

2.296.

Bibl/Mag

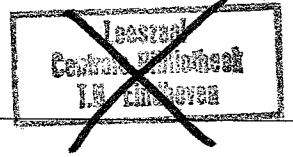
**THE**

Technische Hogeschool  
Eindhoven

Dictaatnummer 2.296

Prijs f. 13,50

# Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

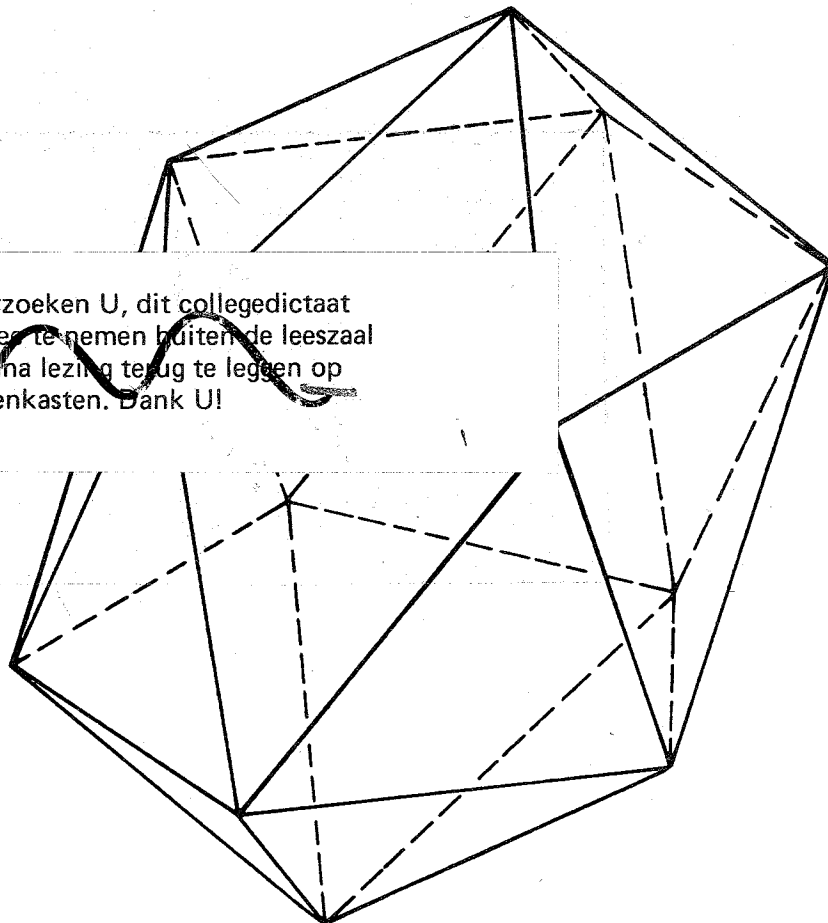


A T C  
0 1  
T H E

## Meetkunde voor B

B M A

Wij verzoeken U, dit collegedictaat  
niet mee te nemen buiten de leeszaal  
en het na lezing terug te leggen op  
de ladenkasten. Dank U!



2.296

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

**MEETKUNDE**

**VOOR**

**BOUWKUNDE**

**Voorjaar 1982**

Leeszaal  
Centrale Bibliotheek  
T.H. Eindhoven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

BIBLIOTHEEK
8 200627
T.H. EINDHOVEN

Meetkunde voor B

Voorjaar 1982

Jan 1982

	<u>Inhoudsopgave</u>	Pag.
0	Inleiding	1
1	<u>Enige eigenschappen uit de stereometrie</u>	2
2	<u>Eigenschappen behorend bij parallelprojecties</u>	8
3	<u>Orthogonale projectie (Amerikaanse)</u>	21
3.1	De projecties van een punt	24
3.2	De projecties van een rechte lijn	26
3.3	Bijzondere lijnen	27
3.4	Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak	29
3.5	Bijzondere vlakken	33
3.6	Onderlinge ligging van vlakken	34
3.7	Snijpunt van een lijn met een vlak	35
3.8	Perspectiviteit en affiniteit	36
3.9	Het wentelen van vlakken	39
3.10	Loodrechte stand, hoeken, afstanden	49
3.11	Het wentelen van een ruimtelijk lichaam	52
3.12	Schaduwconstructies	55
4	<u>Orthogonale axonometrie</u>	60
4.1	Inleiding	60
4.2	Constructie van de projectie van P (a,b,c)	62
4.3	De axonometrische driehoek XYZ	66
4.4	Punten en lijnen	69
4.5	Lijnen en vlakken	71
4.6	Het neerslaan van vlakken	75
4.7	Loodrechte stand, hoeken, afstanden	81

	Pag.
5 <u>Scheve parallelprojectie</u>	84
5.1   Inleiding	84
5.2   Lijnen en vlakken	87
5.3   Onderlinge ligging van vlakken	89
5.4   Snijpunt van lijn en vlak	90
5.5   Het neerslaan van vlakken	91
5.6   Loodrechte stand en hoeken	95
5.7   Het wentelen van een lichaam	99
5.8   Schaduwconstructies	101
6 <u>Over kegelsneden</u>	103
6.1   De dubbelverhouding, pool en poollijn	103
6.2   Poolverwantschap	113
6.3   Het projecteren van een cirkel	116
6.4   Pool en poollijn van een kegelsnede	121
6.5   Constructie van de projectie van een cirkel	121
7 <u>Cilinder, kegel en bol</u>	129
7.1   Inleiding	129
7.2   De cilinder	131
7.3   De kegel	137
7.4   De bol	142
8 <u>Centrale projectie (perspectief)</u>	153
8.1   Inleiding	153
8.2   De projectie van een punt	155
8.3   De projectie van een lijn	156
8.4   Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak	165

	Pag.	
8.5	Onderlinge ligging van vlakken	170
8.6	Snijpunt van een lijn $l$ met een vlak $\alpha$	173
8.7	Het wentelen van vlakken	175
8.8	Loodrechte stand, hoeken, afstanden	184
8.9	Enige voorbeelden	188
9	<u>Diversen</u>	197
9.1	Kegelsneden	197
9.2	De ellips	202
9.3	De hyperbool	206
9.4	De parabool	209
9.5	Omwentelingsoppervlakken	212
9.6	Doorsneden van een vlak met een omwentelingsoppervlak	216
9.7	Snijpunten van een rechte met een omwentelingsoppervlak	220
9.8	Raakvlak in een punt van een omwentelingsoppervlak	221
9.9	Schijnbare omtrek en schaduw	223
9.10	Het zadelvlak	229
9.11	Doorsnijdingen van kwadratische oppervlakken	234
9.12	Regelmatige veelvlakken	236
9.13	Het regelmatige viervlak	237
9.14	De kubus	239
9.15	Het regelmatige achthoek	242
9.16	De gulden snede en de regelmatige vijfhoek	246
9.17	Het regelmatige twaalfvlak	253
9.18	Het regelmatige twintigvlak	257

## 0. Inleiding

Het tekenen van een ruimtelijke figuur (vaas, huis, landschap) op een vel papier is, evenals fotograferen, een afbeelding van de (drie-dimensionale) ruimte in een plat vlak. Door dit afbeelden, meestal projecteren genoemd, gaat informatie verloren.

In de loop der tijden zijn er vele methoden bedacht om zo'n projectie tot stand te brengen. Elke methode blijkt specifieke voor- en nadelen te hebben. De ontwerper van een gebouw of machine, zal teneinde een ander zijn geestesproduct te laten zien, een keuze moeten maken uit de verschillende projectiemethoden.

In deze syllabus zullen de belangrijkste projectiemethoden worden behandeld. Alvorens echter deze te kunnen begrijpen, dient een behoorlijke kennis van de stereometrie aanwezig te zijn. Zo zal de lezer ongetwijfeld (wellicht slechts uit aanschouwing) weten dat de projectie van een cirkel vaak een ellips is, maar deze ellips moet soms geconstrueerd worden. In Hoofdstuk 1 zullen we de stereometrische basiseigenschappen, nuttig voor het tekenen, bespreken. Later zullen vele andere, eveneens belangrijke, behandeld worden. Sommige ervan zullen worden bewezen met behulp van vectormeetkunde in de drie-dimensionale ruimte, andere door middel van een meetkundige redenering. Er wordt uitgegaan van de kennis V.W.O. Wiskunde I.

## I. Enige eigenschappen uit de stereometrie

Alvorens tot het behandelen over te gaan geven we eerst een kort overzicht over punten, lijnen en vlakken.

- In  $\mathbb{R}^3$  heten twee lijnen snijdend als ze precies één punt gemeen hebben. Ze liggen dan in een plat vlak.
- Evenwijdige lijnen zijn lijnen die óf samenvallen óf in een plat vlak liggen en geen punt gemeen hebben. Dit is precies het geval als hun richtingsvectoren evenredig zijn.
- Als twee rechten elkaar niet snijden en niet evenwijdig zijn, heten ze kruisend. Er is geen vlak dat beide rechten bevat.
- Twee (platte) vlakken heten evenwijdig als ze samenvallen óf als ze geen punt gemeen hebben.
- Twee niet-evenwijdige vlakken snijden elkaar volgens een rechte lijn.
- Een lijn heet evenwijdig met een vlak als de lijn in het vlak ligt óf als de lijn geen punt met het vlak gemeen heeft.
- Als een lijn niet evenwijdig is met een vlak dan snijdt hij het vlak in precies één punt.

1.1. Stelling. Gegeven twee vlakken  $\alpha$  en  $\beta$ , snijlijn  $m$ . Als  $\ell$  een lijn is in  $\beta$ , met  $\ell // \alpha$ , dan geldt  $\ell // m$ .

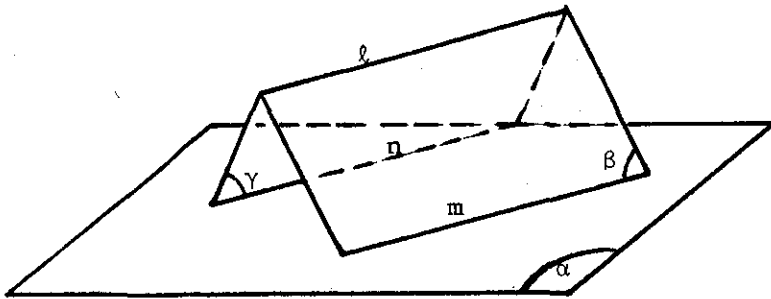
Bewijs: (figuur 1).  $\ell$  en  $m$  in  $\beta$ , dus ze kruisen elkaar niet. Ook is  $\ell // \alpha$ , dus  $\ell$  en  $m$  hebben geen punt gemeen. Gevolg  $\ell // m$ .

□

1.2. Stelling. De vlakken  $\beta$  en  $\gamma$  hebben lijn  $\ell$  gemeen. Het vlak  $\alpha$  is  $// \ell$ . Snijdt  $\alpha$  het vlak  $\beta$  volgens  $m$  en het vlak  $\gamma$  volgens  $n$ , dan is  $\ell // m // n$ .



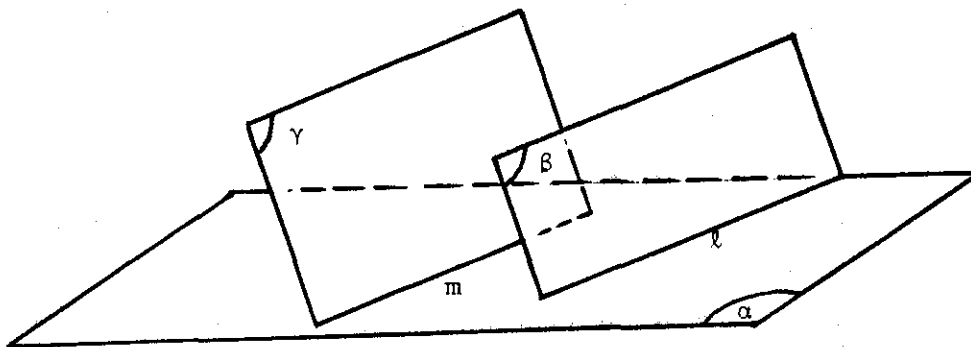
Bewijs: (figuur 1). Volgens 1.1 is  $\ell // m$ , maar ook  $\ell // n$ .



Figuur 1

1.3. Stelling. Evenwijdige vlakken snijden een ander vlak volgens evenwijdige lijnen.

Bewijs: (figuur 2)  $\beta // \gamma$ , dus  $\ell$  en  $m$  hebben geen punten gemeen. Bovendien liggen  $\ell$  en  $m$  in  $\alpha$ , dus ze kruisen elkaar niet. Gevolg:  $\ell // m$ .

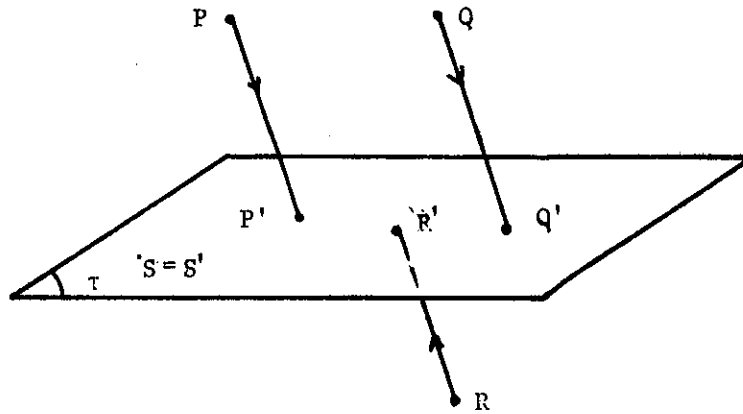


Figuur 2

1.4. Definitie. De afbeelding van de drie-dimensionale ruimte in een vlak heet parallelprojectie als de verbindingslijn van elk punt met zijn beeldpunt evenwijdig is met een voorgeschreven richting (projectierichting genaamd).

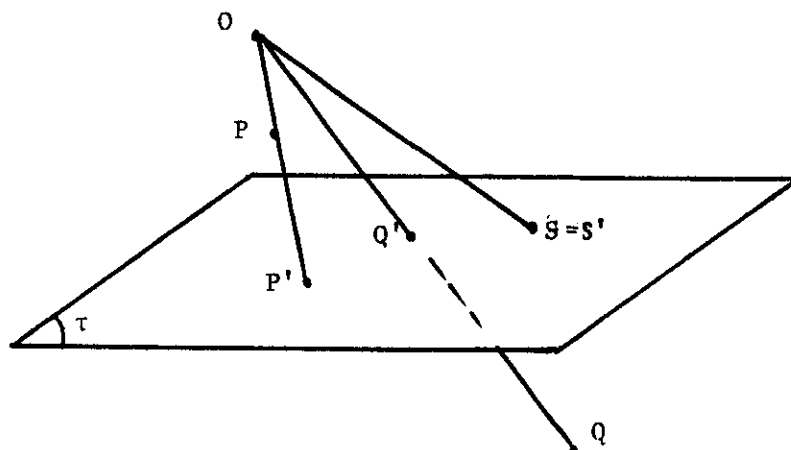
Opmerkingen (zie ook fig.3)

1. Het vlak waarop geprojecteerd wordt, wordt tafereel ( $\tau$ ) genoemd.
2. Is de projectierichting loodrecht op het tafereel dan spreekt men van orthogonale projectie, zo niet dan van scheve (parallel-) projectie.



Figuur 3

- 1.5. Definitie. De afbeelding van de drie-dimensionale ruimte in een vlak heet centrale projectie als de verbindingslijnen van elk punt met zijn beeldpunt alle door één punt gaan (het projectiecentrum of oogpunt genaamd). (Zie figuur 4.)



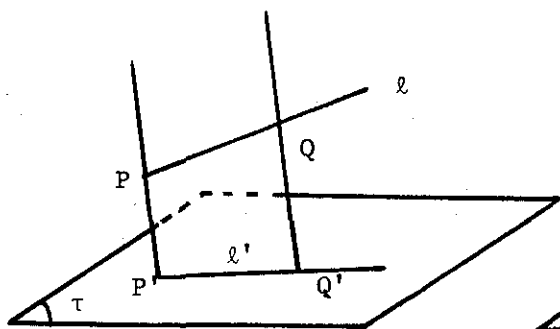
Figuur 4

1.6. Stelling. De projectie van een rechte lijn op  $\tau$  is een rechte lijn (of een punt).

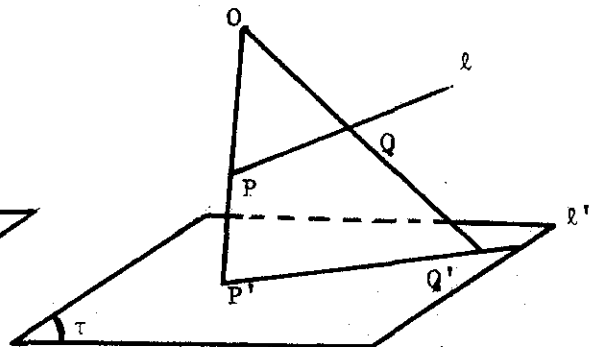
Bewijs: (figuren 5a en 5b).

In geval van parallelprojectie vinden we de projectie van lijn  $\ell$  op  $\tau$  met behulp van het vlak door  $\ell$ , evenwijdig aan de projectierichting. Dit vlak heet het projecterend vlak van  $\ell$ . In geval van een centrale projectie wordt het projecterende vlak bepaald door het centrum  $O$  en  $\ell$ . Aangezien twee vlakken elkaar volgens een rechte snijden, zijn de projecties van  $\ell$  rechte lijnen.

□



Figuur 5a



Figuur 5b

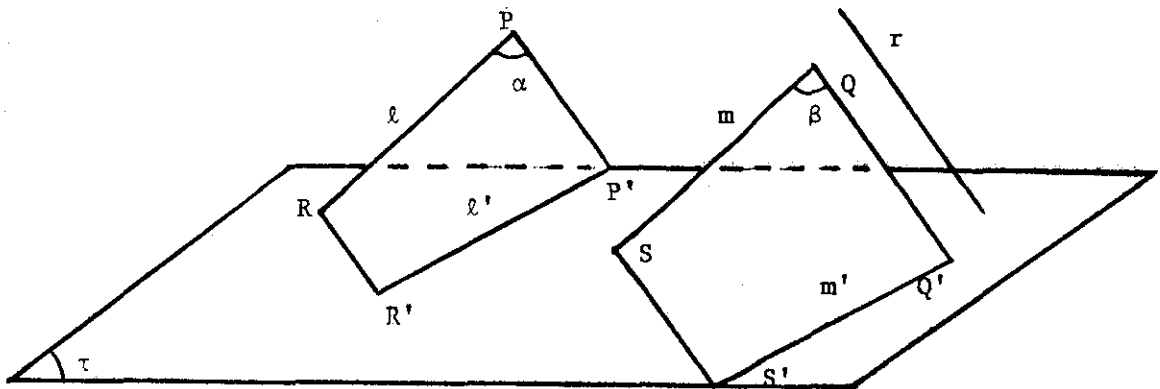
Vraag: Wanneer zijn de respectieve projecties punten?

1.7. Stelling. De parallelprojecties op  $\tau$  van twee evenwijdige lijnen zijn in het algemeen evenwijdige lijnen.

Bewijs: (figuur 6)

$\ell // m$ ,  $PP'$  en  $QQ'$  zijn beide evenwijdig aan de projectierichting  $r$ , dus de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn evenwijdig (waarom?). Volgens Stelling 1.3 geldt  $\ell' // m'$ .

□

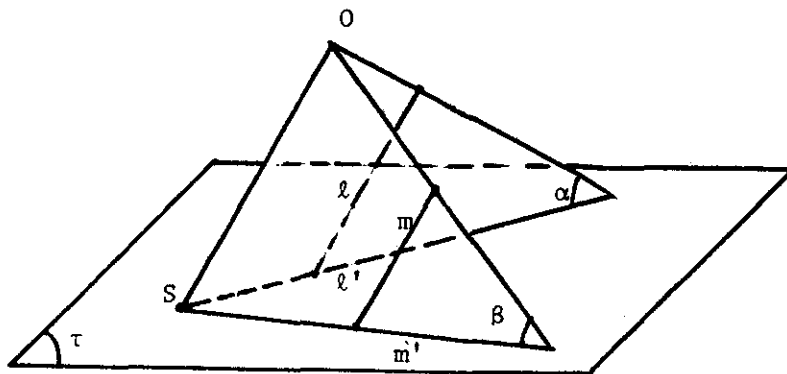


Figuur 6

1.8. Stelling. De centrale projecties op  $\tau$  van 2 evenwijdige lijnen zijn in het algemeen snijdende lijnen.

Bewijs: (zie figuur 7)

Stel  $l // m$ . Het vlak  $\alpha$  is bepaald door  $l$  en  $O$ , het vlak  $\beta$  door  $m$  en  $O$ . De projecties  $l'$  en  $m'$  op  $\tau$  zijn de snijlijnen van  $\alpha$  resp.  $\beta$  met  $\tau$ . Trek de rechte  $OS$  evenwijdig aan  $l$  en  $m$ . ( $S$  in  $\tau$ ). Nu ligt  $OS$  in  $\alpha$  (waarom?) en in  $\beta$ , dus  $OS$  is snijlijn van  $\alpha$  en  $\beta$ .  $S$  ligt in  $\alpha$  en in  $\tau$ , dus  $S$  op  $l'$ ; evenzo ligt  $S$  op  $m'$ , zodat  $S$  het snijpunt van  $l'$  en  $m'$  is.



Figuur 7

Opmerkingen

1. S heet het vluchtpunt van  $\ell$  en  $m$ . Zo'n punt is dus het snijpunt met het tafereel  $\tau$  van de lijn door  $O$  en  $// \ell$  (of  $m$ ).
2. Blijkbaar is  $\ell' // m'$  als  $\ell$  en  $m$  behalve onderling evenwijdig, ook evenwijdig  $\tau$  zijn.

Bij de reeds beschreven eigenschappen was het nog mogelijk om op betrekkelijk eenvoudige wijze onderscheid te maken tussen parallelprojectie en centrale projectie. Voor het toepassen van de projectiemethoden moeten we vertrouwd zijn met nog meer eigenschappen. Om een overzichtelijke behandeling mogelijk te maken zullen we in Hoofdstuk 2 eigenschappen behorend bij parallelprojecties onderzoeken. In een later stadium zullen de eigenschappen van de centrale projectie worden behandeld.

## 2. Eigenschappen, behorend bij parallelprojecties

2.1. Stelling. Lijnstukken, gelegen op samenvallende of evenwijdige lijnen, worden bij parallelprojectie in dezelfde verhouding verkort (of verlengd).

Bewijs: (Figuur 8).

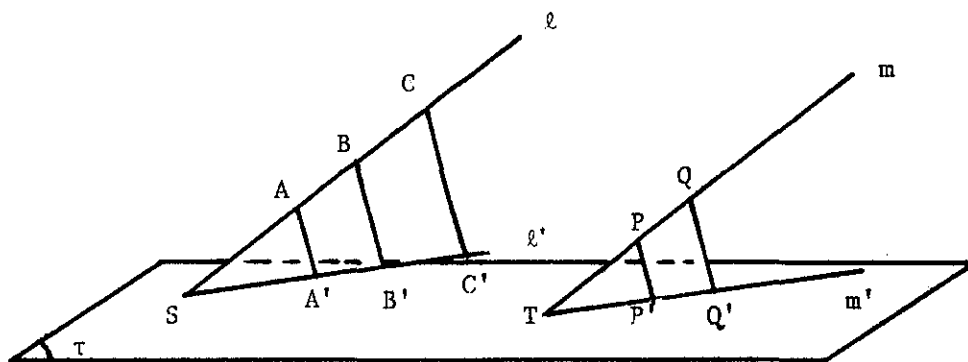
$\ell // m$ , dus  $\ell' // m'$  (Stelling 1.7). Verder geldt  $AA' // BB' // CC' // PP' // QQ'$ .

Stel dat  $A'B' = k \cdot AB$ . We willen aantonen dat  $B'C' = k \cdot BC$  en  $P'Q' = k \cdot PQ$ .

a) Als  $\ell // \tau$ , dan is  $\ell' // \ell$ , zodat vierhoek  $A'B'BA$  een parallellogram is; zo ook  $B'C'CB$  en  $P'Q'QP$ . Dus  $A'B' = AB$ ,  $B'C' = BC$ ,  $P'Q' = PQ$ ;  $k = 1$ .

b) Stel  $\ell$  snijdt  $\tau$  (dus  $\ell'$ ) in  $S$  en  $m$  snijdt  $\tau$  in  $T$ . Met behulp van gelijkvormige driehoeken is nu direct te zien dat  $B'C' : BC = A'B' : AB$  en  $P'Q' : PQ = A'B' : AB$ , zodat  $B'C' = k \cdot BC$  en  $P'Q' = k \cdot PQ$ .

□



Figuur 8

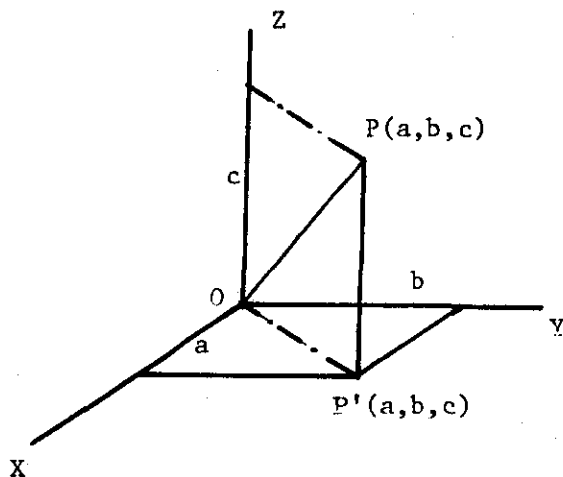
### Opmerkingen

1. Bij scheve projectie kan de verkortingsverhouding  $k$  alle positieve waarden aannemen, afhankelijk van de projectierichting (denk aan schaduwen bij lage zonnestand) en van de richting van het te projecteren lijnstuk. Bij loodrechte projectie is  $0 \leq k \leq 1$ .

2. Het gevolg van de stelling is dat de projectie van een parallellogram een parallellogram is. (Waarom?) Uiteraard kan die projectie ook een lijnstuk zijn.

Ten behoeve van het volgende geven we in het kort een uitbreiding aan de vectormeetkunde, zoals die in Wiskunde I in het V.W.O. is behandeld.

In  $\mathbb{R}^3$  wordt een punt gegeven met behulp van drie coördinaten. Voor ons doel beschouwen we steeds een rechthoekig assenstelsel. Ten opzichte van zo'n stelsel is  $P = (a,b,c)$  gegeven. (Zie figuur 9.)



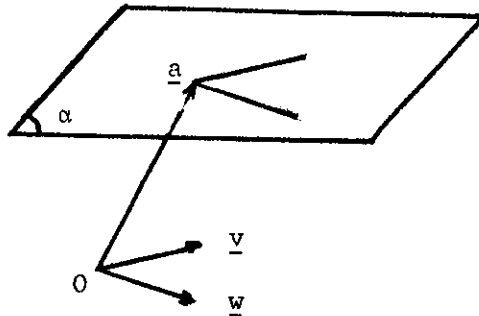
Figuur 9

De lijn  $OP$  heeft als vectorvoorstelling  $\underline{x} = \lambda(a,b,c)$ .

Een rechte heeft in het algemeen, net als in  $\mathbb{R}^2$ , een steunvector en een richtingsvector, vandaar dat nu een vectorvoorstelling van zo'n rechte is  $\underline{x} = (a,b,c) + \lambda(p,q,r)$ . Anders dan in  $\mathbb{R}^2$  is het in  $\mathbb{R}^3$  niet mogelijk een rechte in de gedaante van één vergelijking te schrijven. (Waarom niet?)

Een vlak  $\alpha$  is vastgelegd door een steunvector en twee verschillende (we spreken liever van onafhankelijke) richtingsvectoren. In Figuur 10 is een

vectorvoorstelling van  $\alpha$  :  $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ , waarin  $\underline{a}$ ,  $\underline{v}$  en  $\underline{w}$  ieder drie kentallen heeft. Door eliminatie van  $\lambda$  en  $\mu$  blijkt er een betrekking van de gedaante  $px + qy + rz = d$  te ontstaan, een vergelijking van het vlak.



Figuur 10

Analoog aan  $\mathbb{R}^2$  (zie V.W.O.) voeren we in  $\mathbb{R}^3$  een inwendig produkt in.

Als  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  en  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$  dan is

$$(\underline{a}, \underline{b}) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Dit inwendig produkt heeft dezelfde eigenschappen als het inwendig produkt in  $\mathbb{R}^2$ .

2.2. Stelling. Zijn in een rechthoekig assenstelsel gegeven de vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  ( $\underline{a} \neq \underline{0}$  en  $\underline{b} \neq \underline{0}$ ) en is  $\varphi$  de hoek der vectoren dan geldt:

1° de lengte van  $\underline{a} = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}$  .

2°  $\cos \varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}}$  .



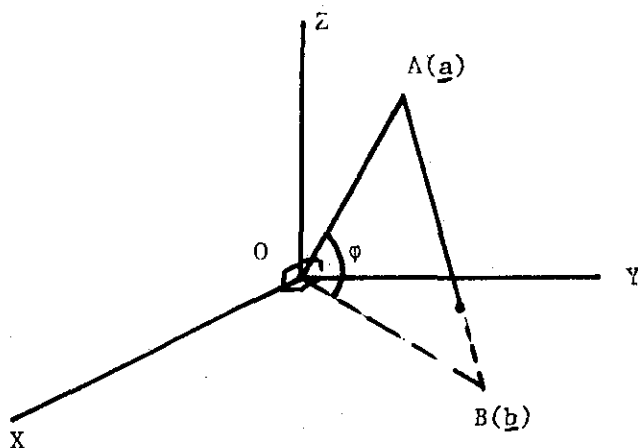
Bewijs: Zie Figuur 11).

Met behulp van Pythagoras kunnen we de lengte van  $\underline{a}$ , aangeduid met  $|\underline{a}|$  berekenen. Immers  $|\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (\underline{a}, \underline{a})$ . Met behulp van de cosinusregel in  $\triangle OAB$  berekenen we  $\cos \varphi$ . Immers:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \varphi.$$

Wegens  $AB^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$ , vinden we

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}} \quad . \text{ (Ga na!)} \quad \square$$



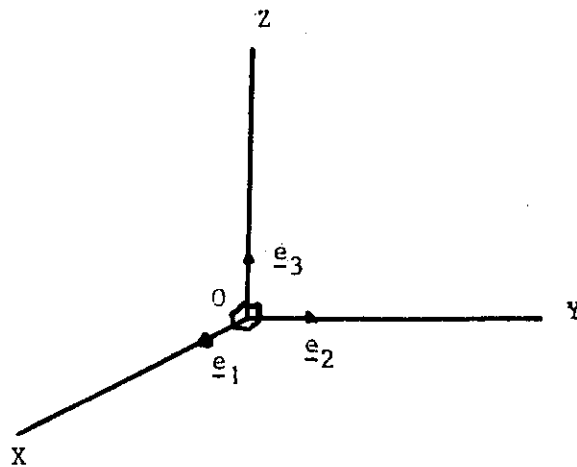
Figuur 11

Opmerking.  $\cos \varphi = 0$  levert  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , en uit bovenstaande formule volgt dat  $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ . We zien dus, evenals in  $\mathbb{R}^2$ , dat  $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$  betekent dat  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  onderling loodrecht zijn.

