

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

AXONOMETRIE

Samengesteld door

Drs. C.P. van Nieuwkastele

Najaarssemester 1977

Technische Hogeschool Eindhoven

Ontwerpkunde 10

Axonometrie

Samengesteld door:
Drs. C.P. v. Nieuwkastele

Afdeling der Werktuigbouwkunde
Vakgroep: Algemene Constructieleer
en Werktuigonderdelen

Technische Hogeschool Eindhoven

ONTWERPKUNDE 10

AXONOMETRIE

Samengesteld door:
Drs. C.P. v. Nieuwkastele

Afdeling der Werktuigbouwkunde
Vakgroep: Algemene Constructieleer
en Werktuigonderdelen

Najaarssemester 1977

Inhoud

blz.

1. Projectiemethoden	1
1. Inleiding	1
2. De orthogonale projectie	1
3. Het perspectief	3
4a. De scheve projectie	5
4b. De (orthogonale) axonometrie	6
2. Enige eigenschappen uit de stereometrie	8
3. Axonometrie	21

1. Projectiemethoden

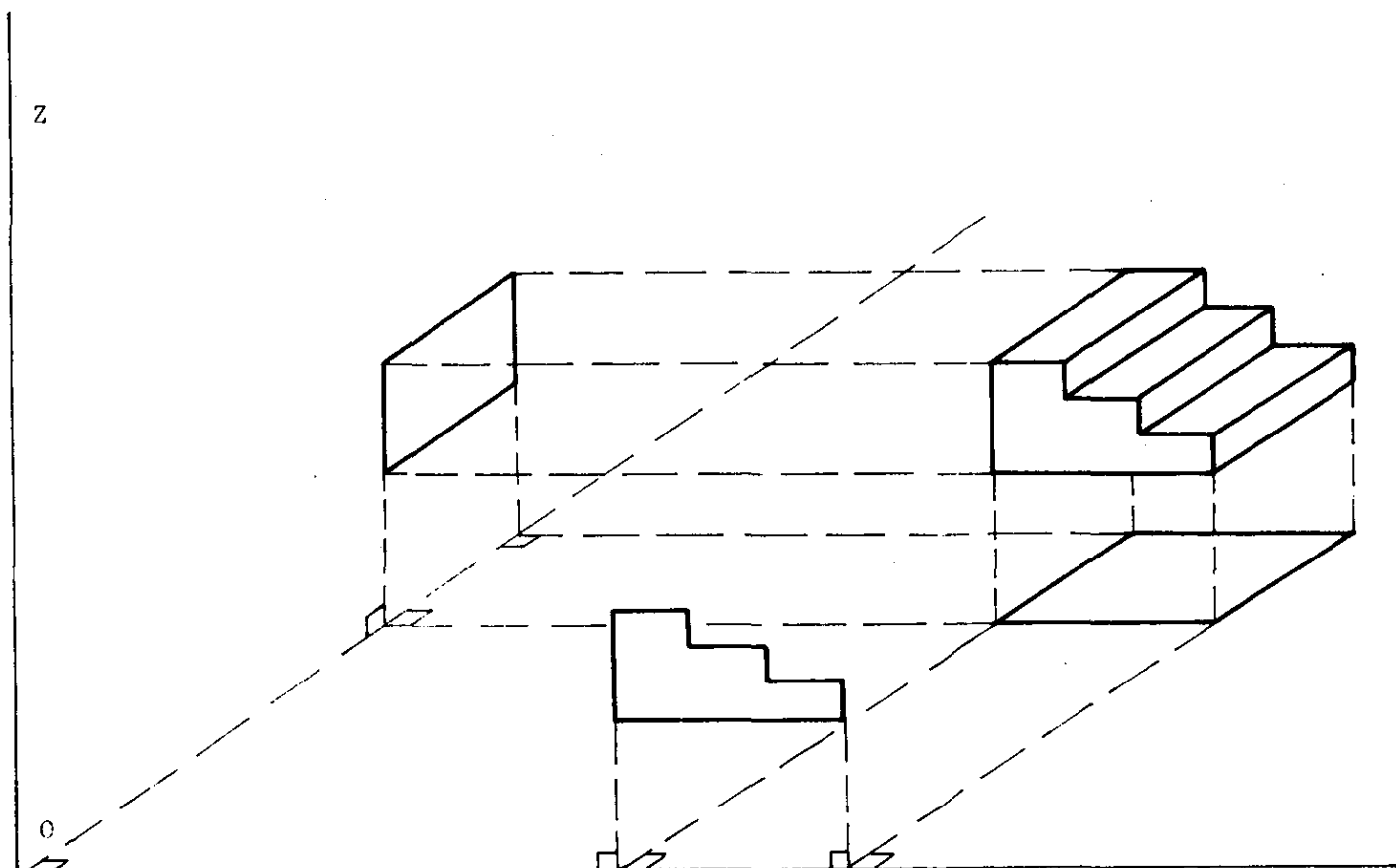
1.1. Inleiding

Het tekenen van een ruimtelijke figuur (voorwerp, landschap) op een vel papier is, evenals fotograferen, een afbeelding van de (drie-dimensionale) ruimte op een plat vlak. In de loop der tijden zijn er vele methoden bedacht om zo'n afbeelding tot stand te brengen. Elk der methoden blijkt voor- en nadelen te hebben.

In dit hoofdstuk worden enige veel gebruikte "projectiemethoden" besproken. De eigenschappen uit de stereometrie, waarop de wetmatigheden van deze methoden berusten, zullen in hoofdstuk 2 behandeld worden.

1.2. De orthogonale projectie (Amerikaanse)

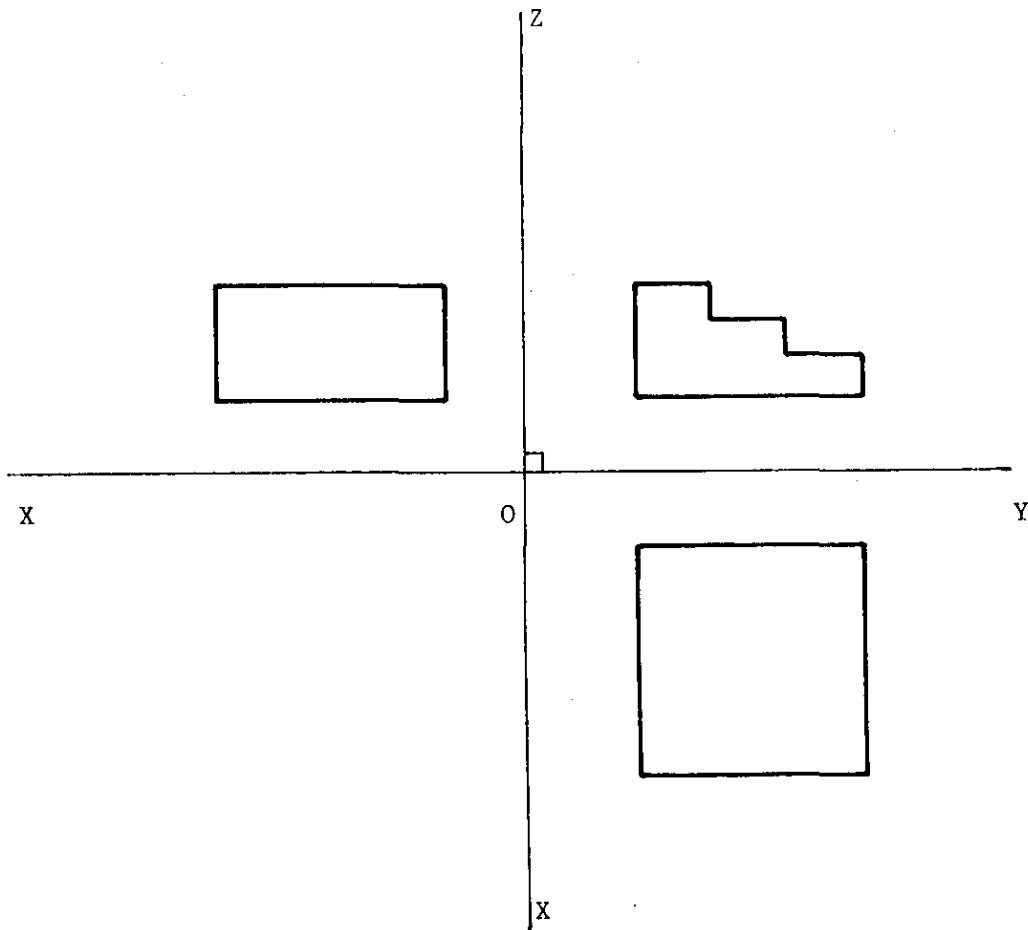
In figuur 1a is een (zwevend) trapje getekend; er is een drietal vlakken aangebracht, voor de eenvoud evenwijdig met respectievelijk grondvlak, voorvlak en linkerzijvlak van de trap (dus de vlakken XOY, YOZ en XOZ uit het bekende rechthoekige assenkruis XYZ met oorsprong O).



Figuur 1a.

Het principe van de Amerikaanse (orthogonale) projectie is dat elk punt van het voorwerp loodrecht geprojecteerd wordt op de drie vlakken. Zo ontstaat er een projectie op het XOZ-vlak, op het XOY-vlak en op het YOZ-vlak. Daarna wordt YOZ-vlak als tekenvlak (= tafereel τ) beschouwd, d.w.z. na "openknippen" langs de x-as tot O wordt het XOY-vlak langs de y-as naar onderen en het XOZ-vlak langs de z-as naar voren gevouwen. Het bijzondere van de Amerikaanse projectie is dat het YOZ-vlak zich tussen voorwerp en beschouwer bevindt, terwijl in de zgn. Europese methode het voorwerp zich tussen de beschouwer en het YOZ-vlak bevindt.

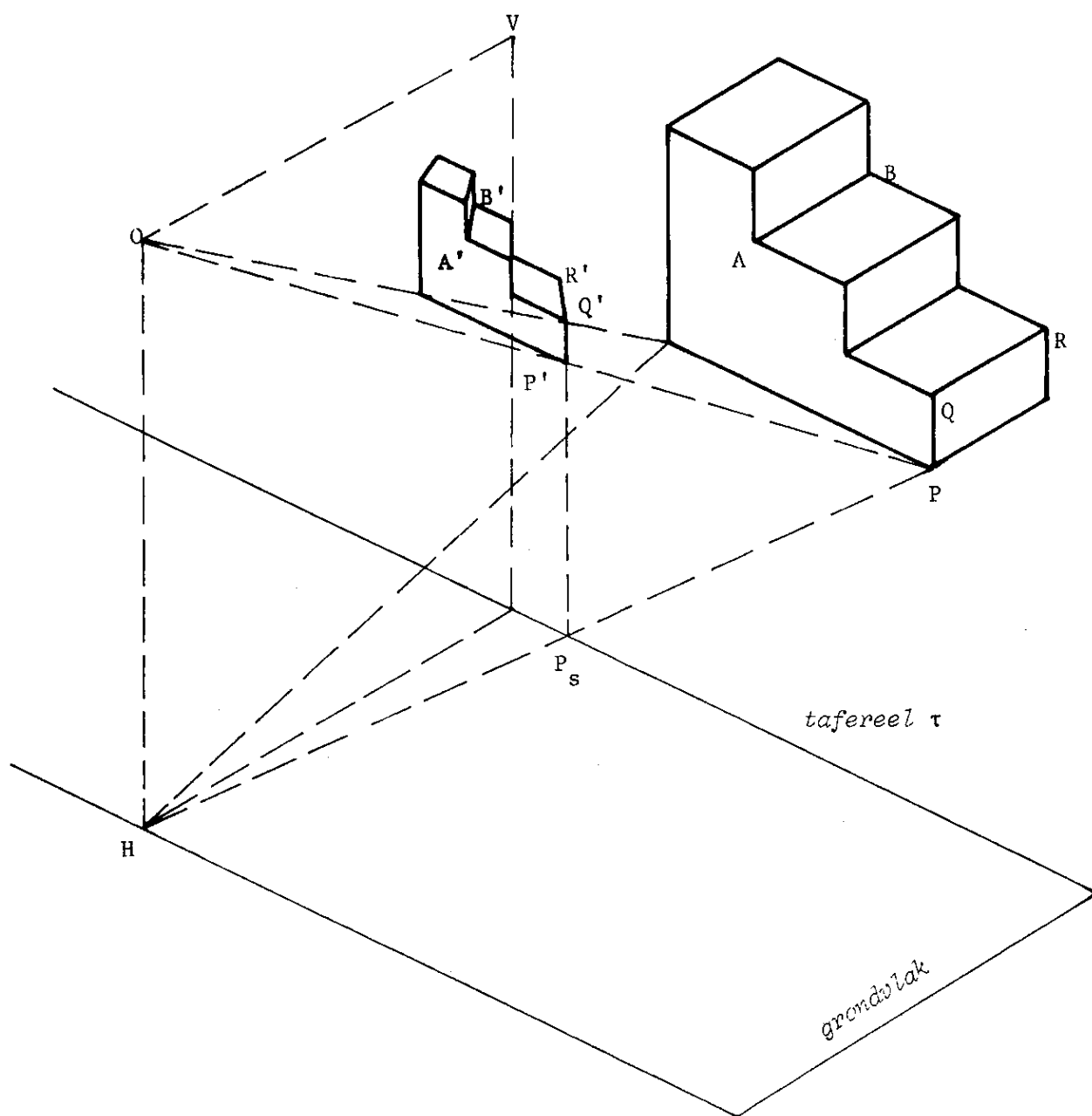
In figuur 1b is te zien hoe de projecties in werkelijkheid zijn. De projectie in het YOZ-vlak is het vooraanzicht, die in het XOY-vlak het onderaanzicht en die in het XOZ-vlak het linkerzijaanzicht. Soms geven deze drie aanzichten te weinig informatie. De tekenaar of constructeur zal zich dan dienen te beraden over andere aanzichten (of over doorsnijdingen). Het vereist overigens stereometrisch inzicht om uit enige aanzichten de ware gedaante van het voorwerp te reconstrueren. Het voordeel van deze methode is dat de verhoudingen en onderlinge hoeken goed afleesbaar zijn.



Figuur 1b.

1.3. Het perspectief

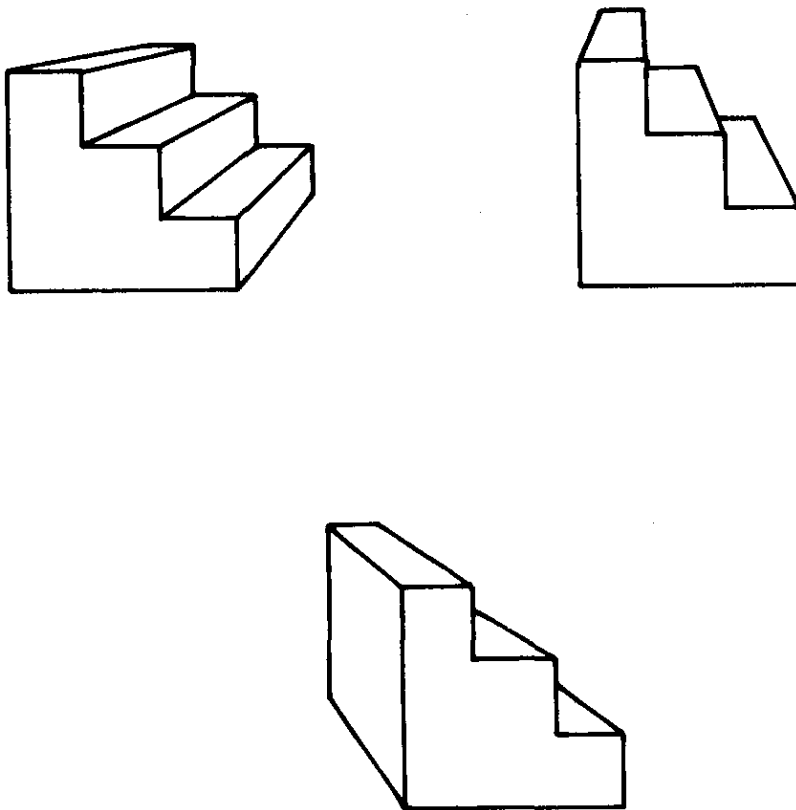
Deze methode is voor de mens wellicht de meest natuurlijke, maar tevens in uitvoering moeilijk. In figuur 2 is de werking geschetst. Uitgangspunten zijn een gegeven (vaste) positie van het oog 0 van een waarnemer en een gegeven referentievlak, het grondvlak. 0 bevindt zich boven het grondvlak, H is de orthogonale projectie van 0 op het grondvlak. Het vlak van de tekening (tafereel τ) is loodrecht op het grondvlak geplaatst, tussen 0 en het voorwerp. In deze figuur is τ evenwijdig aan één der zijanten van het op de grond staande trapje gekozen. Het principe is dat elk punt van het voorwerp



Figuur 2.

met O wordt verbonden. De snijpunten van die verbindingslijnen met τ vormen de projectie van het voorwerp. Omdat alle projecterende lijnen door één punt gaan, spreekt men van een centrale projectie. P' , de projectie van P ontstaat aldus door constructie van het vlak OHP dat het grondvlak volgens HP en τ volgens een lijn evenwijdig met OH snijdt (dit laatste wegens stelling 2.1). Het werkwaardige van het perspectief ("evenwijdige spoorstaven snijden elkaar schijnbaar") is in deze tekening te zien. De projectie van AB is de snijlijn van het vlak OAB met τ . Dit vlak bevat o.a. de lijn $OV \parallel AB$ (V in τ), zodat de projectie $A'B'$ door V gaat. Dit zelfde geldt voor alle vlakken door O en lijnen evenwijdig met AB . De projecties van die lijnen gaan dus eveneens door V .

