Bibl. Meg

Onderafdeling der Wiskunde

Beschrijvende Meetkunde

SYLLABUS VAN HET COLLEGE

NAJAARSSEMESTER 1968

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 220
PRIJS f 2,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

Syllabus van het college op gezag van

Prof. Dr. J.J. Seidel

samengesteld door

Prof. Dr. J.H. de Boer

Drs. W. van der Meiden

Ir. J.M. Ubbink

Najaarssemester 1968

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

INHOUD

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

INLEIDING

In de beschrijvende meetkunde tracht men door middel van een tekening eigenschappen van ruimtelijke figuren vast te leggen. We maken dan dus een 2-dimensionale afbeelding van een 3-dimensionale figuur. Als nadeel treedt op een tamelijke drukte in onze tekening; figuren die in de ruimte duidelijk van elkaar verwijderd zijn, kunnen in de tekening wel samenvallen of over elkaar liggen. Als voordeel kunnen we echter de constructiemethode van de vlakke meetkunde in de stereometrie gebruiken.

Het middel waarvan men zich bij deze afbeeldingen bedient is de projectie. Een projectie wordt bepaald door een plat vlak π, het projectievlak en een punt P, het centrum van de projectie; P ligt niet in π.

Alvorens hier nader op in te gaan, nog een opmerking over het begrip "punt". Veel uitspraken in de meetkunde gaan over het snijpunt van twee lijnen. Nu hebben twee in één vlak gelegen lijnen één punt gemeen, tenzij ze evenwijdig zijn; in dat geval hebben ze echter dezelfde richting. Door nu de richting van een lijn ook "punt" te noemen, wordt aan iedere rechte lijn nog een punt toegevoegd, dat het "oneindig ver gelegen punt" of "punt in oneindig" van die lijn heet. Dat twee lijnen evenwijdig zijn drukt men dan uit met: ze snijden elkaar in oneindig. De bovengenoemde uitspraak luidt nu: *twee in één vlak gelegen lijnen hebben één punt gemeen.*

De verzameling van alle oneindig verre punten van de lijnen van een vlak noemt men "de oneindig verre rechte" van dat vlak, of de "rechte in oneindig" van dat vlak.

Daardoor is het mogelijk uit te spreken: ieder tweetal vlakken in de ruimte heeft één lijn gemeen.

Vanuit deze onderscheiding in "eindige punten" (vroeger punten genoemd) en "oneindig verre punten" (vroeger richtingen geheten) maken we nu voor de projectiemethoden ook onderscheid in

centrale projectie, waarbij het centrum P in het eindige ligt, en

parallel projectie, waarbij het centrum in oneindig ligt, een richting p is.

Definitie 1: Een lijn door het centrum heet projecterende lijn of projecterende straal; als het centrum P is, schrijven we ook P-straal, als het (oneindig ver gelegen) centrum de richting p is, p-straal.
Een vlak door het centrum heet projecterend vlak.

Definitie 2: De P-projectie op π van een punt A is het snijpunt van π met de P-straal door A.
De p-projectie op π van een punt A is het snijpunt van π met de p-straal door A.
De projectie van A geeft men aan met A', A_1, A_π of iets dergelijks.

Eigenschappen van projectie:

De projectie van een P-straal of een p-straal is een punt.
De projectie van een niet-projecterende lijn is een lijn.
De projectie van een projecterend vlak is een lijn.
(De projectie van een niet-projecterend vlak valt samen met π; daarom worden de projecties van deze vlakken niet beschouwd).
Het centrum heeft geen projectie.

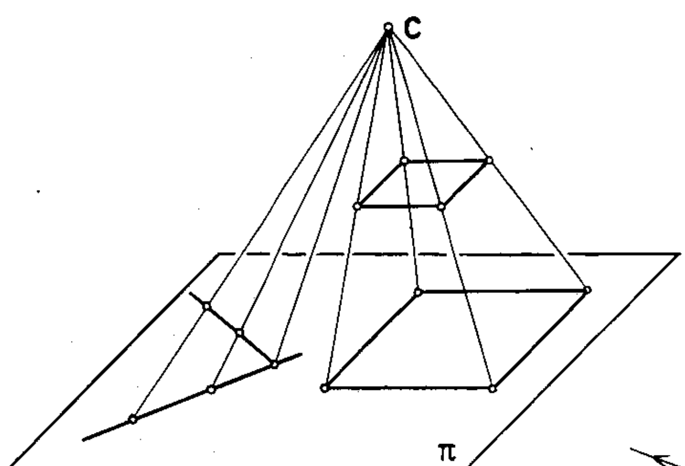
In deze cursus worden alleen orthogonale parallelprojectie-methoden behandeld.

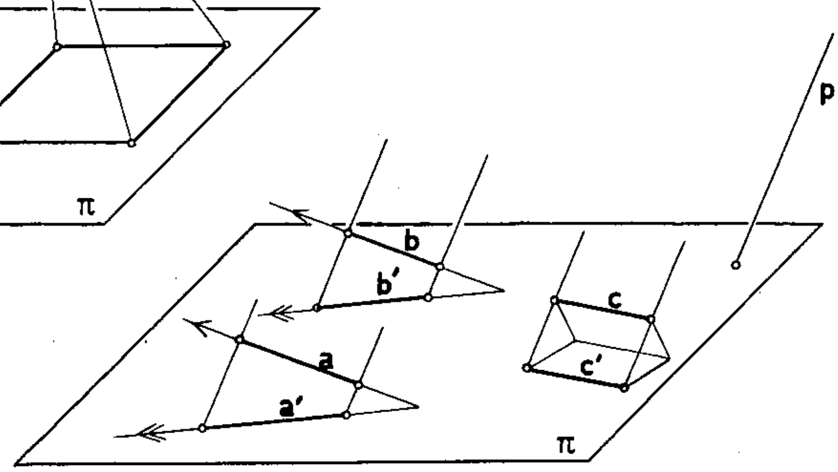
Eigenschappen van parallelprojectie:

1) De p-projecties van onderling evenwijdige, niet-projecterende lijnen zijn evenwijdig.
2) De verhouding der lengten van lijnstukken die liggen op evenwijdige, niet-projecterende lijnen verandert bij projectie niet.
3) Lijnen, evenwijdig met π, zijn ook evenwijdig met hun projecties; lijnstukken, evenwijdig met π, zijn even lang als hun projecties.

Aangezien in de parallelprojectiemethoden die hier worden besproken altijd $p \perp \pi$, zijn er nog twee, later te noemen, belangrijke eigenschappen, die betrekking hebben op rechte hoeken.

Een parallelprojectiemethode waar p niet loodrecht op π staat, is de thans bij het middelbaar onderwijs in zwang zijnde scheve projectie.





a:a' = b:b'
c = c'

HOOFDSTUK I

ORTHOGONALE PROJECTIEMETHODE - (Amerikaans)

1. Coördinaten - De projecties van een punt

Bij de orthogonale projectiemethode gaat men uit van een coördinatenstelsel, dat bestaat uit drie onderling loodrechte lijnen, resp. de x-as, de y-as en de z-as, die elkaar in de oorsprong O snijden en de daardoor bepaalde drie onderling loodrechte vlakken, het (horizontale) xy-vlak π_1; het vertikale xz-vlak π_2 en het vertikale yz-vlak π_3.

Een ruimtelijke figuur wordt op ieder van deze vlakken loodrecht geprojecteerd. Het coördinatenstelsel wordt nu langs de y-as "opengeknipt", en de vlakken π_1 en π_3 worden langs de x-as resp. z-as in π_2 "gevouwen"; men noemt deze procedure wentelen of neerslaan. De drie projecties zijn nu alle in één plat vlak, π_2 gelegen; dit is het vlak waarin we al onze constructies uitvoeren, het vlak van tekening; i.p.v. π_2 gebruikt men er ook de letter τ, en de naam tafereel voor.

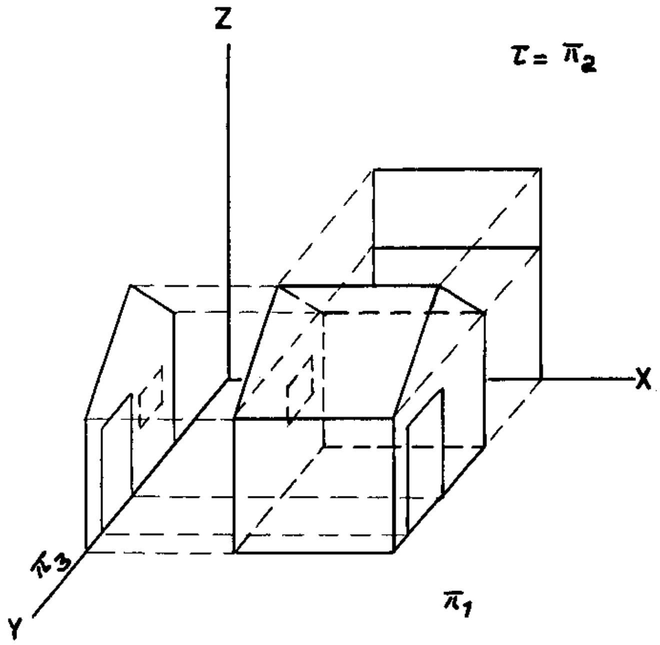
Men kiest in de praktijk π_1 bóven het te tekenen voorwerp, π_2 tussen het voorwerp en de tekenaar, en π_3 rechts van het voorwerp (Amerikaanse methode); bij de Europese methode was deze keuze anders. De plaats van een punt P wordt bepaald door zijn coördinaten, dat zijn de afstanden van P tot het yz-vlak (x-coördinaat), het xz-vlak (y-coördinaat) en het xy-vlak (z-coördinaat). Vanuit de oorsprong O wordt x naar links, y naar achteren, z naar beneden gemeten; dit houdt in: rechts van O is x negatief, vóór O is y negatief, boven O is z negatief.

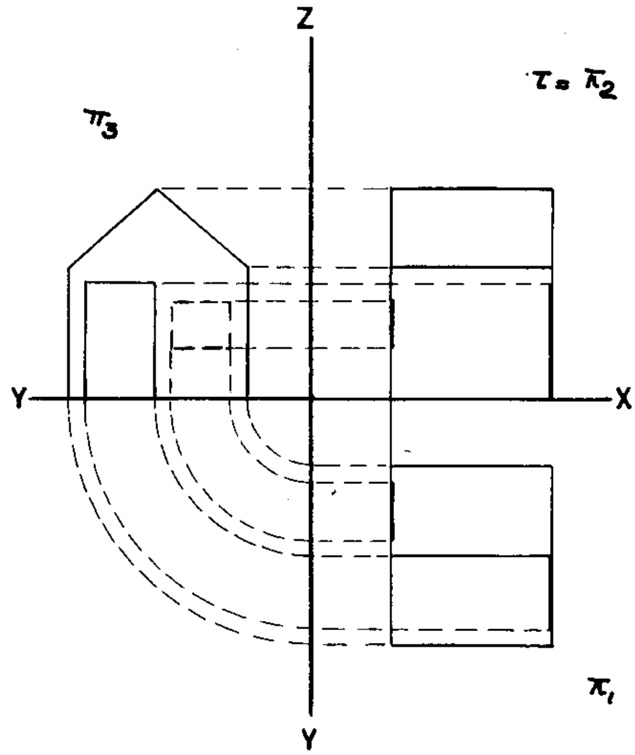
De projecties van P op π_1, π_2 en π_3 heten achtereenvolgens P_1, P_2 en P_3.

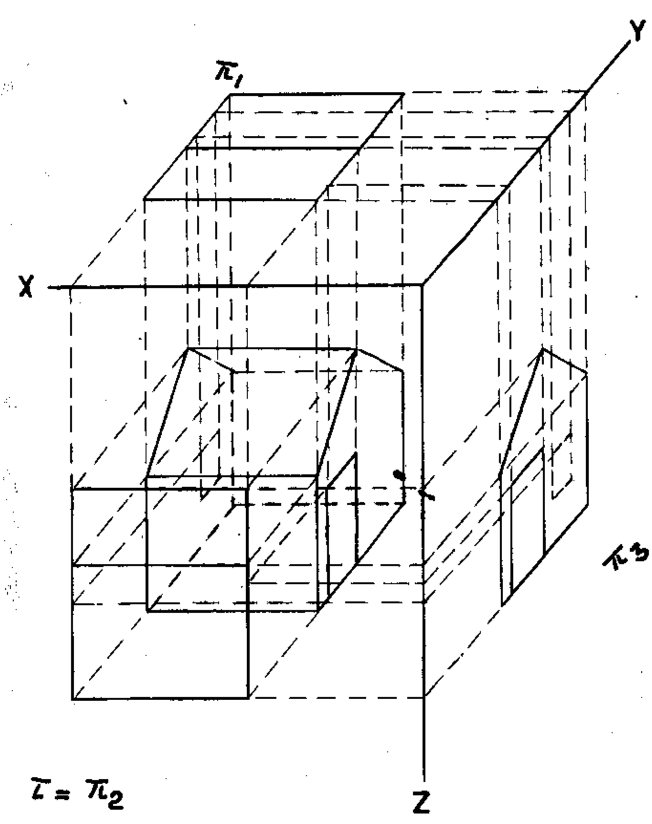
> PP_1 heet horizontaal projecterende straal of rechte;
> PP_2 en PP_3 heten vertikaal projecterende stralen (rechten).

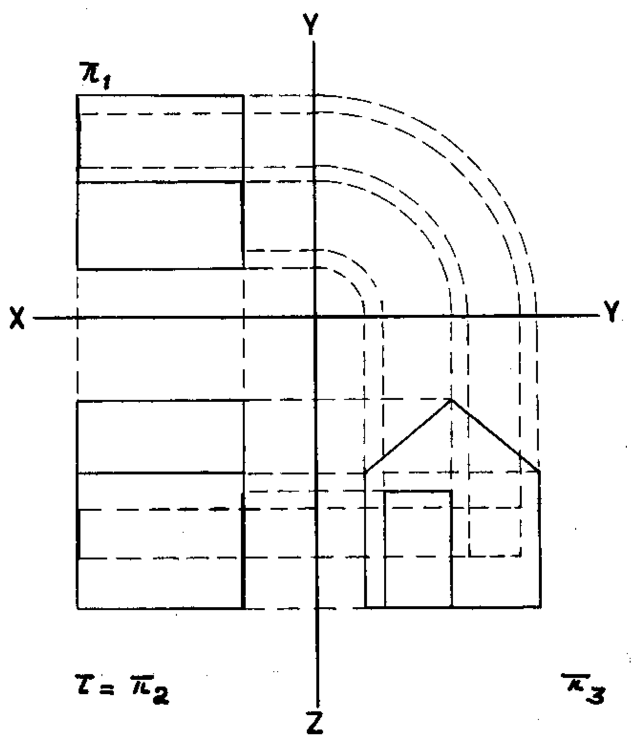
Een punt wordt gegeven door zijn coördinaten x, y, z. Door een punt P worden de projecties P_1, P_2, P_3 bepaald. Een punt P wordt door twee van zijn drie projecties P_1, P_2, P_3 bepaald.

Een gevolg van deze laatste eigenschap is dat we veel constructies kunnen uitvoeren zonder van π_3 gebruik te maken.


Z
$\tau = \pi_2$
X
π_3
Y
π_1


Z
$\tau = \pi_2$
π_3
Y
X
π_1
Y


Y
π_1
X
π_3
$\tau = \pi_2$
Z


Y
π_1
X
Y
$\tau = \pi_2$
π_3
Z

Wij maken van het punt P (5,3,6) zowel een "ruimtelijke figuur" als een projectietekening. Het punt P_o is de projectie van P op de x-as. P_oO is de x-coördinaat van P.

Door P_o trekken we een lijn $\perp$ de x-as. De y-coördinaten zetten we naar boven af: $\Rightarrow P_1$; de z-coördinaat naar beneden: $\Rightarrow P_2$. P_3 volgt dan door omcirkelen van het lijnstuk OQ.

Let op het volgende:

P_1 en P_2 hangen samen t.o.v. de x-as.
P_2 en P_3 hangen samen t.o.v. de z-as.
P_1 en P_3 hangen samen t.o.v. de y-as.

Samenhang t.o.v. de y-as betekent altijd omcirkelen.

Opgaven: Construeer de drie projecties van de punten

A(1,2,3)
B(2,3,4)
C(3,4,-2)
D(4,-3,4)
E(-2,3,4)
F(3,0,4)
G(0,1,4)
H(-3,-3,3).

2. De projecties van een lijn. Doorgangspunten

Een rechte lijn l kan op π_1, π_2, π_3 worden geprojecteerd, de projecties geven we aan met l_1, l_2, l_3.

Het vlak door l en l_1 heet horizontaal projecterend vlak.
Het vlak door l en l_2 heet vertikaal projecterend vlak.

Van groot belang zijn de doorgangspunten van l met π_1, π_2 en π_3.
Deze worden aangegeven resp. met ○, □, △.

Het is duidelijk dat

○ ligt op l_1
□ ligt op l_2
△ ligt op l_3 .

Verder is er het volgende verband:

○ hangt samen (t.o.v. de x-as) met het snijpunt van l_2 met de x-as.
○ hangt samen (t.o.v. de y-as) met het snijpunt van l_3 met de y-as.
□ hangt samen (t.o.v. de x-as) met het snijpunt van l_1 met de x-as.
□ hangt samen (t.o.v. de z-as) met het snijpunt van l_3 met de z-as.
△ hangt samen (t.o.v. de y-as) met het snijpunt van l_1 met de y-as.
△ hangt samen (t.o.v. de z-as) met het snijpunt van l_2 met de z-as.

Voor punten en lijnen geldt het volgende:

als een punt P ligt op een lijn l, liggen P_1, P_2, P_3 resp. op l_1, l_2, l_3.

Dit is aequivalent met:

als een lijn l gaat door P, gaan l_1, l_2, l_3 resp. door P_1, P_2, P_3.

<u>Opgaven</u>:

1. Construeer de projecties van l, die gaat door A(4,1,3) en B(7,2,1). Construeer de doorgangspunten van l.

2. Evenzo m door C(3,1,1) en D(6,1,4).

3. Evenzo n door E(2,10,4) en F(6,6,-1).

<u>Bijzondere lijnen</u>:

a $/\!/ \pi_1$; ○ is er niet;
a heet een <u>1^e hoofdlijn</u>.

b $/\!/ \pi_2$; □ is er niet;
b heet een <u>2^e hoofdlijn</u>.

c $/\!/ \pi_3$; Δ is er niet;
c heet een <u>3^e hoofdlijn</u>.

d $/\!/$ x-as; ○ en □ zijn er niet;
Δ $= d_3$.

e $/\!/$ y-as; ○ en Δ zijn er niet;
□ $= e_2$.

f $/\!/$ z-as; □ en Δ zijn er niet;
○ $= f_1$.

3. Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak

Als twee lijnen, l en m, elkaar snijden in P, snijden l_1 en m_1 elkaar in P_1, l_2 en m_2 elkaar in P_2, l_3 en m_3 elkaar in P_3.

En omgekeerd: als van twee lijnen l en m de snijpunten van twee der projecties samenhangen, snijden die lijnen elkaar.

Als twee lijnen l en m evenwijdig zijn, is ook $l_1 \parallel m_1$, $l_2 \parallel m_2$, $l_3 \parallel m_3$; en omgekeerd: als van twee lijnen l en m geldt $l_1 \parallel m_1$ en $l_2 \parallel m_2$ is ook $l \parallel m$.

Door twee snijdende resp. evenwijdige lijnen l en m kan men een vlak α brengen.
Een vlak wordt in onze tekeningen door zijn doorgangen bepaald:

α_1 is de eerste doorgang, de snijlijn van α met π_1,
α_2 is de tweede doorgang, de snijlijn van α met π_2,
α_3 is de derde doorgang, de snijlijn van α met π_3.

Indien α gaat door twee gegeven lijnen l en m kan men

α_i bepalen: α_1 gaat door ○ van l en door ○ van m,
α_2 gaat door □ van l en door □ van m,
α_3 gaat door △ van l en door △ van m.

Verder geldt:

α_1 en α_2 snijden elkaar op de x-as,
α_2 en α_3 snijden elkaar op de z-as.

In de ruimte snijden α_1 en α_3 elkaar op de y-as, maar in onze tekening geldt: het snijpunt van α_1 met de y-as (vertikaal) ligt evenver van O als het snijpunt van α_3 met de y-as (horizontaal).

Indien een punt P ligt in een vlak α, geeft men dit gewoonlijk aan met behulp van een hoofdlijn. Als a een 1^e hoofdlijn door P en in α is, is $a_1 \,//\, \alpha_1$, $a_2 \,//$ x-as.

Opgaven

1. Construeer de doorgangen van de vlakken

    α door (2,2,0), (2,0,3) en (0,3,1),
    β door (6,1,2), (10,5,2) en (13,2,5),
    γ door (5,3,-3), (7,1,-5) en (4,3,0).

2. Construeer het vlak (d.w.z. de doorgangen van het vlak)

α door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_1 ,
β door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_2 ,
γ door (7,1,4) en (8,0,0) en loodrecht op π_3 .

Bijzondere gevallen:

$\alpha \parallel \pi_1$; α_1 ontbreekt
$\alpha_2 \parallel$ x-as
$\alpha_3 \parallel$ y-as (horizontaal)

$\beta \parallel \pi_2$; $\beta_1 \parallel$ x-as
β_2 ontbreekt
$\beta_3 \parallel$ z-as

$\gamma \parallel \pi_3$; $\gamma_1 \parallel$ y-as (vertikaal)
$\gamma_2 \parallel$ z-as
γ_3 ontbreekt

$\delta \parallel$ x-as; $\delta_1 \parallel \delta_2 \parallel$ x-as

$\varepsilon \parallel$ y-as; $\varepsilon_1 \parallel$ y-as (vertikaal)
$\varepsilon_3 \parallel$ y-as (horizontaal)
ε is vertikaal projecterend

$\eta \parallel$ z-as; $\eta_2 \parallel \eta_3 \parallel$ z-as

η is horizontaal projecterend

4. Onderlinge ligging van vlakken

Twee vlakken α en β zijn òf evenwijdig òf ze snijden elkaar volgens een lijn s. Als $\alpha // \beta$ zijn alle gelijknamige doorgangen (voor zover ze bestaan) evenwijdig.

Als α en β elkaar snijden zijn de doorgangspunten van de snijlijn de snijpunten van de gelijknamige doorgangen.

Opgaven

1. Construeer door een gegeven punt P een vlak ξ, $/\!/$ met een gegeven vlak α. Men brengt door P een lijn aan $/\!/ \alpha$; dit doet men gewoonlijk,

    òf met een eerste hoofdlijn a $/\!/ \alpha$,
    òf met een tweede hoofdlijn b $/\!/ \alpha$.

   Zij a een eerste hoofdlijn door P, d.w.z. a $/\!/ \pi_1$ (def.).
   We kiezen a $/\!/ \alpha \Rightarrow$ a $/\!/$ snijlijn van π_1 met α d.w.z. a $/\!/ \alpha_1$.
   Als a $/\!/ \alpha_1$, is ook $a_1 /\!/ \alpha_1$.

    ξ_2 gaat nu door $\square$ van a, en is $/\!/ \alpha_2$.
    ξ_1 gaat nu door het snijpunt van ξ_2 met x-as, en $/\!/ \alpha_1$.

   Ga zelf de constructie m.b.v. een tweede hoofdlijn b na.

2. Construeer een vlak α

a) door (5,3,1) en // π_1.
b) door (5,3,1) en // het vlak β door (3,5,1), (4,2,1) en (3,8,2).
c) door (6,3,-2) en // het vlak β uit b).
d) door (7,-3,2) en // het vlak β uit b).
e) door (4,-4,-5) en // het vlak β uit b).

4. Bepaal het snijpunt S van een gegeven rechte l met een gegeven vlak α. Breng door l een vlak λ aan; λ mag geheel willekeurig gekozen worden; men neemt gewoonlijk het horizontaal projecterend of vertikaal projecterend vlak. Snijd λ met α , de snijlijn is m. Snijd m met l; dit levert het gevraagde snijpunt S.

a) λ is horizontaal projecterend.

b) λ is vertikaal projecterend.

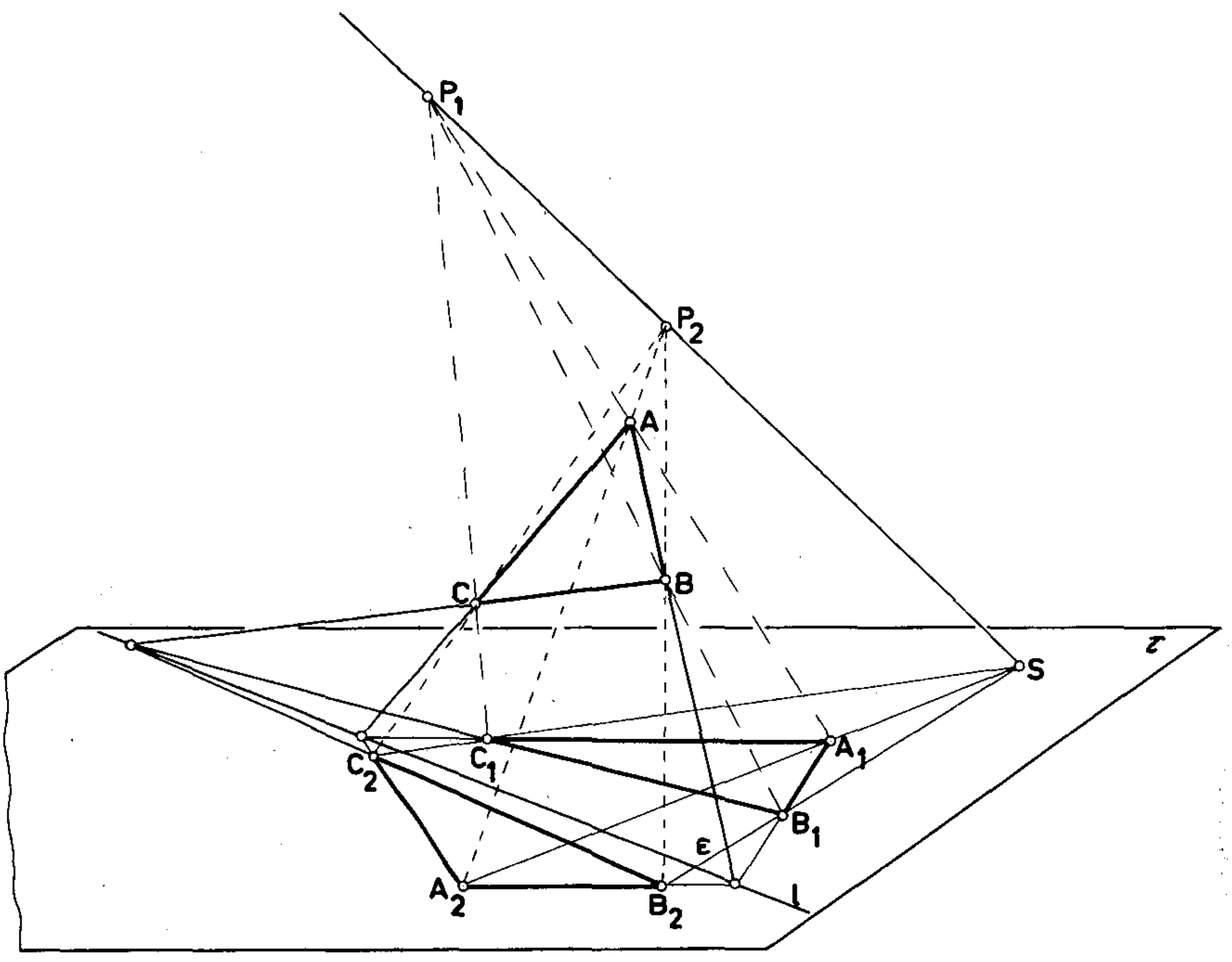
5. Perspectiviteit en affiniteit

I. Wanneer men een in een vlak ε gelegen driehoek ABC vanuit twee centra P_1 en P_2 op een vlak τ projecteert, waardoor de projecties $A_1B_1C_1$ resp. $A_2B_2C_2$ ontstaan, bestaat er tussen deze twee figuren een verwantschap die men de naam <u>perspectiviteit</u> geeft. De eigenschappen hiervan zullen we aanstonds opsporen:

noem het snijpunt van P_1P_2 met τ : S,
noem de snijlijn van ε met τ : l.