In  $\mathbb{R}^3$  kiezen we vaak, ter vereenvoudiging van de berekening, langs de respectieve assen, eenheidsvectoren  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  met eigenschappen:

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = (\underline{e}_2, \underline{e}_2) = (\underline{e}_3, \underline{e}_3) = 1 \text{ en}$$

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{e}_3, \underline{e}_1) = 0 \quad . \text{ (Zie Figuur 12)}$$



Figuur 12

Het grondvlak XOY, dus  $\underline{x} = \lambda \underline{e}_1 + \mu \underline{e}_2$  ofwel  $z = 0$  wordt in de rest van dit hoofdstuk vaak als het tafereel genomen.

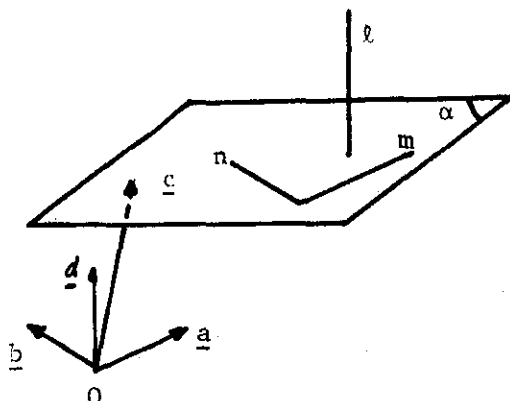
2.3. Definitie. Een lijn heet loodrecht op een vlak, als hij loodrecht staat op alle lijnen van dit vlak.

2.4. Stelling. Als een lijn loodrecht op twee snijdende lijnen van een vlak staat, dan is die lijn loodrecht op dat vlak.

Bewijs: (Zie figuur 13).

Gegeven de lijnen  $m$  en  $n$  in vlak  $\alpha$  die  $l$  loodrecht kruisen of snijden. Stel dat  $m$  en  $n$  de richtingsvectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  hebben en  $l$  de richtingsvector  $\underline{d}$ , dan geldt  $(\underline{a}, \underline{d}) = (\underline{b}, \underline{d}) = 0$ . Een parametervoorstelling van  $\alpha$  is  $\underline{x} = \underline{c} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ . Voor de richtingsvector van een lijn in  $\alpha$  geldt dus  $(\underline{d}, \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda (\underline{d}, \underline{a}) + \mu (\underline{d}, \underline{b}) = 0$ , zodat  $l$  ook loodrecht op die rechte is.

□



Figuur 13

2.5. Stelling. Als van twee evenwijdige rechten er één loodrecht op een vlak staat, dan staat ook de andere loodrecht op dat vlak.

Bewijs: De twee lijnen hebben dezelfde richtingsvector.

□

2.6. Stelling. Als een lijn loodrecht staat op één van twee evenwijdige vlakken dan staat hij ook loodrecht op het andere.

Bewijs: De evenwijdige vlakken kunnen we schrijven met behulp van dezelfde richtingsvectoren, nl.  $\underline{x} = \underline{c} + \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$  en  $\underline{x} = \underline{d} + \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ .

□

2.7. Stelling. Als  $\ell$  een lijn is die loodrecht staat op het vlak met vergelijking  $ax + by + cz = 0$ , dan heeft  $\ell$  de richtingsvector  $(a, b, c)$ .

Bewijs: In parametervorm is het vlak te schrijven als  $\underline{x} = \lambda(-b, a, 0) + \mu(-c, 0, a)$ . (Ga dit na!) De richtingsvector  $(a, b, c)$  is loodrecht op de beide richtingsvectoren  $(-b, a, 0)$  en  $(-c, 0, a)$ , dus  $\ell$  heeft de richtingsvector  $(a, b, c)$ .

□

Opmerkingen

1. We hebben in de stelling als vergelijking genoemd  $ax + by + cz = 0$ . Dit vlak gaat door  $(0,0,0)$ , de oorsprong. We hadden ook een daaraan evenwijdig vlak  $ax + by + cz = d$  ( $d \neq 0$ ) kunnen nemen (ga na).
2. Is omgekeerd  $(a,b,c)$  een richtingsvector van een lijn  $\ell$  dan is de vergelijking van een vlak loodrecht op  $\ell$  van de gedaante  $ax + by + cz = d$  ( $d$  nog willekeurig te kiezen).
3. Gevolg van Stelling 2.7 : Als twee lijnen loodrecht staan op een vlak dan zijn ze evenwijdig.

Bewijs: Beide lijnen loodrecht op het vlak  $ax + by + cz = 0$  hebben als richtingsvector  $(a,b,c)$ .

2.8. Definitie. Onder de hoek die een lijn maakt met een vlak verstaan we de scherpe hoek die de lijn maakt met zijn orthogonale projectie op dat vlak.

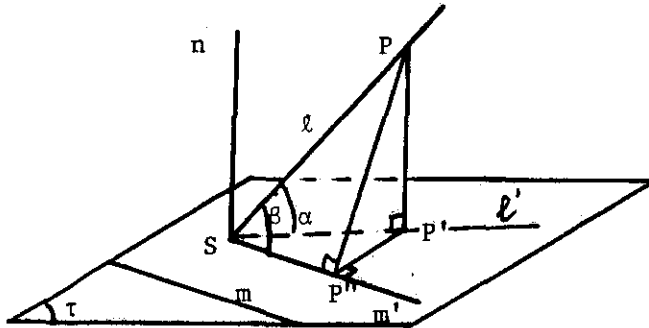
2.9. Stelling. Als de lijn  $\ell$  met  $\tau$  een hoek  $\alpha$  maakt, en met een lijn  $m$  in  $\tau$  de hoek  $\beta$ , dan is  $\alpha \leq \beta$ .

Bewijs: (Zie Figuur 14).

Het snijpunt van  $\ell$  met  $\tau$  wordt  $S$  genoemd. Trek  $PP' \perp \tau$ , dan is  $\ell' = SP'$  de orthogonale projectie van  $\ell$  op  $\tau$ , dus  $\alpha = \angle PSP'$ . Trek verder door  $S$  de lijn  $m' // m$ . We willen bewijzen dat  $\alpha \leq \beta$ . (in feite is  $\alpha < \beta$  als  $m'$  niet samenvalt met  $\ell'$ ). Trek  $P'P''$  in  $\tau$  en  $\perp m'$ , dan is  $m' \perp PP''$  (waarom?).

Nu geldt  $\sin \alpha = \frac{PP'}{SP} < \frac{PP''}{SP} = \sin \beta$  dus  $\alpha < \beta$ .

□

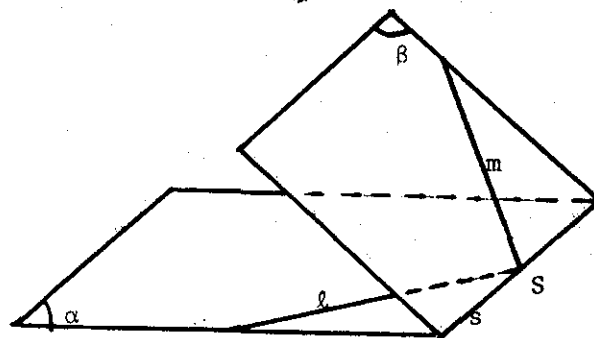


Figuur 14

Opmerkingen.

1. Is  $n$  de loodlijn op  $\tau$ , dan is de hoek tussen  $l$  en  $\tau$  tevens het complement van de hoek tussen  $l$  en  $n$ .
2. Een loodlijn op een vlak wordt wel normaal op dat vlak genoemd.

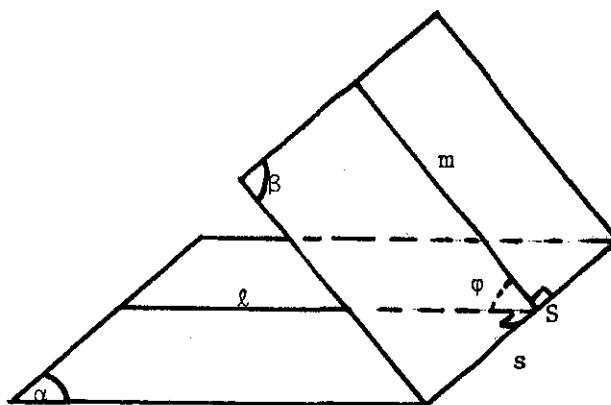
Beschouwen we nu de snijdende vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  met hun snijlijn  $s$ . (Zie Figuur 15.)



Figuur 15

Trek door een punt  $S$  op  $s$  een lijn  $l$  in  $\alpha$  en een lijn  $m$  in  $\beta$ . Deze snijdende lijnen maken een zekere hoek met elkaar. Deze hoek is echter afhanke-

lijk van de richtingen van  $\ell$  en  $m$  en is daarom niet bruikbaar als maat voor de hoek tussen de vlakken. Als we  $\ell$  en  $m$  beide loodrecht op  $s$  kiezen, dan vormen ze een vlak dat standvlak op  $\alpha$  en  $\beta$  wordt genoemd. (Zie Figuur 16.)



Figuur 16

2.10. Definitie. Onder de hoek van twee snijdende vlakken verstaan we de scherpe hoek tussen de snijlijnen van het standvlak met beide vlakken.

Opmerkingen

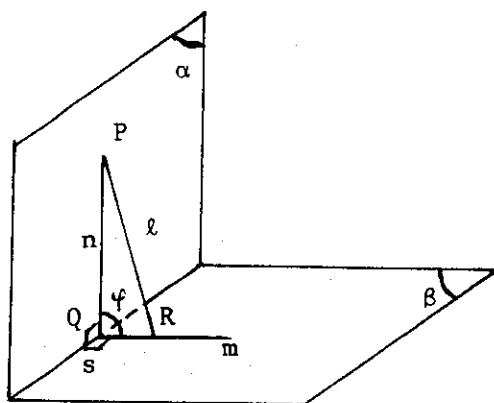
1. Deze definitie is volkomen in overeenstemming met het spraakgebruik.  
Zo kan een ladder een hoek van  $70^\circ$  met de grond maken.
2. Als in  $S$  de normalen op  $\alpha$  en  $\beta$  worden getekend, dan is de hoek der vlakken gelijk aan de (scherpe!) hoek der normalen. (Ga dit na.)
3. Opmerking 2 levert tevens de methode om de hoek der vlakken te berekenen. Zijn de vergelijkingen der vlakken  $ax + by + cz = 0$  en  $px + qy + rz = 0$ , dan zijn de richtingsvectoren der normalen (zie St.2.7) resp.  $(a,b,c)$  en  $(p,q,r)$ , zodat met behulp van Stelling 2.2 de cosinus van de hoek is te berekenen.
4. Is de hoek der vlakken  $90^\circ$ , dan staan de vlakken loodrecht op elkaar. Als nu  $m$  en  $\ell$  beide loodrecht op  $s$  zijn dan is  $m \perp \alpha$ ; evenzo is  $\ell \perp \beta$  (Zie Figuur 16). Dit volgt uit Stelling 2.4.

2.11. Stelling. Als een vlak  $\alpha$  loodrecht staat op een vlak  $\beta$  en  $P$  is een punt van  $\alpha$ , dan ligt de lijn  $\ell$  door  $P$  die loodrecht op  $\beta$  staat in  $\alpha$ .

Bewijs: (Zie Figuur 17a.)

Laat  $s$  de snijlijn zijn van  $\alpha$  en  $\beta$ . Trek in  $\alpha$  de loodlijn  $n$  door  $P$  op  $s$ . De loodlijn snijdt  $s$  in  $Q$ . Trek door  $Q$  en in  $\beta$  de lijn  $m$  loodrecht op  $s$ . Volgens de definitie is de hoek  $\varphi$  tussen  $n$  en  $m$  een standhoek van  $\alpha$  en  $\beta$ , dus  $\varphi = 90^\circ$ . Omdat  $n \perp s$  en  $n \perp m$  is  $n \perp \beta$  (Stelling 2.4). Gevolg:  $n = \ell$ , dus  $\ell$  in  $\alpha$ .

□

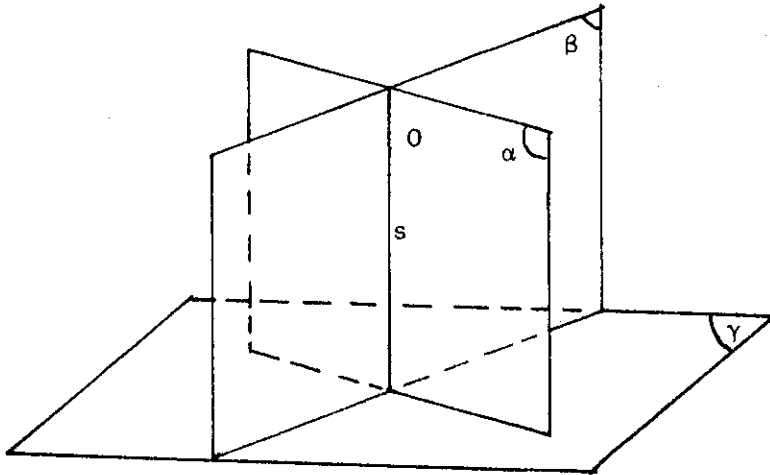


Figuur 17a

Gevolg van Stelling 2.11

Als de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  loodrecht op het vlak  $\gamma$  zijn, dan staat ook hun snijlijn  $s$  loodrecht op  $\gamma$ .

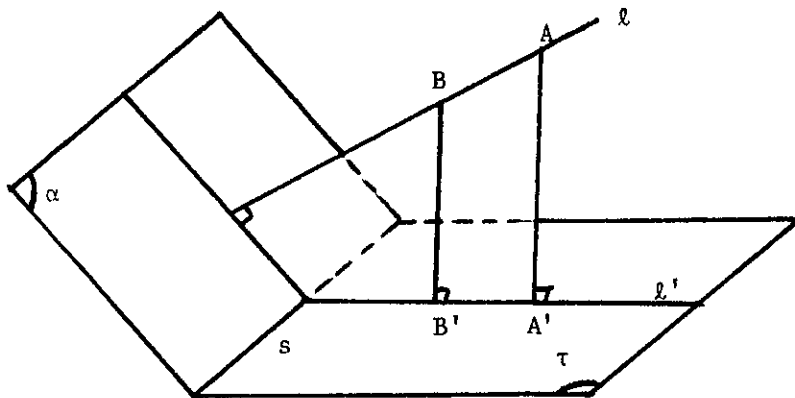
Bewijs: Zij  $O$  een willekeurig punt op  $s$ . Volgens Stelling 2.11 ligt de lijn door  $O$  en die loodrecht op  $\gamma$ , is zowel in  $\alpha$  als in  $\beta$ , dus valt samen met  $s$ . (Zie Figuur 17b.)



Figuur 17b

2.12. Stelling. (Zie Figuur 18). De vlakken snijden elkaar volgens de lijn  $s$ . Als de lijn  $l \perp \alpha$  is en  $l'$  de orthogonale projectie van  $l$  op  $\tau$ , dan is  $l' \perp s$ .

Bewijs:  $l \perp \alpha$ , dus  $l \perp s$  (zie Stelling 2.4). We projecteren  $l$  loodrecht op  $\tau$ , met behulp van  $AA'$  ( $BB'$  enz.). Nu is  $AA' \perp \tau$ , dus  $AA' \perp s$ . Volgens Stelling 2.4 is nu  $s$  loodrecht op het vlak door  $l$  en  $l'$ , dus  $s \perp l'$ .



Figuur 18

□



Opmerking. Deze stelling geldt in het algemeen niet bij scheve parallelprojectie, maar hij is van groot belang voor orthogonale projecties.

Twee snijdende lijnen vormen een hoek. Bij projecteren verandert in het algemeen de grootte van die hoek. Er zijn weinig stellingen waaraan de tekenaar houvast heeft.

Als de beide benen van een hoek  $// \tau$  zijn, dan is de hoek van de projectie even groot als de oorspronkelijke hoek. In geval van een rechte hoek is er iets meer te vertellen, tenminste bij orthogonale projectie.

2.13. Stelling. De lijnen  $\ell$  en  $m$  zijn onderling loodrecht,  $\ell'$  en  $m'$  hun orthogonale projecties op  $\tau$ . Er geldt:  $\ell' \perp m'$  dan en slechts dan als minstens één der lijnen  $\ell$  en  $m$  evenwijdig is met  $\tau$ .

Bewijs: (Figuur 19).

Als  $\ell$  en  $m$  kruisende lijnen zijn, dan worden ze door translatie snijdend gemaakt. Door het snijpunt  $S$  van  $\ell$  en  $m$  laten we de normaal neer op  $\tau$  en nemen deze normaal als  $Z$ -as. Zij  $S: (0,0,a)$  en de richtingsvectoren van  $\ell$  en  $m$ :  $(p,q,r)$  en  $(s,t,v)$ . Wegens  $\ell \perp m$  geldt  $ps + qt + rv = 0$ . (1)

We hebben de volgende parametervoorstellingen:

$$\begin{aligned}\ell : \underline{x} &= (0,0,a) + \lambda(p,q,r) \quad , \\ \ell' : \underline{x} &= \quad \quad \quad \mu(p,q,0) \quad , \\ m : \underline{x} &= (0,0,a) + \nu(s,t,v) \quad , \\ m' : \underline{x} &= \quad \quad \quad \sigma(s,t,0) \quad .\end{aligned}$$

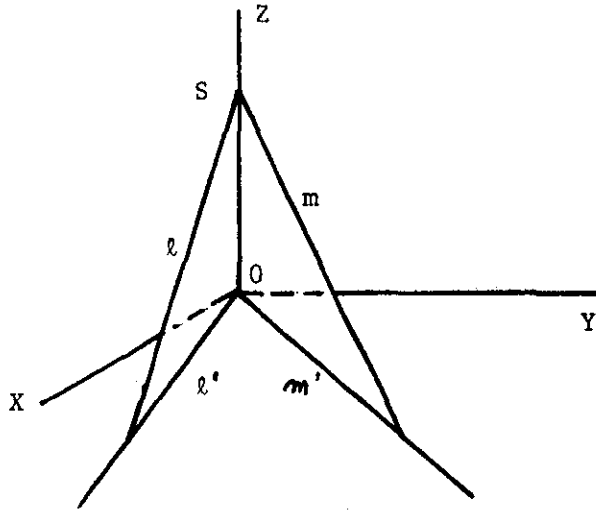
Stel nu  $\ell' \perp m'$ , dus  $ps + qt = 0$ . Wegens (1) is dan  $rv = 0$ , dus  $r = 0$  of

$v = 0$ , zodat  $\ell // \tau$  of  $m // \tau$ .

Als omgekeerd,  $\ell // \tau$  is, dan is  $r = 0$ , dus (1) wordt:

$ps + qt = 0$ , zodat  $\ell' \perp m'$ . Analoog het geval voor  $m // \tau$ .

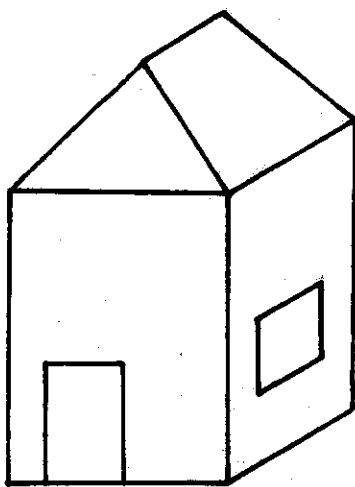
□



Figuur 19

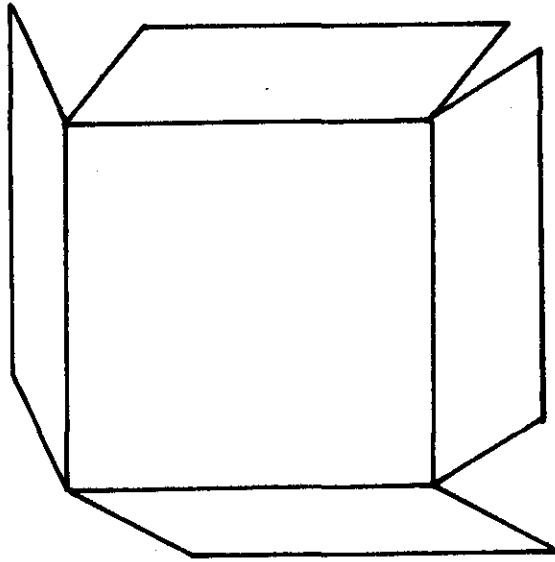
### 3. Orthogonale projectie (Amerikaanse)

Voor we de methode systematisch gaan behandelen, zullen we eerst het principe bespreken. Beschouw het huisje zoals getekend in Figuur 20. (Dit huisje is getekend in scheve parallelprojectie, maar dat is voor dit hoofdstuk niet belangrijk.) We nemen nu een grote doos, waarvan we voorlopig het deksel verwijderd denken. De doos wordt met de onderkant naar de lezer toegekeerd (zie Figuur 21). Het huisje wordt vervolgens in de doos geschoven, daarna loodrecht geprojecteerd op de vijf vlakken van de doos. Daarna wordt de doos (zie Figuur 21) opgeknipt langs vier ribben en worden de zijvlakken gevouwen tot ze alle in het vlak van de bodem liggen. Het resultaat is te zien in Figuur 22. De voor- en rechterzijgevel zijn direct te herkennen, het bovenaanzicht van het dak kost wellicht iets meer moeite. De linkerzijgevel levert iets nieuws. De drie vierkantjes waren in Figuur 20 niet te zien. Het grondvlak van het huisje biedt niets nieuws. Ter completering is de achtergevel van het huisje op het deksel van de doos geprojecteerd, waarna deze projectie rechts is bijgetekend.



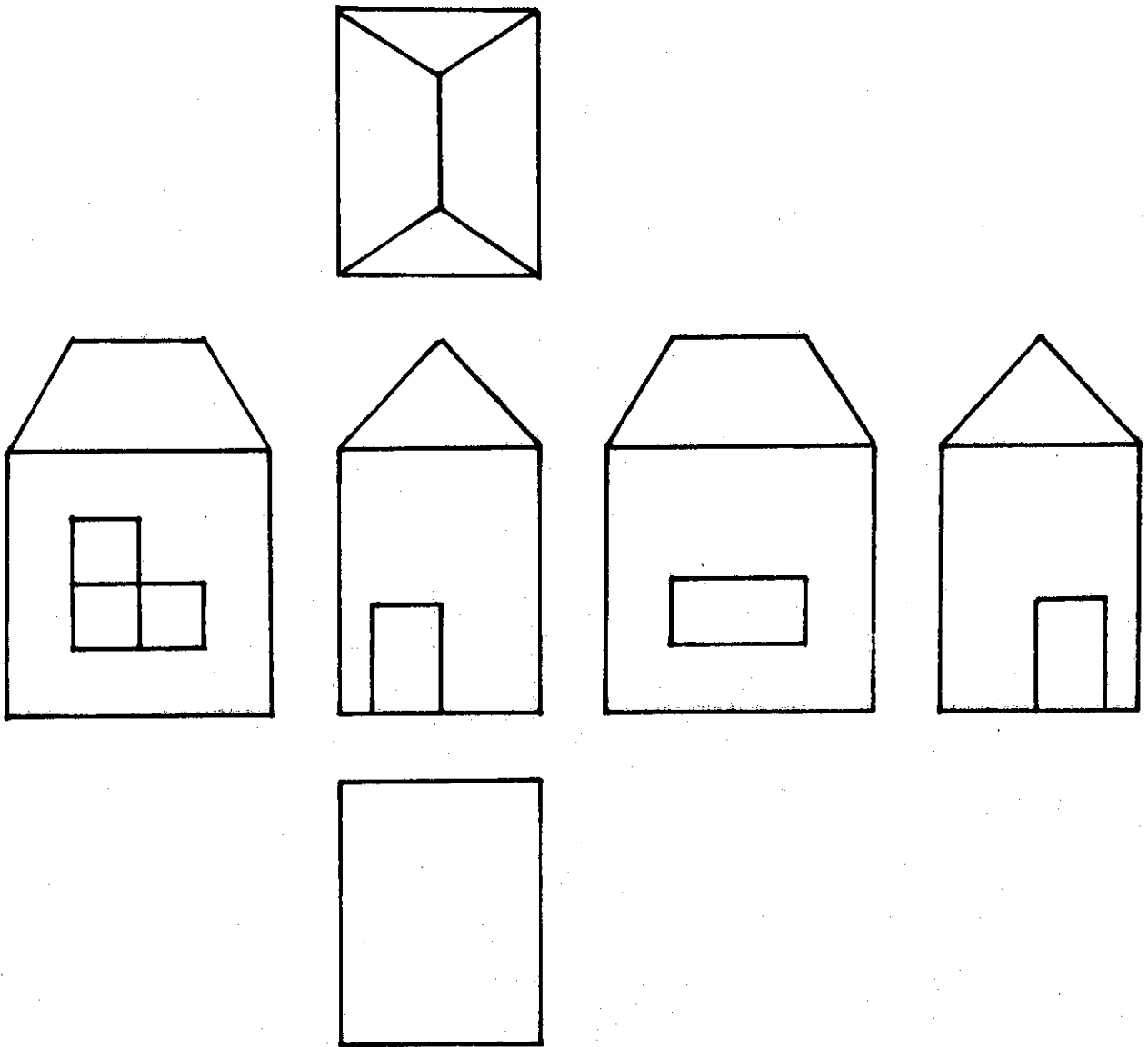
Figuur 20

Beschouwing van de voor- en achtergevel zou doen vermoeden dat het huis een doorlopende gang heeft van voor tot achter.



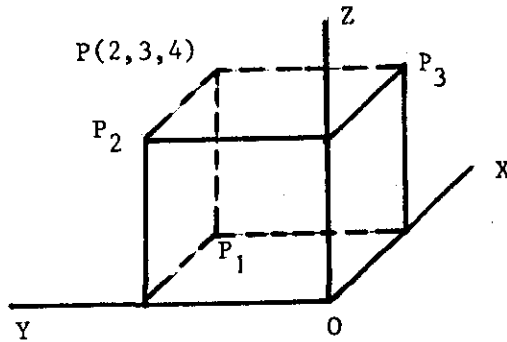
Figuur 21

In de Figuren 20 en 22 zijn belangrijke verschillen aan te wijzen. Figuur 20 suggereert een huisje, waarbij echter niet alles te zien is, Figuur 22 geeft ons exact de plaatsen van deuren en ramen, maar laat geen huisje zien.



Figuur 22

We zullen nu een begin maken met de systematische behandeling van de Amerikaanse projectie. We gaan uit van een orthogonaal assenstelsel (zie Figuur 23). Het YOZ-vlak is het vlak van tekening, dus  $\tau$ ; het XOY-vlak wordt om de Y-as gedraaid tot het in  $\tau$  ligt, het XOZ-vlak (naar rechts) om de Z-as, tot het eveneens in  $\tau$  ligt. Op deze manier ontstaan van een voorwerp drie projecties, n.l. het voor- en rechter zij-aanzicht alsmede het grondvlak. De overige drie projecties ontbreken, maar die zijn voorlopig ook niet nodig.



Figuur 23

Opmerking. Het XOY-vlak wordt voortaan  $\pi_1$  genoemd, het YOZ-vlak  $\pi_2$  en het XOZ-vlak  $\pi_3$ .

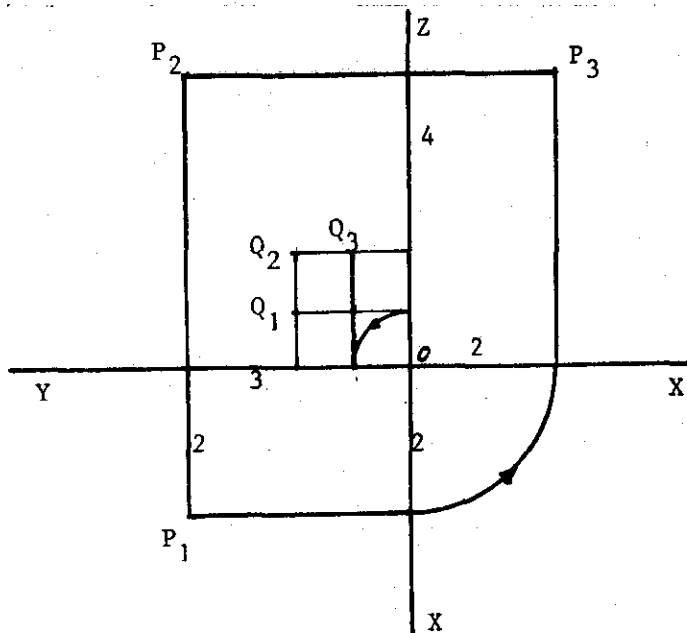
### 3.1. De projecties van een punt

Is P gegeven met behulp van de coördinaten (2,3,4) dan ligt, gezien de tekens van de coördinaten, dit punt in de ruimtehoek, als in Figuur 23 aangegeven. In deze methode wordt een punt aangegeven (zie Figuur 24) met behulp van de drie genoemde projecties:  $P_1$  is de projectie op  $\pi_1$ ,  $P_2$  die op  $\pi_2$  en  $P_3$  die op  $\pi_3$ . We zien:

$P_1P_2 \perp$  de Y-as, omdat (zie Figuur 23) het vlak  $PP_1P_2 \perp$  de Y-as is;  $P_2P_3 \perp$  de Z-as, omdat het vlak  $PP_2P_3 \perp$  de Z-as is. Omdat het vlak  $PP_1P_3 \perp$  de X-as is, liggen  $P_1$  en  $P_3$  op gelijke afstanden van resp. de Y-as en de Z-as. Zie de cirkelboog in Figuur 24. (O is het middelpunt.) De ligging van  $P_1$  en  $P_2$  vertoont samenhang ten opzichte van de Y-as,  $P_2$  en  $P_3$  hangen samen ten opzichte van de Z-as, terwijl  $P_1$  en  $P_3$  samenhangen ten opzichte van de X-as. We zullen, indien noodzakelijk, spreken over de samenhang van de projecties.

In Figuur 24 zijn ook de projecties van Q getekend; hierbij heeft Q een negatieve x-coördinaat. Merk op dat de samenhang tussen  $Q_1$ ,  $Q_2$  en  $Q_3$  dezelfde is als die bij P.

Uit de Figuren 23 en 24 volgt tevens dat de punten P en Q reeds door twee van de drie projecties zijn bepaald. Vaak worden constructies dan ook uitgevoerd zonder van de derde projectie gebruik te maken.

