvoorbeeld.
 - (i) Als twee topologische complexen topologisch equivalent zijn dan hebben ze dezelfde samenhangsgetallen.
 - (ii) Als twee topologische complexen dezelfde samenhangsgetallen hebben dan zijn ze topologisch equivalent.

1. In $A(2, \mathbb{F})$, met karakteristiek van \mathbb{F} ongelijk aan 2, zijn gegeven de niet op één rechte gelegen punten B, C en D.

Van een affiene transformatie T is gegeven:

$$T(B) = C, T(C) = B, T(D) \neq D \text{ en } T^2(D) = D.$$

a) Bepaal T.

b) Zij $P \in A(2, \mathbb{F})$ en $P' := T(P)$. Bewijs dat het midden van het lijnstuk PP' invariant is onder T.

2. In $E(2, \mathbb{F})$ zijn gegeven een cirkel met middelpunt M en $(\text{straal})^2 = r$ en een punt S met $\|SM\|^2 = s$. Een lijn door S snijdt de cirkel in de punten A en B. Bewijs dat $\|SA\|^2 \|SB\|^2 = (s - r)^2$.

3. In $PG(2, \mathbb{R})$ is gegeven een kegelsnede K, daarop drie verschillende punten A, B en C en de bijbehorende raaklijnen aan K. De raaklijn in C snijdt de koorde AB in F; dezelfde raaklijn snijdt de raaklijnen in A en B in de punten D resp. E.

a) Bewijs dat het puntenpaar C, F het paar D, E harmonisch scheidt.

b) Hoe luidt de stelling, waarvan in a) het bewijs gevraagd wordt, in het affiene geval, wanneer AB als oneigenlijke rechte genomen wordt?

4. We willen een boloppervlak verdelen in één driehoek, vijf vierhoeken en één vijfhoek.

a) Bepaal het benodigde aantal hoekpunten.

In elk hoekpunt komen drie of vier ribben samen.

b) Bepaal het aantal hoekpunten waarin drie ribben samenkomen.

c) Laat door middel van een schets zien dat bedoelde verdeling mogelijk is.

(Aanwijzing: Begin met de vijfhoek.)

5.
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

a) Geef een continue afbeelding van $B \setminus \{(0, 0)\}$ op S.

b) Geef een continue afbeelding van B in S.

c) Bewijs dat er géén continue afbeelding van B op S bestaat, die op S de identiteit is.

1. In $E(2, \mathbb{F})$ snijden de lijnen ℓ en m elkaar in A . Een lijn p snijdt ℓ en m in resp. P en P' ; een lijn q die evenwijdig met p is, snijdt ℓ en m in resp. Q en Q' .
 Als $\|AQ\|^2 = k \|AP\|^2$ ($k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $\|AP\|^2 \neq 0$), dan is ook $\|AQ'\|^2 = k \|AP'\|^2$.
 Bewijs dit.

2. In $PG(2, \mathbb{R})$ is gegeven de kegelsnede K , met daarop drie verschillende punten A , B en C . De raaklijn in A (aan K) snijdt BC in P , die in B snijdt AC in Q en die in C snijdt AB in R .

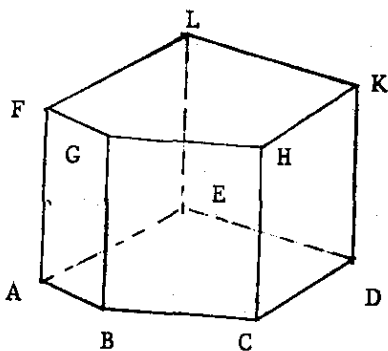
- a. Bewijs dat P , Q en R op één rechte ℓ liggen.
 b. Bewijs dat ℓ de kegelsnede K niet snijdt.

3. π is het door $V(3, \mathbb{R})$ gedefinieerde projectieve vlak en α het affiene vlak met vergelijking $x_3 = 1$. De lineaire afbeelding $A: V \rightarrow V$, gegeven door de matrix $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (op standaardbasis) induceert een projectieve

transformatie A_π van π .

- a. Bepaal de onder A_π invariante punten van α .
 b. Voor elk punt P in α en het beeldpunt $P' = A_\pi(P)$ in α geldt dat PP' door één vast punt in α gaat (mits $P \neq P'$). Bewijs dit.

4.



Trianguleer het primatisch oppervlak $F G H K L$ (zie figuur).

$A B C D E$.

Bewijs m.b.v. de stelling van Euler-Poincaré dat voor dit oppervlak geldt: $H - R + Z = 2$, waarin

H = aantal hoekpunten van het prisma,

R = aantal ribben van het prisma,

Z = aantal zijvlakken van het prisma.

5. Voor een n -dim. topologisch complex K wordt het Poincaré-polynoom gedefinieerd door $P(x) := \sum_{i=0}^n h_i x^i$, waarin h_i de samenhangsgetallen van K zijn. Hier volgen enige voorbeelden:



de cirkel: $P(x) = 1 + x$.



de sfeer (bolopp.): $P(x) = 1 + x^2$.

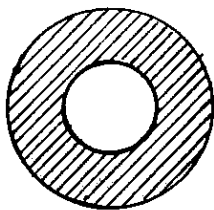


de torus (opp.): $P(x) = 1 + 2x + x^2$.

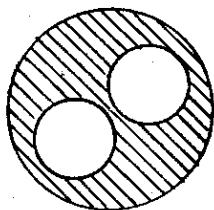
Opgave. Geef van de volgende topologische complexen de $P(x)$:



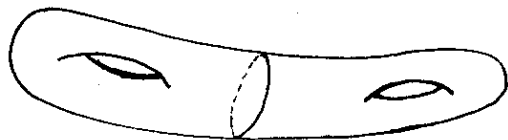
dubbellus



schijf met gat



schijf met twee gaten



dubbele torus (oppervlak)

de massieve bol

de massieve bol met daaruit weggelaten een massieve torus.

6. i) Bewijs: elke 3×3 -matrix A , waarvan de elementen positieve reële getallen zijn, heeft een positieve reële eigenwaarde.

Bij het bewijs kan gebruik worden gemaakt van de volgende drie ware beweringen.

Zij $B := V \cap S$, waarin:

$$V := \{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \},$$

$$S := \{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\underline{x}\|^2 = 1 \}, \text{ dan:}$$

- a) B is topologisch equivalent met de cirkelschijf.
 - b) de doelpuntstelling van Brouwer geldt ook voor een continu afbeelding $f: B \rightarrow B$
 - c) Als $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de bij A behorende lineaire afbeelding is, dan wordt door $f(\underline{x}) := \frac{A\underline{x}}{\|A\underline{x}\|}$ een continu afbeelding van B naar B gedefinieerd.
- ii) Bewijs de beweringen b) en c).

1. In $A(2, \mathbf{F})$, met karakteristiek van \mathbf{F} ongelijk aan 2, zijn gegeven de punten P , Q en R die niet op één lijn liggen. Van de affiene transformatie T is gegeven dat $T(P) = P$ en $T(Q) = Q$.

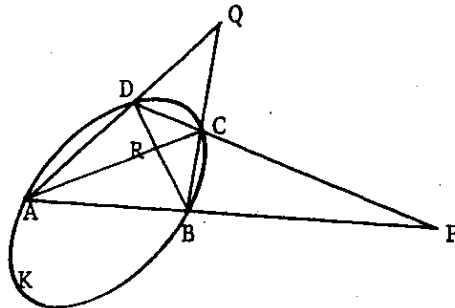
Bewijs:

- Voor alle punten X van de lijn PQ geldt $T(X) = X$.
 - Als $T(R) = R$ dan is T de identiteit.
 - Als $T^2(R) = R$ dan is T^2 de identiteit.
 - Als T^2 de identiteit is, maar T niet de identiteit, wat is dan de meetkundige betekenis van T ?
2. Het vectorvlak $V := V(2, \mathbf{F})$ over een lichaam \mathbf{F} met karakteristiek ongelijk 2 is voorzien van een inproduct $(\ , \)$, d.w.z. er geldt: voor alle $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ en $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ is $(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x})$, $(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}, \underline{z}) = \alpha(\underline{x}, \underline{z}) + \beta(\underline{y}, \underline{z})$ en $\forall \underline{v} \in V ((\underline{v}, \underline{z}) = 0) \Rightarrow (\underline{z} = \underline{0})$.
- In het bijbehorende Euclidische vlak $E(2, \mathbf{F})$ beschouwen we 4 verschillende punten A , B , C en D met de volgende eigenschappen:

- geen drietal van A, B, C, D ligt op een rechte,
- $\|AB\|^2 = \|BC\|^2 = \|CD\|^2 = \|DA\|^2$.

Bewijs dat $ABCD$ een parallellogram is.

3.



In het projectieve vlak $PG(2, \mathbf{F})$, met karakteristiek van \mathbf{F} ongelijk 2, is gegeven de kegelsnede K , daarop de punten A , B , C en D en de snijpunten P, Q, R van de verbindingslijnen (zie figuur). Bewijs dat PR de poollijn is van Q t.o.v. K .

4. Bewijs dat voor het n -simplex $\alpha_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1} p_n$ geldt:

$$\partial \partial \alpha_n = 0.$$

5. Trianguleer een kubus door middel van vijf viervlakken en verifieer de stelling van Euler-Poincaré.

6. Beschouw de vergelijkingen

$$ux_4 + vx_3 = x_2, \quad ux_3 - vx_4 = x_1.$$

a) Wat stellen deze vergelijkingen voor in het (u,v) -vlak?

b) Wat stellen deze vergelijkingen voor in de (x_1, x_2, x_3, x_4) -ruimte?

Het (u,v) -vlak wordt opgevat als het vlak $z = 0$ van de (x,y,z) -ruimte. Beschouw de sferen

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Door stereografische projectie kan $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ een-eenduidig worden afgebeeld op het (u,v) -vlak.

c) Beschrijf de stereografische projectie.

d) Geef een meetkundige interpretatie van de Hopfvezeling in termen van het (u,v) -vlak.

1. In het affiene vlak $A(2, \mathbb{F}_5)$ zijn de volgende punten gegeven:

$$P = (0,0), P' = (1,1), Q = (1,0), Q' = (3,2), R = (0,1) \text{ en } R' = (0,4).$$

a) Bepaal de affiene transformatie $T: A \rightarrow A$, zó dat

$$T(PQR) = P'Q'R'.$$

b) Als Z het zwaartepunt is van ΔPQR , bewijs dan dat $T(Z)$ het zwaartepunt is van $\Delta P'Q'R'$.

2. In het Euclidische vlak $E(2, \mathbb{F})$, met karakteristiek $\neq 2$, is van de vierhoek $ABCD$ gegeven dat $\|AB\|^2 = \|BC\|^2$ en $\|CD\|^2 = \|AD\|^2$.

Bewijs dat $AC \perp BD$.

3. Zij $V(3, \mathbb{R})$ de vectorruimte van dimensie 3 over de reële getallen. Zij π het daardoor gedefinieerde projectieve vlak en zij α het affiene vlak met vergelijking $x_3 = 1$. De lineaire afbeelding $A: V \rightarrow V$, gegeven door de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

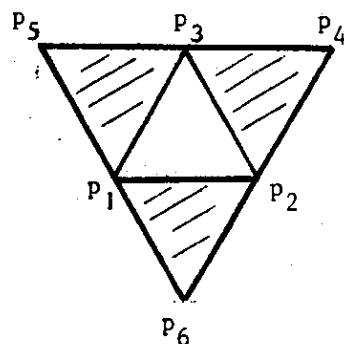
induceert een projectieve transformatie A_π van π .

a) Bepaal de rechte in α die door A_π overgaat in de oneigenlijke rechte van α .

b) Bewijs dat de in α gelegen cirkel $x^2 + y^2 = 1$ door A_π overgaat in een parabool in α .

c) Onderzoek voor welke waarden van $r > 0$ de in α gelegen cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ door A_π overgaat in een ellips, hyperbool, respectievelijk parabool.

4. Het 2-complex K bestaat uit de 2-simplexen $P_1P_3P_5$, $P_2P_3P_4$, $P_1P_2P_6$ en de deelsimplexten daarvan.



a) Welke van de volgende 1-ketens zijn 1-cykels en welke zijn rand-1-ketens:

$$P_1P_5 + P_5P_3 + P_3P_1 + P_3P_2 + P_2P_4 + P_4P_3 \cdot$$

$$P_1P_5 + P_5P_3 + P_3P_4 + P_4P_2 + P_2P_6 + P_6P_1 \cdot$$

b) Bepaal de samenhangsgetallen h_0 , h_1 , h_2 van K .