Oefening. In figuur 3 zijn drie perspectief tekeningen van het trapje geschetst. τ valt samen met de voorste zijkant van de trap. Probeer zelf ongeveer de plaats van O vòòr τ en de hoogte boven het grondvlak te schatten.



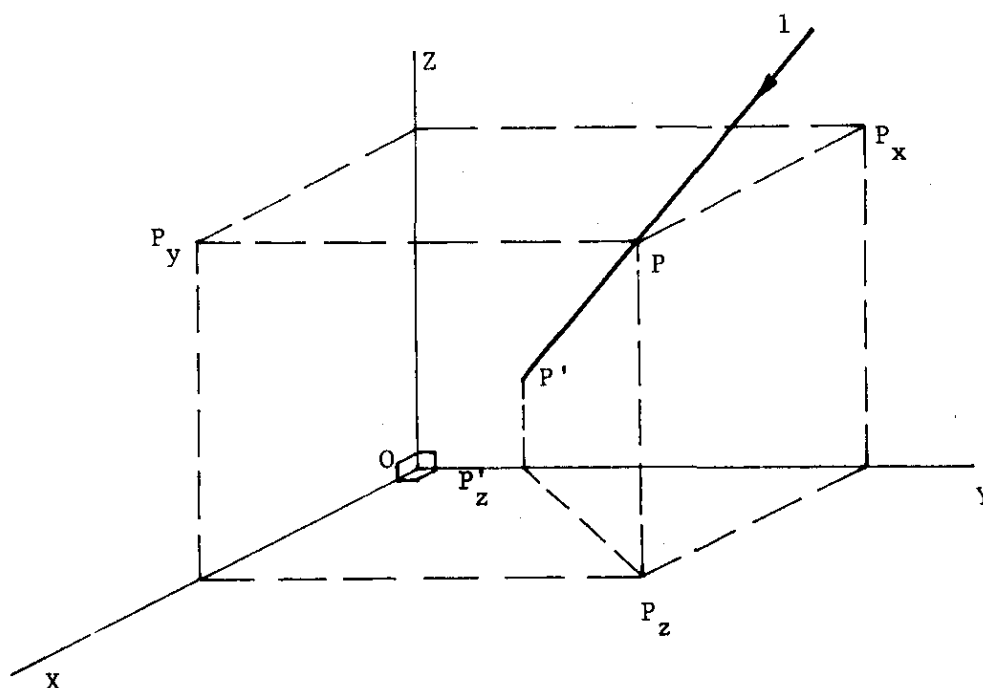
Figuur 3.

1.4. Scheve parallelprojectie en axonometrie

In 1.2 is de Amerikaanse projectie genoemd, een in de techniek belangrijke methode. Het nadeel is dat het niet eenvoudig is, uit de gegeven "aanzichten" een ruimtelijke voorstelling te reconstrueren. Het in 1.3 genoemde perspectief geeft wel een beeld van het voorwerp, maar de uitvoering is tijdrovend. In deze paragraaf worden twee methoden behandeld, die wel appeleren aan de fantasie terwijl ze toch betrekkelijk eenvoudig zijn. Beide methoden hebben voor- en nadelen. In de werktuigbouwkunde valt de nadruk op de tweede, de axonometrie. Hoofdstuk 3 zal daaraan dan ook geheel gewijd zijn. Nu heel in het kort iets over beide projectiemethoden.

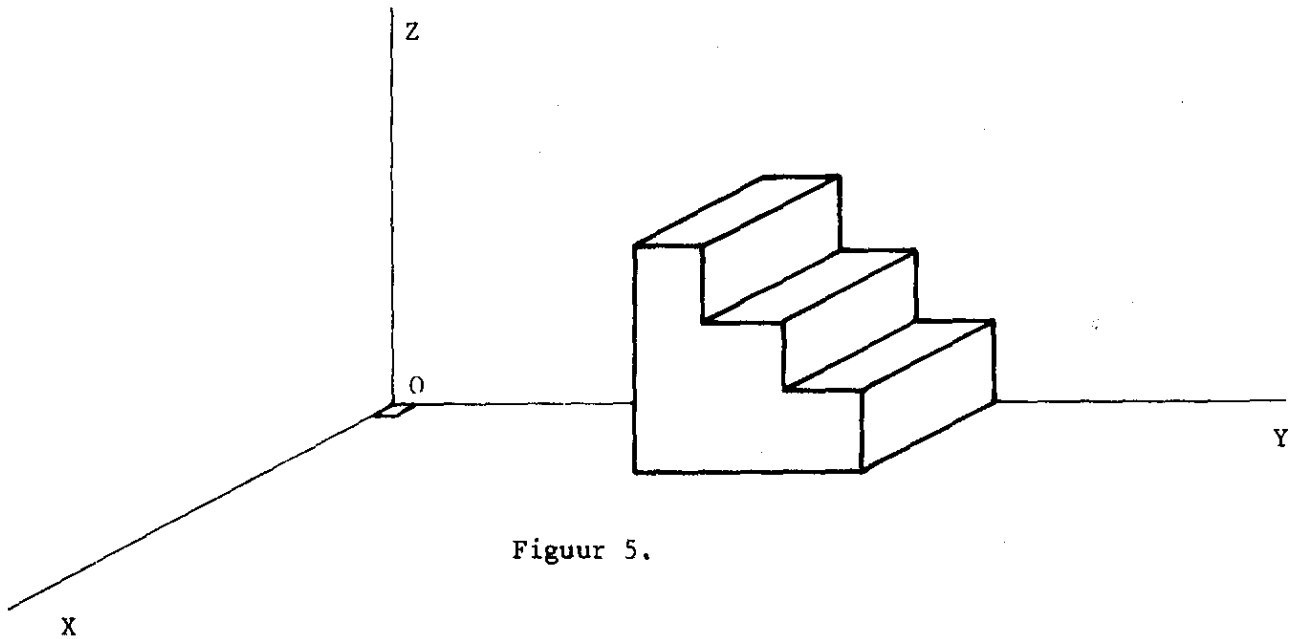
a) De scheve projectie

In figuur 4 is een ruimtelijk assenkruis getekend. In de ruimte is een projectierichting l gegeven. Het principe van deze methode is dat elk punt van een gegeven voorwerp in de "richting" van l wordt geprojecteerd op het YOZ vlak (het tafereel τ), d.w.z. door elk punt wordt een lijn evenwijdig met l getekend en deze lijn wordt gesneden met YOZ. Vanwege dat evenwijdige is de methode een parallelprojectie en omdat l "scheef" op YOZ staat, spreekt men van scheve projectie. Het beschreven principe is hier voor het punt P geschetst.



Figuur 4.

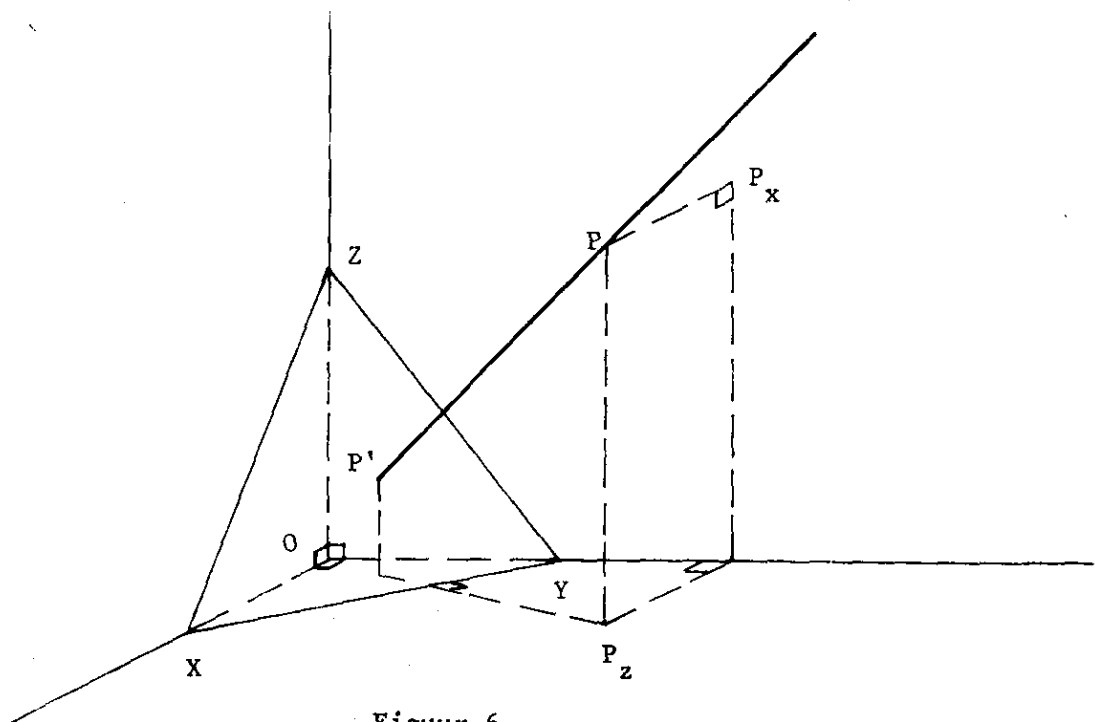
In figuur 5 is de scheve projectie van een trapje getekend. Het voorwerp rust op het XOY-vlak en heeft een zijkant in τ . Zoals de lezer kan waarnemen, blijft de suggestie van de vorm behouden, terwijl evenwijdige lijnen ook in projectie evenwijdig zijn.



Figuur 5.

b) De (orthogonale) axonometrie

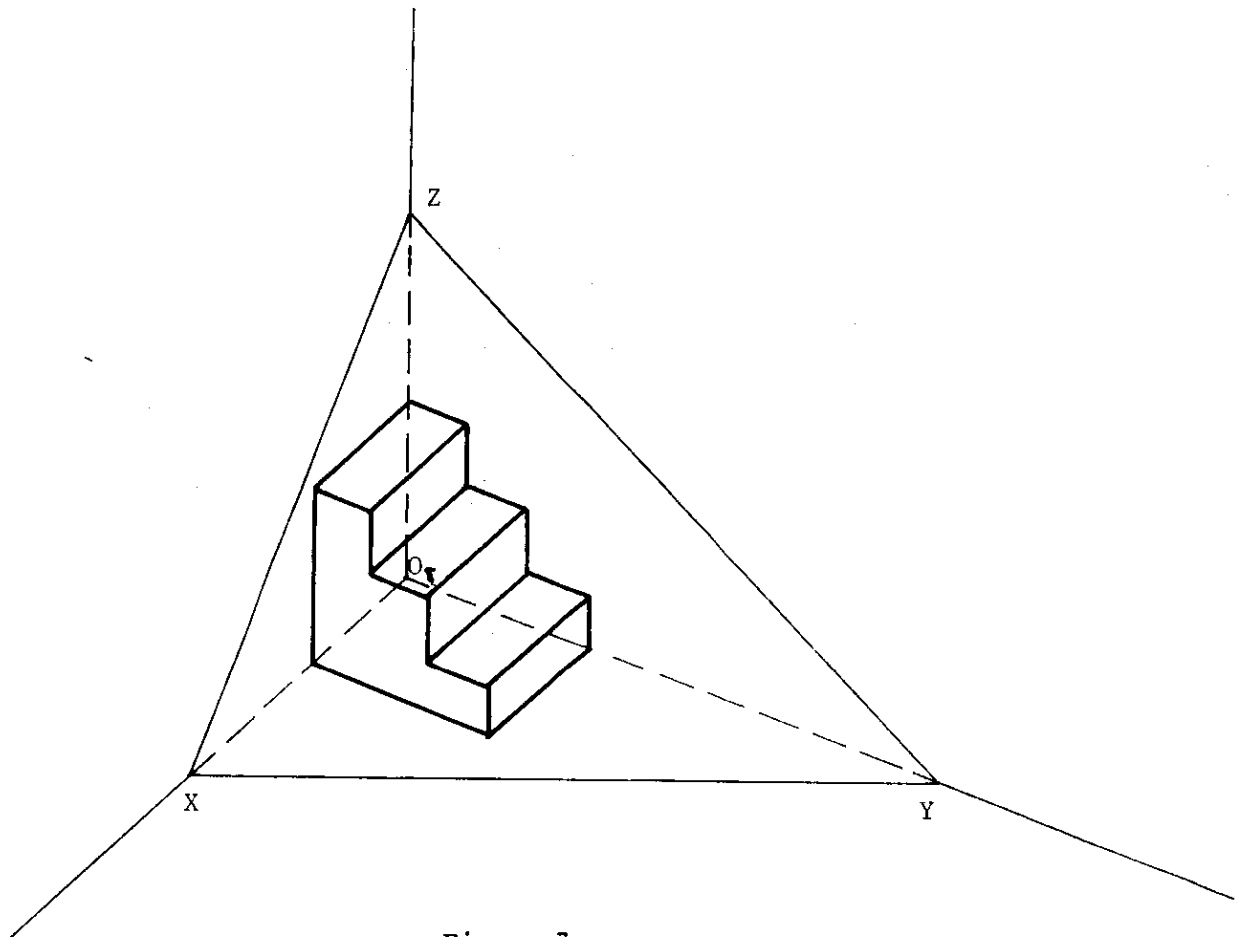
In figuur 6 is het rechthoekig assenkruis getekend met daarbij de punten X, Y en Z op de assen. Het vlak XYZ wordt als tafereel τ beschouwd en de punten van het voorwerp worden loodrecht op dit vlak geprojecteerd. In de



Figuur 6.

figuur is dit voor het punt P gedemonstreerd.

In figuur 7 is in axonometrie de projectie getekend van het trapje, dat tegen de drie coördinaatvlakken is geplaatst. Ook hier blijft de evenwijdigheid bewaard.



Figuur 7.

2. Enige eigenschappen uit de stereometrie

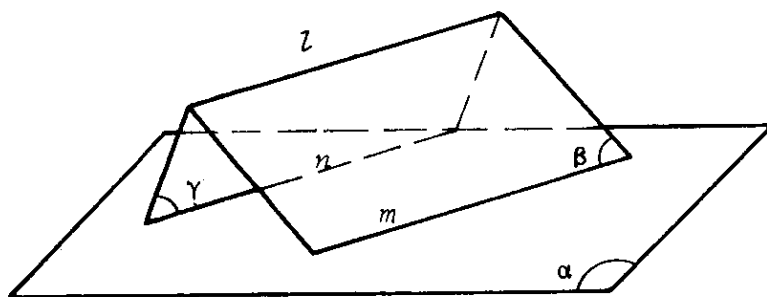
De tekeningen in hoofdstuk 1 zijn vaak zonder nadere toelichting aan de lezer voorgelegd. Uiteraard werd gebruik gemaakt van (niet-vermelde) technieken. Alvorens deze te bespreken (beperkt tot de axonometrie) is het nodig de stereometrische eigenschappen te behandelen, die de grondslag ervoor vormen. De belangrijkste eigenschappen zijn die van evenwijdigheid en loodrechttheid. Sommige zullen worden bewezen met behulp van vectormeetkunde in de drie-dimensionale ruimte, andere door middel van een meetkundige redenering. Omdat er van wordt uitgegaan dat de lezer op het V.W.O. slechts Wiskunde I heeft gehad, is er geen poging gedaan "slimme" bewijzen te bedenken.

2.1. Stelling. Zijn α en β twee vlakken met m als snijlijn, is ℓ een lijn in β met $\ell \parallel \alpha$, dan geldt $\ell \parallel m$.

Bewijs. (figuur 8) ℓ en m liggen in β , dus ze kruisen elkaar niet. Ook is $\ell \parallel \alpha$, dus ℓ en m hebben geen punt gemeen. Gevolg: $\ell \parallel m$.

2.2. Stelling. Zijn β en γ twee vlakken met snijlijn ℓ , is α een derde vlak met $\ell \parallel \alpha$, dan zijn de snijlijnen m en n van β en γ met α ook onderling evenwijdig.

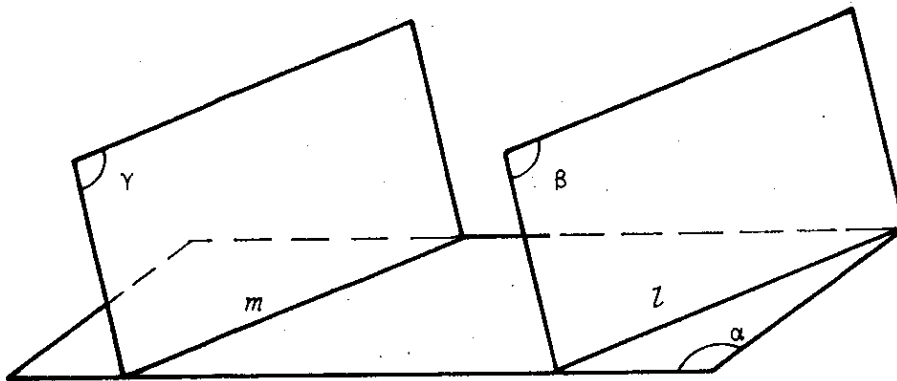
Bewijs. (figuur 8) $\ell \parallel m$ (st. 2.1). Eveneens $\ell \parallel n$, dus $m \parallel n$.