Dan geldt: vlak AP_1P_2 gaat door P_1P_2, A_1A_2 gaat dus door S. Evenzo: B_1B_2 gaat door S, C_1C_2 gaat door S.

Dus: eigenschap 1: lijnen door overeenkomstige punten van beide projecties gaan door S.



Verder:
A_1B_1 is de snijlijn van τ met vlak P_1AB
A_2B_2 is de snijlijn van τ met vlak P_2AB
AB is de snijlijn van de vlakken P_1AB en P_2AB
$\Rightarrow$

A_1B_1, A_2B_2 en AB snijden elkaar in één punt, dat zowel in τ als op AB, dus in ε ligt, dus een punt op l.

Evenzo snijden A_1C_1 en A_2C_2 elkaar op l
en snijden B_1C_1 en B_2C_2 elkaar op l.

Eigenschap 2: de snijpunten van overeenkomstige lijnen uit beide projecties liggen op l.

Onder een <u>perspectiviteit</u> verstaat men nu een betrekking tussen figuren uit het platte vlak, met de eigenschappen:

1) overeenkomstige punten liggen op een lijn door het <u>centrum</u> van de perspectiviteit,
2) overeenkomstige lijnen snijden elkaar op de <u>perspectiviteitsas</u>.

Hieruit volgt dus:

wanneer men een in een vlak ε gegeven figuur centraal uit P_1 en uit P_2 op een vlak τ projecteert, vormen de beide projecties een perspectiviteit; het centrum is het snijpunt van P_1P_2 met τ; de perspectiviteitsas is de snijlijn van ε met τ.

II. Indien P_2 in het oneindige ligt, kan men nagenoeg dezelfde redenering houden; dan is projecteren uit P_2 geworden: projecteren $/\!/$ een gegeven richting p; de lijn door P_1 en P_2 wordt: een lijn door P_1 en $/\!/$ p. Wanneer men dus een in een vlak ε gegeven figuur centraal uit P en parallel in de richting p op een vlak τ projecteert vormen de beide projecties een perspectiviteit; het centrum is het snijpunt van de p-straal door P met τ; de perspectiviteitsas is de snijlijn van ε met τ.

III. Wanneer men een in een vlak ε gelegen figuur in twee richtingen p_1 en p_2 op hetzelfde vlak τ projecteert, bestaat er weer een verwantschap tussen beide projecties; deze verwantschap volgt al uit het feit dat we met een bijzonder geval van perspectiviteit te maken hebben. De eigenschappen van de verwantschap zijn:

1) lijnen door overeenkomstige punten uit beide projecties zijn evenwijdig: $P_1P_2 /\!/ Q_1Q_2$.
2) overeenkomstige lijnen uit beide projecties snijden elkaar op een vaste lijn, l, de snijlijn van ε en τ.

Indien tussen figuren een verwantschap bestaat die aan deze eisen voldoet, noemt men die figuren <u>affien verwant</u>; ze vormen een <u>affiniteit</u>; een affiniteit is een perspectiviteit met oneindig ver gelegen centrum, dit is dus een richting; deze richting noemt men <u>affiniteitsrichting</u>; de lijn waarop de overeenkomstige lijnen elkaar snijden heet <u>affiniteitsas</u>.

We hebben dus ontdekt:
tussen twee verschillende parallelprojecties van dezelfde vlakke figuur op hetzelfde platte vlak bestaat een affiniteit.

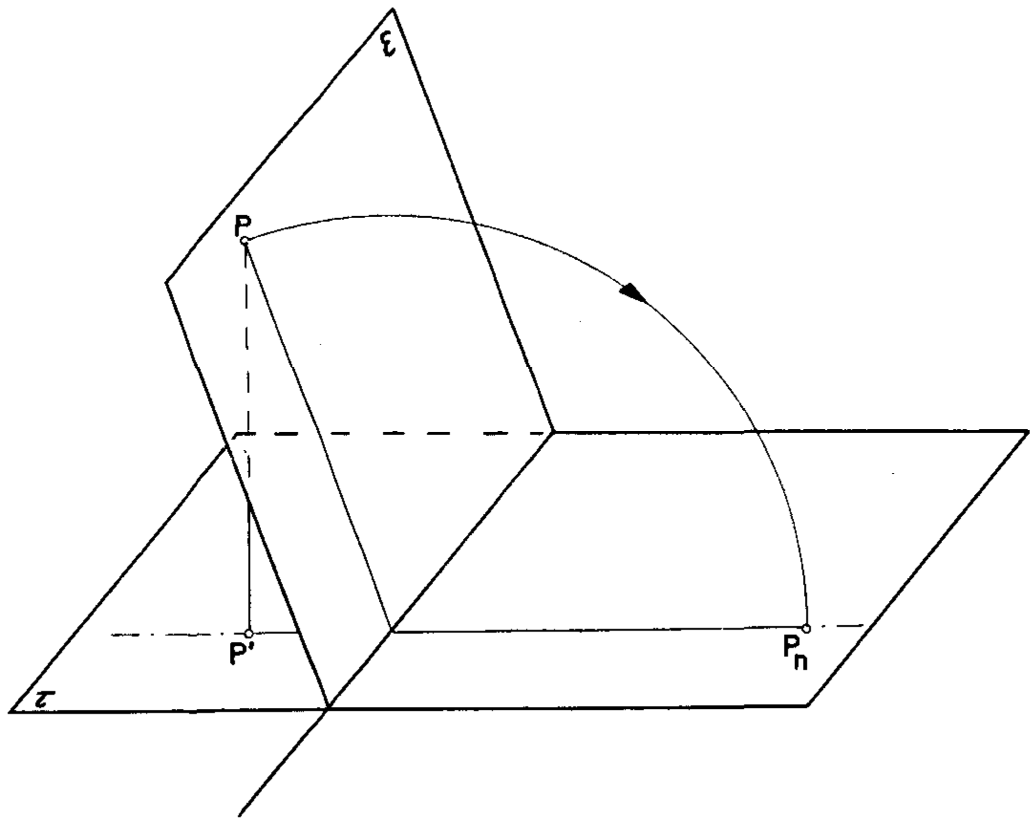
Nu nemen we weer een ε; die wordt op τ geprojecteerd, en tevens om de snijlijn l van ε en τ in τ neergeslagen. Ieder punt van ε doorloopt dan een cirkelboog met middelpunt op l; alle cirkelbogen zijn (in hoekmaat) gelijk. Alle koorden op deze bogen zijn evenwijdig, en het resultaat van het neerslaan, de neerslag, kunnen we dus ook als een parallel-projectie beschouwen.

Gevolgen

1. Tussen de centrale projectie op τ en de neerslag in τ van een in ε gelegen figuur bestaat een perspective verwantschap; de as hiervan is de doorgang van ε met τ.
2. Tussen de parallelprojectie in τ en de neerslag in τ van een in ε gelegen figuur bestaat een affiene verwantschap; ook hiervan is de as de doorgang van ε in τ.

Het tweede is voor de orthogonale projectiemethode en de axonometrie van groot belang. In dit verband past dan de voor affiniteit geldende stelling:

indien de projectierichting p loodrecht op τ staat, staat de affiniteitsrichting loodrecht op de affiniteitsas.



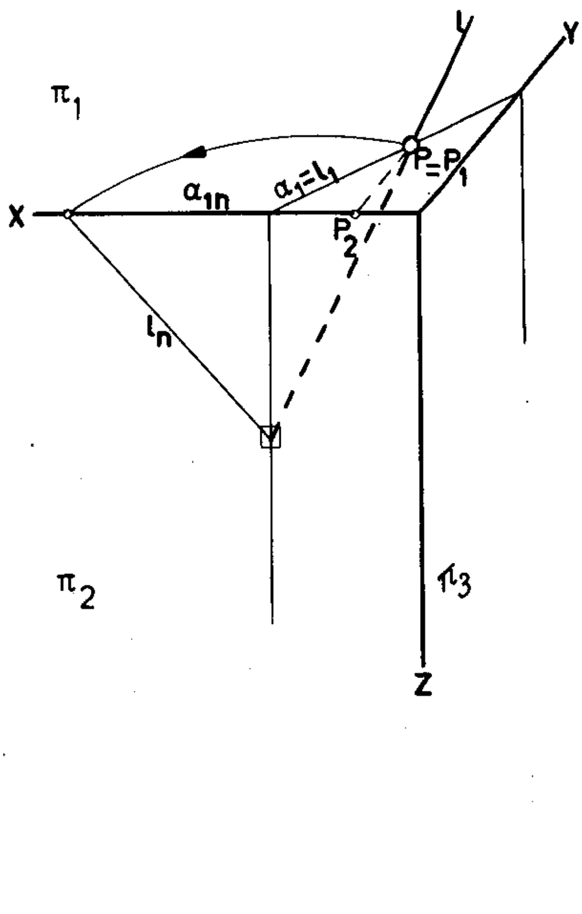
Dit geval speelt zowel in de orthogonale projectiemethode als in de axonometrie een belangrijke rol.

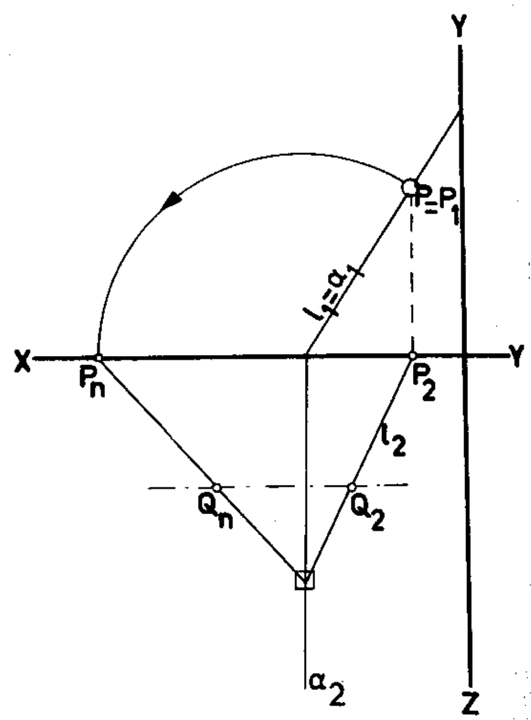
Bij de orthogonale methode is $\tau = \pi_2$ het tafereel; bij neerslaan wordt altijd bedoeld neerslaan in dit <u>tafereel $\tau = \pi_2$</u> . D.w.z. de affiniteitsas bij de neerslag is altijd de tweede doorgang van het neergeslagen vlak.

6. <u>Het neerslaan van vlakken in $\tau = \pi_2$</u>

De neergeslagen punten en lijnen worden van een index n voorzien.

a) $\alpha \perp \pi_1$.
De affiniteitsas is α_2 ; deze staat (in de ruimte) $\perp \pi_1$, dus de cirkelboog bij P mag in π_1 getrokken worden.
De affiniteitsrichting is $/\!/$ x-as.





b) $\beta \perp \pi_2$.

β_{1n} en β_{3n} staan nu loodrecht op β_2.
Dat $P_nP_2 = P_oP_1$ volgt direct uit $\beta \perp \pi_2$.
Als l door P gaat, vindt men l_n uit P_n en het punt □ van l (dit ligt immers op de affiniteitsas).

c) $\gamma \perp \pi_3$.

Aangezien γ_2, de affiniteitsas, weer $\perp \pi_3$, kunnen we P_3 omcirkelen in π_3. γ_{3n} = z-as.

d) Een willekeurig vlak δ.
Als δ een bruikbaar snijpunt Q heeft met de y-as, wordt eerst Q_n bepaald, hetzij m.b.v. affiniteit tussen Q_2 en Q_n, hetzij door $|\delta_1|$ en $|\delta_3|$ om te cirkelen.

Een willekeurig punt P van δ wordt neergeslagen door een eerste hoofdlijn a door P in δ neer te slaan òf de lijn door P en Q te gebruiken.

Als δ geen bruikbaar snijpunt met de y-as heeft, kiezen we een punt Q op δ_1 , en bepalen hiervan op precies dezelfde manier Q_n.

7. Hoeken - Loodrechte stand - Afstand

Indien twee lijnen of twee vlakken een hoek φ met elkaar maken, geldt in het algemeen niet dat de hoek tussen hun projecties of doorgangen ook φ is.

Indien de hoek tussen twee gegeven lijnen moet worden bepaald, slaat men het vlak door die lijnen neer in $\tau = \pi_2$.

In dit verband vermelden we twee eigenschappen van rechte hoeken bij orthogonale projectie:

1) Als van een rechte hoek één been $/\!/ \pi$, het andere niet $\perp \pi$, is de projectie op π weer een rechte hoek.

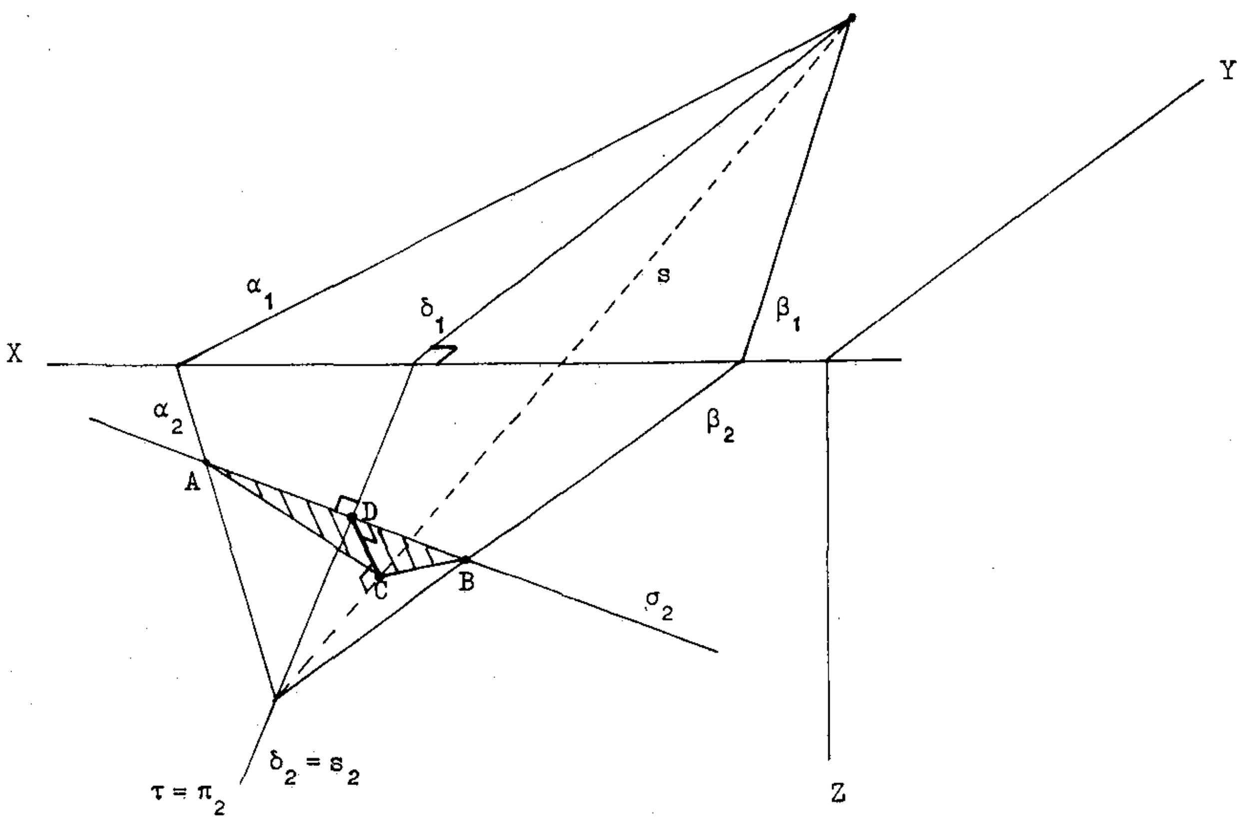
2) Als voor een lijn l en een vlak α geldt: $l \perp \alpha$, dan is de projectie van l op π loodrecht op de doorgang van α in π .

Immers: $$\left.\begin{array}{l} l \perp \alpha \Rightarrow l \perp \alpha_\pi \\ p \perp \pi \Rightarrow p \perp \alpha_\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\pi \perp \text{vlak } (p,l) \Rightarrow \alpha_\pi \perp l_\pi \; .$$

Construeer nu door een gegeven punt P een lijn, $\perp$ een gegeven vlak α.

Construeer door een gegeven punt P een vlak, $\perp$ een gegeven lijn l.

De hoek tussen twee gegeven vlakken α en β wordt bepaald door een standvlak σ aan te brengen; dit wil zeggen: als s de snijlijn van α en β is, is $\sigma \perp s$.



$\sigma \perp s$, $\angle(\alpha,\beta) = \angle ACB$. (Stereometrische tekening.)

We tekenen daartoe $\sigma_2 \perp s_2$, snijden σ_2 met α_2, β_2 en s_2; de snijpunten zijn resp. A, B en D. Noem het snijpunt van σ met s: C. De lengte van DC construeren we door het 2[de] projecterende vlak van s, δ, in τ neer te slaan en te bedenken dat $DC \perp s$; daarna slaan we σ neer in τ, waarbij wegens $s \perp \sigma$, C_n op s_2 valt; $\angle(\alpha,\beta) = \angle AC_nB$.

De afstand van twee punten A en B waarbij AB niet // een der projectievlakken is, wordt bepaald door het lijnstuk AB met zijn vertikaal projecterend vlak in τ neer te slaan.

Opmerking: als AB // een der projectievlakken is, leest men de lengte van AB direct in dat projectievlak af.

Opgaven

1. Bepaal de afstand van twee gegeven evenwijdige vlakken α en β.

2. Bepaal de afstand van twee elkaar kruisende rechten l en m.
   Neem $P \in l$, en breng l' door P en $/\!/ m$. Het vlak door l en l' is λ.
   Neem $Q \in m$ en breng m' door Q en $/\!/ l$. Het vlak door m en m' is μ.
   $d(l,m) = d(\lambda,\mu)$, dus zie 1.

3. Construeer een rechte l, die twee gegeven elkaar kruisende rechten a en b loodrecht snijdt.

8. Het wentelen van een ruimtelijk lichaam

In veel vraagstukken wentelt men een lichaam om een lijn, bijvoorbeeld een van zijn ribben.

Indien deze lijn $\perp \tau$, kan men de wenteling direct uitvoeren; zo niet dan slaat men een loodvlak op die lijn in τ neer.

Voorbeeld: (formaat 20 x 29).

Neem de x-as 9 cm. boven de lange onderrand van het papier, de z-as 2 cm. van rechts.

$A = (24,3,8)$, $B = (18,3,8)$, $C = (21,y,8)$.
Δ ABC is gelijkzijdig, $y > 0$.
Δ ABC is het grondvlak van een prisma ABC.DEF waarvan het zijvlak ACFD een vierkant is, dat met het grondvlak een hoek van 60° maakt, zó dat E_1 buiten $\Delta A_1B_1C_1$ valt.

Men wentelt dit prisma om AC over de kleinste der mogelijke hoeken, tot E in π_1 ligt. Teken de projecties van het prisma na de wenteling.

9. Dekpunten en dekrechten

Zij δ het vlak met vergelijking $y + z = 0$.
δ gaat door de x-as, zodat δ_1 en δ_2 met de x-as samenvallen; δ_3 is in het yOz vlak de bissectrice van de hoek tussen de positieve y-as en de negatieve z-as.

Zij $P \in \delta$, dan vallen P_1 en P_2 in het tafereel samen.
Men noemt P daarom een dekpunt: P_1 en P_2 "overdekken" elkaar. δ is de verzameling van alle dekpunten; een rechte ℓ uit δ heet dekrechte: $\ell_1 = \ell_2$; δ heet het dekvlak.

Een lijn m die niet geheel in δ ligt, heeft met δ één punt gemeen, dat men het <u>dekpunt</u> $\times_m$ <u>van m</u> noemt.
Aangezien $\times_{m1} = \times_{m2}$ is zowel $\times_{m1}$ als $\times_{m2}$ het snijpunt van m_1 en m_2 (in τ).
Aan de derde projectie ziet men, wegens $\times_{m3} \in \delta_3$, dat inderdaad het snijpunt van m_1 en m_2 met een punt uit δ correspondeert.

Een vlak α dat niet met δ samenvalt heeft met δ precies één rechte α_δ, de <u>dekrechte van α</u>, gemeen. Het is natuurlijk zonder meer duidelijk dat:
$m \subset \alpha \Rightarrow \times_m \in \alpha_\delta$.
De dekrechte van α is dus bepaald door twee dekpunten van rechten uit α. Voor deze rechten kan men met enig voordeel α_1 of α_2, en eerste en tweede hoofdlijnen gebruiken. $\times_{\alpha_1}$ en $\times_{\alpha_2}$ vallen samen; $\times_{\alpha_3}$ is alleen met behulp van α_3 en δ_3 te bepalen.
De dekrechte wordt in de figuur met —·—·— aangegeven.

Resumerend: voor het vlak α geldt

i) als $P \in \alpha$ hangen P_1 en P_2 samen ten opzichte van de x-as, dat wil zeggen $P_1P_2 \perp$ x-as.

ii) als $m \subset \alpha$ snijden m_1 en m_2 elkaar op α_δ.

Dan geldt dus:

De eerste en tweede projecties van in α gelegen figuren zijn affien verwant; de affiniteitsas is α_δ , de affiniteitsrichting is loodrecht op de x-as.

KEGELSNEDEN

1. De stelling van Dandelin

Definities:

Een ellips is de meetkundige plaats der punten waarvan de som der afstanden tot twee gegeven punten constant is.

Een hyperbool is de meetkundige plaats der punten waarvoor het verschil der afstanden tot twee gegeven punten constant is.

Een parabool is de meetkundige plaats der punten waarvan de afstanden tot een gegeven punt en een gegeven rechte gelijk zijn.

Zijn nu een rechte cirkelkegel K met top T en halve tophoek φ gegeven; een vlak V gaat niet door T en maakt met de kegelas een hoek α. Dan geldt de stelling van Dandelin:

De doorsnijding van V met K is een

a) ellips als $\alpha > \varphi$,
b) parabool als $\alpha = \varphi$,
c) hyperbool als $\alpha < \varphi$.

Bewijs:

a. Zij $\alpha > \varphi$.
Breng de ingeschreven bollen van K aan, die ook aan V raken (ga na dat dit er juist 2 zijn).

$B_1 = B(M_1, r_1)$ en raakt V in F_1, K langs γ_1,

$B_2 = B(M_2, r_2)$ en raakt V in F_2, K langs γ_2.

Neem een willekeurig punt P van de snijfiguur; de beschrijvende door P snijdt γ_1 in Q_1, γ_2 in Q_2. Nu geldt $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$, onafhankelijk van P $\Rightarrow$ de snijfiguur is een ellips.

Def.: F_1 en F_2 heten brandpunten van de ellips.

