TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Syllabus van het college

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

naar het college van

Prof. Dr. J.J. Seidel

1961/'62

Onderafdeling
der
Wiskunde

AFDELING
ALGEMENE
WETENSCHAPPEN

Syllabus van het college BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

1961/'62

TECHNISCHE HOGESCHOOL

EINDHOVEN

TYPEWERK MEJ. M.G.H. VAN DEN BROEK, TEKENINGEN T.K. SIE

Inhoudsbeschrijving
Beschrijvende Metkunde
J.J. Seidel
1961/'62

JdG, 29 Augustus 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN 1 60

Afdeling der Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde.

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

Inleiding

In de beschrijvende meetkunde tracht men door middel van een tekening eigenschappen van ruimtelijke figuren vast te leggen. We maken dan dus een 2-dimensionale afbeelding van een 3-dimensionale figuur. Als nadeel treedt op een tamelijke drukte in onze tekening; voorwerpen die in de ruimte duidelijk van elkaar verwijderd zijn, kunnen in de tekening wel samenvallen of over elkaar liggen. Als voordeel kunnen we echter de gehele construeer-techniek van de vlakke meetkunde in de stereometrie gebruiken.

Het middel waarvan men zich bij deze afbeeldingen bedient is de projectie; Een projectie wordt bepaald door een plat vlak π, het projectievlak en een punt C, het centrum van de projectie. Zie tekening 1.

Men spreekt dan van centrale projectie, tenzij het centrum een oneindig ver punt is; er zijn verschillende vormen van centrale projectie, die door speciale keuze van π en C ontstaan. Een bekende centrale projectie-methode is de perspectief.

Enige eigenschappen van centrale projectie worden later nog besproken.

Indien het centrum een oneindig ver punt is, hebben alle projecterende lijnen dezelfde richting p; de projectie-richting; ze zijn dus evenwijdig; in dit geval spreekt men van parallel-projectie. Men neemt niet $p // \pi$.

Parallelprojectie kan dus worden opgevat als een bijzonder geval van centrale projectie; alle eigenschappen van centrale projectie gelden dus ook voor parallel-projectie, maar niet omgekeerd.

Eigenschappen van parallel-projectie: (zie tekening 1).

1) De projectie van een projecterende lijn is een punt;
De projecties van alle andere lijnen zijn weer lijnen.
De projectie van een projecterend vlak is een lijn.
(Over de projecties van andere vlakken wordt niet gesproken).

2) De projecties van onderling evenwijdige niet-projecterende lijnen, zijn evenwijdig. In figuur 1: $a // b \quad a \nparallel p \Rightarrow a' // b'$.

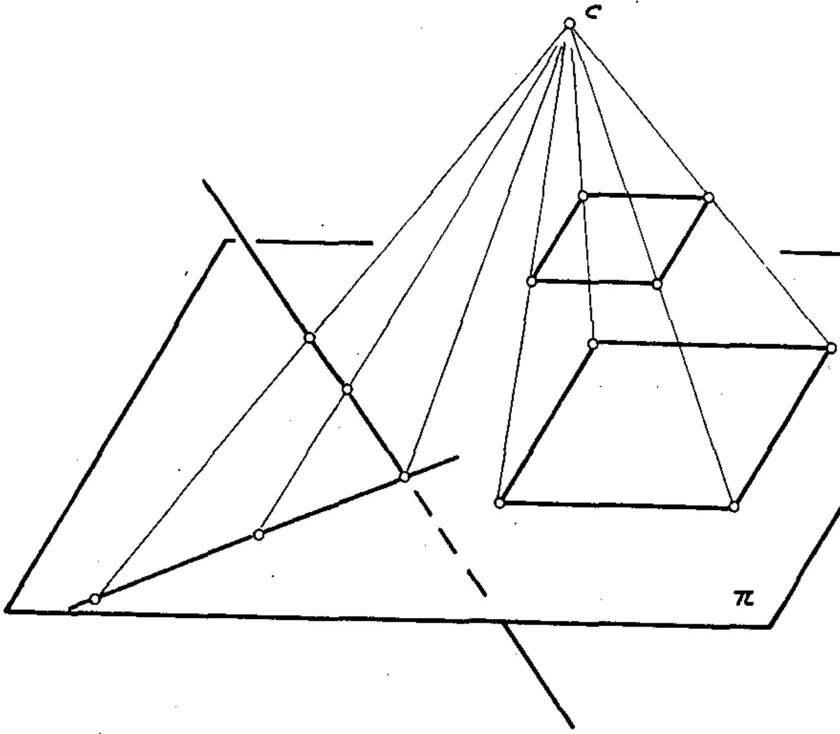
3) De verhouding van evenwijdige lijnstukken (niet op een projecterende lijn gelegen) verandert bij projectie niet:

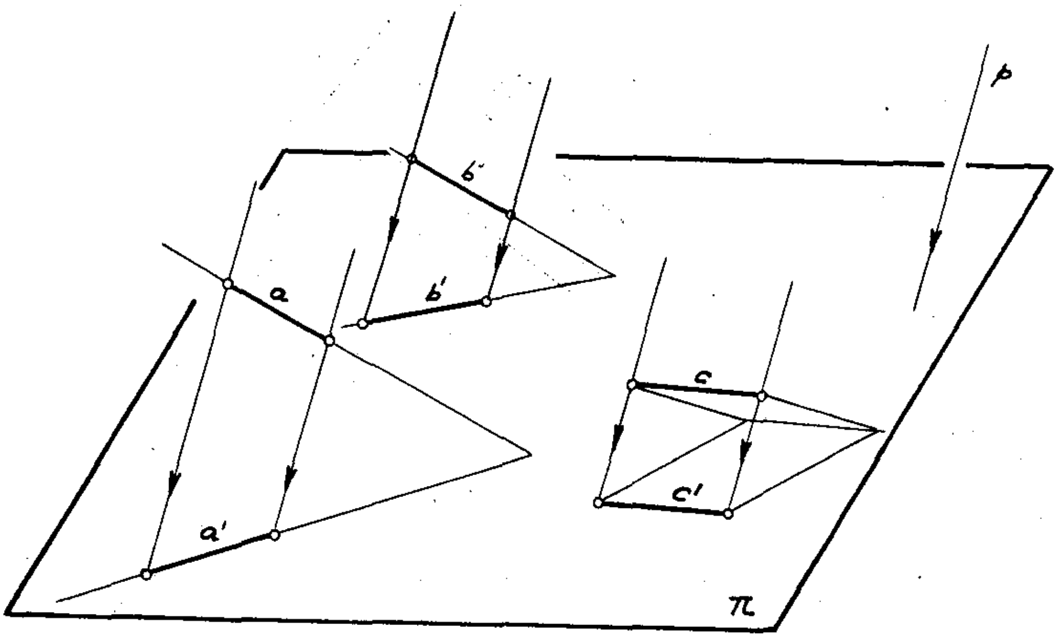
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} .$$

4) Lijnen die $// \pi$ zijn, zijn ook evenwijdig met hun projecties; lijnstukken $// \pi$ zijn bovendien gelijk aan hun projecties. Zie c en c'.

Er zijn nog 2 eigenschappen, die betrekking hebben op rechte hoeken; deze worden later nog genoemd.
Van de verschillende methoden waarbij van parallelprojectie wordt gebruik gemaakt worden in deze cursus behandeld de orthogonale projectie-methode en de axonometrie. De scheve parallel-projectie hoort ook bij deze groep.

①





HOOFDSTUK I. ORTHOGONALE PROJECTIEMETHODE - (Amerikaans).

§ 1. Coordinaten - De projecties van een punt.

Bij de orthogonale projectie methode gaat men uit van een coordinatenstelsel, dat bestaat uit 3 onderling loodrechte lijnen, resp. de x-as, de y-as en de z-as, die elkaar in de oorsprong O snijden en de daardoor bepaalde 3 onderling loodrechte vlakken, het (horizontale) xy-vlak; π_1; het verticale xz-vlak π_2 en het verticale yz-vlak π_3.

Een ruimtelijke figuur wordt op ieder van deze vlakken loodrecht geprojecteerd. Het coordinatenstelsel wordt nu langs de y-as "opengeknipt", en de vlakken π_1 en π_3 worden langs de x-as resp. z-as in π_2 "gevouwen"; men noemt deze procedure wentelen of **neerslaan.**

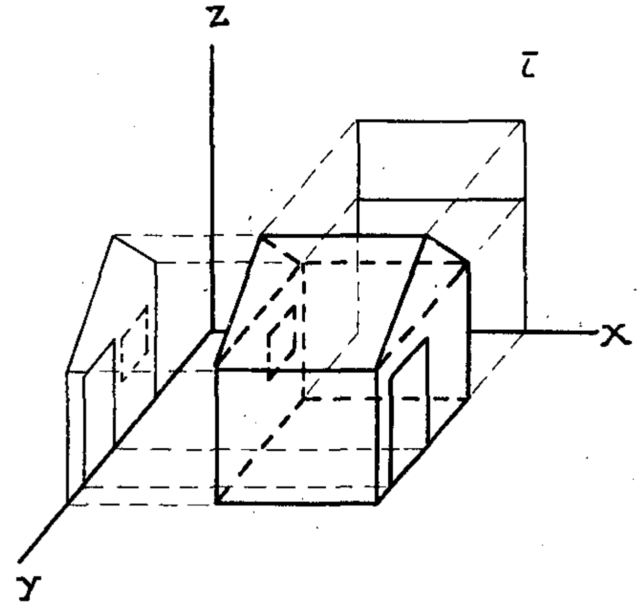
De drie projecties zijn nu alle in één plat vlak, π_2 gelegen; dit is het **vlak** waarin we al onze constructies uitvoeren, het vlak van tekening; i.p.v. π_2 gebruikt men er ook de letter τ, en de naam tafereel voor. Zie tekening 2.

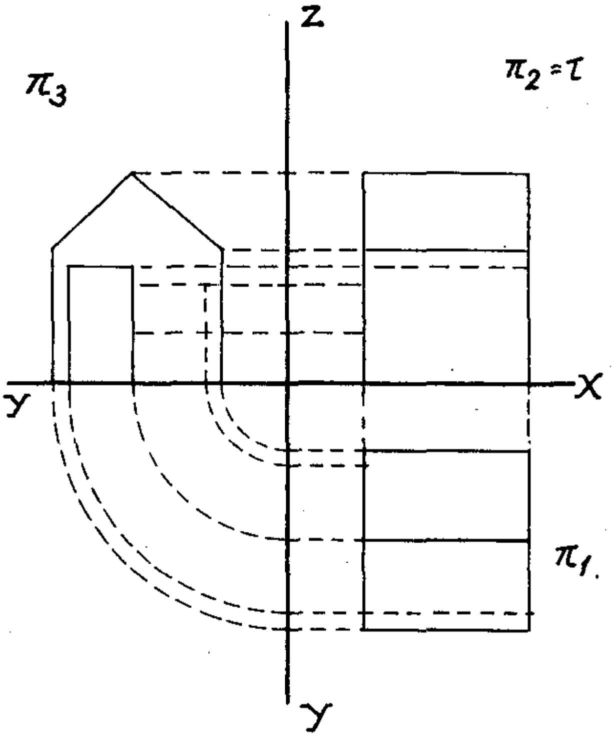
Men kiest in de praktijk π_1 bóven het te tekenen voorwerp, π_2 tussen het voorwerp en de tekenaar, en π_3 rechts van het voorwerp (Amerikaanse methode); bij de Europese methode was deze keuze anders. De plaats van een punt P wordt bepaald door zijn coordinaten, dat zijn de afstanden van P tot het yz-vlak (x-coordinaat), het xz-vlak (y-coordinaat) en het xy-vlak (z-coordinaat). Vanuit de oorsprong O wordt x naar links, y naar achteren, z naar beneden gemeten; dit houdt in: rechts van O is x negatief, vóór O is y negatief, boven O is z negatief.

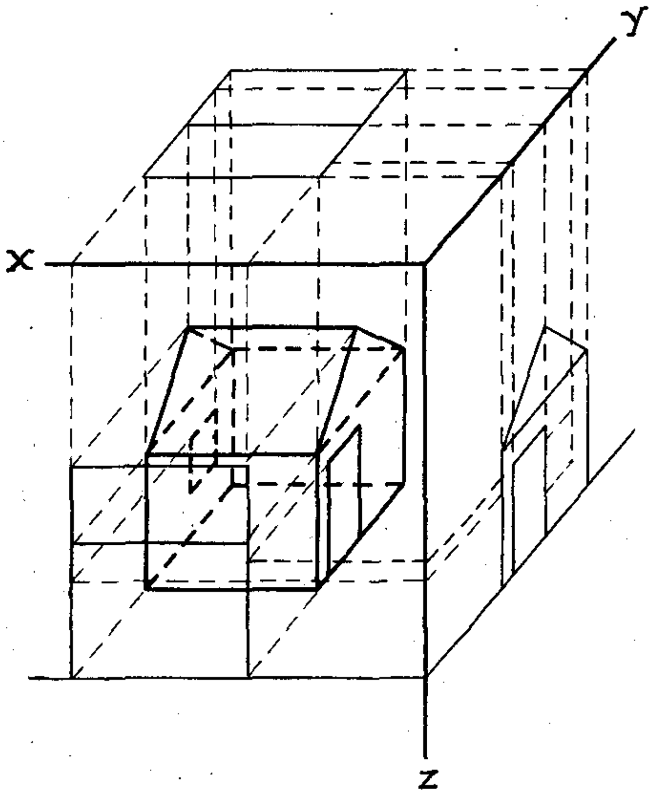
De projecties van P heten op π_1, π_2 en π_3 achtereenvolgens P_1, P_2 en P_3.

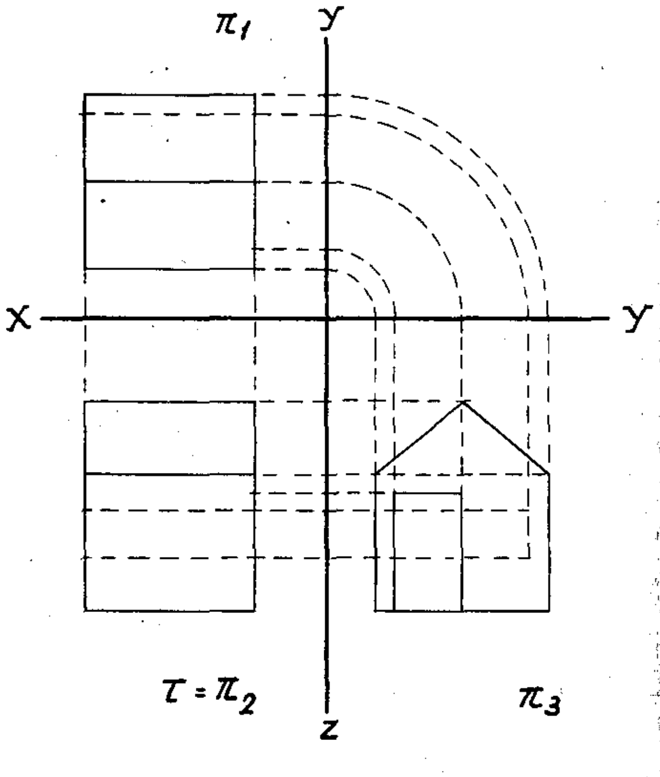
Een punt wordt gegeven door zijn coordinaten **x, y, z.** Door een punt P worden de projecties P_1 P_2 P_3 bepaald. Een punt P wordt door 2 van zijn 3 projecties P_1, P_2, P_3 bepaald.

Een gevolg van deze laatste eigenschap is dat we veel constructies kunnen uitvoeren zonder van π_3 gebruik te maken.


z
τ
x
y


z
π3
π2 = τ
y
x
π1
y


y
x
z


π1
y
x
y
τ = π2
z
π3

In tekening 3 is van het punt P (5,2,6) zowel een "ruimtelijke figuur" als een projectietekening gemaakt. Het punt P_o is de projectie van P op de x-as.
P_oO is de x-coordinaat van P.
Door P_o trekken we een lijn ⊥ de x-as. De y-coordinaten zetten we naar boven af: → P_1; de z-coordinaat naar beneden: → P_2.
P_3 volgt dan door omcirkelen van het lijnstuk OQ.

P_1 en P_2 hangen samen t.o.v. de x-as.

P_2 en P_3 hangen samen t.o.v. de z-as.

P_1 en P_3 hangen samen t.o.v. de y-as.

Samenhang t.o.v. de y-as <u>betekent altijd omcirkelen</u>.

Opgaven: Construeer de 3 projecties van de punten
A(1,2,3)
B(2,3,4)
C(3,4,-2)
D(4,-3,4)
E(-2,3,4)
F(3,0,4)
G(0,1,4)
H(-3,-3,3).

§ 2. De projecties van een lijn- Doorgangspunten. Zie tekening 4 en 5.

Een rechte lijn l kan op π_1, π_2, π_3 worden geprojecteerd, de projecties geven we aan met l_1, l_2, l_3. Van groot belang zijn de doorgangspunten van l, met π_1, π_2 en π_3.

Deze worden aangegeven resp. met O, □, Δ.

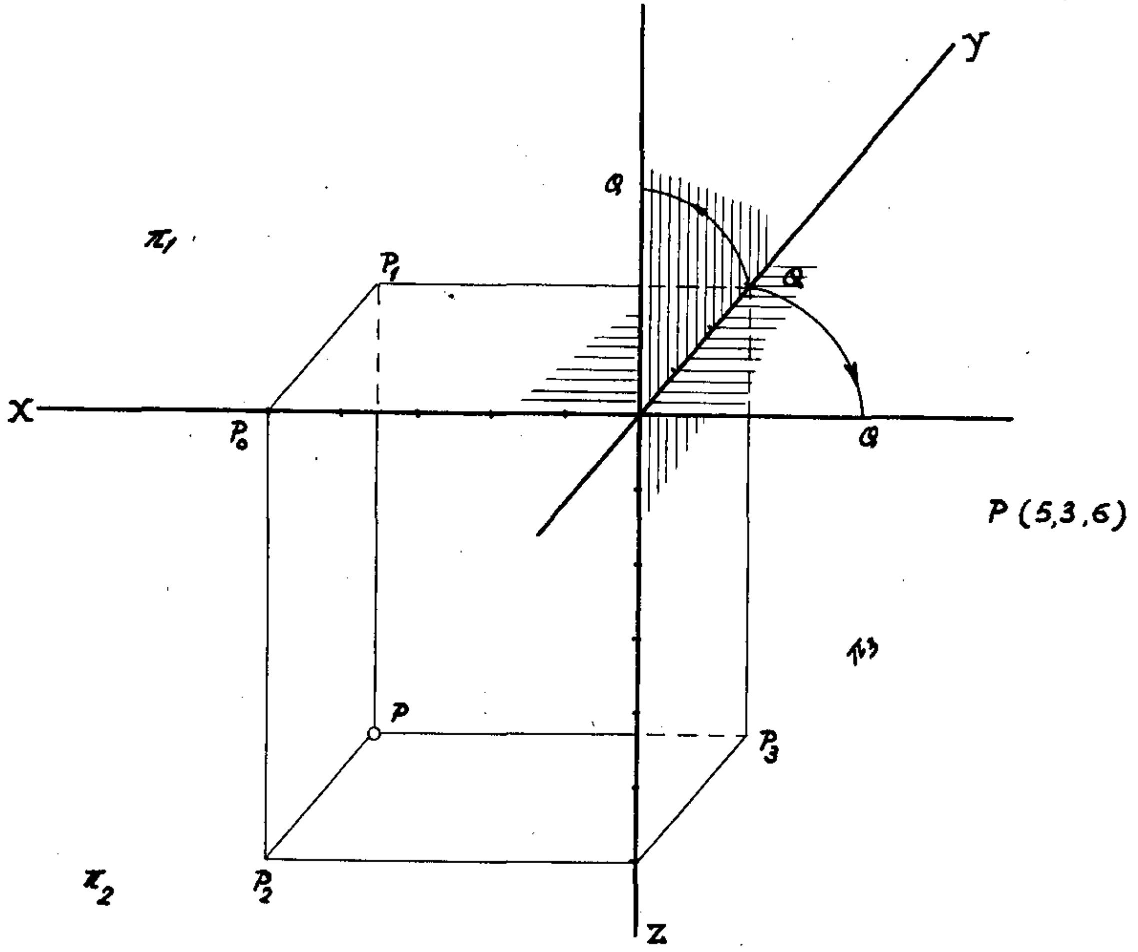
Het is duidelijk dat

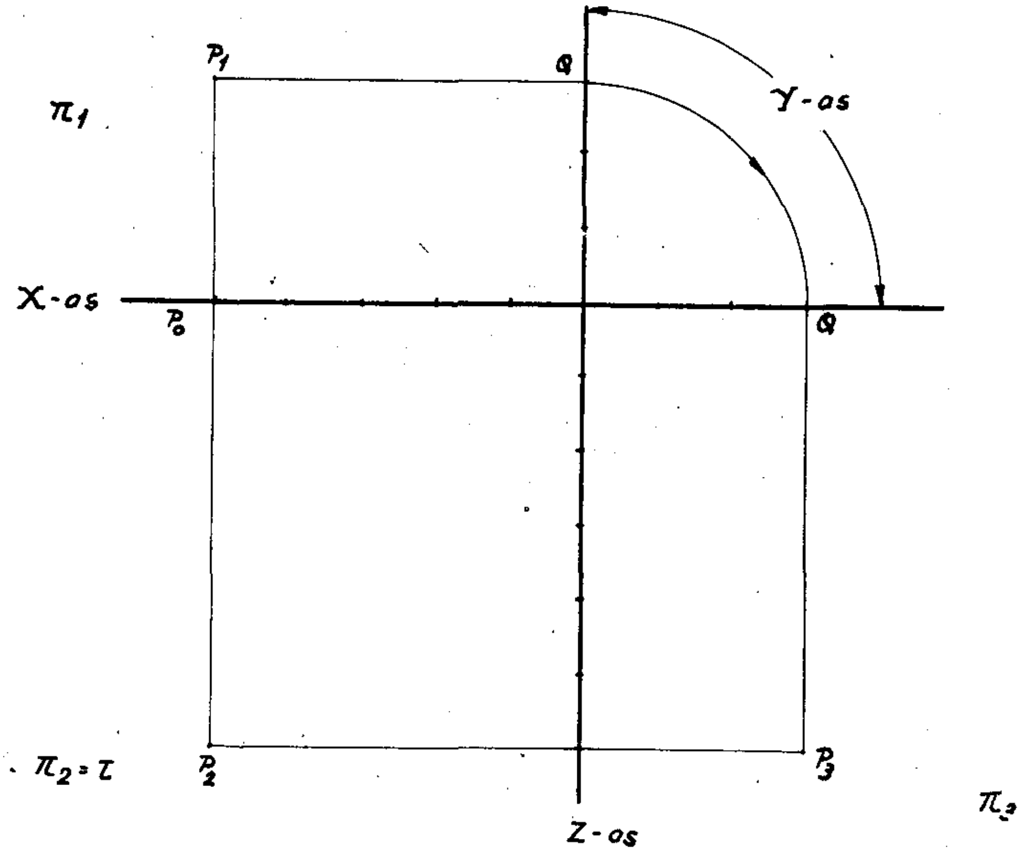
O ligt op l_1

□ ligt op l_2

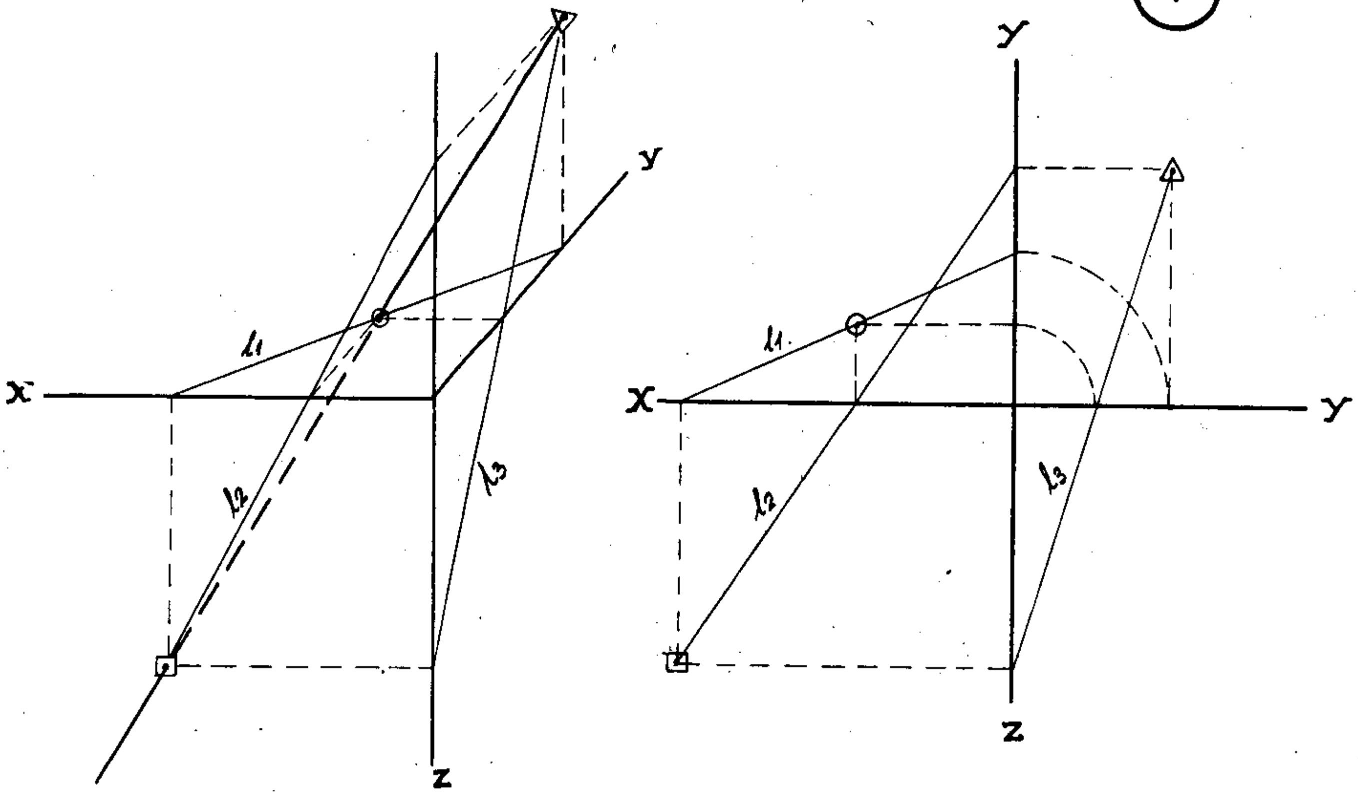
Δ ligt op l_3 .