Figuur 8.

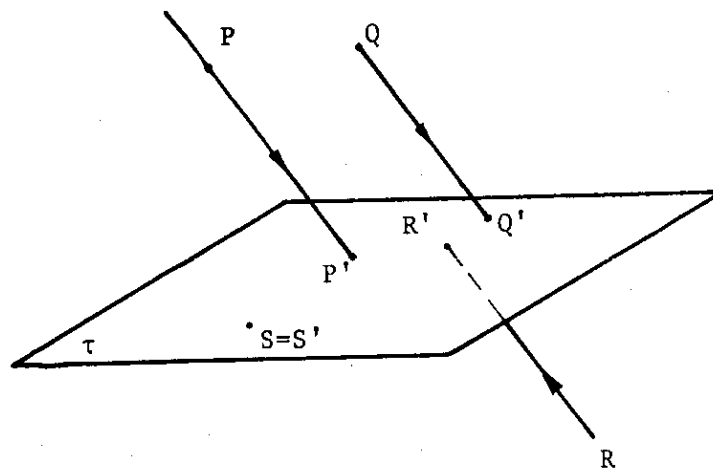
2.3. Stelling. Evenwijdige vlakken snijden een derde vlak volgens evenwijdige lijnen.

Bewijs. (figuur 9) $\beta \parallel \gamma$, dus ℓ en m hebben geen punt gemeen. Bovendien liggen ℓ en m in α , dus ze kruisen elkaar niet. Gevolg: $\ell \parallel m$.



Figuur 9.

2.4. Definitie. De afbeelding van de drie-dimensionale ruimte in een vlak heet parallelprojectie als de verbindingslijn van elk punt met zijn beeldpunt evenwijdig is met een voorgeschreven richting (figuur 10).



Figuur 10.

Opmerkingen

- 1) De voorgeschreven richting heet projectierichting; is die loodrecht op het vlak, waarop geprojecteerd wordt, dan spreekt men van orthogonale projectie, anders van scheve (parallel-) projectie.
- 2) Het vlak waarop geprojecteerd wordt, wordt tafereel (τ) genoemd.

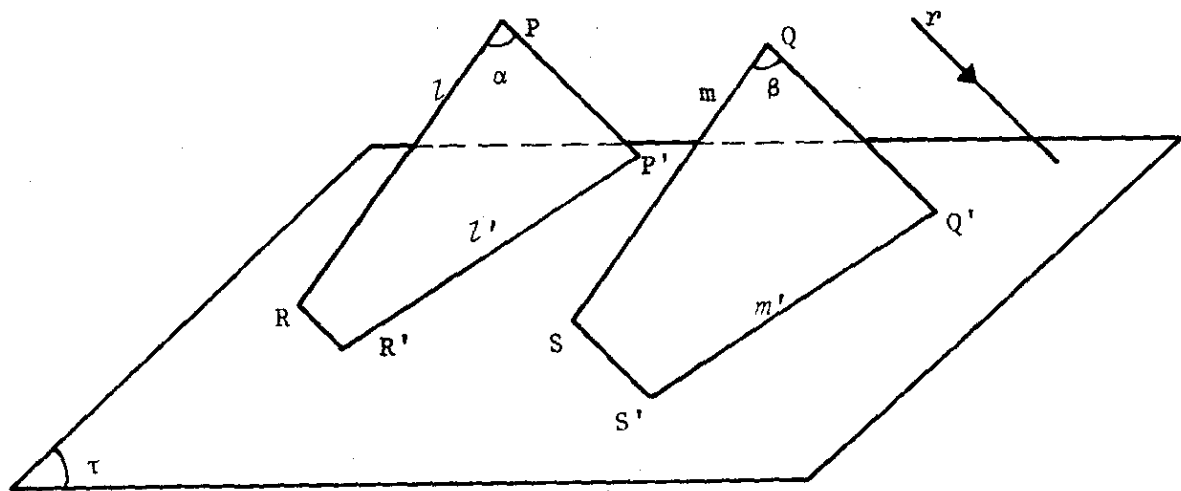
Oefening. Bedenk zelf een definitie voor centrale projectie (zoals reeds in 1.3 is aangeduid).

2.5. Stelling. De parallelprojectie van een rechte lijn op τ is weer een rechte (of een punt).

Bewijs. Voer dit zelf uit. Bedenk dat in \mathbb{R}^3 een lijn bepaald wordt door een steunvector en een richtingsvector, terwijl de richtingsvector van de projectierichting gegeven is.

2.6. Stelling. De parallelprojecties op τ van 2 evenwijdige lijnen zijn weer evenwijdig (mits geen punten)

Bewijs. (figuur 11) $\ell \parallel m$, PP' en QQ' zijn beide evenwijdig aan de projectierichting r , dus de "projecterende vlakken" α en β van ℓ en m zijn evenwijdig (waarom?). Volgens stelling 2.3 is $\ell' \parallel m'$.



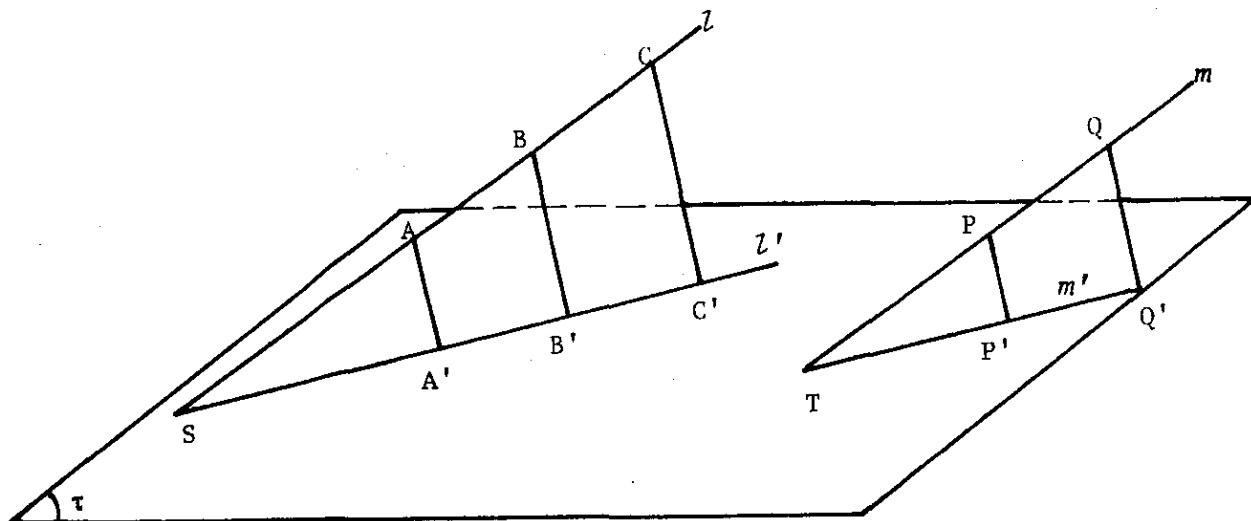
Figuur 11.

2.7. Stelling. Lijnstukken, gelegen op samenvallende of op evenwijdige lijnen, worden bij parallelprojectie in dezelfde verhouding verkort (of verlengd).

Bewijs. (figuur 12) $\ell \parallel m$, dus $\ell' \parallel m'$ (st. 2.6). Verder geldt:

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel PP' \parallel QQ' .$$

Stel dat $A'B' = k \cdot AB$ (k heet verkortingsverhouding, hoewel $k > 1$ kan zijn).



Figuur 12.

We moeten aantonen dat ook $B'C' = k \cdot BC$ en $P'Q' = k \cdot PQ$.

- 1) Is $\ell \parallel \tau$, dan is $k = 1$; bewijs zelf dat $B'C' = BC$ en $P'Q' = PQ$.
- 2) ℓ snijdt τ (dus ook ℓ') in S en m snijdt τ in T .

Met behulp van gelijkvormige driehoeken is nu te zien dat $B'C' : A'B' = BC : AB$ en ook dat $P'Q' : A'B' = PQ : AB$, zodat $B'C' = k \cdot BC$ en $P'Q' = k \cdot PQ$.

Gevolg. De projectie van een parallellogram is weer een parallellogram.

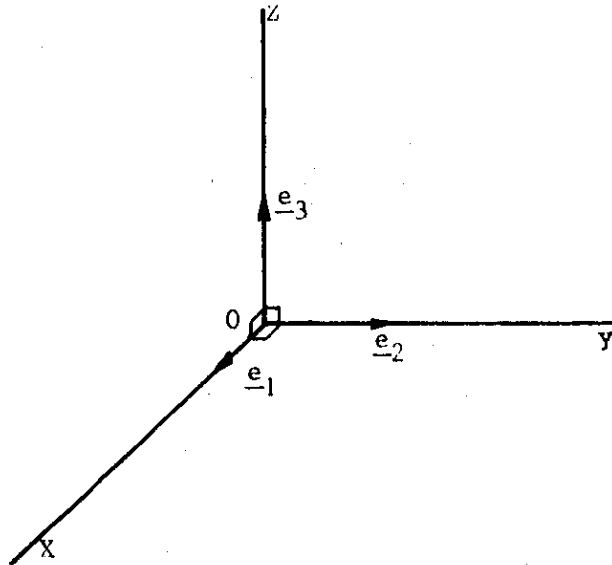
Opmerking. De stelling 2.7 geldt niet bij centrale projectie.

Omdat we ons in het volgende hoofdstuk met orthogonale projectie zullen bezighouden, worden nu enige eigenschappen besproken die hiermee te maken hebben. Voor de bewijzen zal vaak gebruik gemaakt worden van een orthonormaal assenstelsel in \mathbb{R}^3 , d.w.z. een drietal basisvectoren \underline{e}_1 , \underline{e}_2 en \underline{e}_3 respectievelijk langs de X-, Y- en Z-as, met als eigenschappen dat $(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = (\underline{e}_2, \underline{e}_2) = (\underline{e}_3, \underline{e}_3) = 1$ en $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{e}_1, \underline{e}_3) = (\underline{e}_2, \underline{e}_3) = 0$.

Hierbij wordt het inwendig product van twee vectoren in \mathbb{R}^3 gedefinieerd zoals in het V.W.O. dit in \mathbb{R}^2 is gebeurd (zie figuur 13).

Als $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dan is $(\underline{a}, \underline{b}) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Het grondvlak XOY, $\underline{x} = \lambda \underline{e}_1 + \mu \underline{e}_2$ of $z = 0$ wordt in de bewijzen vaak als het tafereel τ genomen.

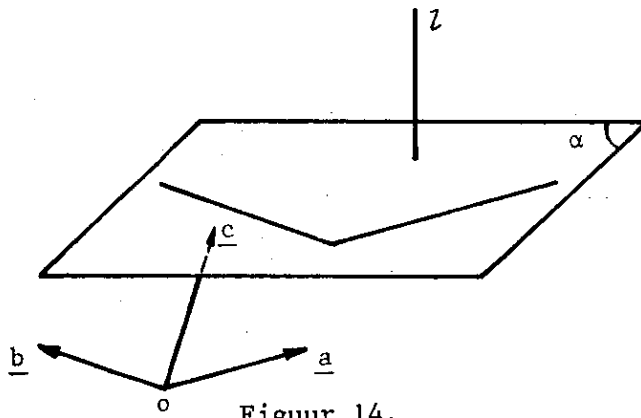


Figuur 13.

2.8. Definitie. Een lijn heet loodrecht op een vlak, als hij loodrecht op twee snijdende lijnen van dat vlak staat.

2.9. Stelling. Een lijn ℓ , loodrecht op een vlak, is loodrecht op elke lijn van dit vlak.

Bewijs. (figuur 14) Is $\ell \perp \alpha$, dan bevat α twee snijdende lijnen die loodrecht ℓ zijn. Stel dat deze lijnen de richtingsvectoren \underline{a} en \underline{b} hebben en ℓ de richtingsvector \underline{d} , dan geldt $(\underline{a}, \underline{d}) = (\underline{b}, \underline{d}) = 0$. De parametervoorstelling van α is $\underline{x} = \underline{c} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$. De richtingsvector van een willekeurige lijn in α is een lineaire combinatie van \underline{a} en \underline{b} zodat ℓ ook loodrecht die rechte is.



Figuur 14.

2.10. Stelling. Is van twee evenwijdige lijnen er één loodrecht op een vlak, dan ook de andere.

Bewijs. De lijnen hebben dezelfde richtingsvector.

2.11. Stelling. Is een lijn loodrecht op één van twee evenwijdige vlakken, dan is hij ook loodrecht op het andere.

Bewijs. Is $\alpha \parallel \beta$, dan zijn hun parametervoorstellingen te schrijven als:
 $\underline{x} = \underline{c} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ en $\underline{x} = \underline{d} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$. Is $\ell \perp \alpha$ dan ook loodrecht op β .

2.12. Stelling. Is ℓ een lijn die loodrecht het vlak met vergelijking $ax + by + cz = 0$ is, dan heeft ℓ de richtingsvector (a,b,c) .

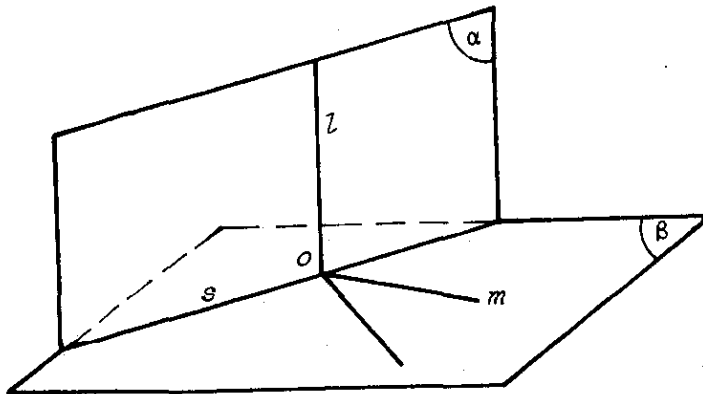
Bewijs. Het vlak is als volgt in parametervoorstelling te schrijven:
 $\underline{x} = \lambda(-b,a,0) + \mu(-c,0,a)$ (ga na). De richtingsvector (a,b,c) is loodrecht op de beide richtingsvectoren $(-b,a,0)$ en $(-c,0,a)$ dus ℓ heeft als richtingsvector (a,b,c) (stelling 2.10).

Opmerking. Is omgekeerd (a,b,c) de richtingsvector van een lijn dan is de vergelijking van een vlak loodrecht deze lijn van de gedaante $ax + by + cz = d$ (waarbij d nog willekeurig gekozen kan worden).

2.13. Definitie. Het vlak α heet loodrecht op β , als α een lijn bevat die loodrecht op β is.

2.14. Stelling. Is $\alpha \perp \beta$, dan ook $\beta \perp \alpha$.

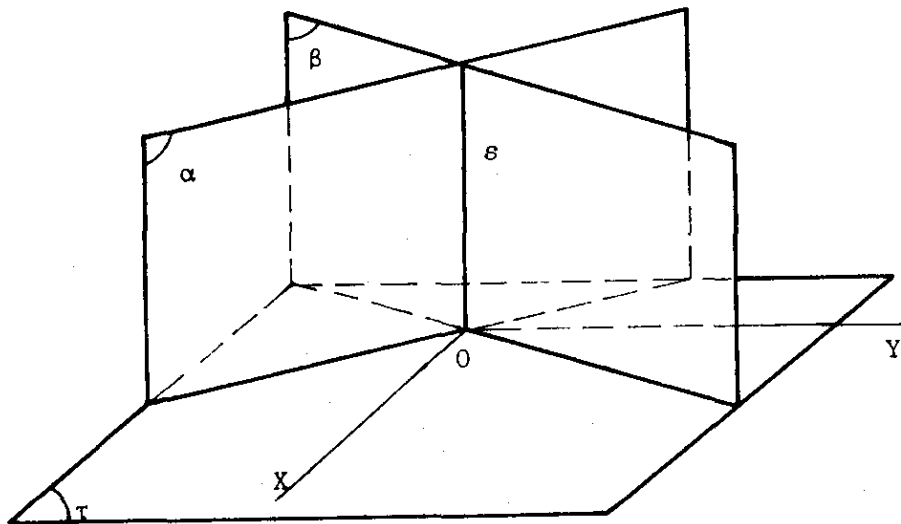
Bewijs. (figuur 15) Kies de oorsprong O op de snijlijn s van α en β en noem de vergelijkingen van de vlakken respectievelijk $ax + by + cz = 0$ en $px + qy + rz = 0$. De lijn ℓ door O die loodrecht op β is, heeft als parametervoorstelling: $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$. Deze lijn ligt in α , dus $ap + bq + cr = 0$. Aan deze gelijkheid zien we dat de lijn m met parametervoorstelling $\underline{x} = \mu(a,b,c)$ in β ligt, terwijl m ook loodrecht op α is. Conclusie: $\beta \perp \alpha$.