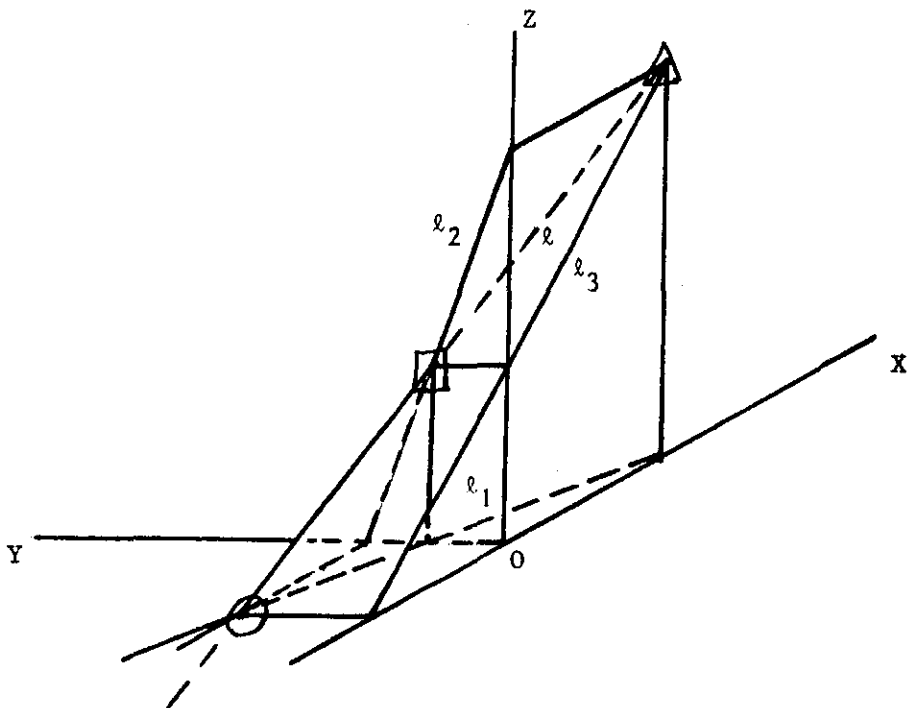


Figuur 24

### 3.2. De projecties van een rechte lijn

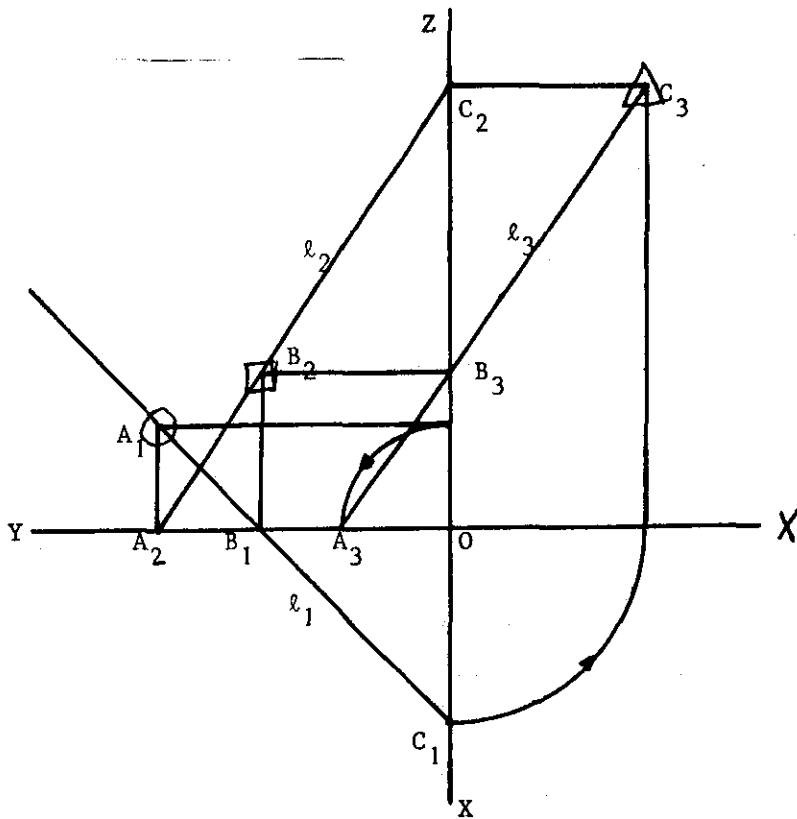
Een rechte lijn  $l$  wordt aangegeven met behulp van zijn projecties  $l_1$ ,  $l_2$  en soms  $l_3$ . Van belang zijn de snijpunten met de coördinaatvlakken. Deze z.g. doorgangspunten worden aangeduid met  $\circ$  (in  $\pi_1$ ),  $\square$  (in  $\pi_2$ ) en  $\triangle$  (in  $\pi_3$ ). Gemakshalve geven we naast Figuur 26 in Amerikaanse projectie een schets in scheve parallelprojectie (Figuur 25).

Het eerste doorgangspunt  $\circ$  van  $l$  ligt in  $\pi_1$ , op  $l_1$ , hetgeen betekent dat  $\circ$  en het snijpunt van  $l_2$  met de Y-as samenhangen ten opzichte van de Y-as, maar ook dat er samenhang is van  $\circ$  en het snijpunt van  $l_3$  met de X-as. Op analoge wijze vinden we de andere samenhangen. Uit dit alles volgt dat de lijn  $l$  bekend is (en dus zijn projecties) als  $\circ$  en  $\square$  gegeven zijn.



Figuur 25

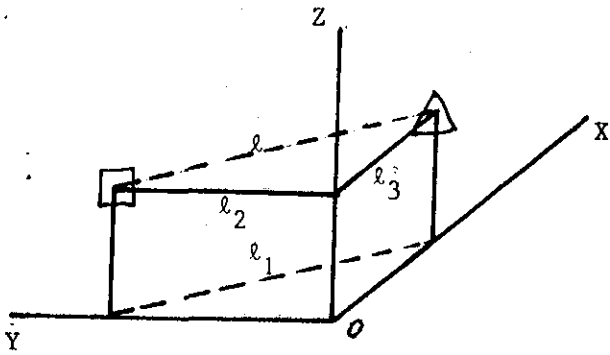




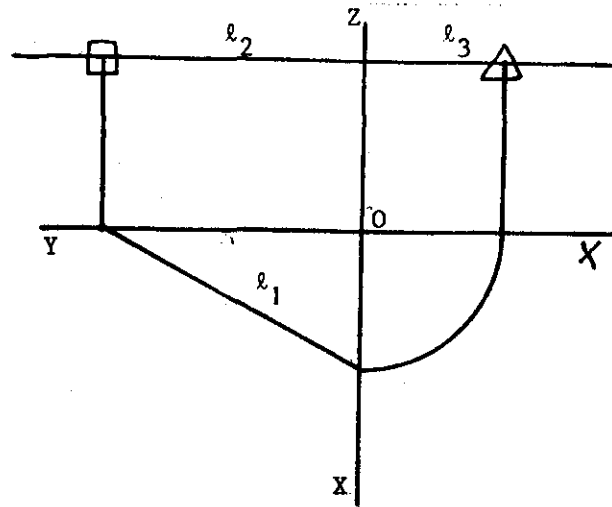
Figuur 26

### 3.3. Bijzondere lijnen

Als  $l // \pi_1$ , dan is  $\odot$  er niet,  $l_2$  en  $l_3$  zijn  $//$  Y-as resp.  $//$  X-as (vallen in de projectietekening samen, (zie Figuur 27 en 28).

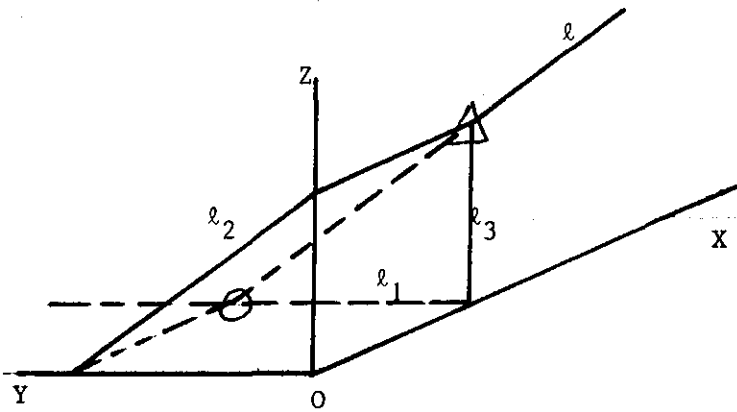


Figuur 27

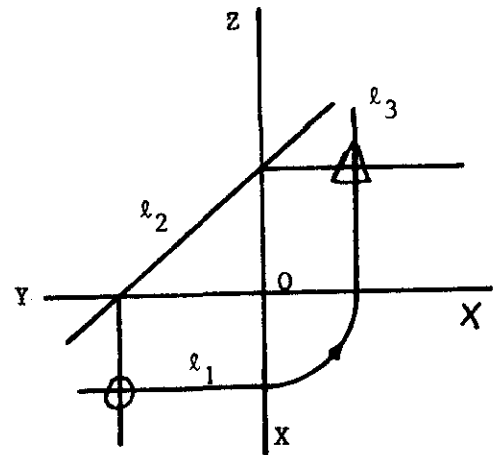


Figuur 28

Als  $l // \pi_2$  dan ontbreekt  $\square$  (zie Figuur 29 en 30).



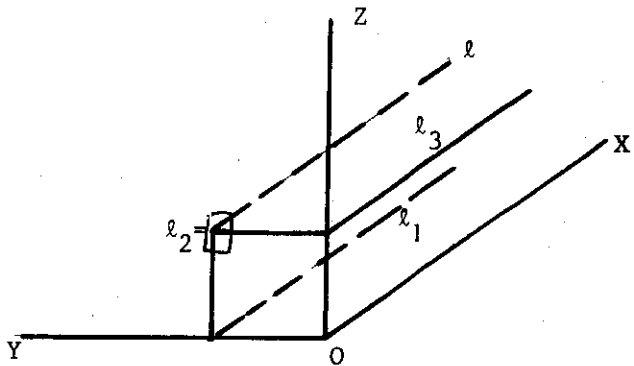
Figuur 29



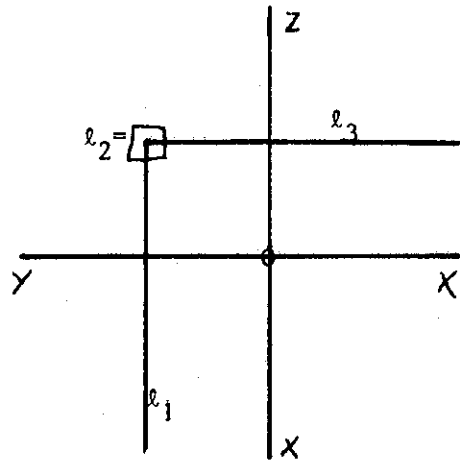
Figuur 30

Als  $l // \pi_3$  dan ontbreekt  $\Delta$  (maak zelf de beide tekeningen).

Als  $l // X$ -as is, dan ontbreken  $\circ$  en  $\Delta$  (zie Figuur 31 en 32);  $\square = l_2$ .



Figuur 31

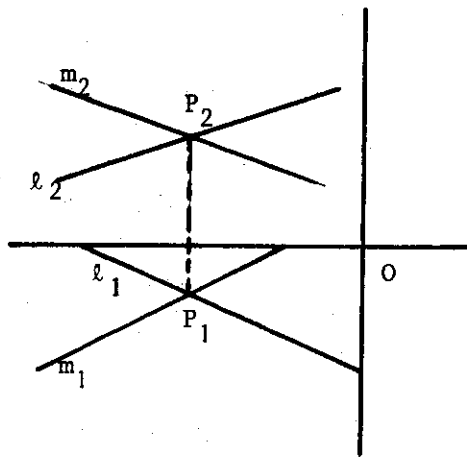


Figuur 32

Als  $l // Y$ -as is, dan ontbreken  $\circ$  en  $\square$  en als tenslotte  $l // Z$ -as dan ontbreken  $\square$  en  $\Delta$  (maak zelf de bijbehorende tekeningen).

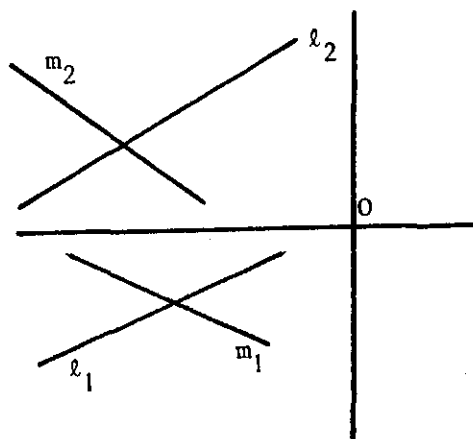
### 3.4. Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak

Als twee lijnen  $l$  en  $m$  elkaar in  $P$  snijden, dan snijden  $l_1$  en  $m_1$  elkaar in  $P_1$ ,  $l_2$  en  $m_2$  elkaar in  $P_2$ ,  $l_3$  en  $m_3$  elkaar in  $P_3$ . Als omgekeerd de snijpunten van twee projecties van  $l$  en  $m$  samenhangen, dan snijden  $l$  en  $m$  elkaar (zie Figuur 33).



Figuur 33

In Figuur 34 snijden de lijnen  $\ell$  en  $m$  elkaar niet. Ze zijn ook niet  $//$ , want volgens Stelling 1.7 zijn de projecties van  $//$  lijnen weer evenwijdig.

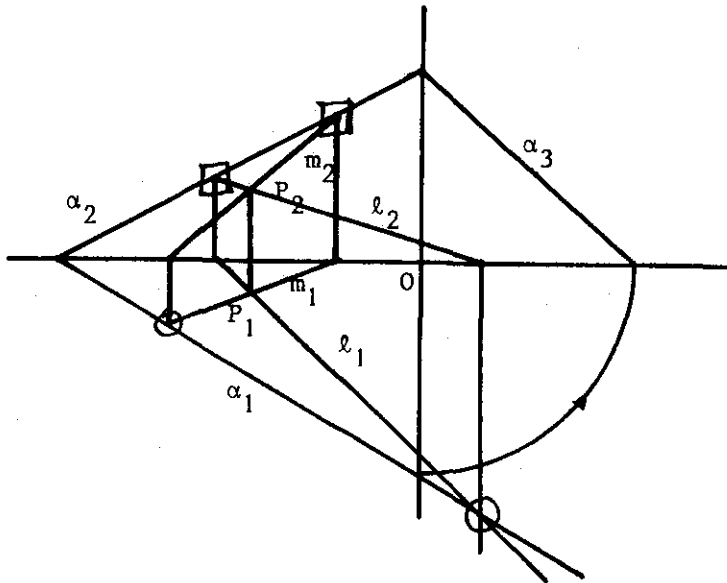


Figuur 34

Als omgekeerd, voor de lijnen  $\ell$  en  $m$  geldt dat twee paar gelijknamige projecties evenwijdig zijn, dan zijn  $\ell$  en  $m$  evenwijdig. (Dit is te bewijzen met behulp van Stelling 1.3.)

Opmerking. Als  $\ell_1 // m_1$ , maar  $\ell_2 \not// m_2$  en  $\ell_3 \not// m_3$  dan zijn  $\ell$  en  $m$  niet evenwijdig.

Twee snijdende resp. evenwijdige lijnen bepalen een vlak  $\alpha$ . De snijlijnen van  $\alpha$  met  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  en  $\pi_3$  (resp.  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  en  $\alpha_3$  genaamd) zijn de verbindingslijnen van de overeenkomstige doorgangspunten. Die snijlijnen heten doorgangen van  $\alpha$ . (Zie Figuur 35.)

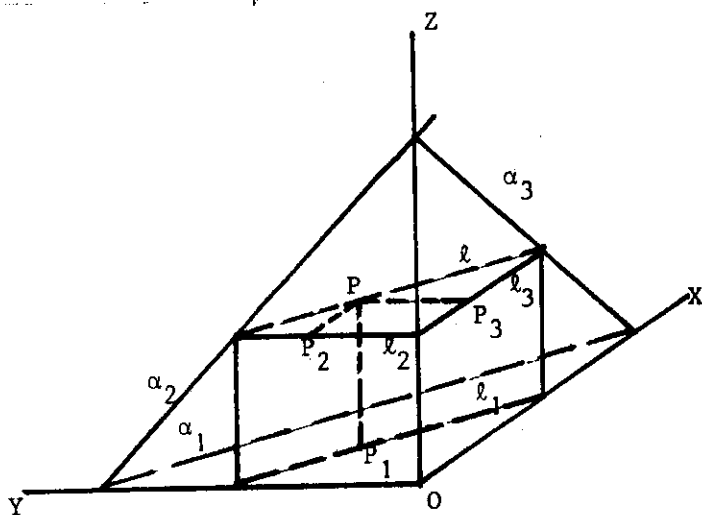


Figuur 35

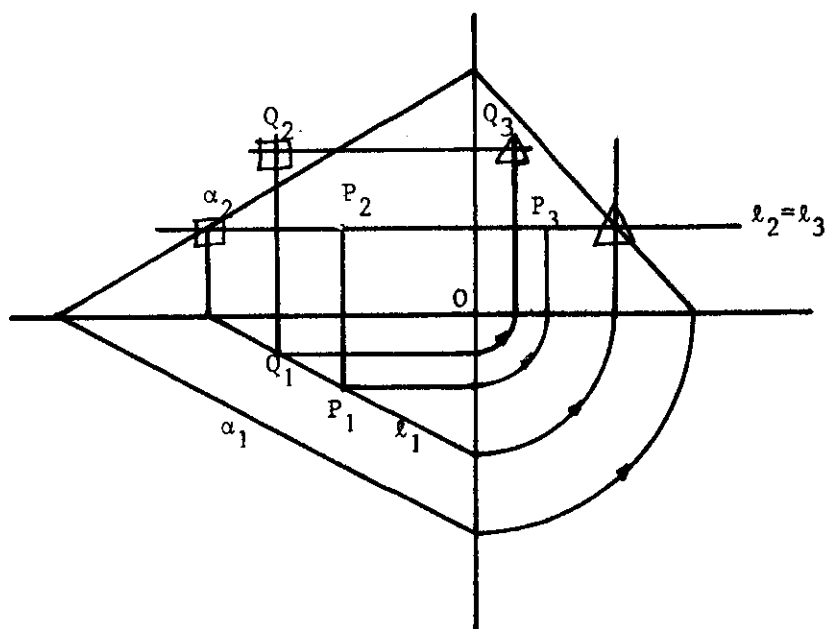
Het is duidelijk dat  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  elkaar op de Y-as snijden (tenzij ze beide evenwijdig die lijn zijn), ook snijden  $\alpha_2$  en  $\alpha_3$  elkaar op de Z-as. In de ruimte snijden  $\alpha_1$  en  $\alpha_3$  elkaar op de X-as, in projectie liggen de snijpunten van  $\alpha_1$  en van  $\alpha_3$  met de Y-as respectievelijk de X-as op gelijke afstand van  $O$ ; deze snijpunten hangen dus samen t.o.v. de X-as.

Om te onderzoeken of een punt  $P$  in een vlak  $\alpha$  ligt, tekenen we een lijn  $l$  door  $P$ , die bijvoorbeeld  $// \alpha_1$  is. Van deze lijn is  $l_1 // \alpha_1$ ,  $l_2$  en  $l_3$  zijn (inde ruimte)  $//$  de Y- resp. X-as, dus in de projectie vallen ze samen en zijn  $//$  de Y-as. (Zie Figuur 36 en 37.) De controle of  $P$  in  $\alpha$  ligt, geschiedt nu met behulp van  $\square$  en/of  $\Delta$ .

(Opdracht: probeer het zelf met een lijn  $m // \alpha_2$  en een lijn  $n // \alpha_3$ .)



Figuur 36

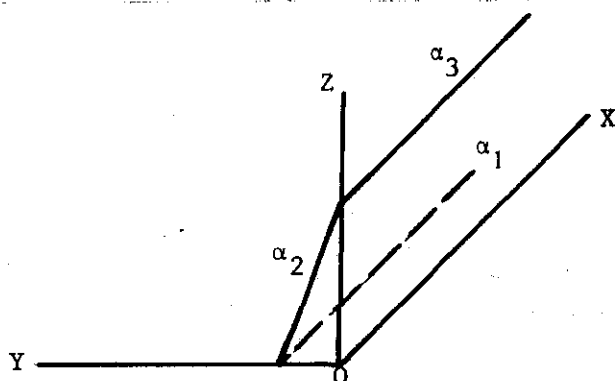


Figuur 37

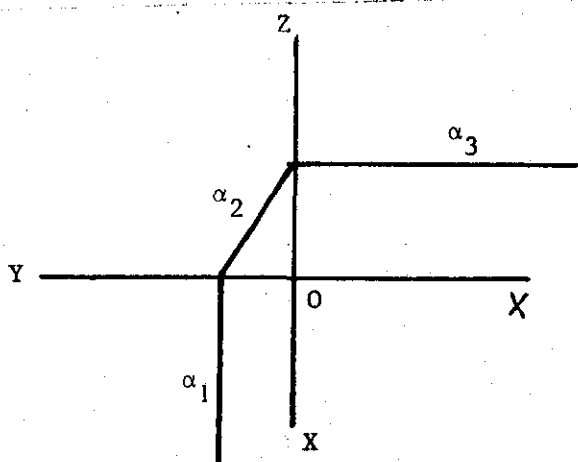
3.5. Bijzondere vlakken

Als het vlak  $\alpha // \pi_1$  is, dan ontbreekt  $\alpha_1$ , ook is  $\alpha_2 // Y$ -as en  $\alpha_3 // X$ -as (in de ruimte); in projectie vallen  $\alpha_2$  en  $\alpha_3$  samen en ze zijn  $// Y$ -as (maak zelf de bijbehorende tekeningen). Als  $\alpha // \pi_2$  is, dan ontbreekt  $\alpha_2$ . In de ruimte is  $\alpha_1 //$  de Y-as,  $\alpha_3 //$  de Z-as. Hetzelfde geldt in projectie en tevens hangen de snijpunten met de assen samen. (Maak zelf de bijbehorende tekeningen.)

Als  $\alpha // X$ -as is, dan zijn  $\alpha_1$  en  $\alpha_3$  in de ruimte beide  $// X$ -as (waarom?), in projectie is  $\alpha_1 // X$ -as, en  $\alpha_3 // X$ -as. (Zie Figuur 38 en 39.)



Figuur 38



Figuur 39

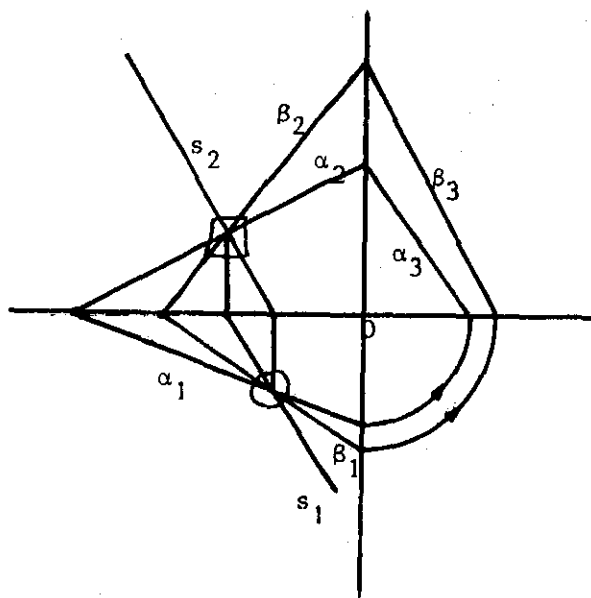
Opdracht: teken zelf de situatie waarin  $\alpha // Y$ -as, resp.  $\alpha // Z$ -as is.

### 3.6. Onderlinge ligging van vlakken

Twee vlakken,  $\alpha$  en  $\beta$ , zijn of evenwijdig of ze snijden elkaar. Als  $\alpha // \beta$  dan zijn de gelijknamige doorgangen evenwijdig.

Het omgekeerde is iets lastiger:

Als van twee vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  geldt:  $\alpha_1 // \beta_1$  en  $\alpha_2 // \beta_2$  dan kan de snijlijn van  $\alpha$  en  $\beta$  bestaan; die is dan nl. evenwijdig aan de Y-as (evenals  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  en  $\beta_2$ ). Uiteraard is nu  $\alpha_3 \nparallel \beta_3$ . Als  $\alpha_1 // \beta_1$  en  $\alpha_2 // \beta_2$ , terwijl  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  elkaar snijden ( $\beta_1$  ook  $\beta_2$ ) dan is  $\alpha // \beta$ . (Ga dit alles na in een ruimtelijke schets.) Als  $\alpha$  en  $\beta$  elkaar snijden dan zijn de doorgangspunten van de snijlijn  $s$  de snijpunten van de gelijknamige doorgangen. (Zie Figuur 40.)



Figuur 40

Geef zelf in deze figuur  $s_3$  en  $\Delta$  van  $s$  aan.

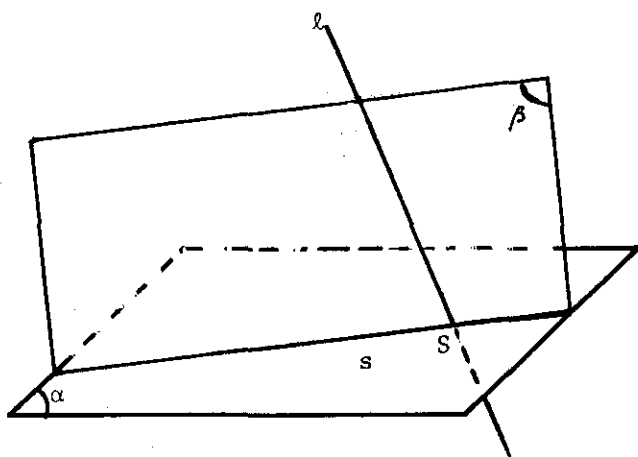
Er zijn bijzondere standen mogelijk. Eén voorbeeld:

Als  $\alpha_3 // \beta_3$  dan is  $s // \alpha_3$  (bewijs dit zelf) dus  $s // \pi_3$ , zodat  $s_3 // \alpha_3$  terwijl  $s_1$  en  $s_2$  in de projectie samenvallen en  $\perp$  de Y-as staan.

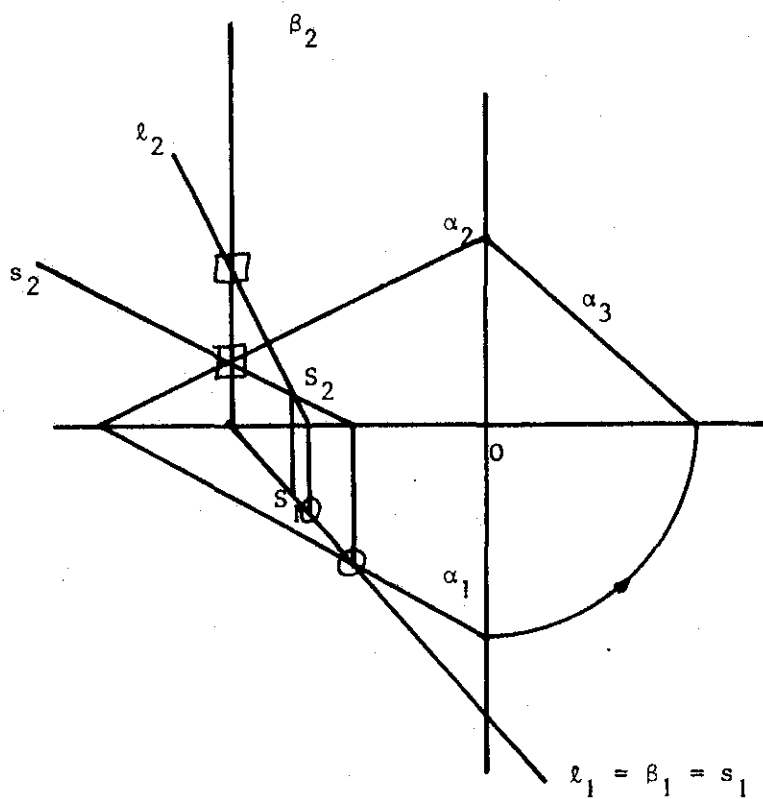


### 3.7. Snijpunt van een lijn met een vlak

We willen het snijpunt  $S$  van een lijn  $\ell$  met een vlak  $\alpha$  construeren. Hiertoe brengen we een willekeurig vlak  $\beta$  aan door  $\ell$  en construeren de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$ . Deze lijn  $s$  snijdt  $\ell$  in het gezochte punt  $S$ . Zie de stereometrische schets in Figuur 41. In Figuur 42 is de constructie in Amerikaanse projectie uitgevoerd;  $\beta$  is gemakshalve  $\perp \pi$ , gekozen.



Figuur 41



Figuur 42

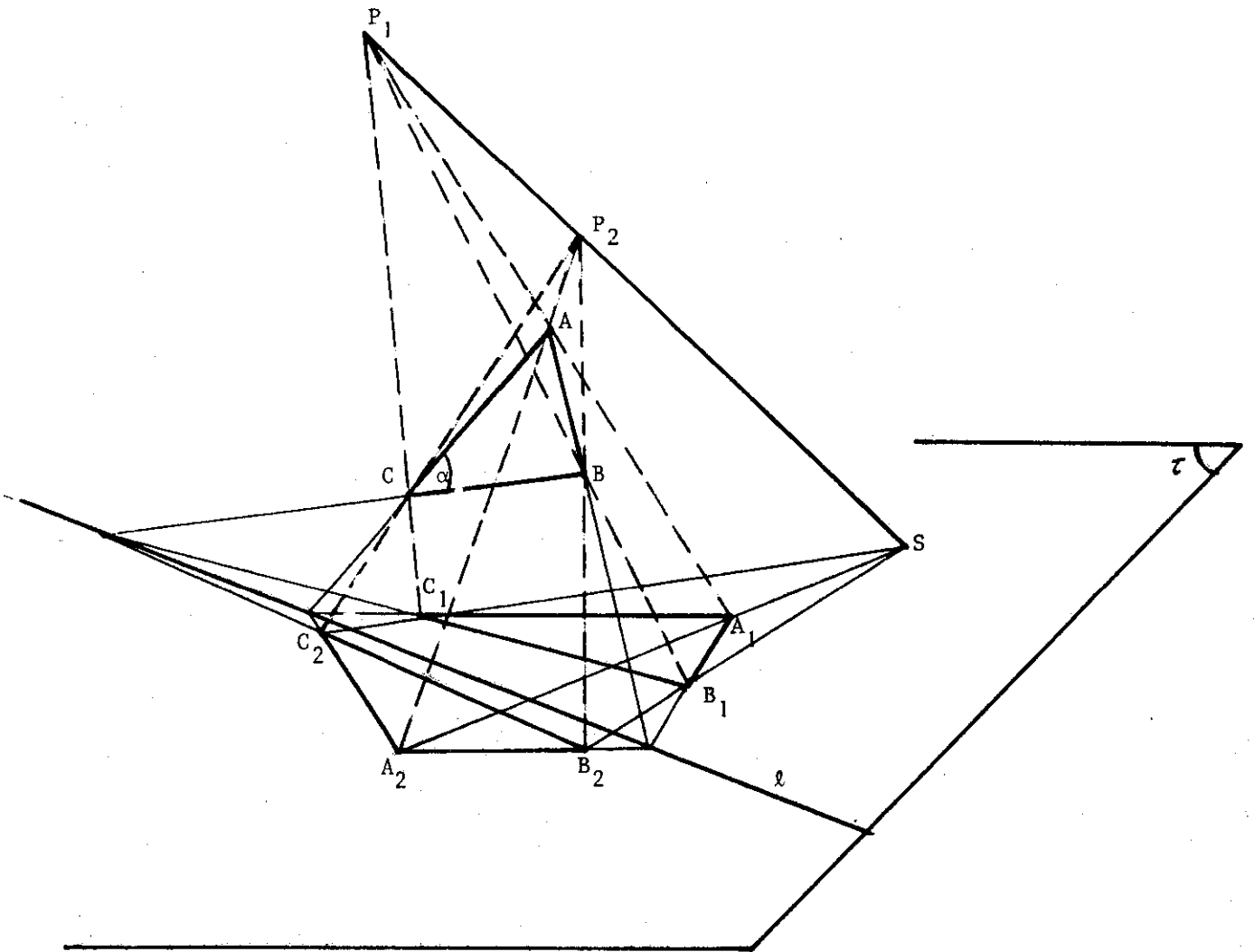
### Opmerkingen

In de praktijk wordt in plaats van een willekeurige lijn vaak (gemakshalve) een bijzondere lijn gekozen door een bijzonder punt. Zo is in Figuur 42 als lijn  $m$  gekozen de lijn door  $\square$  van  $\ell$ ,  $\perp \pi_1$ . Het vlak  $\beta$  door  $\ell$  en  $m$  is daardoor  $\perp \pi_1$  zodat  $\ell_1 = m = \beta_1 = s_1$ . Tevens geldt  $\beta_2 = m_2$ . De lijn  $s_2$  is nu met behulp van de bekende samenhang te tekenen. Hiermee zijn  $S_1$  en  $S_2$  bekend. Soms neemt men  $m \perp \pi_2$ ; dit levert een analoge constructie.