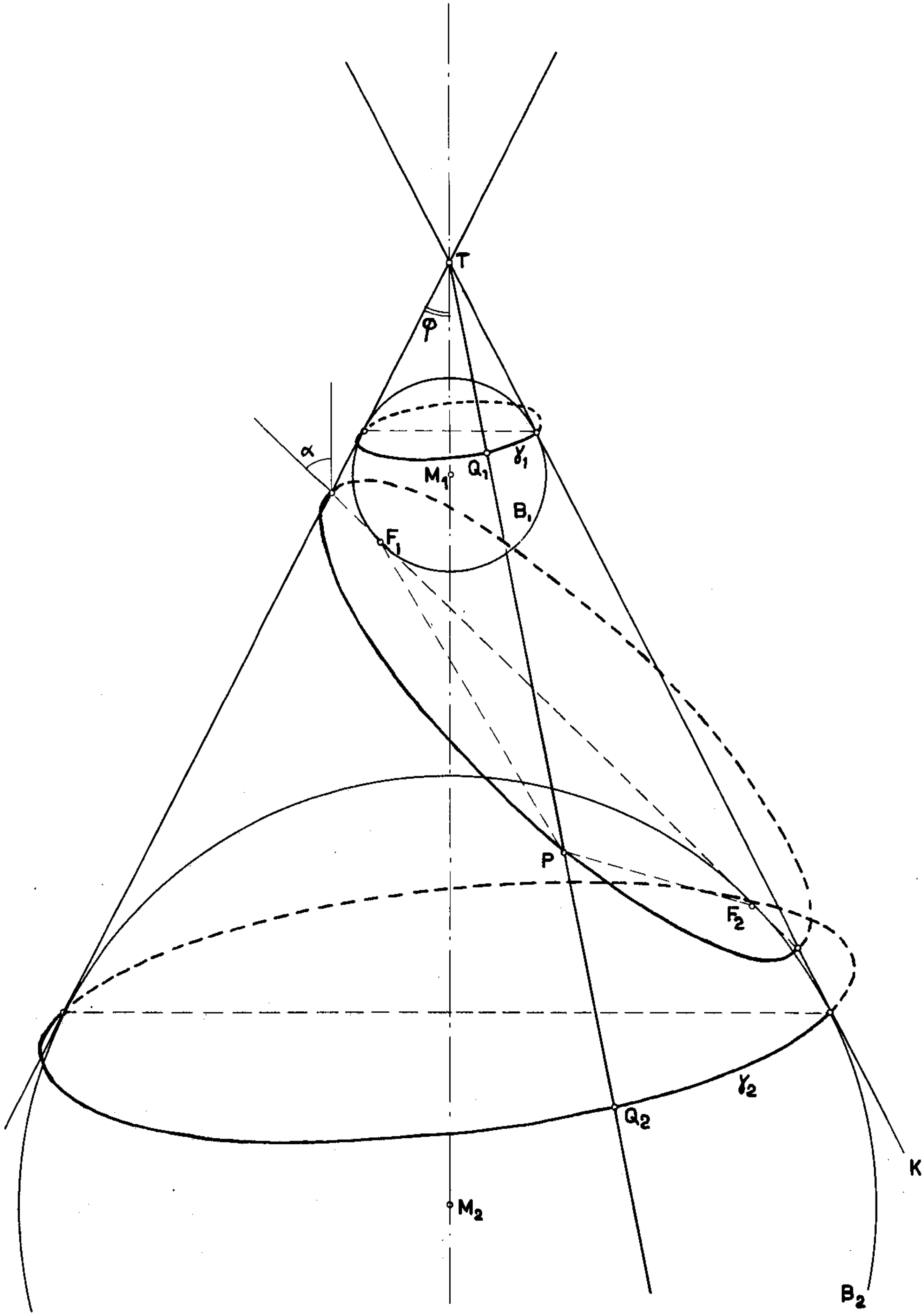
c. Zij $\alpha < \varphi$; dit verloopt geheel analoog aan a).

b. Als $\alpha = \varphi$, is er slechts één ingeschreven bol van de kegel die aan V raakt. Het bewijs verloopt geheel anders. Om te laten zien dat b) een bijzonder geval is van a) en c) zullen we nu een redenering geven die op alle drie kegelsneden betrekking kan hebben:
Neem weer de kegel K, een vlak V en één ingeschreven bol B, die aan V raakt, en wel in F. B raakt K volgens een cirkel γ die in een vlak W ligt. Zij l de snijlijn van V en W en β de hoek tussen V en W, dan geldt: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. (W staat immers loodrecht op de as van de kegel).
Zij P een punt der snijkromme, en PR de loodlijn uit P op W; dan is $\angle QPR = \varphi \Rightarrow PR = PQ \cdot \cos\varphi = PF \cdot \cos\varphi$. Zij PL de loodlijn uit R op l in W, dan is

$$PR = PL \sin\beta = PL \cos\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow PF \cos\varphi = PL \cos\alpha \text{ of } \frac{PF}{PL} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi},$$

dit is onafhankelijk van P; dus geldt: de verhouding der afstanden van P tot een vast punt F in V en een vaste rechte l in V is voor alle punten P van de snijkromme dezelfde.


T
φ
α
M1
Q1
γ1
B1
F1
P
F2
γ2
Q2
K
M2
B2

Men noemt de rechte l de bij het brandpunt F behorende <u>richtlijn</u>;

$e = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}$ is de excentriciteit der kegelsnede; als $\alpha = \varphi$ volgt speciaal: PF = PL, d.w.z. de snijkromme is een parabool.

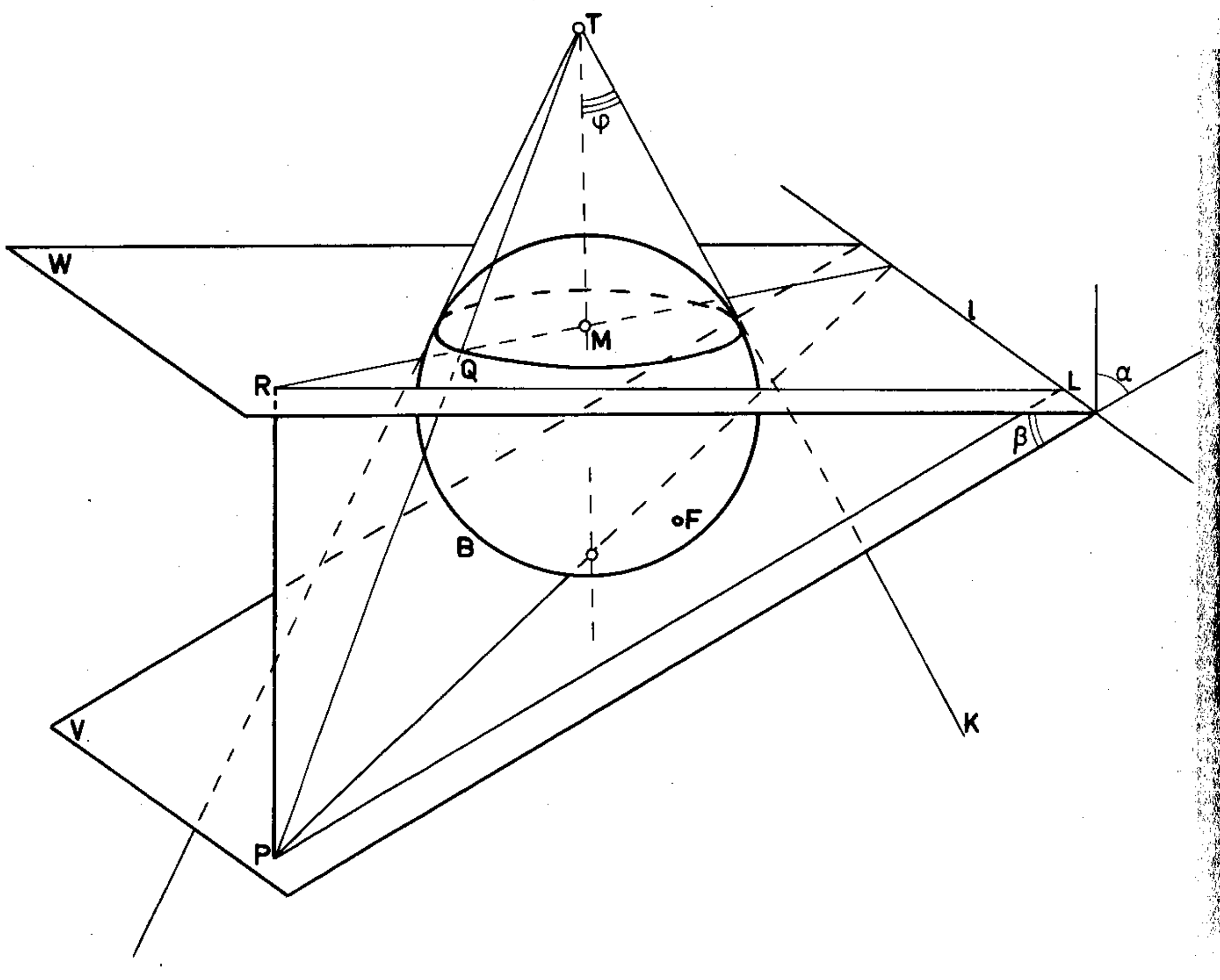
Verder volgt nu de stelling:

Men kan een kegelsnede (ellips, parabool of hyperbool) opvatten als een meetkundige plaats van de punten waarvoor de verhouding der afstanden tot een gegeven punt en een gegeven rechte constant is.

De kegelsnede is een

ellips als deze constante < 1,
parabool als deze constante $= 1$,
hyperbool als deze constante > 1.

Als deze constante 0 is, ontstaat als snijkromme weer een cirkel: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d.w.z. V loodrecht op de as.



2. De ellips

De ellips is de meetkundige plaats der punten waarvan de som der afstanden tot twee gegeven punten, de brandpunten der ellips, constant is. Dan heeft de ellips de volgende eigenschappen:

1) ze is symmetrisch ten opzichte van de lijn door de brandpunten F_1 en F_2.
2) ze is symmetrisch ten opzichte van de middelloodlijn van F_1F_2

De punten van de ellips die op de lijn F_1F_2 liggen heten T_1 en T_2; de punten van de ellips op de middelloodlijn van F_1F_2 heten S_1 en S_2.

T_1, T_2, S_1 en S_2 heten <u>toppen</u> der ellips. Het snijpunt M van T_1T_2 en S_1S_2 heet het <u>middelpunt</u> der ellips. Een koorde door M heet <u>middellijn</u>. Op symmetrie gronden geldt: M is het midden van iedere middellijn. Zij voor een punt P der ellips $PF_1 + PF_2 = 2a$, dan is ook $S_1F_1 + S_1F_2 = 2a$; wegens de symmetrie: $S_1F_1 = a$. Voorts:

$$\left.\begin{array}{l} T_1F_1 = T_1F_2 = T_1F_1 + T_1F_1 + F_1F_2 \\ \\ T_2F_1 + T_2F_2 = T_2F_2 + F_1F_2 + T_2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2T_1F_1 = 2T_2F_2 \Longrightarrow T_1F_1 = T_2F_2$$

$$\Longrightarrow 2a = T_1F_1 + T_1F_2 = T_2F_2 + T_1F_2 = T_1T_2;\ T_1M = T_2M = a$$

We noemen $S_1S_2 = 2b$, dan is $S_1M = S_2M = b$. $F_1M = F_2M = \sqrt{a^2 - b^2}$. Deze grootheid noemen we c. Dus $a^2 = b^2 + c^2$. 2a en 2b heten de <u>aslengten</u> der ellips, a heet <u>halve grote</u>, b <u>halve kleine as</u> der ellips. PF_1 en PF_2 heten de <u>voerstralen</u> van P. De ellips noemen we ε .

Zij $P \in \varepsilon$. De raaklijn p in P aan ε wordt gevonden door aan de kegel K het raakvlak U in P aan te brengen en U met V te snijden.
Zijn W_1 en W_2 de vlakken door γ_1 en γ_2, l_1 en l_2 de snijlijnen van W_1 en W_2 met V, r_1 en r_2 de snijlijnen van W_1 en W_2 met U, dan geldt $l_1 \parallel l_2$, $r_1 \parallel r_2$, l_1 en l_2 zijn richtlijnen van ε, r_1 en r_2 raken γ_1 en γ_2 in Q_1 en Q_2. Het snijpunt van r_1, l_1 en p zij A_1, dat van r_2, l_2 en p zij A_2. Dan is $\Delta PF_1A_1 \cong \Delta PQ_1A_1$ en $\Delta PF_2A_2 \cong \Delta PQ_2A_2$ (Z.Z.Z; raaklijnen uit een punt aan een bol zijn gelijk) zodat $\angle F_1PA_1 = \angle Q_1PA_1$ en $\angle F_2PA_2 = \angle Q_2PA_2$. Wegens $\angle Q_1PA_1 = \angle Q_2PA_2$ is dus ook $\angle F_1PA_1 = \angle F_2PA_2$.
<u>Resultaat</u>: De raaklijn in P maakt gelijke hoeken met de voerstralen van P.

Uit de congruentie volgt ook: $\angle A_1F_1P = \angle A_1Q_1P$, en deze is $\frac{\pi}{2}$. Met andere woorden: richt men in F_1 op de voerstraal PF_1 een loodlijn op, dan snijdt deze de raaklijn door P in een punt van de richtlijn bij F_1.

Nu heeft de lijn PF_1 nog een punt P' op ε. De raaklijn in P' aan ε gaat evenzo door A_1.

Resultaat: Een lijn door een brandpunt der ellips is raakkoorde van een punt op de bijbehorende richtlijn. Eén hoogtelijn der betrokken raakdriehoek heeft het brandpunt als voetpunt.

Het voorgaande passen we toe als A ligt op de rechte F_1F_2, zodat $PP' \perp T_1T_2$.

Neem $PP'' \perp l_1$, $P'' \in l_1$.

Zij $PF_1 = x$, $PP'' = y$. x is te berekenen in ΔPF_1F_2 met de eigenschap:
$PF_1 + PF_2 = 2a$ en de stelling van Pythagoras:

$$4c^2 + x^2 = (2a - x)^2 \text{ zodat } x = \frac{b^2}{a}.$$

y is te berekenen uit $\frac{PP''}{PF_1} = \frac{T_1A}{T_1F_1}$ (zie blz. II. 3)
zodat

$$\frac{y}{x} = \frac{y - a + c}{a - c}, \quad y = \frac{b^2}{c} \quad \text{en} \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{a} < 1$$

(vergelijk blz. II.3).
Men noemt $\frac{c}{a}$ de <u>excentriciteit</u> der ellips, $x = \frac{b^2}{a}$ de <u>parameter</u> der ellips.

3. Pool en poollijn

Door een punt P buiten de ellips ε kan men aan ε twee raaklijnen trekken, p_1 en p_2, die ε raken in P_1 en P_2. De lijn door P_1 en P_2 heet de <u>poollijn</u> p van P, P de <u>pool</u> van p. Neemt men nu $Q \in p$, dan heeft Q een poollijn q, <u>en deze gaat door P</u>.
Men kan immers (in de projectieve meetkunde, maar niet nu) bewijzen:
Als P en Q punten zijn (<u>buiten</u> der ellips ε gelegen) en Q ligt op de poollijn p van P (ten opzichte van ε) dan ligt P op de poollijn q van Q.

Zij nu R een punt <u>binnen</u> ε; neem twee willekeurige lijnen p en q door R. Deze bezitten polen P en Q; men noemt nu de lijn r door P en Q de poollijn van R.

Als $S \in \varepsilon$, noemt men de raaklijn in S aan ε de poollijn.
Nu geldt in alle gevallen: Als Q ligt op de poollijn van P, ligt P op de poollijn van Q.

Voorbeeld 1: brandpunt en richtlijn zijn pool en poollijn.

Voorbeeld 2: Een cirkel is een ellips (met excentriciteit 0); een middellijn is poollijn van de richting loodrecht erop.

Voorbeeld 3: Een pooldriehoek is een driehoek waarvan ieder hoekpunt pool is van de overstaande zijde.

Als P ligt op de poollijn q van Q noemt men P en Q (en ook de poollijnen p en q) geconjugeerd; ook zegt men dat er tussen P en Q (en tussen p en q) poolverwantschap bestaat ten opzichte van de ellips ε.

Tekent men een middellijn M_1M_2 van de ellips, dan zijn uit symmetrie overwegingen de raaklijnen in M_1 en M_2 evenwijdig.

De middellijn m is dus dus poollijn van de richting M_∞, die weer ligt op de poollijn van M; de poollijn van M is derhalve l_∞. De poollijn van de richting $M_1M_2 = N_\infty$ moet weer door M en M_∞ gaan, en is dus de middellijn N_1N_2 // M_∞. M_∞ en N_∞ zijn <u>geconjugeerd</u>, M_1M_2 en N_1N_2 heten <u>geconjugeerde middellijnen</u>. T_1T_2 en S_1S_2 zijn geconjugeerde middellijnen, en wel de enige die loodrecht op elkaar staan (als ε geen cirkel is). Men noemt T_1T_2 en S_1S_2 daarom ook <u>hoofdassen</u>. Bij een cirkel staan <u>alle</u> middellijnen loodrecht op hun geconjugeerde.
Nog een stelling uit de projectieve meetkunde:
Bij affiene transformatie blijft poolverwantschap bestaan.

4. <u>De ellips bij affiene transformatie</u>.

Indien men bij de stelling van Dandelin de kegel K door een cilinder C vervangt en deze snijdt met een vlak V dat niet met de as evenwijdig is, ontstaat als doorsnede een ellips, waarvan de korte as gelijk is aan de middellijn van de cilinder, dus gelijk aan de middellijn van een cirkel op de cilinder, bijv. de eerder genoemde cirkel γ, in het vlak W. Zij β de hoek tussen V en W. Dan is de ellips ε de parallel-projectie van de cirkel γ in het vlak V onder een hoek $\frac{\pi}{2} - \beta$. De ellips "wordt uit γ verkregen door haar in een richting met een factor $\frac{1}{\cos\beta}$ uit te rekken".

Neem nu $\frac{b}{\cos\beta} = a$, en teken ook de omgeschreven cirkel δ van ε met straal a. δ ontstaat uit ε door ε in de geconjugeerde richting met een factor $\frac{1}{\cos\beta}$ uit te rekken. Dus ε ontstaat uit δ door δ in deze richting met een factor $\cos\beta$ in te krimpen. Dus ε is de orthogonale projectie van δ, als δ ligt in een vlak U dat met V een hoek β maakt.

Slaat men nu U in V neer, dan krijgen we de oorspronkelijke situatie weer terug:

We vinden dus het volgende: een ellips ε in een vlak V met halve grote assen a en b is op te vatten als de orthogonale projectie van een cirkel δ met straal a die ligt in een vlak U dat door de lange as van ε gaat en met V een hoek arccos $\frac{b}{a}$ maakt. Slaat men U en V neer dan zijn ε en δ_n affien verwant; de as der affiniteit valt samen met de gemeenschappelijke middellijn van ε en δ_n, de affiniteitsrichting staat er loodrecht op.
Dus iedere ellips is op te vatten als het affiene beeld van een cirkel bij een orthogonale affiniteit, ook dilatatie genoemd.
Dit is een bijzonder geval van een algemene stelling die in de analytische meetkunde wordt bewezen:
De parallelprojectie van een ellips is een ellips.
Gevolg: het affiene beeld van een ellips is een ellips.
Gevolg: het affiene beeld van een cirkel is een ellips.
Indien een ellips ε , affien verwant met een cirkel γ , moet worden getekend, doen we dit door een groot aantal punten met raaklijnen te construeren, waaronder de vier toppen en top-raaklijnen;

1) In het algemene geval dat de affiniteitsrichting een scheven hoek met de affiniteitsas maakt worden daartoe een hulp-cirkel geconstrueerd door M_ε en M_γ en met middelpunt op de affiniteitsas.
   Daaruit vindt men de toppen en top-raaklijnen.
   Andere punten en raaklijnen van ε worden uit hun affiene origineel afgeleid.
2) In het bijzondere geval van een dilatatie vallen hoofdassen van ε langs (eventueel evenwijdig aan) de affiniteitsas en -richting. Willekeurige punten en raaklijnen worden uit hun affiene origineel afgeleid.

3) Een tweede bijzonder geval is de <u>afschuiving</u> waarbij affiniteits-
as en -richting evenwijdig zijn.

In dit geval kan men de hoofdassen eveneens met de hulpcirkel door M_γ en M_ε bepalen.
Uit deze constructie blijkt:
Geconjugeerde middellijnen van de ellips ε zijn diagonalen van een parallelogram waarvan de zijden geconjugeerde richtingen hebben.

Indien van een ellips ε twee toegevoegde middellijnen gegeven zijn in grootte en richting, doch een affien originele cirkel niet bekend is, kan men deze construeren; men kent immers twéé paar geconjugeerde richtingen, en kan nu met een willekeurige rechte als as een affiniteit construeren; met behulp daarvan vindt men M_γ en de straal γ ; daarna past men dan weer 1), 2) of 3) toe om van de hoofdassen te construeren.

Opgave 1.

Neem de x-as // de korte zijde, op afstand 14 van onderen, σ 10 van rechts. $M = (5,5,5)$, β een bol met middelpunt M en straal 4.
V is een vlak door de x-as en het punt (0,9,5).
Teken de projecties van de snijcirkel γ van B en V.
(Construeer daartoe van iedere te schetsen ellips tenminste 12 punten met raaklijnen). Construeer de projecties van de poollijn van σ t.o.v. γ, en construeer van beide projecties de brandpunten.

Opgave 2.

x-as en σ als in opgave 1.
$M = (5,5,0)$. M is middelpunt van een π_1 gelegen cirkel γ met straal 4.
γ is richtcirkel van een cilinder C // de z-as.
V is een vlak door de x-as en het punt (0,2,3).
Construeer de projecties van de doorsnijding Υ van C en V en construeer de doorsnijding Υ door V in π_2 neer te slaan.

De figuur van blz. II.10 geeft aanleiding tot nog een manier om uit de cirkel een ellips voort te brengen : projecteer V op U, in een richting p, niet loodrecht op de snijlijn (U,V). Dan is $\delta' = \delta$, een cirkel, ε' een ellips, en ze zijn affien verwant : δ en ε' zijn beide parallelprojectie van ε .

De as der affiniteit is de gemeenschappelijke middellijn, de affiniteitsrichting vindt men uit twee verwante punten, die niet op de as liggen.

De constructie der hoofdassen is hier niet toe te passen, omdat M_δ en $M_{\varepsilon'}$ samenvallen. Men verschuift nu δ in de affiniteitsrichting naar een andere plaats δ'' en construeert een nieuwe affiniteit tussen δ'' en ε'; deze levert de hoofdassen van ε'.

Men kan dit geval weer opvatten als een bijzonder geval van een algemeen geval, waarin men de hoofdassen zonder moeite kan construeren.

HOOFDSTUK III

AXONOMETRIE

1. Coördinaten; de keuze van tafereel en projectierichting

Axonometrie is een projectiemethode waarbij men uitgaat van een Cartesisch coördinatenstelsel; een x-as, y-as en z-as snijden elkaar in de oorsprong O loodrecht; het xy-vlak heet π_1, het yz-vlak π_2 en het xz-vlak π_3; men kiest op deze assen een positieve en een negatieve richting, zó dat het coördinatenstelsel rechts georiënteerd is.

Het tafereel τ is een vlak dat de assen snijdt in punten X (met positieve x-coördinaat), Y (met positieve y-coördinaat) en Z (met positieve z-coördinaat).

Het tafereel τ snijdt de vlakken π_1, π_2 en π_3 volgens ΔXYZ, de tafereeldriehoek.

De projectierichting p is loodrecht op τ. Hieruit volgt:

1. De (axonometrische) projecties van de assen zijn de hoogtelijnen van ΔXYZ : XU, YV en ZW.
2. De projectie van O is het hoogtepunt O_a van ΔXYZ.

Axonometrie is een orthogonale parallelprojectie, zodat de vier eigenschappen van blz. 0.2 en de twee eigenschappen van blz. I.32 gelden. In tegenstelling tot de orthogonale projectiemethode worden de assen niet in ware grootte in het tafereel τ afgebeeld:

$$\frac{XO_a}{XO} = \cos \angle OXO_a = \cos\alpha = a, \text{ de verkortingsverhouding der x-as;}$$

evenzo is $b = \cos\beta = \frac{YO_a}{YO}$ de verkortingsverhouding der y-as; en

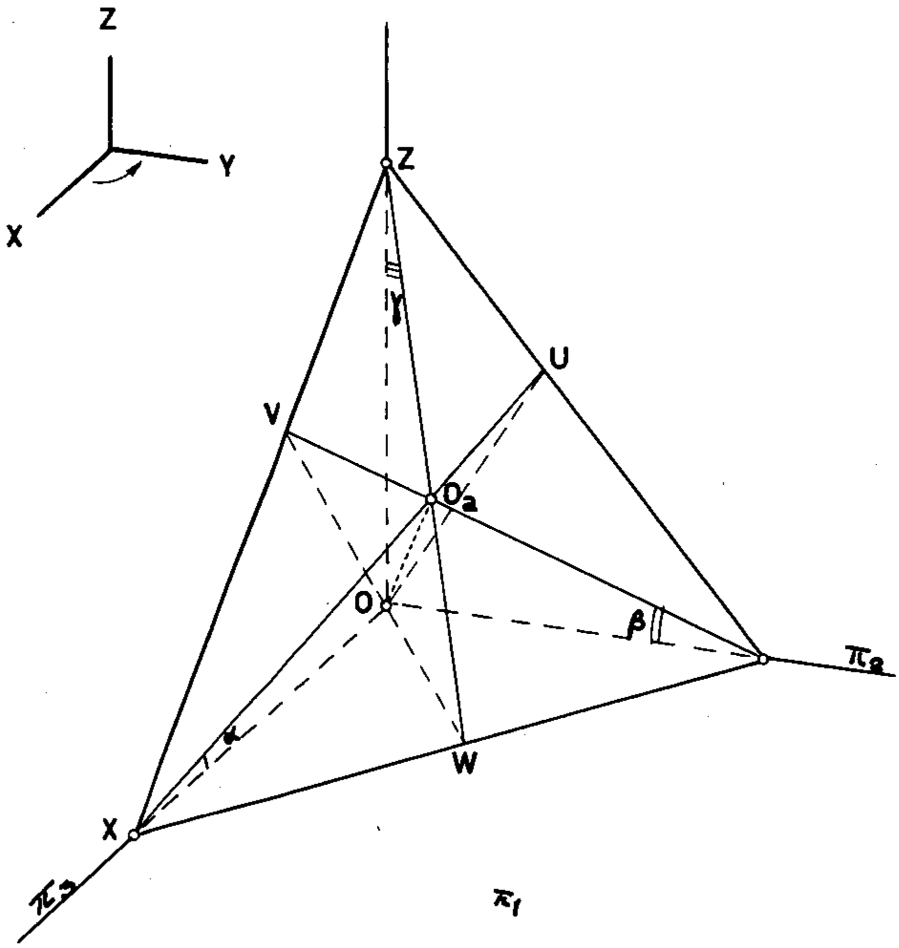
$$c = \cos\gamma = \frac{ZO_a}{ZO} \text{ de verkortingsverhouding der z-as.}$$

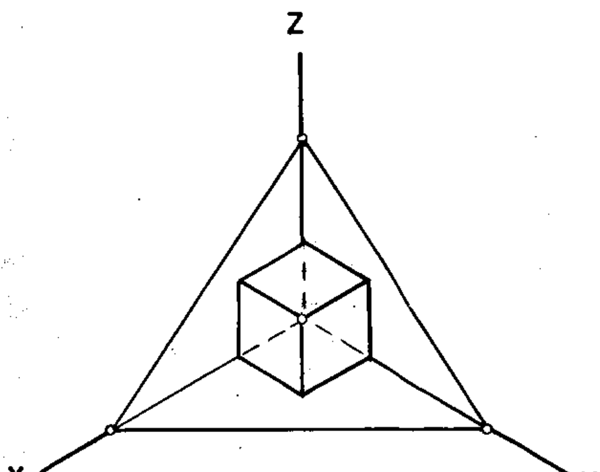
Voor a, b en c geldt de relatie: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, waaruit weer volgt:

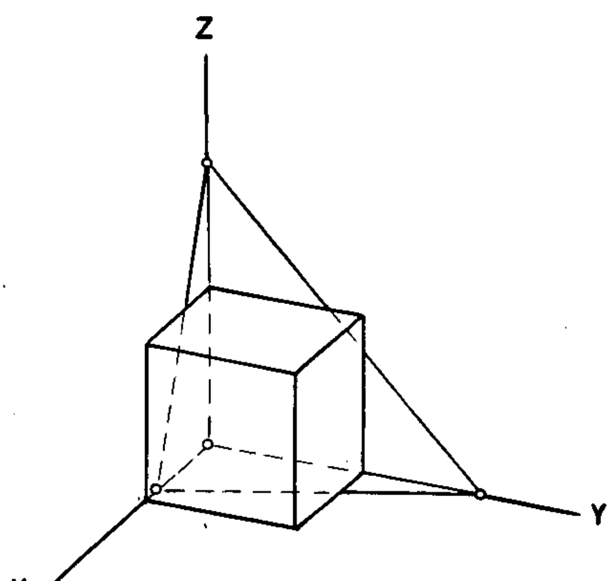
$$a^2 < b^2 + c^2, \quad b^2 < a^2 + c^2, \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Men noemt de projectie isometrisch als $a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; dan is ΔXYZ gelijkzijdig.
Men spreekt van ingenieursaxonometrie als $2a = b = c = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

De verkorting $\frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}943 = 1/1{,}060$ is bijna gelijk aan 1; in de ingenieursaxonometrie tekent men nu in de y- en z-richting de ware lengte, en in de x-richting de halve ware lengte; daarbij maakt men dus de figuur 6% te groot. In deze cursus volgen wij deze gewoonte niet, en zullen we ook niet een speciale keus voor de verkortingsverhoudingen maken.