Figuur 15.

2.15. Stelling. Als twee snijdende vlakken beide loodrecht op τ zijn, dan is ook hun snijlijn loodrecht op τ .

Bewijs. (figuur 16) Kies O in het snijpunt der drie vlakken en τ als $z = 0$. Nu geldt $\alpha \perp \tau$, dus α bevat door O een lijn die loodrecht op τ is; deze heeft de richtingsvector $(0,0,1)$. Hetzelfde geldt voor β , dus α en β hebben die lijn gemeen.



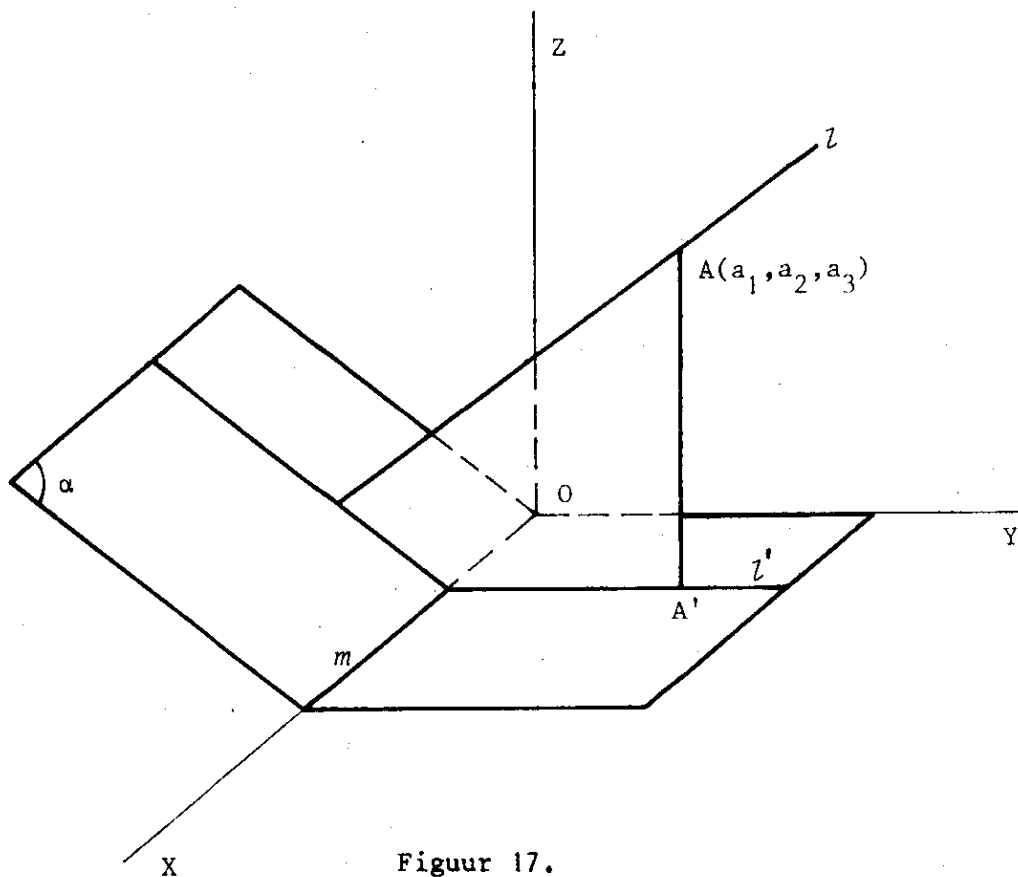
Figuur 16.

2.16. Stelling. Snijden de vlakken α en τ elkaar volgens rechte m , is l een rechte die loodrecht op α is en is l' de orthogonale projectie van l op τ , dan is $l' \perp m$.

Bewijs. (figuur 17) Kies het XOY-vlak in τ met m als de x -as. De vergelijking van α is $py + qz = 0$ (voor zekere p en q); $\ell \perp \alpha$, dus ℓ heeft als parametervoorstelling $\underline{x} = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(0, p, q)$. Het vlak door ℓ en loodrecht op τ (het orthogonaal projecterend vlak van ℓ) heeft nu als parametervoorstelling:

$$\underline{x} = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(0, p, q) + \mu(0, 0, 1) \text{ (waarom?) .}$$

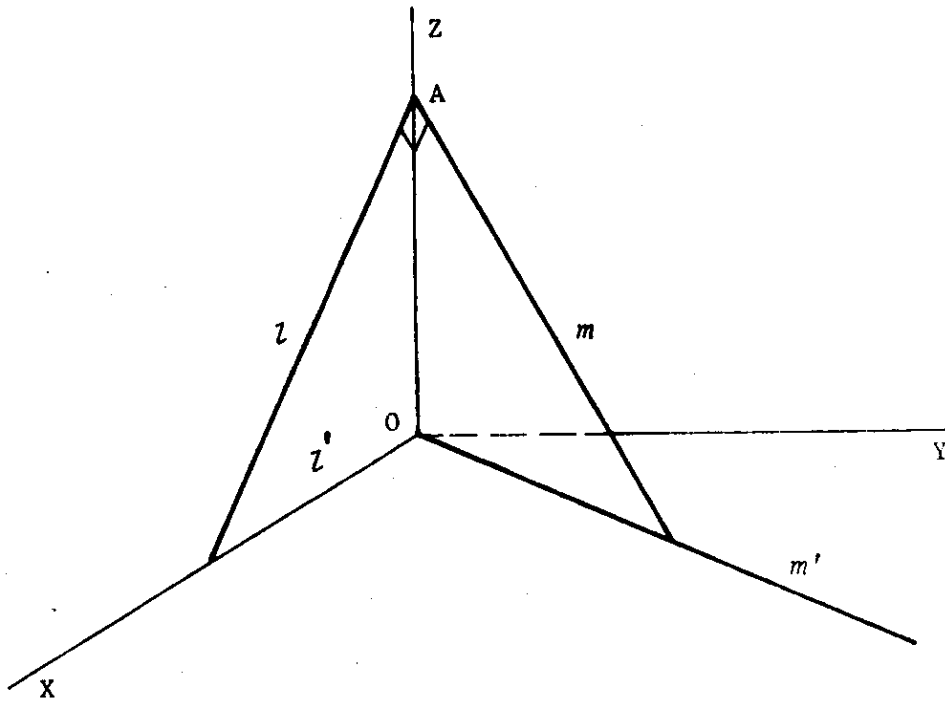
Snijden met τ levert ℓ' . Wegens $a_3 + \lambda q + \mu = 0$ vinden we als snijlijn $\underline{x} = (a_1, a_2, 0) + \lambda(0, p, 0)$, zodat $\ell' \perp m$.



Figuur 17.

2.17. Stelling. ℓ en m zijn onderling loodrechte lijnen, ℓ' en m' hun orthogonale projecties op τ . Er geldt $\ell' \perp m'$ dan en slechts dan als $\ell \parallel \tau$ of $m \parallel \tau$.

Bewijs. (figuur 18) Omdat de stelling slechts over richtingen gaat, worden ℓ en m snijdend genomen. Kies het XOY-vlak in τ , het XOZ-vlak in het vlak door ℓ en ℓ' en de z -as door A .



Figuur 18.

Stel $A: (0,0,a)$, de richtingsvector van $l: (p,0,q)$ en de richtingsvector van $m: (r,s,t)$. Wegens $l \perp m$ geldt:

$$(1) \quad pr + qt = 0 .$$

Nu gelden de volgende parametervoorstellingen:

$$l: \underline{x} = (0,0,a) + \lambda(p,0,q) ,$$

$$l': \underline{x} = \mu(1,0,0) ,$$

$$m: \underline{x} = (0,0,a) + \nu(r,s,t) ,$$

$$m': \underline{x} = \sigma(r,s,0) .$$

- 1) Stel $l' \perp m'$, dus $r = 0$. Wegens (1) geldt $qt = 0$, dus $q = 0$ ($l \parallel \tau$) of $t = 0$ ($m \parallel \tau$).
- 2) Is $l \parallel \tau$, dan is $q = 0$. Wegens (1) is $pr = 0$; echter $p \neq 0$ (waarom?) dus $r = 0$, zodat $l' \perp m'$.
Is $m \parallel \tau$, dan is $t = 0$. Wegens (1) geldt $pr = 0$; echter $p \neq 0$ (waarom?) dus $r = 0$, zodat weer $l' \perp m'$.

Omdat in het werktuigkundig schetsen cirkels en delen van cirkels een grote rol spelen, volgt nog een stelling over de orthogonale projectie van een cirkel. De mogelijkheid dat de projectie van een cirkel een lijnstuk is, wordt verder niet meer genoemd.

2.18. Stelling. De orthogonale projectie van een cirkel op τ is een cirkel of een ellips.

Bewijs. (figuur 19, resp. 20) Kies het XOY-vlak in τ en de z-as door het middelpunt M van de cirkel.

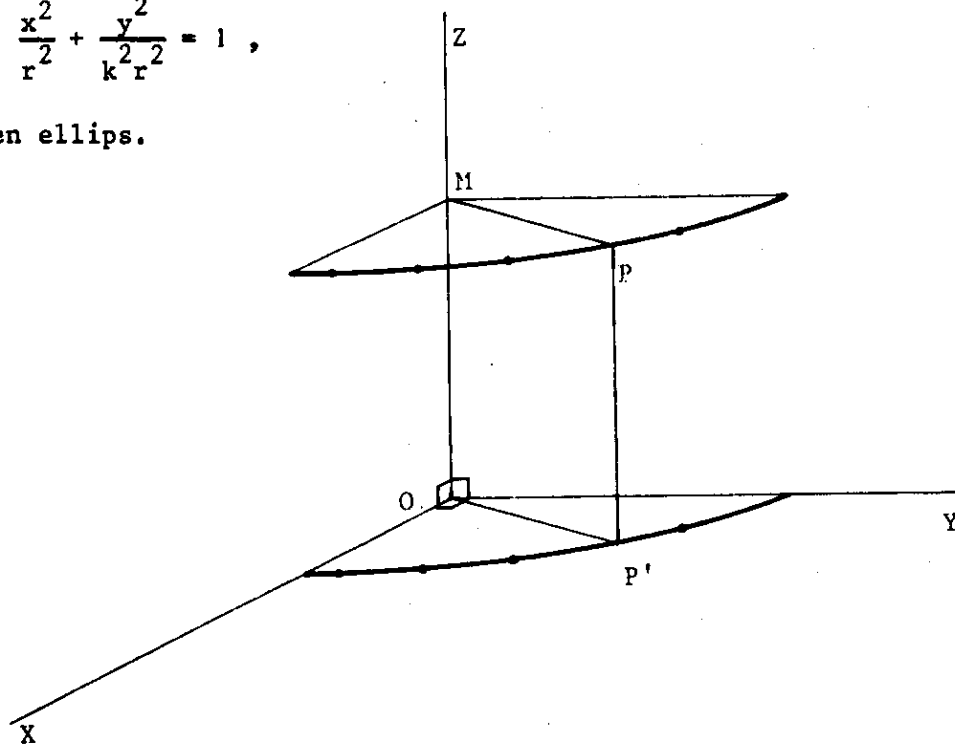
- 1) Stel het vlak van de cirkel is evenwijdig met τ . Is P een willekeurig punt van de cirkel en P' zijn projectie op τ , dan is $OP' = MP$ (waarom?). De projectie van de cirkel is dus een cirkel met O als middelpunt.
- 2) Stel het vlak α van de cirkel snijdt τ volgens ℓ . Kies de x-as $\parallel \ell$, dan snijdt α het XOZ-vlak volgens $m \parallel \ell$ (waarom?). Is P een willekeurig punt van de cirkel met straal r, $PQ \parallel m$ en $PR \perp m$, dan is $PQ^2 + PR^2 = r^2$. Wegens $PQ \parallel m$ is $P'Q' = PQ$, terwijl $P'R' = OQ' = MQ \cos \theta = PR \cos \theta$, zodat geldt

$$(P'Q')^2 + \left(\frac{P'R'}{\cos \theta}\right)^2 = r^2 .$$

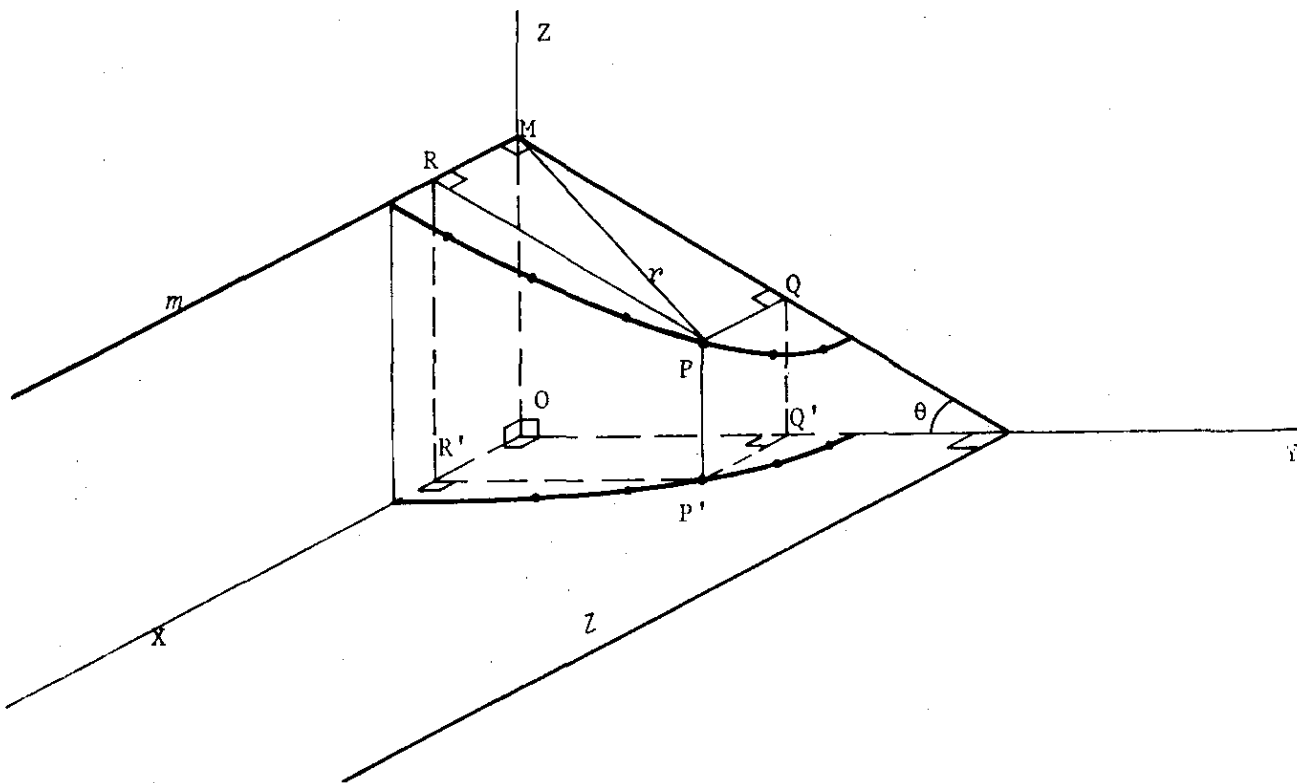
Stel $\cos \theta = k$, dan ligt P' op de kromme met vergelijking

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{k^2 r^2} = 1 ,$$

dus een ellips.



Figuur 19.

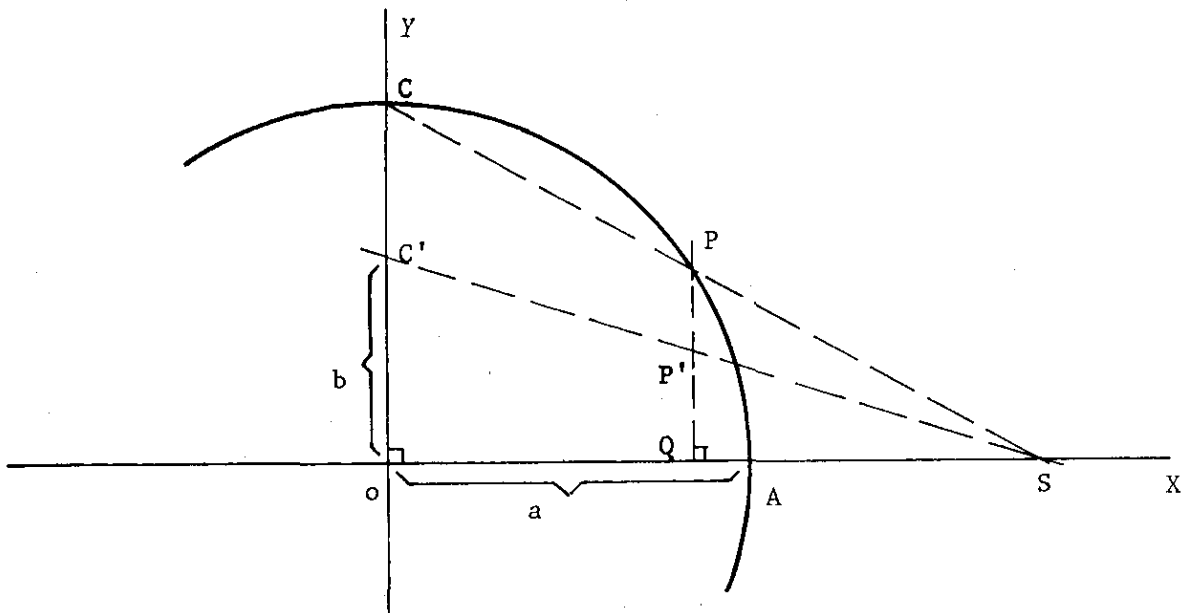


Figuur 20.