Beredeneer Uw antwoord.

c) Controleer de formule van Euler-Poincaré voor K .

5. Bewijs dat de volgende verzamelingen topologisch equivalent zijn, door een expliciete topologische afbeelding aan te geven:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} \text{ en } \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} \cdot$$

6. In \mathbb{R}^3 , met coördinaten (x, y, z) , is gegeven de sfeer

$$S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cdot$$

In \mathbb{R}^4 , met coördinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) is gegeven de sfeer

$$S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \cdot$$

De afbeelding $\varphi: S^3 \rightarrow S^2$ is gegeven door

$$x = 2(x_1x_3 + x_2x_4), \quad y = 2(x_2x_3 - x_1x_4), \quad z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \cdot$$

a) Bewijs dat $\varphi(S^3) \subset S^2$.

b) Neem $(x, y, z) \in S^2$ en $(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$. Bewijs dat $\varphi^{-1}(x, y, z)$ een grote cirkel op S^3 is. (Aanwijzing: bereken $xx_4 + yx_3 + zx_2$ en $xx_3 - yx_4 + zx_1$.)

c) Bepaal $\varphi^{-1}(0, 0, 1)$.

d) Neem $(x, y, z) \in S^2$, $(x', y', z') \in S^2$, $(x, y, z) \neq (x', y', z')$. Bewijs dat $(\varphi^{-1}(x, y, z)) \cap (\varphi^{-1}(x', y', z')) = \emptyset$.

Hoofdstuk 8. Bijlagen.

8.1. Isometriën van het Euclidische vlak, door C.P. van Nieuwkastele.

In de vlakke meetkunde wordt momenteel vaak gebruik gemaakt van translaties, spiegelingen, rotaties en soms van glijspiegelingen. In dit stuk zullen ze onderzocht en in onderling verband gebracht worden. We vatten het vlak op als de lineaire ruimte over \mathbb{R} van dimensie 2, met daarin het bekende inwendige produkt.

§ 1. Isometrieën

Definitie. Een isometrie is een afbeelding van het vlak in zichzelf die de afstanden behoudt.

Opmerking. Hieruit volgt dat ook de hoeken in grootte behouden blijven.

De samenstelling $M \circ N$ van twee isometrieën M en N noteren we als MN en noemen we het produkt van M en N .

Stelling 1.1. De isometrieën van het vlak vormen t.ov. de produktvorming een groep.

Bewijs dit zelf.

Defenitie. Bij gegeven \underline{a} wordt de translatie $T_{\underline{a}}$ gedefinieerd door:

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (T_{\underline{a}} \underline{x} := \underline{x} + \underline{a}).$$

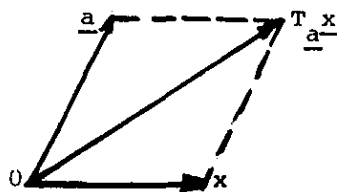


fig. 1.

Opmerkingen.

- 1) Is $\underline{a} = \underline{0}$ dan is T de identieke afbeelding.
- 2) Is $\underline{a} \neq \underline{0}$ dan heeft de translatie geen vaste punten.

Stelling 1.2. Een translatie is een isometrie.

Bewijs. Zijn \underline{x} en \underline{y} twee vectoren dan geldt:

$$|T_{\underline{a}}\underline{x} - T_{\underline{a}}\underline{y}| = |(\underline{x} + \underline{a}) - (\underline{y} + \underline{a})| = |\underline{x} - \underline{y}|,$$

dus afstand is bewaard.

Opdracht. Bewijs dat een translatie een bijectieve afbeelding is.

Opmerking. Men kan bewijzen dat een isometrie een bijectieve afbeelding is.

Stelling 1.3. De translatie van het vlak vormen (t.a.v. de produktvorming) een Abelse groep.

Bewijs. De commutativiteit is een gevolg van:

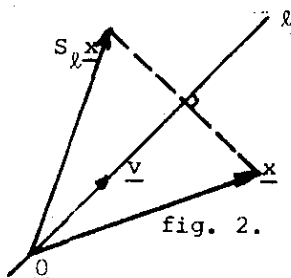
$$(T_{\underline{a}}T_{\underline{b}})\underline{x} = T_{\underline{a}}(\underline{x} + \underline{b}) = \underline{x} + \underline{b} + \underline{a},$$

zodat geldt:

$$T_{\underline{a}}T_{\underline{b}} = T_{\underline{a}+\underline{b}} = T_{\underline{b}+\underline{a}} = T_{\underline{b}}T_{\underline{a}}.$$

Uit de lineaire algebra van \mathbb{R}^2 is bekend dat er twee soorten orthogonale lineaire afbeeldingen zijn, nl. de rotaties en de spiegelingen. Beide zijn isometrieën. Onder een lineaire afbeelding blijft $\underline{0}$ invariant. Voor ons doel is dat niet altijd bruikbaar.

Zij ℓ een lijn met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda\underline{v}$ en



S_ℓ de spiegeling in ℓ , dan geldt:

$$S_\ell \underline{x} = -\underline{x} + 2 \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} \quad (\text{zie achtergronden van de Schoolwiskunde}).$$

Heeft \underline{v} t.a.v. een gekozen (orthonormale) basis de coördinaten

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$$

dan behoort bij S_ℓ de spiegelmatrix σ_φ met $\sigma_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$.

De matrix ρ_φ van de rotatie R_φ om $\underline{0}$ over een hoek φ (in de gebruikelijke tegenwijzerzin georiënteerd) is

$$\rho_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Stelling 1.4.

- a) $\sigma_{\varphi} \sigma_{\psi} = \rho_{\varphi-\psi}.$
- b) $\rho_{\varphi} \rho_{\psi} = \rho_{\varphi+\psi}.$
- c) $\sigma_{\varphi} \rho_{\psi} = \sigma_{\varphi-\psi}.$
- d) $\rho_{\varphi} \sigma_{\psi} = \sigma_{\varphi+\psi}.$

Bewijs van a)

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} \sigma_{\psi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) \\ \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) \end{pmatrix} = \rho_{\varphi-\psi}. \end{aligned}$$

Bewijs zelf b, c en d.

Stelling 1.5. Zij ℓ de lijn $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$ en ℓ' de lijn $\underline{x} = \lambda \underline{v}$ dan geldt voor de spiegeling S_{ℓ} dat

$$S_{\ell} = T_{\underline{a}} S_{\ell'} T_{\underline{a}}^{-1} = T_{\underline{a}} S_{\ell'} T_{-\underline{a}}.$$

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat traslaties en spiegelingen isometrieën zijn.

Voor $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt:

$$S_{\ell} \underline{x} = (T_{\underline{a}} \sigma_{\varphi} T_{-\underline{a}}) \underline{x} = (T_{\underline{a}} \sigma_{\varphi}) (\underline{x} - \underline{a}) = T_{\underline{a}} (\sigma_{\varphi} (\underline{x} - \underline{a})) = \sigma_{\varphi} (\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a}.$$

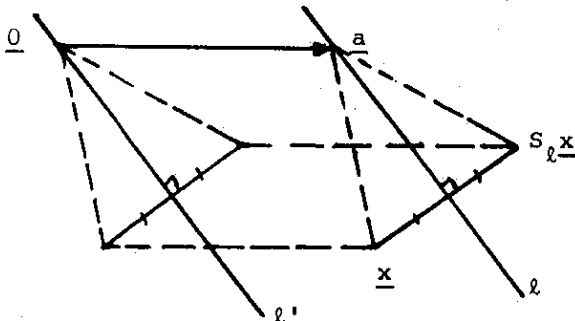


fig. 3.

Opmerkingen.

- 1) Bij een spiegeling zijn de punten op de spiegelas invariant, daarbuiten ligt geen invariant punt.
- 2) Voegen we aan S_ℓ de identieke afbeelding toe, dan ontstaat een groep van twee elementen.

Stelling 1.6. Voor de rotatie $R_{\underline{a}, \varphi}$ om het centrum \underline{a} en over de hoek φ geldt:

$$R_{\underline{a}, \varphi} = T_{\underline{a}} R_{\varphi} T_{\underline{a}}^{-1} = T_{\underline{a}} R_{\varphi} T_{-\underline{a}}.$$

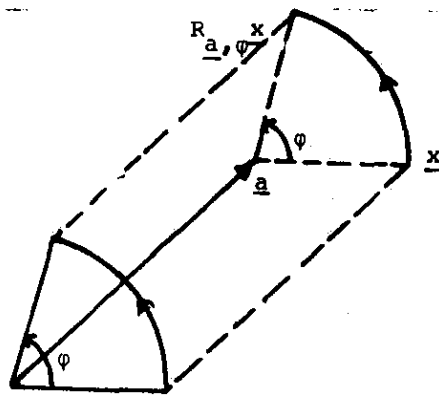


fig. 4.

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat translaties en rotaties isometrieën zijn. Voor $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt:

$$R_{\underline{a}, \varphi} \underline{x} = (T_{\underline{a}} R_{\varphi} T_{-\underline{a}}) \underline{x} = R_{\varphi} (\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a}.$$

Stelling 1.7. De rotaties om een vast punt \underline{a} vormen een Abelse groep.

Bewijs. De commutativiteit volgt uit:

$$R_{\underline{a}, \varphi} R_{\underline{a}, \psi} = R_{\underline{a}, \varphi + \psi} = R_{\underline{a}, \psi + \varphi} = R_{\underline{a}, \psi} R_{\underline{a}, \varphi}.$$

Stelling 1.8. Het produkt van twee spiegelingen is of een translatie, of een rotatie.

Bewijs a). Vallen de spiegelassen samen dan is het produkt de identiteit.

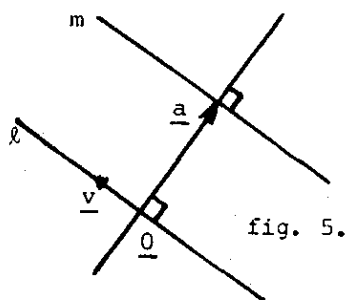


fig. 5.

Stel de assen evenwijdig.

Zij $l: \underline{x} = \lambda \underline{v}$ en $m: \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$.

Gemakshalve is hierbij $(\underline{a}, \underline{v}) = 0$ genomen.

$$\begin{aligned} (S_m S_l) \underline{x} &= S_l (S_m \underline{x} - \underline{a}) + \underline{a} = S_l^2 \underline{x} - S_l \underline{a} + \underline{a} = \\ &= \underline{x} + \underline{a} - S_l \underline{a} = \underline{x} + \underline{a} + \underline{a} - 2 \frac{(\underline{a}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} = \underline{x} + 2\underline{a} = T_{2\underline{a}} \underline{x}, \end{aligned}$$

zodat $S_m S_l$ een translatie is over een afstand $2|\underline{a}|$ en in de richting \underline{a} .

c). Stel dat l en m elkaar snijden in a . (gemakshalve is O het snijpunt).

Stel l heeft de parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 \end{pmatrix}$ en

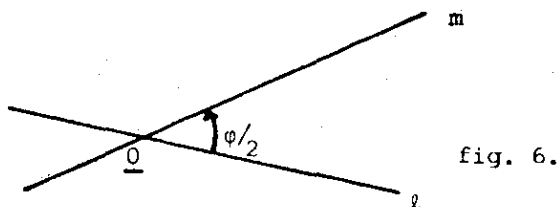


fig. 6.

$m: \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha + \varphi}{2} \\ \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \end{pmatrix}$ dan behoort bij S_l de matrix σ_α en bij S_m de matrix

$\sigma_{\varphi+\alpha}$ en omdat $\sigma_{\varphi+\alpha} \sigma_\alpha = \rho_\varphi$ (zie st. 1.4.) geldt $S_m S_l = R_\varphi$, dus een rotatie om het snijpunt van l en m over een hoek die gelijk is aan twee maal de (georiënteerde) hoek tussen l en m .

□

Opmerking. Ga na dat in het algemeen $S_m S_l \neq S_l S_m$.

Stelling 1.9. De translatie $T_{\underline{a}}$ is voor te stellen als $S_m S_l$, waarin l een lijn is loodrecht de translaterichting en $m := T_{\frac{1}{2}\underline{a}} l$.

Bewijs dit zelf.

Stelling 1.10. De rotatie $R_{\underline{a}, \varphi}$ is voor te stellen als $S_m S_l$, waarin l een lijn is door \underline{a} en $m := R_{\underline{a}, \frac{1}{2}\varphi} l$.