③


Y
Q
π1
P1
Q
X
P0
Q
P (5,3,6)
π3
P
P3
π2
P2
Z


P1
Q
π1
Y-os
X-os
P0
Q
π2 = τ
P2
P3
π3
Z-os

④



Verder is er het volgende verband:

○ hangt samen (t.o.v. de x-as) met het snijpunt van l_2 met de x-as.
○ hangt samen (t.o.v. de y-as) met het snijpunt van l_3 met de y-as.
□ hangt samen (t.o.v. de x-as) met het snijpunt van l_1 met de y-as.
□ hangt samen (t.o.v. de z-as) met het snijpunt van l_3 met de z-as.
Δ hangt samen (t.o.v. de y-as) met het snijpunt van l_1 met de y-as.
Δ hangt samen (t.o.v. de z-as) met het snijpunt van l_2 met de z-as.

Voor punten en lijnen geldt het volgende:

Als een punt P ligt op een lijn l,liggen P_1, P_2, P_3 resp. op l_1, l_2, l_3.

Dit is aequivalent met:

Als een lijn l gaat door P, gaan l_1, l_2, l_3 resp.door P_1, P_2, P_3.

<u>Opgaven</u>:

1. Construeer de projecties van l, die gaat door A(4,1,3) en B(7,2,1).
   Construeer de doorgangspunten van l.
2. Evenzo m door C(3,1,1) en D(6,1,4).
3. Evenzo n door E(2,10,4) en F(6,6,-1). (Zie tekening 6).

Bijzondere lijnen: (Tekening 7).

a // π_1; ○ is er niet; a heet een 1^e hoofdlijn
b // π_2; □ is er niet; b heet een 2^e hoofdlijn
c // π_3; Δ is er niet; c heet een 3^e hoofdlijn
d // x-as; ○ en Δ zijn er niet; Δ = d_3
e // y-as; ○ en Δ zijn er niet; □ = e_2
f // z-as; □ en Δ zijn er niet; ○ = f_1 .

§ 3 - Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak (Tekening 8).

Als twee lijnen, l en m elkaar snijden in P, snijden l_1 en m_1 elkaar in P_1, l_2 en m_2 elkaar in P_2, l_3 en m_3 elkaar in P_3.

En omgekeerd: Als van 2 lijnen l en m de snijpunten van twee der projecties samenhangen, snijden die lijnen elkaar.

Als twee lijnen l en m evenwijdig zijn, is ook $l_1 // m_1$, $l_2 // m_2$,

$l_3 // m_3$; en omgekeerd: als van 2 lijnen l en m geldt $l_1 // m_1$ en $l_2 // m_2$ is ook $l // m$.

Door 2 snijdende resp. evenwijdige lijnen l en m kan men een vlak α brengen. Een vlak wordt in onze tekeningen door zijn doorgangen bepaald:

α_1 is de eerste doorgang, de snijlijn van α met π_1
α_2 is de tweede doorgang, de snijlijn van α met π_2
α_3 is de derde doorgang, de snijlijn van α met π_3.

Indien α gaat door twee gegeven lijnen l en m kan men α_i bepalen: α_1 gaat door o van l en door o van m
α_2 gaat door □ van l en door □ van m
α_3 gaat door △ van l en door △ van m.

Verder geldt:

α_1 en α_2 snijden elkaar op de x-as
α_2 en α_3 snijden elkaar op de z-as

In de ruimte snijden $\alpha_1$en $\alpha_3$elkaar op de y-as, maar in onze tekening geldt: het snijpunt van α_1 met de y-as (verticaal) ligt evenver van O als het snijpunt van α_3 met de y-as (horizontaal).

Opgaven.

1. Construeer de doorgangen van de vlakken
   α door (2,2,0), (2,0,3) en (0,3,1)
   β door (6,1,2), (10,5,2) en (13, 2, 5)
   γ door (5,3,-3), (7,1,-5) en (4,3,0)

2. Construeer het vlak (d.w.z. de doorgangen van het vlak)
   α door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_1,
   β door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_2,
   γ door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_3.

Bijzondere gevallen (Tekening 9).

$\alpha // \pi_1$; dan ontbreekt α_1, $\alpha_2 //$ x-as, $\alpha_3 //$y-as (horizontaal)

$\beta \parallel \pi_2$; β_2 ontbreekt, $\beta_1 \parallel$ x-as, $\beta_3 \parallel$ z-as.

$\gamma \parallel \pi_3$; γ_3 ontbreekt, $\gamma_1 \parallel$ y-as,(verticaal) $\gamma_2 \parallel$ z-as.

$\delta \parallel$ x-as ; dan is $\delta_1 \parallel \delta_2 \parallel$ x-as.

$\varepsilon \parallel$ y-as ; dan is $\varepsilon_1 \parallel$ y-as (verticaal) en $\varepsilon_3 \parallel$ y-as (horizontaal).

$\eta \parallel$ z-as ; dan is $\eta_2 \parallel \eta_3 \parallel$ z-as.

§ 4. Onderlinge ligging van vlakken.

2 Vlakken α en β zijn òf evenwijdig òf ze snijden elkaar volgens een lijn s. Als $\alpha \parallel \beta$ zijn alle gelijknamige doorgangen (voor zover ze bestaan) evenwijdig. Tekening 10.
Als α en β elkaar snijden zijn de doorgangspunten van de snijlijn de snijpunten van de gelijknamige doorgangen. Tekening 11.

Opgaven:

1. Construeer door een gegeven punt P een vlak ξ, $\parallel$ met een gegeven vlak α. (Tekening 12). Men brengt door P een lijn aan $\parallel \alpha$; dit doet men gewoonlijk (Tekening 12),

   òf met een eerste hoofdlijn $a \parallel \alpha$
   òf met een tweede hoofdlijn $b \parallel \alpha$

   Zij a een eerste hoofdlijn door P, d.w.z. $a \parallel \pi_1$ (def.) we kiezen $a \parallel \alpha$
   $\Longrightarrow$ $a \parallel$ snijlijn van π_1 met α , $\Longrightarrow \alpha_1 \Longrightarrow a \parallel \alpha_1$
   Als $a \parallel \alpha_1$, is ook $a_1 \parallel \alpha_1$.

   ξ_2 gaat nu door □ van a, en is $\parallel \alpha_2$.
   ξ_1 gaat nu door het snijpunt van ξ_2 met x-as, en $\parallel \alpha_1$

   Ga zelf de constructie m.b.v. een tweede hoofdlijn b na.

2. Construeer een vlak α
   - a) door (5,3,1) en $\parallel \pi_1$.
   - b) door (5,3,1) en $\parallel$ het vlak β door (3,5,1), (4,2,1) en (3,8,2).
   - c) door (6,3,-2) en $\parallel$ het vlak β uit b) .
   - d) door (7,-3,2) en $\parallel$ het vlak β uit b) .
   - e) door (4,-4,-5) en $\parallel$ het vlak β uit b).

3. Construeer de snijlijn van 2 vlakken α en β
   - a) als $\alpha \parallel \pi_1$, β willekeurig
   - b) als $\alpha \parallel \pi_2$, β willekeurig
   - c) als $\alpha \parallel \pi_1$, $\beta \parallel \pi_2$
   - d) als $\alpha \parallel \pi_1$, $\beta \parallel \pi_3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{e) als } \alpha \parallel \text{x-as}, \beta \parallel \text{ x-as} \\ \text{f) als } \alpha \parallel \text{y-as}, \beta \parallel \text{ y-as} \\ \text{g) als } \alpha \parallel \text{z-as}, \beta \parallel \text{ z-as} \end{array}\right\} \text{ maar niet } \alpha \parallel \beta \text{ .}$$

4. Bepaal het snijpunt S van een gegeven rechte l met een gegeven vlak α.

   Breng door l een vlak λ aan; λ mag geheel willekeurig gekozen worden; men neemt gewoonlijk het horizontaal projecterend of verticaal projecterend vlak. Snijd λ met α , de snijlijn is m. Snijd m met l; dit levert het gevraagde snijpunt S.

   In tekening 13 is λ het horizontaal projecterend vlak door l.

   In tekening 14 is λ het verticaal projecterend vlak door l.

§ 5. Perspectiviteit en affiniteit; tekening 15.

I. Wanneer men een in een **vlak** ε gelegen driehoek ABC vanuit twee centra O_1 en O_2 op een vlak τ projecteert, waardoor de projecties $A_1B_1C_1$ resp. $A_2B_2C_2$ ontstaan, bestaat er tussen deze twee figuren een verwantschap die men de naam perspectiviteit geeft. De eigenschappen hiervan zullen we aanstonds opsporen:
Noem het snijpunt van O_1 O_2 met τ: S.
Noem de snijlijn van ε met τ : l.
Dan geldt: Vlak AO_1O_2 gaat door O_1O_2, A_1A_2 gaat dus door S.
Evenzo: B_1B_2 gaat door S, C_1C_2 gaat door S.

Dus: Eigenschap 1: Lijnen door overeenkomstige punten van beide projecties gaan door S.

Verder:
$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 \text{ is de snijlijn van } \tau \text{ met vlak } O_1AB \\ A_2B_2 \text{ is de snijlijn van } \tau \text{ met vlak } O_2AB \\ AB \text{ is de snijlijn van de vlakken } O_1AB \text{ en } O_2AB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

A_1B_1, A_2B_2 en AB snijden elkaar in één punt, dat zowel in τ als op AB, dus in ε ligt, dus een punt op l.

Evenzo snijden A_1C_1 en A_2C_2 elkaar op l

en snijden B_1C_1 en B_2C_2 elkaar op l.

Eigenschap 2: De snijpunten van overeenkomstige lijnen uit beide projecties liggen op l.

Onder een perspectiviteit verstaat men nu een betrekking tussen figuren uit het platte vlak, **met de eigenschappen:**

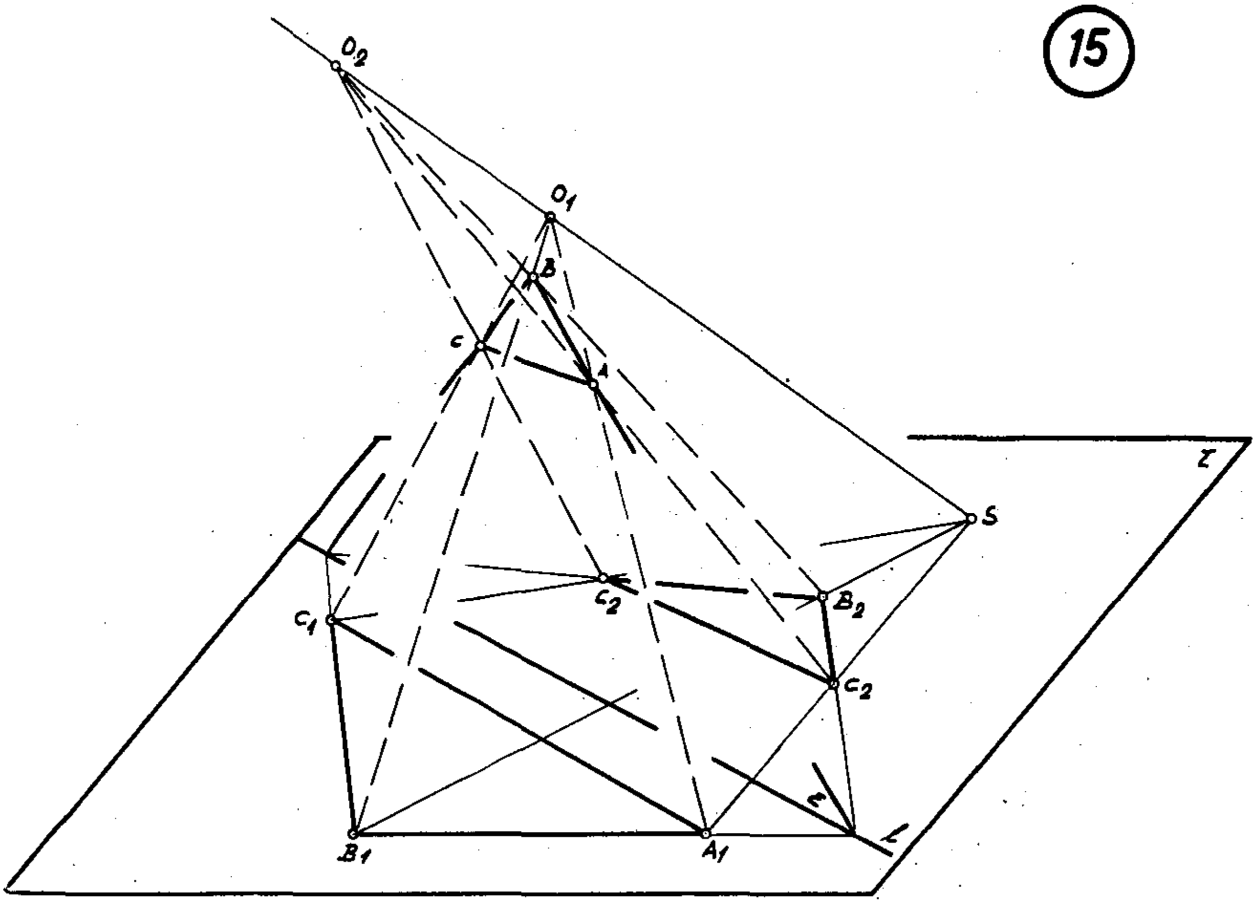
1) overeenkomstige punten liggen op een lijn door het centrum van de perspectiviteit,
2) overeenkomstige lijnen snijden elkaar op de perspectiviteitsas.

II. Indien O_2 in het oneindige ligt, kan men nagenoeg dezelfde redenering houden; dan is projecteren uit O_2 geworden: projecteren // een gegeven richting p; de lijn door O_1 en O_2 wordt: een lijn door O_1 en // p;
Hieruit volgt dus:
Wanneer men een in vlak ε gegeven figuur centraal uit O_1 en uit O_2 op een vlak τ projecteert, vormen de beide projecties een perspectiviteit; het centrum is het snijpunt van O_1O_2 met τ; de perspectiviteits-as is de snijlijn van ε met τ. Wanneer men een in vlak ε gegeven figuur centraal uit O en parallel in de richting p op een vlak τ projecteert vormen de beide projecties een perspectiviteit; het centrum is het snijpunt van de p-straal door O met τ; de perspectiviteits-as is de snijlijn van ε met τ.

III. Wanneer men een in vlak ε gelegen figuur in 2 richtingen p_1 en p_2 op hetzelfde vlak τ projecteert, bestaat er weer een verwantschap tussen beide projecties; deze verwantschap volgt al uit het feit dat we met een bijzonder geval van perspectiviteit te maken hebben. De eigenschappen van de verwantschap zijn: (zie tekening 16)

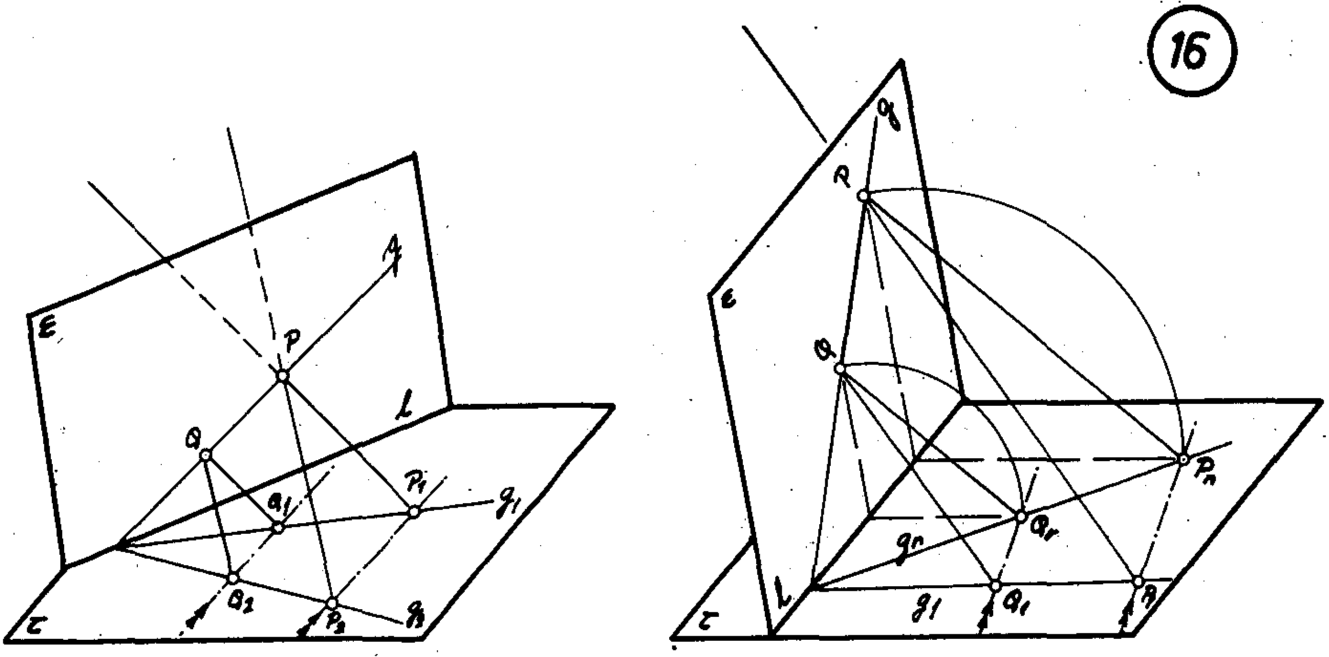
1) lijnen door overeenkomstige punten uit beide projecties zijn evenwijdig: $P_1P_2 /\!/ Q_1Q_2$.
2) overeenkomstige lijnen uit beide projecties snijden elkaar op een vaste lijn, l, de snijlijn van ε en τ.

Indien tussen figuren een verwantschap bestaat die aan deze eisen voldoet, noemt men die figuren <u>affien verwant</u>; ze vormen een <u>affiniteit</u>; een affiniteit is een perspectiviteit met oneindig ver gelegen centrum, dit is dus een richting; deze richting noemt men <u>affiniteitsrichting</u>; de lijn waarop de overeenkomstige lijnen elkaar snijden heet <u>affiniteits-as</u>.



⑮

O2
O1
B
C
A
τ
S
C2
B2
C1
C2
ε
L
B1
A1



⑯

E
P
A
Q
L
Q1
P1
q1
Q2
P2
q2
τ
q
R
ε
Q
Pn
Qr
qr
L
q1
Q1
P1
τ

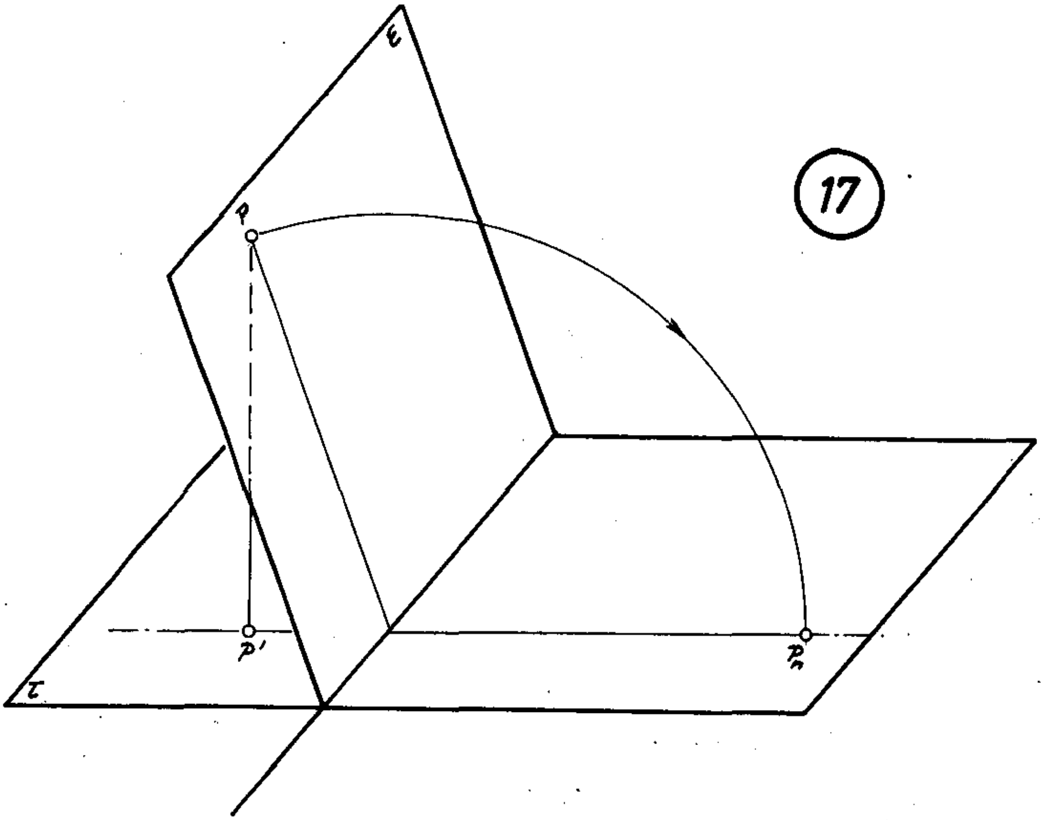
We hebben dus ontdekt:
Tussen 2 verschillende parallelprojecties van dezelfde vlakke figuur op hetzelfde platte vlak bestaat een <u>affiniteit</u>.