Opmerkingen.

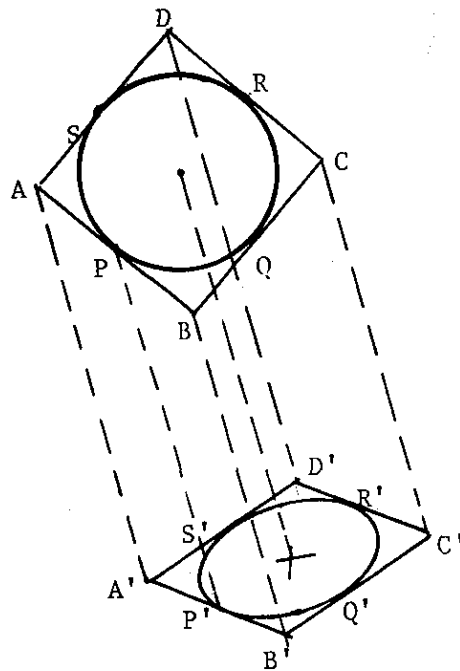
- 1) De projectie van het middelpunt van de cirkel is middel van de projectie.
- 2) De lange en de korte as van de ellips zijn projecties van twee onderling loodrechte middellijnen van de cirkel, waarvan er één evenwijdig met het vlak τ is.
- 3) Meetkundig of rekenend is te bewijzen dat de projectie van de raaklijn in een punt aan de cirkel, raaklijn aan de ellips is.

Uit het bovenstaand volgt een manier om een ellips punt voor punt te tekenen, als de lange en de korte as (lengtes $2a$ en $2b$) bekend zijn. (Zie figuur 21.) $OA = OC = a$ en $OC' = b$ ($b < a$). Is P een punt van cirkel $(0, a)$, dan is P' een punt van de ellips. Hierbij wordt P' verkregen door CP te snijden met de x -as (geeft S) waarna $C'S$ gesneden wordt met de lijn PQ die loodrecht op de x -as is. Met behulp van gelijkvormigheid volgt nl. dat $P'Q : PQ = b : a$. Voor P geldt $x^2 + y^2 = a^2$ en voor P' geldt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ga na!).



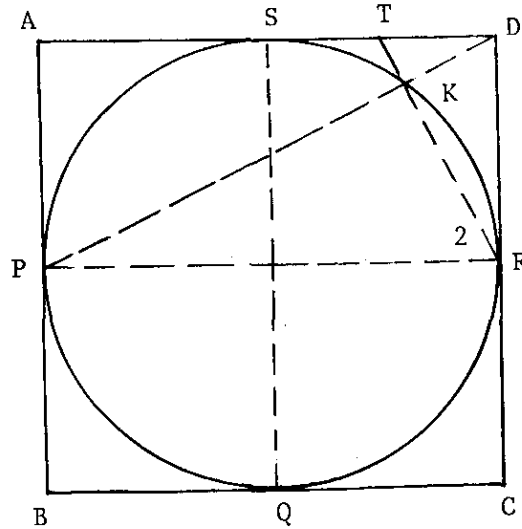
Figuur 21.

Bij het praktische tekenwerk wordt de beschreven methode zelden gebruikt. Vaak wordt een willekeurig omgeschreven vierkant van de cirkel genomen en dit wordt geprojecteerd (zie figuur 22). Het vierkant ABCD gaat dan over in een parallellogram A'B'C'D' waarvan de zijden raken aan de ellips, terwijl de raakpunten P, Q, R en S overgaan in P', Q', R' en S', die middens zijn van de zijden (st. 2.7).



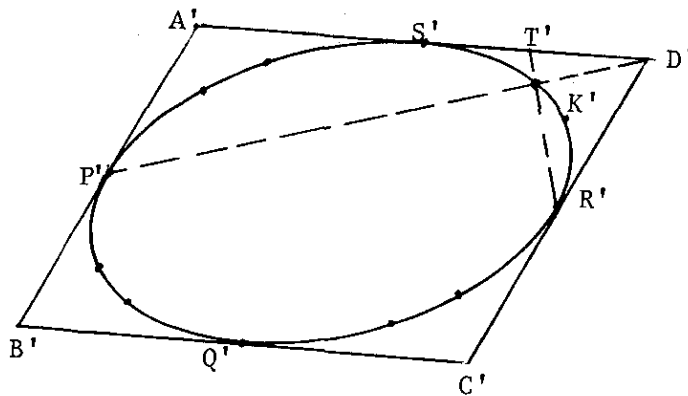
Figuur 22.

Op deze wijze worden echter slechts 4 punten van de ellips gevonden, hetgeen vaak te weinig is. Om dit te verhelpen het volgende: (zie figuur 23). Is T het midden van SD en K snijpunt van DP en TR dan geldt: $\tan \angle P_1 = \tan \angle R_1 = \frac{1}{2}$, zodat $\angle P_1 = \angle R_1$, dus $\angle R_2 = \frac{\pi}{2} - \angle R_1 = \frac{\pi}{2} - \angle P_1$; conclusie: $\angle K_1 = \pi/2$, dus K op de cirkel.



Figuur 23.

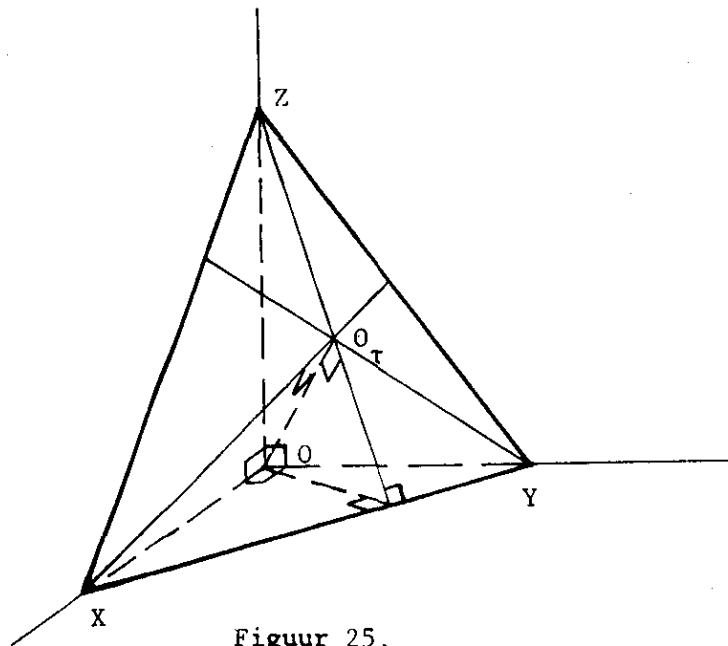
N.B. Deze constructie kan acht keer uitgevoerd worden. In projectie is K' een punt van de ellips en K' ontstaat als snijpunt van $P'D'$ en $R'T'$ (st. 2.7). In figuur 24 zijn de in totaal twaalf punten van de ellips aangegeven, maar de constructielijnen bijna alle weggelaten.



Figuur 24.

3. Axometrie

3.1. Beschouw (in figuur 25) het rechthoekig assenkruis en ΔXYZ , de zgn. axonometrische driehoek. Zoals reeds in 1.4 is aangeduid, wordt ΔXYZ als tafereel τ genomen, d.w.z. de te tekenen figuren worden orthogonaal op τ geprojecteerd;



Figuur 25.

We hebben hier dus te doen met een orthogonale (parallel-) projectie. Met behulp van bijv. de cosinusregel in ΔXYZ kan men bewijzen dat ΔXYZ scherphoekig is (ga na).

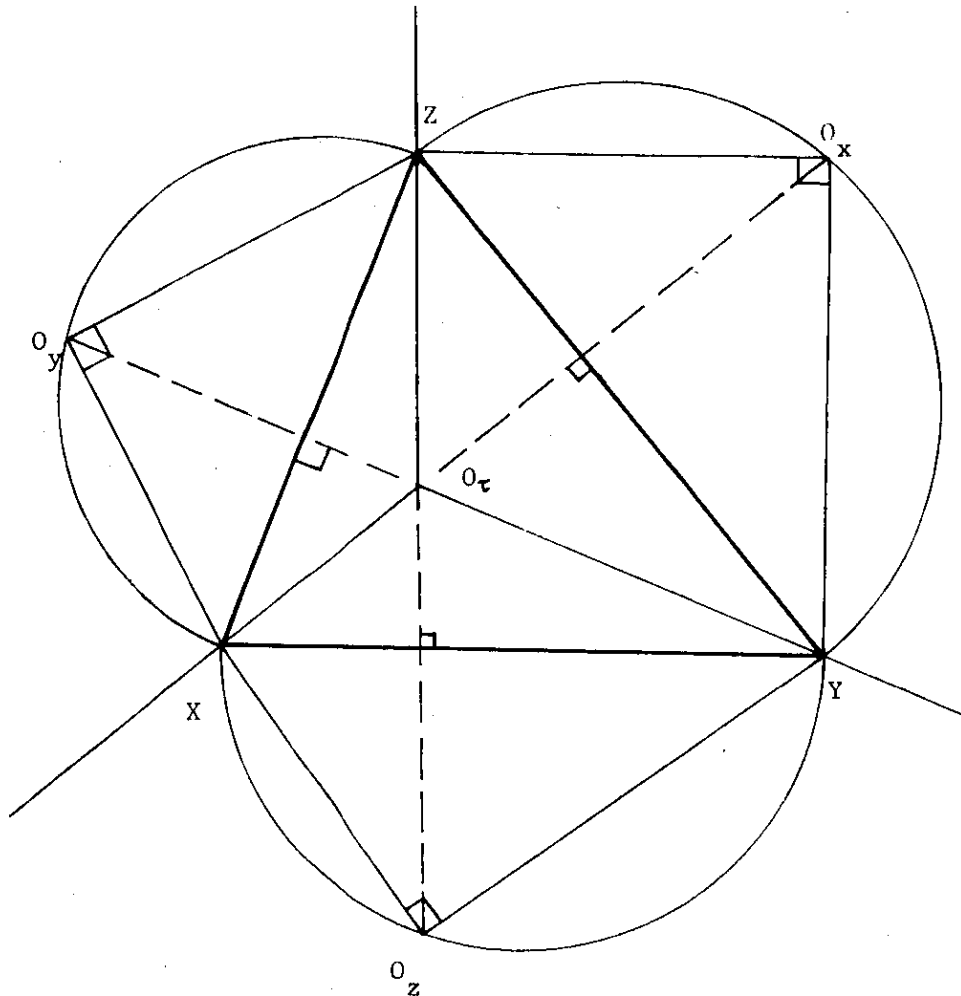
Verder speelt O_τ , de projectie van O op τ in deze projectiemethode een belangrijke rol. Het blijkt nl. het hoogtepunt van ΔXYZ te zijn.

Immers: $OO_\tau \perp \tau$, dus $OO_\tau \perp XY$. Tevens is $OZ \perp XOY$, dus $OZ \perp XY$, zodat $XY \perp OO_\tau Z$ is, dus $XY \perp ZO_\tau$. Op analoge manier bewijst men dat XO_τ en YO_τ hoogtelijnen van ΔXYZ zijn.

Een punt wordt vastgelegd met behulp van 3 coördinaten, afgemeten langs OX , OY en OZ . Alle lijnstukken langs of evenwijdig met OX worden met dezelfde factor verkort (st. 2.7); hetzelfde geldt in y -richting en in z -richting. Noemen we deze factoren k_x , k_y en k_z , dan geldt (weer wegens st. 2.7)

$$k_x = \frac{XO_\tau}{XO}, \quad k_y = \frac{YO_\tau}{YO} \quad \text{en} \quad k_z = \frac{ZO_\tau}{ZO}.$$

Om bij gegeven ΔXYZ die verhoudingen te vinden gaat men als volgt te werk. (Zie de figuren 25 en 26). ΔXOY wordt om XY als as gewenteld, tot hij in het vlak XYZ ligt (analoog voor ΔYOZ en ΔZOX). Het punt O beschrijft bij deze



Figuur 26.

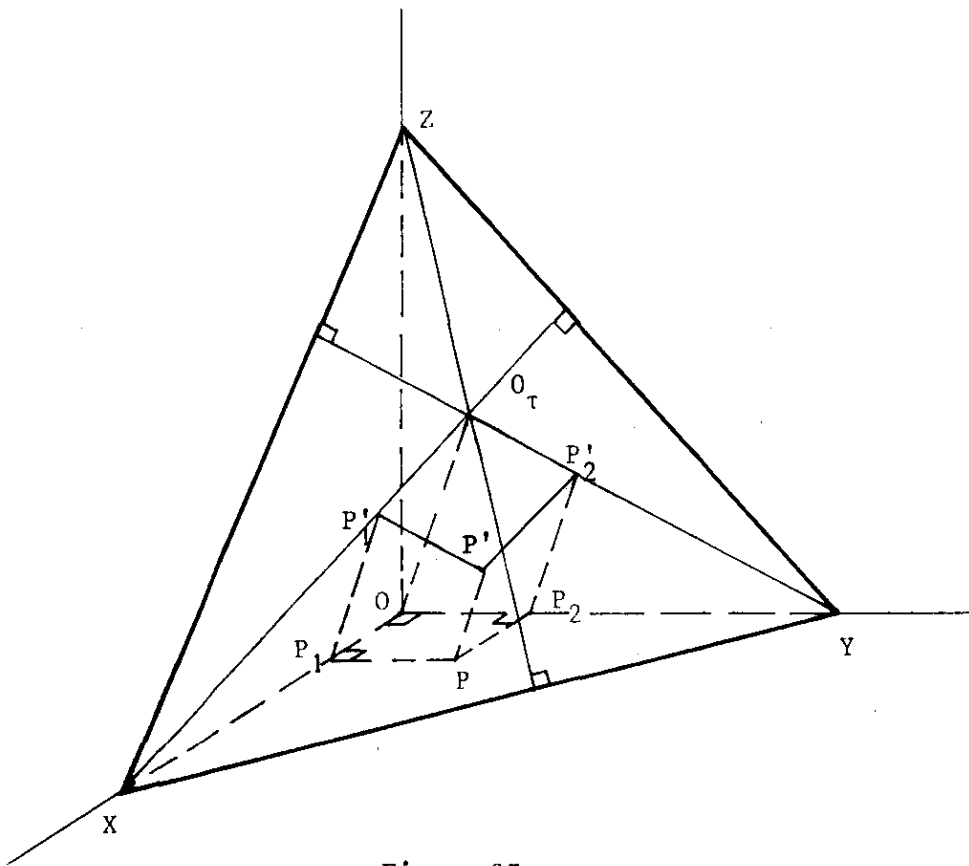
wenteling een cirkelboog, gelegen in het vlak door O en loodrecht op XY , zodat na wenteling O_z op het verlengde van ZO_τ ligt. Ook ligt O_z op een halve cirkel met XY als middellijn (waarom?). Zo worden ook O_x en O_y gevonden.

Basisconstructies

3.2. Constructie van de projectie P' van $P(a,b,0)$

P_1 en P_2 zijn de orthogonale projecties van $P(a,b,0)$ op respectievelijk de x -as en de y -as (figuur 27).

P'_1 , de orthogonale projectie van P_1 op τ ligt op XO_τ , omdat $P_1P'_1 \parallel OO_\tau$; iets dergelijks geldt voor P'_2 . De orthogonale projectie van rechthoek OP_1PP_2 op τ is een parallellogram (st. 2.6) zodat P' te construeren is.



Figuur 27.