Bewijs dit zelf.

Opmerking. Het is geen beperking om $-\pi < \varphi \leq \pi$ te nemen.

Stelling 1.11. Het produkt van twee rotaties is òf een translatie òf een rotatie.

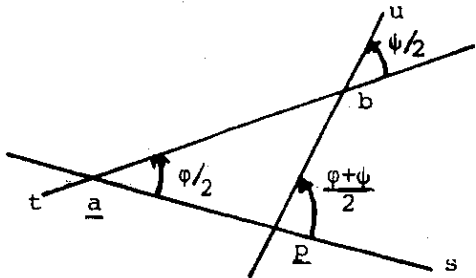


fig. 7.

Bewijs. Laten $R_{\underline{a}, \varphi}$ en $R_{\underline{b}, \psi}$ de twee rotaties zijn.

Als $\underline{a} = \underline{b}$, dan is $R_{\underline{b}, \psi} R_{\underline{a}, \varphi} = R_{\underline{a}, \varphi + \psi}$.

Als $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan geldt wegens 1.10:

$$R_{\underline{a}, \varphi} = S_{\underline{t}} S_{\underline{s}} \quad (\text{zie figuur 7})$$

en

$$R_{\underline{b}, \psi} = S_{\underline{u}} S_{\underline{t}} \quad (\text{zie figuur 7}),$$

zodat

$$R_{\underline{b}, \psi} R_{\underline{a}, \varphi} = S_{\underline{u}} S_{\underline{t}} S_{\underline{t}} S_{\underline{s}} = S_{\underline{u}} S_{\underline{s}}.$$

Is $\frac{\varphi + \psi}{2} = k\pi$ (voor zekere $k \in \mathbb{Z}$), dus $s \parallel u$, dan is $S_{\underline{u}} S_{\underline{s}}$ een translatie (zie 1.8).

Snijden u en s elkaar in \underline{p} , dan is (wegens 1.8)

$$R_{\underline{b}, \psi} R_{\underline{a}, \varphi} = S_{\underline{u}} S_{\underline{s}} = R_{\underline{p}, \varphi + \psi},$$

dus een rotatie. □

Opmerking. In het algemeen is

$$R_{\underline{a}, \varphi} R_{\underline{b}, \psi} \neq R_{\underline{b}, \psi} R_{\underline{a}, \varphi}.$$

Tenslotte voeren we nog één isometrie in, n.l. de glijspiegeling.

Definitie. Zij ℓ een lijn en \underline{a} een vector, waarbij \underline{a} niet loodrecht ℓ is. De glijspiegeling $G_{\ell, \underline{a}}$ wordt gedefinieerd door $G_{\ell, \underline{a}} = S_{\ell} T_{\underline{a}}$.

Opmerking. Ga na wat $S_{\ell} T_{\underline{a}}$ voorstelt als \underline{a} loodrecht op ℓ is (zie 1.9).
Zij $\ell: \underline{x} = \underline{b} + \lambda \underline{v}$ en $\ell': \underline{x} = \lambda \underline{v}$. Nu geldt:

$$\begin{aligned} G_{\ell, \underline{a}} \underline{x} &= S_{\ell} T_{\underline{a}} \underline{x} = T_{\underline{b}} S_{\ell} T_{-\underline{b}} T_{\underline{a}} \underline{x} = T_{\underline{b}} S_{\ell} (\underline{x} + \underline{a} - \underline{b}) = \\ &= S_{\ell} (\underline{x} + \underline{a} - \underline{b}) + \underline{b} = S_{\ell} (\underline{x} - (\underline{b} - \underline{a})) + (\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \\ &= S_{\underline{m}} \underline{x} + \underline{a} = (T_{\underline{a}} S_{\underline{m}}) \underline{x}, \text{ waarbij } \underline{m} = T_{-\underline{a}} \ell. \end{aligned}$$

Conclusie: Bij elke glijspiegeling $G_{\ell, \underline{a}}$ is er een lijn $m(\parallel \ell)$, zodat $G_{\ell, \underline{a}} = T_{\underline{a}} S_{\underline{m}}$.

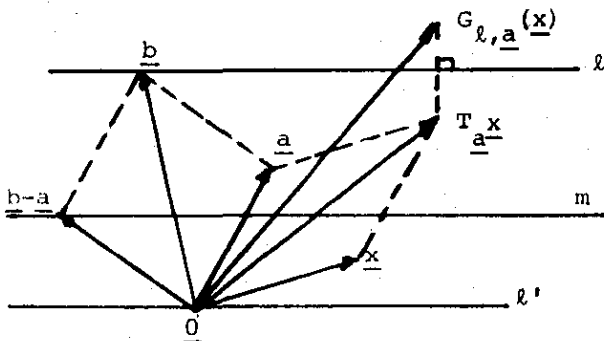


fig. 8.

Opmerking. Een glijspiegeling houdt één rechte vast.

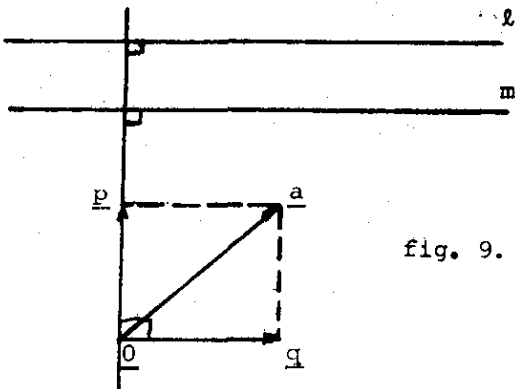


fig. 9.

Zij $\underline{a} = \underline{p} + \underline{q}$, waarin \underline{p} loodrecht en \underline{q} evenwijdig ℓ zijn (fig 9).

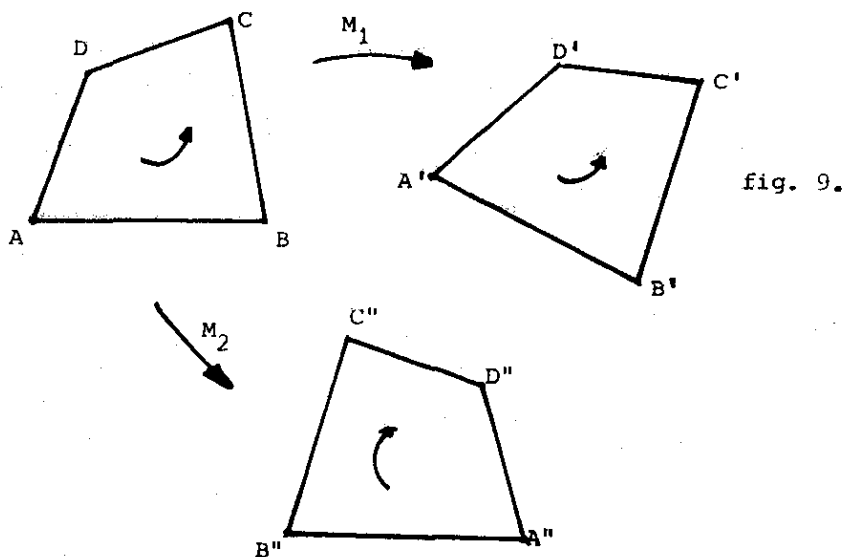
$T_{\underline{a}} = T_{\underline{p}} T_{\underline{q}}$, maar $T_{\underline{p}} = S_{\ell} S_{\underline{m}}$ waarbij $\underline{m} = T_{\underline{p}} \ell$ (zie 1.9).

$$G_{\ell, \underline{a}} \underline{x} = (S_{\ell} T_{\underline{a}}) \underline{x} = (S_{\ell} S_{\underline{m}} S_{\underline{m}} T_{\underline{q}}) \underline{x} = (S_{\underline{m}} T_{\underline{q}}) \underline{x}.$$

Hieruit blijkt dat de punten op m slechts een translatie in de richting \underline{q} ondergaan. Conclusie: m is variant.

§ 2. Isometrie en oppervlak.

Definitie. Als een figuur isometrisch kan worden afgebeeld op een andere, dan heten de figuren congruent (\cong).



Voor wat de oriëntatie van de figuur betreft, zijn er twee soorten isometrieën, direct (M_1) en indirecte (M_2).

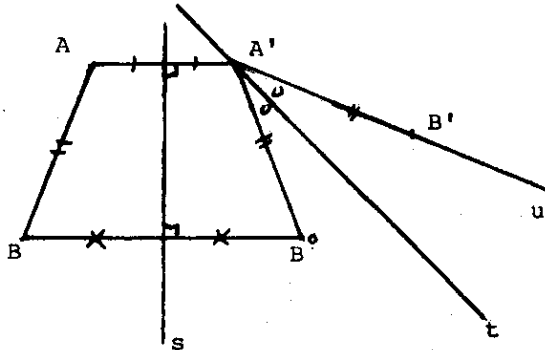
Voeren we, zoals in de lineaire algebra, een georiënteerd volume in, dan wordt door M_1 de oppervlakte van ABCD met +1, door M_2 de oppervlakte van ABCD met -1 vermenigvuldigd.

Bij translatie en rotaties wordt de oppervlakte met +1, bij spiegelingen en glijspiegelingen wordt de oppervlakte met -1 vermenigvuldigd.

Stelling 2.1. De verzameling rechtstreekse isometrieën is een normale ondergroep van de groep der isometrieën.

Bewijs dit zelf.

We gaan nu na hoe een isometrie vastgelegd kan worden.



Zijn AB en $A'B'$ twee lijnstukken met dezelfde lengte, dan zijn er verschillende isometrieën M mogelijk met

$$M(A) = A' \text{ en } M(B) = B'.$$

Immers: $(S_t S_s)A = S_t(A') = A$ en

$$(S_t S_s)(B) = S_t(B') = B' \quad (\text{zie figuur 11}),$$

maar $S_u S_t S_s$ presteert hetzelfde terwijl het verschillende isometrieën zijn (denk aan de vermenigvuldigingsfactor $+1$).

Stelling 2.2. De isometrie die de niet-collineaire punten $\underline{a}, \underline{b}$ en \underline{c} invariant laat, is de identieke afbeelding.

Bewijs. Er is één isometrie die $\underline{0}, \underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ invariant laat, want $\underline{b} - \underline{c}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ zijn onafhankelijk. Deze afbeelding is de identieke, I genaamd. De afbeelding $T_{\underline{a}} I T_{-\underline{a}}$ doet het gevraagde.

Zij M een isometrie met de gevraagde eigenschap, dan laat $T_{-\underline{a}} M T_{\underline{a}}$ de punten $\underline{0}, \underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ invariant, dus $T_{-\underline{a}} M T_{\underline{a}} = I$ zodat $M = T_{\underline{a}} I T_{-\underline{a}}$. □

Stelling 2.3. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a}, \underline{b}$ en \underline{c} , die niet op één rechte liggen en de vectoren $\underline{a}', \underline{b}'$ en \underline{c}' zodanig dat

$$|\underline{a} - \underline{b}| = |\underline{a}' - \underline{b}'|, \quad |\underline{b} - \underline{c}| = |\underline{b}' - \underline{c}'| \text{ en } |\underline{c} - \underline{a}| > |\underline{c}' - \underline{a}'|.$$

Er is nu precies één isometrie M met $M(\underline{a}) = \underline{a}'$, $M(\underline{b}) = \underline{b}'$ en $M(\underline{c}) = \underline{c}'$.

Bewijs. Eerst bewijzen we dat er hoogstens één isometrie is. Stel er is een tweede, N genaamd.

Dan geldt $M(\underline{a}) = N(\underline{a})$, $M(\underline{b}) = N(\underline{b})$ en $M(\underline{c}) = N(\underline{c})$, dus $N^{-1}M(\underline{a}) = \underline{a}$, $N^{-1}M(\underline{b}) = \underline{b}$ en $N^{-1}M(\underline{c}) = \underline{c}$, zodat volgens stelling 2.2 $N^{-1}M$ de identiteit is.

Conclusie $N = M$.

Vervolgens construeren we M . Kies de oorsprong in \underline{a}' .

$$T_{-\underline{a}} \underline{a} = \underline{0}, T_{-\underline{a}} \underline{b} = \underline{b} - \underline{a} \text{ en } T_{-\underline{a}} \underline{c} = \underline{c} - \underline{a}.$$

Er is precies één isometrie O (n.l. een lineaire orthogonale afbeelding) met

$$O(\underline{0}) = \underline{0}, O(\underline{b} - \underline{a}) = \underline{b}', O(\underline{c} - \underline{a}) = \underline{c}',$$

zodat de gezochte isometrie M te schrijven is als $OT_{-\underline{a}}$. ||

Opmèrkingen.