Nu nemen we weer een ε ; die wordt op τ geprojecteerd, en tevens om de snijlijn l van ε en τ in τ neergeslagen. Ieder punt van ε doorloopt dan een cirkelboog met middelpunt op l; alle cirkelbogen zijn (in hoekmaat) gelijk. Alle koorden op deze bogen zijn evenwijdig, en het resultaat van het neerslaan, de <u>neerslag</u>, kunnen we dus ook als een parallel-projectie beschouwen.

<u>Gevolgen</u>.

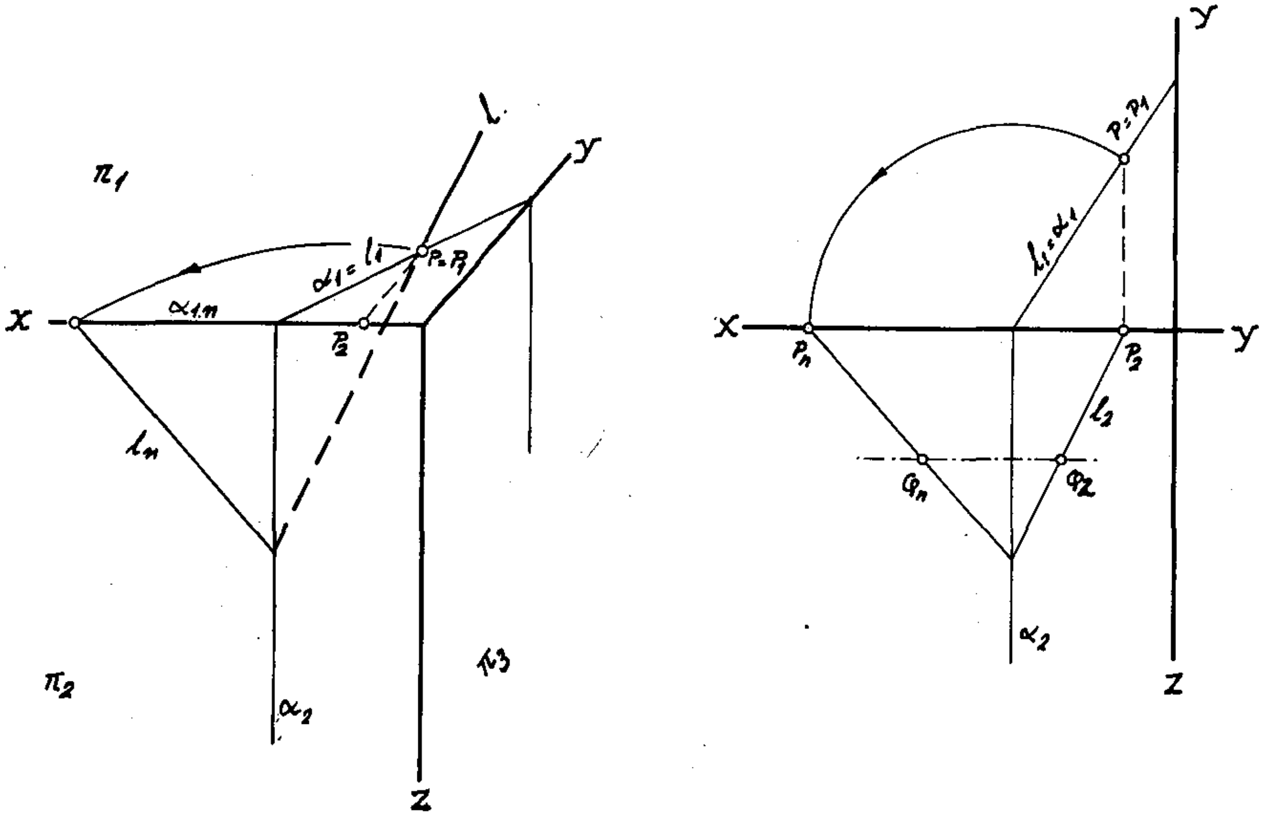
1. Tussen de centrale projectie op τ en de neerslag in τ van een in ε gelegen figuur bestaat een <u>perspective</u> verwantschap;
   de as hiervan is de doorgang van ε met τ .
2. Tussen de parallelprojectie in τ en de neerslag in τ van een in ε gelegen figuur bestaat een <u>affiene</u> verwantschap; ook hiervan is de as de doorgang van ε in τ .

Het eerstgenoemde geval komt later nog eens ter sprake; het tweede is voor de orthogonale projectiemethode en de axonometrie van groot belang.
In dit verband past dan de voor affiniteit geldende stelling:
Indien de projectierichting p loodrecht op τ staat, staat de affiniteitsrichting loodrecht op de affiniteitsas. Tekening 17.
Dit geval speelt zowel in de orthogonale projectiemethode als in de axonometrie een belangrijke rol.
Bij de orthogonale methode is $\tau = \pi_2$ het tafereel; bij neerslaan wordt altijd bedoeld neerslaan in <u>dit</u> <u>tafereel $\tau = \pi_2$</u>. D.w.z. de affiniteitsas bij de neerslag is altijd de tweede doorgang van het neergeslagen vlak.


ε
P
P'
P_n
τ

17

18


l
y
π1
α1 = l1
P=P1
x
α1n
P2
ln
π2
α2
z
π3
y
P=P1
l1=α1
x
y
Pn
P2
l2
Qn
Q2
α2
z

§ 6. Het neerslaan van vlakken in $\tau = \pi_2$.

De neergeslagen punten en lijnen worden van een index n voorzien.

a) $\alpha \perp \pi_1$. Tekening 18.
De affiniteitsas is α_2; deze staat (in de ruimte) $\perp \pi_1$, dus de cirkelboog bij P mag in π_1 getrokken worden.
De affiniteitsrichting is // x-as.

b) $\beta \perp \pi_2$. Tekening 19.
β_{1n} en β_{3n} staan nu loodrecht op β_2.
Dat $P_nP_2 = P_0P_1$ volgt direct uit $\beta \perp \pi_2$
Als l door P gaat, vindt men l_n uit P_n en het punt $\square$ van l
(dit ligt immers op de affiniteits-as).

c) $\gamma \perp \pi_3$. Tekening 19.
Aangezien γ_2 de affiniteitsas, weer $\perp \pi_3$, kunnen we P_3 omcirkelen in π_3. γ_{3n} = z-as.

d) Een willekeurig vlak δ.
Als, zoals in tekening 20, δ een bruikbaar snijpunt Q heeft met de y-as, wordt eerst Q_n bepaald, hetzij m.b.v. affiniteit tussen Q_2 en Q_n, hetzij door $|\delta_1|$ en $|\delta_3|$ om te cirkelen.
Een willekeurig punt P van δ wordt neergeslagen door

    een 1ste hoofdlijn a door P in δ neer te slaan

òf

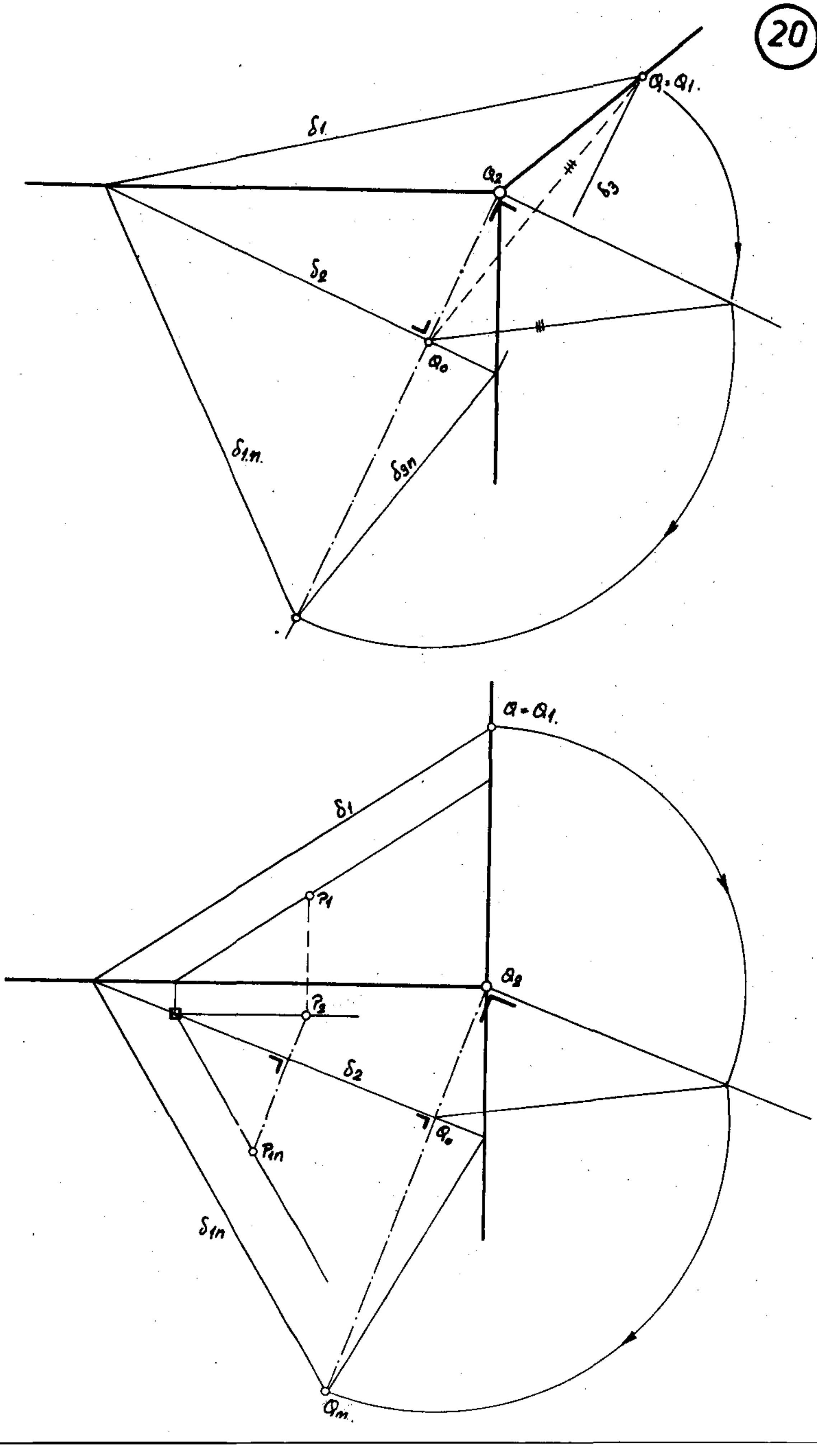
    de lijn door P en Q te gebruiken.

Als, zoals in tekening 21, δ geen bruikbaar snijpunt met de y-as heeft, kiezen we een punt Q op δ_1, en bepalen hiervan op precies dezelfde manier, Q_n.

§ 7. Hoeken - Loodrechte stand - Afstand.

Indien 2 lijnen of 2 vlakken <u>een hoek</u> φ met elkaar maken, geldt in het algemeen niet dat de hoek tussen hun projecties of doorgangen ook φ is.

20



Indien de hoek tussen twee gegeven lijnen moet worden bepaald, slaat men het vlak door die lijnen neer in $\tau = \pi_2$.
Zie tekening 22.
De hoek tussen 2 vlakken meet men in het standvlak, dat is een vlak loodrecht op hun snijlijn.
Eigenschappen van <u>rechte hoeken</u> bij <u>orthogonale</u> projectie:

1) Als van een rechte hoek één been $/\!/ \pi$, het andere niet $\perp \pi$, is de projectie op π weer een rechte hoek.
2) Als voor een lijn 1 en een vlak α geldt: $1 \perp \alpha$, is de projectie van 1 op π loodrecht op de doorgang van α in π.

Zie tekening 23.
Bepaal nu door een gegeven punt P een lijn $\perp$ een gegeven vlak α
en door een gegeven punt P een vlak $\perp$ een gegeven lijn 1.
Bepaal nu de hoek tussen twee gegeven vlakken α en β door een standvlak neer te slaan.
(Zie tekening 24).
De <u>afstand</u> van 2 punten A en B bepaalt men indien AB niet $/\!/$ een der projectie-vlakken is, door het lijnstuk AB met zijn verticaal projecterend vlak neer te slaan. Zie tekening 25.
Bepaal nu de afstand van 2 gegeven evenwijdige vlakken α en β,
en de afstand van 2 elkaar kruisende lijnen 1 en m.
Zie tekening 25.

§ 8. <u>Het wentelen van een ruimtelijk lichaam</u>.

In veel vraagstukken wentelt men een lichaam om een lijn, bijvoorbeeld een van zijn ribben.
Indien deze lijn $\perp \tau$, kan men de wenteling direct uitvoeren; zo niet dan slaat men een loodvlak op die lijn in τ neer.
Voorbeeld: (formaat 20 x 29).
Neem de x-as 9 cm. boven de lange onderrand van het papier, de z-as 2 cm. van rechts.

$A = (24,3,8)$, $B = (18,3,8)$, $C = (21,y,8)$.

Δ ABC is gelijkzijdig, $y > 0$.

Δ ABC is het grondvak van een prisma, waarvan het zijvlak ACFD een vierkant is, dat met het grondvlak een hoek van 60° maakt, zó dat E_1 buiten $\Delta A_1B_1C_1$ valt.

Men wentelt dit prisma om AC over de kleinste der mogelijke hoeken, tot E in π_1 ligt. Teken de projecties van het prisma na de wenteling. Tekening 26.

HOOFDSTUK II - AXONOMETRIE

§ 1. Coordinaten; de keuze van tafereel en projectierichting.

Axonometrie is een projectiemethode waarbij men uitgaat van een Cartesisch coordinatenstelsel; een x-as, y-as en z-as snijden elkaar in de oorsprong $\bar{O}$ loodrecht; het xy-vlak heet π_1, het yz vlak π_2 en het xz vlak π_3; men kiest op deze assen een positieve en een negatieve richting, zó dat het coordinatenstelsel rechts georienteerd is. (Tekening 1).

Het tafereel τ is een vlak dat de assen snijdt in punten X (met positieve x-coordinaat), Y (met positieve y-coordinaat) en Z (met positieve z-coordinaat).

Het tafereel τ snijdt de vlakken π_1, π_2 en π_3 volgens ΔXYZ, de tafereeldriehoek.

De projectierichting p is loodrecht op τ .

Hieruit volgt:

1: De (axonometrische) projecties van de assen zijn de hoogtelijnen van ΔXYZ : XU,YV en ZW.

2: De projectie van $\bar{O}$ is het hoogtepunt O van ΔXYZ.

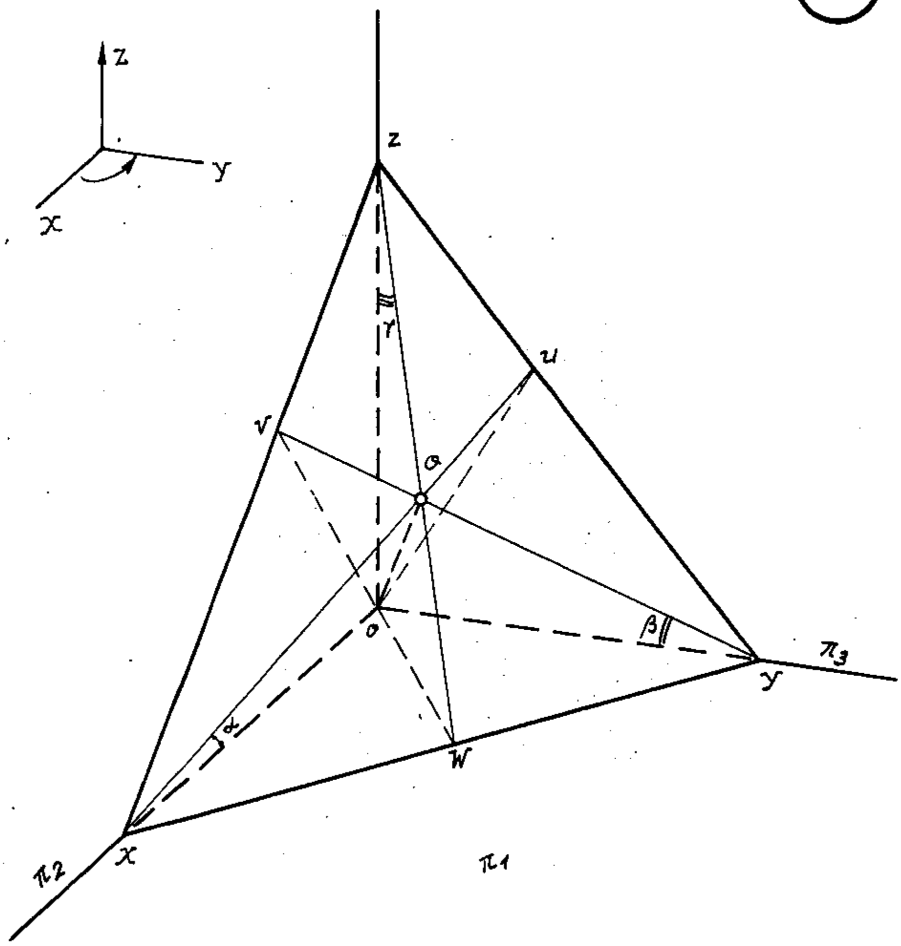
Axonometrie is een orthogonale parallelprojectie, zodat de 4 eigenschappen van blz.2 en de 2 eigenschappen van blz.31 gelden. In tegenstelling tot de orthogonale projectiemethode worden de assen niet in ware grootte in het tafereel τ afgebeeld:

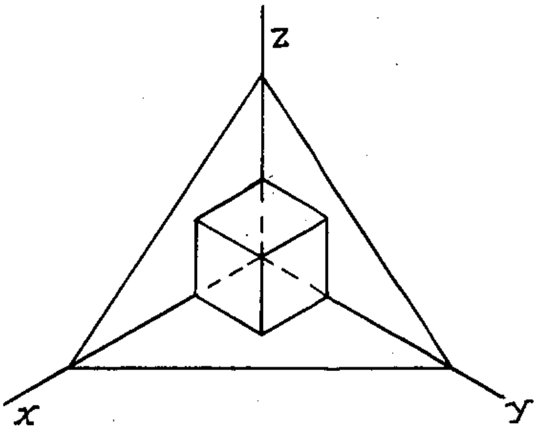
$\frac{XO}{X\bar{O}} = \cos \angle OX\bar{O} = \cos \alpha = p$, de verkortingsverhouding der x-as; evenzo is $q = \cos \beta = \frac{YO}{Y\bar{O}}$ de verkortingsverhouding der y-as; en $r = \cos \gamma = \frac{ZO}{Z\bar{O}}$ de verkortingsverhouding der z-as.

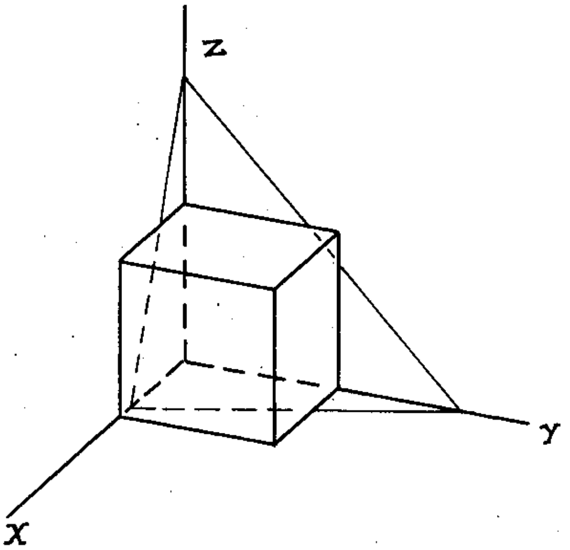
Voor p, q en r geldt de relatie:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2,$$

①







waaruit weer volgt:

$$p^2 < q^2 + r^2$$

$$q^2 < p^2 + r^2$$

$$r^2 < p^2 + q^2.$$

Men noemt de projectie <u>isometrisch</u> als $p=q=r= \frac{1}{3}\sqrt{6}$;
dan is ΔXYZ gelijkzijdig.

Men spreekt van <u>ingenieursaxonometrie</u> als $2p=q=r= \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

De verkorting $\frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,943 = 1/1,060$ is bijna gelijk aan 1; in de ingenieursaxonometrie tekent men nu in de y- en z-richting de ware lengte, en in de x-richting de halve ware lengte; daarbij maakt men dus de figuur 6% te groot. In deze cursus volgen wij deze gewoonte niet, en zullen we ook niet een speciale keus voor de verkortingsverhoudingen maken.

Indien de verkortingsverhoudingen p,q en r gegeven zijn, kan men de <u>tafereeldriehoek XYZ construeren</u> op gelijkvormigheid na:

$$p = \cos\alpha = \frac{XO}{X\bar{O}} = \frac{X\bar{O}}{XU} \Rightarrow \frac{XO}{XU} = p^2, \text{ evenzo } \frac{YO}{YV} = q^2 \text{ en } \frac{ZO}{ZW} = r^2.$$

Zij nu M het midden van XY, (tekening 2) dan liggen X,Y,U en V op een cirkel met M als middelpunt, $\Theta(M,\rho)$, $\rho = \frac{XY}{Z}$.
Vermenigvuldig deze

met de factor p^2 t.o.v. X; $\Longrightarrow \Theta(N,p^2\rho)$

met de factor q^2 t.o.v. Y; $\Longrightarrow \Theta(P,q^2\rho)$.

O is een snijpunt van deze cirkels.