Z
Y
X
Z
γ
U
V
O2
O
β
π2
α
W
X
π3
π1


Z
X
Y


Z
Y
X

Indien de verkortingsverhoudingen a, b en c gegeven zijn, kan men de <u>tafereeldriehoek XYZ construeren</u> op gelijkvormigheid na:

$$a = \cos\alpha = \frac{XO_a}{XO} = \frac{XO}{XU} \Longrightarrow \frac{XO_a}{XU} = a^2, \text{ evenzo } \frac{YO_a}{YV} = b^2 \text{ en } \frac{ZO_a}{ZW} = c^2 .$$

Zij nu M het midden van XY, dan liggen X, Y, U en V op een cirkel met M als middelpunt, $\odot(M,r)$, $r = \frac{XY}{2}$.
Vermenigvuldig deze

met de factor a^2 t.o.v. X; $\Longrightarrow \odot(N, a^2 r)$

met de factor b^2 t.o.v. Y; $\Longrightarrow \odot(P, b^2 r)$

O_a is een snijpunt van deze cirkels.

Nu is $NP = 2r - a^2 r - b^2 r = c^2 r$.

$$XN : NP : PY = a^2 : b^2 : c^2 .$$

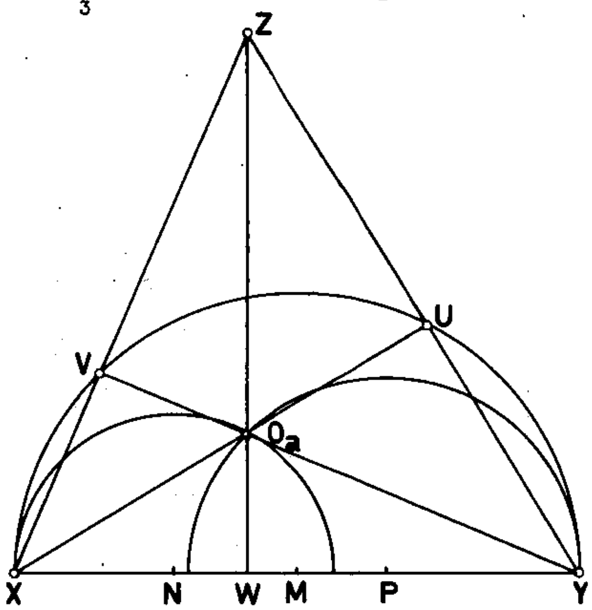
Indien dus a, b en c zijn gegeven, construeert men eerst lijnstukken die zich verhouden als a^2, b^2 en c^2; indien c de grootste van de drie is, construeren we daartoe een cirkel met c als middellijn, en koorden a en b; de projecties van a en b op c verhouden zich tot c als $a^2 : c^2$ en $b^2 : c^2$. Zo vindt men dus X, Y, O_a en daarna Z.

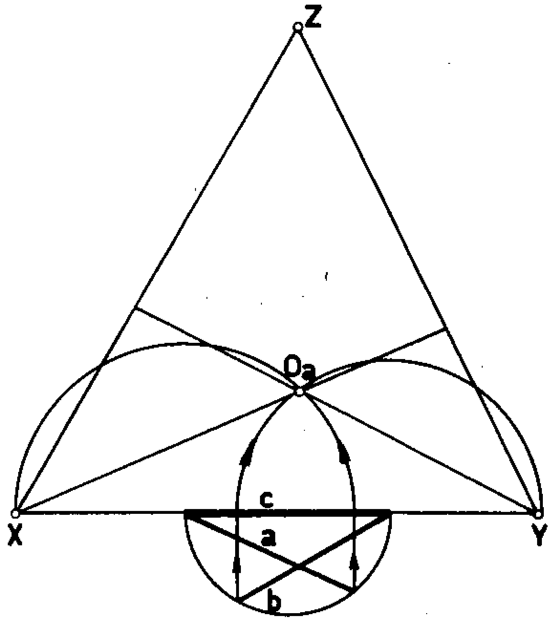
ΔXYZ is op <u>gelijkvormigheid</u> na door a, b en c bepaald; als men het tafereel τ vervangt door een tafereel $\tau' \parallel \tau$, blijven a, b en c dezelfde; ΔXYZ gaat evenwel over in een $\Delta X'Y'Z'$ die met ΔXYZ gelijkvormig is.

Men kan dus de tafereeldriehoek construeren als behalve a, b en c nog een ware lengte, bv. van XY, gegeven is.

Indien de tafereeldriehoek gegeven is, is daardoor het punt O bepaald. O is van de bollen met middellijnen XY, YZ, ZX het snijpunt dat niet aan dezelfde kant van τ ligt als de tekenaar.

Met O zijn voor de tafereeldriehoek de assen en de vlakken π_1, π_2 en π_3 in de ruimte bepaald.





2. Projecties van punten en lijnen

Een punt A in π_1 bepaalt zijn projectie A_a. Door de projectie A_a van een punt A in π_1 wordt A bepaald.

Hetzelfde geldt voor punten uit π_2 en π_3 .

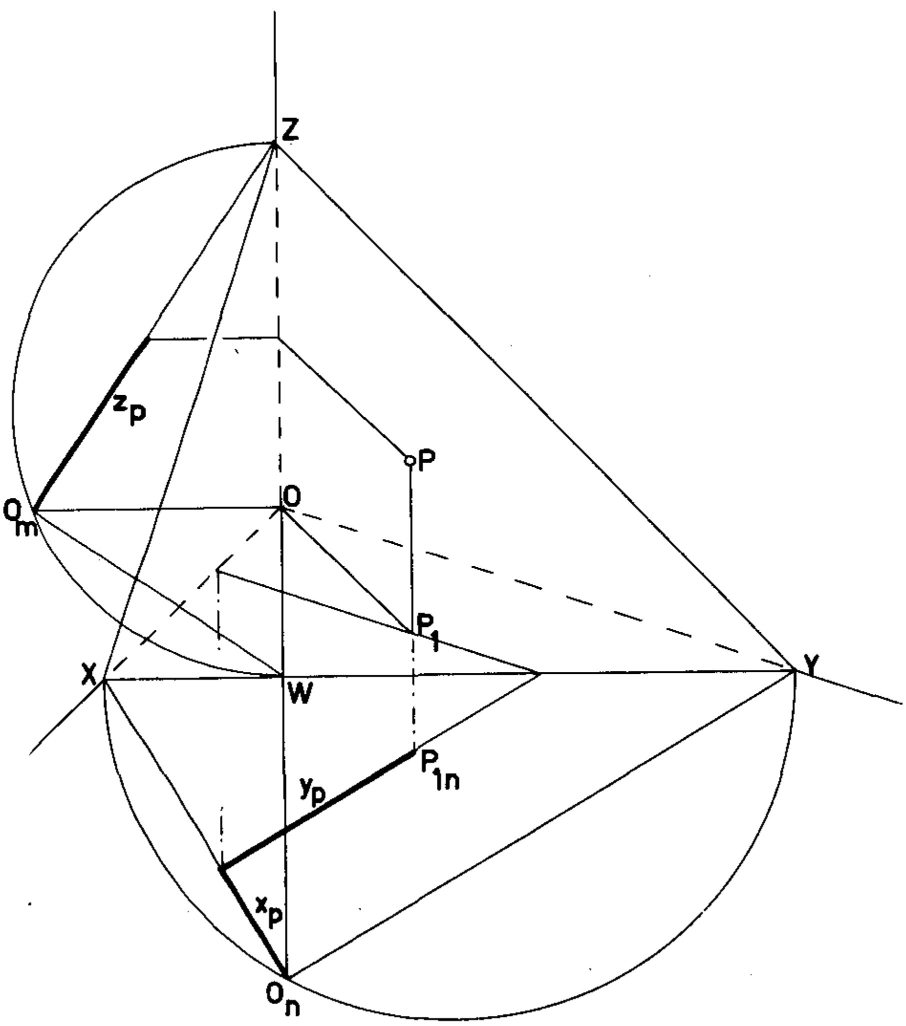
Een willekeurig punt P bepaalt zijn projectie P_a; omgekeerd geldt niet: de projectie P_a bepaalt ook het punt P; want alle punten van de p-straal door P worden in P_a geprojecteerd.

Om P te bepalen hebben we nog een gegeven nodig; daarom tekenen we in τ niet alleen P_a maar ook P_{1a}, de projectie van P_1; P_1 is de orthogonale projectie van P op π_1.

Nu geldt: P_{1a} bepaalt het punt P_1 in π_1; P_1 bepaalt een rechte loodrecht op π_1 die P bevat (de horizontaal projecterende straal van P), en deze bepaalt samen met P_a het punt P. Dus om een punt P in de ruimte te bepalen zijn in τ twee gegevens nodig: de projectie P_a van P en de projectie P_{1a} van P_1. Men noemt PP_1 een drager van P. PP_2 en PP_3 kunnen eveneens als drager optreden.

Indien een punt P gegeven is door zijn coördinaten, moet men eerst P_{1a} bepalen door het vlak XOY in τ neer te slaan om XY. Omdat O_n en O_a affien verwant zijn, en de affiniteitsrichting loodrecht op de affiniteitsas XY staat, is ΔXO_nY bepaald door een halve cirkel met XY als middellijn.

Vervolgens slaat men ΔZOW neer om XW in τ : ΔZO_mW is eveneens door affiniteit en de cirkel met middellijn ZW te vinden.



Indien de verkortingsverhoudingen bekend zijn, kan men in dit geval P_a direct vinden door de met a, b, c vermenigvuldigde coördinaten direct in de x, y, z richting af te passen.

Een lijn m in π_1 bepaalt zijn projectie m_a; en de projectie m_a bepaal weer de lijn m in π_1. Hetzelfde geldt voor lijnen in π_2 en π_3.

Een willekeurige lijn l bepaalt zijn projectie l_a; dit is eveneens de projectie van alle lijnen uit het projecterende vlak van l die niet // p zijn. Dus l is door zijn projectie l_a niet bepaald. Een lijn l is bepaald door de projecties l_a en l_{1a}; l_{1a} is de projectie van l_1; l_1 is de horizontale projectie van l.

Evenzo is l bepaald door l_a en l_{2a} of door l_a en l_{3a}.

Ook is een lijn bepaald door twee van zijn punten. Deze punten kunnen bijvoorbeeld twee der doorgangspunten zijn; de doorgangspunten liggen namelijk in π_1, π_2 en π_3, en worden door hun projecties dus zonder meer bepaald.

Een uitzondering vormt een lijn $q \parallel p$. Deze staat $\perp \tau$, heeft als projectie een punt Q en wordt daardoor zonder meer bepaald. q_{1a}, q_{2a} en q_{3a} zijn evenwijdig aan de z-as, de x-as en de y-as.

Een voorbeeld is de projecterende rechte door O.

3. Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak

Indien l en m elkaar snijden in P, geldt:

l_i en m_i snijden elkaar in P_i voor i = 1,2,3.

En tevens:

l_a en m_a snijden elkaar in P_a, en

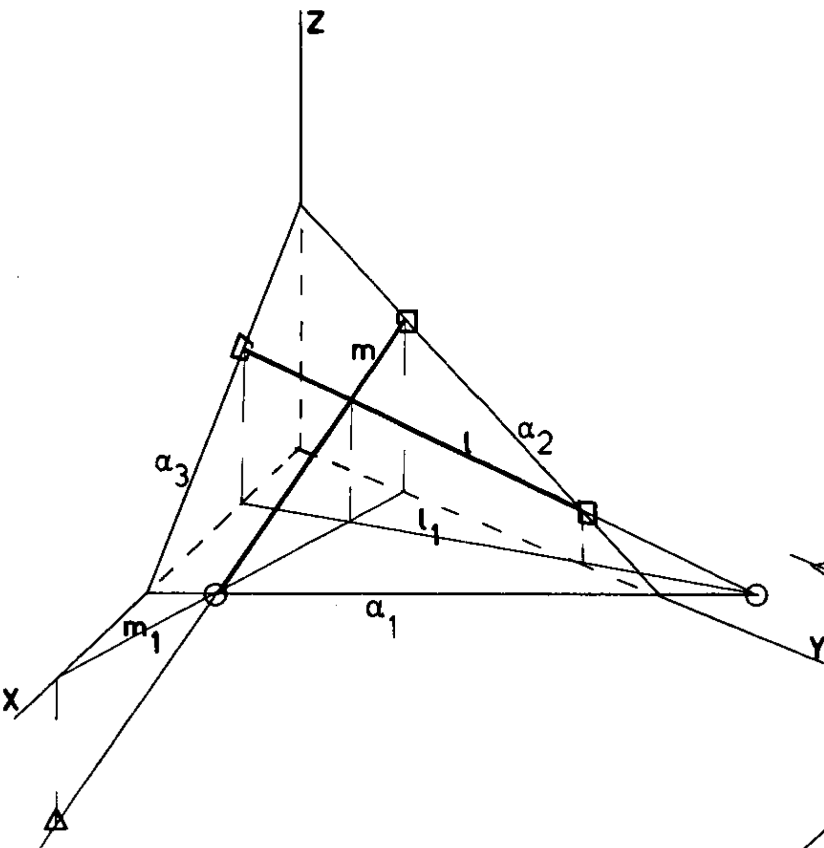
l_{ia} en m_{ia} snijden elkaar in P_{ia}, i = 1,2,3.

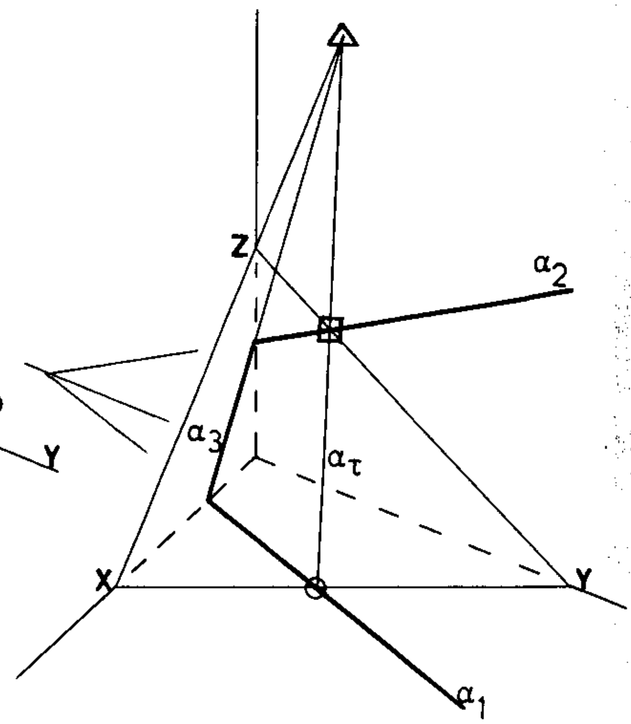
Indien $l \parallel m$, geldt:

$l_i \parallel m_i$, i = 1,2,3; zodat ook $l_a \parallel m_a$ en $l_{ia} \parallel m_{ia}$, i = 1,2,3.

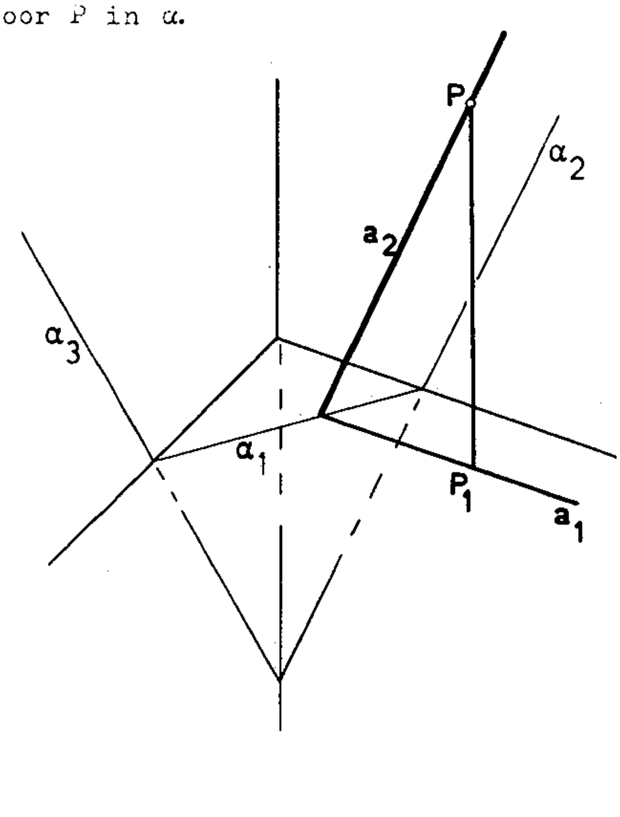
Hierbij is ondersteld dat alle projecties weer lijnen zijn. Indien l en m elkaar snijden, of indien $l \parallel m$, kan men door l en m een vlak α brengen. De doorgangen van dit vlak met π_1, π_2 en π_3 gaan door de gelijknamige doorgangspunten van l en m. Het vlak is door twee van de doorgangen α_1, α_2 en α_3 van α volkomen bepaald.

Een vlak α snijdt in het algemeen ook het tafereel τ. De snijlijn noemt men de doorgang met τ van α, of tafereel - doorgang van α, en wordt aangegeven met α_τ. Ze wordt gevonden met behulp van ΔXYZ: het snijpunt van XY met α_1 ligt op α_τ, en evenzo het snijpunt van YZ met α_2 en dat van XZ met α_3.





Een punt P ligt in een vlak α, als P ligt op een lijn a van α; het verband tussen P, P_1 en de doorgangen van α kan men aangeven door van hoofdlijnen gebruik te maken; in de tekening is a een tweede hoofdlijn door P in α.



Opgave 1.

Neem in $\triangle XYZ$: $XY = 7$, $XZ = 8$, $YZ = 9$.

Construeer de projecties van de punten

A(1,2,3)	E(-2,-4,3)
B(3,5,3)	F(4,-6,3)
C(5,7,3)	G(4,6,-3)
D(-2,4,3)	H(-2,-4,-6) .

Opgave 2.

Neem XY = 10, en a : b : c = 1 : 2 : 2.
Construeer de tafereeldriehoek, en daarna de punten C, F en G uit 1.

Opgave 3.

Neem XY = 10, $a = \frac{8}{9}$, b = c, en construeer de tafereeldriehoek; daarna de punten C, F en G uit 1.

Opgave 4.

Kies zelf een tafereeldriehoek; met A, B,... zijn de punten uit 1 bedoeld.

a) Construeer een lijn l door A en B en bepaal de doorgangspunten van l.
b) Construeer een lijn m door A en G en bepaal de doorgangspunten.
c) Construeer de doorgangen van het vlak α door l en m, ook α_τ; ook de doorgangspunten van l en m met τ.
d) Construeer een lijn n door D en $/\!/$ l.
e) Construeer het vlak β door n en l; bepaal ook β_τ; ook het snijpunt van n met τ.

Opgave 5.

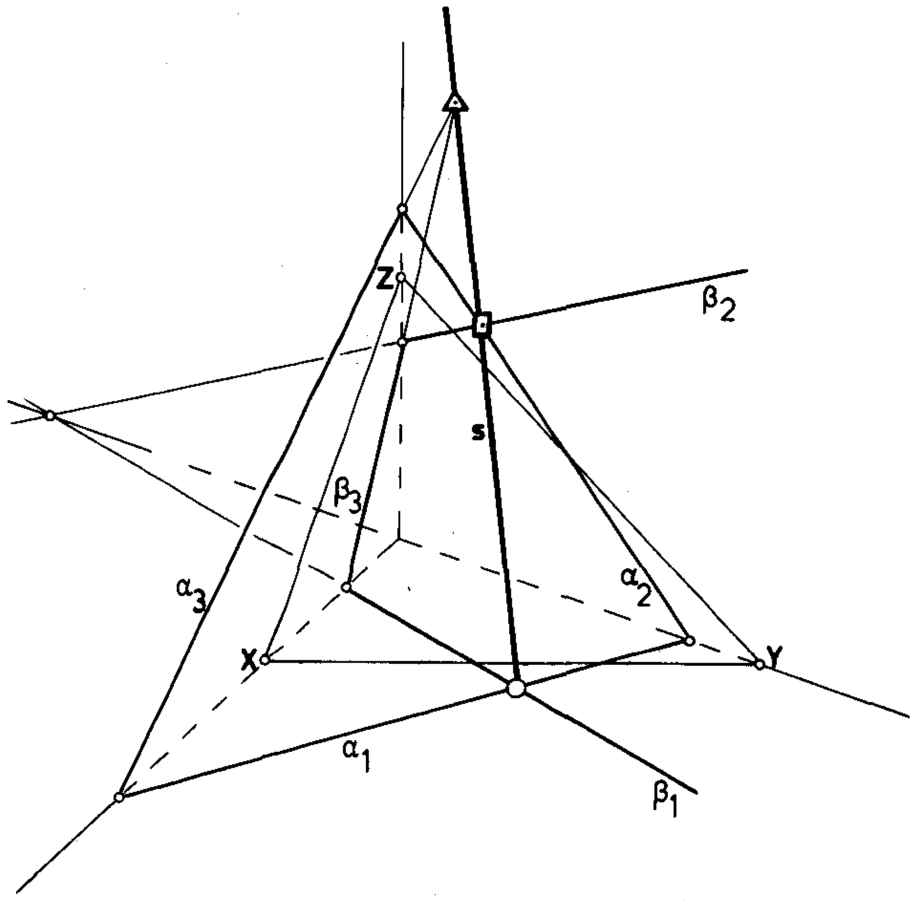
Bepaal een lijn k door C en loodrecht op τ.
Bepaal een lijn h door H en loodrecht op τ.
Bepaal een vlak γ door deze lijnen.

4. Onderlinge ligging van vlakken

Indien $\alpha // \beta$, geldt (voor zover deze bestaan) $\alpha_i // \beta_i$ $(i = 1,2,3)$ en $\alpha_\tau // \beta_\tau$.
In het bijzonder:
als $\alpha // \pi_1$, is $\alpha_2 //$y-as, $\alpha_3 //$ x-as, $\alpha_\tau // XY$; α_1 is er niet. Analoog voor $\alpha // \pi_2$ of $\alpha // \pi_3$.

Indien $\alpha /\!/ \tau$, is $\alpha /\!/ XY$, $\alpha_2 /\!/ YZ$, $\alpha_3 /\!/ XZ$; α_τ is er niet.

Indien α en β elkaar snijden volgens een rechte s, gaat s door de snijpunten der gelijknamige doorgangen.



Indien een vlak $\alpha \perp \tau$, projecteren <u>alle punten</u> en <u>alle lijnen</u> uit α zich in α_τ ; ook de doorgangen α_1, α_2 en α_3.

Een kenmerk van een vlak $\perp \tau$ is dus dat de doorgangen α_1, α_2, α_3 en α_τ in het tafereel τ samenvallen. Een voorbeeld van zo'n vlak is het projecterende vlak van de z-as, dat we al eerder hebben neergeslagen in τ .

Opgave 6.

Construeer een vlak ξ

a) door 3 gegeven punten A, B, C;
b) door een lijn a en $/\!/$ een lijn b, b $\not\parallel$ a;
c) door een punt A en $/\!/$ een vlak α.

Opgave 7.

Construeer een rechte l

a) door het punt A, die de rechten b en c snijdt;
b) // de rechte a, die de rechten b en c snijdt.

5. Het neerslaan van vlakken in τ

Voor het uitvoeren van constructies waarbij de ware grootte van lijnstukken of hoeken of het begrip afstand een rol speelt is het vaak noodzakelijk een vlak α in τ neer te slaan. Hierbij fungeert α_τ altijd als affiniteitsas, en de richting loodrecht hierop als affiniteitsrichting.

Bij het neerslaan wordt ook meestal gebruikt de eigenschap dat de benen van een rechte omtrekshoek een cirkel in de eindpunten van een middellijn snijden.

a) α is een der vlakken π_1, π_2 of π_3; dit geval is reeds besproken in § 1, met π_1 ; π_2 en π_3 gaan op dezelfde manier.

b) α is een vlak door één der coördinaatassen. Voor het vlak door Z, O en W is dit reeds besproken in § 1. Hier slaan we nog een vlak α door de x-as neer.

In deze twee gevallen werd gebruik gemaakt van een in het vlak α gelegen rechte hoek. Ook in het algemene geval willen we over een rechte hoek de beschikking krijgen. We maken daarbij gebruik van de stelling: als $l \perp \alpha$, staat de orthogonale projectie van l op een vlak (τ, π_1, π_2 of π_3) loodrecht op de doorgang van α met dat vlak. In <u>onze tekening</u> in τ staat dus $l \perp \alpha_\tau$, en in <u>π_i</u> staat $l_i \perp \alpha_i$; aangezien we de vlakken π_i reeds kunnen neerslaan, kunnen we met l_i werken ($i = 1,2,3$).

Construeer nu door een gegeven punt P een lijn l, die loodrecht op een gegeven vlak α staat.

Construeer ook door een gegeven punt P een vlak α, dat loodrecht op een gegeven lijn l staat.

c) Het neerslaan van een willekeurig vlak α.

Indien α_1 en α_2 elkaar in A snijden, en van $\angle A$ niet bekend is dat ze recht is, construeren we eerst een rechte hoek bij A; we brengen daartoe een vlak λ aan door A en loodrecht op α_1. Van λ is $\lambda_2 \,//\,$ z-as en $\lambda_\tau \perp \alpha_1$.

De snijlijn s van α en λ gaat door A en staat loodrecht op α_1.

We slaan dan de door α_1, α_τ en s gevormde driehoek in τ neer, gebruik makend van een halve cirkel en affiniteit.

Het neerslaan van vlakken wordt toegepast om ware grootten te construeren.

<u>Opgave 8</u>.