1. Als O de spiegeling S_ℓ in de lijn ℓ is dan is $M = S T_{-\underline{a}}$.
Als ℓ loodrecht \underline{a} , dan is M een spiegeling (zie stelling 1.9). Als ℓ niet loodrecht \underline{a} is, dan is M een glijspiegeling.
2. Als O de rotatie R_φ voor zekere φ is, dan is $M = R_\varphi T_{-\underline{a}}$.
Voor $\varphi = 2k\pi$ (voor zekere $k \in \mathbb{Z}$) is M een translatie.
Voor andere φ is $T_{-\underline{a}} = S_m S_\ell$, waarin m door $\underline{0}$ en loodrecht \underline{a} is terwijl $\ell = T_{\frac{1}{2}\underline{a}} m$. Verder is $R_\varphi = S_n S_m$ met $n = R_{\frac{1}{2}\ell} m$, zodat $M = S_n S_\ell$, dus $R_{\frac{1}{2}\ell, \frac{1}{2}\varphi}$.

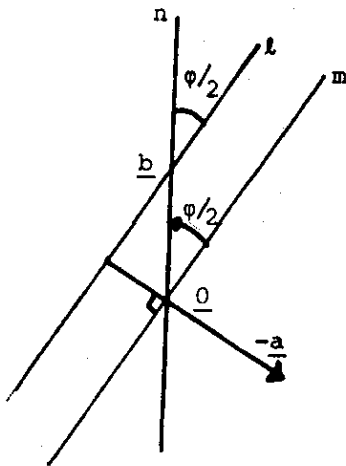


fig. 12.

Gevolg van stelling 2.3.

De in de stelling bedoelde isometrie is te schrijven als produkt van hoogstens 3 spiegelingen.

Bij 1 spiegeling is M een indirecte isometrie (zie opm. 1).

Bij 2 spiegelingen is M een directe isometrie. M is een translatie of een rotatie (zie opm. 2).

Bij 3 spiegelingen is M een indirecte isometrie. M is een glijspiegeling.

Stelling 2.4. Een isometrie M die precies één punt invariant laat, is een rotatie (met draaiingshoek $\neq 0$).

Bewijs. Kies het invariant punt als 0 . M is nu een rotatie of een spiegeling. Echter de spiegeling laat alle punten van de spiegelas invariant. □

Stelling 2.5. De isometrie M die twee punten invariant laat is de identiteit of een spiegeling.

Bewijs. Kies de oorsprong is één der invariante punten en noem het andere \underline{b} . Er zijn 2 mogelijkheden:

- a) M is de spiegeling, waarvoor $M\underline{b} = \underline{b}$ geldt (spiegelas valt dus langs \underline{b}).
- b) M is een draaiing; maar $M\underline{b} = \underline{b}$, dus M is de identiteit. □

Opmerking. De beide in 2.5 bedoelde isometrieën vormen een groep (zie ook opmerking 2 bij 1.4).

Stelling 2.6. Een isometrie M zonder enig invariant punt is een translatie of een glijspiegeling.

Bewijs. Voor M zijn er twee mogelijkheden:

- a) M is een directe isometrie. Volgens het gevolg van st. 2.3 is M dan een rotatie of een translatie, dus M is een translatie.
- b) M is een indirecte isometrie. Volgens het gevolg van st. 2.3 is M dan een spiegeling of een glijspiegeling, dus M is een glijspiegeling. □

Stelling 2.7. De translaties van het vlak vormen een Abelse groep die normale ondergroep is van de isometriegroep.

Bewijs. De groep is al in stelling 1.3 genoemd. Zij T_a een translatie ($a \neq 0$) en M een isometrie. $M^{-1}T_a M$ is van directe isometrie. Bovendien heeft $M^{-1}T_a M$ geen invariant punt, omdat $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n (T_a M \underline{x} \neq M \underline{x})$, zodat volgens st. 2.6 $M^{-1}T_a M$ een translatie is. □

Stelling 2.8. Het produkt van een rotatie en een spiegeling is òf een spiegeling of een glijspiegeling.

Bewijs. Het produkt is een indirecte afbeelding. □

Stelling 2.9. Het produkt van een glijspiegeling en een translatie is een glijspiegeling of een spiegeling.

Bewijs. Het produkt is een indirecte afbeelding. □

Stelling 2.10. Het produkt van een glijspiegeling en een spiegeling is een translatie òf een rotatie. □

Bewijs. Het produkt is een directe afbeelding. □

Stelling 2.11. Het produkt van een glijspiegeling en een rotatie is een glijspiegeling òf een spiegeling.

Bewijs. Het produkt is een indirecte afbeelding. □

Stelling 2.12. Het produkt van twee glijspiegelingen is een translatie òf een rotatie.

Bewijs. Het produkt is een directe afbeelding. □

In onderstaande tabel zijn alle produkten vermeld met daarbij de nummers van de stellingen.

	T	R	S	G
G	G,S st. 2.9	G,S st. 2.11	R,T st. 2.10	R,T st. 2.12
S	G,S DEF	G,S st. 2.8	R,T st. 1.8	
R	R,T opm. 1 bij st. 2.3	R,T st. 1.11		
T	T st. 1.3			

fig. 13.

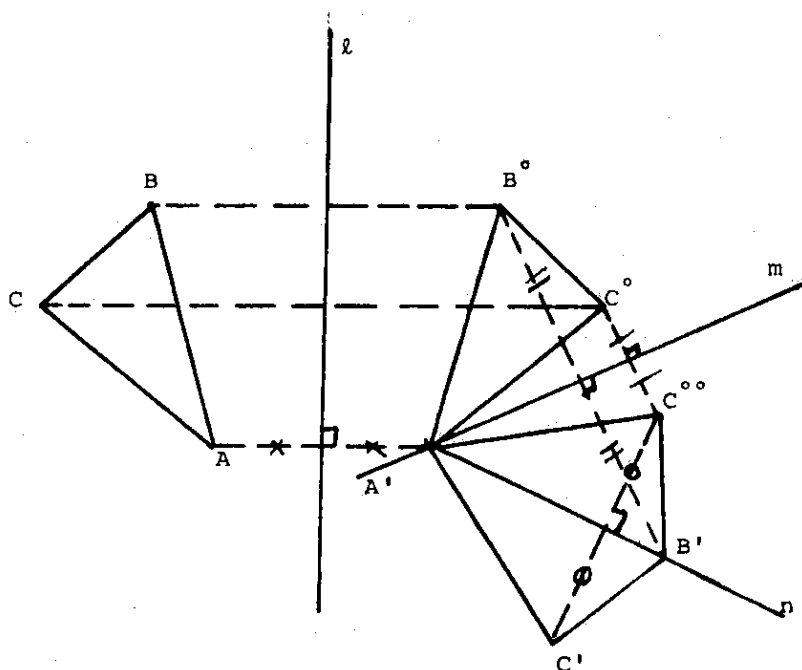
Uit dit overzicht blijkt dat ons systeem van vier basisisometrieën gesloten is voor produktvorming.

§ 3. Meetkundige constructies.

We zullen nu nog enige constructies uitvoeren, die bij § 2 behoren.

De constructie bij stelling 2.3.

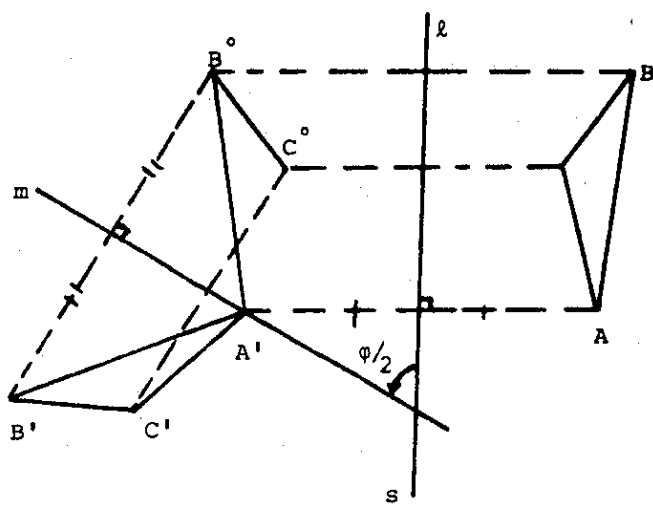
We bekijken het meest algemene geval, dus dat er inderdaad 3 spiegelingen mogelijk zijn.



$$M = S_n S_m S_l$$

fig. 14.

We lichten nog één bijzonder geval toe. Bij een rechtstreekse isometrie die geen translatie is, is M een rotatie. Hoe zo'n rotatie gevonden wordt, is in fig. 15 te zien.



$$M = S_m S_l = R_{\underline{S}, \varphi}$$

fig. 15.

Constructie bij stelling 2.8.

We gaan uit van S_t en $R_{\underline{a}, \varphi}$ en construeren $R_{\underline{a}, \varphi} S_t$.

a) \underline{a} ligt op t (zie figuur 16).

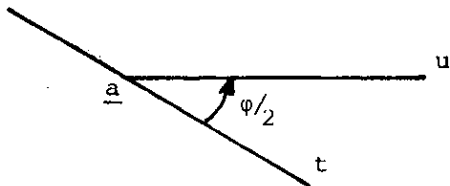


fig. 16.

$$R_{\underline{a}, \varphi} S_t = S_u S_t S_t = S_u, \text{ waarbij}$$

$$u = R_{\underline{a}, \varphi/2} t.$$

b) \underline{a} ligt niet op t (zie figuur 17).

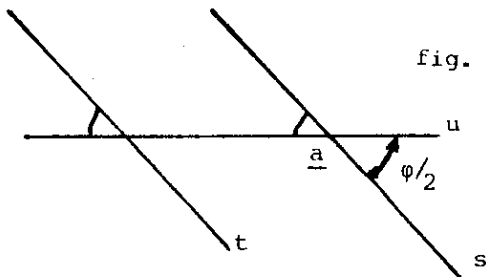


fig. 17.

$$R_{\underline{a}, \varphi} S_t = S_u S_s S_t.$$

Hierbij is s evenwijdig t
gekozen en $u = R_{\underline{a}, \varphi/2} s$.

Echter $S_s S_t$ is een translatie $T_{\underline{b}}$, dus $R_{\underline{a}, \varphi} S_t = S_u T_{\underline{b}}$.

Is \underline{b} loodrecht u , dan is het produkt een spiegeling, anders een glijspiegeling.

Constructie bij stelling 2.10.

We gaan uit van S_m en $G_{\ell, \underline{a}}$ en construeren $S_m G_{\ell, \underline{a}} = S_m S_\ell T_{\underline{a}}$.

1°. Als $m = \ell$, dan is het produkt de translatie $T_{\underline{a}}$ (niet getekend).

2°. Als m evenwijdig ℓ is, dan is $S_m S_\ell$ een translatie, dus $S_m G_{\ell, \underline{a}}$ ook (niet getekend).

3°. Stel dat m en n elkaar in \underline{b} snijden zodat $m = R_{\underline{b}, \frac{1}{2}\varphi} \ell$. $T_{\underline{a}} = S_{\underline{q}} S_{\underline{p}}$, waarbij \underline{q} dan \underline{b} en loodrecht \underline{a} is in $p = T_{\underline{a}} \underline{q}$. Ook is $S_{\underline{m}} S_{\underline{\ell}} = R_{\underline{b}, \varphi}$, waarbij $m = R_{\underline{b}, \frac{1}{2}\varphi} \ell$ is. Nu geldt $S_{\underline{m}} S_{\underline{\ell}} T_{\underline{a}} = R_{\underline{b}, \varphi} S_{\underline{q}} S_{\underline{p}}$, maar $R_{\underline{b}, \varphi} = S_{\underline{n}} S_{\underline{q}}$, met $n = R_{\underline{b}, \varphi/2} \underline{q}$, zodat $S_{\underline{m}} S_{\underline{\ell}} T_{\underline{a}} = S_{\underline{n}} S_{\underline{p}}$. Snijden p en n elkaar in \underline{c} dan is $S_{\underline{m}} G_{\underline{\ell}, \underline{a}} = R_{\underline{c}, \varphi}$.