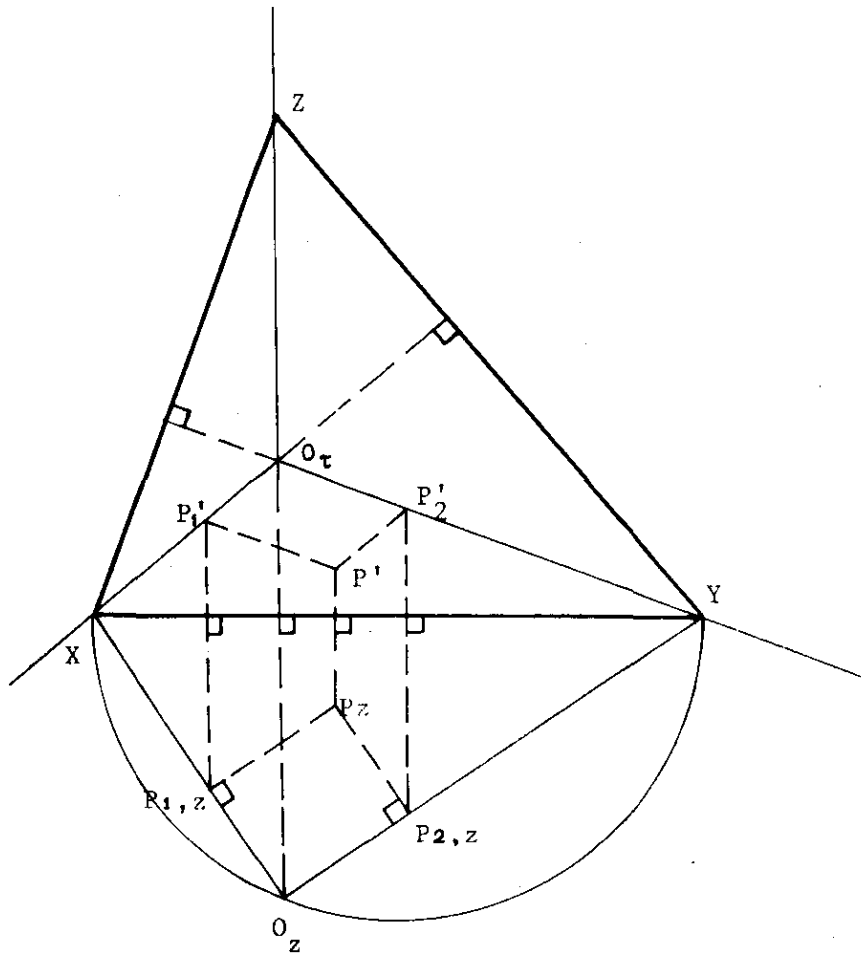
Blijkbaar zijn P'_1 en P'_2 voor de constructie belangrijk. Met behulp van de neergeslagen ΔXOY ontstaan ze uit P_1 en P_2 . In figuur 28 is dit uitgevoerd. In ΔXO_2Y is de ware gedaante van de rechthoek OP_1PP_2 aangegeven en daaruit is het parallellogram $O_\tau P'_1P'P'_2$ geconstrueerd. (Waarom is bijv. $P'P_2 \perp XY$?)

Enige voorbeelden

1) In figuur 29 in de projectie getekend van de regelmatige zeshoek ABCDEF, gelegen in het grondvlak XOY, met middelpunt in O, terwijl de diagonaal $AD \parallel \tau$ is, zodat $A'D' \parallel xy$ is. In XO_2Y is de zeshoek in ware gedaante getekend. In principe is de projectie van elk punt te vinden met behulp van de in figuur 28 uitgevoerde methode. Er zijn echter vele handigheden die stereometrisch verantwoord zijn en de tekenaar helpen.

1°. De projectie van het middelpunt is middelpunt van de projectie.

2°. $AD \parallel \tau$, dus $A_z D_z \parallel XY$ en $A'D' \parallel XY$, terwijl de lengten van $A'D'$ en $A_z D_z$ gelijk zijn. Bovendien is $A'A_z \perp XY$ (evenals $D'D_z$).



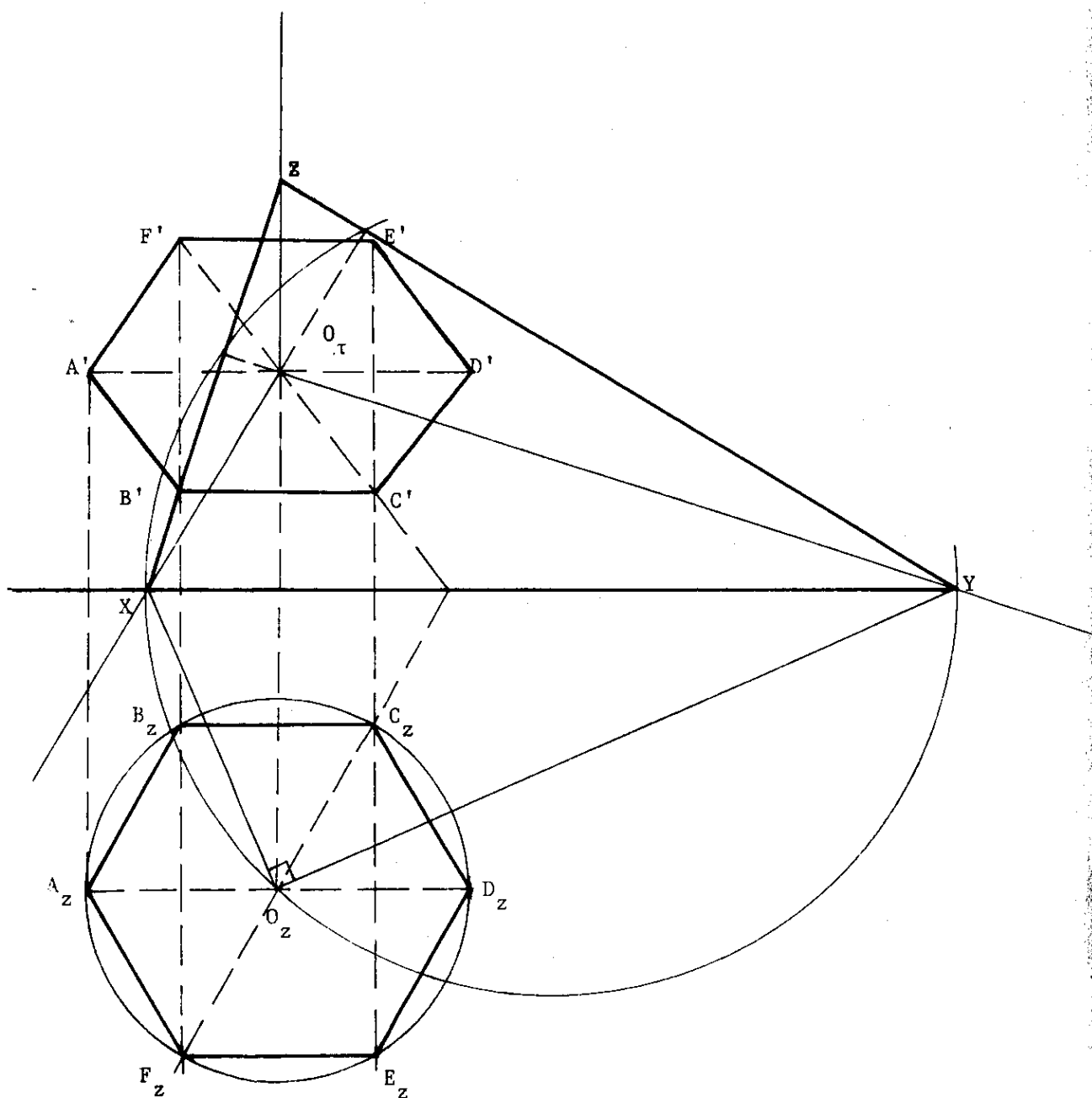
Figuur 28.

3°. $F_z C_z$ en $F' C'$ snijden elkaar op XY (waarom?). Hiermede zijn F' en C' bepaald.

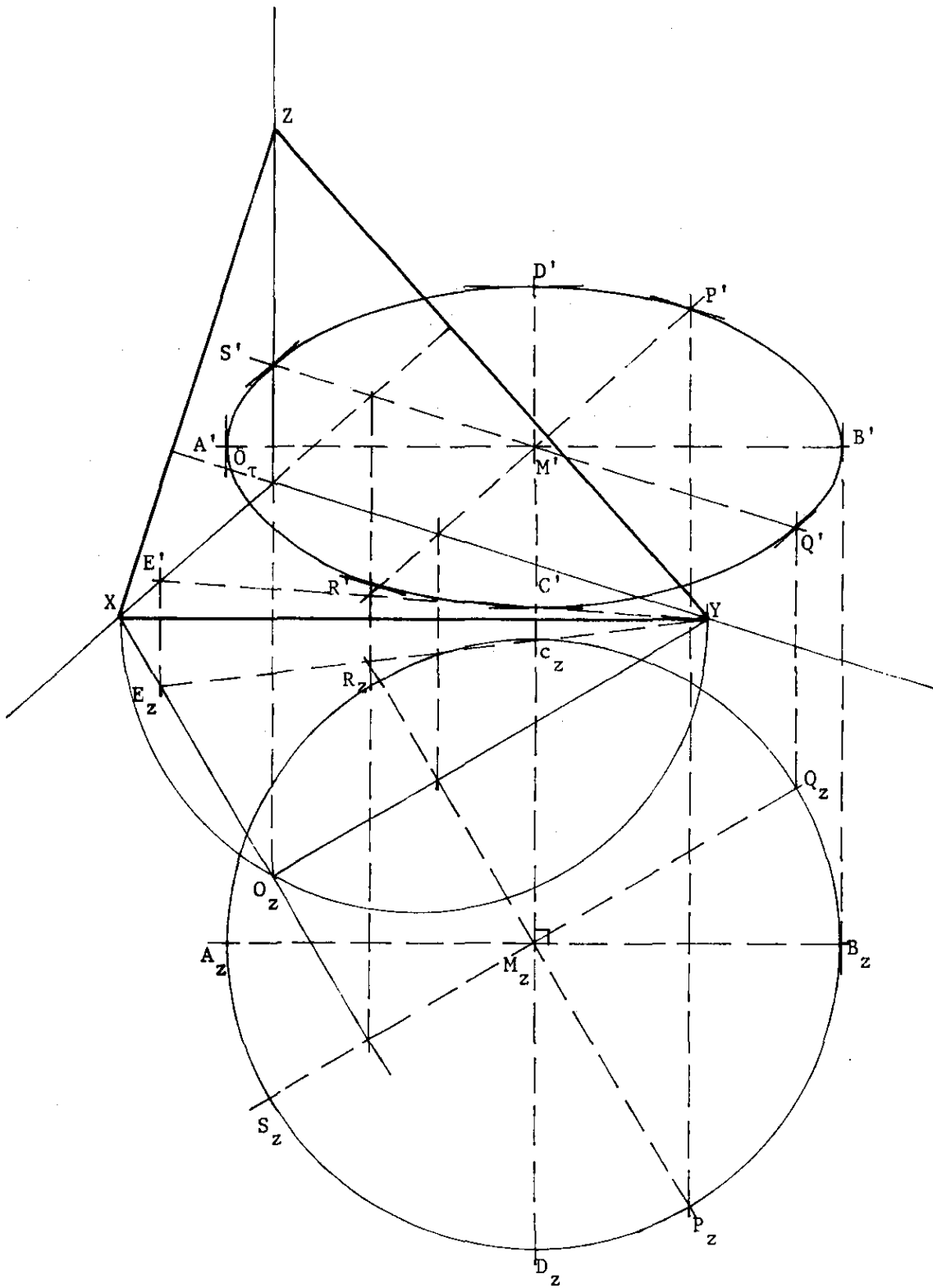
4°. $B_z C_z \parallel XY$, dus $B' C' \parallel XY$. Hiermee is B' bepaald en op analoge wijze E' .

- 2) In figuur 30 is de projectie van een cirkel getekend, gelegen in het XOY -vlak, met middelpunt $(-3, 3, 0)$ en straal 5. Eerst is de neergeslagen stand van de cirkel getekend (in $XO_z Y$). Van het middelpunt M_z is de projectie bepaald met behulp van de methode, behandeld in figuur 28. Middellijn $A_z B_z \parallel XY$, dus $A' B'$ is de lange as van de ellips (en eveneens evenwijdig met XY). $C_z D_z \perp A_z B_z$, dus $C' D'$ is de korte as van de ellips. C' is als volgt bepaald: $Y C_z$ snijdt XO_z in E_z , zodat $Y C'$ de lijn XO_τ in E' snijdt.

Verder is $C'M' = M'D'$. Met behulp van de lange en de korte as is de ellips punt voor punt te construeren (zie ook figuur 21). In de neer-
geslagen stand zijn ook de raakpunten P, Q, R en S geconstrueerd, be-
horend bij het omgeschreven vierkant, waarvan de zijden evenwijdig met
 OX en OY zijn. In projectie is $Q'S' \parallel O_{\tau}Y$ terwijl $P'R' \parallel O_{\tau}X$ is. Ten-
einde de figuur niet te vol te maken zijn in projectie slechts raak-
lijnen in de vier punten getekend, maar niet het gehele omgeschreven
parallellogram.



Figuur 29.

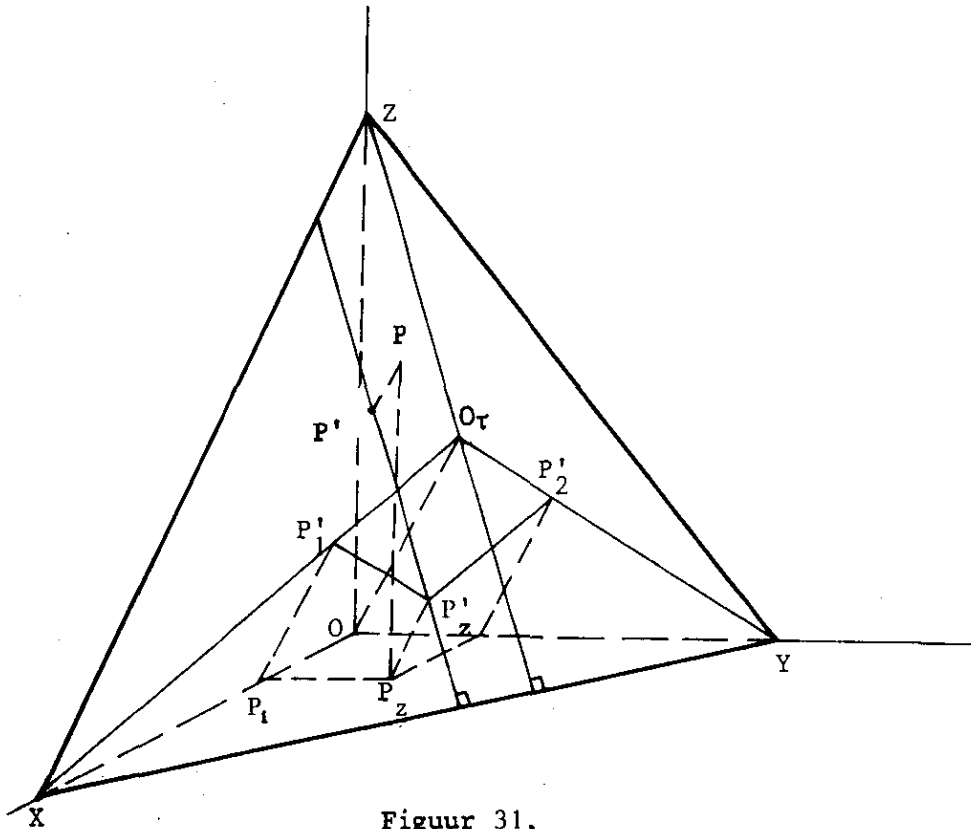


Figuur 30.

3.3. Constructie van de projectie P' van P(a,b,c)

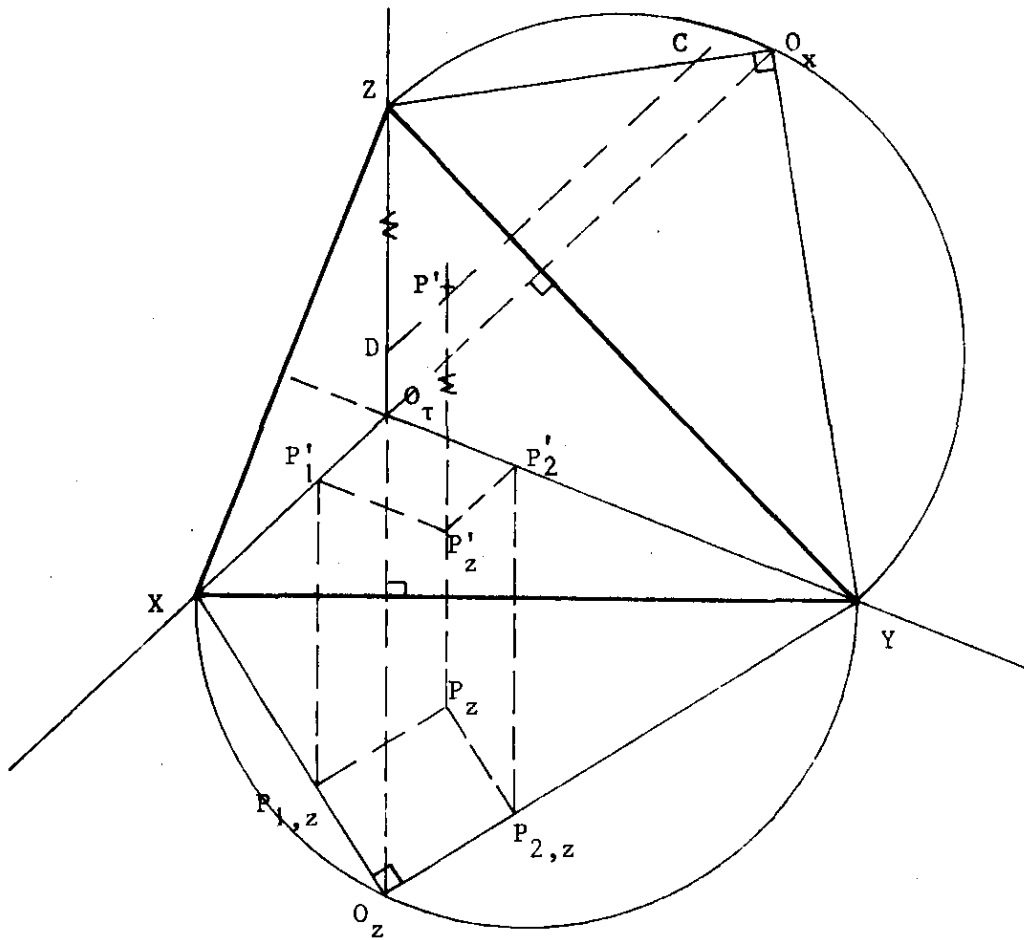
Zij P een gegeven punt in de ruimte (zie figuur 31) en P_z de orthogonale projectie van P op XOY. P_1 en P_2 zijn de orthogonale projecties van P_z op de X-as resp. de Y-as. Op de manier van figuur 27 is P'_z , de projectie van P_z op τ , bepaald. Nu is $PP_z \parallel OZ$, dus $P'P'_z \parallel O_\tau Z$ (dus $\perp XY$). Tevens is $PP' \parallel OO_\tau$, zodat P' bekend is. Uit stelling 2.7 volgt dat

$$\frac{P'P'_z}{PP_z} = \frac{ZO_\tau}{ZO} = k_z .$$



Figuur 31.