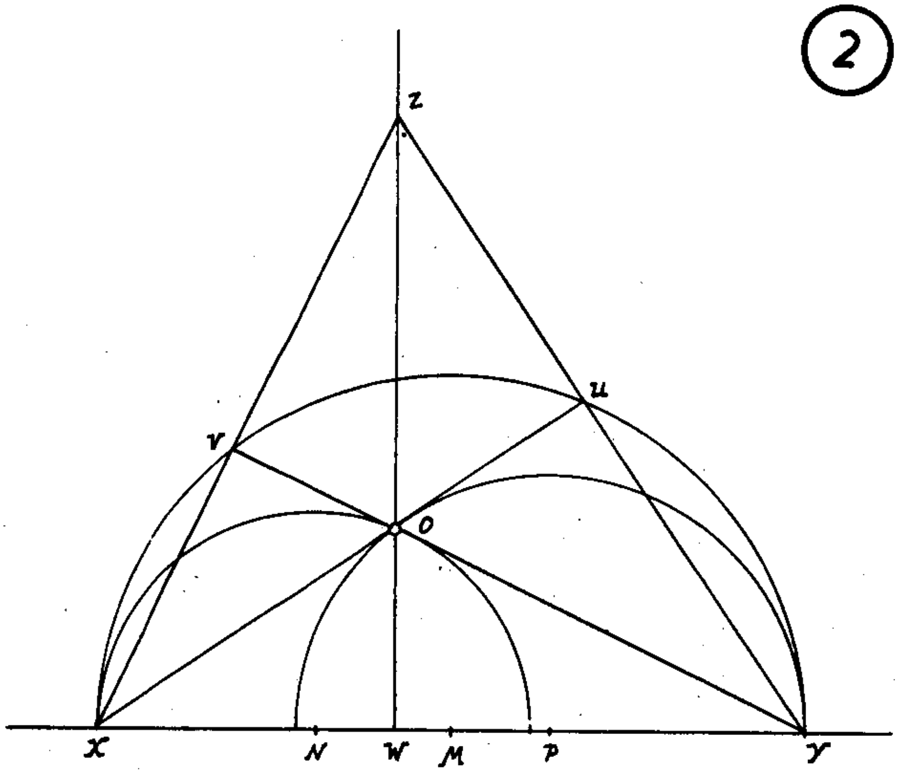
Nu is $NP = 2\rho - p^2\rho - q^2\rho = (2-p^2-q^2)\rho = r^2\rho$.

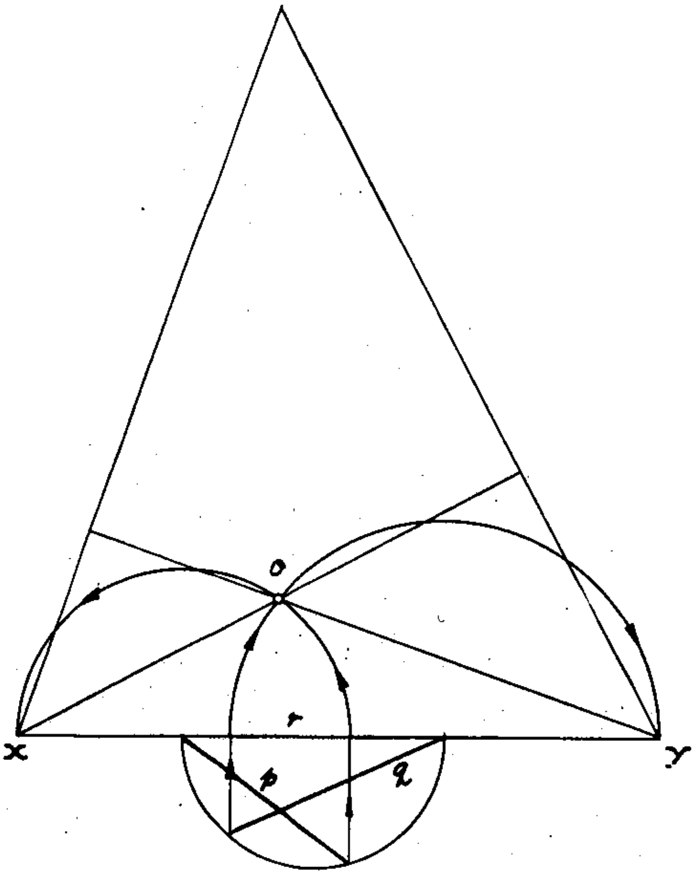
$$XN : NP : PY = p^2 : r^2 : q^2.$$

Indien dus p,q en r zijn gegeven, construeert men eerst lijnstukken die zich verhouden als p^2, q^2 en r^2; indien r de grootste van de drie is, construeren we daartoe een cirkel met r als middellijn, en koorden p en q; de projecties van p en q op r verhouden zich tot r als $p^2 : r^2$ en $q^2 : r^2$. Zo vindt men dus X, Y, O en daarna Z.

ΔXYZ is op <u>gelijkvormigheid</u> na door p,q en r bepaald; als men het tafereel τ vervangt door een tafereel $\tau' // \tau$, blijven p,q en r dezelfde; ΔXYZ gaat evenwel over in een $\Delta X'Y'Z'$ die met ΔXYZ gelijkvormig is.

②





Men kan dus de tafereeldriehoek construeren als behalve p, q en r nog een ware lengte, b.v. van XY, gegeven is.

Indien de tafereeldriehoek gegeven is, is daardoor het punt $\bar{O}$ bepaald: $\bar{O}$ is van de bollen met middellijnen XY, YZ, ZX het snijpunt dat niet aan dezelfde kant van τ ligt als de tekenaar.

Met $\bar{O}$ zijn door de tafereeldriehoek de assen en de vlakken π_1, π_2 en π_3 in de ruimte bepaald.

§ 2. Projecties van punten en lijnen.

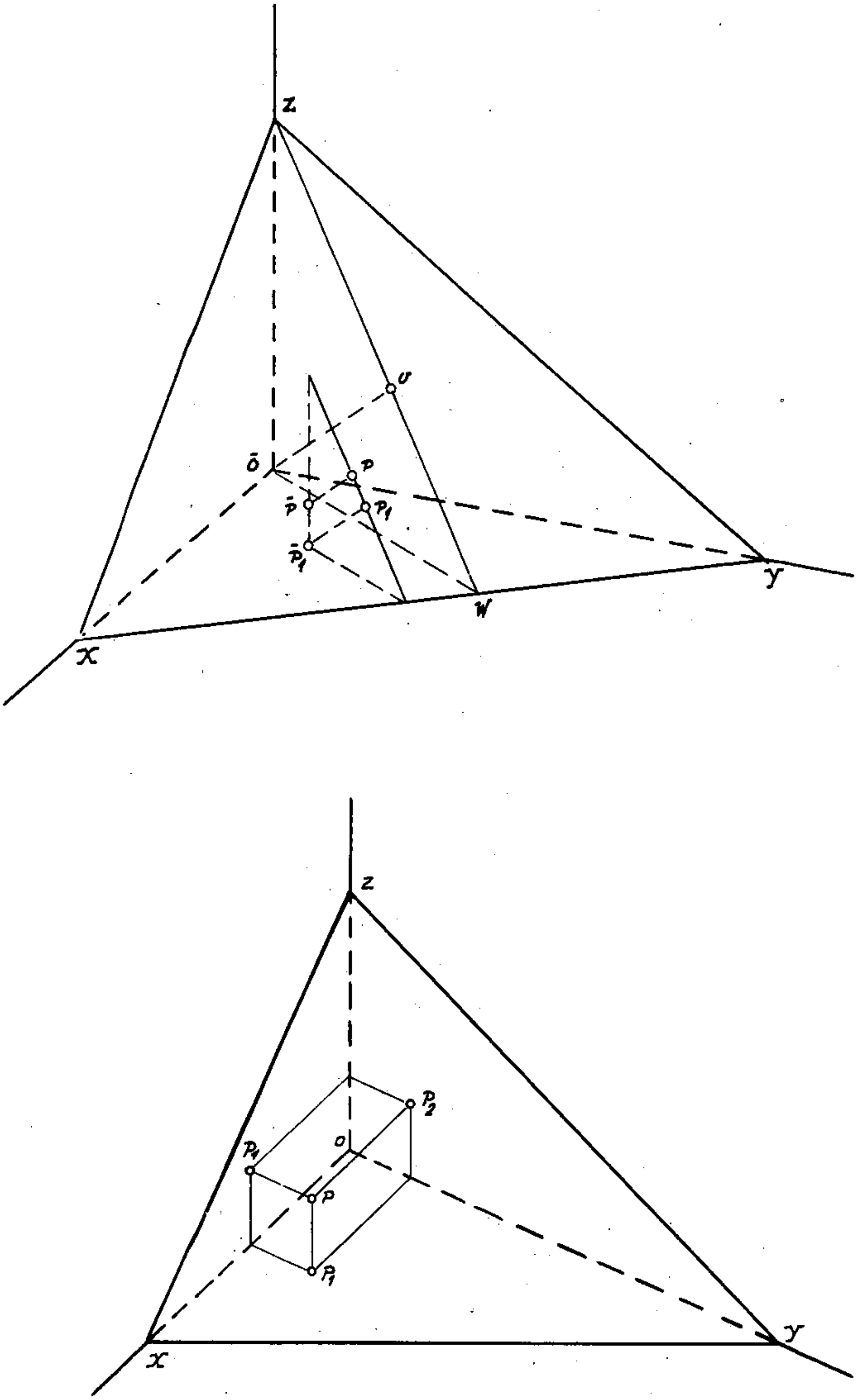
Een punt $\bar{A}$ in π_1 bepaalt zijn projectie A.
Door de projectie A van een punt $\bar{A}$ in π_1 wordt $\bar{A}$ bepaald.
Hetzelfde geldt voor punten uit π_2 en π_3.
Een willekeurig punt $\bar{P}$ bepaalt zijn projectie P; omgekeerd geldt niet: de projectie P bepaalt ook het punt $\bar{P}$; want alle punten van de p-straal door $\bar{P}$ worden in P geprojecteerd.

Om $\bar{P}$ te bepalen hebben we nog een gegeven nodig; daarom tekenen we in τ niet alleen P maar ook P_1, de projectie van $\bar{P}_1$; $\bar{P}_1$ is de orthogonale projectie van $\bar{P}$ op π_1.

Nu geldt: P_1 bepaalt het punt $\bar{P}_1$ in π_1; $\bar{P}_1$ bepaalt een rechte loodrecht op π_1 die $\bar{P}$ bevat (de horizontaal projecterende straal van $\bar{P}$), en deze bepaalt samen met P het punt $\bar{P}$. Dus om een punt $\bar{P}$ in de ruimte te bepalen zijn in τ 2 gegevens nodig: de projectie P van $\bar{P}$ en de projectie P_1 van $\bar{P}_1$. Men noemt PP_1 een drager van P. PP_2 en PP_3 kunnen eveneens als drager optreden.

Indien een punt P gegeven is door zijn coordinaten, moet men eerst P_1 bepalen door het vlak XOY in τ neer te slaan om XY. Omdat O_n en O affien verwant zijn, en de affiniteitsrichting loodrecht op de affiniteitsas XY staat, is ΔXO_nY bepaald door een halve cirkel met XY als middellijn.

③



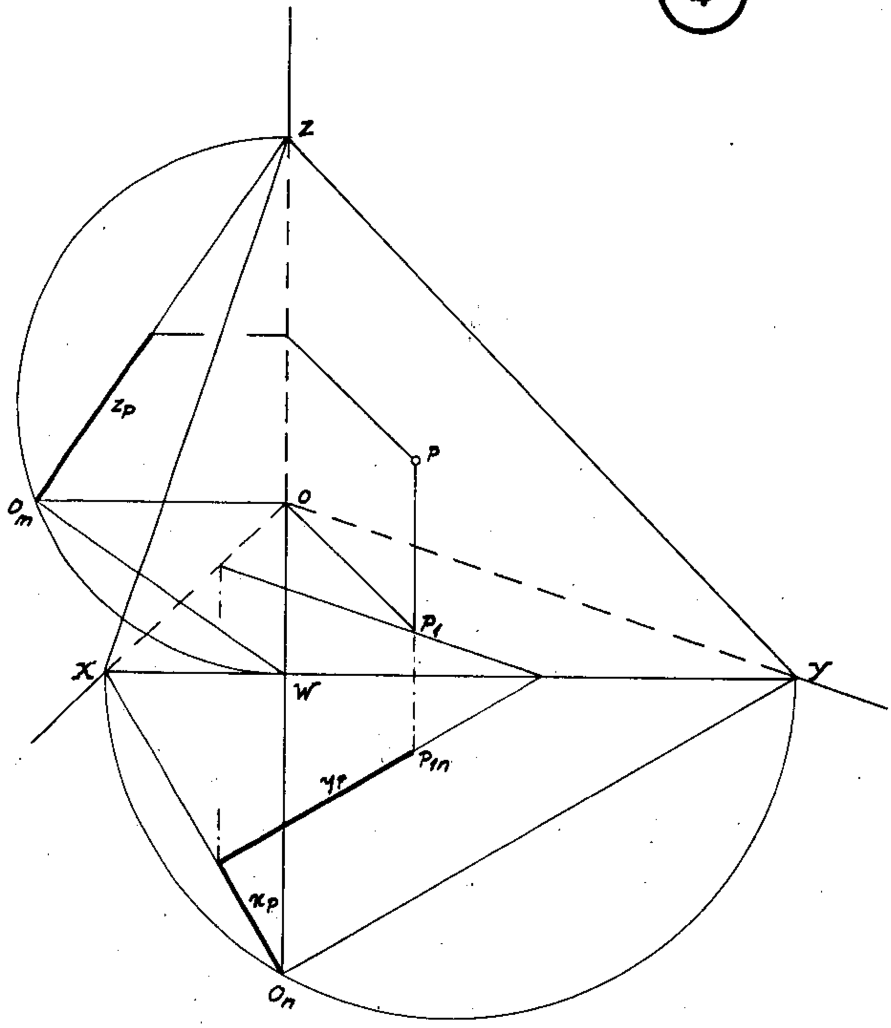
Vervolgens slaat men ΔZOW neer om ZW in τ : ΔZO_mW is eveneens door affiniteit en de cirkel met middellijn ZW te vinden. Tekening 4.

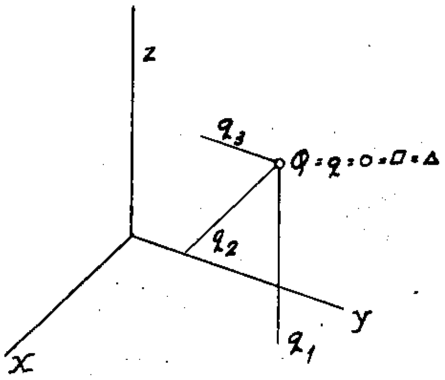
Indien de verkortingsverhoudingen bekend zijn, kan men in dit geval p' direct vinden door de met p,q,r vermenigvuldigde coordinaten direct in de x,y,z richting af te passen.
Een lijn $\bar{a}$ in π_1 bepaalt zijn projectie a; en de projectie a bepaalt weer de lijn $\bar{a}$ in π_1.
Hetzelfde geldt voor lijnen in π_2 en π_3.
Een willekeurige lijn $\bar{l}$ bepaalt zijn projectie l; dit is eveneens de projectie van alle lijnen uit het projecterende vlak van $\bar{l}$ die niet // p zijn. Dus $\bar{l}$ is door zijn projectie l niet bepaald. Een lijn $\bar{l}$ is bepaald door de projecties l en l_1; l_1 is de projectie van $\bar{l}_1$; $\bar{l}_1$ is de horizontale projectie van $\bar{l}$.
Evenzo is $\bar{l}$ bepaald door l en l_2 of door l en l_3.

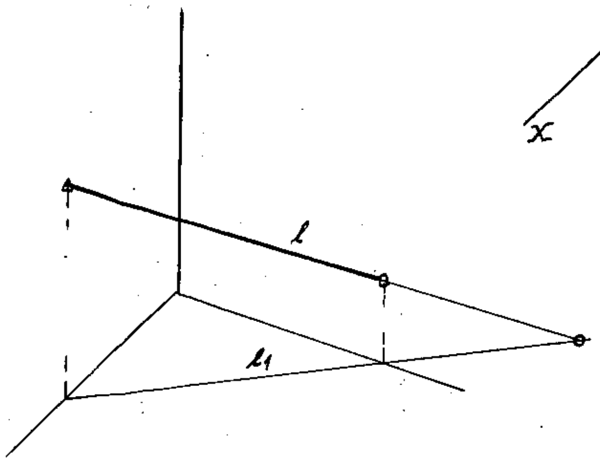
Ook is een lijn bepaald door 2 van zijn punten. Deze punten kunnen bijvoorbeeld 2 der doorgangspunten zijn; de doorgangspunten liggen namelijk in π_1, π_2 en π_3, en worden door hun projecties dus zonder meer bepaald.

Een uitzondering vormt een lijn $\bar{q}$ //p. Deze staat $\perp \tau$, heeft als projectie een punt Q, en wordt daardoor weer zonder meer bepaald.
q_1, q_2 en q_3 zijn evenwijdig aan de z-as, de x-as en de y-as.
Een voorbeeld is de projecterende rechte door O.

④







§ 3. Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak.

Indien $\bar{l}$ en $\bar{m}$ elkaar snijden in $\bar{P}$, geldt:

$\bar{l}_i$ en $\bar{m}_i$ snijden elkaar in $\bar{P}_i$ voor $i=1,2,3$.

En tevens:

l en m snijden elkaar in P, en

l_i en m_i snijden elkaar in P_i, $i=1,2,3$.

Indien $\bar{l}//\bar{m}$, geldt:

$\bar{l}_i//\bar{m}_i$, $i=1,2,3$

zodat ook $l//m$ en $l_i//m_i$, $i=1,2,3$.

Hierbij is ondersteld dat alle projecties weer lijnen zijn.

Indien $\bar{l}$ en $\bar{m}$ elkaar snijden, of indien $\bar{l}//\bar{m}$, kan men door $\bar{l}$ en $\bar{m}$ een vlak $\bar{\alpha}$ brengen. De doorgangen van dit vlak met π_1, π_2 en π_3 gaan door de gelijknamige doorgangspunten van $\bar{l}$ en $\bar{m}$. Het vlak $\bar{\alpha}$ is door de projecties α_1, α_2, en α_3 van de doorgangen $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, en $\bar{\alpha}_3$ van $\bar{\alpha}$ met π_1, π_2 en π_3 volkomen bepaald. Tekening 5.

Een vlak α snijdt in het algemeen ook het tafereel τ. De snijlijn noemt men de doorgang met τ van α, of τ-doorgang van α, en wordt aangegeven met α_τ.

Ze wordt gevonden met behulp van ΔXYZ:

Het snijpunt van XY met α_1 ligt op α_τ, en evenzo het snijpunt van YZ met α_2 en dat van XZ met α_3. Tekening 5.

Een punt P ligt in een vlak α, als P ligt op een lijn a van α; het verband tussen P,P_1 en de doorgangen van α kan men aangeven door van hoofdlijnen gebruik te maken; in tekening 5 is a een 2e hoofdlijn door P in α.

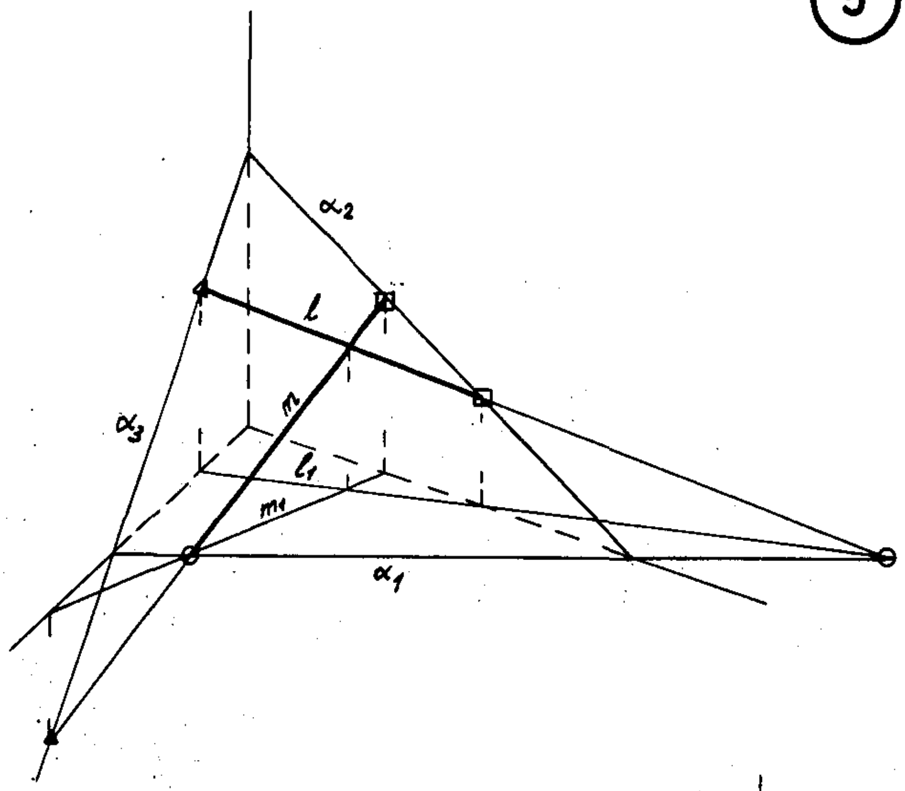
Opgaven:

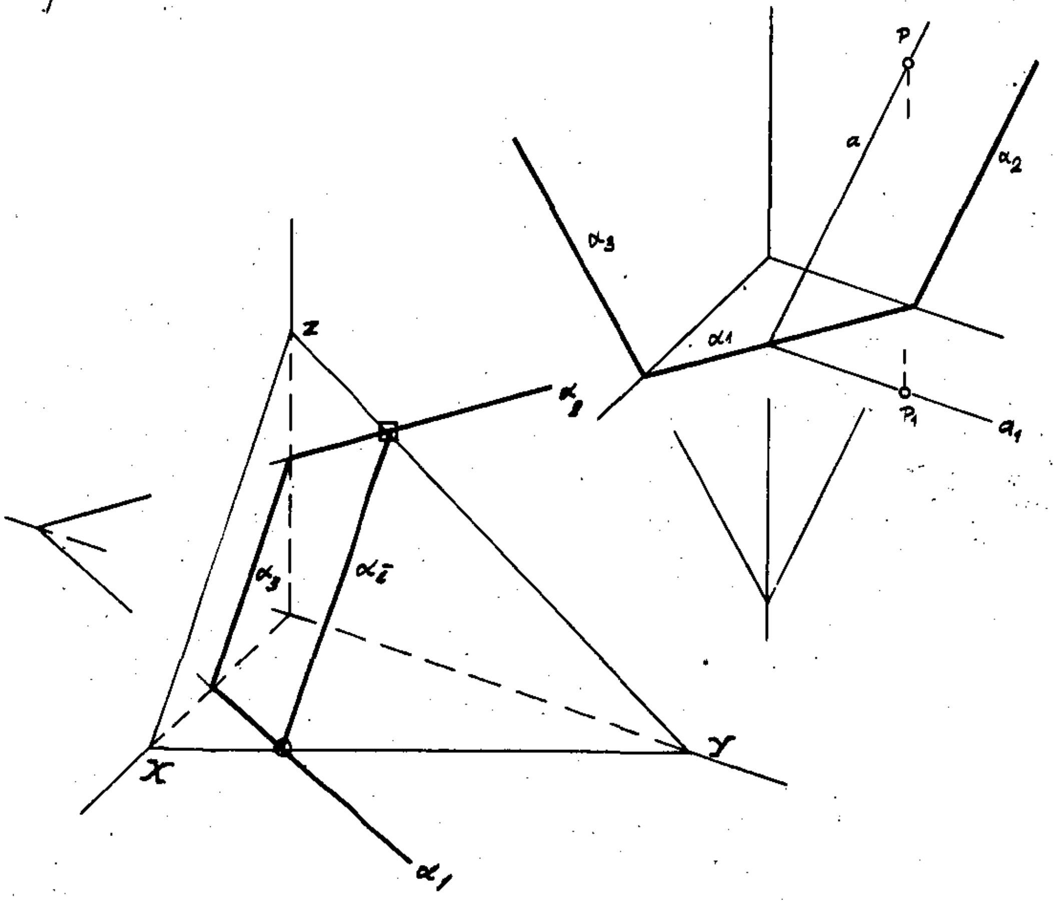
1. Neem in ΔXYZ : XY=7, XZ=8, YZ=9.