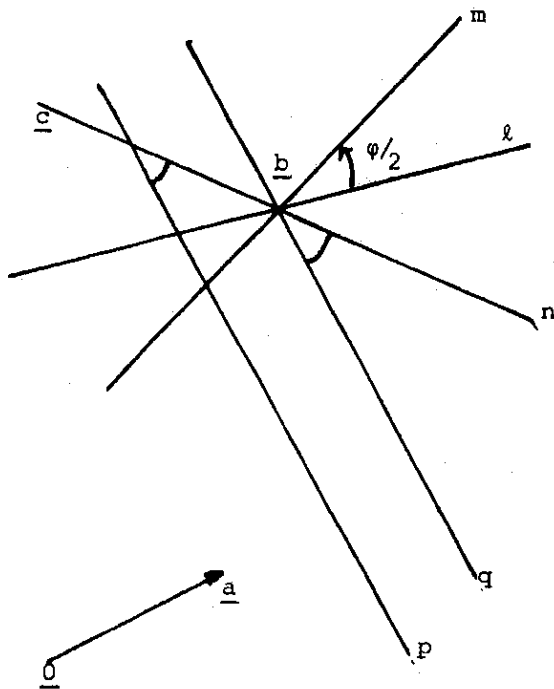


fig. 18.

Opgave. Construeer zelf $G_{\underline{\ell}, \underline{a}} S_{\underline{m}}$.

Constructie bij stelling 2.11.

We gaan uit van $R_{\underline{a}, \varphi}$ en $G_{\underline{s}, \underline{b}}$ en construeren $M := R_{\underline{a}, \varphi} G_{\underline{s}, \underline{b}}$. Nu is $R_{\underline{a}, \varphi} = S_{\underline{u}} S_{\underline{t}}$, waarbij \underline{t} een willekeurige lijn door \underline{a} is, en $\underline{u} = R_{\underline{a}, \frac{1}{2}\varphi} \underline{t}$. We kiezen $\underline{t} \parallel \underline{s}$, zodat $S_{\underline{t}} S_{\underline{s}}$ een translatic, zeg $T_{\underline{c}}$ is. $M = S_{\underline{u}} S_{\underline{t}} S_{\underline{s}} T_{\underline{c}} = S_{\underline{u}} T_{\underline{c}} T_{\underline{b}} = S_{\underline{u}} T_{\underline{c} + \underline{b}}$.

Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

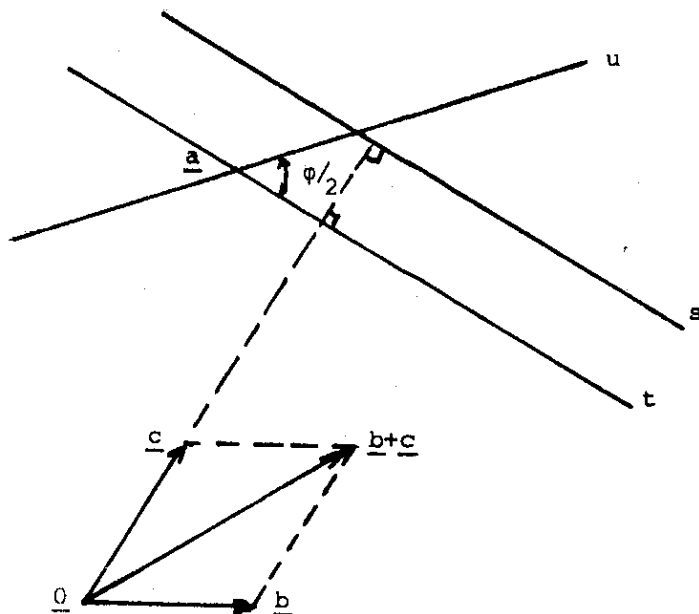


fig. 19.

1. $\underline{c} + \underline{b}$ is loodrecht u ; nu is $T_{\underline{c}+\underline{b}} = S_u S_v$, met $v = T_{-\perp(\underline{c}+\underline{b})} U$, zodat $M = S_u S_u S_v = S_v$, dus een spiegeling (niet uitgevoerd).
2. $\underline{c} + \underline{b}$ is niet loodrecht u ; nu is $M = G_{u, \underline{c}+\underline{b}}$.

Constructie bij stelling 2.12.

We gaan uit van $G_{\ell, \underline{a}}$ en $G_{m, \underline{b}}$ en construeren $M = G_{m, \underline{b}} G_{\ell, \underline{a}}$. In verband met de opmerking bij de defenitie van glijspiegeling herschrijven we $G_{m, \underline{b}} = S_m T_{\underline{b}}$ tot $T_{\underline{b}} S_{m'}$.
 $M = T_{\underline{b}} S_{m'} S_{\ell} T_{\underline{a}}$. Als $m' \parallel \ell$, dan is $S_{m'} S_{\ell}$ een translatie, zeg $T_{\underline{c}}$, zodat $M = T_{\underline{b}+\underline{c}+\underline{a}}$ (niet getekend).
 Stel m' snijdt ℓ in \underline{c} , dan is $S_{m'} S_{\ell} = R_{\underline{c}, \varphi}$ (zie fig. 20) $M = T_{\underline{b}} R_{\underline{c}, \varphi} T_{\underline{a}}$.
 Maar $T_{\underline{a}} = S_p S_n$, waarin p de rechte door \underline{c} en loodrecht \underline{a} is terwijl $\underline{n} = T_{\underline{a}} p$.

Ook is $R_{c,\varphi} = S_q S_p$, waarin $q = R_{c, \frac{1}{2}\varphi}$. Nu is $M = T_b S_q S_n$, met $q \perp n$. Snijden q en n elkaar in \underline{d} , dan is $S_q S_n = R_{a,\varphi}$. $T_b = S_t S_s$ en $R_{d,\varphi} = S_s S_u$. Hierbij kiezen we s door \underline{d} en $\perp \underline{b}$ en $t = T_{\frac{1}{2}b}$ en $u = R_{d, -\frac{1}{2}\varphi} s$, zodat $M = T_b R_{d,\varphi} = S_t S_u$. Snijden t en u elkaar in \underline{f} , dan is $M = R_{f,\varphi}$.

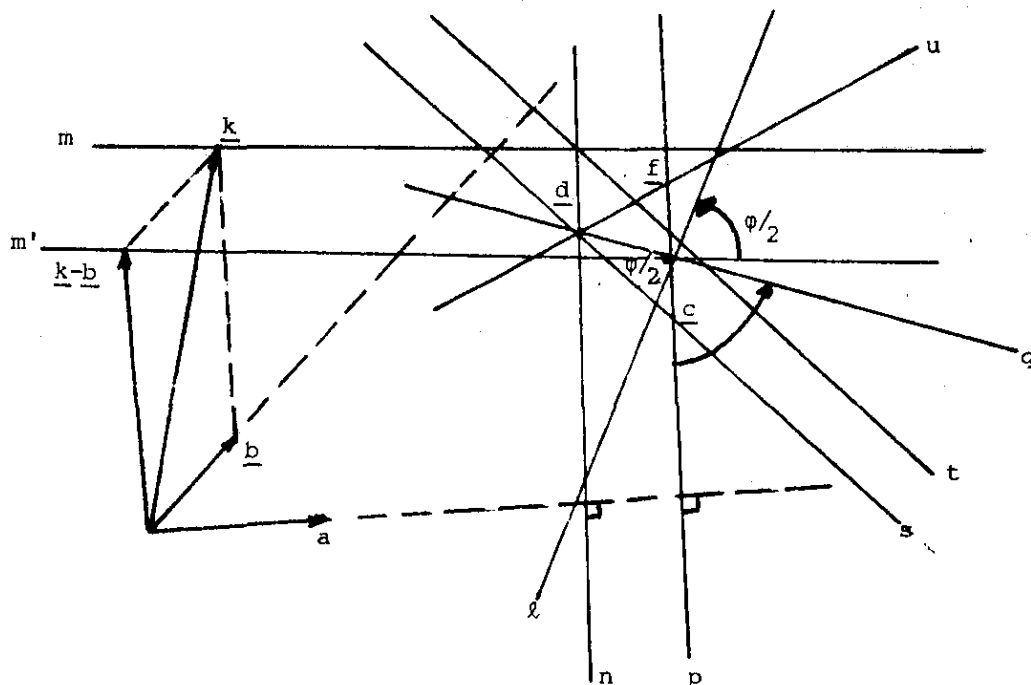


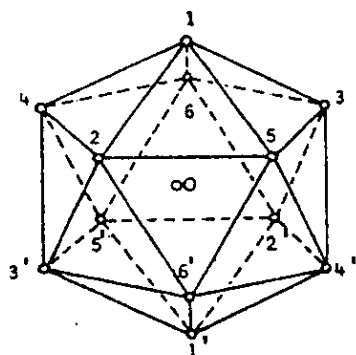
fig. 20.

8.2. Meetkunde van de ruimte *)

1. Inleiding

"Meetkunde van de ruimte, dat is toch geen onderwerp voor onderzoek in deze tijd! Dat is ouderwets. Zelfs op de middelbare school is de stereometrie al afgeschaft". Misschien is dit de eerste reactie van een potentiële lezer. Het is de bedoeling van dit artikel om een paar wetenschappelijke argumenten aan te dragen voor het tegendeel. Wij concentreren ons daarbij op het regelmatige 20-vlak, ook wel icosaeëder genoemd, en op de voetbal met zijn zwarte vijfhoeken en witte zeshoeken. De meer algemene achtergronden, die verband houden met informatietheorie en met de benadering van integralen, zullen wij slechts terloops vermelden.

Overigens, op de middelbare school zal de ruimtelijke meetkunde weldra weer voorkomen op de eindexamenprogramma's.



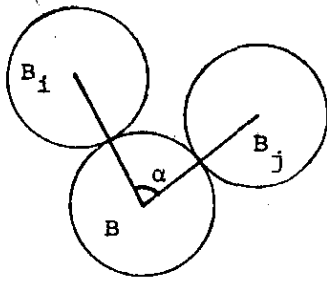
De icosaeëder.

2. Het probleem van de 13 bollen

De icosaeëder heeft $h = 12$ hoekpunten, $r = 30$ ribben, $v = 20$ vlakken (in overeenstemming met Euler's relatie $h-r+v = 2$). De 12 hoekpunten zijn paarsgewijs elkaars tegenvoeters en liggen op 6 diagonalen door het middelpunt van de icosaeëder. Het kost weinig moeite om in te zien dat elk tweetal diagonalen dezelfde hoek α heeft. Een beetje moeilijker is het bewijs dat $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$. Maar hieruit volgt een interessante conclusie. Beschouw de omgeschreven bol van onze icosaeëder, en voorts de 12 andere even grote bollen die elk de omgeschreven bol raken in een hoekpunt van de icosaeëder. De bewering is dat die 12 omringende bollen twee aan twee los van elkaar liggen.

*) THE Berichten, december 1981.

Inderdaad, in het vlak door de middelpunten van de omschreven bol B en twee rakende bollen B_i en B_j geldt:



$\cos \alpha = 1/\sqrt{5} < \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, dus $\alpha > 60^\circ$,
terwijl als B_i en B_j elkaar zouden raken,
de middelpunten van B , B_i , B_j een gelijkbenige
driehoek met $\alpha = 60^\circ$ zouden vormen.

Hieruit volgt in de eerste plaats dat het mogelijk is om een bol te omringen door 12 even grote rakende bollen die twee aan twee niets gemeen hebben. Maar ook is duidelijk dat er nog beweging mogelijk is: men kan de omringende bollen nog een beetje verplaatsen over de centrale bol. Misschien komt er dan wel plaats voor een dertiende even grote rakende bol. Kan dat of kan dat niet? In de 17e eeuw was dit een beroemde strijdvraag tussen Gregory (ja) en Newton (nee). Later bleek dat Newton gelijk had. Het bewijs is niet gemakkelijk en doorzichtig; soms heeft men het gevoel dat het laatste woord erover nog niet is gezegd (voor een recent bewijs zie J. Leech, Math. Gazette 40 (1956) 22-23). In het vlak is het analoge probleem eenvoudig: om een centrale cent kan men 6 elkaar en de centrale cent rakende centen leggen. Voorts is het probleem opgelost voor de dimensies 8 (240 rakende bollen) en 24 ($2 \times \binom{28}{5}$ rakende bollen).