### 3.8. Perspectiviteit en affiniteit

We gaan uit van een vlak  $\alpha$ , met daarin de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$ , verder het vlak  $\tau$  en de punten  $P_1$  en  $P_2$ . Aangenomen wordt:  $\alpha$  is niet evenwijdig met  $\tau$ , de punten  $P_1$  en  $P_2$  liggen noch in  $\alpha$ , noch in  $\tau$ . Vanuit de punten  $P_1$  en  $P_2$  worden de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  op  $\tau$  geprojecteerd. De projectie vanuit  $P_1$ , nl.  $A_1B_1C_1$  is "verwant" aan  $\triangle ABC$ :  $AA_1$ ,  $BB_1$  en  $CC_1$  gaan uiteraard door  $P_1$  maar ook snijden  $AB$  en  $A_1B_1$  (beide in het vlak  $P_1AB$  gelegen) elkaar op de snijlijn  $\ell$  van  $\tau$  en  $\alpha$ . Eenzelfde "verwantschap" bestaat tussen de driehoeken  $A_2B_2C_2$  en  $ABC$ . Dit betekent dat de beide projecties  $A_1B_1C_1$  en  $A_2B_2C_2$  ook "verwant" zijn. In de eerste plaats gaat  $A_2B_2$  door het snijpunt van  $AB$  en  $A_1B_1$  m.a.w.  $A_1B_1$  en  $A_2B_2$  snijden elkaar in een punt van  $\ell$ . Verder zien we dat  $A_1A_2$ , gelegen in het vlak  $P_1P_2A$ , door het snijpunt  $S$  van  $P_1P_2$  met  $\tau$  gaat. Voor de beide projecties van  $\triangle ABC$  hebben we nu twee eigenschappen gevonden:

1. De verbindingslijnen van gelijknamige punten gaan door één punt S.
2. De snijpunten van gelijknamige lijnen liggen op één lijn  $\ell$ .



Figuur 43

De betrekking die tussen de figuren  $A_1B_1C_1$  en  $A_2B_2C_2$  bestaat heet perspectiviteit; het punt S heet perspectief centrum, de lijn  $\ell$  heet perspectiviteitsas.

We gaan ons nu met parallelprojectie bezighouden. Stel dat  $P_1$  een oneindig

ver punt is; het projecteren vanuit  $P_1$  is dan projecteren in een gegeven richting, zeg  $p$ . De lijnen  $AA_1$ ,  $BB_1$  en  $CC_1$  zijn dan evenwijdig aan de richting  $p$ . Evenzo is  $P_1P_2$  nu overgegaan in de lijn door  $P_2$  en  $//p$ . De werkwijze die tot de onder 1 en 2 genoemde conclusies leidde kan zonder meer worden gevolgd en leidt tot hetzelfde resultaat: De geprojecteerde figuren  $A_1B_1C_1$  en  $A_2B_2C_2$  zijn perspectief; nu echter is het perspectiefcentrum het snijpunt van de lijn door  $P_2$  en  $//p$  met  $\tau$ , de snijlijn van  $\alpha$  met  $\tau$  is weer perspectiviteitsas. Wanneer we ook de tweede centrale projectie door een parallelprojectie vervangen (dus  $P_2$  wordt eveneens een oneindig ver punt) dan leidt de oorspronkelijke gedachten-gang tot een analoog resultaat. De eerste der beide eigenschappen wordt nu:

De verbindingslijnen van gelijknamige punten zijn evenwijdig. (Immers, de lijnen  $A_1A_2$  en  $B_1B_2$  bijvoorbeeld zijn de snijlijnen met  $\tau$  van de vlakken resp. door A en B evenwijdig met de beide projectierichtingen  $p_1$  en  $p_2$ .)

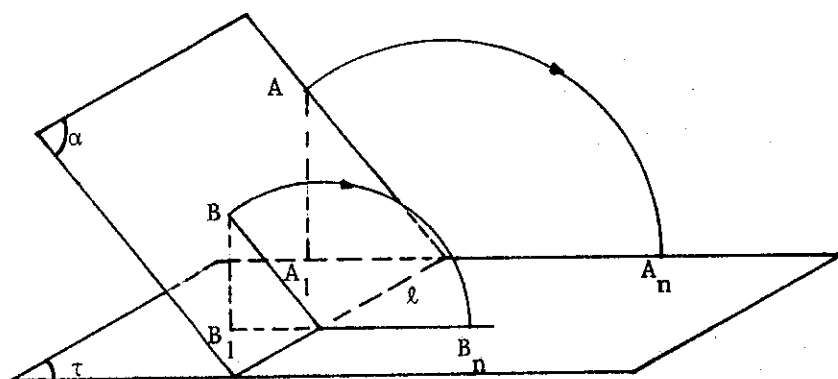
De tweede der beide eigenschappen blijft onveranderd.

De betrekking tussen de beide geprojecteerde figuren heet nu affiniteit; de snijlijn  $\ell$  van  $\alpha$  en  $\tau$  heet affiniteitsas, de richting van (b.v.)  $A_1A_2$  heet affiniteitsrichting.

De begrippen perspectiviteit en affiniteit met hun eigenschappen zijn zeer belangrijk. Dikwijls is het nodig een vlak in  $\tau$  te wentelen (zie Figuur 44): Het vlak  $\alpha$  wordt (om zijn snijlijn  $\ell$  met  $\tau$ ) gedraaid tot het in  $\tau$  ligt. Elk punt van  $\alpha$  beschrijft een cirkelboog, die in hoekmaat dezelfde is (nl. in dit geval het supplement van de hoek tussen  $\alpha$  en  $\tau$ ). Het gevolg is dat  $AA_n$  en  $BB_n //$  zijn. Rotatie kan dus beschouwd worden als een parallelprojectie. Als A, B, .... ook nog centraal worden geprojecteerd dan is

de betrekking tussen  $A_1B_1\dots$  en  $A_nB_n$  een perspectieve. Als A en B parallel worden geprojecteerd dan ontstaat tussen  $A_1B_1\dots$  en  $A_nB_n\dots$  een affiniteit. Is de projectie loodrecht op  $\tau$  dan is de affiniteitsrichting  $A_1A_n$  loodrecht op  $\ell$ . Dit laatste zal ons bij de Amerikaanse projectie en de axonometrie te pas komen, het voorlaatste bij scheve projectie en het eerstgenoemde bij perspectief tekenen.

Opmerking. Bij een affiniteit geldt nog: evenwijdigheid blijft behouden; verhoudingen van lijnstukken op één lijn ook.



Figuur 44

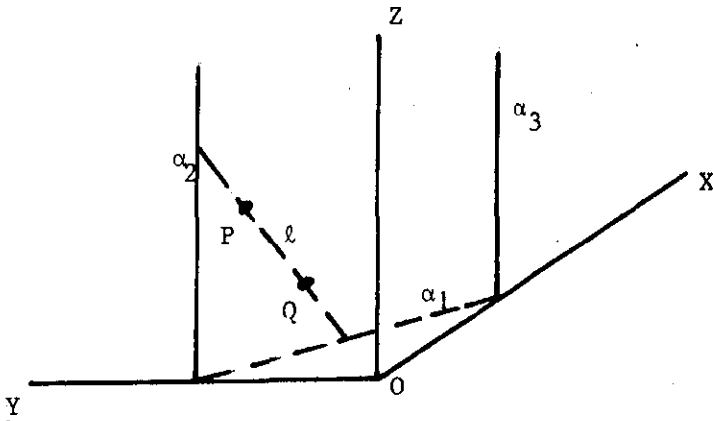
### 3.9. Het wentelen van vlakken

Als in projectie een lijn gegeven is door zijn projecties, op de lijn een tweetal punten, dan is het soms nuttig de werkelijke afstand van die twee punten te weten. Evenzo is het wel eens nodig om de ware hoek tussen twee lijnen, of tussen een lijn en een vlak te weten. In alle projectiemethodes wordt de constructie uitgevoerd door het neerslaan

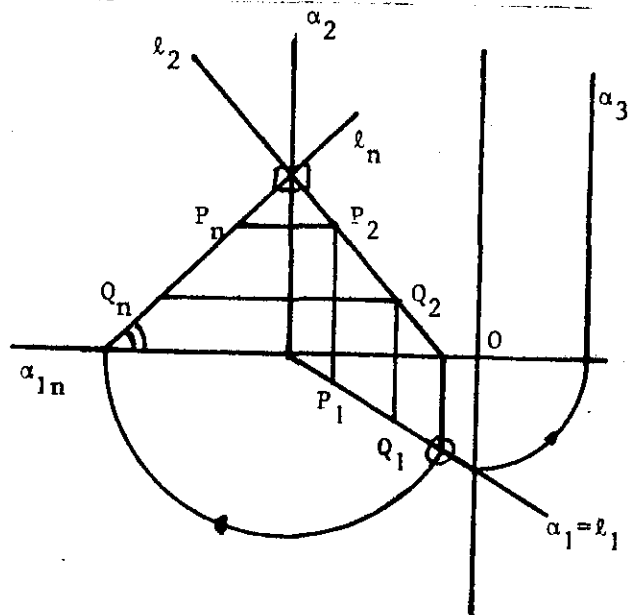
van handig gekozen vlakken. We zullen daarom in deze paragraaf een begin maken met het systematisch behandelen van het neerslaan van vlakken.

In de geval:  $\alpha \perp \pi_1$ . In Figuur 45a is gegeven het vlak  $\alpha (\perp \pi_1)$ , daarin een rechte  $\ell$  en op  $\ell$  de punten P en Q. We willen de ware grootte van de hoek van  $\ell$  met  $\pi_1$  (dus van  $\ell$  met  $\alpha_1$ ) en de ware afstand van P tot Q weten.

Daartoe wentelen we (eerste mogelijkheid) het vlak om  $\alpha_2$  tot het met  $\pi_2$  samenvalt. Elk punt beschrijft een cirkelboog, steeds gelegen in een vlak  $\parallel \pi_1$ . Het resultaat is te zien in Figuur 45b.

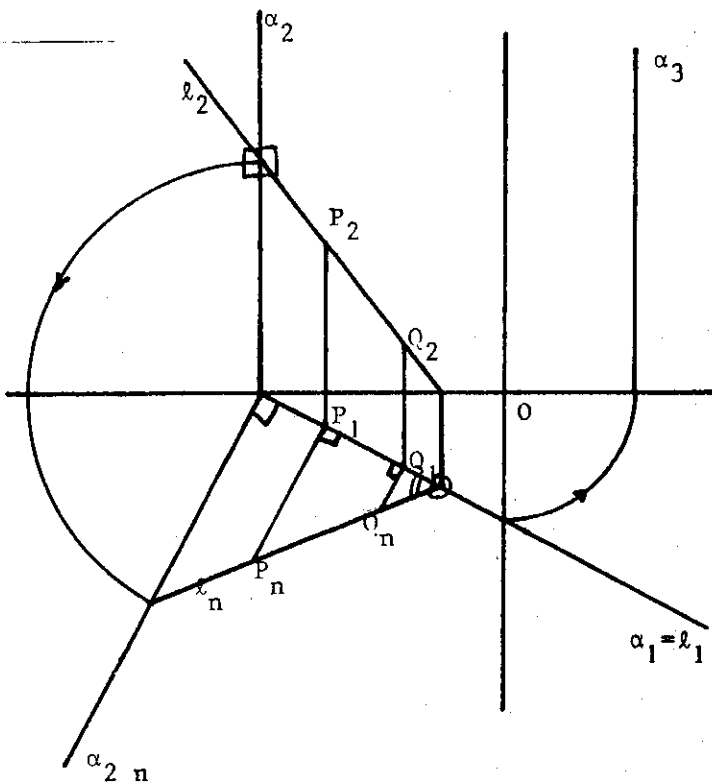


Figuur 45a



Figuur 45b

Bedenk dat de tweede projecties en de neergeslagen stand affiene figuren zijn, met  $\alpha_2$  als affiniteitsas en  $P_2P_n$  als affiniteitsrichting. Soms heeft het zin om het wentelen om  $\alpha_1$  te laten geschieden tot  $\alpha$  samenvalt met  $\pi_1$ . Dit is in Figuur 45c uitgevoerd. Nu zijn de eerste projecties en de neergeslagen stand affien, met  $P_1P_n$  als affiniteitsrichting en  $\alpha_1$  als affiniteitsas.



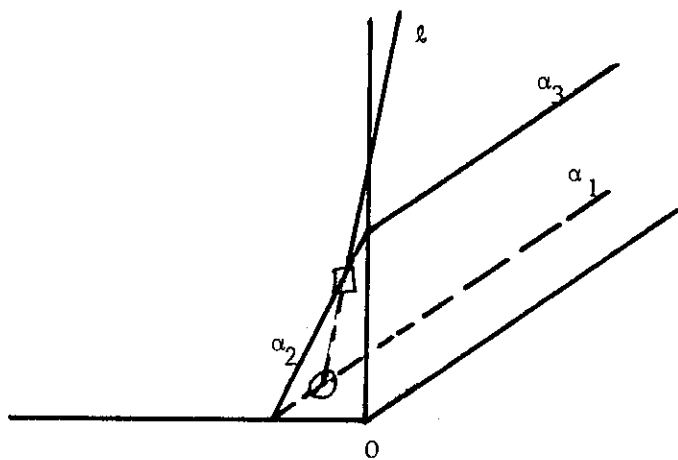
Figuur 45c

Opmerkingen

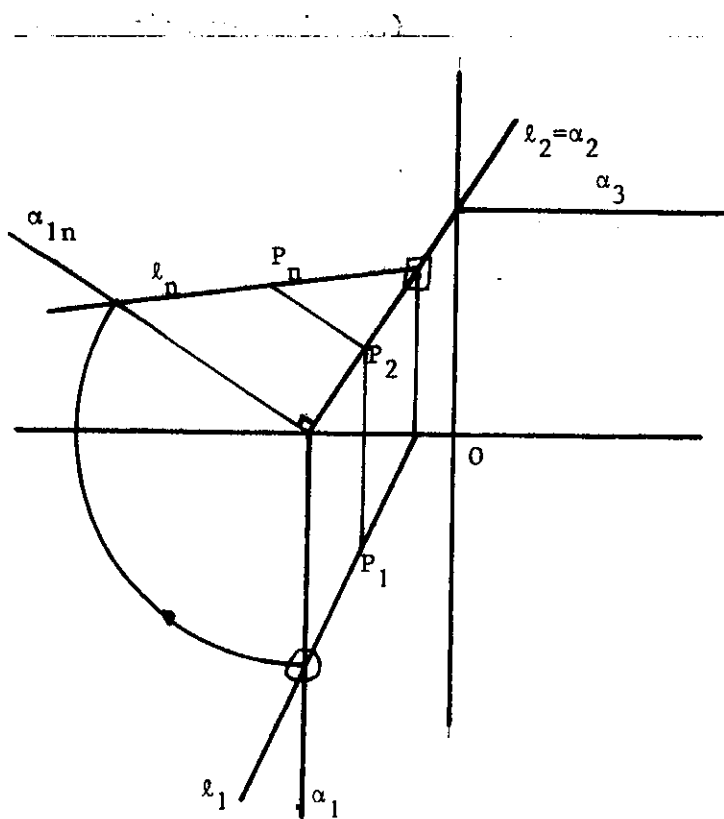
1. In beide beschreven gevallen kunnen de gevraagde hoek en afstand worden afgelezen.
2. Het neerslaan kan ook om  $\alpha_3$  uitgevoerd worden. Dit levert geen nieuwe problemen en wordt kortheidshalve weggelaten.

2e geval:  $\alpha \perp \pi_2$ .

In Figuur 46a, Figuur 46b en Figuur 46c zijn in stereometrie en in de beide projectietekeningen de situaties weergegeven. (Figuur 46b: wentelen om  $\alpha_2$  in  $\pi_2$ .)

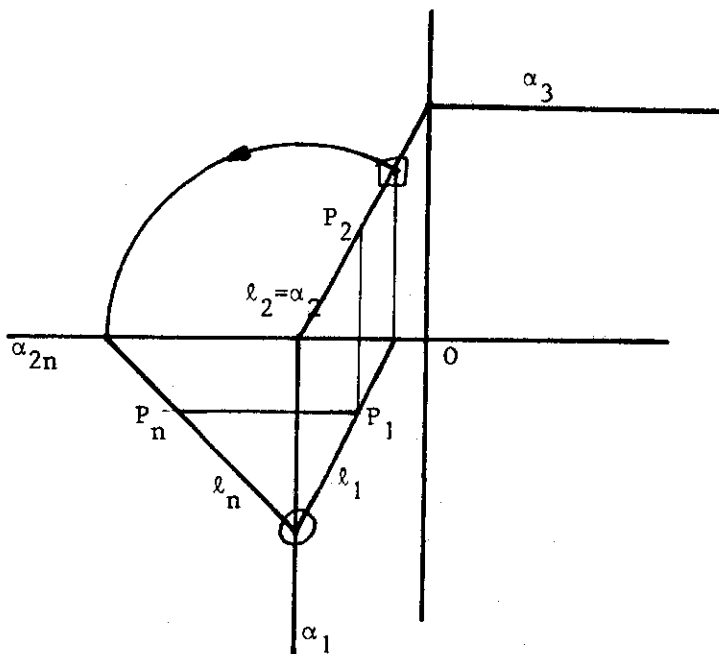


Figuur 46a



Figuur 46b

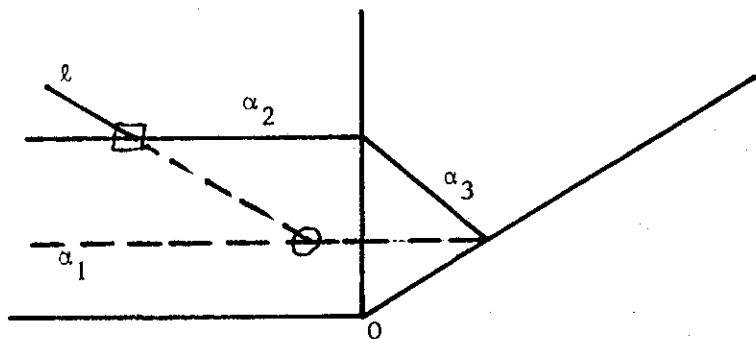




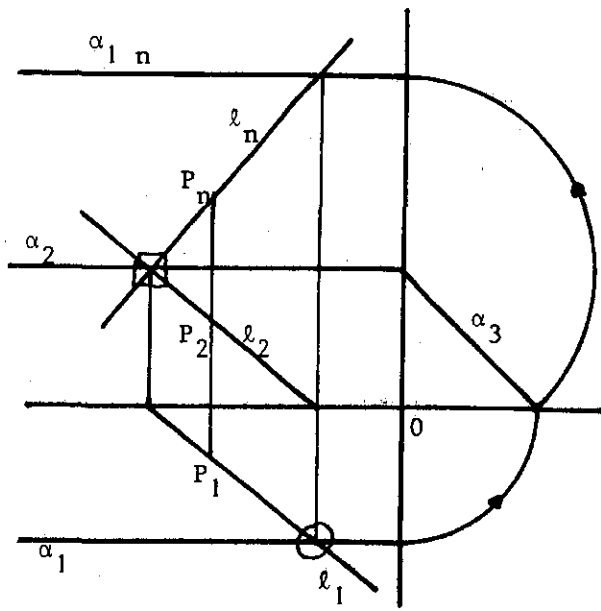
Figuur 46c

3e geval:  $\alpha \perp \pi_3$

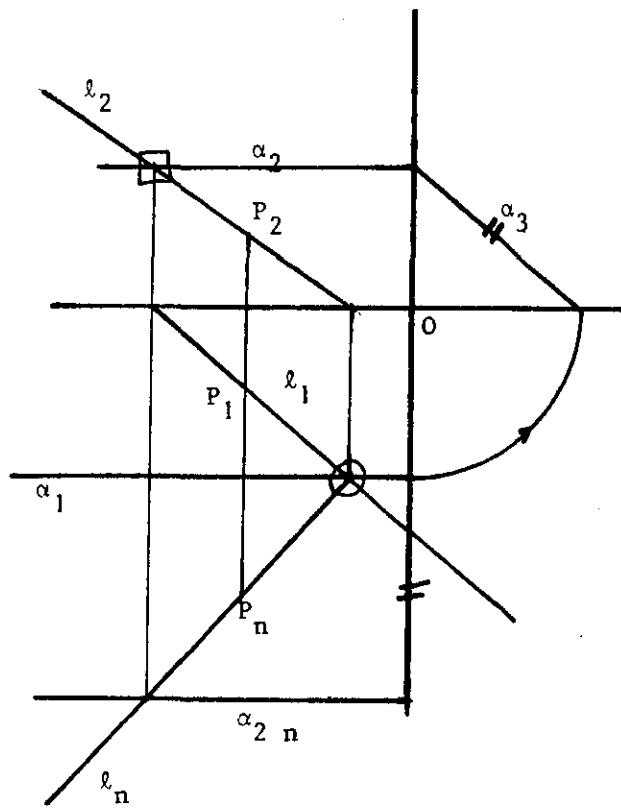
In de Figuren 47 zijn in stereometrie en in de beide projectietekeningen de situaties weergegeven (Figuur 47b: wentelen om  $\alpha_2$  in  $\pi_2$ ).



Figuur 47a



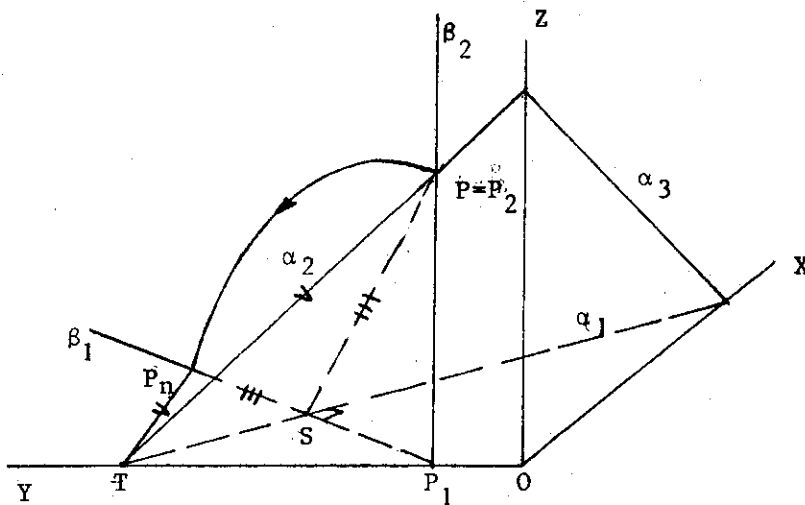
Figuur 47b



Figuur 47c

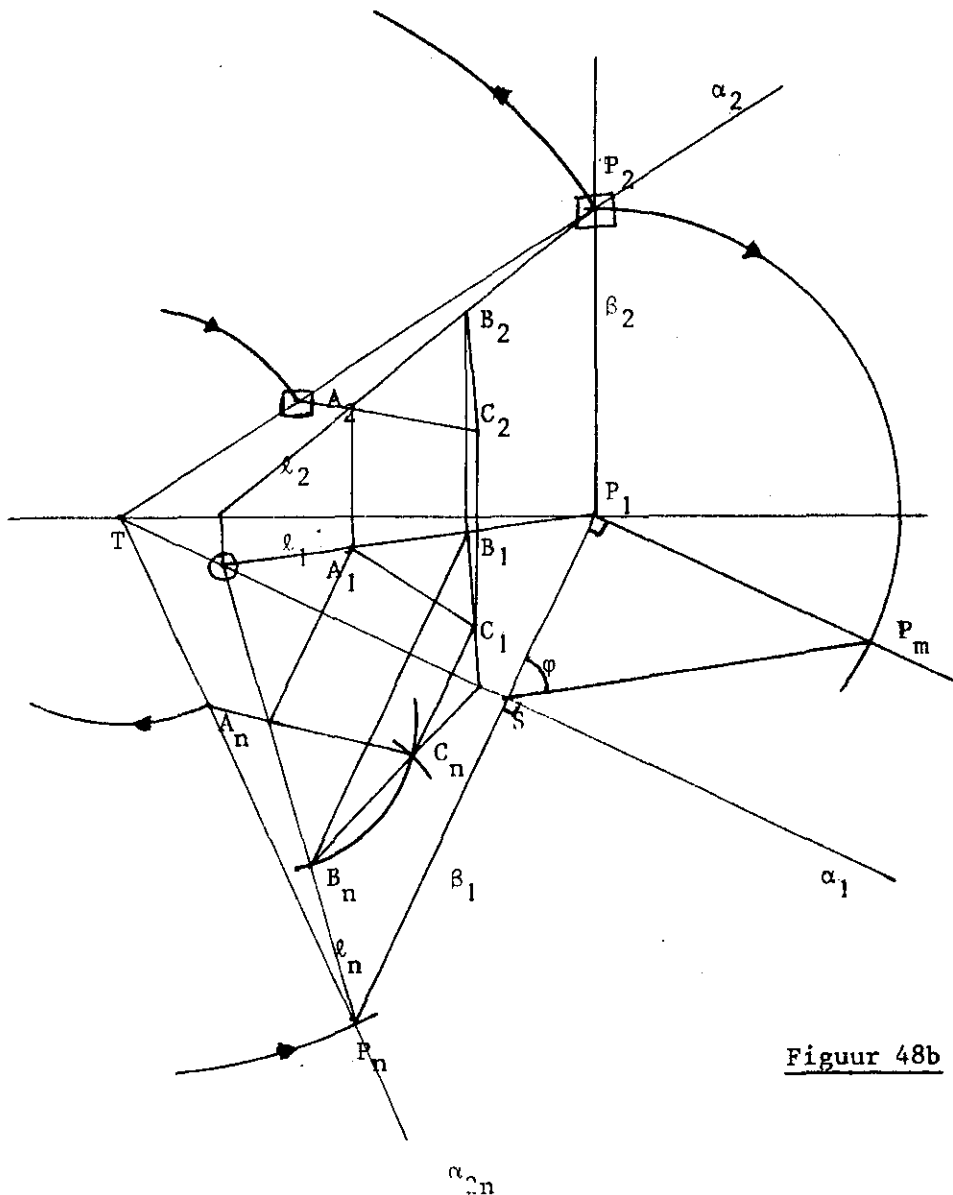
4e geval:  $\alpha$  willekeurig.

We zullen een voorbeeld gebruiken waarbij het neerslaan onontbeerlijk is. Ter inleiding gebruiken we de schets in Figuur 48a. Daar is het vlak  $\alpha$  gewenteld om  $\alpha_1$  tot het in  $\pi_1$  ligt. Daartoe is op  $\alpha_2$  een punt  $P$  genomen. Dit punt beschrijft een cirkelboog, gelegen in het vlak  $\beta$ , door  $P$  en  $\perp \alpha_1$ . Soms is het gemakkelijk om de straal  $SP$  te construeren, en dan  $SP_n = SP$  te maken. Aangezien de eerste projecties van punten in  $\alpha$  en de neergeslagen stand affiene figuren zijn (met  $\alpha_1$  als as en affiniteitsrichting loodrecht op  $\alpha_1$ ) ligt de affiniteit met de gevonden  $P_n$  vast. Een snelle methode maakt gebruik van de reeds bekende afstand  $TP$  ( $=TP_2$ ). Met behulp van deze afstand wordt  $P_n$  op  $\beta_1$  gevonden.

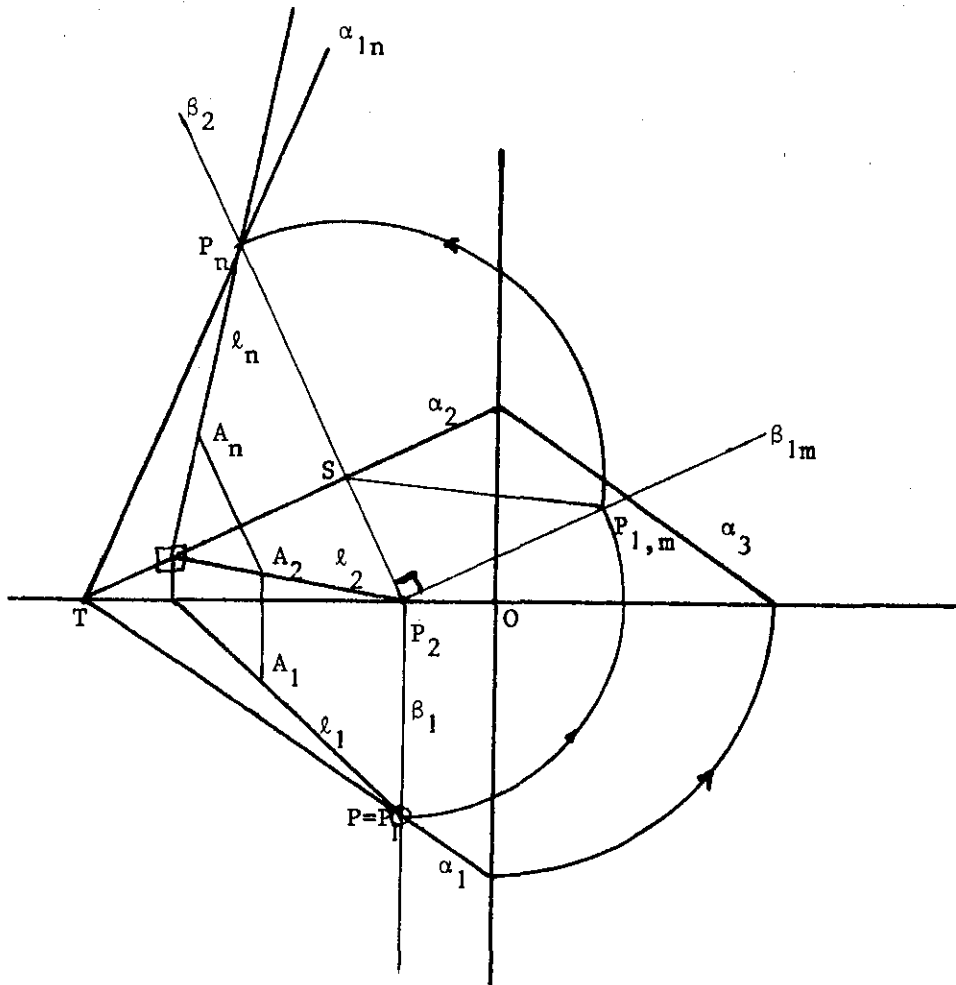


Figuur 48a

Nu het voorbeeld. In het vlak  $\alpha$  liggen de punten A en B (op  $\ell$ ). Gevraagd wordt in  $\alpha$  het punt C z6 te construeren dat  $\triangle ABC$  gelijkzijdig is. In Figuur 48b is het vlak  $\alpha$  om  $\alpha_1$  in  $\pi_1$  neergeslagen. Voor het in Figuur 48a genoemde punt P is  $\square$  van  $\ell$  genomen. Door P is het vlak  $\beta \perp \alpha_1$  getekend; (dus  $\beta_1 \perp \alpha_1$  en  $\beta_2 \perp y$ -as. Waarom?)  $P_n$  is nu te construeren (orthogonale affiniteit; as is  $\alpha_1$ ,  $TP_2 = TP_n$ ). Daarna zijn  $A_n$  en  $B_n$  op  $\ell_n$  getekend. Het punt  $C_n$  is geconstrueerd als derde punt van de gelijkzijdige driehoek.  $C_1$  is met affiniteit gevonden. Om  $C_2$  te vinden is gebruik gemaakt van het snijpunt van  $A_n C_n$  met  $\alpha_{2n}$ , dus het neergeslagen  $\square$  van AC.