   Construeer de projecties van de punten

A(1,2,3)	E(-2,-4,3)
B(3,5,3)	F(4,-6,3)
C(5,7,3)	G(4,6,-3)
D(-2,4,3)	H(-2,-4,-6)

⑤





2. Neem XY=10, en p:q:r=1:2:2.
   Construeer de tafereeldriehoek, en daarna de punten C,F en G uit 1.

3. Neem XY=10, p=½, q=r, en construeer de tafereeldriehoek; daarna de punten C,F en G uit 1.

4. Kies zelf een tafereeldriehoek; met A, B,...zijn de punten uit 1. bedoeld.
   a) Construeer een lijn l door A en B, en bepaal de doorgangspunten van l.
   b) Construeer een lijn m door A en G, en bepaal de doorgangspunten.
   c) Construeer de doorgangen van het vlak α door l en m, ook α_τ; ook de doorgangspunten van l en m met τ.
   d) Construeer een lijn n door D en //l.
   e) Construeer het vlak β door n en l; bepaal ook β_τ; ook het snijpunt van n met τ.

5. Bepaal een lijn k door C en loodrecht op τ.
   Bepaal een lijn h door H en loodrecht op τ.
   Bepaal een vlak γ door deze lijnen.

§ 4. Onderlinge ligging van vlakken.

Indien $\alpha // \beta$, geldt (voor zover deze bestaan) $\alpha_i // \beta_i$ (i=1,2,3) en $\alpha_\tau // \beta_\tau$. Tekening 6.

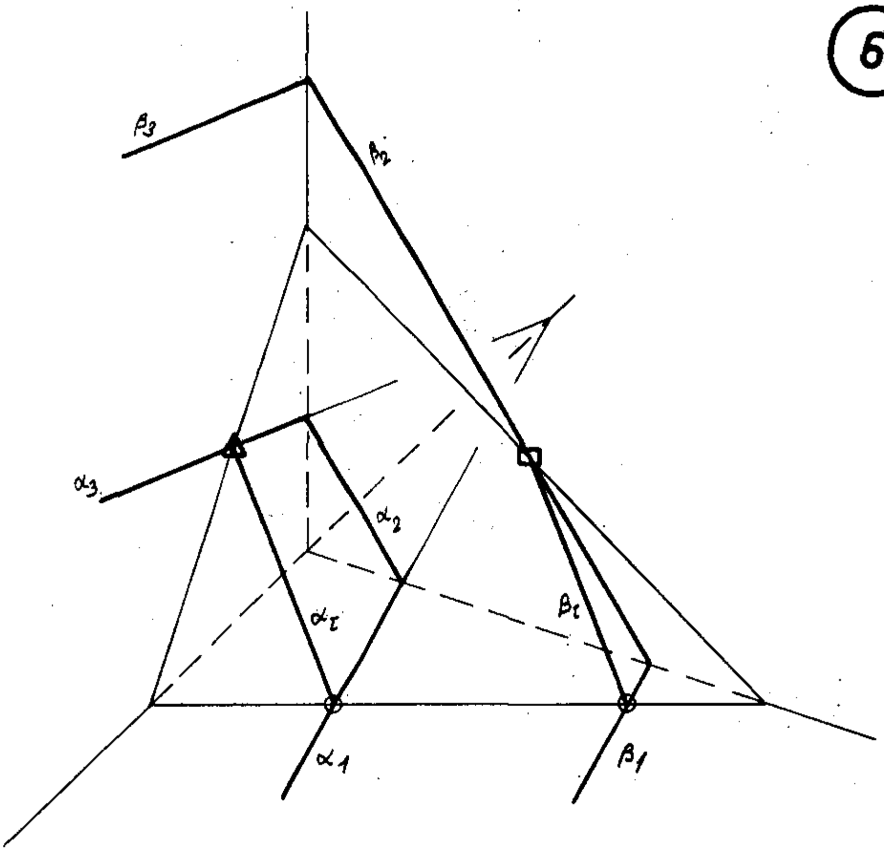
In het bijzonder:

als $\alpha // \pi_1$, is α_2 //y-as, α_3 //z-as, α_τ//XY; α_1 is er niet. Analoog voor $\alpha // \pi_2$ of $\alpha // \pi_3$.

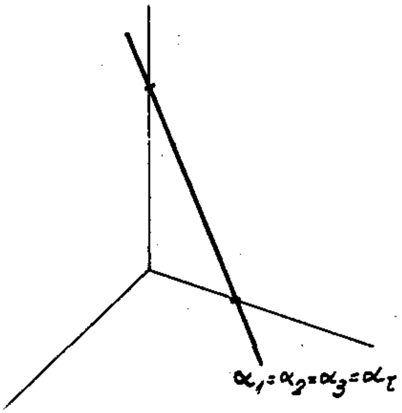
Indien $\alpha // \tau$, is α_1 //XY, α_2 //YZ, α_3 //XZ; α_τ is er niet.

Indien α en β elkaar snijden volgens een rechte s, gaat s door de snijpunten der gelijknamige doorgangen. Tekening 6.

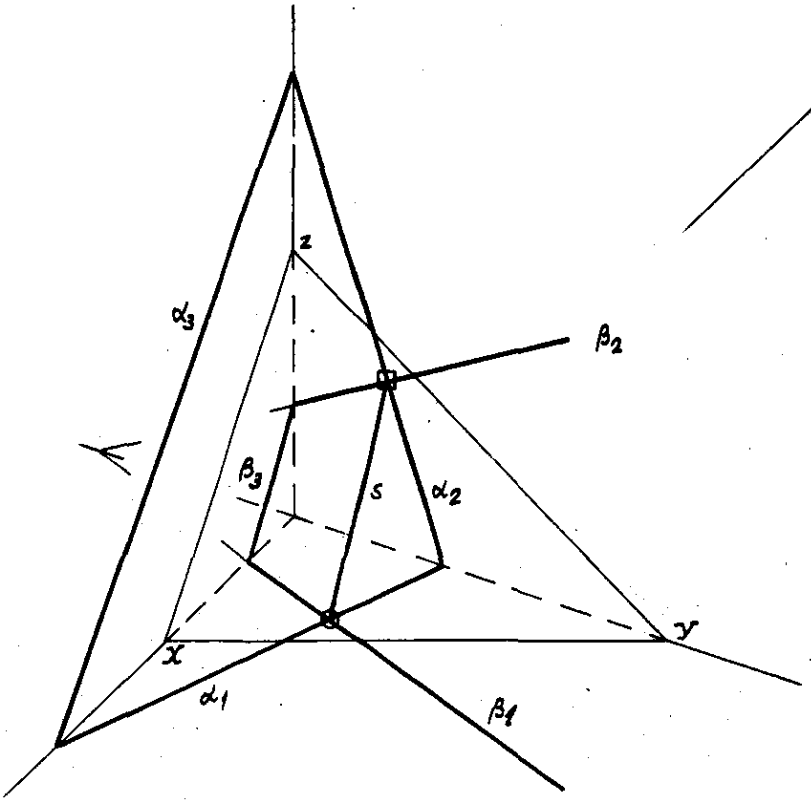
⑥



β_3
β_2
α_3
α_2
α_τ
β_τ
α_1
β_1



$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_\tau$



z
α_3
β_2
β_3
s
α_2
x
y
α_1
β_1

Indien een vlak $\alpha \perp \tau$, projecteren alle punten en alle lijnen uit α zich in α_τ; ook de doorgangen α_1, α_2 en α_3.

Een kenmerk van een vlak $\perp \tau$ is dus dat de doorgangen α_1, α_2, α_3 en α_τ in het tafereel τ samenvallen. Een voorbeeld van zo'n vlak is het projecterende vlak van de z-as, dat we al eerder hebben neergeslagen in τ. Tekening 6.

Opgaven:

1. Construeer een vlak
   - a) door 3 gegeven punten A,B,C;
   - b) door een lijn a en // een lijn b.
   - c) door een punt A en //een vlak α.

2. Construeer een rechte
   - a) door het punt A, die de rechten b en c snijdt.
   - b) // de rechte a, die de rechten b en c snijdt.

   Tekening 7.

§ 5. Het neerslaan van vlakken in τ.

Voor het uitvoeren van constructies waarbij de ware grootte van lijnstukken of hoeken of het begrip afstand een rol speelt is het vaak noodzakelijk een vlak α in τ neer te slaan. Hierbij fungeert α_τ altijd als affiniteitsas, en de richting loodrecht hierop als affiniteitsrichting.

Bij het neerslaan wordt ook meestal gebruikt de eigenschap dat de benen van een rechte omtrekshoek een cirkel in de eindpunten van een middellijn snijden.

a) α is een der vlakken π_1, π_2 of π_3; dit geval is reeds besproken in § 1, met π_1; π_2 en π_3 gaan op dezelfde manier.

b) α is een vlak door één der coordinaatassen. Voor het vlak door Z,O en W is dit reeds besproken in § 1. Hier slaan we nog een vlak σ door de x-as neer. Tekening 8.

In deze twee gevallen wordt gebruik gemaakt van een in het vlak α gelegen rechte hoek. Ook in het algemene geval willen we over een rechte hoek de beschikking krijgen. We maken daarbij gebruik van de stelling: als $\bar{l} \perp \bar{\alpha}$, staat de orthogonale projectie van l op een vlak (τ, π_1, π_2 of π_3) loodrecht op de doorgang van α met dat vlak. In onze tekening in τ staat dus $l \perp \alpha_\tau$, en in $\bar{\pi}_i$ staat $l_i \perp \alpha_i$; aangezien we de vlakken π_i reeds kunnen neerslaan, kunnen we met l_i werken (i=1,2,3).

Construeer nu door een gegeven punt P een lijn l, die loodrecht op een gegeven vlak α staat. Tekening 7.

Construeer ook door een gegeven punt P een vlak α, dat loodrecht op een gegeven lijn l staat. Tekening 8.

c) het neerslaan van een willekeurig vlak α. Tekening 9.
Indien α_1 en α_2 elkaar in A snijden, en van $\angle A$ niet bekend is dat ze recht is, construeren we eerst een rechte hoek bij A; we brengen daartoe een vlak λ aan door A en loodrecht op α_1.
Van λ is $\lambda_1 \perp \alpha_1$ in π_1 te construeren door π_1 in τ neer te slaan; λ_2 //z-as.
De snijlijn s van α en λ gaat door A en staat loodrecht op α_1.
We slaan dan de door α_1, α_τ en s gevormde driehoek in τ neer, gebruik makend van een halve cirkel en affiniteit.

Het neerslaan van vlakken wordt toegepast om ware grootten te construeren:

Opgaven:

1. Construeer de projectie en de ware grootte van de afstand van
   a) twee gegeven punten A en B.
   b) een gegeven punt A en een gegeven vlak α.
   c) een gegeven punt A en een gegeven lijn a.
   d) twee gegeven kruisende lijnen a en b.
   Tekening 10.

2. Construeer de hoek tussen
   a) twee gegeven snijdende lijnen a en b.
   b) twee gegeven snijdende vlakken α en β.
   c) een gegeven lijn a en een gegeven vlak α.
   Tekening 11.

3. Gegeven is een lijn a in τ en een punt A.
   Construeer een rechte die door A gaat, a loodrecht kruist, en de z-as snijdt. Tekening 12.

4. Construeer een rechte, die loodrecht op τ staat en twee gegeven rechten snijdt. Tekening 12.

5. Construeer een regelmatig achtvlak, waarvan de diagonalen op de coordinaatassen liggen. Tekening 12.

§ 6. Wentelen van lichamen.

Bij het wentelen van lichamen handelt men geheel overeenkomstig hoofdstuk I, § 8.

Voorbeeld: Een regelmatig viervlak ABCD met ribbe 5 heeft $\triangle ABC$ in π_1; $A \in XY$, $AB // x$-as; de afstand van AB tot de x-as is 2.

Construeer de projectie van het viervlak na wenteling om AB tot D in π_3 ligt; en ook de eigenschaduw en slagschaduw bij licht dat invalt in de richting ZX. Tekening 13.

§ 7. Regelvlakken.

Een regelvlak is de meetkundige plaats van rechte lijnen die aan zekere voorwaarden voldoen.

Voorbeelden:

1: Een kegel is een regelvlak; het is de meetkundige plaats der lijnen die door een gegeven punt T gaan en een gegeven kromme γ snijden. Als T en γ in één plat vlak liggen, krijgt men een ontaarde kegel, een plat vlak.

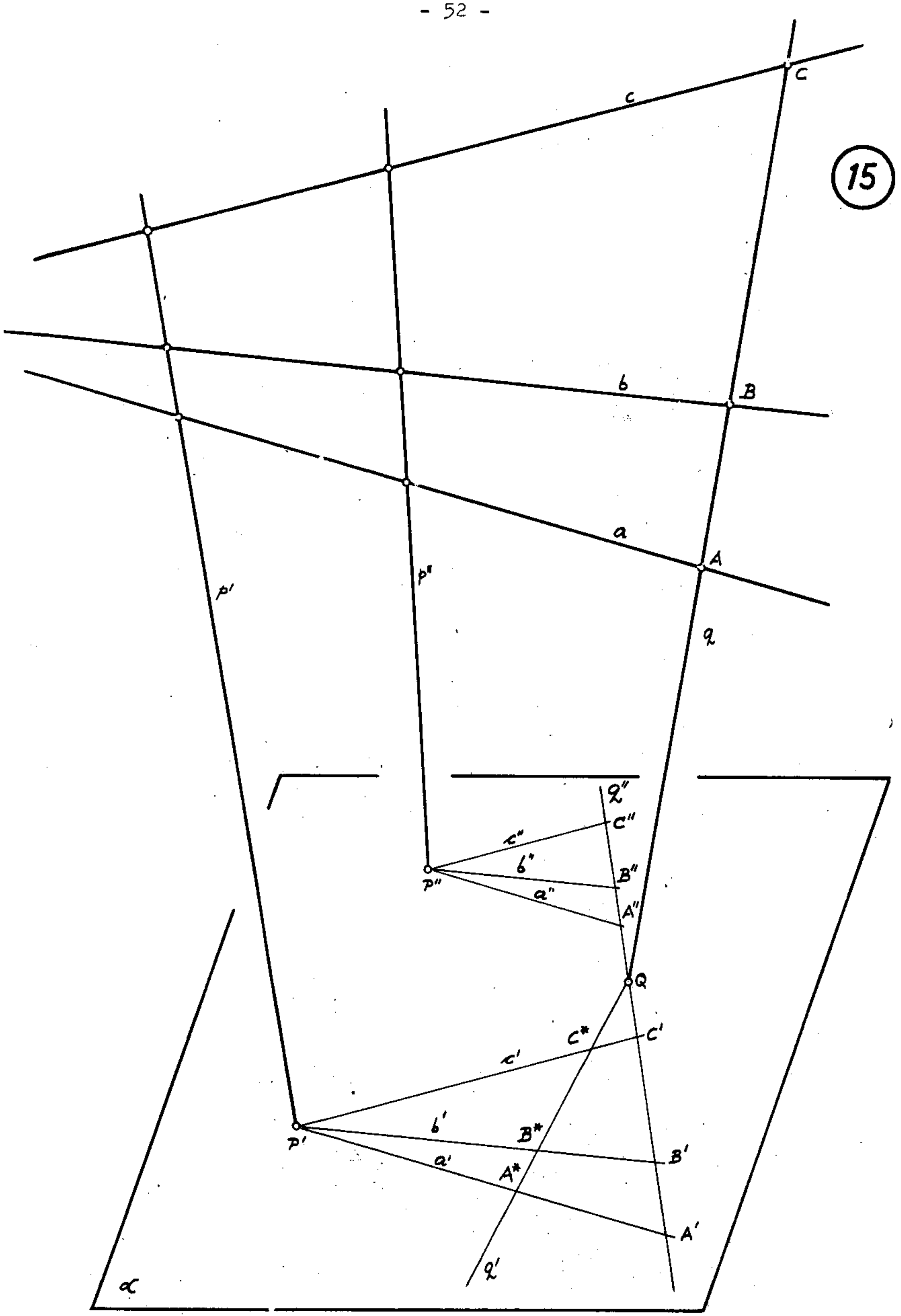
2: Een cylinder is een regelvlak, namelijk de meetkundige plaats van de lijnen die een gegeven kromme γ snijden, en een gegeven richting p hebben (d.w.z. evenwijdig zijn met een gegeven rechte p). Als γ ligt in een vlak dat $//p$ is, krijgt men een ontaarde cylinder, een plat vlak.

3: Een <u>éénbladige hyperboloïde</u> is de meetkundige plaats der lijnen l' die 3 gegeven, elkaar kruisende rechten a,b en c snijden; a,b en c zijn niet evenwijdig met één plat vlak. Ieder punt van a brengt zo één rechte van het oppervlak voort. Bij twee verschillende punten P en Q van a horen 2 kruisende rechten van het oppervlak, p' en q'. Bij 3 verschillende punten P, Q en R van a horen 3 rechten p', q' en r', die niet met één vlak evenwijdig zijn. Het bewijs hiervan volgt nog. Neemt men nu drie rechten p' , q', r' van het voortgebrachte stelsel, dan is het oppervlak ook de meetkundige plaats der rechten die p', q' en r' snijden. Op het oppervlak liggen dus twee stelsels rechten. Door ieder punt van het oppervlak gaan 2 rechten, één uit ieder stelsel. Dit geldt in het bijzonder ook voor oneindig verre punten van het oppervlak, zodat bij iedere rechte a uit het ene stelsel een rechte a' uit het andere stelsel hoort waarvoor a // a'.

<u>Opgave</u> :

Van een eenbladige hyperboloïde zijn de lijnen a,b,c gegeven (zie tekening 14).
Construeer de lijnen uit het andere stelsel die in π_1, π_2 en π_3 liggen.
Construeer de lijnen uit het andere stelsel die met a,b en c evenwijdig zijn.

4: Een <u>hyperbolische paraboloïde</u> is de meetkundige plaats der lijnen l' die 3 gegeven rechten a,b en c snijden; a,b en c kruisen elkaar, doch zijn evenwijdig met een vlak α. Ieder punt P van a brengt één rechte p van het oppervlak voort. Twee punten P en Q van a brengen kruisende rechten p en q voort. Drie verschillende punten P,Q en R van a brengen 3 rechten voort die evenwijdig met één vlak β zijn. Immers, zie tekening 15, neem a,b,c als voortbrengende rechten, p', p" en q als voortgebrachte rechten; a,b,c $//\alpha$. p' snijdt α; (uit p'$//\alpha$ zou volgen: a en b liggen in één plat vlak); het snijpunt van p' met α zij P'.


15
c
C
b
B
a
A
p'
p''
q
q''
c''
C''
b''
B''
a''
A''
P''
Q
C*
C'
c'
b'
B*
B'
P'
a'
A*
A'
q'
α

Evenzo is het snijpunt van p'' met α: P'', dat van q met α: Q.
Projecteer nu a,b,c en q in de richting p' op α, dit geeft a', b', c' door P' en q' door Q.
Projecteer eveneens a,b,c en q in de richting p'' op α, dit geeft a'', b'', c'' door P'' en q'' door Q.

De snijpunten van q met a,b,c zijn achtereenvolgens A,B,C; de projecties van A,B,C zijn A',B',C' en A'',B'',C''. q'' snijdt a',b',c' in A^*,B^*,C^*. Nu geldt: $a' /\!/ a''$, $b' /\!/ b''$, $c' /\!/ c''$ (volgt uit $a,b,c /\!/ \alpha$).
$\Longrightarrow$ $A''B'' : B''C'' = A^*B^* : B^*C^*$.
Uit hetgeen bij affiniteit in hoofdstuk I, § 5 werd opgemerkt volgt:
$A'A'' /\!/ B'B'' /\!/ C'C'' \Longrightarrow A'B' : B'C' = A''B'' : B''C''$.

Maar dan geldt ook: $A^*B^* : B^*C^* = A'B' : B'C'$, hetgeen volgens een bekende stelling uit de meetkunde alleen mogelijk is als $q' /\!/ q''$.
Maar q' en q'' gaan door $Q \Longrightarrow$ Ze vallen samen.
Dus: de p'-projectie kan q en de p''-projectie van q op α vallen samen $\Longrightarrow$ q // het vlak β dat de richtingen p' en p'' bevat.

$$\text{Dus uit: } \left.\begin{array}{l} a,b,c \text{ kruisen elkaar,} \\ a,b,c /\!/ \alpha \end{array}\right\} \quad \text{volgt:} \quad \begin{array}{l} p,q,r \text{ kruisen elkaar} \\ p,q,r /\!/ \beta \end{array}$$

zodat geldt: de hyperbolische paraboloïde, voortgebracht door a,b en c, wordt ook voortgebracht door de door a,b en c voortgebrachte rechten p,q en r.

(Opmerking, in verband met de eenbladige hyperboloïde:
het is nu duidelijk dat als a,b en c niét met één vlak evenwijdig zijn, dit met p,q en r ook niet het geval is).
De hyperbolische paraboloïde bevat dus twee stelsels rechten; door ieder punt van het oppervlak gaan er precies 2, één van ieder stelsel. Voor een oneindig ver punt van a voert de constructie van de snijlijn van a,b en c tot de oneindig verre rechte; dus bij de rechte a uit het ène stelsel hoort niet een lijn uit het andere stelsel die er mee evenwijdig is, in tegenstelling tot de eenbladige hyperboloïde. De genoemde vlakken α en β heten de richtvlakken.

Zowel voor een eenbladige hyperboloïde als voor een hyperbolische paraboloïde geldt: Het raakvlak in een punt van het oppervlak is het vlak door de regels door dat punt.

Opgaven:

1. Van een hyperbolische paraboloïde zijn 2 richtlijnen a en b, het bijbehorende richtvlak α en het richtvlak β gegeven, zie tekening 16. Construeer enige voortgebrachte rechten..