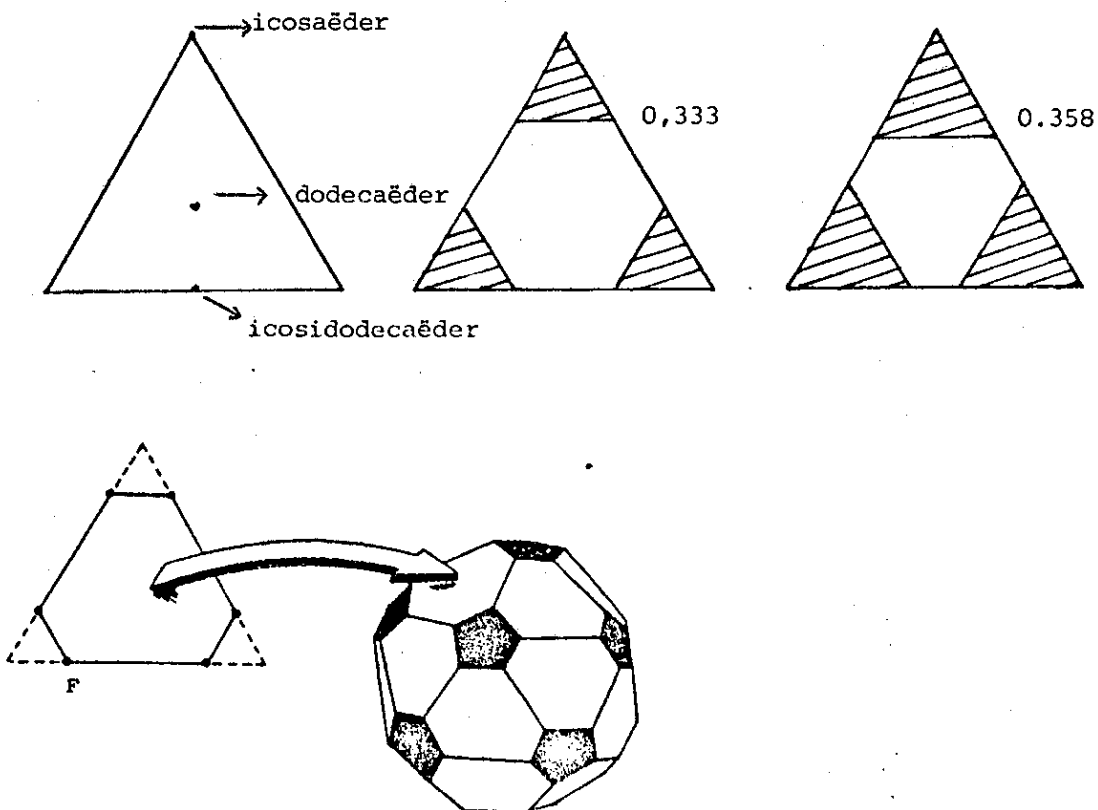
Het is nauwelijks te verwachten dat het probleem van de 13 bollen na drie eeuwen nog actuele betekenis heeft. Dat is wel het geval met het volgende verwante probleem, dat een rol speelt in de hedendaagse literatuur. Hoe moet men p punten plaatsen op het oppervlak van een bol zo dat de kleinste afstand der punten zo groot mogelijk is? Dit probleem heeft verschillende interpretaties, bij voorbeeld in de informatietheorie (berichten door een kanaal sturen met een zo gering mogelijke onderlinge storing), en in de biologie (verdeling van putjes op het oppervlak van een stuifmeelkorrel). Een lugubere interpretatie is die van p elkaar met raketten bestokende dictatoren op de aardbol.

3. De groep der symmetrieën

Een symmetrie van de icosaeëder is een draaiing of een spiegeling die de icosaeëder in zichzelf overvoert. Zulke symmetrieën zijn de volgende: de draaiingen over 72° , 144° , 216° , 288° om een diagonaal (bij voorbeeld om de diagonaal $1, 1'$ in de figuur); de draaiingen over 120° , 240° om de lijn door de middens van twee overstaande zijvlakken; de draaiingen over 180° om de lijn door de middens van twee overstaande ribben. In totaal zijn dit $1 + 6 \times 4 + 10 \times 2 + 15 \times 1 = 60$ draaiingen. Dan zijn er nog 60 spiegelingen.

In totaal heeft de icosaeëder 120 symmetrieën. Het resultaat van twee achtereenvolgens uitgevoerde symmetrieën is weer een symmetrie; de verzameling der 120 symmetrieën vormt een groep S , genaamd de icosaeëdergroep.

Wij fixeren de icosaeëder, en beschouwen een willekeurig punt P . Als de 120 symmetrieën op P worden toegepast, dan ontstaat een eindige verzameling van punten, die wij de baan van P onder de groep S noemen. De baan van het midden van een zijvlak bestaat uit de 20 middens van de zijvlakken, elk 6 x geteld, tesamen de hoekpunten vormend van een dodecaeëder (regelmatig 12-vlak). De baan van het midden van een ribbe bestaat uit de 30 middens van de ribben, elk 4 x geteld, tesamen de hoekpunten vormend van een zogenaamd icosidodecahedron (dit is geen regelmatig veelvlak omdat niet alle zijvlakken dezelfde vorm hebben). In de baan van een punt op een derde van een ribbe herkent men de 60 punten van de voetbal, elk 2 x geteld. Inderdaad, de 60 punten vormen (zwarte) regelmatige vijfhoeken rond de hoekpunten, en (witte) regelmatige zeshoeken in de zijvlakken van de icosaeëder. Het is van belang voor het hierna volgende dat men ook inziet dat de baan van een ander punt van de ribbe, niet precies op een derde, ook bestaat uit 60 punten die regelmatige vijfhoeken vormen rond de hoekpunten, en (niet noodzakelijk regelmatige) zeshoeken in de zijvlakken. Verschuiving van het beginpunt langs een ribbe geeft verandering van afmeting van de zeshoeken en van de regelmatige vijfhoeken, met behoud van het voetbalachtige karakter van de 60 punten.



4. Benadering van de bol

Hoe "goed" wordt het oppervlak van de eenheidsbol Ω benaderd door een eindige verzameling X van punten van Ω ? Bij voorbeeld, hoe "goed" wordt Ω benaderd door de 12 hoekpunten van een icosaeëder? Plaats eerst eenheidsmassa's in de 12 punten en smeer die vervolgens homogeen uit over Ω ; hoe "goed" lijken de massastelsels op elkaar? Om deze vragen te beantwoorden moeten wij eerst afspreken wat onder "goed" wordt verstaan. De volgende definitie lijkt redelijk. De benadering X van Ω heeft sterkte n , wanneer het gemiddelde over Ω en het gemiddelde over X van elke veelterm f_n gelijk zijn, waarin f_n een veelterm is in de coördinaten x, y, z van totale graad $\leq n$. Bij voorbeeld, als $f_n(x, y, z) = x^a y^b z^c$ met $a+b+c = n$, dan houdt de eis in dat de n^e momenten van Ω en van X dezelfde zijn. De vraag is nu welke sterkte n wordt bereikt door de 12 punten van de icosaeëder, en door de 60 punten van de voetbal (hetzij in zijn regelmatige vorm, hetzij in een meer onregelmatige vorm).

Voordat wij toekomen aan de beantwoording van deze speciale vragen, plaatsen wij het probleem nog even in een meer algemene context. Omdat het gemiddelde over een oneindige verzameling (bij voorbeeld over het boloppervlak Ω) moet worden verstaan als een integraal, houdt onze vraag nauw verband met de benadering van integralen door eindige sommen.

5. Invarianten

De icosaeëdergroep S werkt niet alleen op de punten van de bol Ω , maar ook op de op Ω gedefinieerde functies. Als een symmetrie s een punt \underline{x} overvoert in het punt $s(\underline{x})$, dan voert hij de functie $f(\underline{x})$ over in de nieuwe functie $f^s(\underline{x}) := f(s(\underline{x}))$. Sommige functies zijn invariant ten opzichte van S , d.w.z. hebben de eigenschap dat $f = f^s$ voor alle symmetrieën s . Een triviaal voorbeeld is de functie $x^2 + y^2 + z^2$, die immers constant is op Ω . Een ander voorbeeld is $\frac{1}{120} \sum_{s \in S} f^s$, het gemiddelde van een functie f over de icosaeëdergroep S . Bij het zoeken naar S -invariante functies op Ω zou men dus kunnen proberen om bepaalde functies te middelen over S . Misschien komt er dan een constante (bij voorbeeld nul bij het middelen over S van een veelterm van oneven graad), en daar hebben wij niet veel aan. Maar misschien ook geeft dat middelen een echte S -invariant. Eigenlijk zou men moeten weten voor welke graden er S -invariante veeltermen zijn, en zo ja hoeveel. Nu is het interessante dat veel over het antwoord op dit soort vragen reeds sinds de vijftiger jaren bekend is, o.a. door het werk van de Canadese wiskundige Coxeter (welbekend aan de M.C. Escher fans). Voor eindige groepen voortgebracht door spiegelingen heeft hij precies gevonden voor welke graden er invarianten zijn, en hoeveel.

Zo heeft onze icosaeëdergroep S één niet-triviale invariant voor elk der graden 6, 10, 12, 16, 18, etc. Voor de graden kleiner dan zes zijn de invarianten dus blijkbaar triviaal.

6. Een verbetering van de voetbal

Wij keren terug naar de vragen in punt 4 over de sterkte n van de benadering van de bol door een eindige verzameling X . Wanneer X een baan is onder de icosaeëdergroep S , dan behoeven wij slechts na te gaan voor welke n de gemiddelden van de invarianten van de graad n over X en over Ω gelijk zijn. Voor $n \leq 5$ zijn er echter slechts triviale invarianten, en daarvoor is de zaak natuurlijk in orde. Dat betekent dat elke baan onder S een benadering van de bol levert van de sterkte 5. Dit geldt zowel voor de 12 punten van de icosaeëder, als voor de 60 punten van de voetbal. De benadering heeft echter niet de sterkte 6, omdat die ene niet-triviale invariante functie van de graad 6 in de weg zit. Hoe raken wij die invariant kwijt? Moeten we uitzien naar een andere benaderende verzameling? Het ei van Columbus is om de baan te nemen van een nulpunt van de invariante functie van graad 6. Voor de baan van zo'n nulpunt is automatisch voldaan aan de voorwaarde voor de graad 6, dus voor alle graden ≤ 9 , tot de volgende invariant. Zo bereiken wij een benadering van de sterkte 9. Een korte berekening toont aan dat de baan van een punt op 0.358 van een ribbe voldoet, zie de tekening van punt 3. Voor de details verwijzen wij naar het werk van J.M. Goethals en de auteur, Nieuw Archief voor Wiskunde 29 (1981), 50-58.

De conclusie is dat de voetbal horend bij de baan van het punt op 0.358 "beter" is dan de traditionele voetbal, waar "beter" dient te worden opgevat in de zin van punt 4.

Extra plaat

Eindhoven, 8 oktober 1981

JJS/hr.

Correcties bij isometrieën

BLZ	REGEEL	
2	11	v.b. $T_{\underline{a}, \underline{b}}^{-1} = T_{\underline{b}, \underline{a}}^{-1} = T_{\underline{a}+\underline{b}}^{-1} = T_{\underline{b}, \underline{a}}$
2	4	v.o. Heeft <u>y</u> t.o.v. een...
3	4	v.o. dat translaties en...
4	8	v.o. Voor $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt:
4	7	v.o. $\dots = (T_{\underline{a}, \varphi}^{-1} T_{-\underline{a}}) \underline{x} = \rho_{\varphi}(\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a}$
5	12	v.a. in de vector $\underline{x} = \dots$ de letter a vervangen door u (2 keer)
7	-	- In figuur 8 langs de lijn ℓ' de vector <u>y</u> bijtekenen.
7	4	v.o. ... bij $m = T_{-\frac{1}{2}\underline{p}}^{\ell}$ (zie 1.9).
8	-	- "fig. 9" vervangen door "fig.10"
9	-	- Bij de figuur toevoegen "fig.11".
9	5	v.b. Immers: $(S_{\underline{t}} S_{\underline{s}})A = S_{\underline{t}}(A') = A'$ en
9	6	v.b. $(S_{\underline{t}} S_{\underline{s}})B = S_{\underline{t}}(B') = B' \dots$
9	9	v.o. , want $\underline{b} = \underline{a}$
9	2	v.o. ... en $ \underline{c} - \underline{a} = \underline{c}' - \underline{a}' $.
10	12	v.b. ... dan is $M = S_{\underline{\ell}} T_{-\underline{a}}$.
10	18	v.b. ... met $n = R_{\frac{1}{2}\varphi}$, zodat $M = S_n S_{\underline{\ell}}$, dus $= R_{\underline{b}, \frac{1}{2}\varphi}$.
10	1	v.o. toevoegen: (ga dit na).
11	7	v.b. Kies het invariante punt...
12	5	v.b. "of" vervalt.
12	6	v.b. glijspiegeling of een spiegeling.
14	-	- bij figuur 15: $M = S_m S_{\underline{\ell}} = R_{\underline{s}, \varphi}$.
14	-	- In figuur 15 de letter <u>s</u> één centimeter hoger.
15	7	v.o. ... een translatie, zeg $T_{\underline{b}}$, dus...
16	1,2,3	v.b. 3°. Stel dat ℓ en m elkaar in <u>b</u> snijden zò dat $m = R_{\underline{b}, \frac{1}{2}\varphi}$. $T_{\underline{a}} = S_{\underline{q}} S_{\underline{p}}$, waarbij <u>q</u> door <u>b</u> en loodrecht <u>a</u> is en $\underline{p} = T_{-\frac{1}{2}\underline{a}} \underline{q}$. Ook is $S_m S_{\underline{\ell}} = R_{\underline{b}, \varphi}$.
16	4	v.b. Het woord "is" vervalt.
16	-	- bij figuur 18. De letter <u>c</u> plaatsen bij het snijpunt van n en p .
17	2	v.b. ... met $v = T_{-\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{b})} \underline{u}$.
17	6	v.o. ... de definitie van...
18	2	v.b. ... dan is $S_{\underline{q}} S_n = R_{\underline{d}, \varphi}$.
18	-	- In figuur 20 de letter <u>c</u> enige millimeters omhoog.