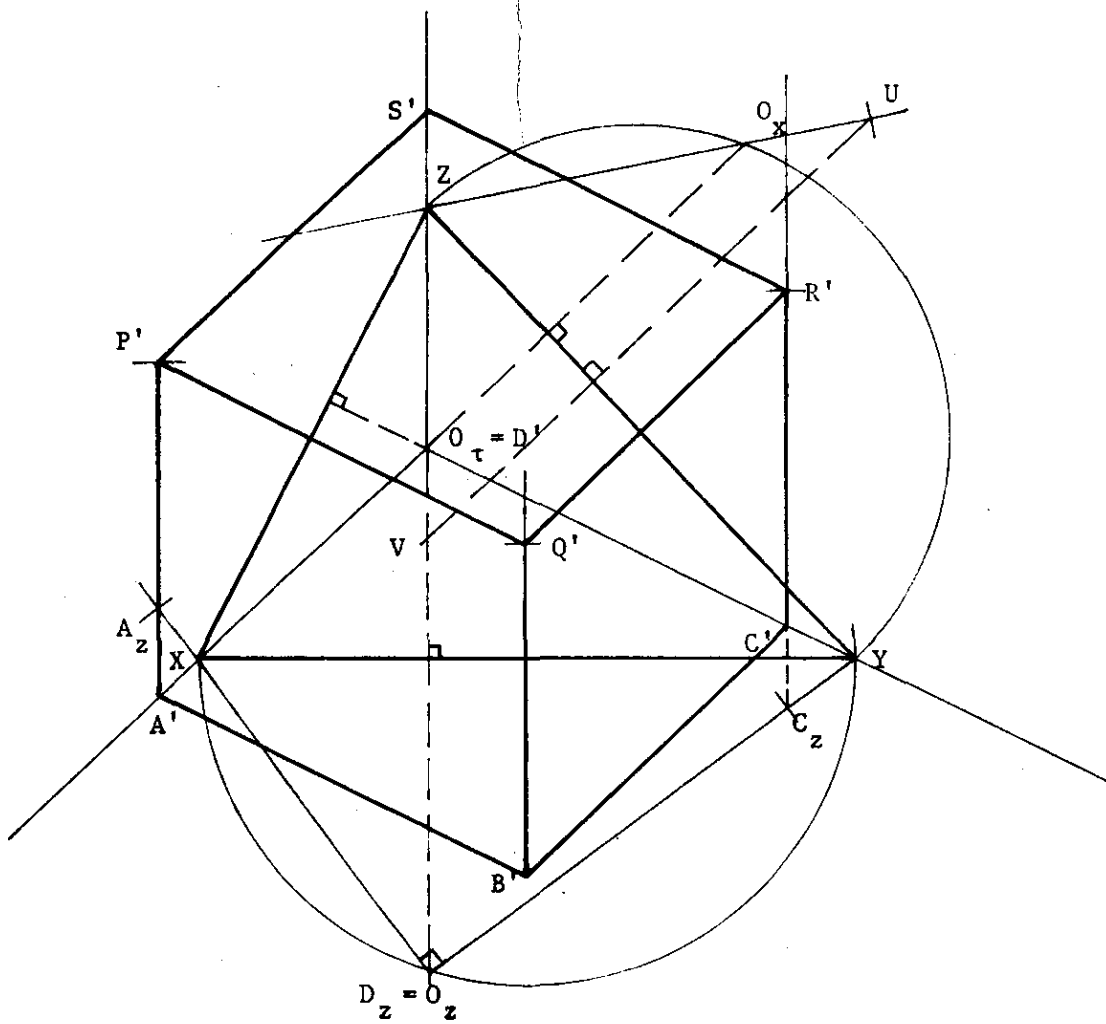
Beschouw nu figuur 32. De projectie P'_z van P_z is op de bekende wijze geconstrueerd. P' ligt op de rechte door P'_z en loodrecht op XY. Om de lengte van $P'P_z$ te bepalen, passen we op ZO_x de ware lengte van de derde coördinaat van P af (hier ZC). Door $CD \parallel O_x O_\tau$ te trekken, vinden we ZD en daarmee de gezochte lengte.



Figuur 32.

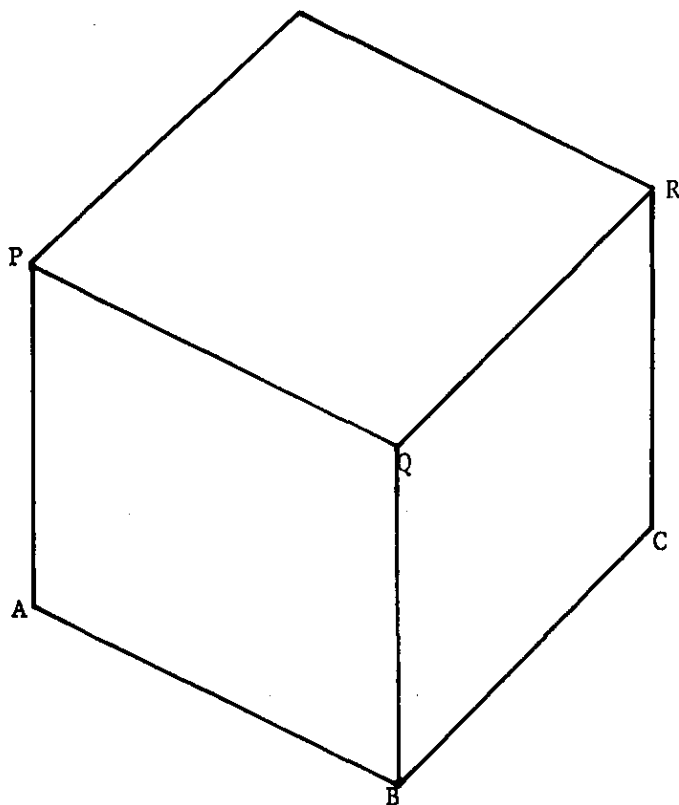
Enige voorbeelden

- 1) De projectie van de kubus $\begin{matrix} PQRS \\ ABCD' \end{matrix}$, waarbij AD langs de x-as ligt en CD langs de y-as, terwijl de ware lengte van de ribbe 6 cm is (figuur 33). Om de tekening te maken zijn de $\triangle OYX$ en OYZ neergeslagen. Langs $O_z X$, $O_z Y$ en $O_x Z$ is de ribbe uitgezet, waarmee we de lengten van de projecties in de drie richtingen vonden. Hiermee zijn de punten A', C' en S' bepaald. Daarna is het parallellepipedum geschetst. In figuur 33a is dezelfde kubus nog eens getekend, nu ontgaan van alle constructielijnen. Hierbij zijn de "onzichtbare" ribben weggelaten. Soms worden deze voor de duidelijkheid wel getekend, maar dan gestreept.



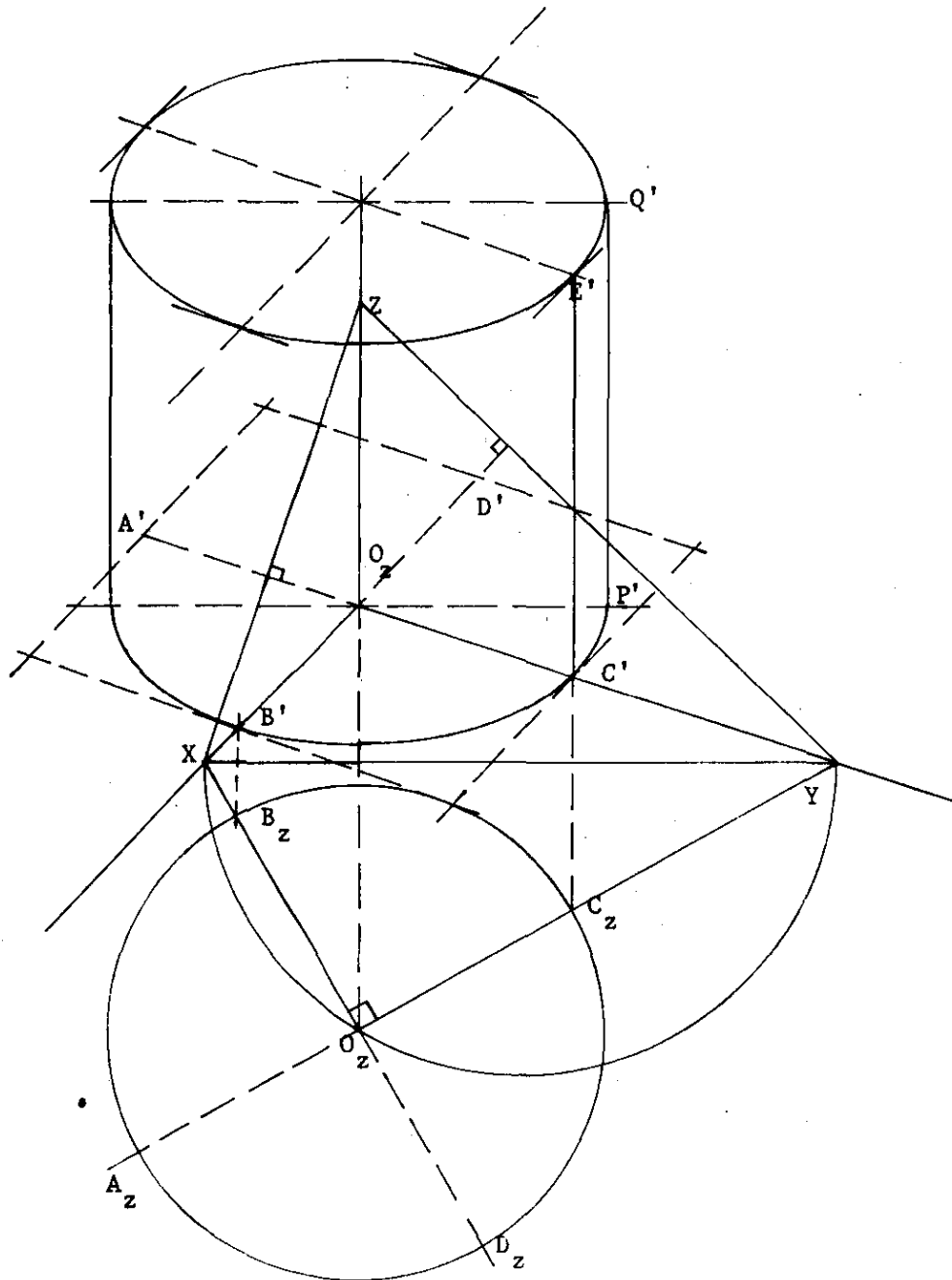
Figuur 33.

S



Figuur 33a.

- 2) In figuur 34 is een cylinder getekend. De straal van de grondcirkel en de hoogte zijn gegeven, terwijl de as langs de z-as valt.

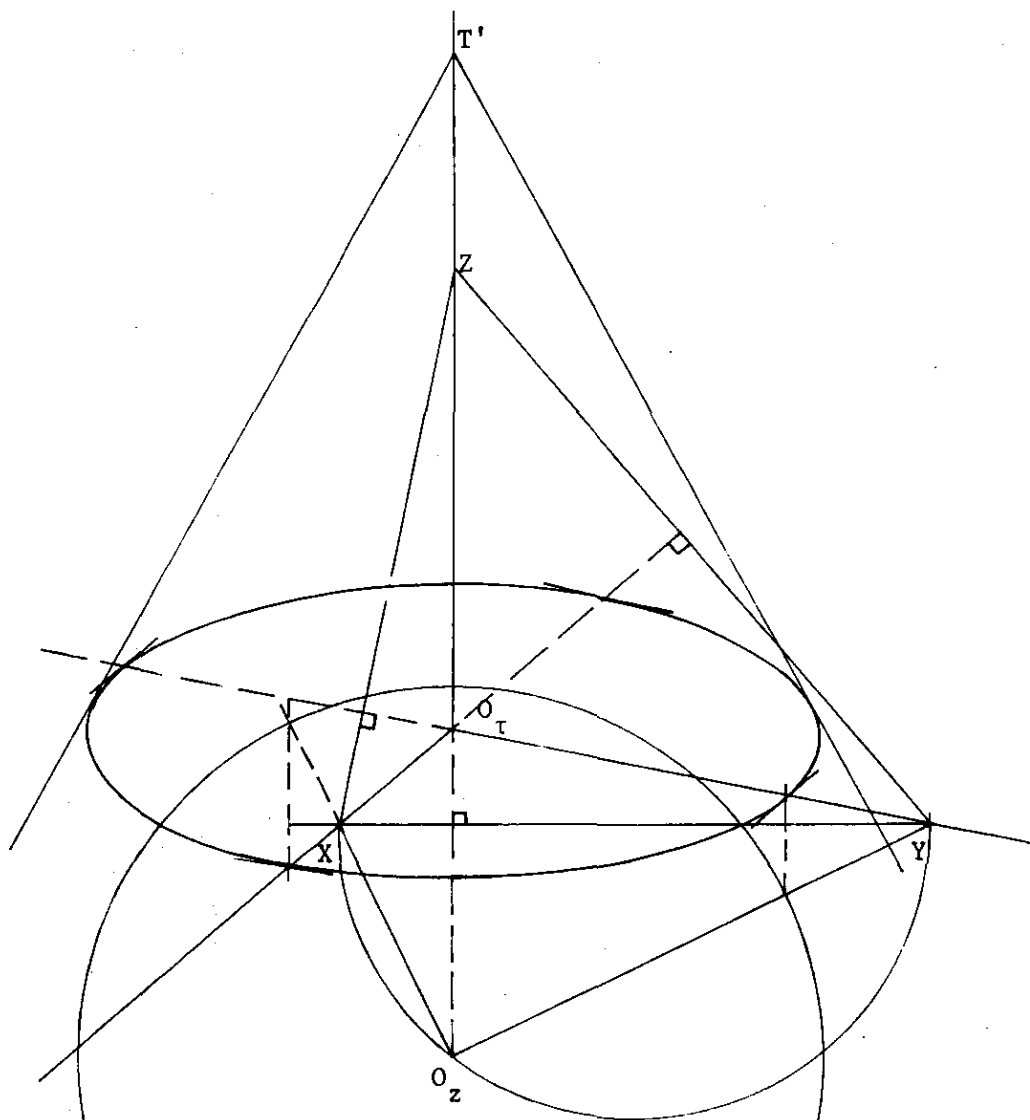


Figuur 34.

Allereerst wordt de "grondcirkel" in XO_zY met een omgeschreven vierkant getekend, waarvan de zijden evenwijdig met de X-as resp. de Y-as zijn. (Om de tekening niet te vol te maken zijn slechts de raakpunten A_z , B_z , C_z en D_z getekend.) In projectie ontstaat nu de ellips met het omgeschre-

ven parallellogram. Door deze ellips in de z-richting te verschuiven (over afstand: hoogte $\times k_z$) ontstaat de ellips van het bovenvlak. Daarmee is echter de projectie van de cylinder nog niet klaar. De verbindingsrechte C'E' van twee raakpunten is wel een beschrijvende lijn van de cylinder, maar niet de rand. Deze ontstaat als de meest "linker" en de meest "rechter" punten van de ellipsen met elkaar worden verbonden (hier bijv. P' en Q'). Deze punten worden in XO_zY gevonden als raakpunten met verticale raaklijn (waarom?). In projectie zijn dit de raaklijnen aan de lange as van de ellips.