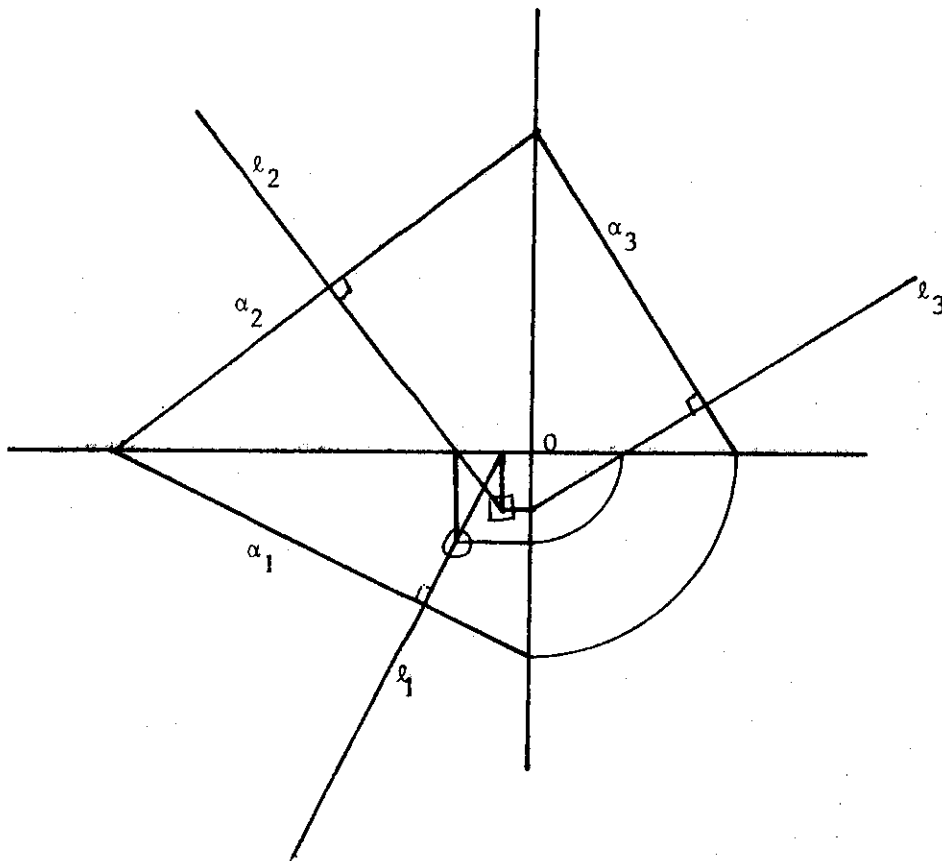
Figuur 49b

Opmerking. De lezer zal bij het tekenen in Amerikaanse projectie voor het neerslaan een keuze moeten maken tussen neerslaan om  $\alpha_1$  en om  $\alpha_2$ . Vaak zal die keuze afhangen van de gegevens.

3.10. Loodrechte stand, hoeken, afstanden

Is de lijn  $\ell$  loodrecht op vlak  $\alpha$ , dan geldt volgens Stelling 2.12:

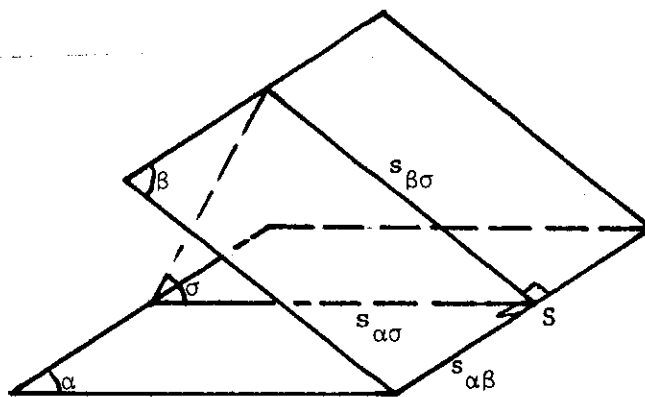
$\ell_1 \perp \alpha_1$ ,  $\ell_2 \perp \alpha_2$  en  $\ell_3 \perp \alpha_3$ . De volgende omkering geldt: Als twee der projecties van  $\ell$  loodrecht op de gelijknamige doorgangen van  $\alpha$  staan, dan is  $\ell \perp \alpha$  mits 2 doorgangen elkaar snijden. Dit is als volgt in te zien. De lijn  $\ell$  ligt in het vlak door  $\ell_1$  en  $\perp \pi_1$ . Als  $\ell_1 \perp \alpha_1$ , dan is het bedoelde vlak  $\perp \alpha_1$  (waarom?). Als nu ook  $\ell_2 \perp \alpha_2$  is, dan is het vlak door  $\ell_2$  en  $\perp \pi_2$  ook  $\perp \alpha_2$ . De snijlijn  $\ell$  der beide vlakken is dus loodrecht op  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ , dus loodrecht op  $\alpha$ . In Figuur 50 is  $\ell \perp \alpha$  getekend.



Figuur 50

Om de hoek  $\varphi$  van twee snijdende lijnen te bepalen, wordt het vlak door deze lijnen aangebracht en dat vlak wordt neergeslagen in  $\pi_1$  of  $\pi_2$ . Bedenk dat de hoek tussen de projecties in het algemeen niets met de bedoelde hoek te maken heeft. (Wanneer wel? Zie ook Stelling 2.13.) Als we de hoek tussen twee kruisende lijnen willen bepalen, dan worden ze door een translatie (= evenwijdige verschuiving) eerst snijdend gemaakt.

De hoek  $\varphi$  tussen twee snijdende vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  worden bepaald door het aanbrengen van een standvlak  $\sigma$  (zie Definitie 2.10). In Figuur 51 zijn de letters bij de snijlijnen vermeld. In Figuur 52 is de constructie uitgevoerd.



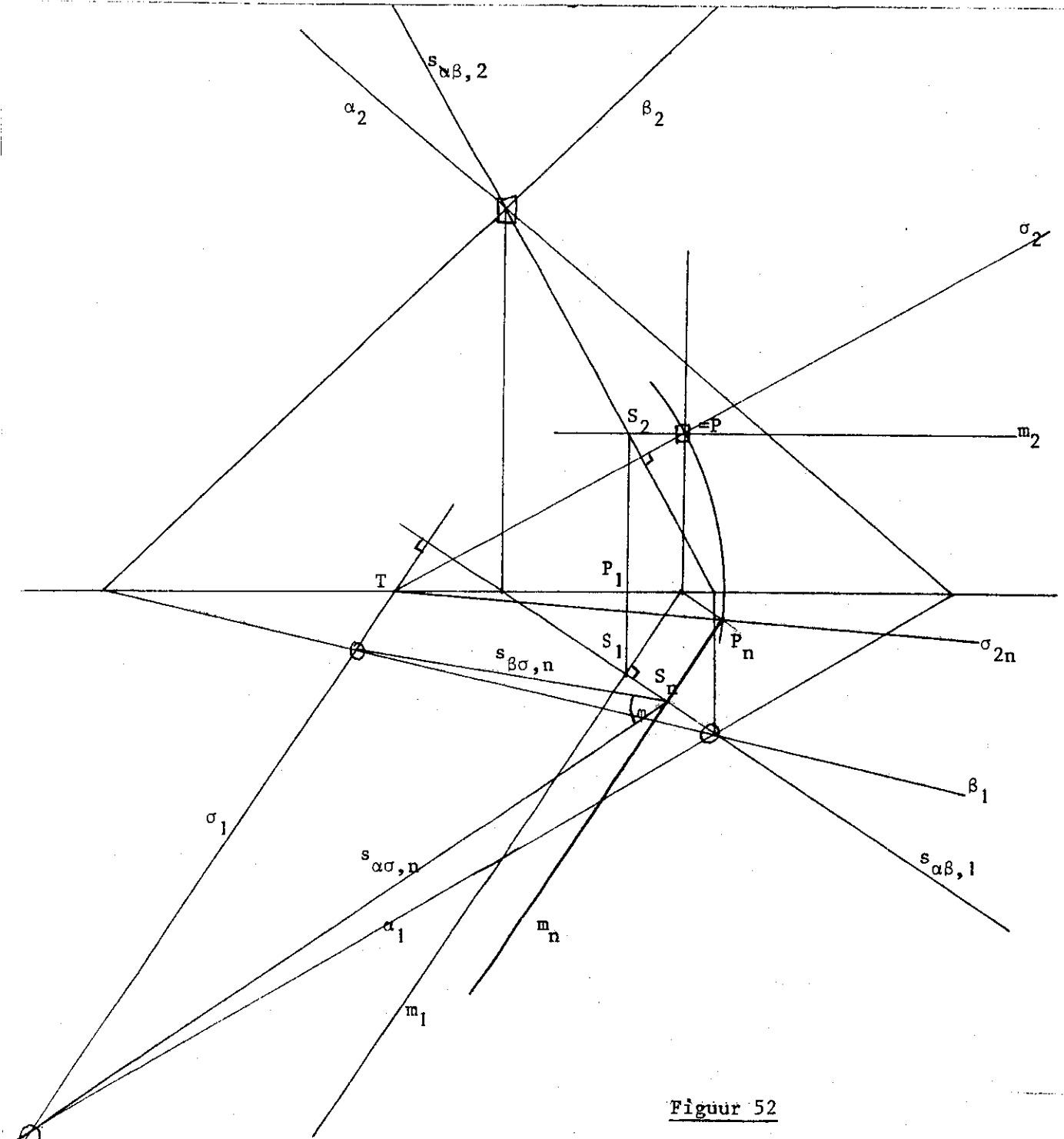
Figuur 51

Op de snijlijn  $s_{\alpha\beta}$  is een willekeurig punt  $S$  aangenomen. Door  $S$  wordt het vlak  $\sigma$  aangebracht loodrecht op  $s_{\alpha\beta}$ . Daartoe wordt door  $S$  een hulplijn  $m$  aangebracht die loodrecht is op  $s_{\alpha\beta}$  en  $\parallel \pi_1$ . Deze lijn ligt in  $\sigma$  (waarom?),  $m_1 \perp s_{\alpha\beta,1}$  (waarom?) en  $m_2 \parallel Y$ -as. De doorgang  $\sigma_2$  gaat door  $\square$  van  $m$  en is  $\perp s_{\alpha\beta,2}$ ; nu is ook  $\sigma_1$  bekend. Om de hoek tussen  $s_{\alpha\sigma}$  en  $s_{\beta\sigma}$  te bepalen



wordt  $\sigma$  gewenteld om  $\sigma_1$  tot het in  $\pi_1$  ligt.

De eerste projecties van punten en lijnen in  $\sigma$  en de neergeslagen stand van deze vormen een orthogonale affiniteit, met  $\sigma_1$  tot as. Het  $\square$  van  $m$  is



Figuur 52

gebruikt om de affiniteit vast te leggen. De afstand van genoemd punt tot  $T$  is immers de ware afstand. Daarna is  $S_n$  bepaald. Enerzijds is nl.  $S_1 S_n \perp$  de affiniteitsas  $\sigma_1$ , anderzijds ligt  $S_n$  op  $m_n$ .  $S_n$  wordt nu verbonden met  $O$  van  $s_{\alpha\sigma}$  en  $s_{\beta\sigma}$ , waarmee  $s_{\alpha\sigma,n}$  en  $s_{\beta\sigma,n}$  bekend zijn; de hoek  $\varphi$  is gevonden.

De hoek tussen een lijn  $\ell$  en een vlak  $\alpha$  wordt bepaald in overeenstemming met Definitie 2.8. We moeten dus de lijn  $\ell$  loodrecht projecteren op  $\alpha$ .

Trek daartoe door een punt van  $\ell$  de loodlijn  $m$  op  $\alpha$ , en teken het vlak  $\beta$  door  $\ell$  en  $m$ . Als  $s$  de snijlijn is van  $\alpha$  en  $\beta$  dan is de gezochte hoek de scherpe hoek tussen  $\ell$  en  $s$ . Een veel kortere methode is: bepaal de hoek tussen  $\ell$  en de loodlijn  $m$  op  $\alpha$ . De gezochte hoek is het complement van deze hoek (ga dit na). Om de afstand van de punten  $A$  en  $B$  te bepalen brengen we een vlak  $\alpha$  aan door  $A$  en  $B$  en slaan dit neer om  $\alpha_1$  dan wel  $\alpha_2$ .

We kiezen uiteraard  $\alpha \perp \pi_1$  of  $\alpha \perp \pi_2$ .

De afstand van de evenwijdige vlakken vinden we door een lijn  $\ell$  te tekenen loodrecht op beide. De afstand is de afstand der beide snijpunten.

Opmerking. Om de constructies zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk te maken zullen we zorgvuldig gebruik maken van doelmatig gekozen hulplijnen en hulpvlakken. Deze zullen vaak een bijzondere ligging hebben, zoals lijn // één der coördinaatvlakken, vlak  $\perp$  één der coördinaatvlakken.

### 3.11. Het wentelen van een ruimtelijk lichaam

In sommige opgaven wordt een lichaam gewenteld om een lijn en over een zekere hoek. Bij dit wentelen is de baan van elk punt een cirkelboog, steeds gelegen in een vlak loodrecht op de wentelingsas. Bovendien wordt

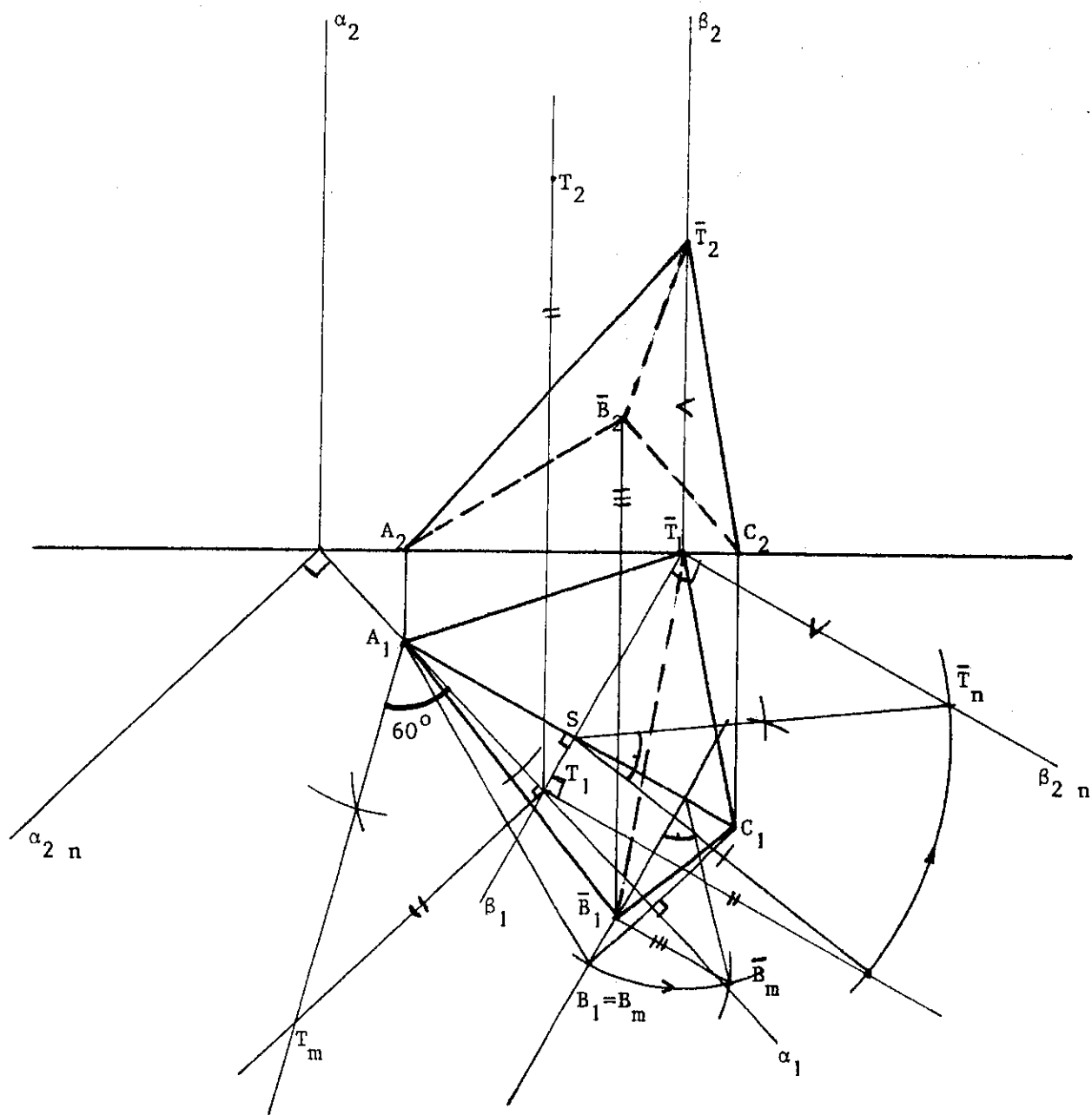
elk punt over dezelfde hoek gedraaid. Het onderstaande uitgewerkte voorbeeld bevat genoemde elementen.

Voorbeeld. De pyramide  $\begin{matrix} T \\ ABC \end{matrix}$  staat met het grondvlak op  $\pi_1$ .  $\Delta A_1 B_1 C_1$  is in de tekening gegeven. De ribbe AT ligt in het vlak  $\perp BC$ , maakt een hoek van  $60^\circ$  met  $\pi_1$  en heeft een gegeven lengte. De pyramide wordt om AC gewenteld tot T in  $\pi_2$  ligt. Construeer de projecties van de pyramide in gewentelde stand.

Beschrijving van de oplossing. (Zie Figuur 53.)

Door A wordt het vlak  $\alpha$  aangebracht loodrecht BC, dus  $\alpha_1 \perp B_1 C_1$  en  $\alpha_2 \perp Y$ -as. Het vlak  $\alpha$  wordt om  $\alpha_1$  in  $\pi_1$  gewenteld. In de neergeslagen stand wordt de hoek van  $60^\circ$  en de gegeven lengte afgezet, (geeft  $T_m$ ). Hiermee zijn  $T_1$  en  $T_2$  bepaald. Vervolgens wordt een vlak  $\beta$  aangebracht door de top loodrecht op de wentelingsas AC, d.w.z.  $\beta_1 \perp A_1 C_1$  en  $\beta_2 \perp Y$ -as. Dit vlak wordt in  $\pi_1$  gewenteld. De lijn  $\beta_{2n}$  is belangrijk omdat  $T_n$  na wenteling op die lijn terecht komt, (als  $\bar{T}_n$ ). De cirkelboog heeft S tot middelpunt. Hiermee zijn  $\bar{T}_1$  en  $\bar{T}_2$  bekend. ( $\bar{T}_1 \bar{T}_n$  is de afstand van  $\bar{T}$  tot  $\pi_1$ .) Ook het punt B dient over dezelfde hoek gewenteld. In dit geval is er door B een vlak  $// \beta$  aangebracht en is  $B_m (= B_1)$  over dezelfde hoek gewenteld als  $T_n$ . ( $\bar{B}_1 \bar{B}_m$  is de afstand van  $\bar{B}$  tot  $\pi_1$ .) Als er veel punten moeten worden gewenteld worden ze vaak, om veel lijnen te vermijden, op  $\beta$  geprojecteerd en na wentelen weer terug geprojecteerd.

Opmerking. De onzichtbare lijnen van de pyramide zijn gestreept. Ga zelf na of dit goed is gedaan.



Figuur 53

### 3.12. Schaduwconstructies

Tekeningen van voorwerpen worden in alle projecties vaak "opgesierd" met schaduwen. Zo zal een gebouw, voorzien van luifels in Amerikaanse projectie getekend, vaak die luifels in bepaalde projecties niet te zien geven. (bijvoorbeeld als de gevel  $// \pi_2$  is, zijn de luifels in die gevels in tweede projectie onzichtbaar). Schaduwen van luifels op de grond of op de gevel zelf suggereren echter die luifels wel.

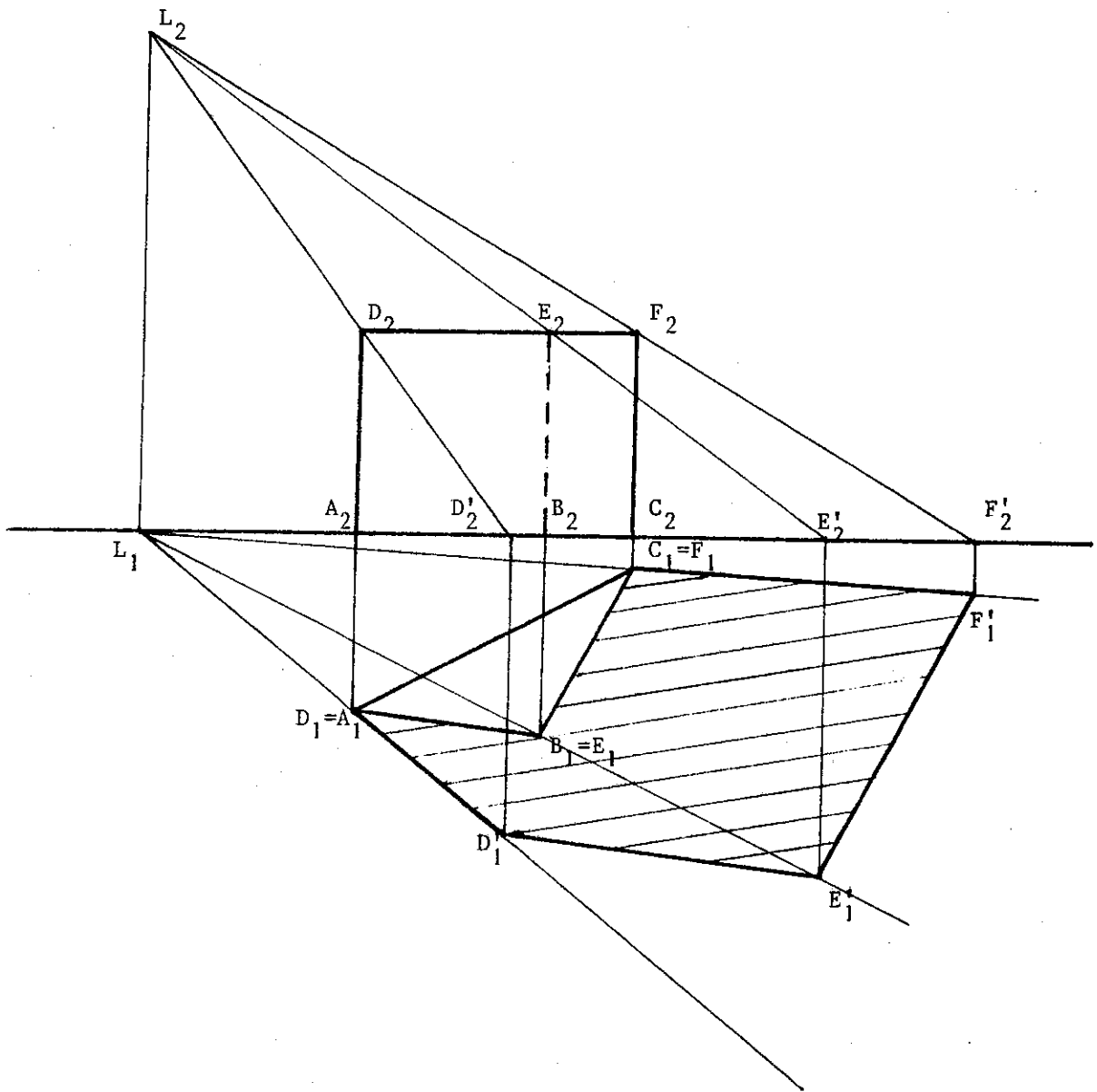
We zullen de constructies van schaduwen toelichten aan de hand van twee voorbeelden. Gewoonlijk onderscheiden we nl. twee soorten lichtbronnen, nl. een puntvormige lichtbron en de zon; deze laatste wordt beschouwd als een lichtbron met evenwijdige lichtstralen.

#### Puntvormig licht (Figuur 54 en 55).

Beschouw het prisma  $\begin{matrix} DEF \\ ABC \end{matrix}$ , staande op het grondvlak  $\pi_1$  en waarvan  $AD \perp \pi_1$  is.  $L$  is een puntvormige lichtbron (met  $L_1$  als projectie op  $\pi_1$ ). Het prisma is ondoorzichtig. De opdracht luidt om de schaduw van het lichaam op  $\pi_1$  te construeren alsmede aan te geven welk deel van het lichaam niet door  $L$  wordt verlicht. In principe kunnen we van elk punt (Zie Figuur 54a het punt  $P$ ) nagaan of licht "ontvangt" of niet. Daartoe verbinden we zo'n punt met  $L$  en onderzoeken of de lichtstraal al of niet onderbroken wordt. In deze figuren wordt  $LP$  onderbroken door het bovenvlak (punt  $Q$ ).  $P$  ontvangt geen licht.  $Q$  werpt echter schaduw op  $\pi_1$ . Vanzelfsprekend gaan we iets praktischer te werk. Zo bepalen we eerst de schaduw van het bovenvlak: We snijden b.v. de lijn  $LF$  met  $\pi_1$  (met behulp van het hulpvlak  $LFC$ ). Zo doorgaande vinden we als schaduw  $\Delta D'E'F'$ . De lijn  $FC$  heeft  $F'C$  als schaduw. In de figuur is de begrenzing van de schaduw van het prisma op  $\pi_1$  aange-



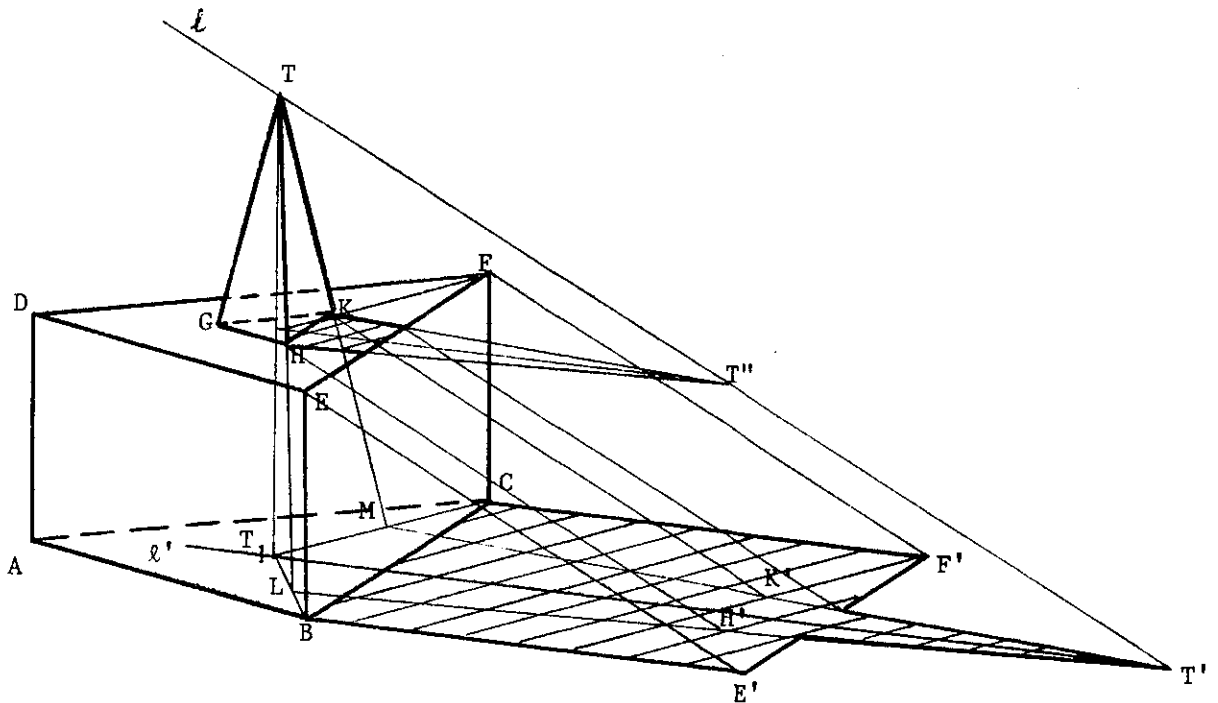
In Figuur 55 is dezelfde constructie uitgevoerd als in Figuur 54, maar nu in Amerikaanse projectie. Vergelijk beide figuren. In Figuur 55 is  $E_2B_2$  gestippeld. (Waarom?)



Figuur 55

Evenwijdig licht (Figuur 56)

Op  $\pi_1$  is geplaatst een prisma met daarop een pyramide. Verder is er nu een lichtstraal  $\ell$  gegeven met orthogonale projectie op  $\pi_1$ . Eerst is de schaduw van het prisma bepaald. De schaduw van CF wordt nu bepaald door het vlak door CF en  $\parallel \ell$  te snijden met  $\pi_1$ . De schaduw van T wordt niet slechts op  $\pi_1$  bepaald, maar ook op het ("verlengde") bovenvlak van het prisma. In het bovenvlak vinden we nu de schaduw van de pyramide (zelfschaduw). Van de  $\Delta HKT''$  wordt bovendien de schaduw op  $\pi_1$  bepaald (wordt  $\Delta H'K'T'$ ). Op deze manier ontstaat de slagschaduw van het lichaam op  $\pi_1$ . Voor de leesbaarheid van de tekening is de arcering van de eigenschaduw hier weggelaten.



Figuur 56

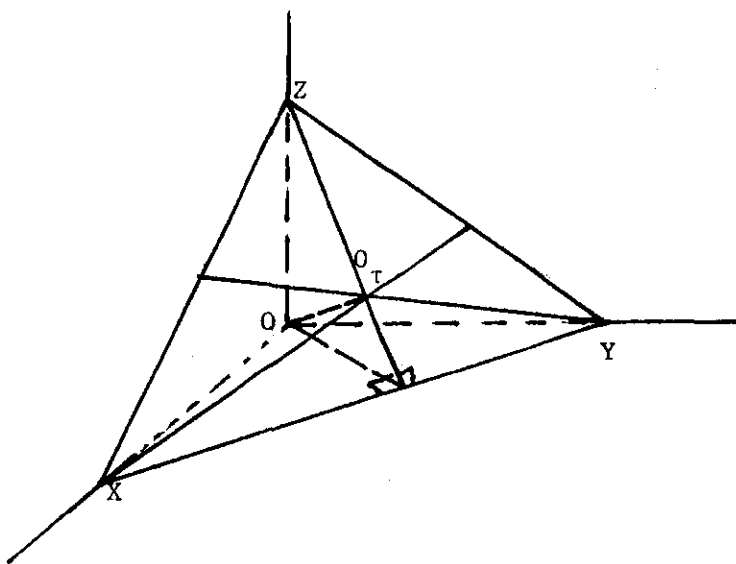


Opmerkingen

1. Maak dezelfde tekening in Amerikaanse projectie.
2. Merk op dat in alle drie de figuren vaak gebruik is gemaakt van het feit dat lijnen  $// \pi_1$  ook evenwijdig met hun schaduw zijn.
3. Soms werpt een lichaam schaduw op een ander lichaam, zoals een huis schaduw kan werpen op een nabij gelegen huis. Deze schaduw wordt geconstrueerd door de begrenzende schaduwvlakken (als  $TKK'T'$  in Figuur 56) te snijden met de vlakken van het nabij gelegen lichaam.