Construeer de projectie en de ware grootte van de afstand van

a) twee gegeven punten A en B,
b) een gegeven punt A en een gegeven vlak α,
c) een gegeven punt A en een gegeven lijn a,
d) twee gegeven kruisende lijnen a en b.

Opgave 9.

Construeer de hoek tussen

a) twee gegeven snijdende lijnen a en b,
b) twee gegeven snijdende vlakken α en β ,
c) een gegeven lijn a en een gegeven vlak α .

Opgave 10.

Gegeven is een lijn a in τ en een punt A. Construeer een rechte die door A gaat, a loodrecht kruist, en de z-as snijdt.

Opgave 11.

Construeer een rechte, die loodrecht op τ staat en twee gegeven rechten snijdt.

Opgave 12.

Construeer een regelmatig achtvlak, waarvan de diagonalen op de coördinaatassen liggen.

6. Wentelen van lichamen

Bij het wentelen van lichamen handelt men geheel overeenkomstig hoofdstuk II.§8.

Voorbeeld: een regelmatig viervlak ABCD heeft ΔABC in π_1 ; $A \in XY$, $AB \parallel$ x-as.

Construeer de projectie van het viervlak na wenteling om AB tot D in π_3 ligt; en ook de eigenschaduw en slagschaduw bij licht dat invalt in de richting ZX.

7. Regelvlakken

Een regelvlak is de meetkundige plaats van rechte lijnen die aan zekere voorwaarden voldoen.

Voorbeelden:

1. Een kegel is een regelvlak; het is de meetkundige plaats der lijnen die door een gegeven punt T gaan en een gegeven kromme γ snijden. Als T en γ in één plat vlak liggen, krijgt men een ontaarde kegel, een plat vlak.

2. Een cylinder is een regelvlak, namelijk de meetkundige plaats van de lijnen die een gegeven kromme γ snijden, en een gegeven richting p hebben (d.w.z. evenwijdig zijn met een gegeven rechte p). Als γ ligt in een vlak dat // p is, krijgt men een ontaarde cylinder, een plat vlak.

3. Een éénbladige hyperboloïde is de meetkundige plaats der lijnen l' die drie gegeven, elkaar kruisende rechten a, b en c snijden; a, b en c zijn niet evenwijdig met één plat vlak. Ieder punt van a brengt zo één rechte van het oppervlak voort. Bij twee verschillende punten P en Q van a horen twee kruisende rechten van het oppervlak, p' en q'. Bij drie verschillende punten P, Q en R van a horen drie rechten p', q' en r', die niet met één vlak evenwijdig zijn. Het bewijs hiervan volgt nog.

   Neemt men nu drie rechten p', q', r' van het voortgebrachte stelsel, dan is het oppervlak ook de meetkundige plaats der rechten die p', q' en r' snijden. Op het oppervlak liggen dus twee stelsels rechten. Door ieder punt van het oppervlak gaan twee rechten, één uit ieder stelsel. Dit geldt in het bijzonder ook voor oneindig verre punten van het oppervlak, zodat bij iedere rechte a uit het ene stelsel een rechte a' uit het andere stelsel hoort waarvoor a // a'.

Opgave 12.

Van een eenbladige hyperboloïde zijn de lijnen a, b, c gegeven. Construeer de lijnen uit het andere stelsel die in π_1, π_2 en π_3 liggen.

Construeer de lijnen uit het andere stelsel die met a, b en c evenwijdig zijn.

4. Een <u>hyperbolische paraboloïde</u> is de meetkundige plaats der lijnen l' die drie gegeven rechten a, b en c snijden; a, b en c kruisen elkaar, doch zijn evenwijdig met een vlak α. Ieder punt P van a brengt één rechte p van het oppervlak voort. Twee punten P en Q van a brengen kruisende rechten p en q voort. Drie verschillende punten P, Q en R van a brengen drie rechten voort die evenwijdig met één vlak β zijn.

Immers, neem a, b, c als voortbrengende rechten, p', p" en q als voortgebrachte rechten; a, b, c // α. p' snijdt α; (uit p' // α zou volgen: a en b liggen in één plat vlak); het snijpunt van p' met α zij P'.

Evenzo is het snijpunt van p" met α: P", dat van q met α : Q. Projecteer nu a, b, c en q in de richting p' op α, dit geeft a', b', c' door P' en q' door Q.

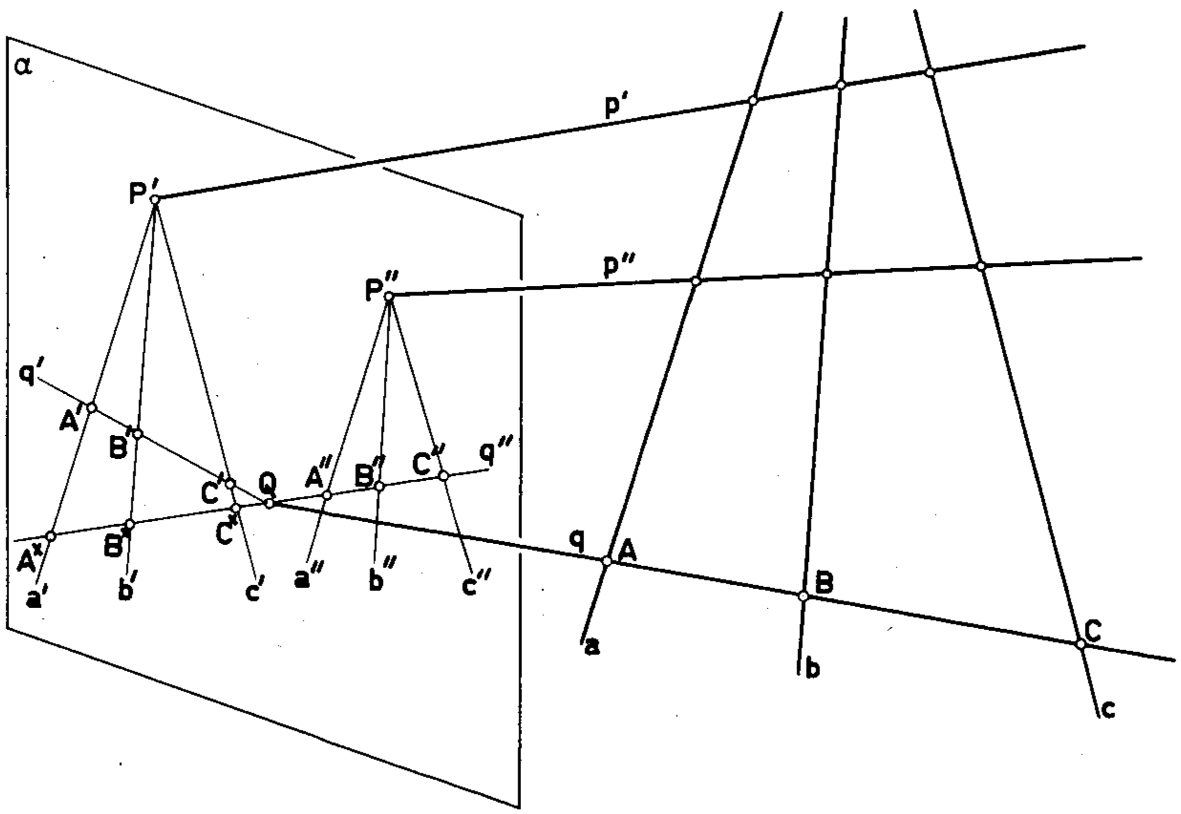
Projecteer eveneens a, b, c en q in de richting p" op α, dit geeft a", b", c" door P" en q" door Q.

De snijpunten van q met a, b, c zijn achtereenvolgens A, B, C; de projecties van A, B, C zijn A', B', C' en A", B", C". q" snijdt a', b', c' in A*, B*, C*. Nu geldt: a' // a", b' // b", c' // c" (volgt uit a,b,c // α). $\Longrightarrow$ A"B" : B"C" = A*B* : B*C*.

Uit hetgeen bij affiniteit in hoofdstuk II.§5 werd opgemerkt volgt: A'A" // B'B" // C'C" $\Longrightarrow$ A'B' : B'C' = A"B" : B"C".

Maar dan geldt ook: A*B* : B*C* = A'B' : B'C', hetgeen volgens een bekende stelling uit de meetkunde alleen mogelijk is als q' // q". Maar q' en q" gaan door Q $\Longrightarrow$. Ze vallen samen.

Dus: de p'-projectie van q en de p"-projectie van q op α vallen samen $\Longrightarrow$ q // het vlak β dat de richtingen p' en p" bevat.



Dus uit: a, b, c kruisen elkaar } volgt: p, q, r kruisen elkaar
a, b, c // α } p, q, r // β

zodat geldt: de hyperbolische paraboloïde, voortgebracht door a, b en c, wordt ook voortgebracht door de door a, b en c voortgebrachte rechten p, q en r.

(Opmerking, in verband met de eenbladige hyperboloïde: het is nu duidelijk dat als a, b en c niét met één vlak evenwijdig zijn, dit met p, q en r ook niet het geval is).

De hyperbolische paraboloïde bevat dus twee stelsels rechten; door ieder punt van het oppervlak gaan er precies twee, één van ieder stelsel. Voor een oneindig ver punt van a voert de constructie van de snijlijn van a, b en c tot de oneindig verre rechte; dus bij de rechte a uit het ène stelsel hoort niet een lijn uit het andere stelsel die ermee evenwijdig is, in tegenstelling tot de eenbladige hyperboloïde. De genoemde vlakken α en β heten de richtvlakken.

Zowel voor een eenbladige hyperboloïde als voor een hyperbolische paraboloïde geldt: het raakvlak in een punt van het oppervlak is het vlak door de regels door dat punt.

Opgaven:

13. Van een hyperbolische paraboloïde zijn twee richtlijnen a en b, het bijbehorende richtvlak α en het richtvlak β gegeven. Construeer enige voortgebrachte rechten.

14. Construeer in een willekeurig punt van de paraboloïde uit 13 het raakvlak.

15. Construeer in een willekeurig punt van de hyperboloïde van blz. III.23 het raakvlak.

8. Het axonometrisch beeld van de cirkel

Een in een vlak α gelegen cirkel γ heeft een axonometrische projectie γ_a die affien verwant is met de neerslag γ_n van γ die men verkrijgt door α om α_τ in τ neer te slaan. Als α niet loodrecht op τ staat is γ_a (zie hoofdstuk II, §4) dus een ellips. En algemener: het axonometrisch beeld van een ellips ε die ligt in een vlak α dat niet loodrecht op τ staat is een ellips ε_a die met ε_n affien verwant is.

Opgave 16.
Neem XY = 8, XZ = 7, YZ = 9.
Zij γ de ingeschreven cirkel van Δ OXY.
Construeer de toppen en nog enige punten met de bijbehorende raaklijnen van γ_a.

Opgave 17.

Neem XW = 3, YW = 9, ZW = 10
Zij γ de ingeschreven cirkel van Δ XYZ, en zij γ_1 de projectie van γ op het XOY vlak; construeer (door het XOY vlak in τ neer te slaan) voldoende elementen van γ_1 in ware grootte om γ_1 te kunnen schetsen.
Merk op dat γ en γ_{1n} affien verwant zijn: γ is parallel-projectie van γ_1 in τ, γ_{1n} de neerslag van γ_1 in τ.

HOOFDSTUK IV

KROMMEN EN OPPERVLAKKEN

1. Ruimtekrommen

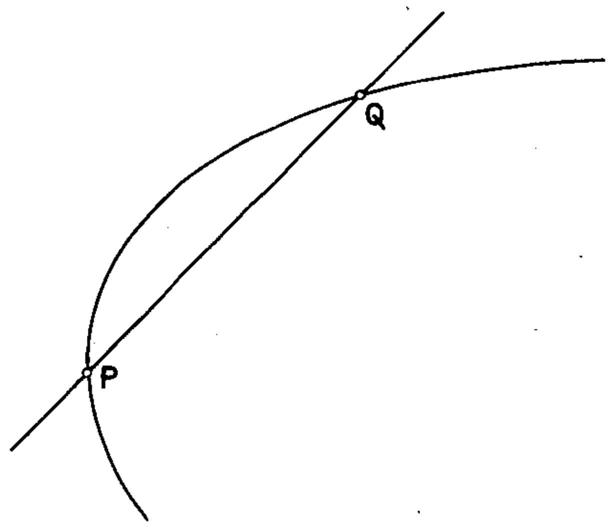
Een kromme wordt in de ruimte R_3 gegeven door een parametervoorstelling:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

of korter

$$\underline{x} = \underline{x}(t).$$

Een kromme kan wel recht zijn: $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}\,t$. Indien een kromme niet recht is, zijn we geïnteresseerd in de raaklijn; deze vatten we op als de limiet van de lijn door een variabele koorde: als we de raaklijn in $P = (x_o\ y_o\ z_o)$ willen kennen (waarin $\underline{x}_o = \underline{x}(t_o)$) nemen we punten Q_t op de kromme en laten $Q_t \to P$, d.w.z. $t \to t_o$. De vector $(x_t - x_o,\ y_t - y_o,\ z_t - z_o)$ geeft de richting van PQ; als $t \to t_o$ gaat hij evenwel naar $\underline{O}$, en weten we over de richting ervan nog niets.



Maar ook

$$\left(\frac{x(t)-x(t_o)}{t-t_o},\ \frac{y(t)-y(t_o)}{t-t_o},\ \frac{z(t)-z(t_o)}{t-t_o}\right)$$

is richtingsvector voor de lijn door P en Q_t; als nu $t \to t_o$ nadert deze tot $(\dot{x}(t_o),\ \dot{y}(t_o),\ \dot{z}(t_o)) = \underline{\dot{x}}_o$. Dus de raaklijn in P is, mits $\underline{\dot{x}}_o \neq \underline{O}$:

$$p:\ \underline{x} = \underline{x}_o + \lambda\,\underline{\dot{x}}_o\ .$$

Uit de lineaire algebra weten we dat de vergelijking van een vlak door $P = (x_0, y_0, z_0)$ met richtingsvectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ luidt

$$\det(\underline{x} - \underline{x}_0, \underline{a}, \underline{b}) = 0$$

of $$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Brengen we nu een vlak aan door P, de raaklijn p in P en een punt $Q_t = (x(t), y(t), z(t))$ der kromme, dan luidt de vergelijking bijgevolg:

$$\det(\underline{x} - \underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0, \underline{x}(t) - \underline{x}_0) = 0 .$$

Voor $\underline{x}(t) - \underline{x}_0$ schrijven we (i.v.m. de formule van Taylor)

$$\underline{x}(t) - \underline{x}(0) = (t - t_0)\dot{\underline{x}}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\ddot{\underline{x}}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!} \cdot \underline{r} ,$$

waarin $\lim_{t \to t_0} \underline{r} = \dddot{\underline{x}}(t_0)$, zodat de vergelijking ook geschreven kan worden als:

$$\det(\underline{x} - \underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0, \ddot{\underline{x}}_0 + \frac{(t-t_0)\,\underline{r}}{3!}) = 0 .$$

Laten we nu weer $t \to t_0$, dan krijgen we mits $\dot{\underline{x}}_0$ **en** $\ddot{\underline{x}}_0$ **onafhankelijk zijn het vlak met vergelijking:**

$$\det(\underline{x} - \underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0, \ddot{\underline{x}}_0) = 0$$

of parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda\dot{\underline{x}}_0 + \mu\ddot{\underline{x}}_0 .$$

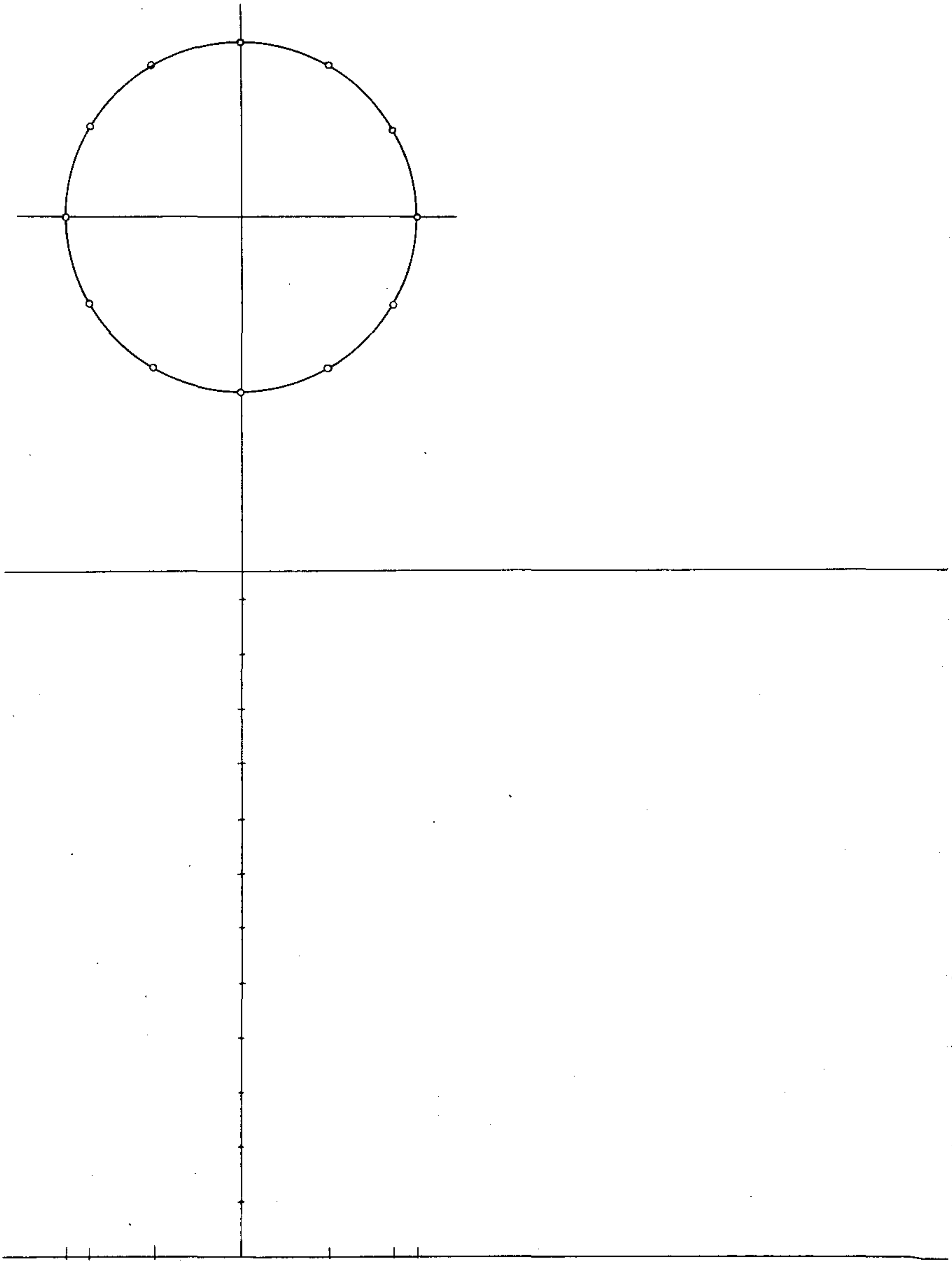
Dit vlak heet het <u>osculatievlak</u> van de kromme in P; de richtingsvectoren zijn $\dot{\underline{x}}_0$ en $\ddot{\underline{x}}_0$; de steunvector is $\underline{x}_0$.

Wij lichten dit toe met de schroeflijn:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= a \sin \varphi \\ z &= b \cdot \varphi \end{aligned}\right\} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi .$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ a \cos \varphi \\ b \end{pmatrix} \qquad \ddot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

We tekenen de schroeflijn met $a = \frac{10}{\pi}$ cm, $b = \frac{12}{2\pi}$ cm. (Opm.: $\frac{10}{\pi} = 3{,}2$).

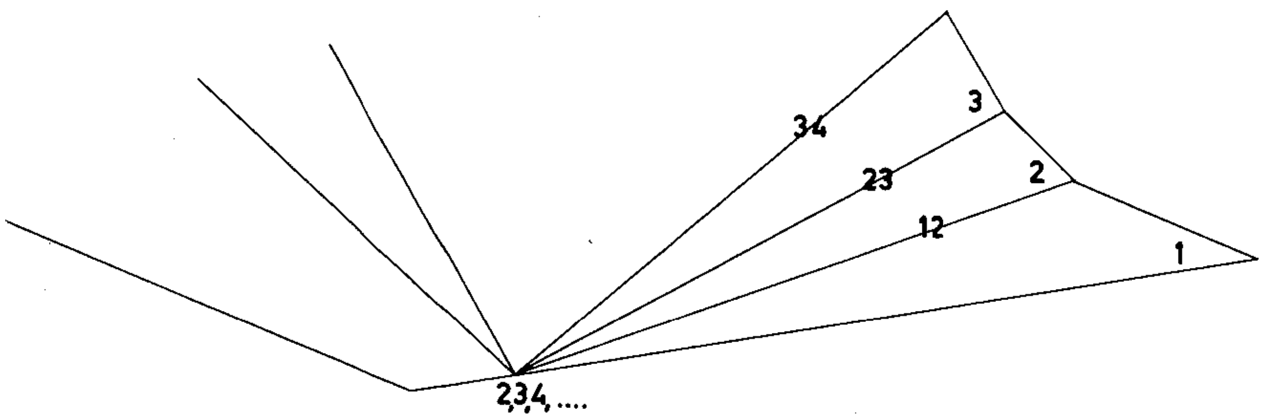


2. Ontwikkelbare regeloppervlakken

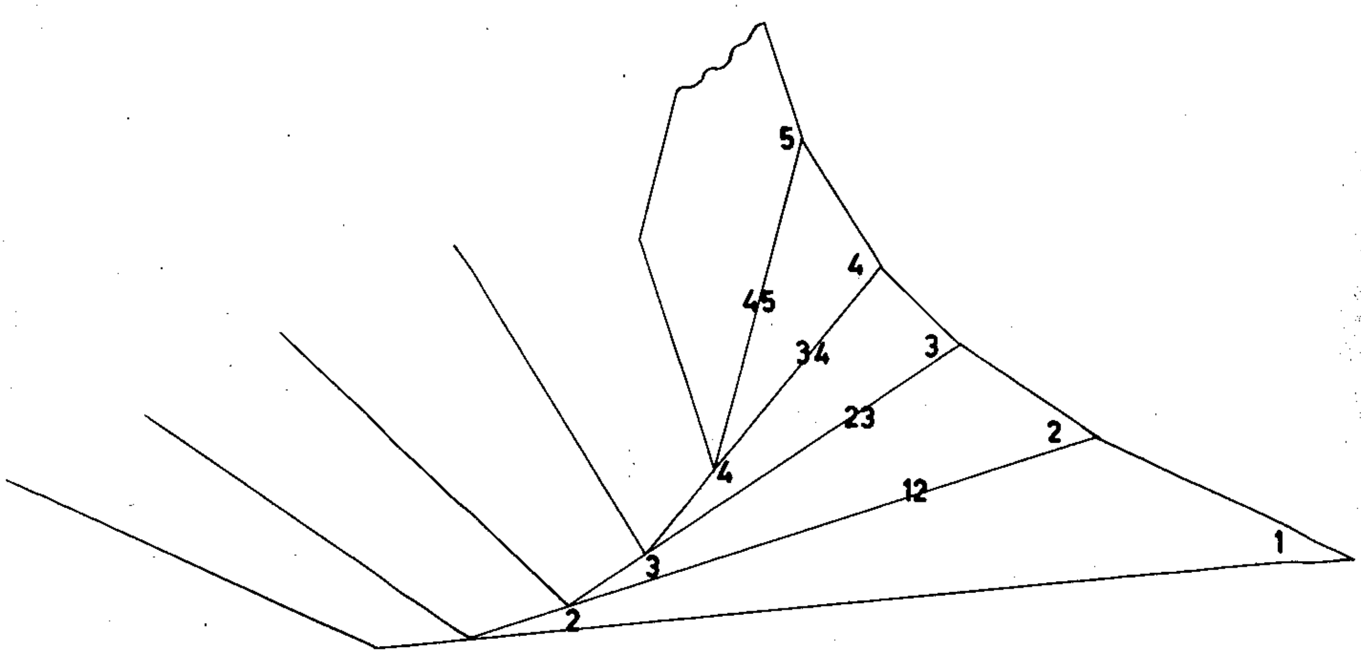
Van de regeloppervlakken zijn bekend: kegel, cylinder, eenbladige hyperboloïde, hyperbolische paraboloïde.

Een regeloppervlak heet ontwikkelbaar als het de eigenschap heeft dat langs iedere regel het raakvlak vast is. Dus kegel en cylinder zijn ontwikkelbaar, eenbladige hyperboloïde en hyperbolische paraboloïde zijn het niet. Het regelvlak is de omhullende van het stelsel raakvlakken.

Beschouwen we nu een stelsel raakvlakken van de kegel; noem er een stelletje 1,2,3,4..., de snijlijnen 12,23,34..., de snijpunten hiervan weer 2,3,4...



Ze gaan alle door één punt; ook als de kegel een cylinder is. Maar we kunnen ons voorstellen dat een stelsel raakvlakken de eigenschap heeft dat die snijpunten niet samenvallen:



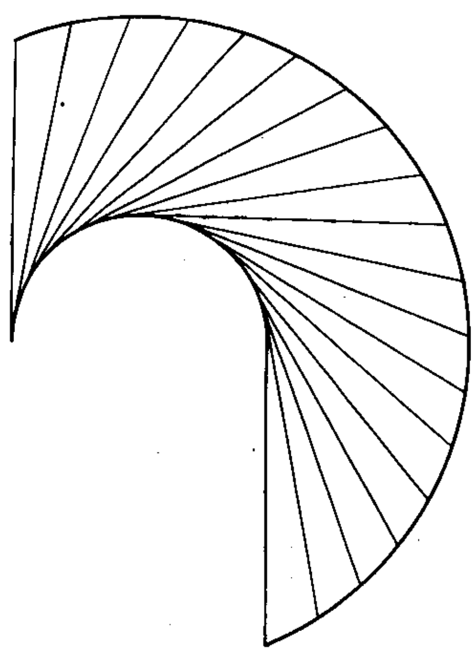
De punten 2,3,4... enz. vallen nu niet samen; ze zijn bij benadering punten van een kromme die men de keerkromme van het oppervlak noemt.

De rechten 12,23,... enz. zijn bij benadering raaklijnen aan deze keerkromme, de vlakken 1,2,... zijn bij benadering osculatievlakken van deze keerkromme.

Zo kunnen we algemeen een ontwikkelbaar regelvlak vormen: neem een willekeurige kromme in R_3; de "m.pl." der raaklijnen is een ontwikkelbaar oppervlak.