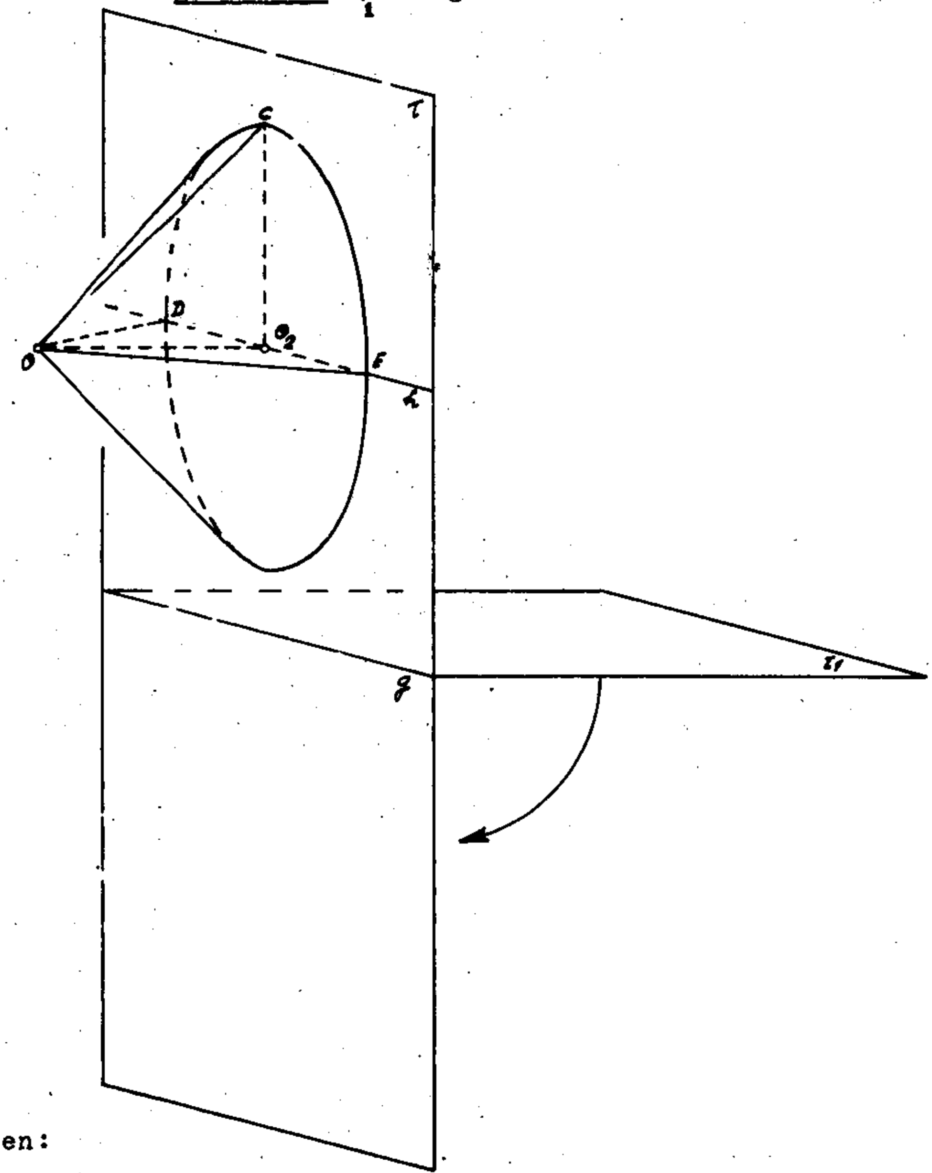
2. Construeer in een willekeurig punt van de paraboloïde uit figuur 16 het raakvlak.

3. Construeer in een willekeurig punt van de hyperboloïde uit figuur 14 het raakvlak.

HOOFDSTUK III - PERSPECTIEF

§ 1. Perspectief van punten en lijnen

Perspectief is centrale projectie met iets bijzonders:
Het tafereel τ is vertikaal. Het oog O (= centrum van de projectie) is vóór τ. We beelden alleen punten af die achter τ liggen. Verder wordt nog een horizontaal **grondvlak** τ_1 aangenomen.



In τ liggen:

- oogpunt O_2 = voetpunt van de loodlijn uit O op τ,
- grondlijn g = doorgang van τ_1,
- horizon h = doorgang van vlak op ooghoogte $//\tau_1$,
- distantiecirkel om O_2 met straal d (= distantie) = afstand van O tot τ,
- distantiepunten D, E ($O_2O = O_2D = O_2E$).

De perspectief van een punt P is de centrale projectie (vanuit O) van P op τ, dat is het snijpunt van OP met τ. Evenzo is de perspectief van een lijn zijn projectie uit O op τ.

perspectief van bijzondere punten en lijnen

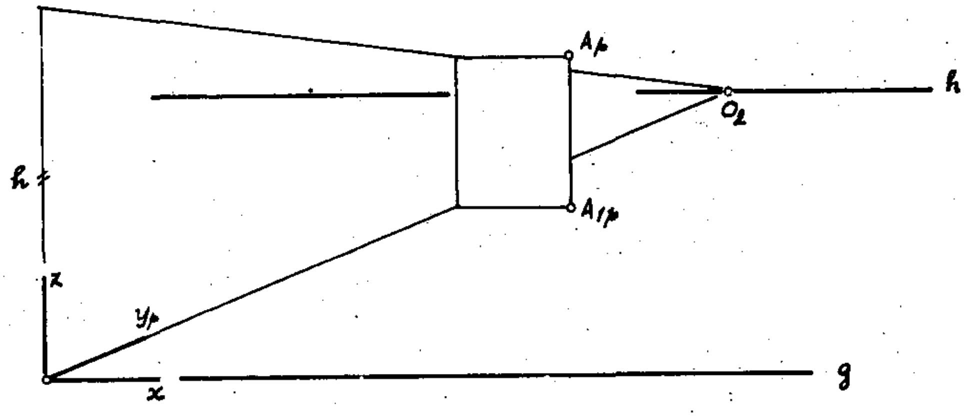
1. De perspectief van een punt van τ_1, dat achter τ ligt valt tussen g en h.
2. De perspectief van een lijn $//\tau$ is $//$ de rechte zelf.
3. De perspectief van een lijn $\perp\tau$ gaat door O_2.
4. De perspectief van een lijn van τ_1 die 45^o met τ maakt, gaat door D of E.
5. De perspectief van een lijn $\perp\tau_1$ is $\perp g$.

§ 2. Weergave van punten, lijnen en vlakken

1. punt

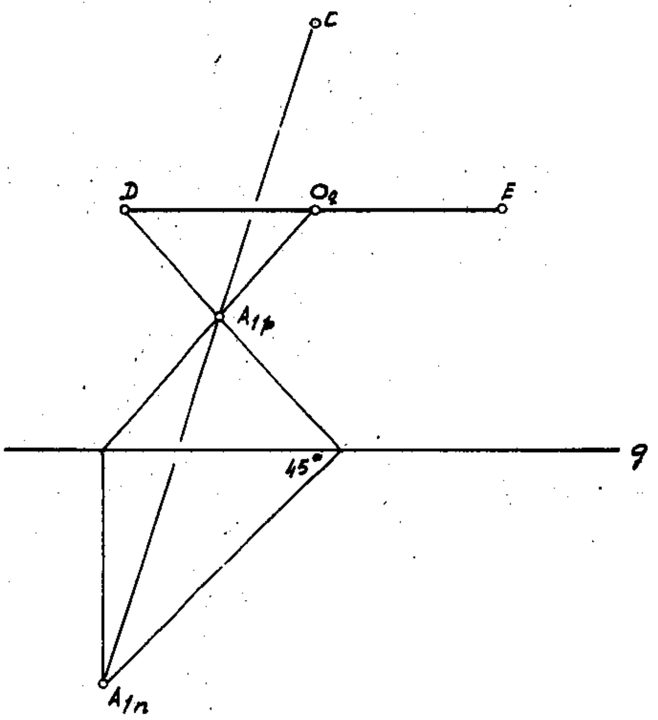
Een punt A wordt gegeven door zijn perspectief A_p en de perspectief A_{1p} van het voetpunt A_1 op τ_1.

A_p is door A_{1p} en de hoogte h van A bepaald:

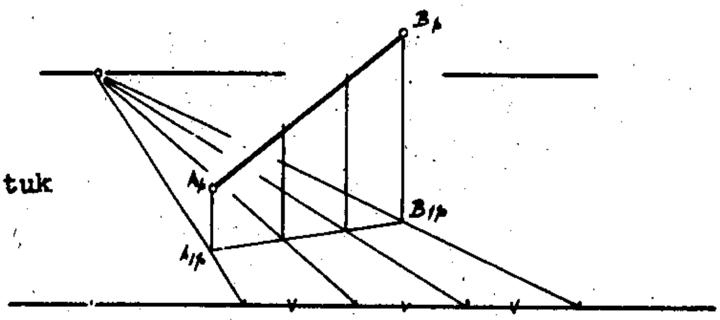


Neem een rechthoekig assenstelsel als volgt: x-as **langs g naar rechts,** z-as naar boven en y-as naar achteren. Om A_{1p} uit de coordinaten van A te tekenen slaan we τ_1 neer in τ. We nemen twee lijnen door A_1 in τ_1:

1) de lijn door $A_1 \perp \tau$,
2) **een lijn door A_1, die 45° met τ maakt.**



Let op de <u>perspectiviteit</u> tussen perspectief en neerslag **van de punten** en lijnen van τ_1 : g is de affiniteitsas. Het neerslaan is projectie in de richting OC, dus C is het centrum van de perspectiviteit.
Let op, de schaalverdeling op y_p is niet evenredig.



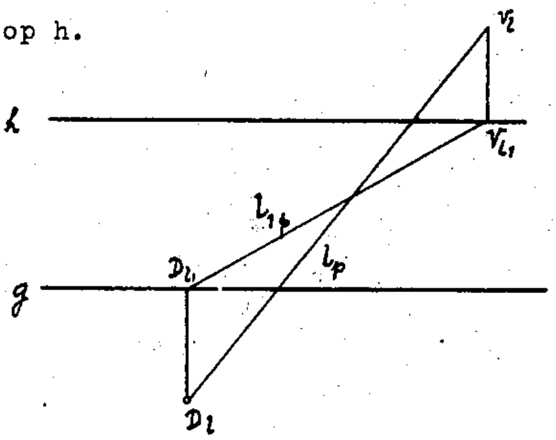
verdeling van een lijnstuk in drie gelijke delen

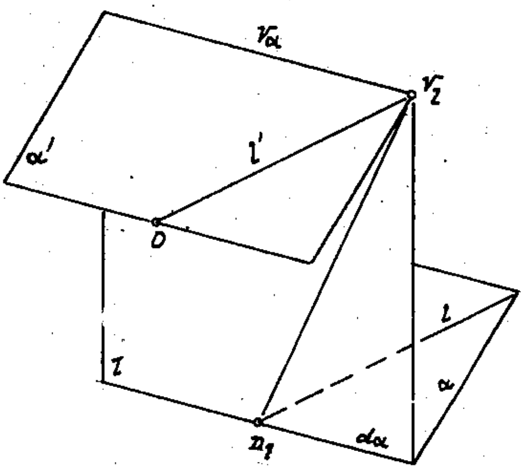
2. lijn

Een lijn l wordt bepaald door zijn perspectief l_p en de perspectief l_{1p} van zijn loodrechte projectie l_1 op τ_1,

of door $\begin{cases} D_l = \text{doorgangspunt met } \tau , \\ V_l = \text{vluchtpunt} = \text{doorgangspunt van de parallelstraal } l' \text{ door O.} \end{cases}$

Een lijn $// \tau_1$ heeft zijn vluchtpunt op h.





3. vlak

Een vlak α wordt bepaald door

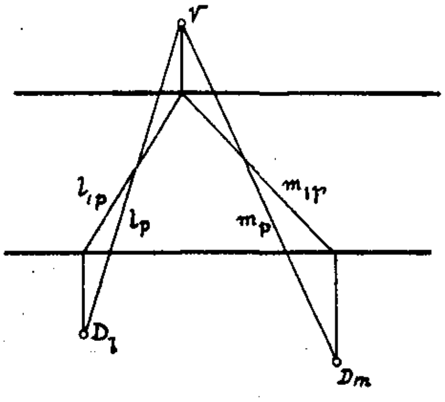
$\begin{cases} \alpha_\tau = \text{doorgang met } \tau \text{ (= doorgangslijn } d_\alpha), \\ \alpha_{1p} = \text{perspectief van doorgang met } \tau_1 \text{ ;} \end{cases}$

of door d_α en v_α = vluchtlijn = doorgang van het parallelvlak α' door O.

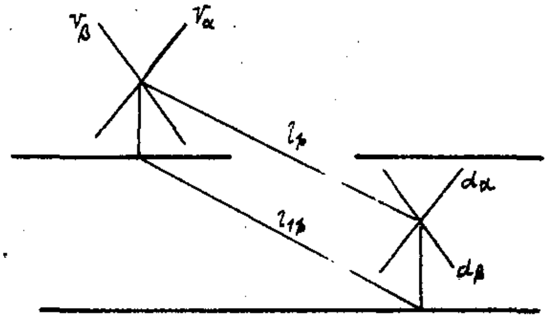
Doorgangslijn en vluchtlijn zijn evenwijdig.

h is de vluchtlijn van τ_1.

4. Evenwijdige lijnen hebben hetzelfde vluchtpunt, evenwijdige vlakken hebben dezelfde vluchtlijn. Lijn // vlak als vluchtpunt op vluchtlijn.



evenwijdige lijnen

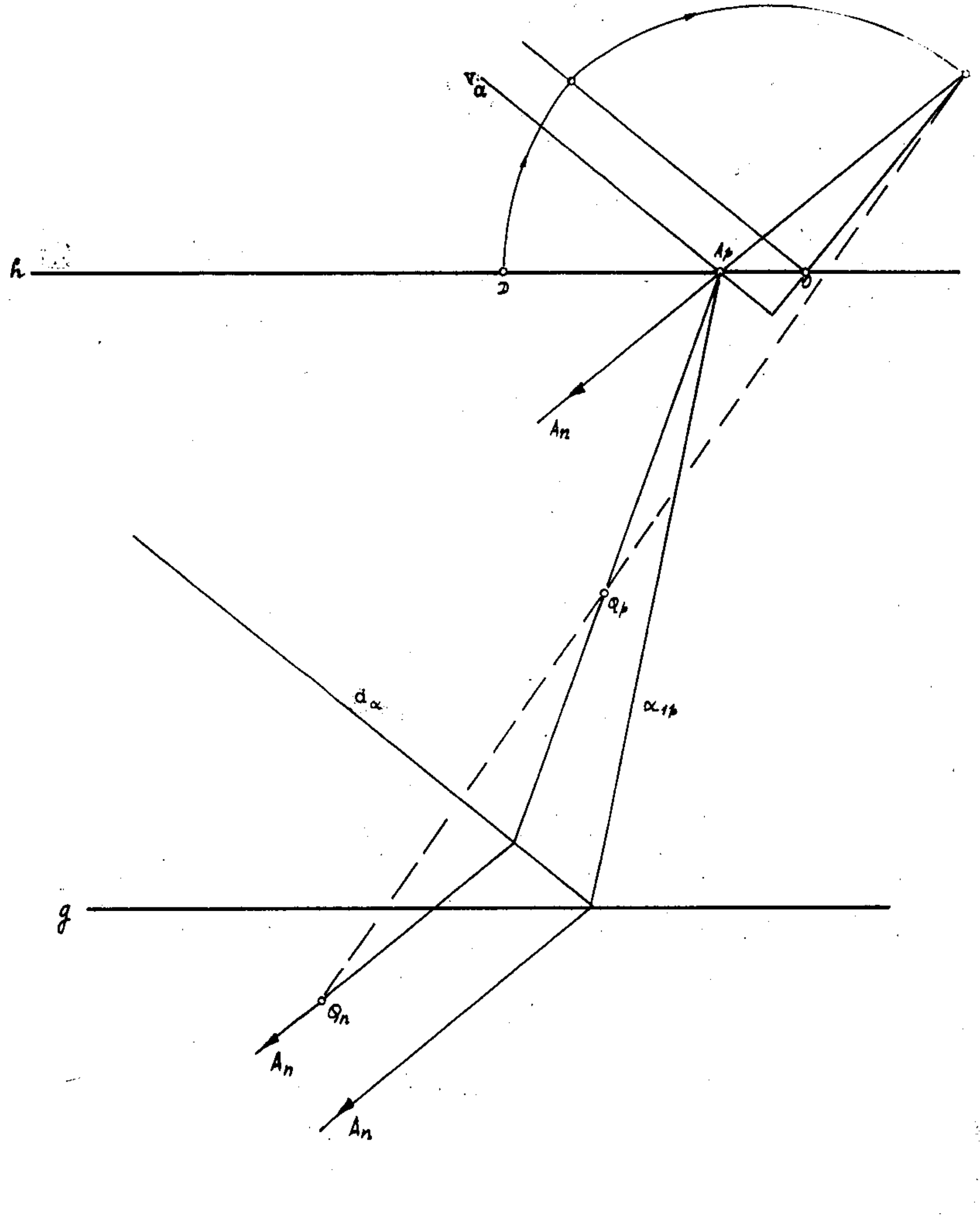


snijlijn van twee vlakken

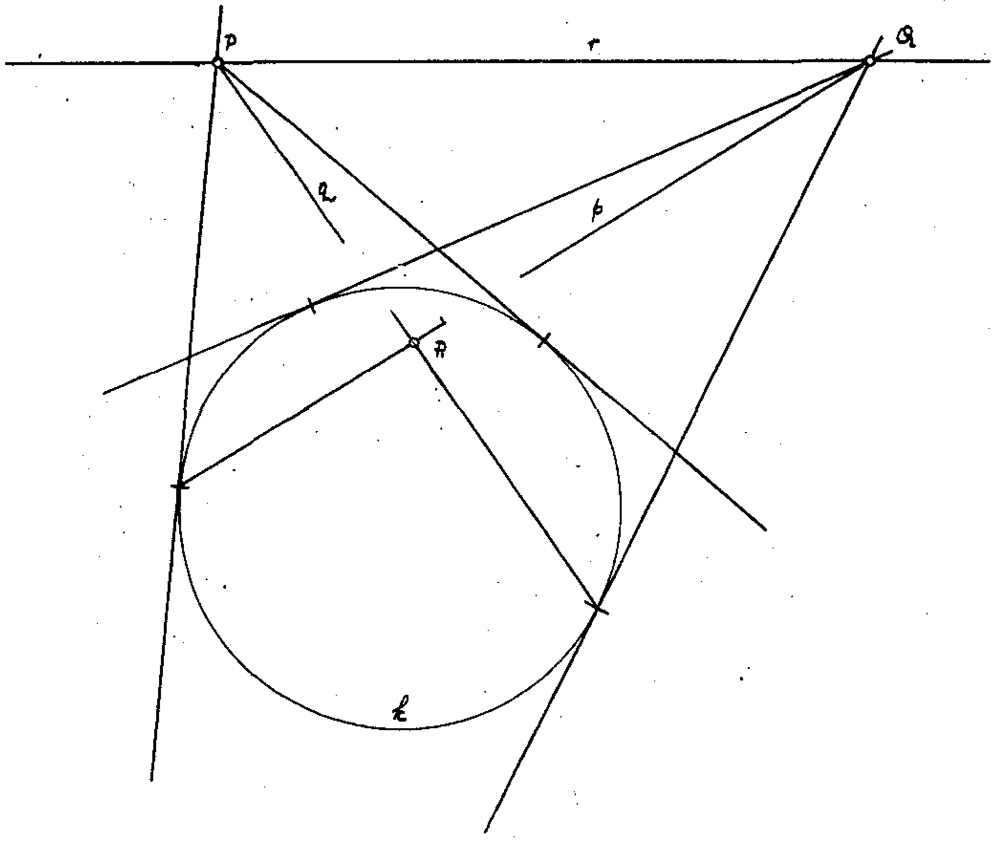
Voor het bepalen van hoeken tussen lijnen en vlakken kunnen we ze evenwijdig verschuiven naar O. Behalve de distantiecirkel spelen dus alleen de vluchtpunten en vluchtlijnen een rol.

§ 3. Neerslaan van een vlak; ellips

1. Een vlak α wordt in het tafereel neergeslagen om de tafereeldoorgang. Er is perspectiviteit tussen projectie en neerslag van α.
   Sla ook het parallelvlak door O neer; O komt in O_n terecht. Het neerslaan van α is te beschouwen als een projectie in de richting OO_n, dus O_n is het centrum van de perspectiviteit.
   Van het oneindig verre punt A in α (gegeven door A_p) is dus de neerslag A_n (richting) bekend. Van een punt Q van α (gegeven door Q_p) wordt Q_n gevonden door de lijn QA te nemen.


v_α
h
D
A_p
O
A_n
Q_p
d_α
α_{1p}
g
Q_n
A_n
A_n

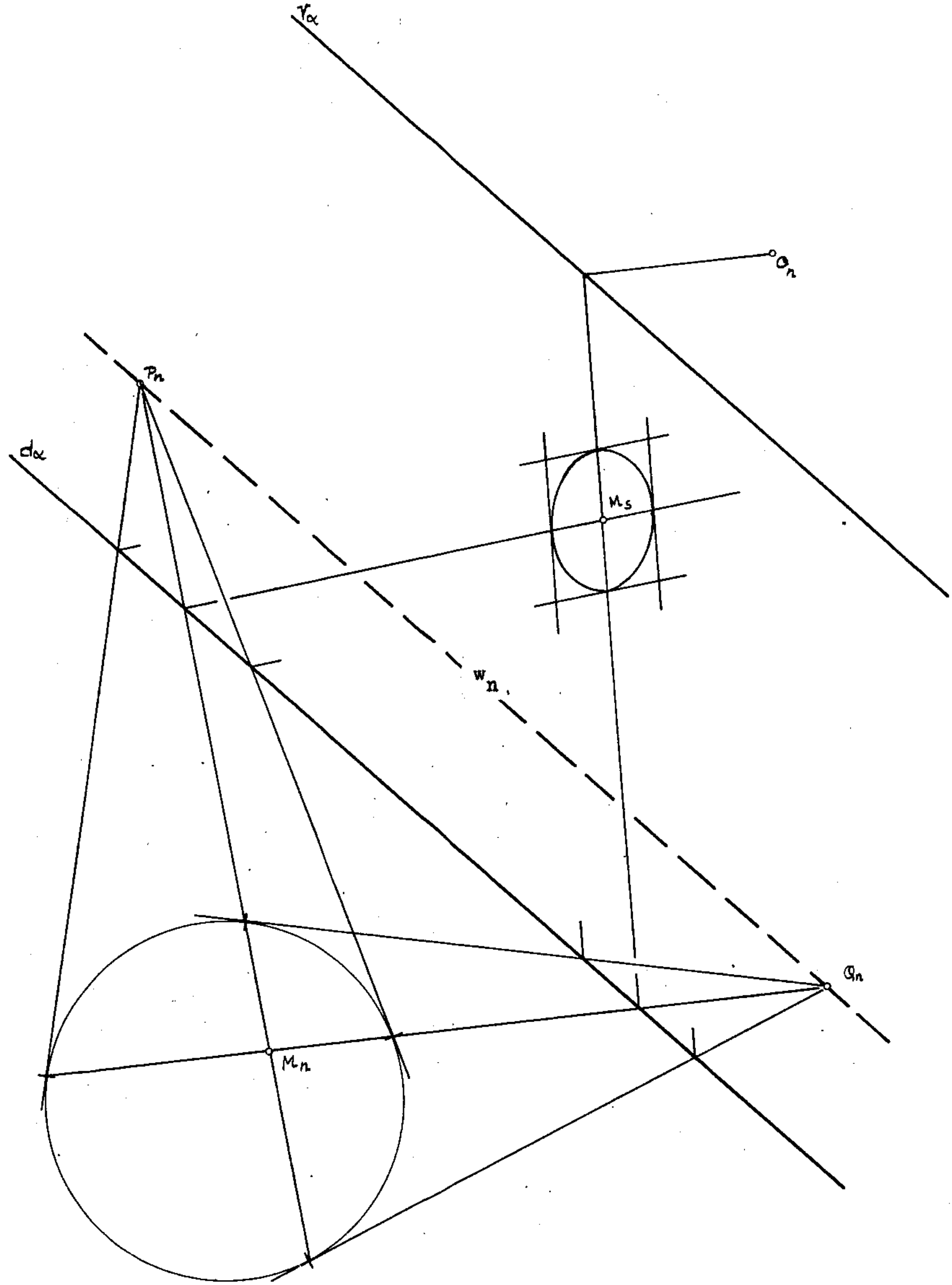
2. De perspectief van een cirkel in α (achter τ gelegen) is een ellips. Deze kan punt voor punt worden getekend met de perspectiviteit. Raaklijnen blijven raaklijnen.
   We zullen even iets vertellen van de pooltheorie t.o.v. een kegelsnede. Zij P een punt buiten een cirkel k en p de verbindingsrechte van de bijbehorende raakpunten. p heet de poollijn van P t.o.v. k. Elk punt Q van p heet aan P toegevoegd (geconjugeerd). Dit is een symmetrische relatie: de poollijn q van Q gaat weer door P.