8.3. Hans Freudenthal, In memoriam L.E.J. Brouwer,
De Groene Amsterdammer, 17 december 1966,

EEN MAN DIE MET ZIJN KOP DOOR DE MUUR LIEP.

Op 2 december j.l. overleed, na te zijn aangereden, de op 27 februari 1881
geboren wiskundige L.E.J. Brouwer. Over zijn betekenis als geleerde, Brouwer
was grondlegger van topologie en intuïtionisme en over de geleerde zelf
handelt ommestand in memoriam van zijn vroegere assistent Prof.dr.H.Freudenthal.

Een gesloten kromme zonder zelfoversnijdingen verdeelt het vlak in precies twee gebieden - iedereen kan dat zien. Een ringoppervlak laat zich niet door vervormingen in een boloppervlak overvoeren - dat is nogal duidelijk. Een gesloten rubbervlies dat een massieve bol omhult, laat zich, tenzij men het scheurt, niet zo deformereren, dat de bol uit de omhulling wordt bevrijd - wie zou het in twijfel trekken? Twee in de ruimte met elkaar geschakelde ringen laten zich niet van elkaar losmaken, zonder er een te verbreken - dat voelt iedereen.

Het zijn nogal evidente uitspraken over figuren in vlak of ruimte, hoewel van een ander karakter dan hetgeen de inhoud van onze schoolmeetkunde vormt. Geen rechte lijnen, platte vlakken, cirkels, afstanden, hoeken. Ook eigenlijk geen bollen, want bij uitspraken zoals daarstraks speelt het geen rol of iets een welgeschapen, als het ware gepolijste, bol is; een aardappel, een cactus doet het even wel, en trouwens alles wat enigszins gelijkt op een bol - een ring is iets heel anders, zoals daarstraks reeds bleek.

De wetenschap van deze ruwe eigenschappen der figuren heet topologie. Want het is een wetenschap, een onderdeel van de wiskunde. Of veeleer het werd een proeve van wetenschap vanaf het oogenblik, dat men trachtte, zulke vanzelfsprekende uitspraken te begrijpen en te bewijzen. En dat was niet gemakkelijk, want hoe meer vanzelfsprekend iets lijkt, des te moeilijker kan het zijn, het te bewijzen, d.w.z. terug te brengen tot nog meer vanzelfsprekende uitspraken.

In de topologie is een lijnstuk alleen maar een soort boog, niets beter en niets slechter dan elke andere enkelvoudige boog. Als zo'n boog in het vlak geplaatst wordt, constateert men, dat hij het vlak niet verdeelt, en als men wiskundige is, tracht men het te bewijzen. Een cirkel is niets beter en niets slechter dan elke andere enkelvoudig gesloten kromme - in het vlak gelegen verdeelt hij het in precies twee gebieden - een stelling voor het eerst door de Franse wiskundige Camille Jordan bewezen (1893) en naar hem genoemd.

De topologie is een wetenschap, een onderdeel van de wiskunde. Niet zoals algebra, meetkunde, goniometrie, analytische meetkunde enz., want dit zijn schoolvakken, volgens opvattingen omtrènt en indelingen van de wiskunde, die op hun minst al sinds de vorige eeuw gewijzigd en vervaagd zijn. In een hedendaagse indeling van de wiskunde kent men veeleer twee fundamentele soorten van structuren, de algebraïsche en de topologische, die elkander dan echter op veelvuldige wijze doordringen.

De topologie is een echte wetenschap - sinds 1909. In 1909 zette L.E.J. Brouwer in de Proceedings der Koninklijke Akademie voor het eerst die nieuwe methode uiteen, waarmee hij in de eerstvolgende jaren, tot 1913, fundamentele topologische stellingen zou bewijzen, een methode, waarmee pas echt topologisch onderzoek mogelijk werd en die thans een dagelijks werktuig in de topologie en haar toepassingen is.

Wel, de topologie, ook Analysis situs genaamd, is ouder, haar voorgeschiedenis kan liefst tot Descartes worden teruggevolgd: Euler, Gauss, Betti, Poincaré, Cantor en de reeds eerder genoemde Jordan hadden ertoe bijgedragen. In 1907 hadden Dehn en Hegaard hun artikel over Analysis situs in de "Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften" afgesloten, in 1908 had Schoenfliess zijn "Bericht" voltooid. De topologie leek een erkende wetenschap waarvan men de omvang, de grenzen, de problematiek goed meende te overzien, uiteraard met enkele onopgeloste problemen, zoals bij elke wetenschap hoort. In werkelijkheid was, wat in deze rapporten als topologie uiteengezet werd, typisch een wetenschap in het prenatale stadium - veel classificatie en weinig inhoud, een samenraapsel van curiositeiten, maar geen samenhangende theorie, geen methode.

Brouwer ontwikkelde een methode: het benaderen van kromme figuren door veelvlakken, van willekeurige afbeeldingen door stuksgewijs lineaire. Hij schiep als bewijsmiddel een begrip, dat verzelfstandigd het gehele topologische onderzoek in 't vervolg zou beheersen: de continue overvoerbaarheid in elkaar van afbeeldingen, of, zoals men het noemt, de homotopie. Met een onfeilbaar instinct koos hij zijn problemen - problemen, die de ontwikkeling van de topologie tot heden toe hebben bepaald.

Omstreeks 1880 had G. Cantor de verrassende ontdekking gedaan, dat in lijnstuk, vierkant en kubus hetzelfde oneindig tal punten zit. Het was een irriterende ontdekking. Lijn, vierkant, kubus zijn aanschouwelijk door hun dimensie onderscheiden. Hoe kon men nog op de aanschouwing vertrouwen, als onder het begrip "dimensie" de fundamenteen werden weggetrokken? En wat bleef er dan nog van de meetkunde over?

Men herstelde van de schrik, toen men de afbeeldingen nader bekeek, waarmee Cantor lijnstuk, vierkant, kubus op elkaar had afgebeeld. Het waren discontinue afbeeldingen. Cantor onaanschouwelijke resultaat was een gevolg van de onaanschouwelijke premisse der discontinue afbeelding.

Maar in 1890 deed een nieuwe ontdekking de wiskundigen schrikken, Peano's ontdekking, dat men het lijnstuk continu op het vierkant, het vierkant continu op de kubus kan afbeelden, met afbeeldingen die men bepaald niet onaanschouwelijk kon noemen. Men kon dus door continue afbeeldingen de dimensie niet alleen verlagen - hetgeen evident is - maar ook verhogen.

Wel, Peano's afbeeldingen hadden toch iets vreemds; ze waren niet ondubbelzinnig. De afbeelding van het lijnstuk op het vierkant, als kromme opgevat, die het vierkant opvult, bezat oneindig veel dubbelpunten, zelfdoorsnijdingen. Maar hoe zou het zijn, al men alleen ondubbelzinnige continue, zgn. topologische, afbeeldingen toeliet? Zouden zij ook nog de dimensie van een figuur kunnen verlagen en verhogen?

Of zou, naar iedereen vermoedde en hoopte, de dimensie een "topologische invariant" zijn? De redding van de dimensie was een fundamenteel probleem geworden. Trouwens, ook op andere gebieden der wiskunde, ver van de topologie, was de topologische invariantie der dimensie een dringend nodig bewijsmiddel. Het ontbrak niet aan pogingen, de stelling te bewijzen, en in speciale gevallen slaagde men er ook in. Maar de algemene uitspraak "er is geen ondubbelzinnige continue afbeelding van een gebied der m -dimensionale op een gebied der n -dimensionale ruimte, als m van n verschilt" scheen alle bewijspogingen te trotseren.

In 1911 slaagde Brouwer erin, de topologische invariantie van de dimensie te bewijzen met de methoden, die hij inmiddels had ontwikkeld. Met deze ontdekking had hij, sinds luttele jaren pas in de wiskundige wereld bekend, zijn roem gevestigd en zich in de rij der grootste wiskundigen van alle tijden geplaatst; in weinige jaren zou blijken, dat hij onder de levenden alleen door Hilbert werd overtroffen.

Brouwer was vanuit de analyse tot de topologie gekomen. Hij had zich met vectorvelden op boloppervlakken bezig gehouden (zoals het veld van richtingen van de magneetnaald van het aardoppervlak), om aan te tonen dat zulk een vectorveld singulariteiten bezit, d.w.z. een punt waar de richting onbepaald, de vector nul wordt (algebraïsch gesteld twee singulariteiten, zoals bij het magnetisch aardveld de twee magnetische polen). Een nauw verwante stelling luidt: Een continue afbeelding van het boloppervlak op zichzelf bezit twee vaste punten. Of: een continue afbeelding van de volle bol in zichzelf bezit een vast punt.

Om van Brouwers methode een idee te geven, keren we terug tot de massieve bol waarvan het oppervlak T , blauw gekleurd, door een rubbervlies S is overdekt, dat binnen wit en buiten rood is. S is afgebeeld op T doordat elk punt van S op een punt van T ligt. S mag veelduldig geplooid op T liggen, soms met de rode zijde naar buiten, soms met de witte. Door het rubbervlies te vervormen, kan ik plooien verwijderen en opnieuw doen ontstaan. Op elk punt van T kunnen een aantal, zelfs oneindig veel, punten van S liggen. Het is Brouwers idee, dit aantal, de "graad" van de afbeelding, op een verfijnde manier te tellen. Hij denkt zich S en T in kleine driehoeken verdeeld en de afbeelding zo benaderd, dat elke driehoek van S op een van T lineair wordt afgebeeld, en hij telt in een punt van T het aantal overdekkende driehoekjes van S algebraïsch: positief die zich naar buiten toe met de rode zijde vertonen, negatief, die het met de witte zijde doen. De algebraïsche som van dit aantal overdekkingen is voor elk punt van T dezelfde: ga ik met het punt van een driehoek in een aangrenzende, dan kan ik wel een plooi van S overschrijden en dus twee overdekkingen kwijtraken of rijker worden; maar per saldo levert dit niets op omdat de een positief en de andere negatief telt. Als ik de afbeelding zelve vervorm, gebeurt iets dergelijks: bij het wegtrekken of het doen ontstaan van een plooi is S vervallen of ontstaan twee overdekkingen van het punt van T , de ene positief en de andere negatief, maar de graad van de afbeelding blijft bij vervormingen van een afbeelding invariant.

Dit is de befaamde stelling van de homotopie-invariantie van de afbeeldingsgraad, waaruit Brouwers andere invariantie-stellingen volgen, te weten de topologische invariantie van dimensie en gebied, de vast-punt-stelling, en de generalisatie van Jordan's stelling: een gesloten oppervlak in de n -dimensionale ruimte verdeelt de ruimte in precies twee delen.

Met deze stellingen is Brouwers topologische werk niet uitgeput. Hij is met een algemene theorie der dimensie begonnen, hij heeft de befaamde translatie-stelling ontdekt en bewezen, en hij heeft het wonderbaarlijke voorbeeld ontdekt van een kromme, die het vlak in drie delen verdeelt, zodat elk punt van die kromme randpunt van elk der drie gebieden is.