Nu zien we ook waarom het oppervlak ontwikkelbaar heet; we kunnen de vlakken 1,2,3,4... weer in 1 "vouwen", beter: uitrollen.

Men kan van karton op deze manier een model van een raaklijnenoppervlak maken, door een kromme γ, bijvoorbeeld een cirkelboog, te tekenen en een stel raaklijnen in te snijden.



3. De snijkromme van twee kegels

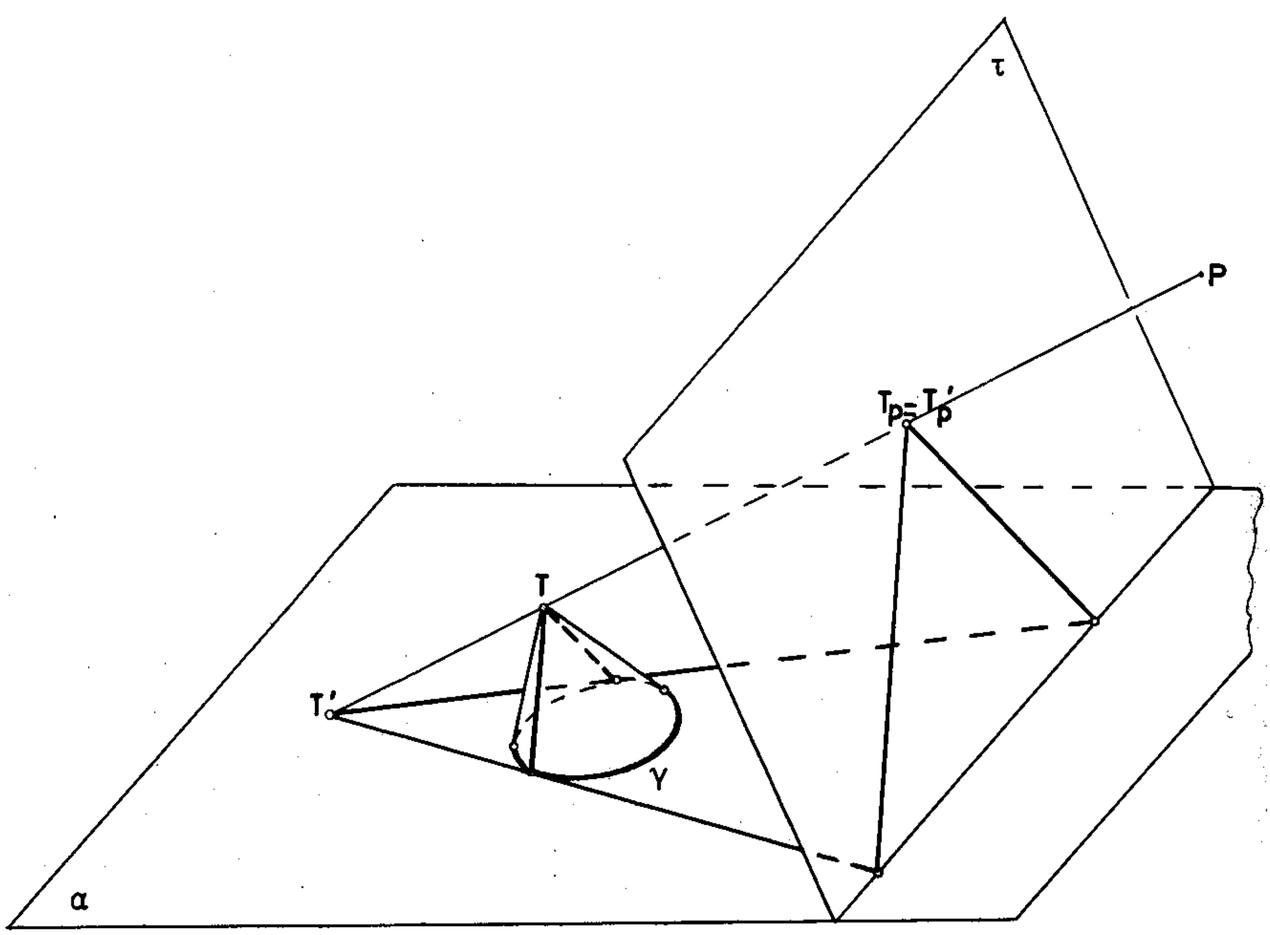
Onder een kegel K verstaan we het (ontwikkelbare) regeloppervlak dat wordt voortgebracht door een richtkromme γ en een (eindig of oneindig) punt T, de top.

We kiezen voor γ een vlakke kromme, het vlak van γ noemen we α. (In de practijk is dit vaak één der vlakken π_1, π_2, π_3, τ.)

Nu noemen we het centrum van de projectie P (indien P oneindig is, spreken we van de richting p).

1) De schijnbare omtrek

Allereerst zijn we geïnteresseerd in de raakvlakken aan de kegel die door P gaan (of // p zijn). Daarvan zijn er in het algemeen precies twee. Hun snijlijnen met τ (projecties van beschrijvenden) vormen samen de schijnbare omtrek van K. **Deze snijlijnen zijn de projecties van de zogenaamde uiterste beschrijvenden van K.**
Bij de constructie ervan speelt het punt T' een rol: T' is het punt van α dat dezelfde projectie heeft als de top T. De raaklijnen uit T', in α aan γ getrokken, liggen in de gevraagde raakvlakken; en de τ-doorgangspunten van deze raaklijnen liggen dus op de schijnbare omtrek.



Voorbeeld (axonometrie, formaat 16 x 25).

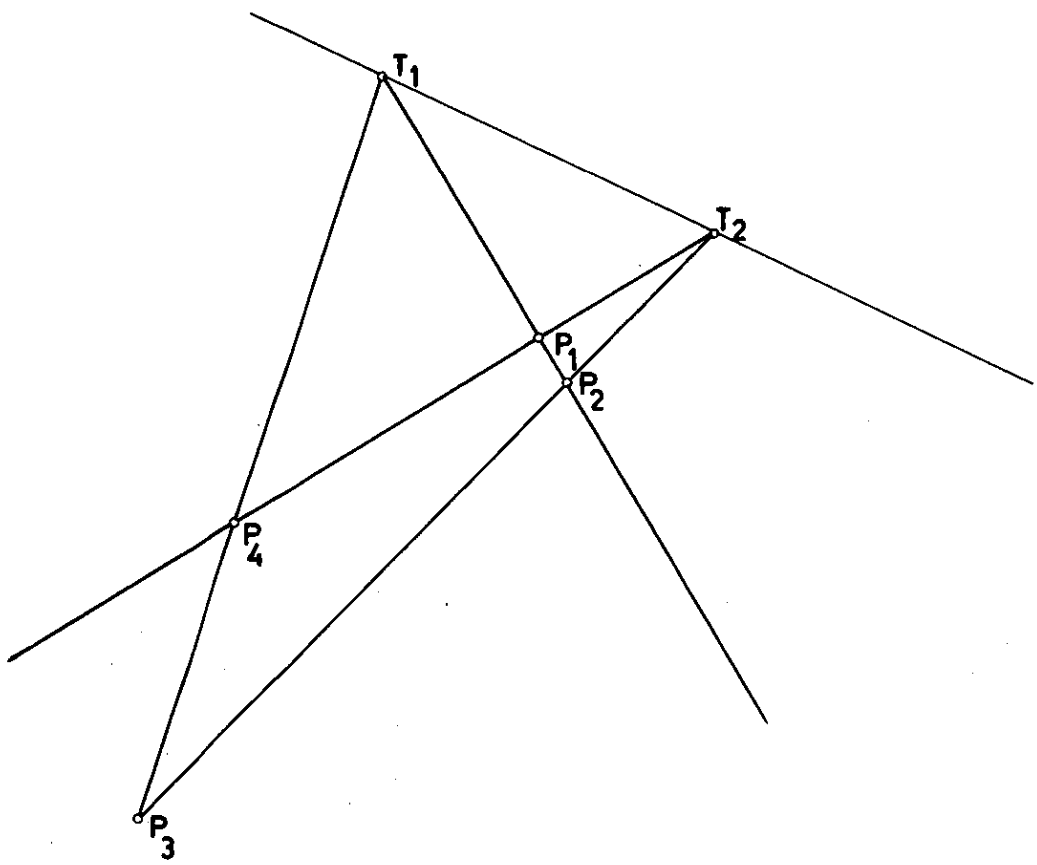
Neem de zijde XY van de tafereeldriehoek evenwijdig aan de korte zijden van het papier, 16 van de onderrand. X ligt 5 van links. XY = 8, YZ = 9, XZ = 7. V is het voetpunt van de loodlijn uit Y op XZ.
In het XOY vlak ligt een cirkel γ met σ als middelpunt en Xσ als straal.
γ is richtcirkel van een kegel K met top Z, en van een cilinder C met beschrijvenden // σV.
Construeer de uiterste beschrijvenden van K en C.

2) De snijkromme van twee kegels, algemeen

In een vlak α zijn gegeven twee richtkrommen γ_1 en γ_2; we nemen voor γ_1 en γ_2 zogenaamde kegelsneden, gewoonlijk cirkels of ellipsen. T_1 en T_2 liggen niet in α; S is het snijpunt van α met T_1T_2. K_1 en K_2 zijn de kegels bepaald door T_1 en γ_1, respectievelijk T_2 en γ_2.

Een punt P ligt op de snijkromme δ d.e.s.d. als $P \in K_1$ en $P \in K_2$; $P \in K_i$ d.e.s.d. als $P \in$ een beschrijvende van K_i.
$\Longrightarrow P \in$ snijkromme δ d.e.s.d. als P snijpunt is van een beschrijvende van K_1 èn een beschrijvende van K_2;
$\Longrightarrow$als $P \in \delta$ hoort er bij P een vlak ε dat deze beschrijvenden bevat, een vlak door T_1 en T_2, een vlak dat de lijn T_1T_2 bevat.

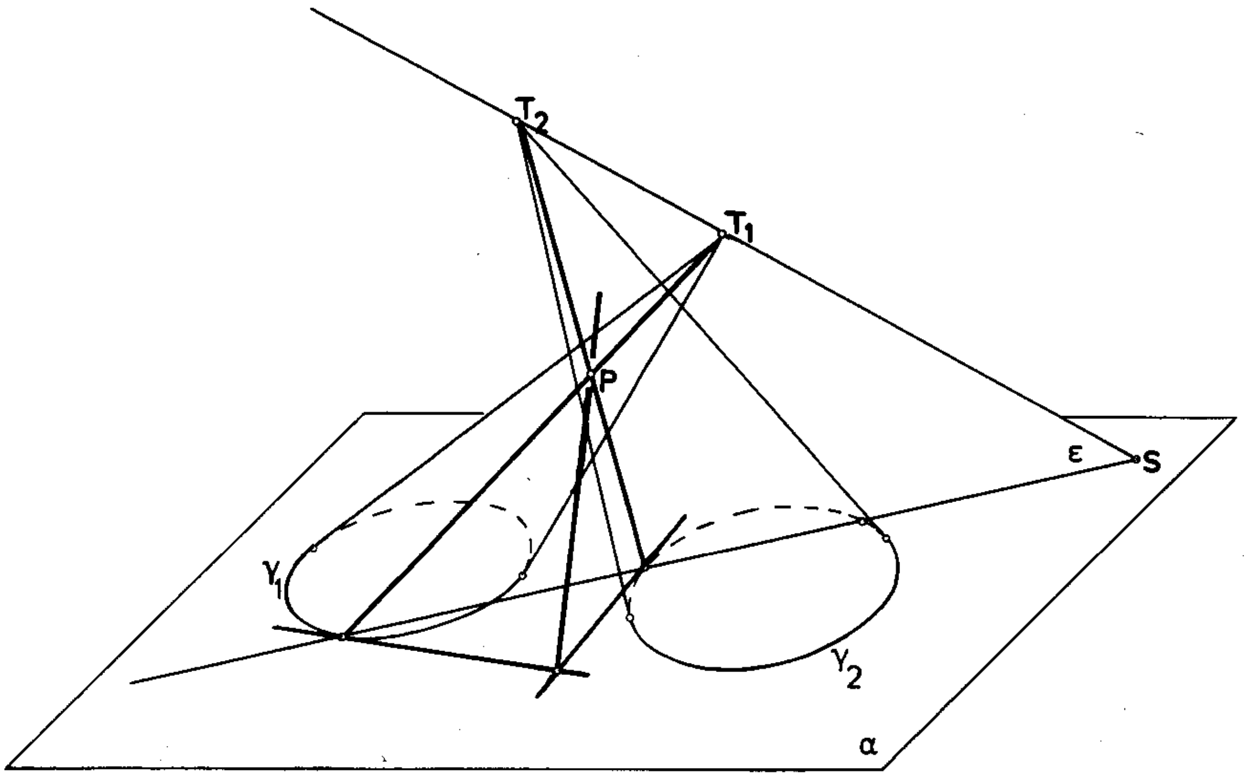
Omgekeerd: brengt men een vlak ε door T_1T_2, dan vindt men daarin (hoogstens 4 of oneindig veel) punten van δ. Daarom noemt men de kromme δ van de vierde graad.



Er zijn echter veel uitzonderingen op de regel dat men in ε 4 punten vindt.

Alvorens daartoe over te gaan bespreken we eerst nog hoe de raaklijn in een punt $P \in \delta$ wordt gevonden:

$\delta \subset K_i$, dus de raaklijn aan δ ligt in het raakvlak aan K_i in P $\Longrightarrow$
de raaklijn is de snijlijn der raakvlakken aan K_1 en K_2 in P.



We onderscheiden nu 3 gevallen:

$T_1 T_2$ is noch van K_1, noch van K_2 beschrijvende.
(d.w.z. $T_1 \notin K_2$ en $T_2 \notin K_1$).

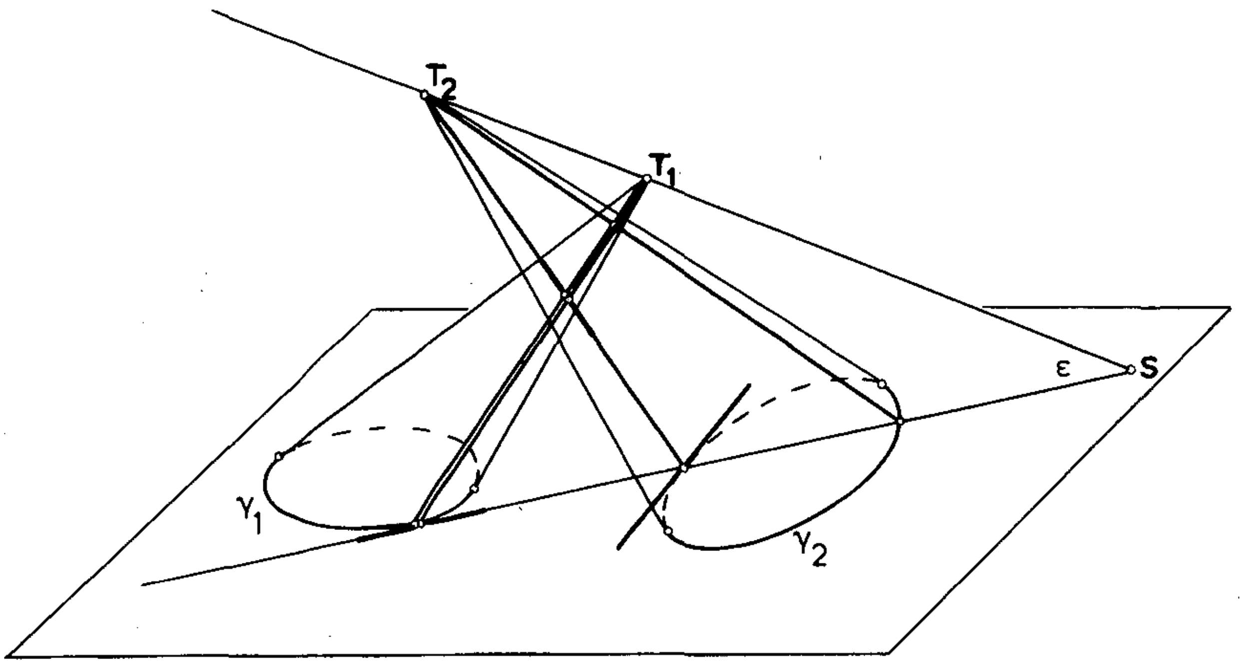
$T_1 T_2$ is van K_1 beschrijvende, maar niet van K_2.
(d.w.z. $T_2 \in K_1$, maar $T_1 \notin K_2$).

$T_1 T_2$ is van K_1 èn K_2 beschrijvende.
(d.w.z. $T_1 \in K_2$ en $T_2 \in K_1$).

Verder bespreken we nog het geval dat een der punten P in het oneindige ligt.

3) T_1T_2 is noch van K_1, noch van K_2 beschrijvende

Als nu ε raakt aan K_1, maar niet aan K_2, vinden we in ε slechts 2 punten; de raaklijnen in deze punten zijn de beschrijvenden van K_2.



Deze situatie kan zich in het algemeen 4 × voordoen.

Als ε door merkwaardige ligging der kegels raakt aan K_1 èn aan K_2, vallen de vier punten allemaal samen tot één; dan is dat punt een dubbelpunt der kromme δ ; de raaklijnen in dat punt kunnen nu niet meer geconstrueerd worden met bovenstaande methode.

Voorbeeld:

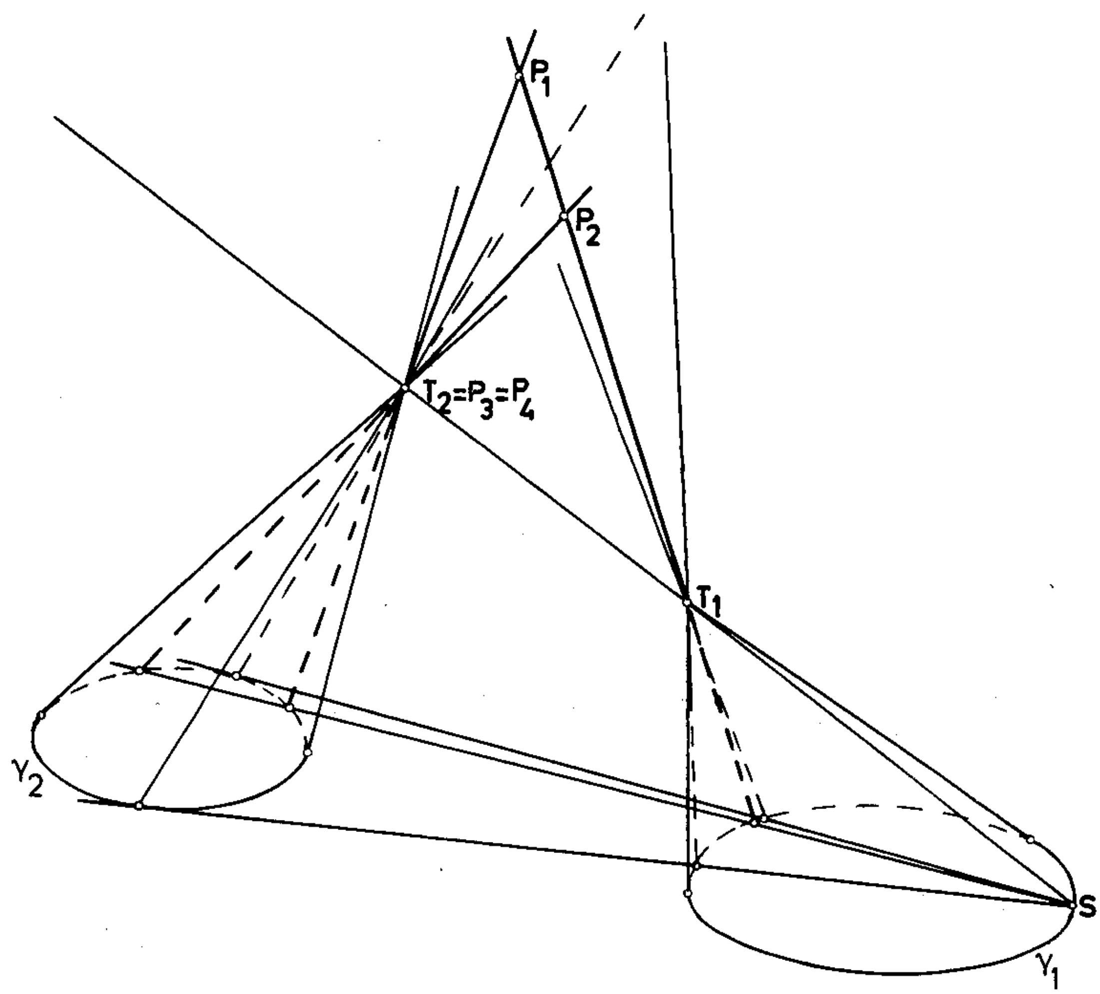
construeer de doorsnede van twee loodrecht op elkaar staande cylinders, met middellijnen 7 en 2, die elkaar inwendig raken (orthogonale projectie).

Evenzo met middellijnen 7 en 3½,
7 en 5 ,
7 en 7 .

Construeer in ingenieurs axonometrie (XY = 18) de doorsnede van twee loodrecht op elkaar staande cylinders met stralen 4; neem als assen de x-as en de z-as.

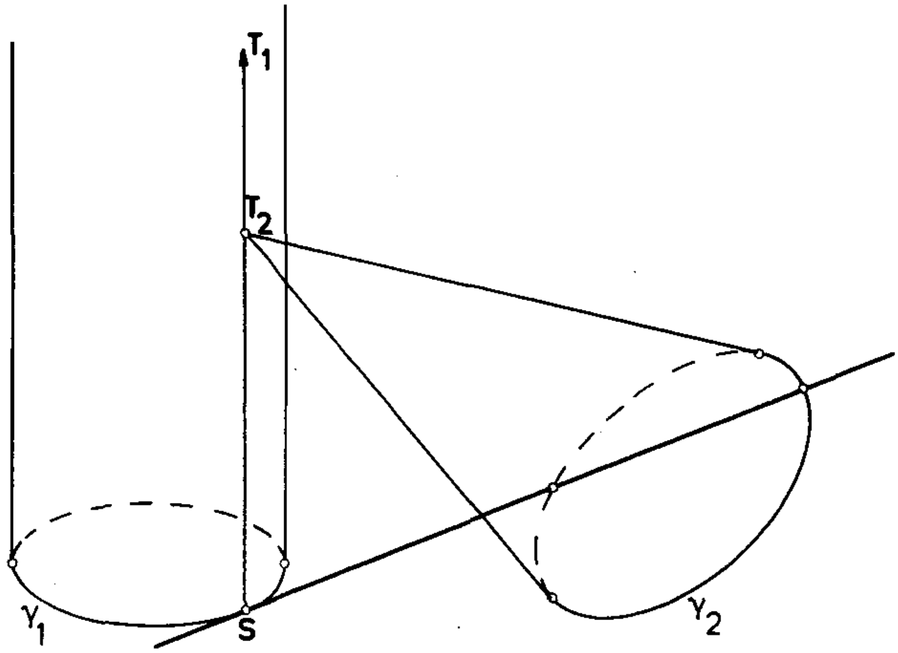
Als er twee vlakken zijn die raken aan K_1 èn K_2, zijn er ook twee dubbelpunten; dan is de kromme δ ontaard, in twee vlakke krommen van de tweede graad.

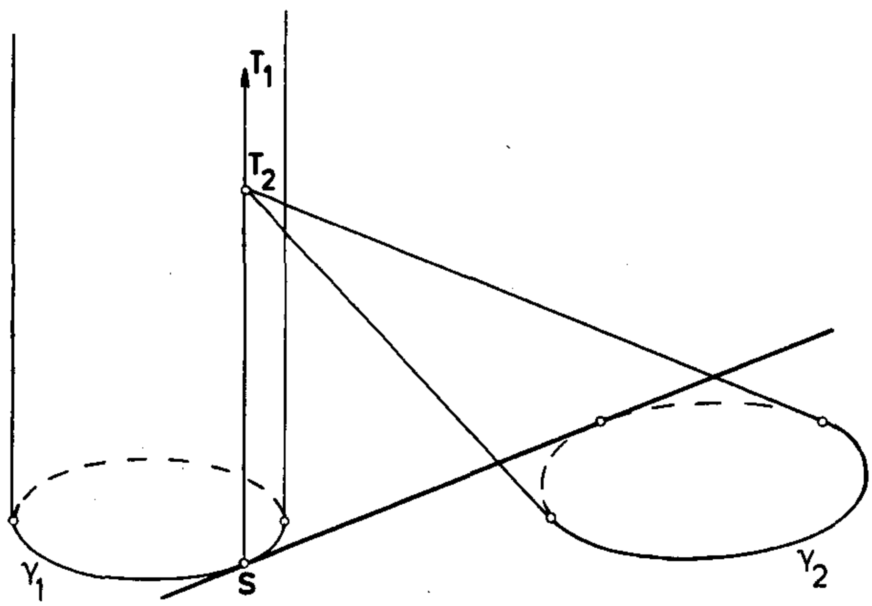
4) T_1T_2 is beschrijvende van K_1, maar niet van K_2 ($T_2 \in K_1$)

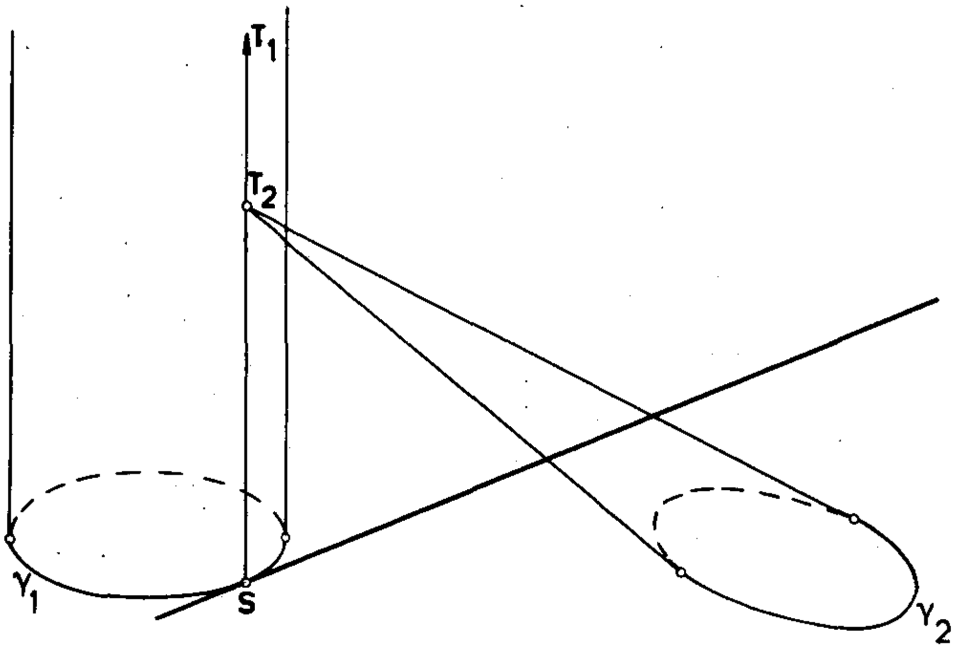


Nu vallen twee van de vier punten samen met T_2, d.w.z. T_2 ligt op δ. De raaklijn in T_2 aan δ is volgens de vorige constructie niet te bepalen: in T_2 bestaat geen raakvlak aan K_2.