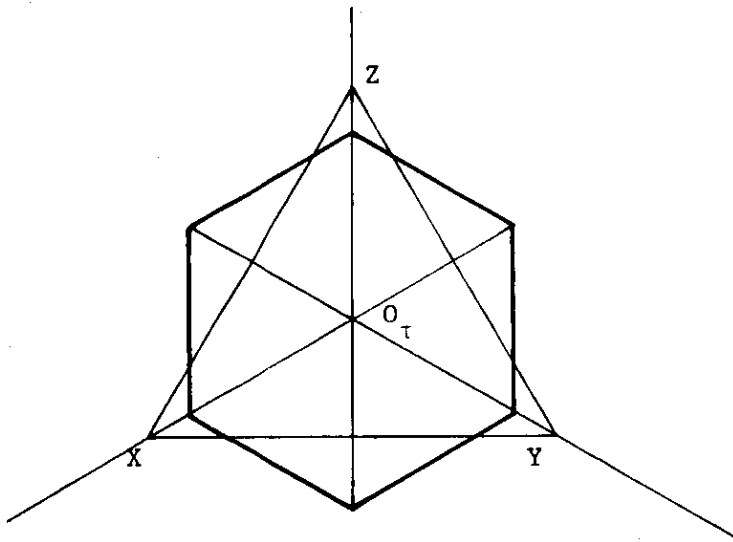
Opmerking. Bij een kegel (zie figuur 35) is dit alles veel lastiger. De goede manier is het trekken van raaklijnen uit de top T' aan de ellips. In het bestek van dit dictaat is het niet mogelijk, in te gaan op het hoe en waarom. Er bestaan constructiemethoden voor deze raaklijnen.



Figuur 35.

3.4. De axonometrische driehoek

In het voorafgaande is besproken dat bij een gegeven axonometrische driehoek de drie coördinaten van een punt ten gevolge van het projecteren verkort worden, d.w.z. resp. vermenigvuldigd met k_x , k_y en k_z . Wiskundig is het onbelangrijk welke die factoren zijn, maar ze hebben wel invloed op de duidelijkheid van de schets. Wordt bijvoorbeeld ΔXYZ gelijkzijdig genomen, dan is $k_x = k_y = k_z$ (men spreekt van isometrie). In figuur 36 is te zien dat deze isometrie niet altijd handig is. Hier is nl. de projectie van een kubus getekend die rust tegen de coördinaatvlakken.

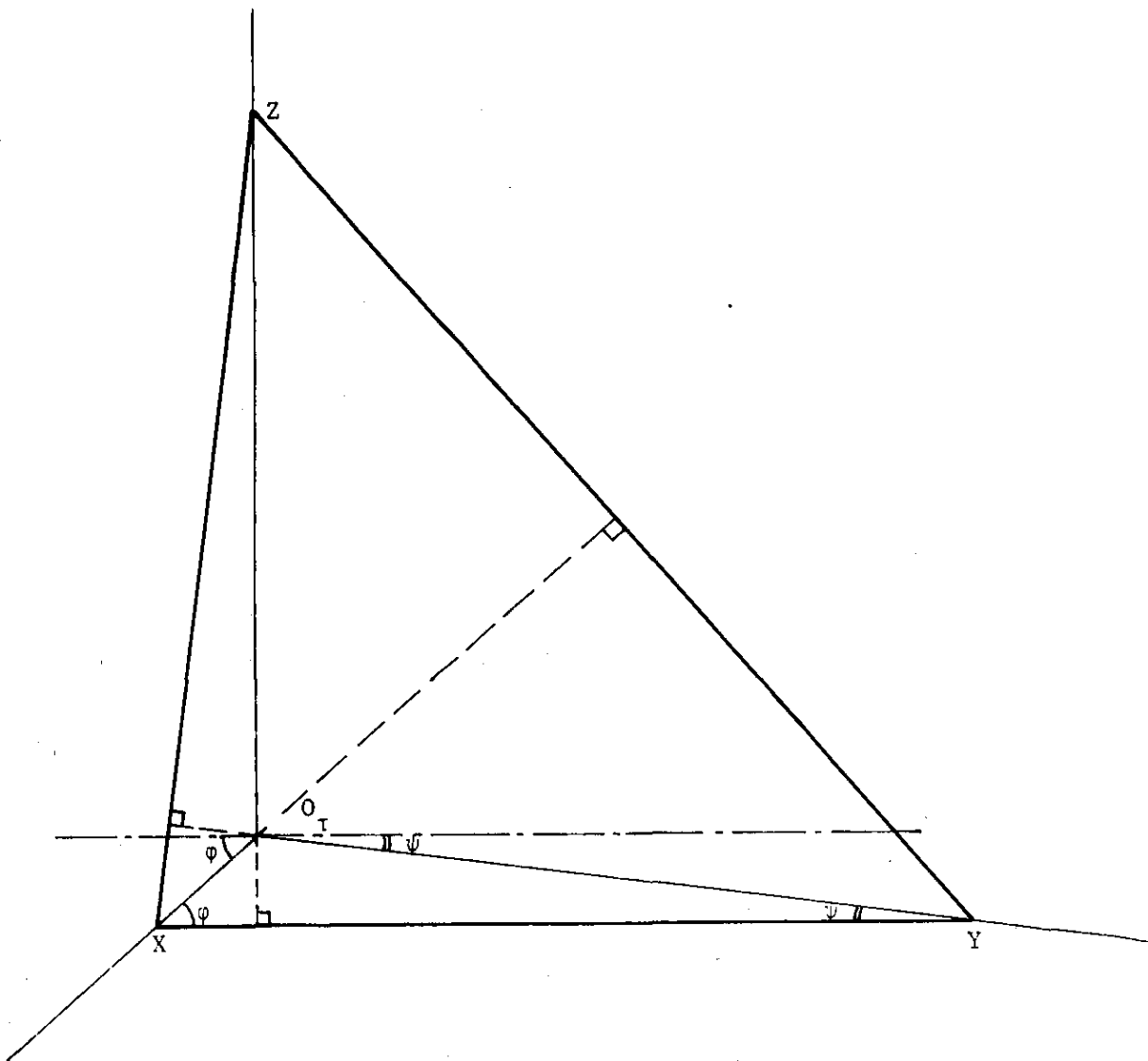


Figuur 36.

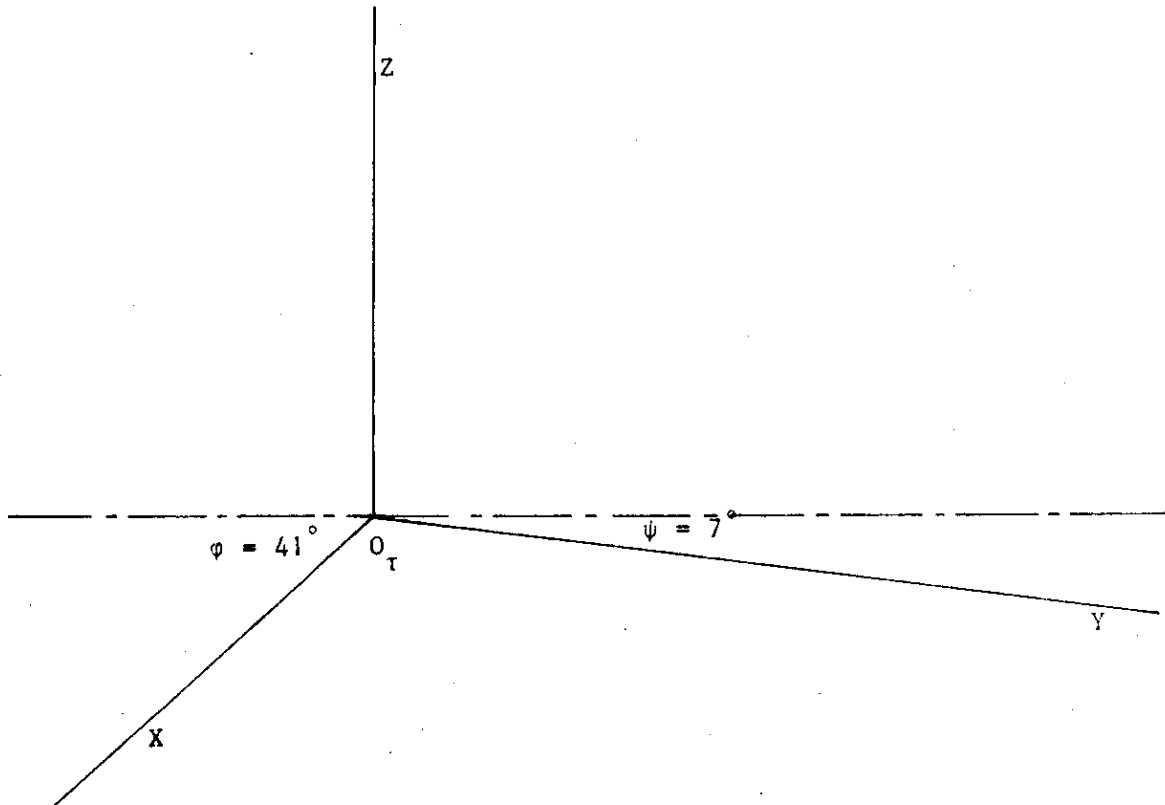
Toch wordt deze isometrie wel gebruikt, juist vanwege het voordeel dat $k_x : k_y : k_z = 1 : 1 : 1$.

Een vaak voorkomend axonometrische driehoek is getekend in figuur 37. Deze is zò bepaald dat $\tan \varphi = 7/8$ en $\tan \psi = 1/8$. Na enig rekenen blijkt nu dat $k_x : k_y : k_z = 0.500 : 0.999 : 1.004$ (in drie decimalen nauwkeurig). In de praktijk neemt men $k_x : k_y : k_z = \frac{1}{2} : 1 : 1$. Meer spreekt men van een dimetrische driehoek. Wil men met dimetrie werken, dan kan men op de tekentafel de bijbehorende driehoek aldus opbouwen. Door O_τ wordt (zie figuur 37) een

horizontale lijn getekend, daarna de hoeken φ en ψ afgezet, waarbij men $\varphi = 41^\circ$ en $\psi = 7^\circ$ neemt ($\tan 41^\circ = 0.869\dots$ en $\tan 7^\circ = 0.123\dots$). Men kan nu op naar linksonder lopende lijn een punt X nemen en de driehoek voltooien. In vele gevallen, zoals bijv. in figuur 38, is het voldoende om de drie assen te hebben. Het belangrijkste is dat als $P(a,b,c)$ gegeven is, dat dan om P' te vinden langs de x-as $\frac{1}{2}a$, langs de y-as b en langs de z-as c kan worden afgezet.



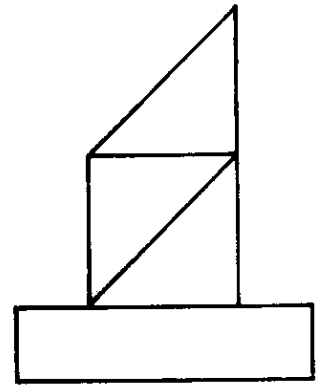
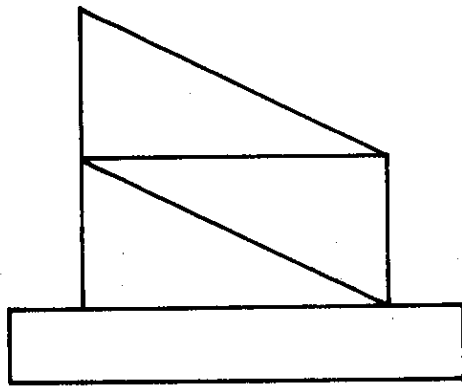
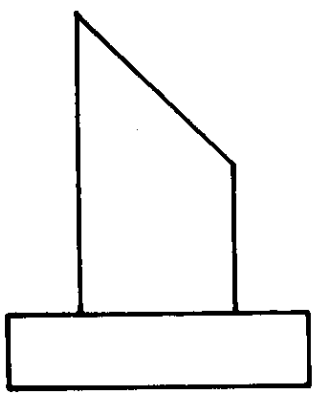
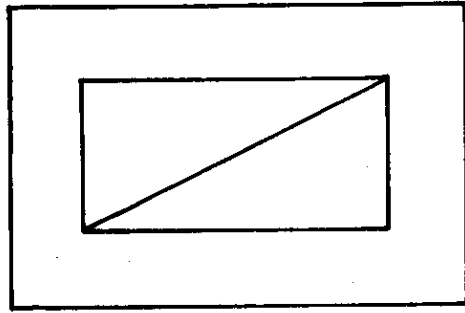
Figuur 37.



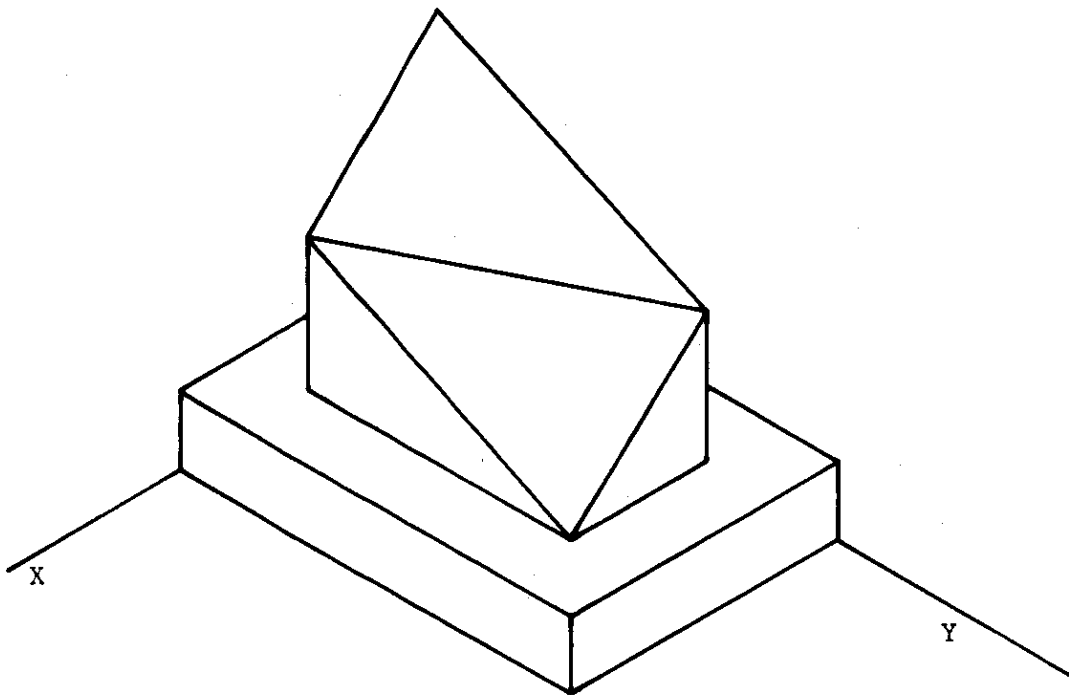
Figuur 38.

Voorbeeld. In figuur 39a zijn in Amerikaanse projectie 4 aanzichten gegeven van een voorwerp of een voetstuk. In figuur 39b is in isometrie het geheel getekend. De maten van lengte, breedte en hoogte zijn in de drie asrichtingen in ware gedaante overgenomen (dat kan omdat $k_x : k_y : k_z = 1 : 1 : 1$). De assen snijden elkaar overigens onder hoeken van 120° . De z-as is weggelaten. In figuur 39c is het voorwerp met voetstuk in dimetrie getekend ($k_x : k_y : k_z = \frac{1}{2} : 1 : 1$). In y- en z-richting zijn de maten uit figuur 39a overgenomen, in x-richting zijn ze gehalveerd.

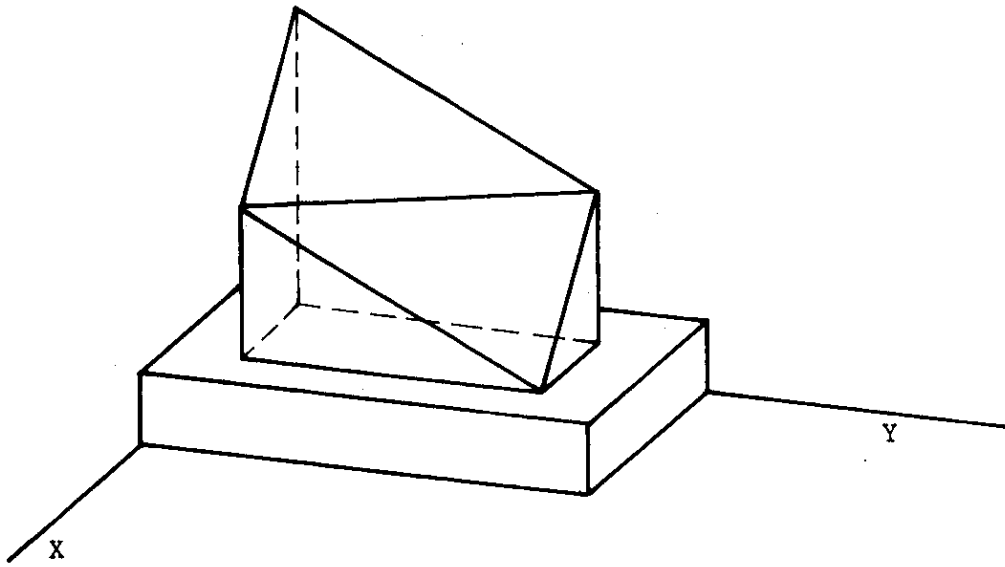
Opmerking. Het is soms duidelijk om nog enige onzichtbare lijnen gestreept aan te geven, zoals in figuur 39c is gebeurd.



Figuur 39a.



Figuur 39b.



Figuur 39c.