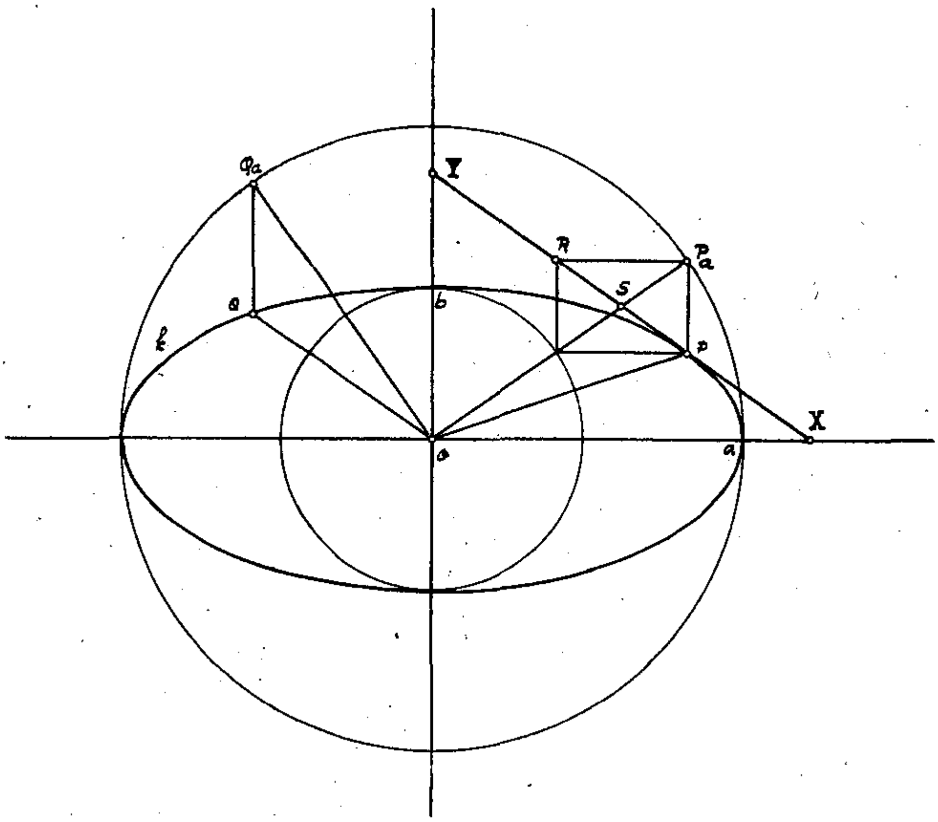
Voor een punt binnen de cirkel is de poollijn iets lastiger te vinden en hij snijdt de cirkel niet. De poollijn van R is r, dus te vinden door twee willekeurige rechten p en q door R te trekken. De pool van elke rechte door R moet namelijk op r liggen. In onze figuur heet PQR een pooldriehoek; P en Q zijn toegevoegd, P en R eveneens en R en Q eveneens. Ook heten p en q toegevoegd, p en r ook en r en q ook. Deze poolverwantschap geldt onveranderd t.o.v. een ellips (hyperbool, parabool) en blijft bij perspectiviteit (of affiniteit) behouden.

Is R het middelpunt van de ellips, dan is de poollijn r de oneindig verre rechte van het vlak. Stellen we ons in de getekende figuur de rechte r voor als de oneindig verre rechte (horizon van het vlak), dan is k een ellips en R zijn middelpunt. P en Q zijn richtingen, toegevoegde richtingen; p en q zijn toegevoegde middellijnen. De cirkel is voorzien van een raaklijnen-parallelogram. Als we de figuur zo beschouwen is de situatie net andersom als bij het begin: De figuur geeft een ellips die in perspectief toevallig als cirkel verschijnt.

We keren nu terug tot het uitgangspunt: In α is een cirkel gegeven; gevraagd de perspectief. We geven de cirkel in neerslag en verder alleen O_n, d_α en de vluchtlijn v_α .
Het middelpunt M van de ellips is de pool van de oneindig verre rechte w_p van τ .
w_p is de perspectief van de verdwijnrechte w van α , dat is de snijlijn van α met het verdwijnvlak door O evenwijdig aan τ .
w is dus evenwijdig aan τ en heeft dezelfde afstand tot τ als O.
Neergeklapt komt w_n dus even ver van d_α te liggen als O_n van v_α .
M_n is de pool van w_n t.o.v. de cirkel. Om M_n te tekenen kiezen we een "richting" P en de toegevoegde "richting" Q. Zo vinden we twee toegevoegde middellijnen van de ellips.


v_α
O_n
P_n
d_α
M_s
w_n
Q_n
M_n

We zullen nog even nagaan hoe men uit zo'n paar toegevoegde middellijnen de assen van de ellips kan vinden (constructie van Rytz).



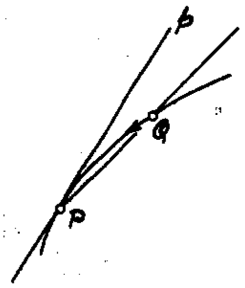
k is een ellips met halve assen a en b. De ellips ontstaat door de kleine cirkel (met straal b) in horizontale richting uit te rekken met de factor $\frac{a}{b}$ of door de grote cirkel (met straal a) in vertikale richting in te krimpen met de factor $\frac{b}{a}$. Zo is P afkomstig van P_a.
OP_a en OQ_a zijn toegevoegde middellijnen van de cirkel (loodrecht op elkaar)
Q is afkomstig van Q_a.
Het toegevoegd zijn van de middellijnen blijft (bij de vertikale affiniteit) behouden, dus OP en OQ zijn toegevoegde middellijnen van de ellips.
Draaien we de driehoek OQQ_a 90° naar rechts, dan ontstaat het rechthoekje met middelpunt S.

Zijn nu OP en OQ gegeven, dan is R en dus S bekend en X en Y zijn te vinden (halve cirkel om S).

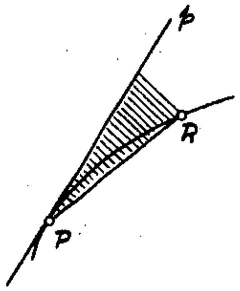
HOOFDSTUK IV - KROMMEN EN OPPERVLAKKEN

§ 1. Ruimtekrommen

De verbindingsrechte van twee punten van een kromme heet *koorde*. De raaklijn p in P is de limietstand van de koorde PQ als Q tot P nadert.



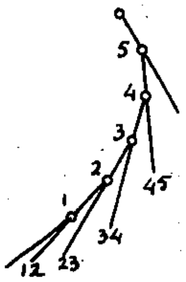
Neem vervolgens weer een punt R op de kromme in de buurt van P en denk het vlak door p en R en daarin de cirkel die in P aan p raakt en die door R gaat. Als nu ook R tot P nadert dan heet de limietstand van dit vlak het *osculatievlak* in P en de limietstand van de cirkel heet de *kromtecirkel* in P. Dit is dus de cirkel door de "drie samengevallen punten" P,Q,R van de kromme. Is r de straal van de kromtecirkel dan heet $\frac{1}{r}$ de kromming van de kromme in P.



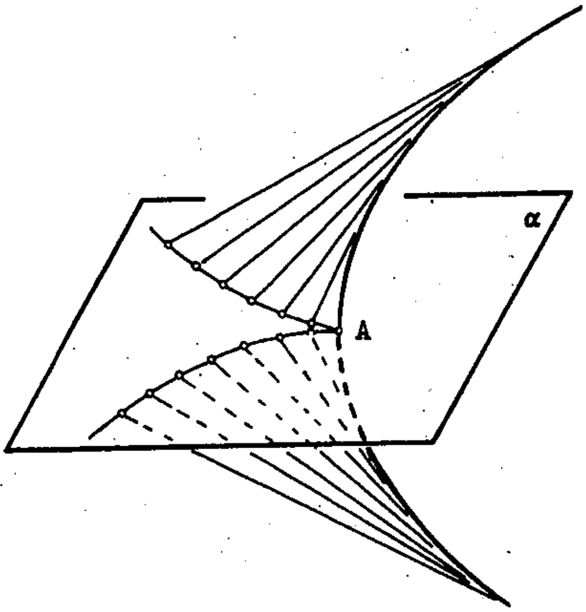
§ 2. Ontwikkelbare regeloppervlakken

Een regeloppervlak is *ontwikkelbaar* als langs elke beschrijvende het raakvlak vast blijft. Het raakvlak in een punt van een beschrijvende is dus meteen raakvlak in elk punt van die beschrijvende. Dit raakvlak bevat dan "twee samengevallen beschrijvenden". Dit [illegible] bijv. niet waar voor een eenbladige hyperboloide, wel voor een kegel.

We kunnen ons het ontwikkelbare oppervlak ontstaan denken door beweging van het raakvlak; het oppervlak is het omhullende oppervlak van het stelsel raakvlakken. Een benadering wordt verkregen door een vlak met kleine schokjes te bewegen, in plaats van geleidelijk. Noem de opeenvolgende standen 1,2,3,4,... . De opvolgende snijlijnen 12,23,34,... zijn de beschrijvenden. In elk vlak liggen twee van die beschrijvenden.

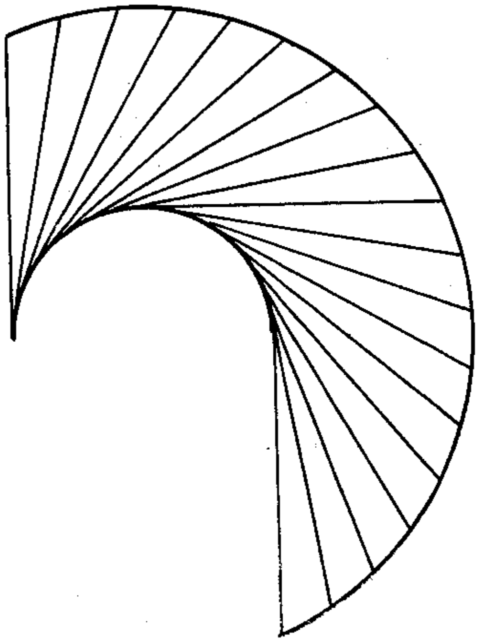


Als we het vlak geleidelijk bewegen zijn de schokjes oneindig klein en dan vallen die twee beschrijvenden in het vlak samen.
Het snijpunt van 12 en 23 in vlak 2 noemen we het punt 2, het snijpunt van 23 en 34 noemen we 3, enz. Deze snijpunten vormen in het limietgeval een ruimtekromme die op het oppervlak ligt en waarvan de beschrijvenden de raaklijnen zijn. Een ontwikkelbaar oppervlak is dus het raaklijnenoppervlak van een ruimtekromme. (Echter, bij een kegel is de top in de plaats van de ruimtekromme gekomen.) De kromme heet de keerkromme van het oppervlak omdat een vlakke α -doorsnede steeds ter plaatse een keerpunt A vertoont:

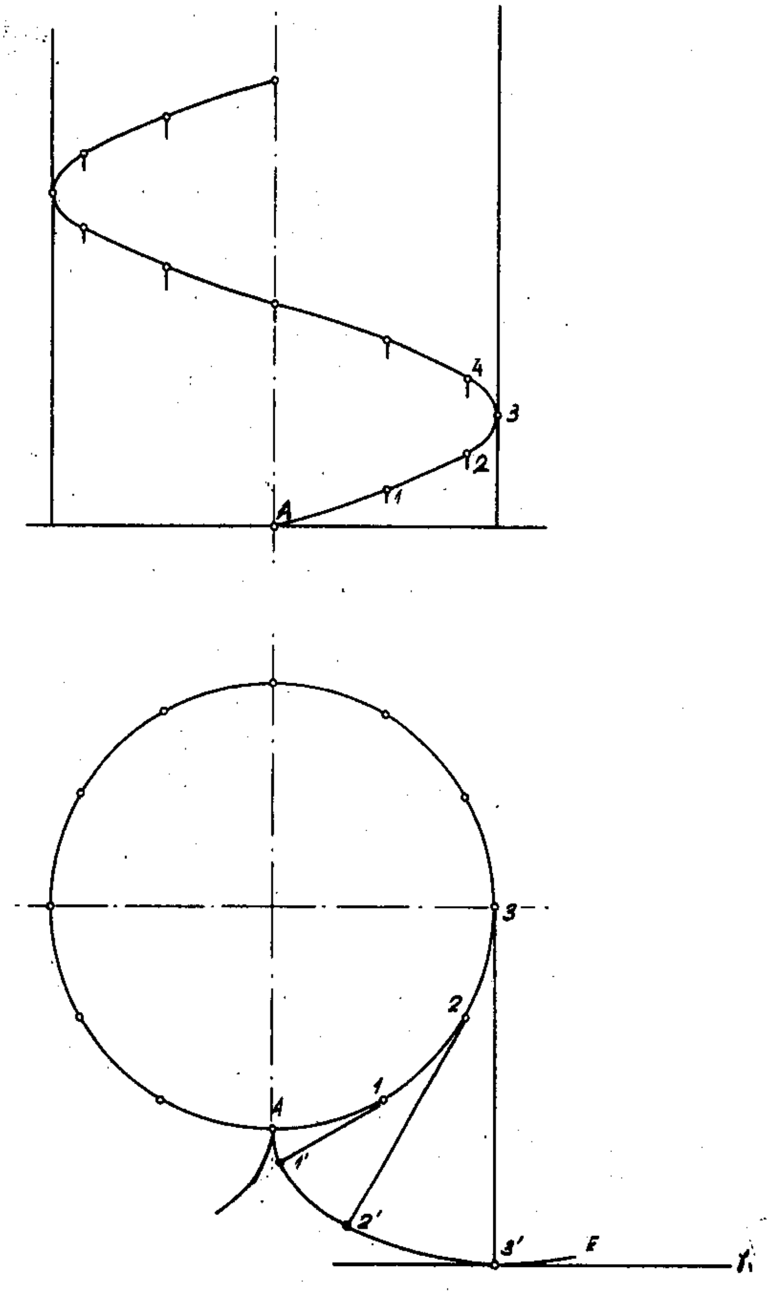


We kunnen ook uitgaan van de ruimtekromme. Neem een rij op elkaar volgende punten van de kromme, 1,2,3,4,... en denk de koorden 12,23,34,... . Het vlak door 12 en 23 noemen we 123 of het vlak 2, het vlak door 23 en 34 noemen we 234 = vlak 3, enz. Nemen we de punten steeds dichter bij elkaar, dan worden de koorden in het limietgeval raaklijnen en de vlakken worden de osculatievlakken van de kromme of ook de raakvlakken van het raaklijnenoppervlak.

Waarom heet zo'n oppervlak ontwikkelbaar? Wentel vlak 123 om 23 tot het samenvalt met 234. Wentel de samengevallen vlakken nu verder om 34 tot stand 345, dan om 45, enz. Ook in het limietgeval van oneindig kleine stapjes wordt het oppervlak zo afgewikkeld in een plat vlak en de keerkromme wordt een vlakke kromme, die echter overal zijn lengte en kromming heeft behouden.
Men kan van karton op deze manier een model van een raaklijnenoppervlak maken door een kromme K, bijv. een cirkelboog, te tekenen en een stel raaklijnen in te snijden.



§ 3. Voorbeeld: schroeflijn op verticale cylinder.

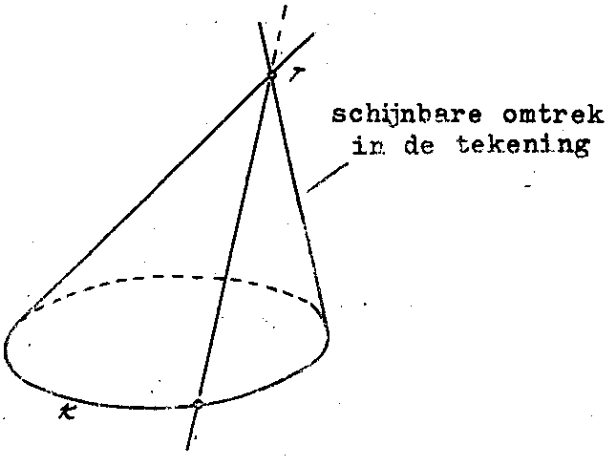


De horizontale projectie van de schroeflijn is een cirkel. De horizontale projectie van de raaklijn in 2 aan de schroeflijn is raaklijn aan de cirkel. De raaklijn aan de schroeflijn heeft een vaste helling die bepaald is door de spoed van de schroeflijn. Het horizontale doorgangspunt van de raaklijn in 2 vinden we blijkbaar door op de raaklijn aan de cirkel een stuk 22' dat gelijk is aan de cirkelboog van 2 naar A af te passen (de lengte van die cirkelboog is niet te "construeren"). Zo kunnen we de doorgangskromme E van het raaklijnenoppervlak punt voor punt tekenen. Als we een touwtje langs de cirkel gewonden denken dat in A eindigt en we ontwinden dit touwtje dan beschrijft het eindpunt, als het touwtje steeds strak getrokken blijft, de kromme E. E heet daarom de ontwondene van de cirkel.
Bij A zien we het keerpunt optreden.

Het osculatievlak γ in 3 is het raakvlak langs de raaklijn in 3 aan het raaklijnenoppervlak. De horizontale doorgang γ_1 is dus de raaklijn in 3' aan de snijkromme. Omdat bij zo'n ontwondene E de punten 1,2,3 van de oorspronkelijke kromme kromtemiddelpunten zijn van E, is γ_1 loodrecht op 33'.

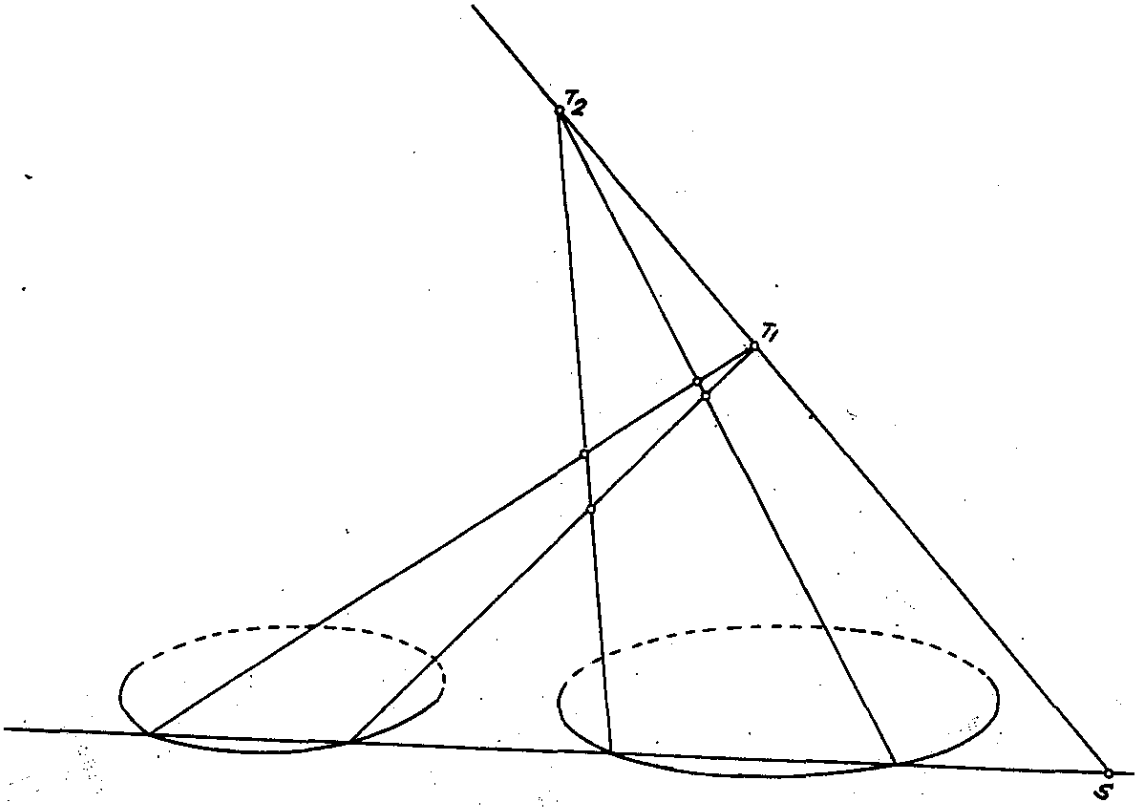
§ 4. Snijkromme van twee kegels

Zij K een richtkromme in een vlak, in het vervolg steeds een ellips of cirkel, en T een punt buiten het vlak. Samen bepalen ze een kegel. De punten van de kegel zijn de punten van de beschrijvenden (rechten die T verbinden met een punt van K). Als bijzonder geval laten we toe dat T oneindig ver weg ligt, d.w.z. alle beschrijvenden zijn // een gegeven richting. Dan is het een cylinder. Door elk punt van de kegel, behalve T, gaat precies één beschrijvende.



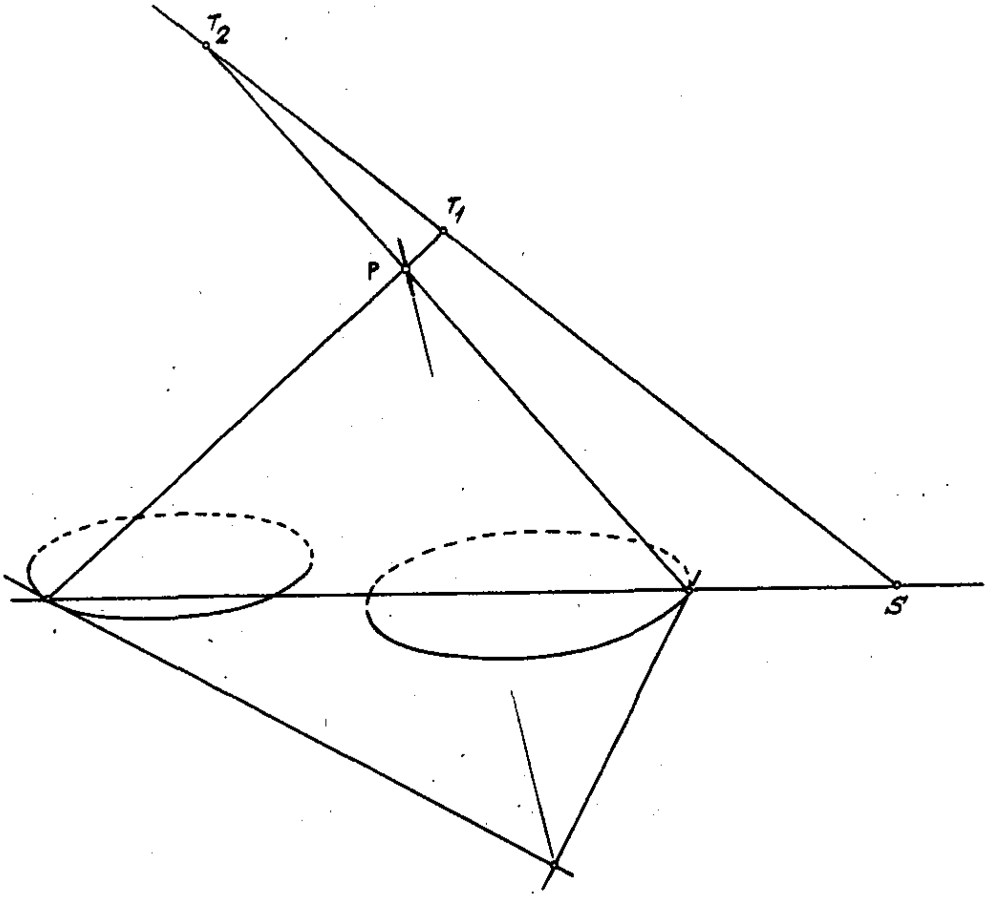
Nu gaan we twee zulke kegels met elkaar snijden

a) Snijpunten vinden we door hulpvlakken door T_1T_2 met de beide kegels te snijden. In zo'n hulpvlak kunnen van elke kegel twee beschrijvenden liggen en dat geeft dan vier snijpunten. De kromme heet daarom van de vierde graad.