Neem nu in T_2 het raakvlak aan K_1; indien dit K_2 snijdt volgens een of twee rechten zijn dit raaklijnen aan δ; δ heeft dus in T_2 een dubbelpunt, keerpunt of geïsoleerd punt, al naar gelang de raaklijn in S aan γ_1 met γ_2 twee, een of nul punten gemeen heeft.


T1
T2
γ1
S
γ2


T1
T2
γ1
S
γ2

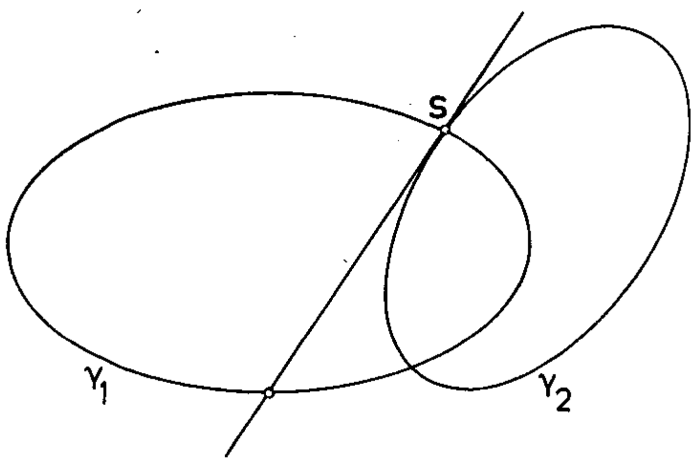

T1
T2
γ1
S
γ2

5) <u>T_1T_2 is beschrijvende van K_1 en van K_2</u>

Dan behoort T_1T_2 tot δ; het andere stuk van δ is dan een derdegraads ruimtekromme.

De in α gelegen richtkrommen γ_1 en γ_2 snijden elkaar in S; $\Longrightarrow$ ze snijden elkaar in nog één punt (eventueel raken ze elkaar in S).

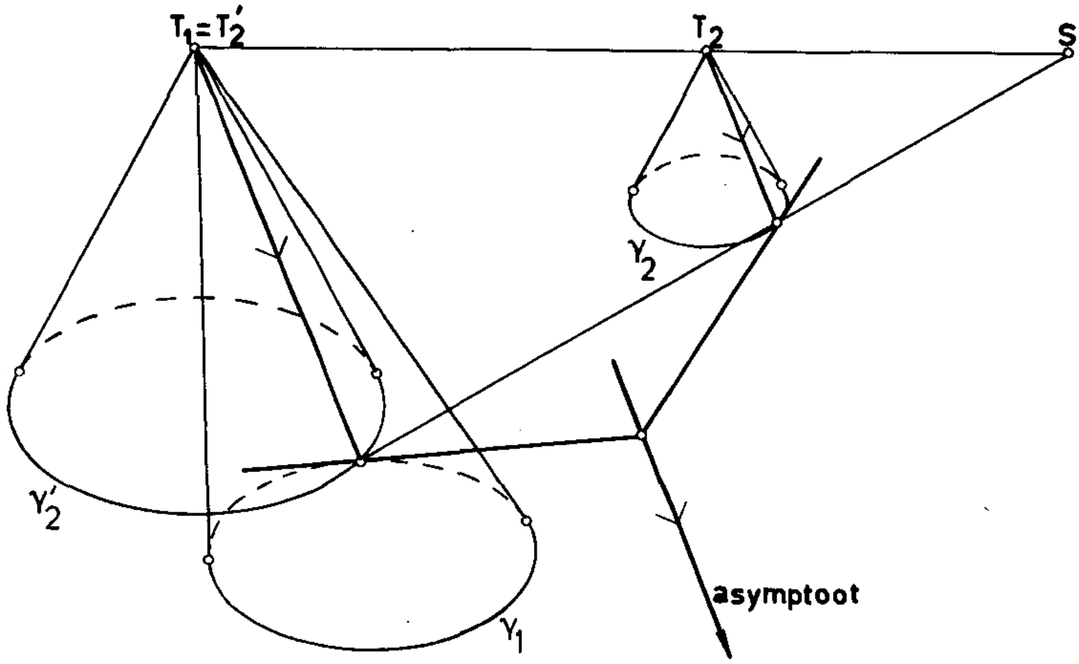
Volgens het voorgaande (4) zijn nu T_1 en T_2 dubbelpunten van δ, dus punten op de derdegraads ruimtekromme; de raaklijn in T_1 vindt men weer door in T_1 het raakvlak aan K_2 te snijden met K_1; de beschrijvende van K_1 is raaklijn in T_1 aan de kromme.



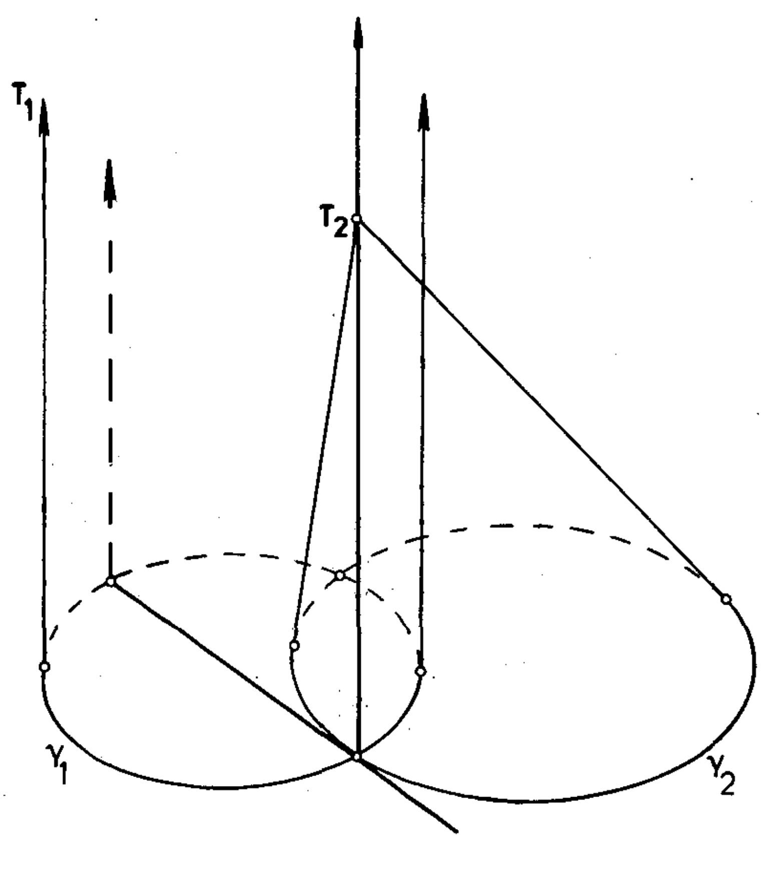
6) <u>De asymptoot</u>

Als een der punten P in het oneindige ligt, is er een beschrijvende van K_1 // een beschrijvende van K_2.

P heet nu <u>asymptotische richting</u>; de raaklijn in P heet <u>asymptoot</u>; deze wordt geconstrueerd zoals gebruikelijk. De enige moeilijkheid is dus om de // beschrijvenden te bepalen; daartoe verplaatsen we K_2 // zichzelf tot K_2' tot T_2 en T_1 samenvallen; de beschrijvenden die K_2' en K_1 gemeen hebben, geven de beschrijvenden van K_2 en K_1 die evenwijdig zijn.



In het bijzonder, als K_1 een cylinder is, en T_1T_2 beschrijvende is van K_1 èn K_2: dan is de asymptoot tevens raaklijn aan de kromme in T_1; dus de asymptoot kan dan gevonden worden door het raakvlak langs T_1T_2 aan K_2 te snijden met K_1.



4. Geodeten

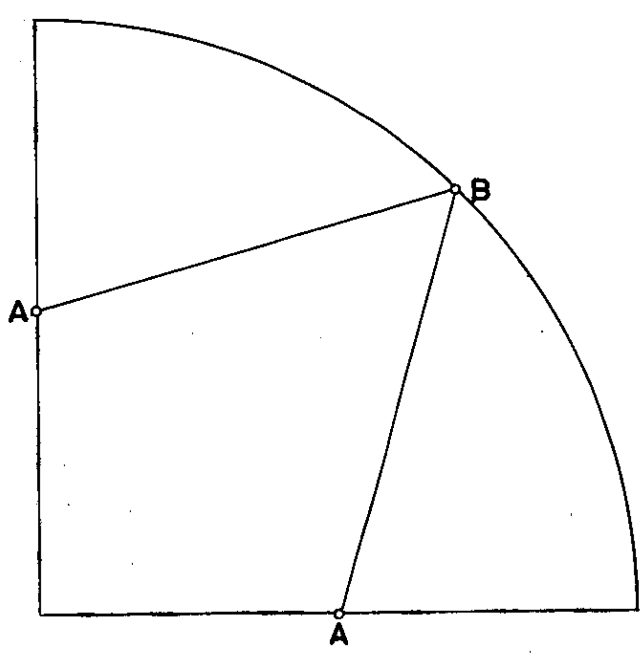
Een op een oppervlak liggende kromme heet een geodeet van het oppervlak als voor elk tweetal naburige punten P, Q van de kromme geldt dat de kortste verbinding op het oppervlak tussen P en Q door de kromme zelf wordt geleverd. (Een gelijkwaardige eigenschap is: in elk punt van de kromme is het osculatievlak loodrecht op het oppervlak.)

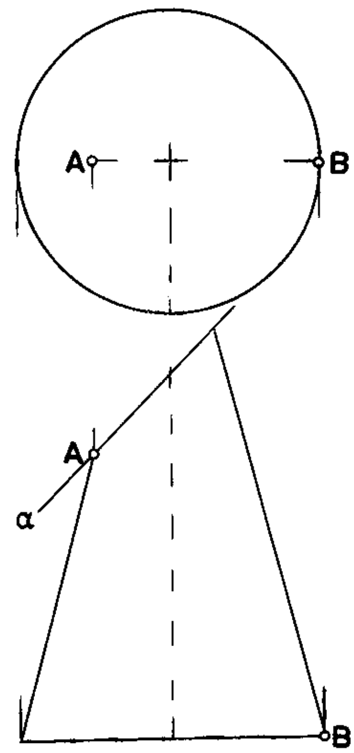
Van een plat vlak zijn de geodeten de rechte lijnen, van een bol zijn het de grote cirkels. Het is duidelijk dat de geodeten van een ontwikkelbaar oppervlak in de vlakke uitslag van het oppervlak de rechte lijnen zijn.

Voorbeeld:

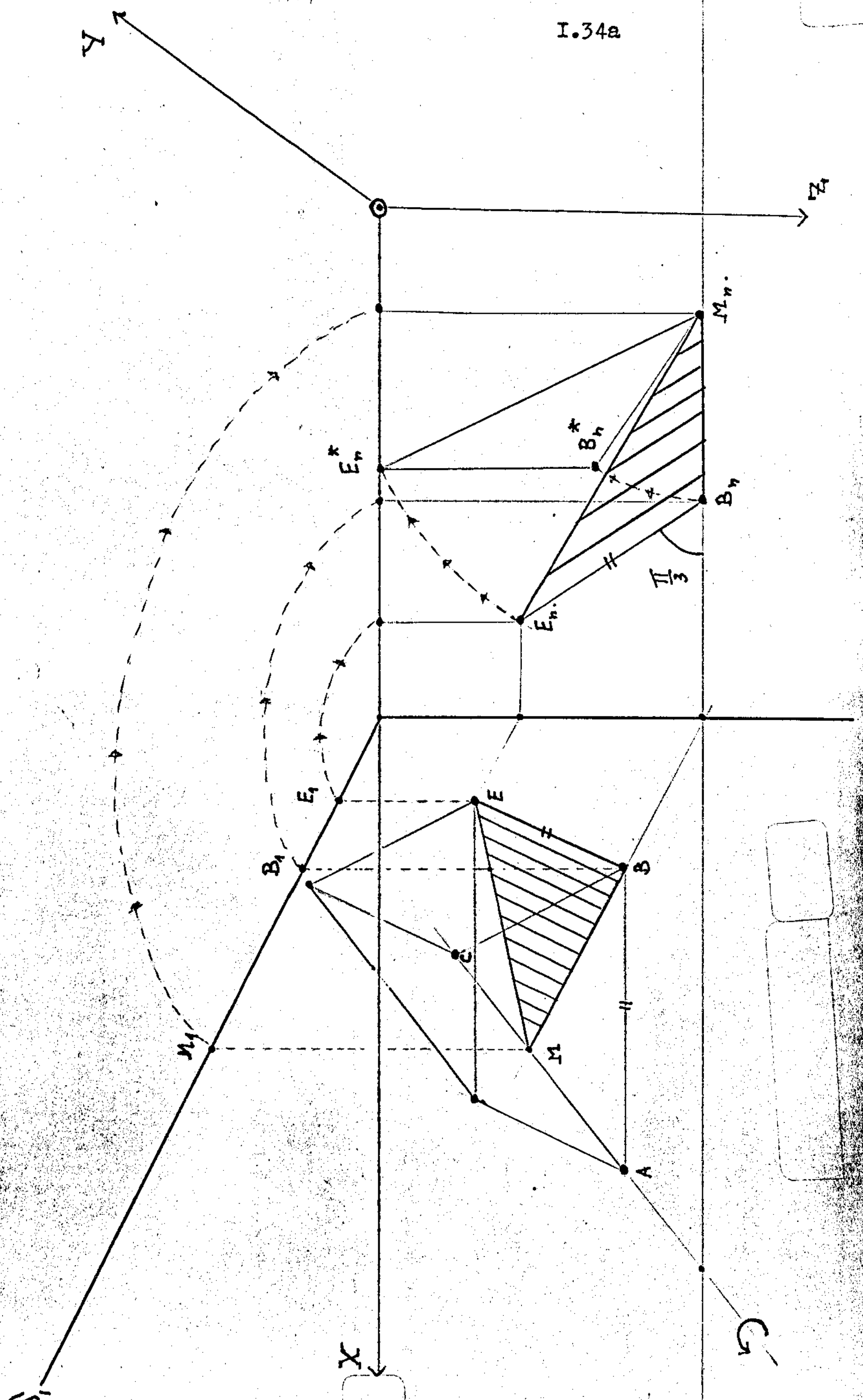
de volgende figuren zijn de uitslag en de projecties van een rechte cirkelkegel, waarop twee punten A en B zijn gegeven. Er zijn twee geodeten die A en B verbinden. Deze zijn in de uitslag getekend.

1. Breng een van de geodeten over naar de beide projecties.
2. Teken ook de horizontale projectie van de ellips volgens welke het vlak α de kegel snijdt. α gaat door A, is loodrecht op het verticale projectievlak en maakt 45° met het horizontale projectievlak. Breng deze snijkromme vervolgens naar de uitslag over.

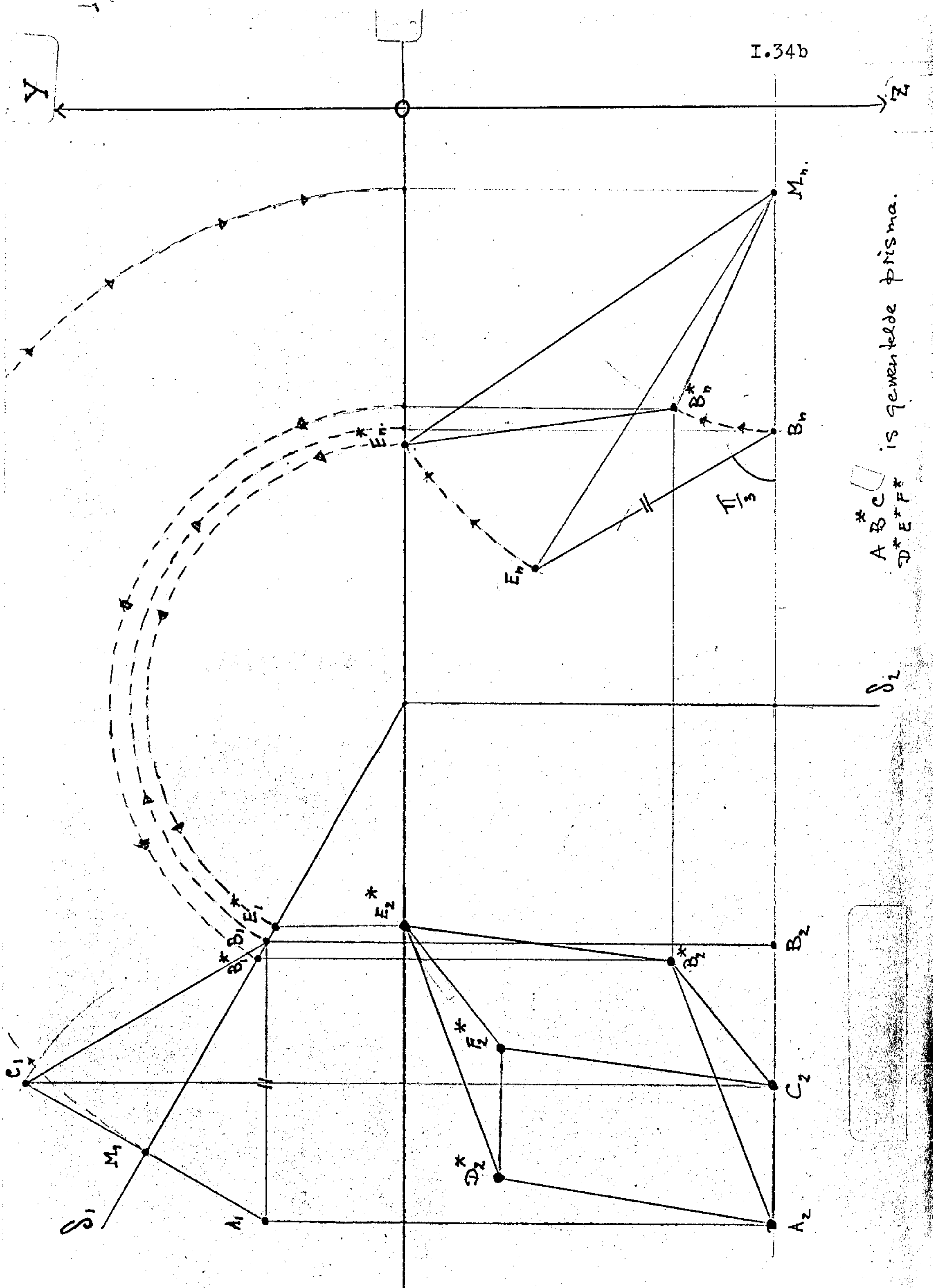




I.34a



Stereometr. tekening


Y
Z
X
O
M_n
B_n
B^*_n
E_n
E^*_n
$\pi/3$
S_2
S_1
C_1
M_1
A_1
B_1
B^*_1
E^*_1
E^*_2
B_2
B^*_2
F^*_2
C_2
D^*_2
A_2
$A B^* C$
$D^* E^* F^*$ is gewentelde prisma.

B.M.tekening

Orthogonale projectie — maten in cm

De X-as is evenwijdig aan de lange zijden van het tekenpapier en 15 verwijderd van de bovenkant. De oorsprong ligt 1 van de rechterzijde van het papier.
Gegeven zijn de punten A(28,0,6), B(37,5,0), C(25,0,0) en N(33,0,7).

1. Construeer de 1ste en 2de doorgang van het vlak α door de punten A, B en C, de 1ste en 2de projectie van de rechte ℓ door N loodrecht op het vlak α en de 1ste en 2de projectie van het snijpunt M van ℓ en α.

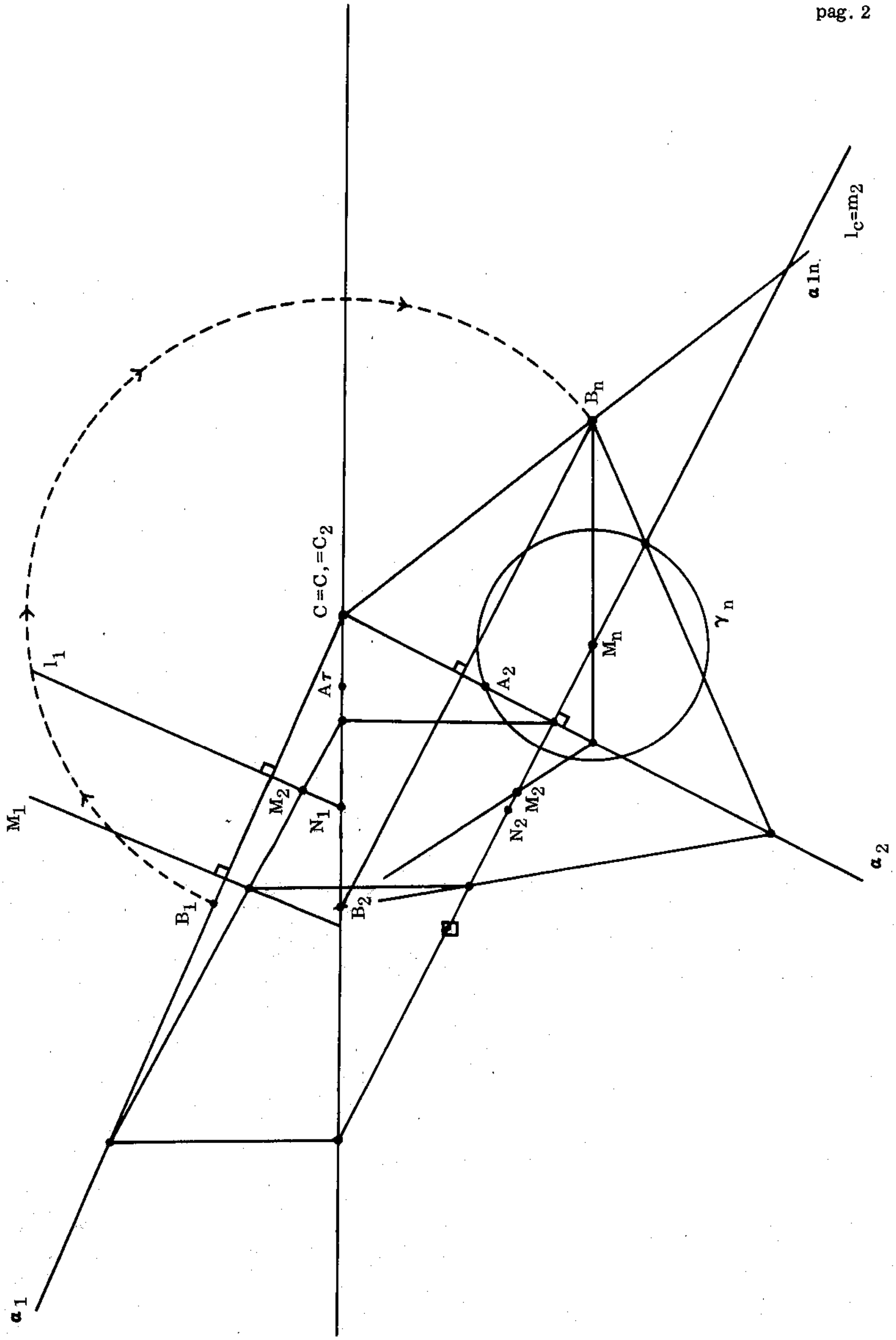
De rechte ℓ is de as van het cilinderoppervlak K waarvan de richtkromme γ een cirkel, met middelpunt M en straal $r = MA$, in α is. De lijn m is de beschrijvende die het verst verwijderd is van α_2.

2. Construeer de 1ste en 2de projectie van de lijn m. Doe dit door het vlak α zo neer te slaan in π_2, dat M_n rechts van α_2 komt te liggen.

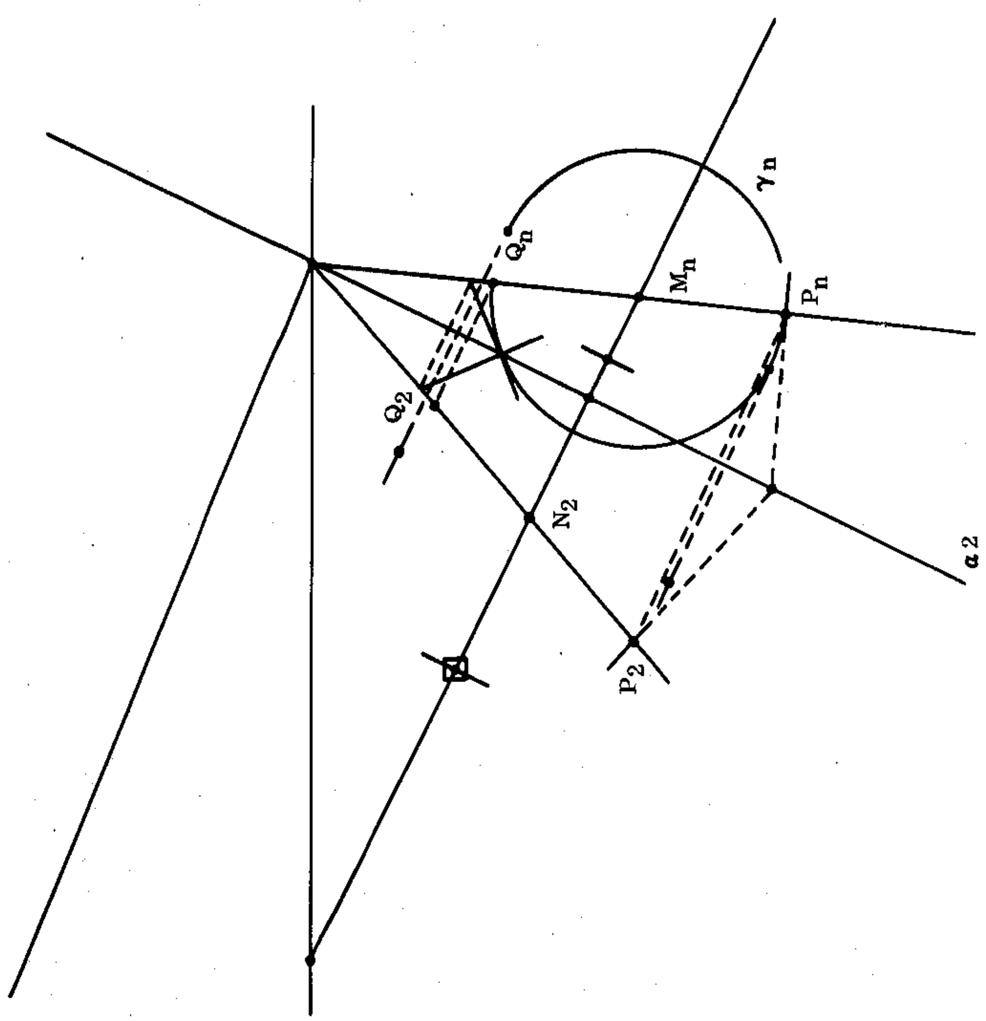
De snijkromme van het cilinderoppervlak K en π_2 heet ε. (ε is dus niet de tweede orthogonale projectie van γ.)