#### 4. Orthogonale axonometrie

4.1. In Figuur 57 (in een stereometrische figuur) is het ruimtelijk assenkruis XYZ getekend. Merk op dat het assenkruis in een andere stand voor ons staat dan in Figuur 23. Op de "positieve" assen zijn punten, aangeduid met X, Y resp. Z, gegeven. In deze methode wordt het vlak van  $\Delta XYZ$  als tafereel genomen, d.w.z. de te tekenen figuur wordt orthogonaal op  $\tau$  geprojecteerd.



Figuur 57

Allereerst zij opgemerkt dat b.v. met behulp van de cosinusregel kan worden bewezen dat  $\Delta XYZ$  scherphoekig is. (Ga na!)

Het punt  $O_\tau$ , de orthogonale projectie van  $O$  op  $\tau$  speelt in deze methode een belangrijke rol. Het blijkt nl. het hoogtepunt van  $\Delta XYZ$  te zijn.

Immers:  $OO_\tau \perp \tau$ , dus  $OO_\tau \perp XY$ . Ook is  $OZ \perp XOY$ , dus  $OZ \perp XY$ , zodat  $XY \perp OO_\tau Z$ , dus  $XY \perp ZO_\tau$ ; evenzo  $YZ \perp XO_\tau$  en  $XZ \perp YO_\tau$ .

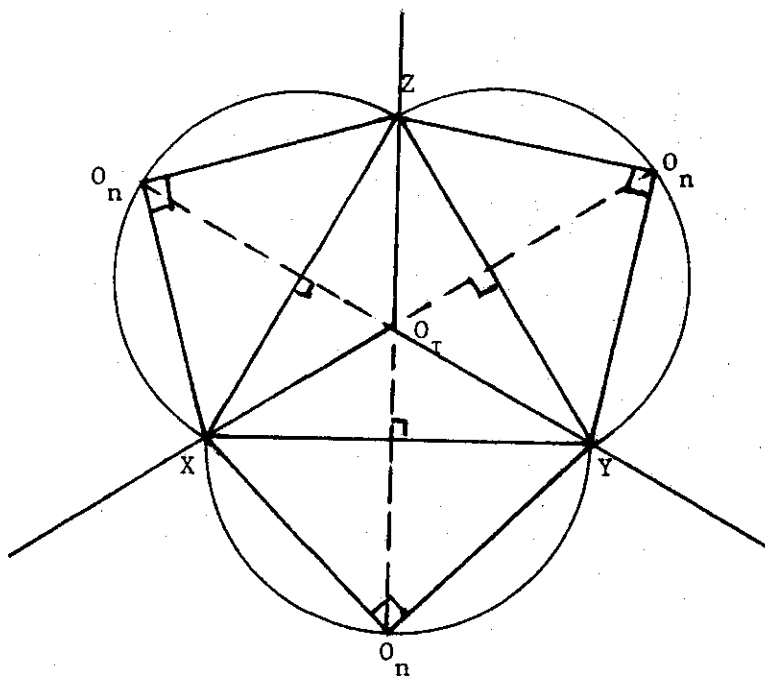
Een punt is bepaald door zijn drie coördinaten, afgemeten langs  $OX$ ,  $OY$  en  $OZ$ . Alle lijnstukken langs  $OX$  of evenwijdig met  $OX$  worden, volgens Stelling

2.1, in dezelfde verhouding verkort; hetzelfde geldt in y-richting en in z-richting. Noemen we deze verhoudingen  $k_x$ ,  $k_y$  en  $k_z$  dan geldt (wegens Stelling 2.1):

$$k_x = \frac{XO}{XO^\tau} \quad , \quad k_y = \frac{YO}{YO^\tau} \quad , \quad k_z = \frac{ZO}{ZO^\tau} \quad (<1).$$

Om bij gegeven  $\Delta XYZ$  deze verhoudingen te vinden, gaan we aldus te werk. (Zie Figuur 57 en Figuur 58.)

$\Delta XOY$  wordt om  $XY$  als as gewenteld in  $\tau$  (analoog voor  $\Delta YOZ$  en  $\Delta ZOZ$ ). Het punt  $O$  beschrijft bij deze wenteling een cirkelboog, gelegen in het vlak door  $O$  en loodrecht op  $XY$ , zodat na wenteling  $O$  op het verlengde van  $ZO^\tau$  ligt ( $O_n$  genaamd). Ook ligt  $O_n$  op een halve cirkel met  $XY$  als middellijn, omdat  $\angle XOY = 90^\circ$ . Op dezelfde wijze worden ook de driehoeken  $YOZ$  en  $XOZ$  gewenteld om de assen  $YZ$  resp.  $XZ$ . De daar ontstane punten  $O$  krijgen eveneens de index  $n$ . Verwarring is nauwelijks mogelijk, omdat de beide laatste punten  $O_n$  zelden voorkomen.



Figuur 58

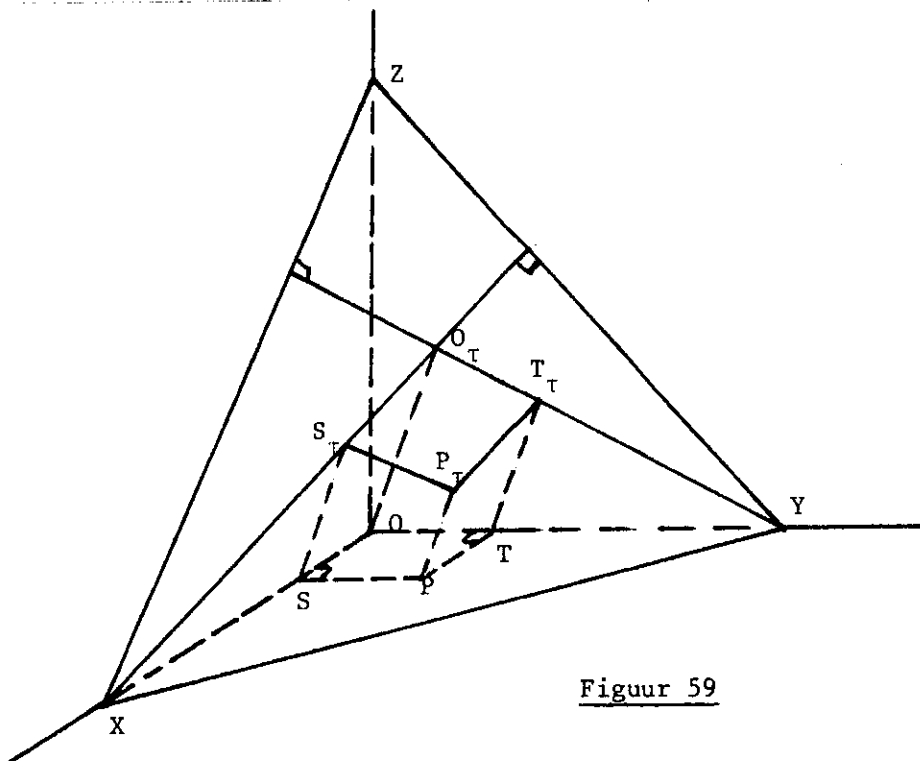
In Figuur 58 lezen we af:

$$k_x = \frac{XO_\tau}{XO_n}, \quad k_y = \frac{YO_\tau}{YO_n}, \quad k_z = \frac{ZO_\tau}{ZO_n}.$$

Opmerking. Toon aan dat in twee neergeslagen driehoeken de stukken  $O_n X$  even lang zijn.

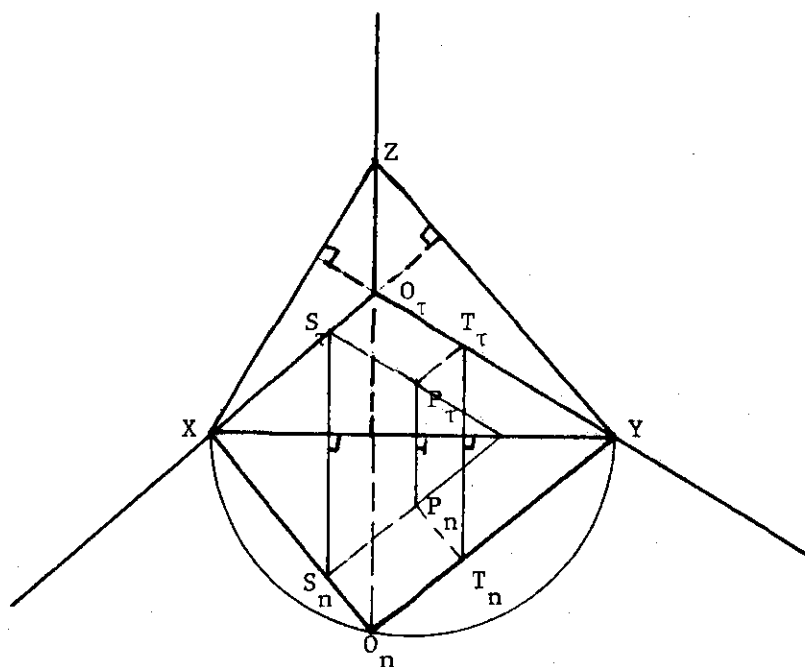
#### 4.2. Constructie van de projectie van $P(a,b,c)$

Eerst bekijken we het geval  $c = 0$ ;  $P$  ligt dus in  $\pi_1$ . In Figuur 59 zijn  $S$  en  $T$  de orthogonale projecties van  $P$  op resp. de  $X$ -as en de  $Y$ -as.



Figuur 59

$S_\tau$ , de orthogonale projectie van  $S$  op  $\tau$ , ligt op  $XO_\tau$ , en  $SS_\tau // OO_\tau$ ; zo ligt  $T_\tau$  op  $YO_\tau$  en is  $TT_\tau // OO_\tau$ . De orthogonale projectie van rechthoek  $OTPS$  is een parallellogram (zie opmerking 2 bij Stelling 2.1), zodat de projectie  $P_\tau$  van  $P$  bekend is.



Figuur 60

In Figuur 60 geldt  $SO = a$  en  $TO = b$  (in de neergeslagen  $\Delta XOY$ ). De constructie van  $P_\tau$  geschiedt met de affiniteit, vastgelegd door de as  $XY$  en het paar  $O_\tau, O_n$ . Verder geldt:

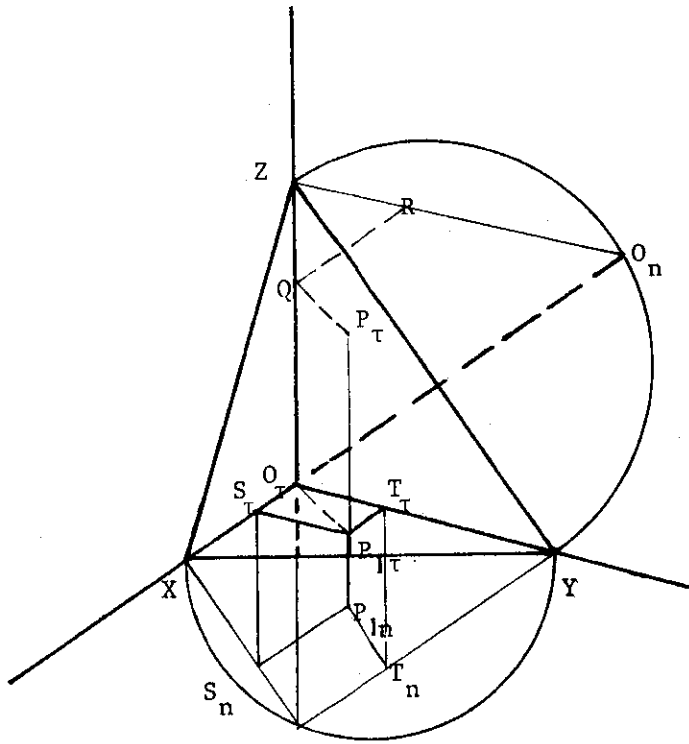
$$O_{\tau\tau} S_\tau = k_x \cdot O_n S_n = k_x \cdot a$$

en

$$O_{\tau\tau} T_\tau = k_y \cdot O_n T_n = k_y \cdot b.$$

Stel vervolgens  $c \neq 0$  (Figuur 61). Zij  $P$  het punt  $(a,b,c)$  en  $P_1$  de orthogonale projectie van  $P$  op  $XOY$ . Eerst wordt op de hierboven beschreven wijze  $P_{1\tau}$  geconstrueerd.  $PP_1 // OZ$  dus  $P_\tau P_{1\tau} // O_\tau Z$  (Stelling 1.7). Dit betekent dat  $P_\tau P_{1\tau} \perp XY$  getekend wordt. Tevens is  $PP_\tau // OO_\tau$ , zodat  $P_\tau$  vastgelegd





Figuur 62

Beschouw nu Figuur 62. De projectie  $P_{1\tau}$  van  $P_1$  is op de bekende wijze geconstrueerd.  $P_\tau$  ligt op de rechte door  $P_{1\tau}$ , die loodrecht is op  $XY$ , dus //  $Z$ -as. Verder is  $P_\tau P_{1\tau} = k_z \cdot c = OQ_\tau = k_z \cdot RO_n$ ; hierin is  $RO_n = c$  genomen. Dit betekent dat we de projectie van  $P_\tau$  van  $P(a,b,c)$  krijgen door in de axonometrische projectie langs de assen resp.  $k_x \cdot a$ ,  $k_y \cdot b$ ,  $k_z \cdot c$  af te zetten, waarna  $P_\tau$  gevonden wordt met de bekende "coördinatentrek".

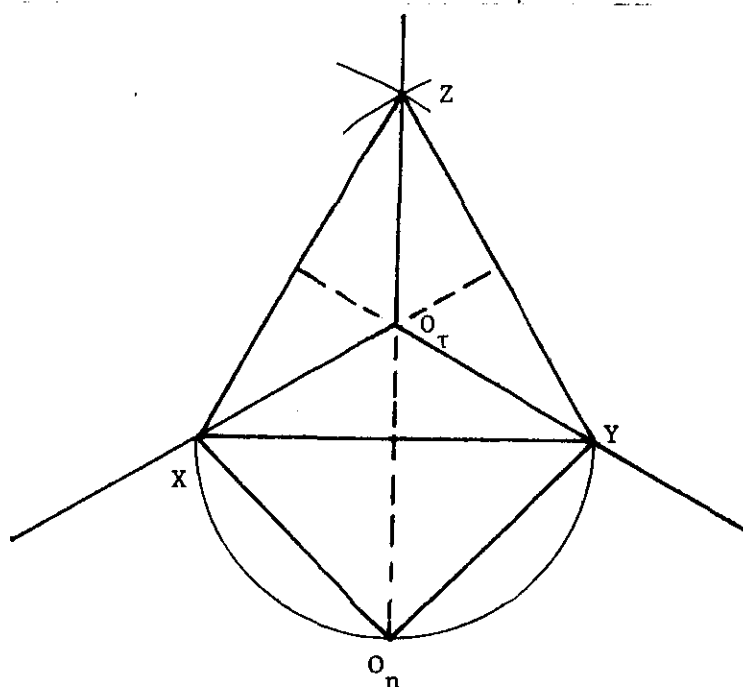
#### 4.3. De axonometrische driehoek XYZ

In 4.2 hebben we gezien dat de axonometrische driehoek de verkortingsfactoren  $k_x$ ,  $k_y$  en  $k_z$  vastlegt. Wiskundig is het onbelangrijk hoe groot die factoren zijn; ze hebben echter wel invloed op de duidelijkheid van de figuur.

In de techniek worden in hoofdzaak twee soorten axonometrische driehoeken gebruikt.

##### 1. Isometrie

We gaan uit van een gelijkzijdige driehoek (zie Figuur 63). Berekening leert dat  $k_x = k_y = k_z = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ .

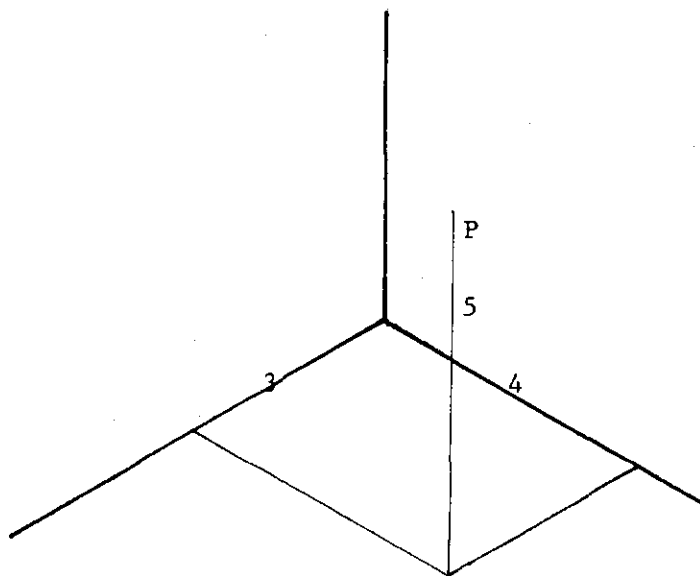


Figuur 63

De berekende waarde is zelf niet belangrijk. Immers, omdat een gebouw op schaal getekend wordt, is veel belangrijker het gegeven:  $k_x:k_y:k_z = 1:1:1$ .



Dit betekent namelijk dat, uitgaande van de gelijkzijdige driehoek XYZ een punt  $P(a,b,c)$  zó getekend wordt, dat de drie coördinaten met dezelfde factor worden verkort (en dat is tekenen op schaal ook).



Figuur 64

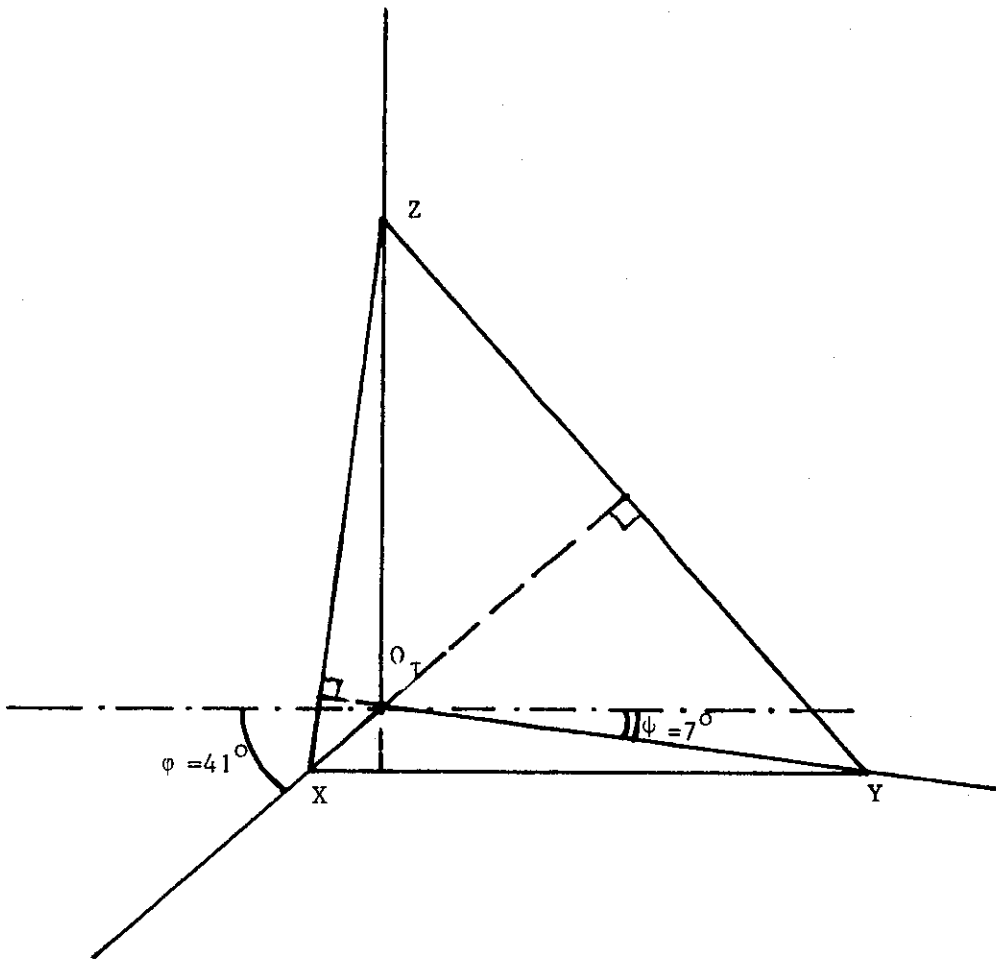
In Figuur 64 is het punt  $(3,4,5)$  getekend in deze methode. De assen maken hoeken van  $120^\circ$  met elkaar en de axonometrische driehoek is weggelaten.

Die gebruiken we alleen maar in bijzondere gevallen. Axonometrie met deze bijzondere driehoek heet isometrie.

## 2. Dimetrie

Hier wordt uitgegaan van  $k_x:k_y:k_z = \frac{1}{2}:1:1$ , dus een gelijkbenige driehoek XYZ ( $XY = XZ$ ). Berekening leert dat  $k_x = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ ,  $k_y = k_z = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ . Een praktische constructie van  $\Delta XYZ$  is gegeven in Figuur 65.

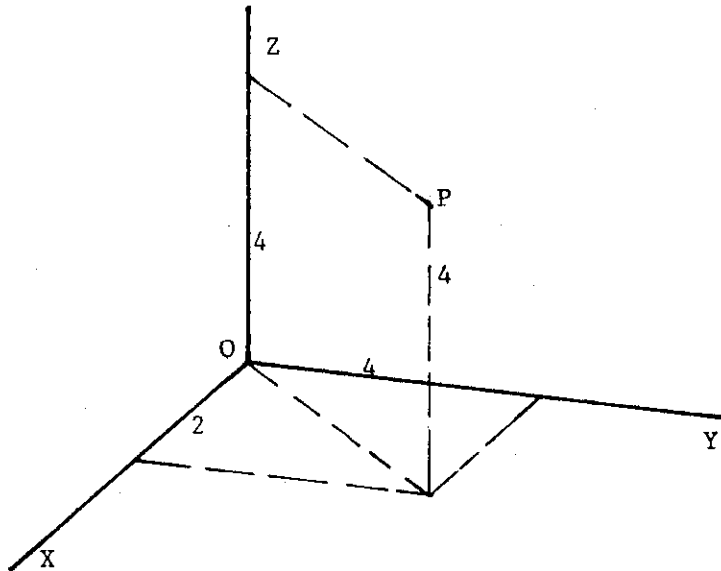
Hierbij is uitgegaan van een lijn  $\perp$  Z-as, de X-as maakt met deze lijn een hoek  $\varphi = 41^\circ$ , de Y-as een hoek  $\psi = 7^\circ$ . Een eveneens vaak gebruikte benaming (nuttig bij het gebruik van ruitjespapier) is  $\tan \varphi = \frac{7}{8}$  en  $\tan \psi = \frac{1}{8}$ .



Figuur 65

In Figuur 66 is de projectie van P (4,4,4) getekend. In overeenstemming met het bovenstaande zijn langs de X-as twee, langs de Y-as en de Z-as vier cm afgepast. De axonometrische driehoek is hier weggelaten.

Orthogonale axonometrie, uitgaande van de beschreven projectie van het assenkruis heet dimetrie.



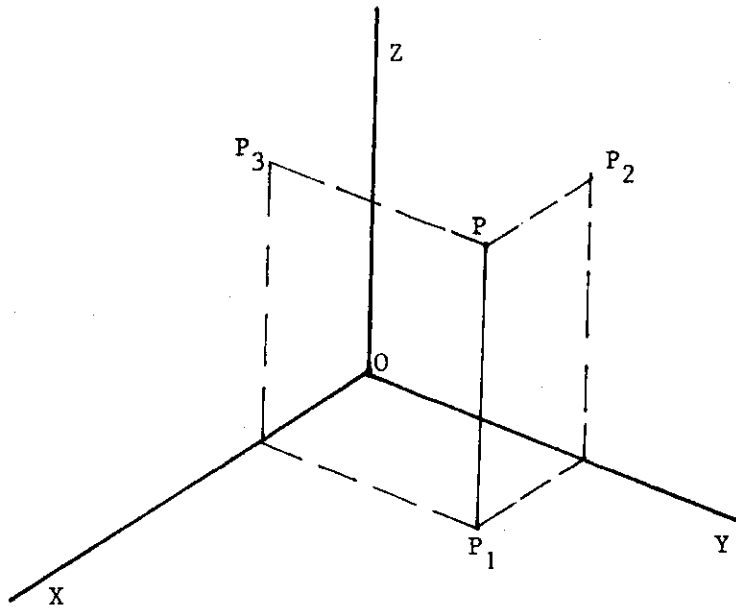
Figuur 66

#### 4.4. Punten en lijnen

In Amerikaanse projectie is (bij gegeven assenkruis) een punt  $P$  bepaald door twee van zijn drie projecties; hetzelfde geldt voor een lijn. In de axonometrie hebben we (behalve  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  en  $\pi_3$ ) het tafereel  $\tau$ , zodat een punt  $P$  vier projecties heeft. Ook in de axonometrie geldt dat het punt (bij gegeven projectiedriehoek) bepaald is door twee van zijn vier projecties. In §4.2 (zie Figuur 62 en 64) is  $P$  gegeven door  $P_{1\tau}$  en  $P_{2\tau}$ . De andere projecties, dus  $P_{3\tau}$  en  $P_{4\tau}$  zijn nu te construeren. Aangezien alle punten in de axonometrische tekening projecties zijn op  $\tau$ , is het doelmatig de index  $\tau$  weg te laten. Dit is weliswaar inconsequent, maar leidt niet tot misverstanden.

We wijzen er nog op dat het in het algemeen wenselijk is, niet meer dan de benodigde projecties te construeren; dit terwille van de overzichtelijke

lijkheid van de tekening. Zo wordt een punt  $P$  vaak door  $P$  en  $P_1$  (dus eigenlijk  $P_\tau$  en  $P_{1\tau}$ ) beschreven. Figuur 67 laat zien dat  $P_2$  en  $P_3$  (dus eigenlijk  $P_{2\tau}$  en  $P_{3\tau}$ ) zonder meer kunnen worden geconstrueerd, indien dit nodig is.



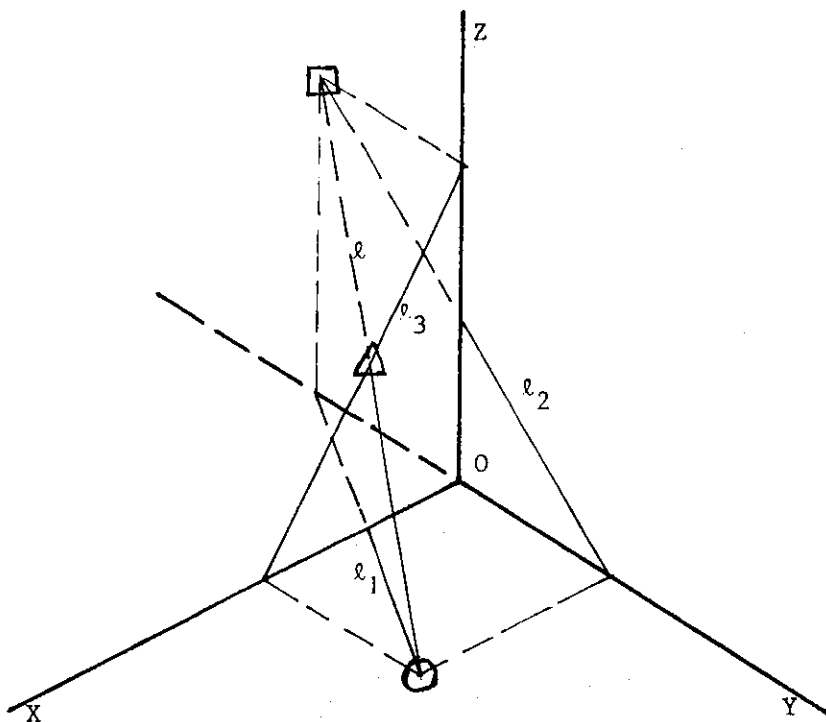
Figuur 67

In Figuur 68 zijn van een lijn  $\ell$  de vier projecties getekend. Als  $\ell$  en  $\ell_1$  gegeven zijn (d.i.  $\ell_\tau$  en  $\ell_{1\tau}$ ) dan kunnen we direct het eerste doorgangspunt van  $\ell$  aangeven (ga na!); het tweede doorgangspunt van  $\ell$  hangt samen t.o.v. de Y-as met het snijpunt van  $\ell_1$  met de Y-as.

Op overeenkomstige wijze volgt het derde doorgangspunt van  $\ell$ . Nu volgen gemakkelijk  $\ell_2$  en  $\ell_3$ . Een andere volgorde dan hier genomen is uiteraard

ook mogelijk.

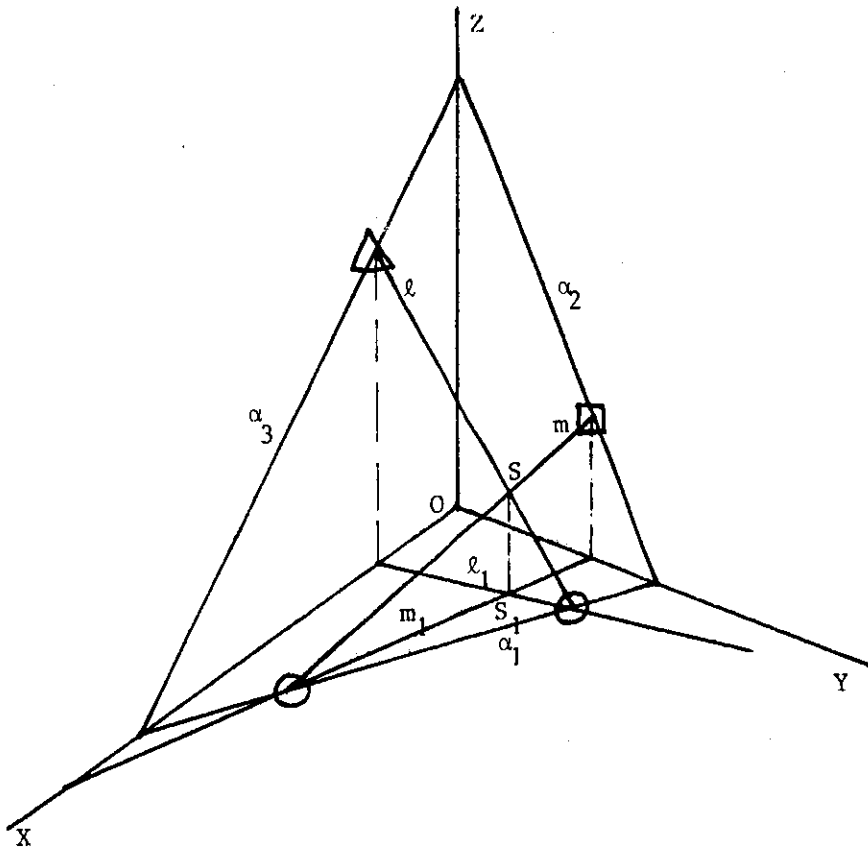
Opdracht: Maak zelf een dergelijke tekening, uitgaande van een ander paar bijvoorbeeld  $\ell_1$  en  $\ell_2$ , of  $\ell_1$  en  $\ell_3$  enz; construeer dan  $\circ$ ,  $\square$  en  $\triangle$  evenals  $\ell$  zelf.