Liggen de richtkrommen in hetzelfde vlak α dan moeten we ze dus snijden met rechten door S, het α-doorgangspunt van T_1T_2.

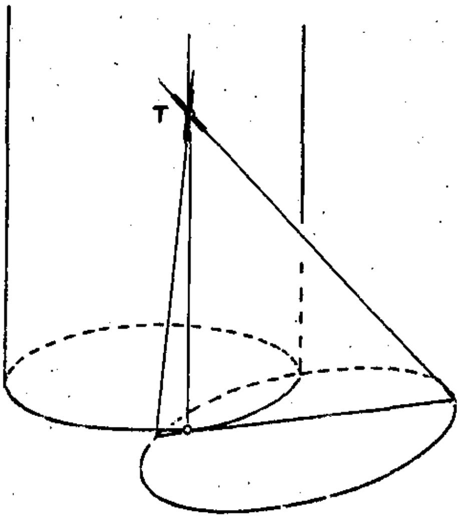
b) De richting van de snijkromme in zo'n snijpunt, d.w.z. de raaklijn aan de kromme, vinden we door de volgende overweging. De raaklijn is de rechte die de kromme ter plaatse benadert. We benaderen daarom de beide kegels door hun raakvlakken in het betreffende punt en snijden deze raakvlakken in plaats van de kegels zelf. Zo'n raakvlak van een kegel raakt langs de hele beschrijvende. We moeten dus raaklijnen trekken aan de richtkrommen.



c) De snijkromme heeft een dubbelpunt als hij ter plaatse niet door één rechte is te benaderen. Er zijn twee mogelijkheden waarbij de vorige constructie mislukt:

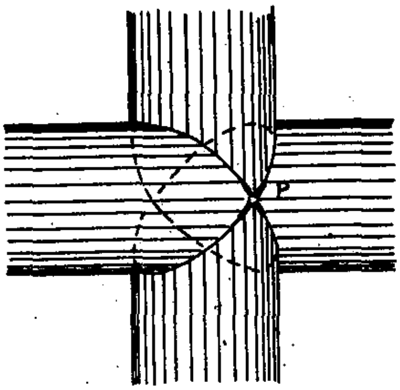
- c1) Het snijpunt is de top van een van de kegels, dus de top van de ene kegel ligt op de andere.
- c2) De twee raakvlakken aan de kegels vallen samen, dus de kegels hebben een gemeenschappelijk raakvlak.

Voorbeeld van c1 :



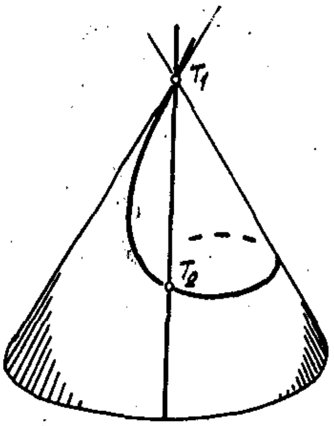
De top van de kegel ligt op de vertikale cylinder. Hoe ziet de snijkromme er nu ter plaatse uit? De cylinder is bij T door zijn raakvlak te benaderen, maar de kegel heeft in T geen raakvlak. We laten dus de kegel zo en snijden hem met het raakvlak aan de cylinder. Dit geeft twee beschrijvenden van de kegel, die de snijkrommen bij T benaderen: de <u>dubbelpuntsraaklijnen</u> of taktangenten.

Voorbeeld van c2 : Twee even wijde cirkelcylinders, die elkaar loodrecht snijden.



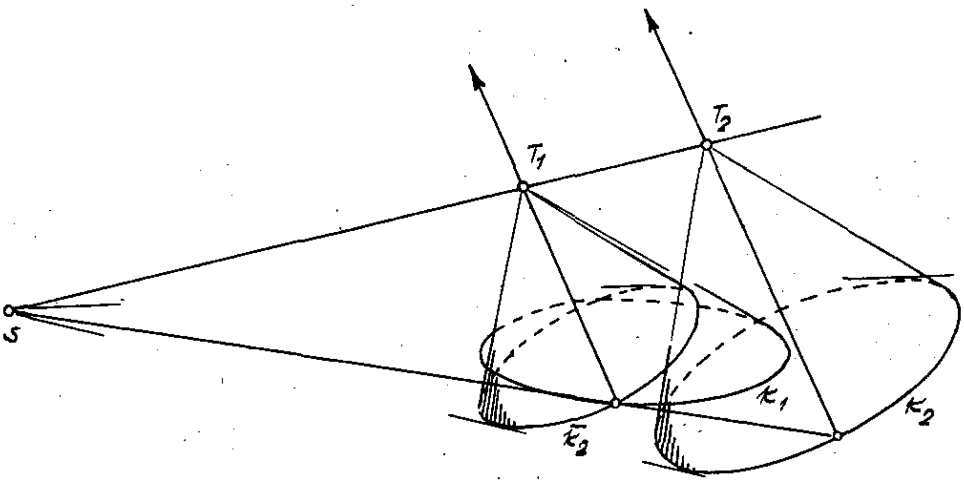
d) Heeft de snijkromme twee dubbelpunten dan valt hij uiteen in twee krommen van lagere graad. Het aantal snijpunten met een vlak is ten hoogste vier, of oneindig. Neem nu een vlak door de beide dubbelpunten, dan tellen deze samen al voor 4 en er is dus verder geen met de stand van het vlak veranderlijk snijpunt. Er zijn hiervan weer twee gevallen:

d1) De top van elk van beide kegels ligt ook op de andere kegel. De kegels hebben dus een gemeenschappelijke beschrijvende (kromme van de 1ste graad) en verder een <u>derdegraads ruimtekromme</u> gemeen.

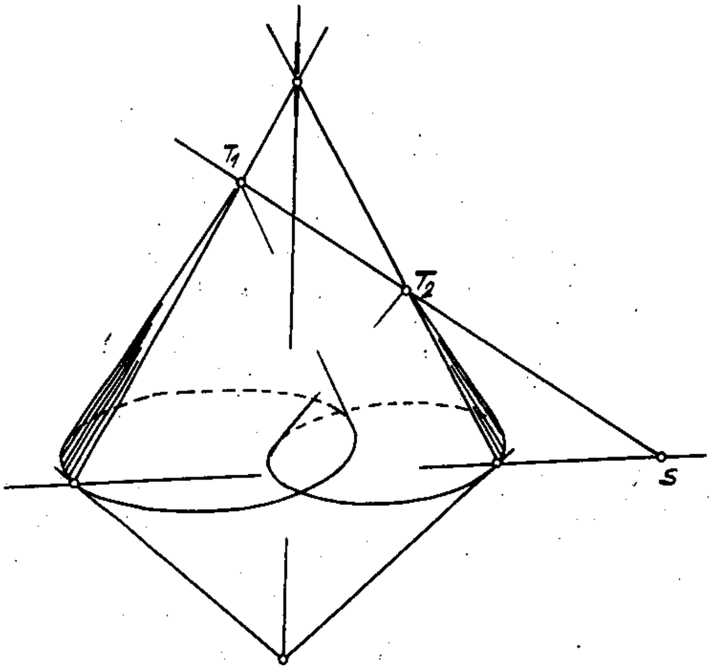


d2) De snijkromme bestaat uit twee ellipsen, zie het voorbeeld bij c2).

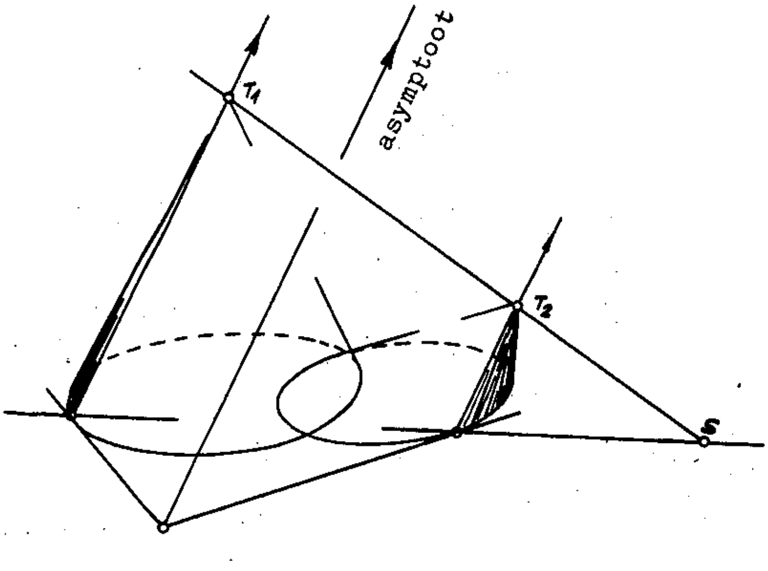
c) Asymptoten. Van de 4 punten die we volgens a) in een hulpvlak vinden kan er wel eens een in het oneindige terecht komen, namelijk als de kegels een evenwijdig paar beschrijvenden hebben.
Hoe vinden we zo'n paar evenwijdige beschrijvenden? Verplaats tijdelijk de tweede kegel evenwijdig tot de toppen samenvallen (schuif de top T_2 langs T_2T_1 naar T_1 toe). Snijd daarna de kegels.



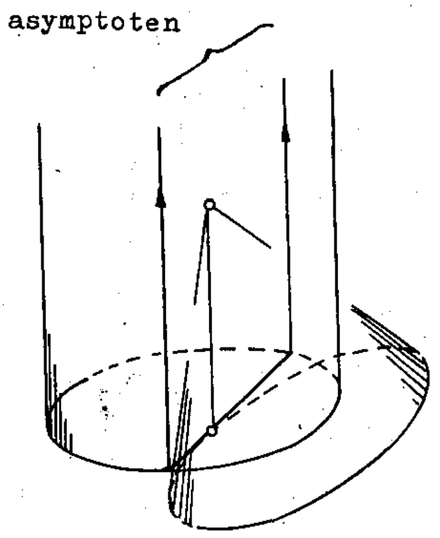
We nemen de beide richtkrommen K_1, K_2 in één vlak en we noemen de doorgangskromme van de verschoven kegel $\overline{K}_2$. Dan ontstaat $\overline{K}_2$ uit K_2 door vermenigvuldiging t.o.v. S met de factor $\frac{ST_1}{ST_2}$. K_1 en $\overline{K}_2$ hebben ten hoogste 4 snijpunten, dus we vinden ten hoogste 4 paar evenwijdige beschrijvenden.
Zo'n oneindig ver snijpunt van de twee kegels kunnen we slechts als richting tekenen en is op zichzelf niet interessant. Wel interesseren we ons voor de snijkromme "in de buurt van het oneindige punt", d.w.z. ver weg. We moeten dus de raaklijn tekenen van de kromme in het oneindig verre punt.
Dit heet een asymptoot van de kromme. De constructie is net zo als van een raaklijn in een gewoon punt:



de asymptoot is de snijlijn van de raakvlakken langs de evenwijdige beschrijvenden.



In het geval van de snijkromme van een kegel en een cylinder is er alleen een oneindig snijpunt als een kegelbeschrijvende // de cylinder is. Maar dan is het oneindige snijpunt de top van de cylinder, dus de top van de cylinder ligt op de kegel en is dubbelpunt van de kromme volgens c1. We moeten dus de constructie van de dubbelpuntsraaklijnen toepassen:



Opgave

orthogonale projectie

In een horizontaal vlak liggen twee cirkels (zie de figuur):

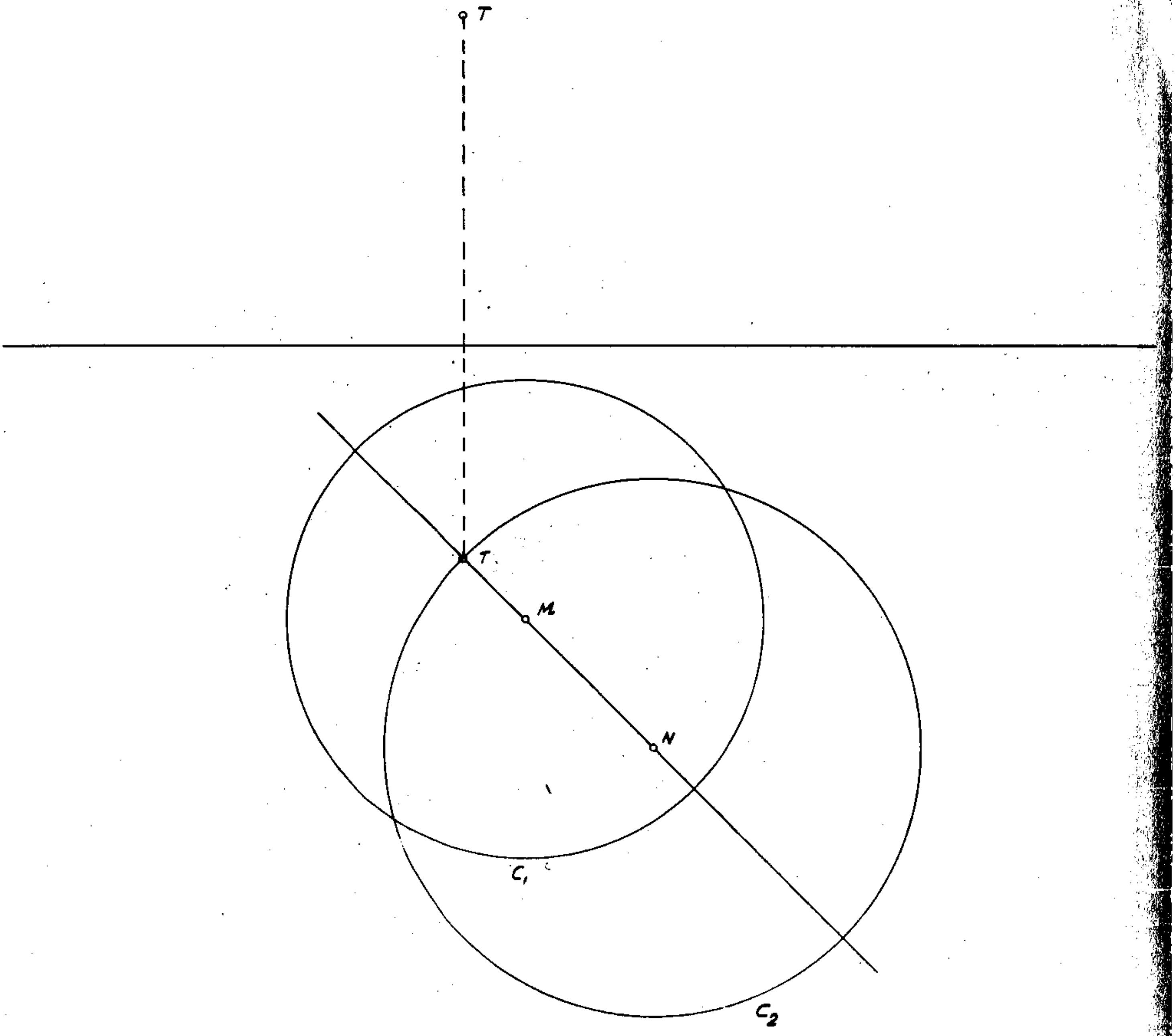
C_1 met middelpunt M en straal 4
C_2 met middelpunt N en straal $4\frac{1}{2}$
MN maakt een hoek van 45° met de as, MN = 3

C_1 is richtcirkel van een rechtopstaande cylinder.
C_2 is richtcirkel voor een kegel met top T, $5\frac{1}{2}$ boven het horizontale vlak.

Construeer van de snijkromme

1. de asymptoten,
2. de punten in het vertikale vlak door TM (dit geeft twee punten met horizontale raaklijn),
3. de punten in het horizontale vlak,
4. de raakpunten op de schijnbare omtrek van de cylinder,
5. de raakpunten op de schijnbare omtrek van de kegel.

Maak een uitslag van de cylinder en teken hierin de snijkromme.


T
T
M
N
C_1
C_2

APPENDIX I : DE STELLING VAN DANDELIN

Definities:

Een ellips is de meetkundige plaats der punten waarvan de som der afstanden tot twee gegeven punten constant is.
Een hyperbool is de meetkundige plaats der punten waarvoor het verschil der afstanden tot twee gegeven punten constant is.
Een parabool is de meetkundige plaats der punten waarvan de afstanden tot een gegeven punt en een gegeven rechte gelijk zijn.

Zij nu een rechte cirkelkegel K met top T en halve tophoek φ gegeven; een vlak V gaat niet door T en maakt met de kegelas een hoek α . Dan geldt de stelling van Dandelin:
De doorsnijding van V met K is een
- a) ellips als $\alpha > \varphi$
- b) parabool als $\alpha = \varphi$
- c) hyperbool als $\alpha < \varphi$

Bewijs

a) Zij $\alpha > \varphi$

Breng de ingeschreven bollen van K aan, die ook aan V raken (ga na dat dit er juist 2 zijn).
$B_1 = B(M_1, r_1)$ en raakt V in F_1, K langs γ_1
$B_2 = B(M_2, r_2)$ en raakt V in F_2, K langs γ_2
Neem een willekeurig punt P van de snijfiguur; de beschrijvende door P snijdt γ_1 in Q_1, γ_2 in Q_2.
Nu geldt $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$, onafhankelijk van P $\Rightarrow$ de snijfiguur is een ellips.
Def.: F_1 en F_2 heten brandpunten van de ellips.

c) Zij $\alpha < \varphi$; dit verloopt geheel analoog aan a).

b) Als $\alpha = \varphi$, is er slechts één ingeschreven bol van de kegel die aan V raakt. Het bewijs verloopt geheel anders. Om te laten zien dat b)

een bijzonder geval is van a) en c) zullen we nu een redenering geven die op alle drie kegelsneden betrekking kan hebben:
Neem weer de kegel K, een vlak V en één ingeschreven bol B, die aan V raakt, en wel in F.
B raakt K volgens een cirkel γ die in een vlak W ligt. Zij l de snijlijn van V en W en β de hoek tussen V en W, dan geldt: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (W staat immers loodrecht op de as van de kegel). Zij P een punt der snijkromme, en PR de loodlijn uit P op W; dan is $\angle QPR = \varphi \Rightarrow PR =$ $= PQ.\cos\varphi = PF.\cos\varphi$. Zij PL de loodlijn uit R op l in W, dan is

$$PR = PL \sin \beta = PL \cos \alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow PF \cos \varphi = PL \cos \alpha \text{ of } \frac{PF}{PL} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} ,$$

dit is onafhankelijk van P; dus geldt: de verhouding der afstanden van P tot een vast punt F in V en een vaste rechte l in V is voor alle punten P van de snijkromme dezelfde.

Men noemt de rechte l de bij het brandpunt F behorende <u>richtlijn</u>; $e = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}$ is de <u>excentriciteit</u> der kegelsnede; als $\alpha = \varphi$ volgt speciaal: PF = PL, d.w.z. de snijkromme is een parabool.
Verder volgt nu de stelling:
Men kan een kegelsnede (ellips, parabool of hyperbool) opvatten als een meetkundige plaats van de punten waarvoor de verhouding der afstanden tot een gegeven punt en een gegeven rechte constant is.
De kegelsnee is een

ellips als deze constante < 1
parabool als deze constante $= 1$
hyperbool als deze constante > 1.

Als deze constante 0 is, ontstaat als snijkromme weer een cirkel: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d.w.z. V loodrecht op de as.

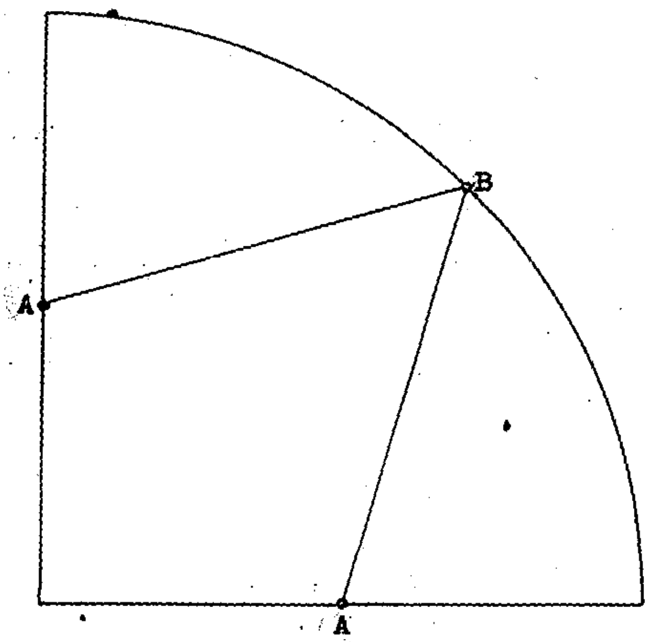
APPENDIX II - GEODETEN

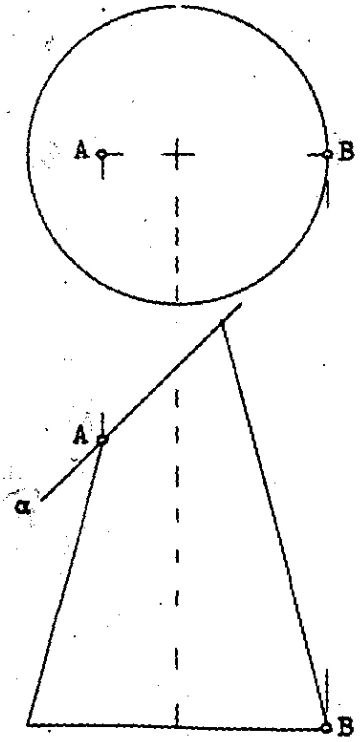
Een op een oppervlak liggende kromme heet een geodeet van het oppervlak als voor elk tweetal naburige punten P,Q van de kromme geldt dat de kortste verbinding op het oppervlak tussen P en Q door de kromme zelf wordt geleverd. (Een gelijkwaardige eigenschap is: in elk punt van de kromme is het osculatievlak loodrecht op het oppervlak.)

Van een plat vlak zijn de geodeten de rechte lijnen, van een bol zijn het de grote cirkels. Het is duidelijk dat de geodeten van een ontwikkelbaar oppervlak in de vlakke uitslag van het oppervlak de rechte lijnen zijn.

Voorbeeld: De volgende figuren zijn de uitslag en de projecties van een rechte cirkelkegel, waarop twee punten A en B zijn gegeven. Er zijn twee geodeten die A en B verbinden. Deze zijn in de uitslag getekend.

1. Breng een van de geodeten over naar de beide projecties.
2. Teken ook de horizontale projectie van de ellips volgens welke het vlak α de kegel snijdt. α gaat door A, is loodrecht op het vertikale projectievlak en maakt 45^o met het horizontale projectievlak. Breng deze snijkromme vervolgens naar de uitslag over.





SYLLABUS VAN HET COLLEGE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

Inhoud.