3. Construeer van de vlakke kromme ε :
   a) de hoofdassen en het middelpunt;
   b) de raaklijn in het punt A;
   c) de snijpunten P en Q van de rechte CN en de kromme ε ;
   d) de raaklijnen in de punten P en Q.

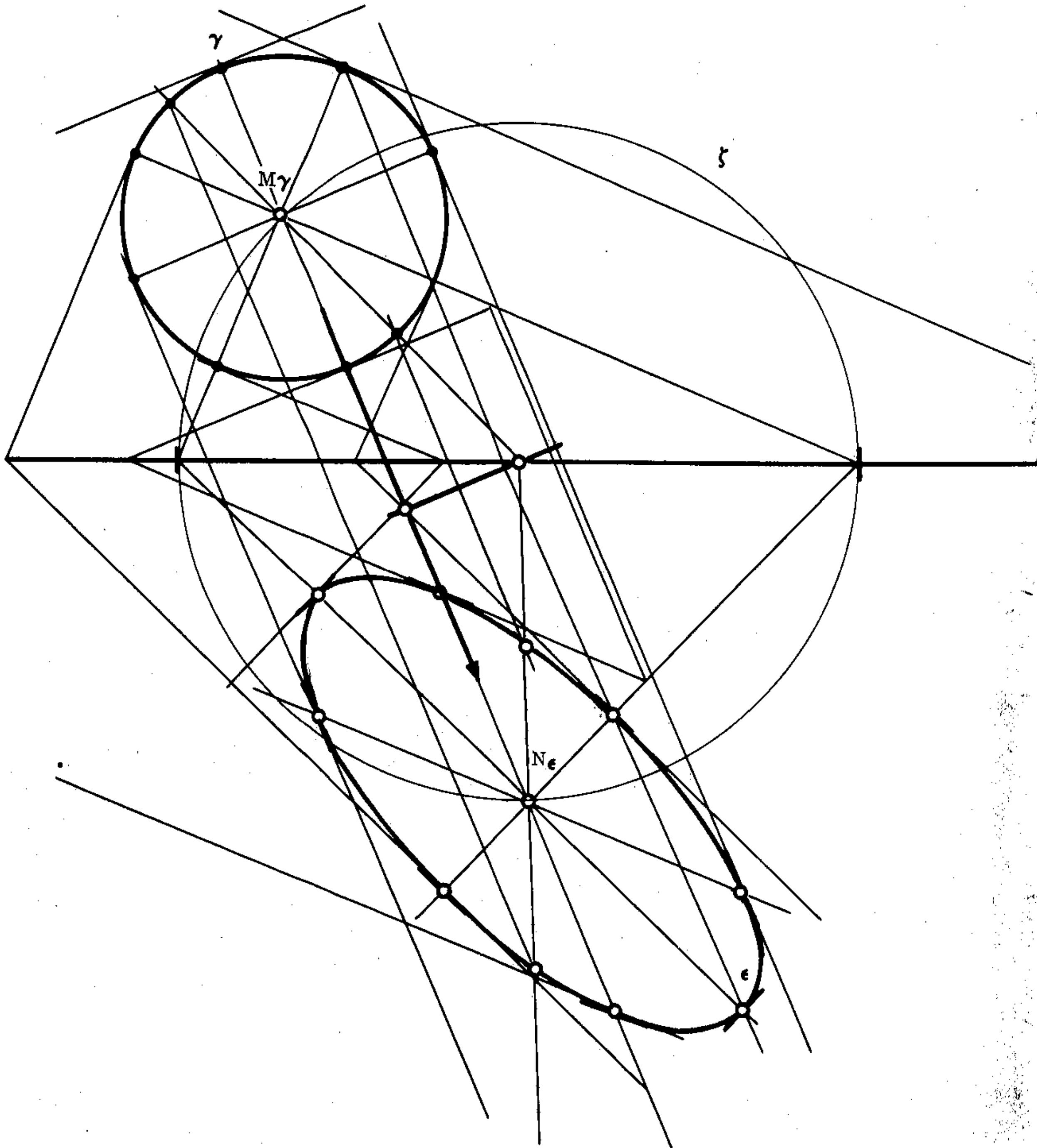
4. Schets de kromme ε door de verkregen punten.



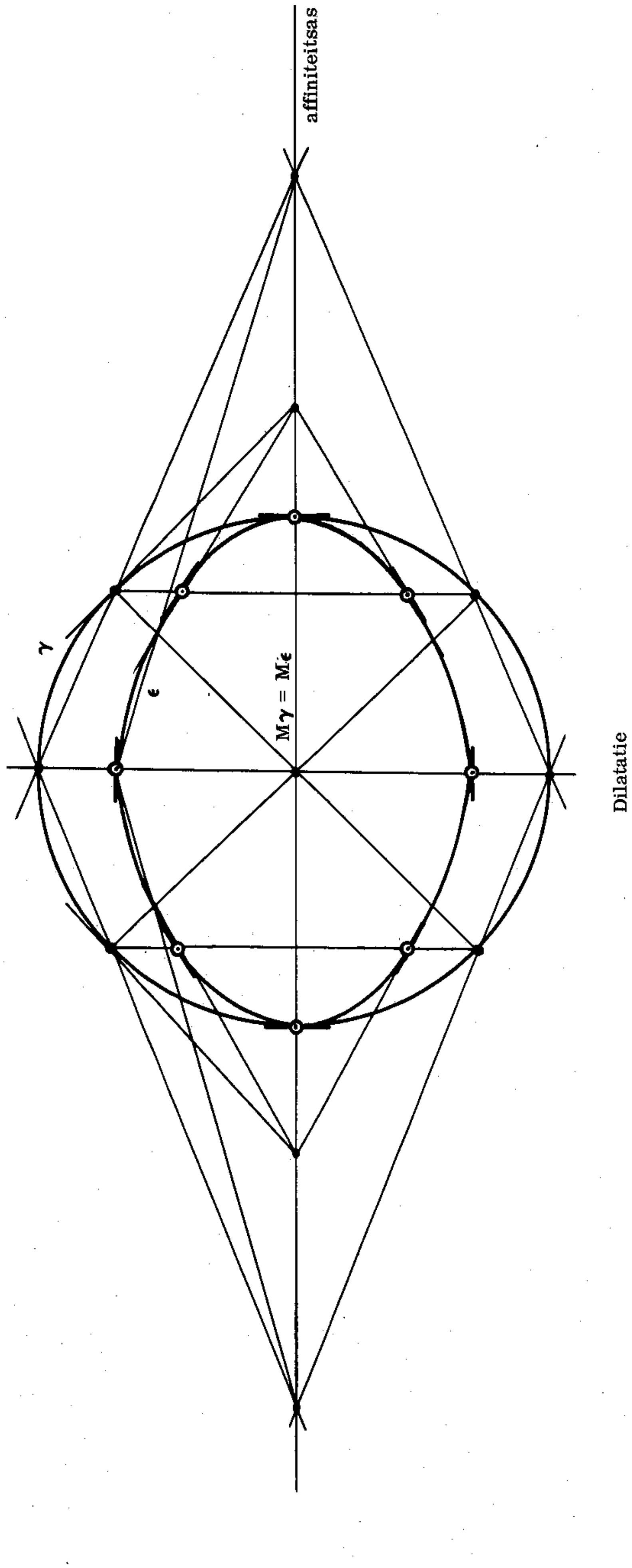
$l_C=m_2$
α_{1n}
B_n
$C=C_1=C_2$
γ_n
M_n
$A\tau$
A_2
l_1
M_1
M_2
N_1
N_2
M_2
B_1
B_2
α_2
α_1

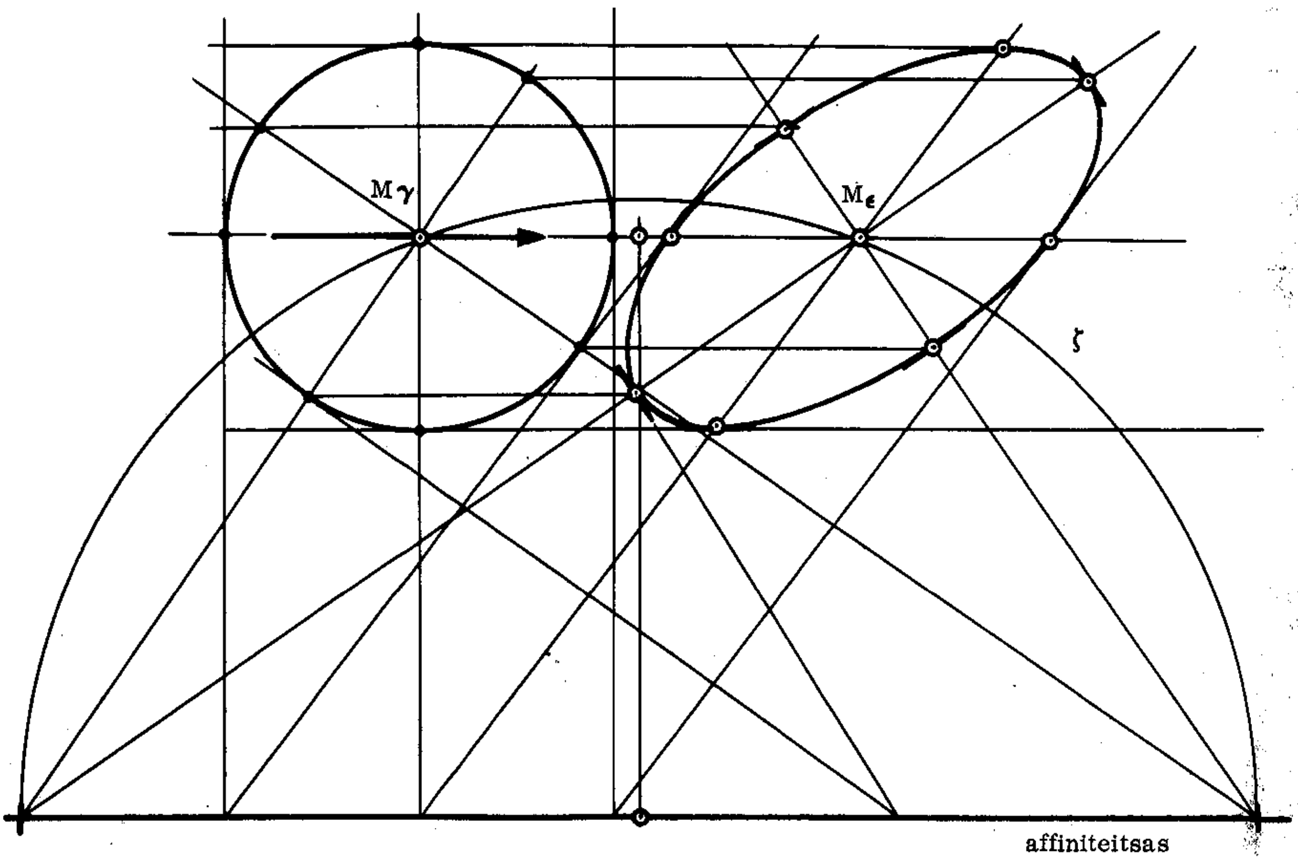


γ_n
Q_n
M_n
P_n
Q_2
N_2
P_2
α_2

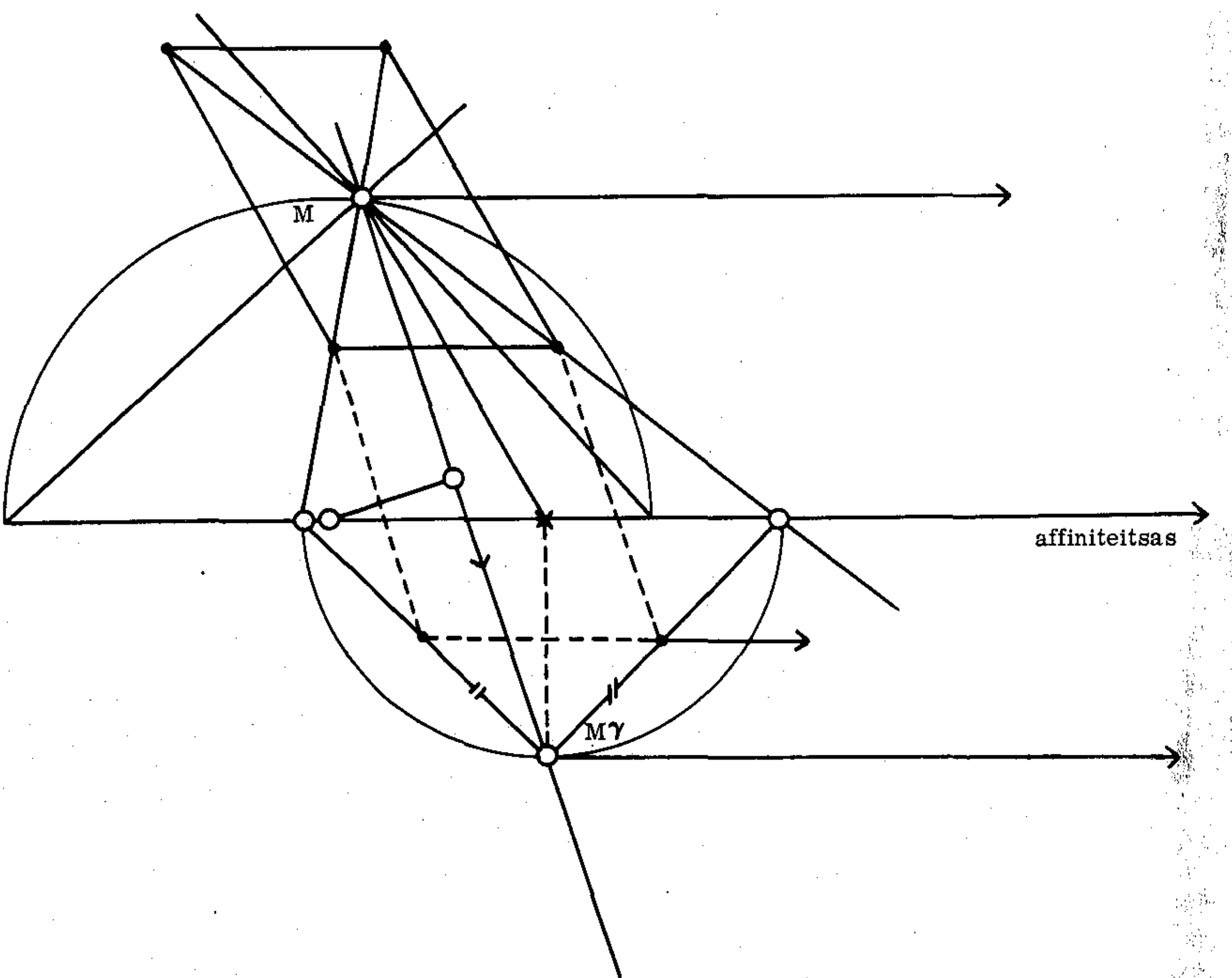


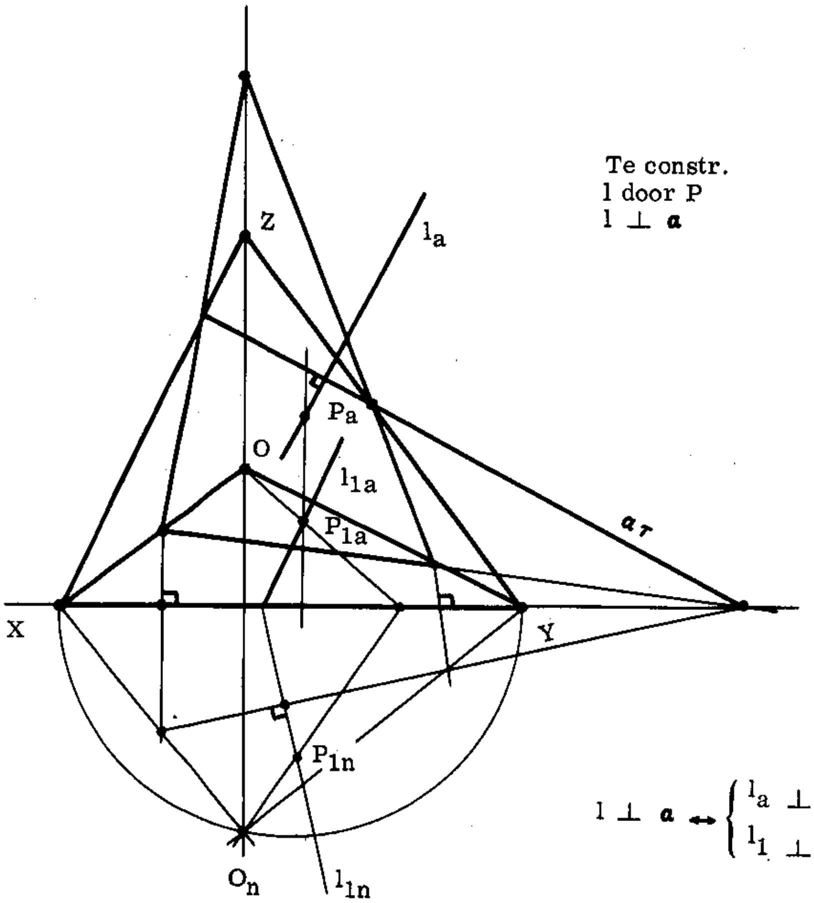
Algemene geval


affiniteitsas
γ
ε
Mγ = Mε
Dilatatie



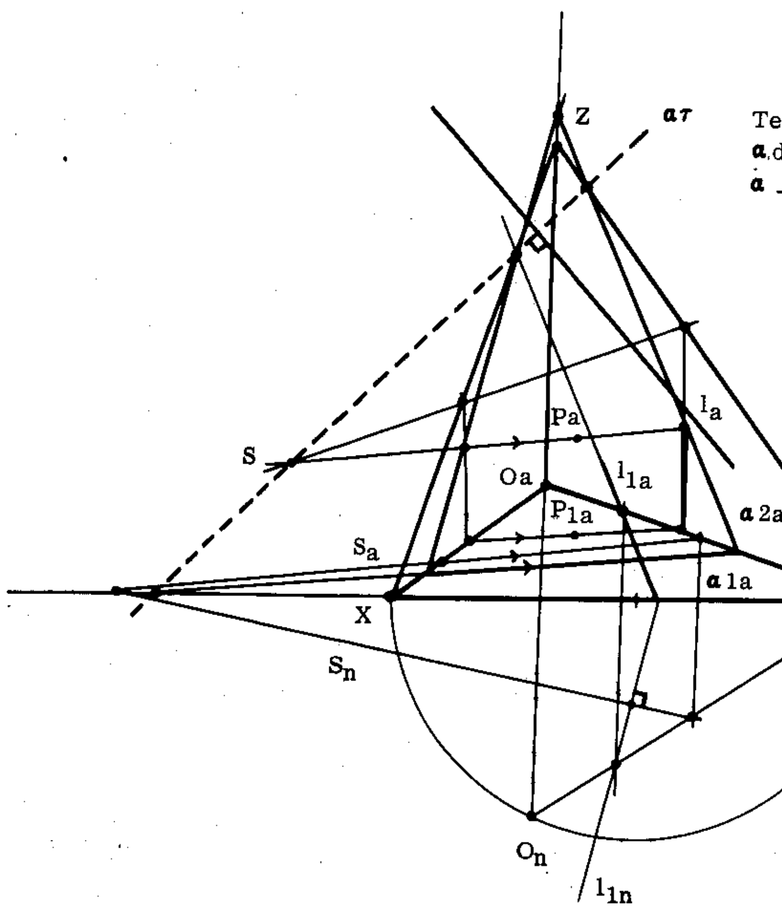
Afschuiving


M
affiniteitsas
Mγ



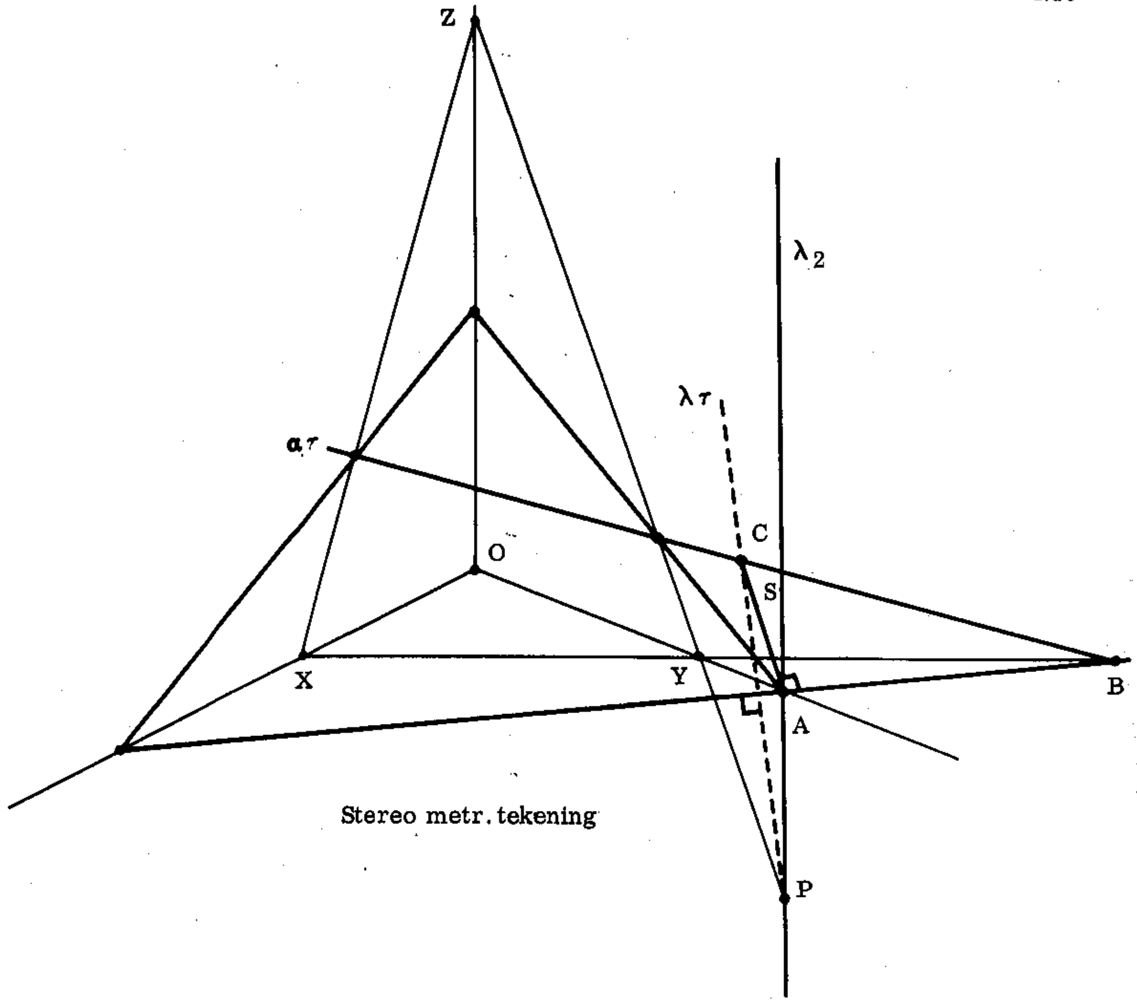
Te constr.
l door P
$l \perp a$

$$l \perp a \leftrightarrow \begin{cases} l_a \perp a_\tau \\ l_1 \perp a_1 \end{cases}$$

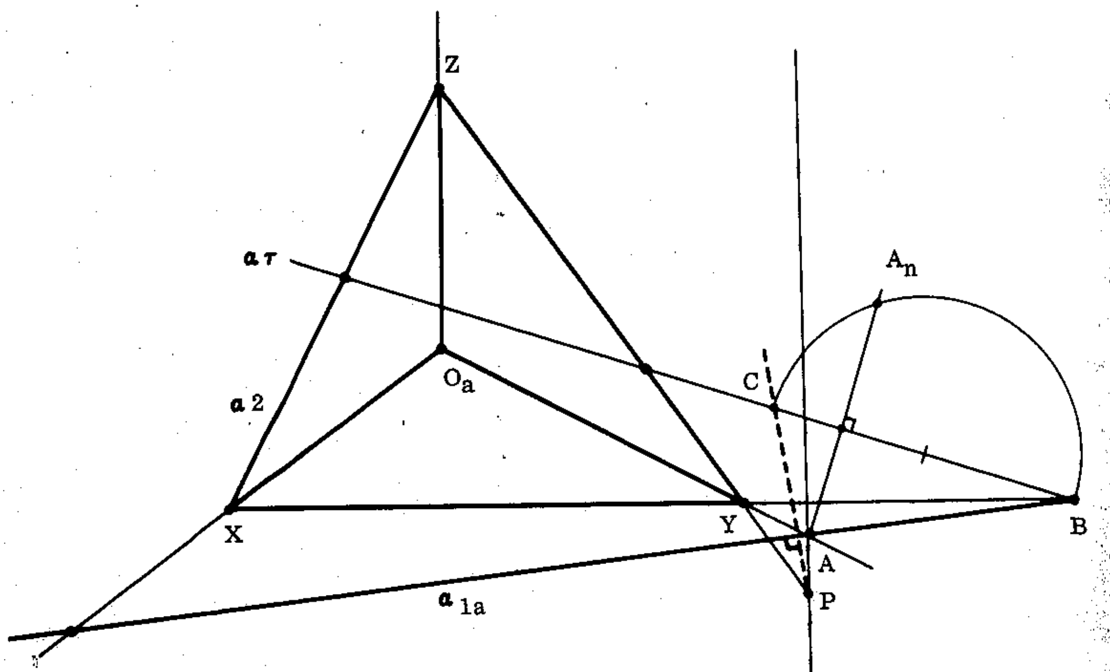


Te constr.
a door P
$a \perp l$

$$\begin{cases} a_\tau \perp la \\ l_{1n} \perp S_n \longrightarrow a_{1a} \parallel S_a \end{cases}$$



Stereo metr. tekening



Axonometr. tekening