Figuur 68

#### 4.5. Lijnen en vlakken

In Figuur 69 zijn de snijdende lijnen  $\ell$  en  $m$  getekend. Dat ze elkaar snijden blijkt uit de samenhang der snijpunten van de gelijknamige projecties:  $SS_1 // Z$ -as (nauwkeuriger geformuleerd  $S_{\tau} S_{1\tau} // Z_{\tau} O_{\tau}$ ); evenzo is  $SS_2 // X$ -as,  $SS_3 // Y$ -as. De lijnen  $\ell$  en  $m$  bepalen een vlak  $\alpha$ . Van dit vlak zijn de door-

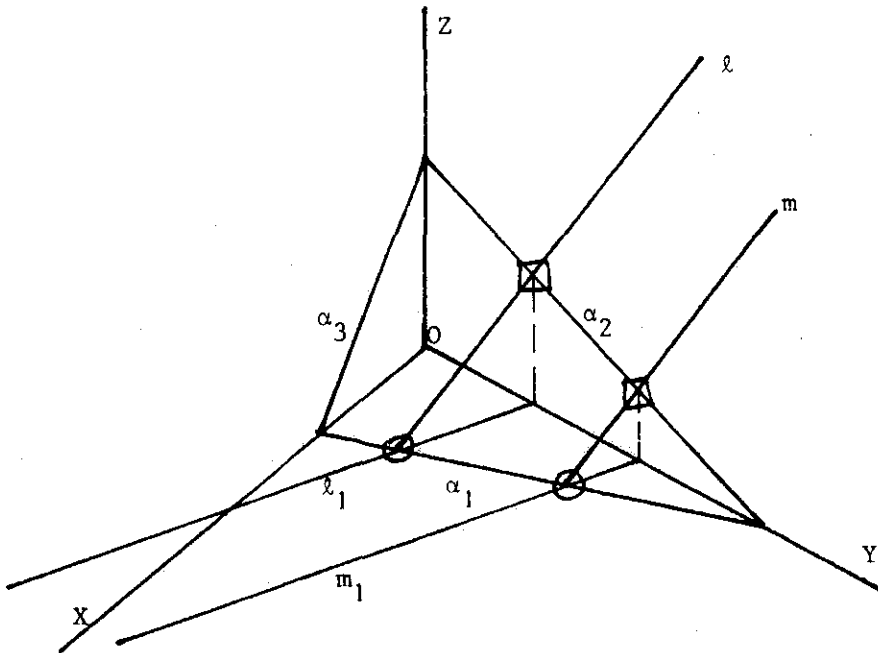


Figuur 69

gangen getekend:  $\alpha_1$  verbindt de eerste doorgangspunten van  $l$  en  $m$ , enz.

In Figuur 70 zijn de twee evenwijdige lijnen  $l$  en  $m$  getekend. De parallelprojecties van evenwijdige lijnen op een vlak zijn evenwijdig, dus geldt:  $l_{\tau} // m_{\tau}$ ,  $l_{1\tau} // m_{1\tau}$  enz., zodat in de tekening geldt:  $l // m$ ,  $l_1 // m_1$  enz. De lijnen bepalen het vlak  $\alpha$ , waarvan de doorgangen worden getekend op de manier, beschreven bij snijdende lijnen.

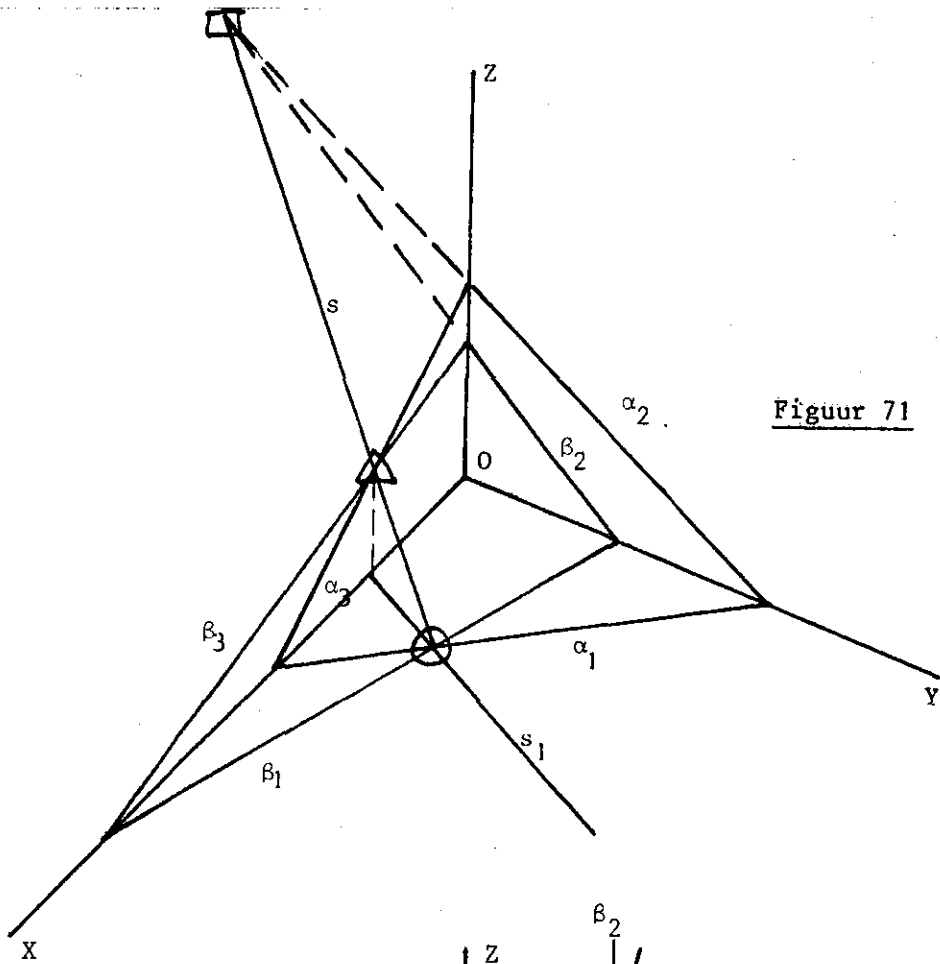
Opmerking. Als de tafereeldriehoek XYZ getekend is, kunnen we ook de z.g. tafereeldoorgang van een vlak  $\alpha$  bepalen. In tegenstelling tot wat we hebben afgesproken over punten enz., wordt bij de tafereeldoorgang de index  $\tau$  niet weggelaten.



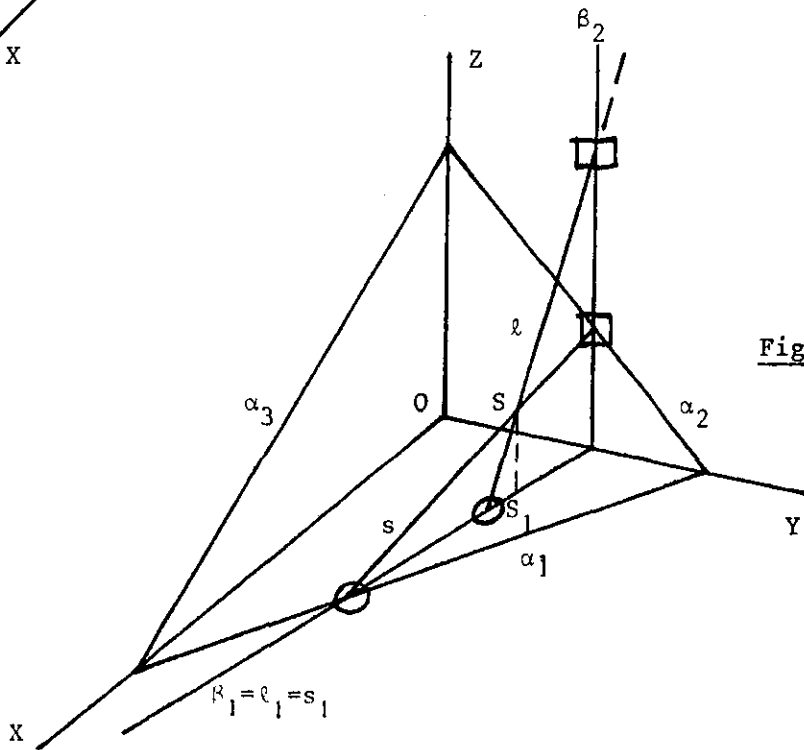
Figuur 70

Twee vlakken zijn //, als minstens twee doorgangen // zijn. Als  $\alpha$  en  $\beta$  elkaar snijden, dan is  $s$  de verbindingslijn van de snijpunten der gelijknamige doorgangen. In Figuur 71 is de constructie uitgevoerd.

Het snijpunt  $S$  van de lijn  $l$  en vlak  $\alpha$  wordt bepaald met behulp van een vlak door  $l$ . In Figuur 72 is hiervoor gebruikt het vlak  $\beta$  door  $l$  en  $\perp \pi_1$ .



Figuur 71



Figuur 72



#### 4.6. Het neerslaan van vlakken

Het neerslaan van een vlak  $\alpha$  gebeurt om de tafereeldoorgang  $\alpha_\tau$ . Bij een gegeven assenkruis kan een projectiedriehoek getekend worden ( $XY \perp Z$ -as enz.).

De grootte van de projectiedriehoek is hierbij niet van belang (waarom niet?). Zoals we reeds weten bestaat tussen de projectie van een in  $\alpha$  gelegen figuur en de gewentelde stand (zie §3.8) een loodrechte affiniteit met de wentelas als affiniteitsas. Overigens gebruikten we dit al in Figuur 60. We zullen enige gevallen behandelen aan de hand van voorbeelden.

le geval: :  $\pi_1$  neerslaan in  $\tau$ . (Figuur 73.)

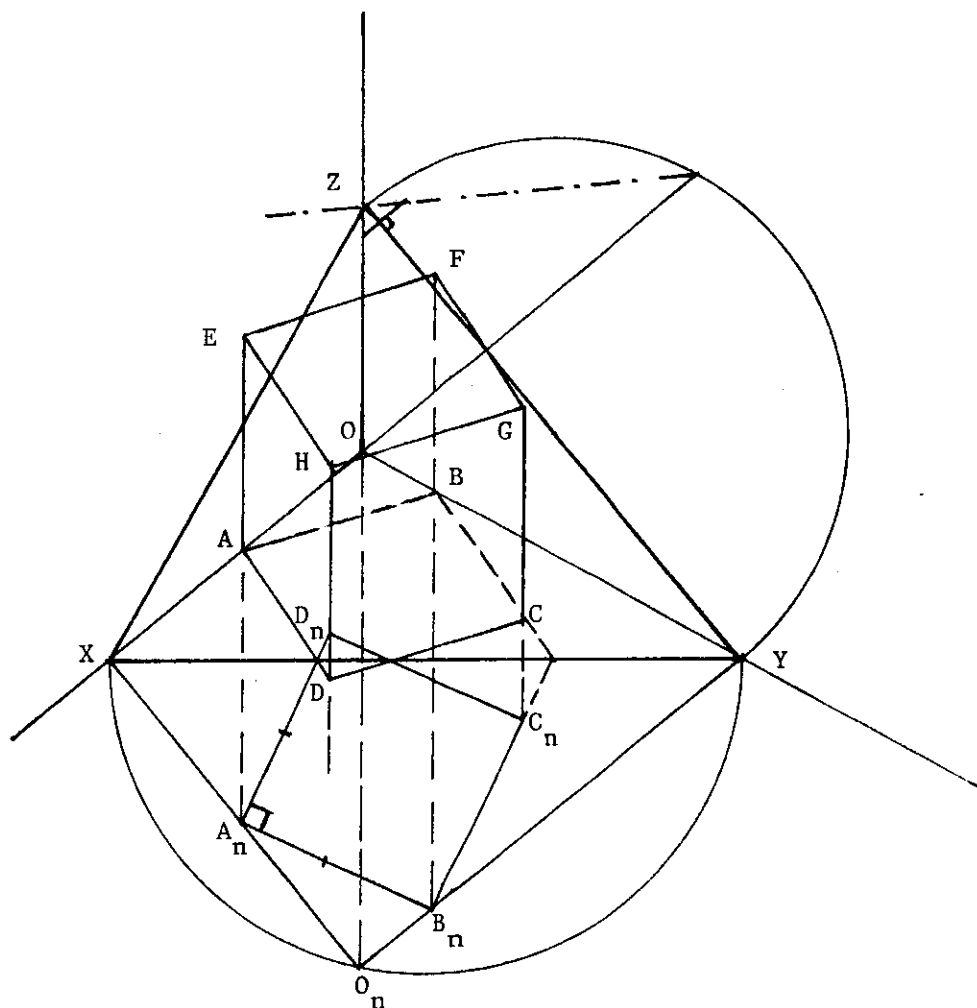
Het prisma  $\begin{matrix} EFGH \\ ABCD \end{matrix}$  staat met  $ABCD$  op  $\pi_1$ , de opstaande ribben (gegeven lengte) zijn loodrecht op  $\pi_1$ . Het grondvlak is een vierkant, waarbij A op de X-as en B op de Y-as ligt. Construeer de projectie van het prisma.

Voor de uitvoering slaan we  $\pi_1$  om XY neer in  $\tau$  (zie ook § 4.1). Uit de gegeven A ( $=A_1$ ) en B ( $=B_1$ ) vinden we  $A_n$  en  $B_n$  met behulp van de affiniteitsrichting. Het vierkant  $\begin{matrix} A & B & C & D \\ n & n & n & n \end{matrix}$  wordt nu geconstrueerd (één van de twee mogelijkheden is gekozen).

Om D ( $=D_1$ ) te vinden trekken we door  $D_n$  de loodlijn op de affiniteitsas. Ook geldt dat  $\begin{matrix} A & D_n \\ n & n \end{matrix}$  en  $A_1 D_1$  elkaar op de affiniteitsas snijden. Hiermee is  $D_1$  bekend. Analoog vinden we C ( $=C_1$ ). Om de nauwkeurigheid van de uitvoering te controleren gaan we bijv. na of CD en  $\begin{matrix} C & D \\ n & n \end{matrix}$  elkaar op XY snijden. Verder is de projectie van een vierkant een parallellogram.

Om de lengte van de projectie van AE te construeren wordt  $\pi_3$  om YZ in  $\tau$  gewenteld. Langs de neergeslagen Z-as is de gegeven lengte van AE afgezet, waarna met behulp van affiniteit  $k_z \cdot AE$  langs OZ wordt getekend. Deze lengte wordt gebruikt om het bovenzvlak van het prisma te tekenen. Aangezien in de ruimte  $AE \perp XOY$  dus evenwijdig met de Z-as is, is in projectie

eveneens  $AE //$  de  $Z$ -as.

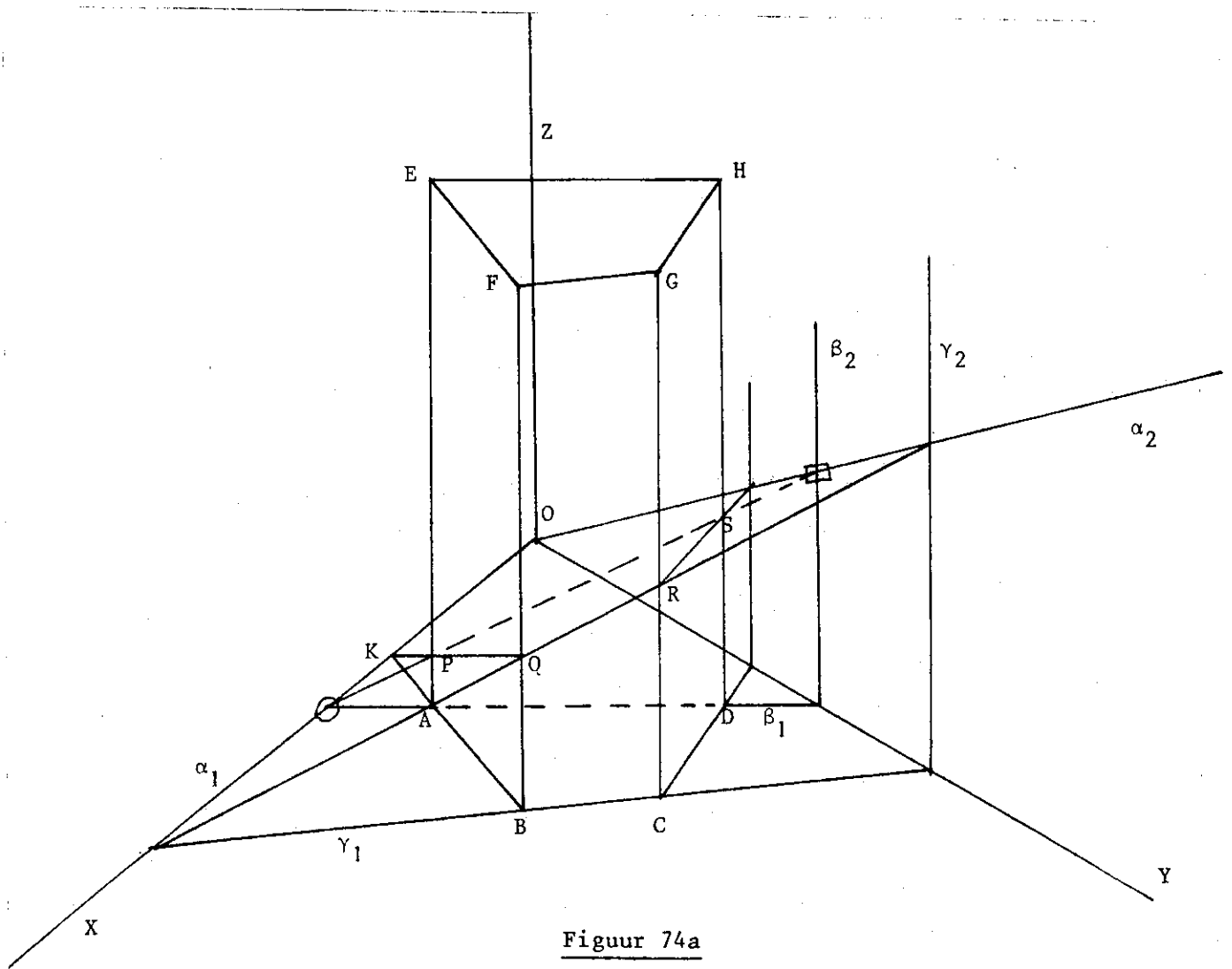


Figuur 73

Opmerking. Bij deze figuur zijn geen andere projecties meer getekend.

2e geval:  $\alpha$  gaat door de X-as. (Figuren 74a en 74b)

Gegeven is het vierzijdige prisma  $\frac{EFGH}{ABCD}$ , met het grondvlak in  $\pi_1$  en  $AE \perp \pi_1$ . Verder is het vlak  $\alpha$  door de X-as gegeven. Gevraagd wordt om de doorsnijding van  $\alpha$  met het prisma en de ware gedaante van de doorsnijdingsvierhoek PQRS te construeren. Om de figuur niet te "vol" te maken is de doorsnijdingsconstructie in Figuur 74a, de ware gedaante van de doorsnijding in Figuur 74b geconstrueerd. Beschouwen we eerst Figuur 74a. Elke opstaande ribbe dient gesneden te worden met  $\alpha$ . Om bijv. AE te snijden met  $\alpha$  wordt een hulpvlak door deze lijn aangebracht. Dit vlak is // Z-as. Kiezen we dit vlak z6 dat het twee opstaande ribben bevat; dan levert het twee snijpunten. In de Figuur 74a is  $\beta$  het vlak door AE en DH. Dit levert de punten P en S.



Figuur 74a

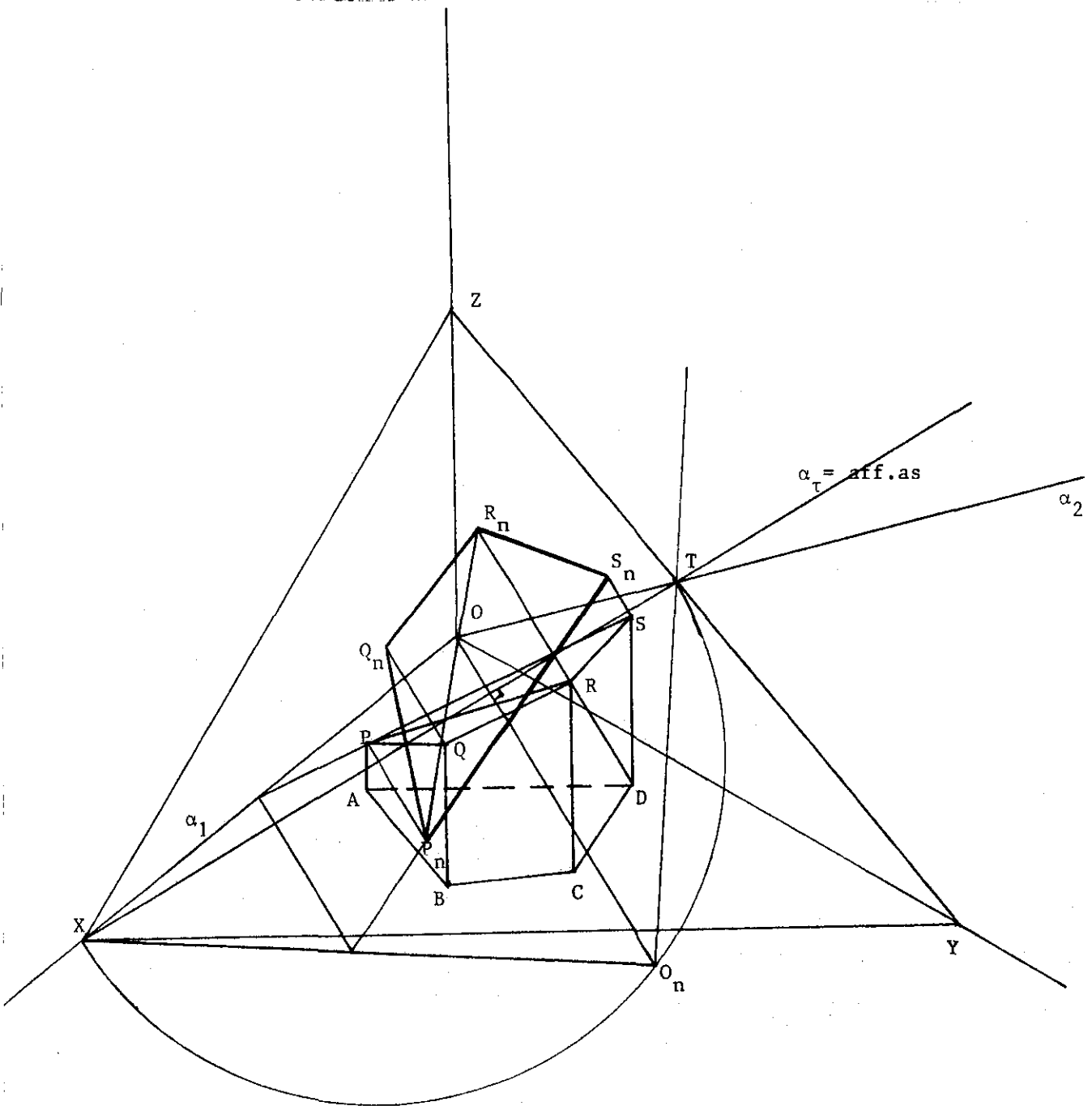
Op dezelfde wijze vinden we Q en R, met bijv. vlak  $\gamma$  door BF en CG. Het kan natuurlijk ook anders. Is bijv. Q (met behulp van  $\gamma$ ) gevonden, dan is de snijlijn van  $\alpha$  met het vlak ABFE bepaald. Van deze lijn is nu het eerste doorgangspunt K bekend zodat ook P bekend is. Zouden we met  $\beta$  begonnen zijn en dus P en K hebben, dan vinden we Q als snijpunt van KP met BF. (In verband met de nauwkeurigheid van de tekening is dit in deze figuur overigens minder gewenst. Waarom?)

Al is het theoretisch niet belangrijk welke hulpvlakken we kiezen, voor de uitvoering dienen we in verband met nauwkeurigheid te overwegen welke we zullen nemen.

Voor het bepalen van de ware gedaante van vierhoek PQRS wordt  $\alpha$  om  $\alpha_\tau$  neergeslagen, (zie Figuur 74b). De affiniteitsas is  $\alpha_\tau$ , de affiniteitsrichting is  $\perp \alpha_\tau$ . We moeten nu nog het affiene beeld van een punt van  $\alpha$  kennen. We kiezen O, omdat we weten dat in de ruimte  $\alpha_1 \perp \alpha_2$  is. Snijdt  $\alpha_\tau$  de X-as in X en YZ in T, dan ligt  $O_n$  op een halve cirkel die XT tot middellijn heeft, terwijl  $OO_n \perp \alpha_\tau$  is. Met behulp van de nu vastgelegde affiniteit is de ware gedaante van PQRS geconstrueerd.

Hierbij is begonnen met PS, die  $\alpha_\tau$  en OX snijdt. Het eerste snijpunt is vast, van het tweede ligt het affiene beeld op  $O_n X$ . (Ga zelf de rest van de constructie na.)

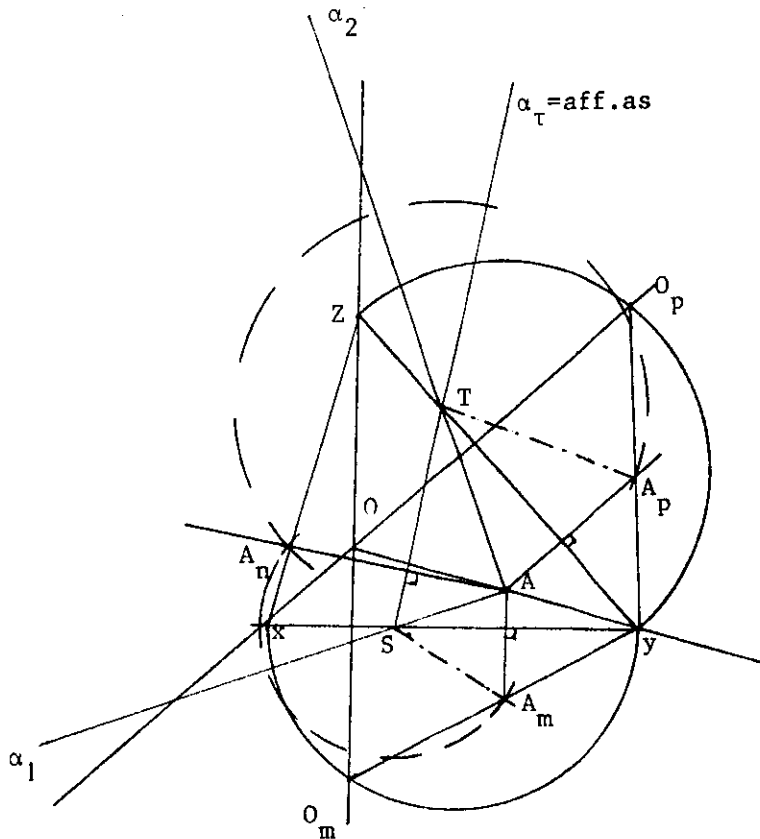
Opmerking. Om in de tekening nodeloze lijnen te vermijden is in Figuur 74b het bovenste deel van het prisma weggelaten.



Figuur 74b

3e geval:  $\alpha$  willekeurig.

We laten hierbij het neerslaan van een in  $\alpha$  gelegen figuur achterwege. Zij  $\alpha$  een willekeurig vlak dat om  $\alpha_\tau$  in  $\tau$  moet worden neergeslagen. We weten reeds dat de axonometrische projectie van de figuur in  $\alpha$  en de in  $\tau$  neergeslagen stand orthogonaal affien zijn met  $\alpha_\tau$  als as. Om de affiniteit vast te leggen hebben we van één punt in  $\alpha$  nog het affiene beeld nodig. Een doelmatige keuze is het snijpunt A van  $\alpha_1$  met  $\alpha_2$ . De ware lengte van SA en TA (Zie Figuur 75) zijn snel gevonden (wentel  $\pi_1$  om XY resp.  $\pi_2$  om YZ). Overigens kan zelfs volstaan worden met de lengte van één der genoemde lijnstukken omdat  $AA_n \perp \alpha_\tau$  is. In elk geval ontstaat uit deze overvloed een mogelijkheid tot controle.

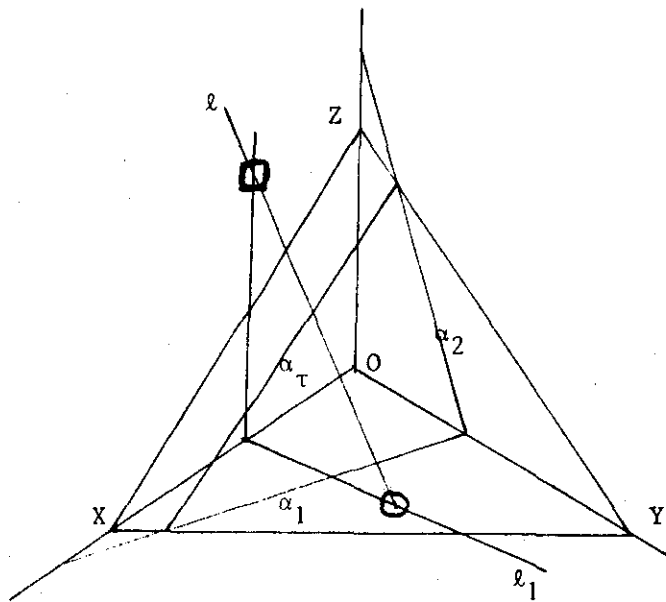


Figuur 75

4.7. Loodrechte stand, hoeken, afstanden.

Gegeven zijn een punt  $S$  en een vlak  $\alpha$ . Gevraagd wordt door  $S$  de loodlijn  $\ell$  op  $\alpha$  te construeren. In de Amerikaanse projectie is  $\ell \perp \alpha$  behandeld, met behulp van Stelling 2.12: als  $\ell \perp \alpha$  is en  $\ell$  wordt orthogonaal geprojecteerd op  $\tau$  dan staat de projectie van  $\ell$  op  $\tau$  loodrecht op de doorgang  $\alpha_\tau$  van  $\alpha$  en  $\tau$ . Het gevolg in de Amerikaanse projectie is:  $\ell_1 \perp \alpha_1$ ,  $\ell_2 \perp \alpha_2$ ,  $\ell_3 \perp \alpha_3$ .

In orthogonale axonometrie (eveneens een orthogonale projectie) is volgens Stelling 2.12 de projectie van  $\ell$  op  $\tau$  loodrecht op  $\alpha_\tau$ . Om nu de onderlinge stand van  $\ell_1$  en  $\alpha_1$  te vinden, dienen we te bedenken dat in de axonometrie uitsluitend op  $\tau$  wordt geprojecteerd. Als we  $\ell_1$  tekenen dan is dat de projectie (orthogonaal op  $\tau$ ) van de orthogonale projectie van  $\ell$  op  $\pi_1$  (zie Figuur 76).