Brouwers werk stond er, toen het verscheen, en ook nog lang daarna, voor bekend, onleesbaar te zijn. Als men het tegenwoordig opendoet, begrijpt men deze appreciatie nauwelijks meer. Over enkele tientallen jaren zal het misschien uit de wiskundige literatuur van die tijd het enige zijn dat nóg leesbaar is - als iemand zich dan nog de moeite getroost, onderzoekingen, die totaal in later onderzoek zijn opgegaan, te raadplegen. Brouwers bewuste scherpe stilering steekt thans verfrissend af bij de breedsprakigheid van de meeste van zijn tijdgenoten.

Toentertijd waren er in elk geval maar weinigen, die Brouwers werk diepgaand bestudeerden. Een die het wel deed, was Erhard Schmidt in Berlin, bij wie H. Hopf, thans emeritus in Zürich, topologie leerde, om Brouwers werk op een grootse wijze voort te zetten. Een ander was de Amerikaan J.W. Alexander, die in Brouwers methode vereenvoudigingen aanbracht, waardoor zij een handig werktuig werd. In de jaren twintig werd Brouwer langdurig bezocht door de Russische wiskundige Paul Alexandrov en de Oostenrijkse wiskundigen Vietoris en Menger, die andere aspecten van Brouwers werk verder ontwikkelden. Nog langer werkte in Amsterdam W. Hurewicz, die Brouwers homotopiebegrip systematisch uitgebouwd en er grote successen mee behaald heeft. Maar dit alles geschiedde in een tijd, toen Brouwer nauwelijks nog actief was in de topologie en zelfs als toeschouwer meer en meer de belangstelling ervoor verloor.

Bemoeienissen met de grondslagen der wiskunde.

Bij de buitenwacht is van Brouwers topologische werk weinig, maar des te meer van zijn bemoeienissen met de grondslagen der wiskunde bekend. Brouwers belangstelling hiervoor gaat chronologisch aan die van de topologie vooraf. Zijn proefschrift van 1907 is grondslagentheoretisch. Maar het duurde langer eer deze belangstelling vruchten deed rijpen. Wat men Brouwers intuïtionisme noemt, was in 1907 in nuce aanwezig, maar heeft zijn definitieve vorm pas in 1918 aangenomen. Wat dan, na 1918 ging verschijnen, is de uitwerking van een idee, in de vorm van tijdschriftartikelen, die echter in wezen rondom 1918 moeten zijn ontstaan.

Rond de eeuwwisseling werd de wiskundige wereld opgeschrikt door zekere paradoxen, voortspruitend uit de nieuwe leer der verzamelingen, die het geloof in de betrouwbaarheid der wiskunde aantastten. In 1900 ontwierp D. Hilbert zijn grootse plan, de consistentie van de wiskunde te bewijzen. Hilbert vatte de wiskunde op als een spel, gespeeld volgens precies te formuleren regels, met zekere taalkundige uitdrukkingen, de formules - een spel dat uit als "waar" aangenomen formules nieuwe als waar te erkennen formules afleidde. Men moest nu, volgens Hilbert, aantonen, dat dit spel nimmer alle formules kon produceren, preciezer gezegd, nimmer een formule samen met haar ontkenning.

Brouwer plaatste tegenover deze "formalistische" opvatting van de wiskunde zijn "intuitionistische". Waarheid is voor hem niet door spelregels gedefinieerd. Een uitspraak omtrent iets doelt voor hem op de ideale existentie van een object met de geponeerde eigenschappen, en deze existentie moet door een, uiteraard ideale, constructie worden gewaarborgd. Nu zijn de gebruikelijke bewijzen in de wiskunde vaak niet constructief. Men bewijst uit het ongerijmde: men neemt aan, dat het bedoelde object niet bestond en leidt uit deze veronderstelling een strijdigheid af.

Voor Brouwer was dit een verwerpelijke methode, maar om deze negatieve appreciatie kracht bij te zetten, moest hij de wiskunde opnieuw opbouwen, thans onder vermindering van het principe van de uitgesloten derde, dat aan de conclusie uit het ongerijmde ten grondslag ligt. Bij deze herbouw, die Brouwer rond 1918 bezig hield, verliest veel uit de klassieke wiskunde zijn waarheidswaarde of zijn zin; aan de positieve kant komt men tot verfijnde wiskundige begrippen en verfijnde begrippen van waarheid.

Brouwers kritiek van het principe van de uitgesloten derde wekte verbazing, maar vooral wanbegrip. Iets is zo, of het is niet zo - dat zie je als het ware met je klomp, wat valt erover te redetwisten? Inderdaad, als ik moet bewijzen, dat er een geheel getal tussen 1 en 1.000.000 bestaat met een bepaalde eenvoudige eigenschap E mag ik evenwel uit het ongerijmde redeneren: was er niet zo'n getal dan kwam er die of die tegenstrijdigheid voor den dag. Om het getal met de eigenschap E dan op te sporen, hoef ik ze immers maar één voor één de revue te laten passeren en te toetsen. Zodra ik het eerste met de eigenschap E heb gevonden, mag ik stoppen. De situatie verandert, zodra de beperking tot het eindige vervalst. Stel ik moet bewijzen, dat er ergens een geheel getal met de eigenschap E uithangt; ik veronderstel, dat het er niet was, en ik kom tot een strijdigheid. Wat heb ik eraan? Hoe kan ik dit ergens uithangende getal met de eigenschap E te pakken krijgen? De eerder geschetste methode is nu in 't algemeen tot falen gedoemd. Ik heb een puur existentie-bewijs geleverd, maar niet, zoals Brouwer eist, iets geconstrueerd. Op deze eis en niet op de verwerping van het principe van de uitgesloten derde dient men de nadruk te leggen, als men Brouwer adequaat wil begrijpen. Brouwer

zei eens tegen me: als ik mijn intuïtionistisch werk wilde herschrijven, zou ik het woord "bewijs" vermijden; men zegt immers ook niet, dat Whympfer in 1865 de beklimbaarheid van de Matterhorn heeft bewezen, maar dat hij de Matterhorn heeft beklommen.

In de jaren twintig laaide tussen formalisme en intuïtionisme een felle strijd op, waarin zich ook persoonlijke tegenstellingen manifesteerden. Uiteraard leefde de wiskundige wereld mee, al leerde men op den duur de tegenstellingen relativeren. Hilberts stoutmoedige programma bleek principieel onuitvoerbaar; desniettemin heeft het het grondslagenonderzoek geweldig beïnvloed. Dergelijke invloeden zijn ook uit Brouwers intuïtionisme voortgevloeid, niet alleen op het grondslagenonderzoek, maar tot in de toepassingen der wiskunde toe, hoewel de wiskundigen ook verduidelijkt uit het ongerijmde zijn blijven redeneren en zeker Brouwers aanspraak op de exclusiviteit van de intuïtionistische wiskunde hebben afgewezen.

Een imposante, raadselachtige man.

In 1927 gaf Brouwer in Berlijn gastcolleges - in die tijd nog iets buitengewoons. De belangstelling voor de grootste levende wiskundige na Hilbert was overweldigend (als ik me goed herinner, niet minder dan voor colleges van Einstein). De rijzige gestalte, de overtuigingskracht der gestes, de boeiende mimiek der scherpe gelaats trekken, de eigengereide pregnante woordkeuze, de faillloze beheersing van ingewikkelde zinsbouw-constructies, maar bovenal de ascetische werktuiglijkheid van een menselijk wezen als expressie van een hartstochtelijk aangehangen idee, imponeerde de hoorders, vooral de jongeren - ik was toen vierdejaars. Als leerling van Hopf zocht ik toen in de topologie mijn weg. Brouwers lezingen maakten mij met het intuïtionisme bekend, ik waagde 't, vragen tot Brouwer te richten, bleef met hem corresponderen en werd na mijn promotie in 1930 zijn assistent in Amsterdam.

Brouwers produktieve periode was toen voorbij, maar hij was nog steeds een imposante menselijke verschijning. Imposant en raadselachtig. Raadselachtig was zijn ondoorgrondelijke blik, zijn handschrift, dat met geen vergelijkbaar is dat ik ooit zag. Raadselachtig was in hem vooral zijn geleidelijke afkeer van actieve belangstelling in de wiskunde, die spoedig na zijn grootse prestaties moet zijn begonnen. Hoe is het mogelijk, dat iemand na zulk een geweldige sprong, uit het bekende in het onbekende, midden in onontgonnen gebied, met wijde perspectieven, zijn activiteit staakt, verzuimt zijn werk te consolideren en te wedijveren met anderen die zijn werk voortzetten? In de jaren twintig zou Brouwer op een reis een koffer met al zijn ongepubliceerde manuscripten zijn kwijtgeraakt. Was hij door deze tegenslag ontmoedigd? Ik denk van niet.

Brouwers stijl is die van een wiskundige, die met zijn hoofd door een muur tracht te breken. Wonder boven wonder slaagde hij, zijn goede genius wees hem de plaats waar de muur het zwakste was. Eén keer slaagde hij met zulk een brute methode, en dat is één keer meer dan andere sterfelijke beschoren is.

Hoeveel keer heeft hij het nog geprobeerd? En wat deed hij, toen het een tweede of derde keer niet lukte? Rustig voortbouwen op het bereikte? Het zou met zijn karakter niet hebben gestrookt.

Brouwer was in veel opzichten meer artiest dan beoefenaar van wetenschap. Hij was thuis in het Larense milieu en in soortgelijke buitenlandse milieus. Hij had zich in Laren N-H. naast, maar niet te midden van Frederik van Eeden's Walden gevestigd. In deze en dergelijke kringen was hij thuis, niet op mathematische congressen en colloquia.

Ik kwam in 1930 in Nederland, trots op mijn assistentschap bij Brouwer. Maar wat een vreemde wereld, dit Holland, waar niemand iets scheen te weten van de grootheid van de grootste wiskundige, die Nederland sinds Christiaan Huygens heeft bezeten; de publieke representanten van de wiskunde waren hier wiskundigen, die in het buitenland geheel onbekend waren. Wie onder zijn studenten beseftte, bij wie hij college liep?

Later begreep ik de situatie beter. Brouwer voelde zich niet door het leermeesterschap aangetrokken. Hij hield lezingen en gaf colleges zonder consideratie voor en zonder concessies aan zijn hoorders. Hij heeft, naar ik meen, nimmer over zijn eigen werk college gegeven. Op vragen uit het gehoor kon hij bits reageren, hij vermeed het contact met de studenten. In de jaren dertig liet hij soms weken, soms maanden verstek gaan, terwijl hij de meest onbenullige besognes naging. Hij heeft slechts weinig directe leerlingen gehad; een intuïtionistische school is pas door zijn leerling A. Heyting gesticht.

Brouwer was raadselachtig door de tegenstrijdigheden in zijn karakter. Met een kil rationalisme analyseerden hij de menselijke relaties, maar zijn feitelijk handelen was vaak bepaald door diepe emoties. Zijn oordeel over objectieve kwaliteiten van mensen was van een schrikwekkende subjectiviteit. Zijn subjectieve wereld was wit-zwart, vervuld van vrienden en vijanden. Op zeker ogenblik kon iemand, om raadselachtige redenen, van vriend in vijand herschapen worden, al zijn deugden konden als ondeugden worden geïnterpreteerd. Bijaldien was zijn conversatie, zelfs met zijn vijanden, veelal van een onvergetelijke hartverwarmende charme doorstroomd; de stijl van zijn brieven daarentegen kon zelfs zijn vrienden doen rillen. Toch maakte zijn gedrag niet de indruk van wispelturigheid. Hij was schrikbarend consequent in zijn handelen, tot in de meest ridicule inconsequenties toe.

Op 26 november zag en hoorde ik hem het laatst, in de maandelijkse afdelingsvergadering van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, waar hij nog geregeld kwam, om in de discussie het puntje op de "i" te zetten - talloze puntjes op talloze i's. Voor de meesten was hij al meer dan werkelijkheid, een legendarische figuur, naar zijn anciënniteit het oudste lid.

Naar zijn lichamelijke en geestelijke gesteldheid hadden hem nog vele jaren beschoren kunnen zijn, ware hij niet, enkele dagen later, als slachtoffer van het verkeer, vlak voor zijn huis in Laren, gesneuveld.

Van zijn wetenschappelijke grootheid zal zijn werk getuigen. Wie bevoegd zou zijn om van het grote levende raadsel Brouwer te getuigen of het te ontsluieren, zou ik niet weten.