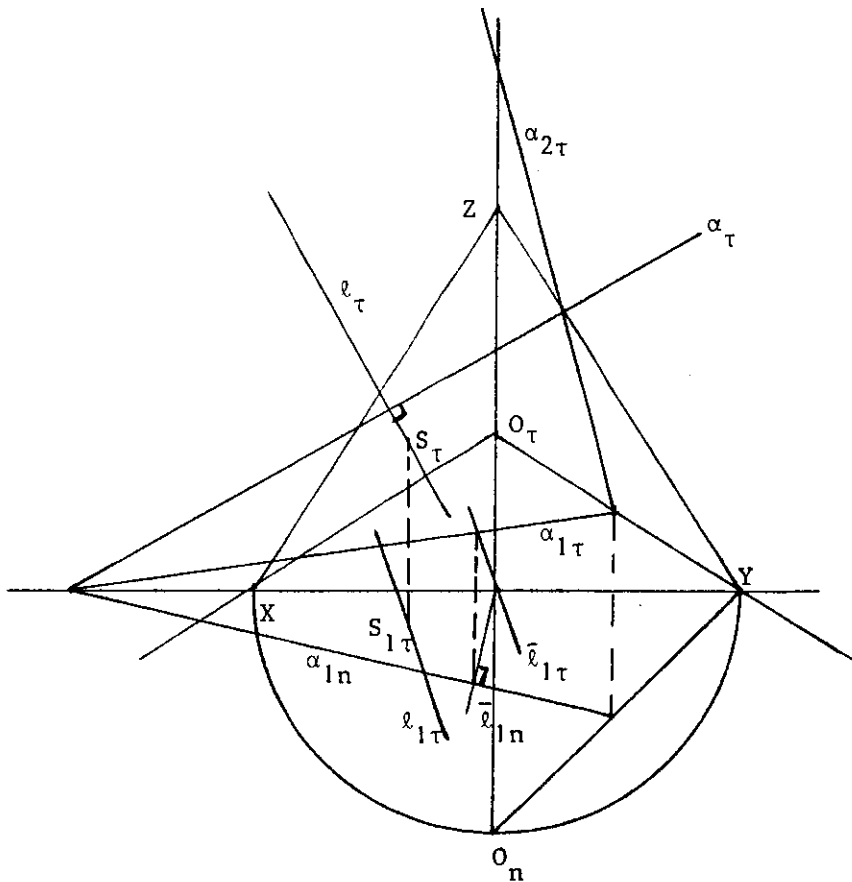
Figuur 76

We realiseren ons dat het nodig is om de lijn in de ruimte, zijn orthogonale projectie op  $\pi_1$  en hun beider orthogonale projecties op  $\tau$  goed uit elkaar te houden. Daartoe voeren we (tijdelijk) de index  $\tau$  weer in.

We hebben dan:  $l_\tau \perp \alpha_\tau$ , verder  $l_1 \perp \alpha_1$ ,  $l_2 \perp \alpha_2$ ,  $l_3 \perp \alpha_3$ . Bij het projecteren op  $\tau$  gaat in het algemeen de rechte hoek verloren (zie Stelling 2.13).

In de neergeslagen stand hebben we  $l_{1n} \perp \alpha_{1n}$  (evenzo  $l_{2n} \perp \alpha_{2n}$  enz.). Met behulp van affiniteit (XY als affiniteitsas) tekenen we eerst  $\alpha_{1n}$ , daarna in de neergeslagen stand een hulplijn,  $\bar{l}_{1n}$  genaamd, loodrecht op  $\alpha_{1n}$ .

Wederom met affiniteit wordt  $\bar{l}_{1\tau}$  geconstrueerd, waarna  $l_{1\tau}$  door  $S_{1\tau}$  en evenwijdig  $\bar{l}_{1\tau}$  wordt getekend. Indien nodig kunnen nu  $l_{2\tau}$  en  $l_{3\tau}$  worden getekend. (Daarna worden de indices weer weggelaten.)



Figuur 77



Opmerking. Uiteraard kan ook eerst  $S_{1n}$  geconstrueerd worden, waarna  $l_{1n}$  door dit punt en loodrecht op  $\alpha_{1n}$  getekend wordt.

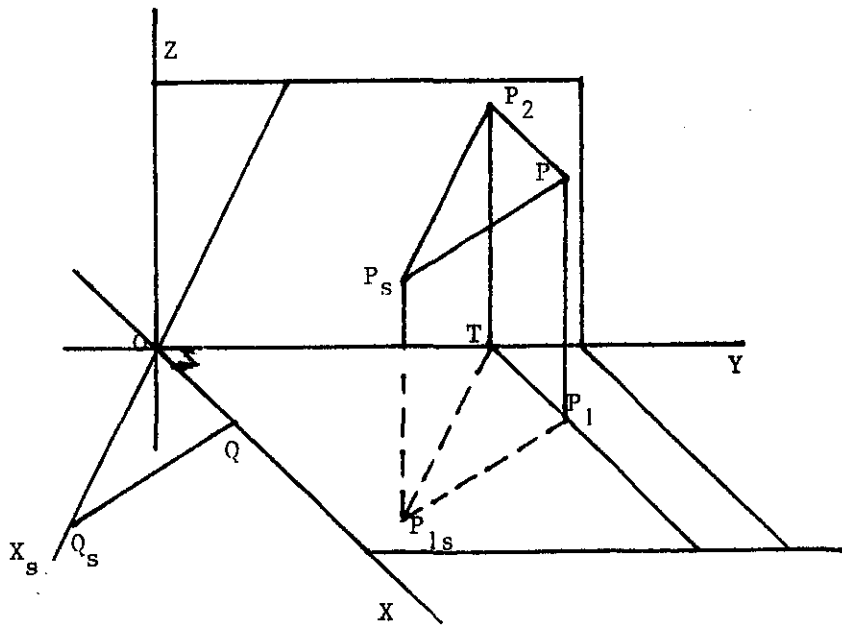
Voor de rest van de onderwerpen, genoemd in de aanhef van deze paragraaf verwijzen we naar §3.10.

---

Slotopmerking bij Hoofdstuk 4. Het wentelen van een lichaam en schaduwconstructies zijn bij de Amerikaanse projectie behandeld. In de axonometrie is er niets nieuws over te vertellen.

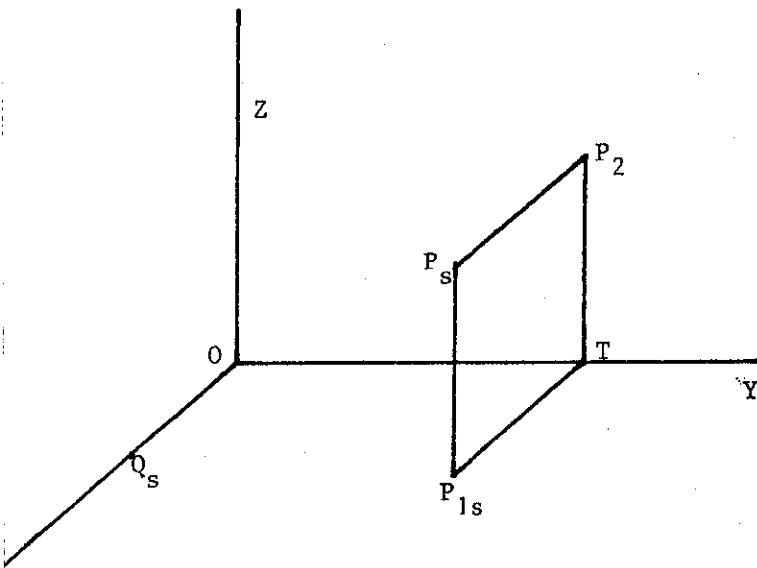
5. Scheve parallel-projectie

5.1. In Figuur 78 is in een stereometrische tekening het principe weergegeven. We gaan uit van een rechthoekig assenkruis  $XYZ$ . Van een punt  $P$  zijn gegeven  $P$  zelf en zijn orthogonale projecties  $P_1$  en  $P_2$ . Als tafereel  $\tau$  wordt het vlak  $\pi_2 = YOZ$  genomen. Elk punt van  $\mathbb{R}^3$  wordt nu in een scheve richting op  $\tau$  geprojecteerd:  $P$  wordt  $P_s$ ,  $P_1$  wordt  $P_{1s}$  enz., (de index  $s$  komt van scheef). Het vlak  $P_2PP_s$  is evenwijdig met het vlak  $TP_1P_{1s}$  omdat  $P_2P // TP_1$  en  $PP_s // P_1P_{1s}$  (= projectierichting). Als gevolg hiervan geldt:  $P_2P_s // TP_{1s}$  (Stelling 1.3), zodat  $\Delta P_2PP_s \sim \Delta TP_1P_{1s}$  (en de driehoeken zijn zelfs congruent omdat  $P_2P = TP_1$ ). Is  $Q$  een punt van de  $X$ -as en  $Q_s$  zijn scheve projectie dan volgt op analoge wijze  $\Delta OQQ_s \sim \Delta TP_1P_{1s}$ .

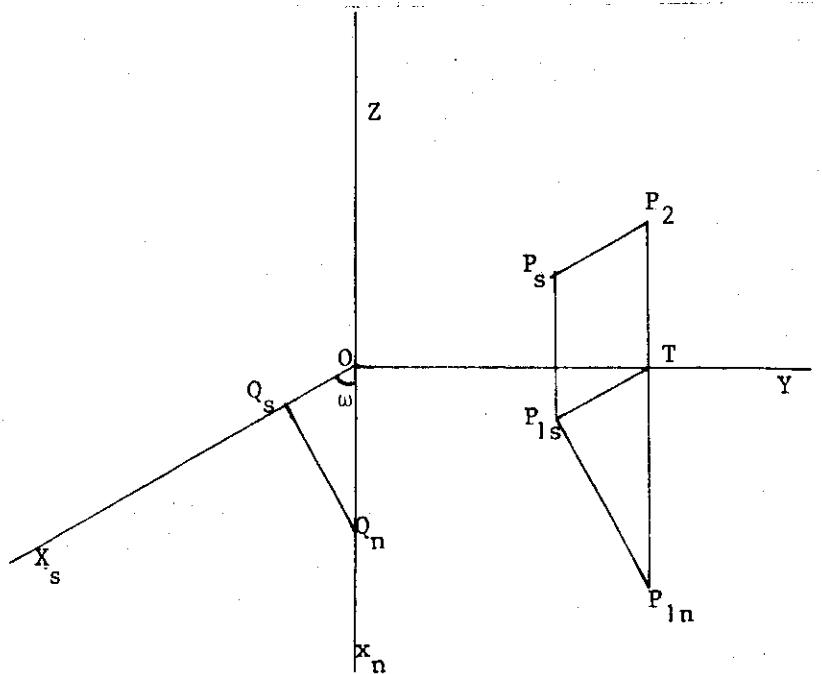


Figuur 78

In de projectietekening (zie Figuur 79) kunnen we uiteraard  $P, P_1$  en  $Q$  niet terugvinden. In deze figuur is  $P_2P_s // P_{1s}T // OQ_s$ , terwijl  $P_2T$  en  $P_sP_{1s}$  loodrecht op de  $Y$ -as zijn. Dit betekent dat we van het punt  $P(a, b, c)$  wel de  $y$ - en  $z$ -coördinaat kunnen terugvinden, maar niet de  $x$ -coördinaat. Ook bij  $Q_s$  is duidelijk te zien dat  $Q$  niet bepaald is. Wel weten we dat  $Q$  op de  $X$ -as ligt (dus  $y=z=0$ ), maar we weten niet waar. Om dit euvel te verhelpen slaan we het  $XOY$ -vlak (zie Fig. 78) om  $OY$  neer in  $\tau$ . De punten  $P_1$  en  $Q$  worden resp.  $P_{1n}$  en  $Q_n$  (zie Figuur 80). De  $x$ -coördinaat van  $P$  is uitgezet als  $TP_{1n}$  (bij negatieve  $x$ -coördinaat ligt  $P$  achter  $YOZ$  dus  $P_{1n}$  boven de  $y$ -as). Verder is  $\Delta TP_{1n}P_{1s} \sim \Delta OQ_nQ_s$ .



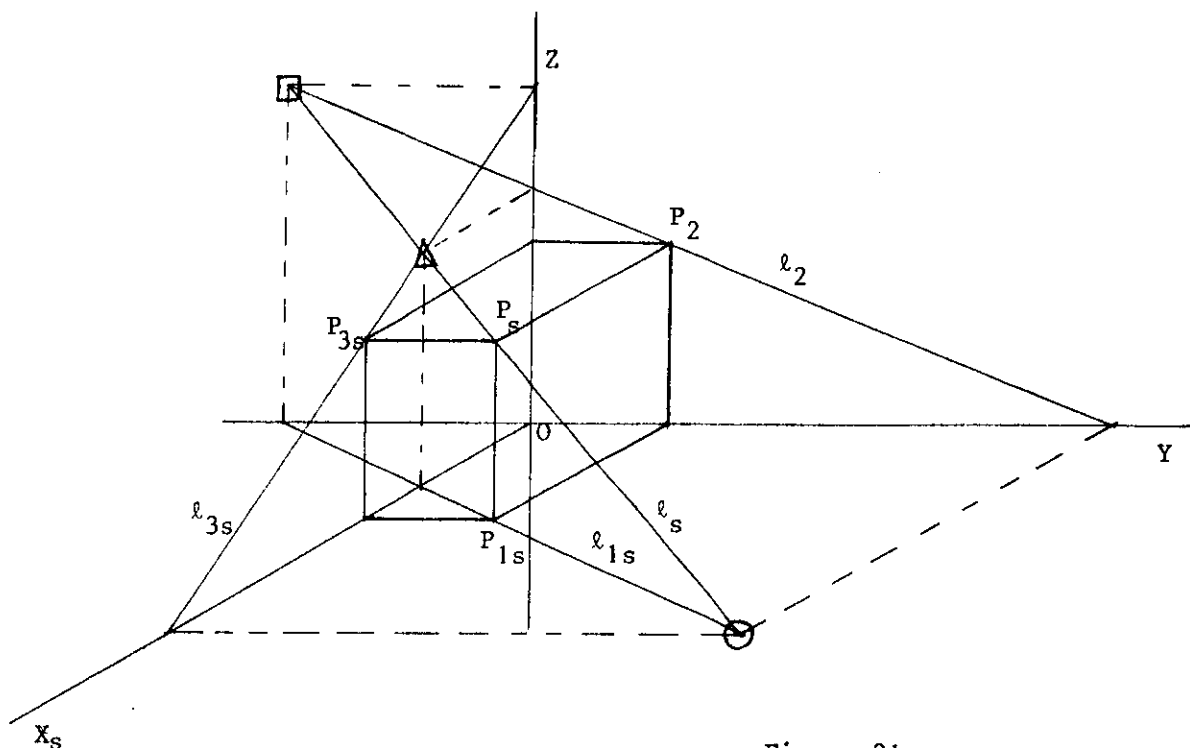
Figuur 79



Figuur 80

Van het punt  $P(a, b, c)$  zijn nu de drie coördinaten in de figuur terug te vinden, waarbij  $TP_{1s}$  de projectie is van  $TP_1$ ; de ware lengte van  $TP_1$  is  $TP_{1n} = a$ . Blijkbaar wordt in deze methode slechts de  $x$ -coördinaat verkort. De genoemde verkorting is  $k = \frac{TP_{1s}}{TP_{1n}} = \frac{OQ_s}{OQ_n}$ . Tevens is  $\angle P_{1n}TP_{1s} = \angle Q_nOQ_s$  en deze hoek is even belangrijk als  $k$ . We noemen deze hoek de wijkhoek, aangeduid met  $\omega$ .

Meestal worden bij scheve projectie  $k$  en  $\omega$  voorgeschreven, waarbij  $(k, \omega) = (\frac{1}{2}, 60^\circ)$  een vaak gebruikte combinatie is. In Figuur 80 is deze combinatie gebruikt. Het gevolg is dat de z.g. projectiedriehoek, d.i.  $\triangle OQ_nOQ_s$  rechthoekig is (waarom?). In deze figuur is  $P(3, 4, 2)$  getekend.  $P$  ligt vast door twee van zijn vier projecties. Overigens zal, indien maten niet belangrijk zijn, de projectiedriehoek worden weggelaten. In Figuur 81 zijn van de lijn  $\ell$  de scheve projectie en (de scheve projectie van)  $\ell_1$  gegeven. De andere projecties zijn met behulp van de doorgangspunten geconstrueerd.

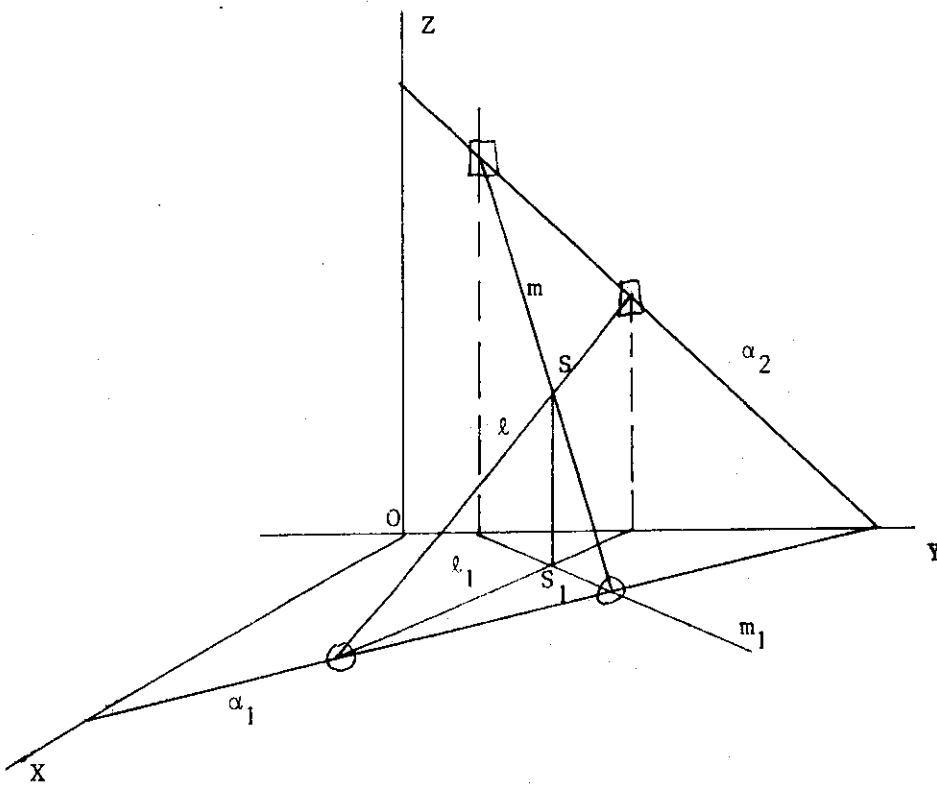


Figuur 81

Ook nu geldt weer: Als in de ruimte  $P$  op  $\ell$  ligt, dan liggen de projecties van  $P$  (dus vier stuks) op de gelijknamige projecties van  $\ell$ . De samenhang der verschillende projecties van  $P$  is in Figuur 81 aangegeven. Overigens wordt voortaan de index  $s$  weggelaten.

### 5.2. Lijnen en vlakken

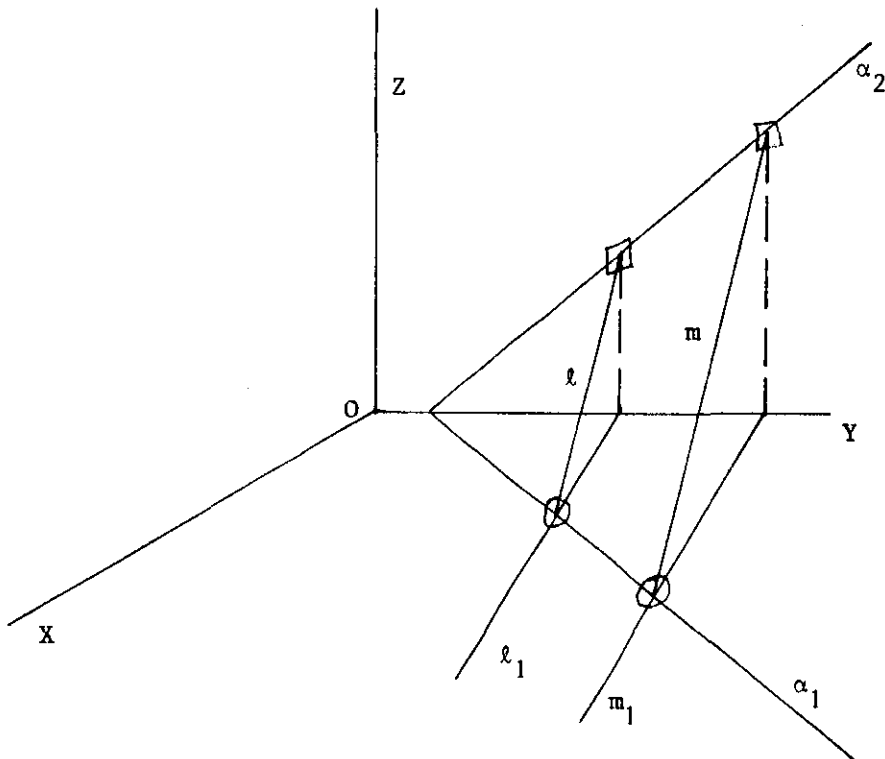
In Figuur 82 zijn de lijnen  $\ell$  en  $m$  met hun snijpunt  $S$  getekend. Van beide is de projectie en de eerste projectie genomen. Tevens zijn van het vlak  $\alpha$  door  $\ell$  en  $m$  de eerste en tweede doorgang getekend.



Figuur 82

Als in de ruimte  $\ell // m$  dan zijn de gelijknamige projecties evenwijdig.

In Figuur 83 zijn  $\ell // m$  (eigenlijk  $\ell_s // m_s$ ) en  $\ell_1 // m_1$  (eigenlijk  $\ell_{1s} // m_{1s}$ ) getekend. Het is eenvoudig te bewijzen dat, als twee van de vier gelijknamige projecties van  $\ell$  en  $m$  evenwijdig zijn, ook  $\ell$  en  $m$  zelf evenwijdig zijn. (Bewijs het zelf.)



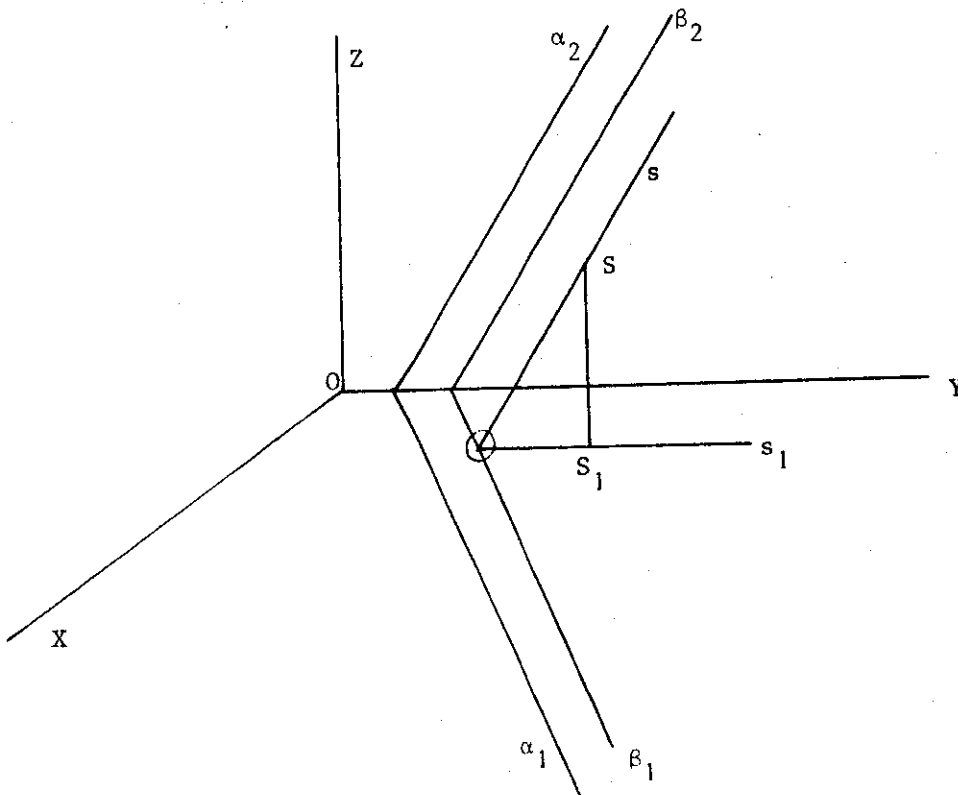
Figuur 83

### 5.3. Onderlinge ligging van vlakken

Twee vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn onderling evenwijdig of ze snijden elkaar. Als  $\alpha$  en  $\beta$  evenwijdig zijn, zijn de gelijknamige doorgangen evenwijdig. In projectie zijn ze daarom ook evenwijdig. Omgekeerd geldt: als  $\alpha_1 // \beta_1$  en  $\alpha_2 // \beta_2$  dan is  $\alpha // \beta$ , mits  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  elkaar snijden.

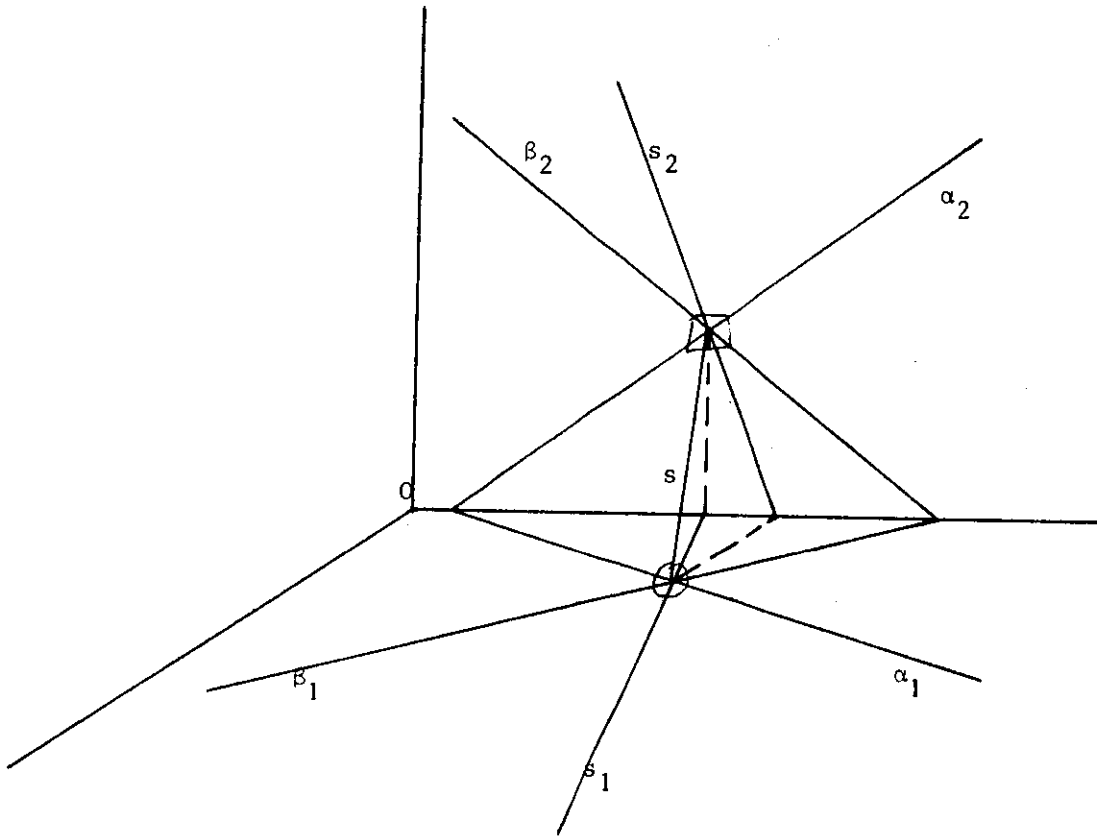
Toepassing: In Figuur 84 is het vlak  $\beta$  getekend door het punt  $S$  en evenwijdig met het gegeven vlak  $\alpha$ . Dit is gedaan met behulp van een hulplijn  $s$  door  $S$  en evenwijdig aan  $\alpha$ . We kozen de lijn evenwijdig aan  $\alpha_2$ , dus evenwijdig aan  $\pi_2$ . Van deze lijn wordt het eerste doorgangspunt bepaald, waarna  $\beta$  bekend is ( $\beta_1 // \alpha_1$ , enz.).

Opmerking. Een willekeurige hulplijn  $// \alpha$  is iets bewerkelijker. (Ga na!)



Figuur 84

Als  $\alpha$  en  $\beta$  elkaar snijden dan zijn de doorgangspunten van de snijlijn  $s$  de snijpunten van de gelijknamige doorgangen. De projectie van  $s$  is de verbindingslijn van  $\odot$  en  $\square$ . (Construeer in Figuur 85 zelf  $s_3$  en  $\Delta$  van  $s$ .)

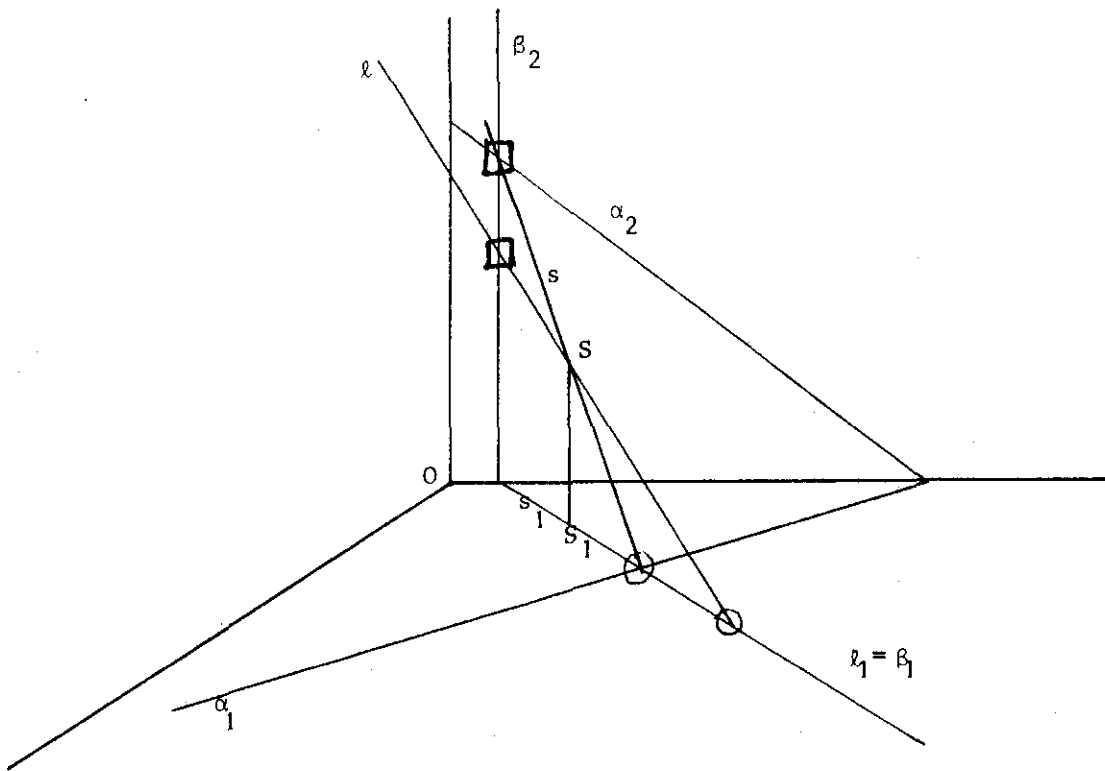


Figuur 85

#### 5.4. Snijpunt van lijn en vlak

Gegeven zijn de lijn  $\ell$  en het vlak  $\alpha$ . Om het snijpunt  $S$  te construeren brengen we een (willekeurig) vlak  $\beta$  door  $\ell$  aan. Het punt  $S$  is het snijpunt van  $\ell$  met de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$ . In Figuur 86 is de constructie uitgevoerd. Als hulpvlak is gekozen het vlak  $\beta$  door  $\ell$ , loodrecht op  $\pi_1$ .





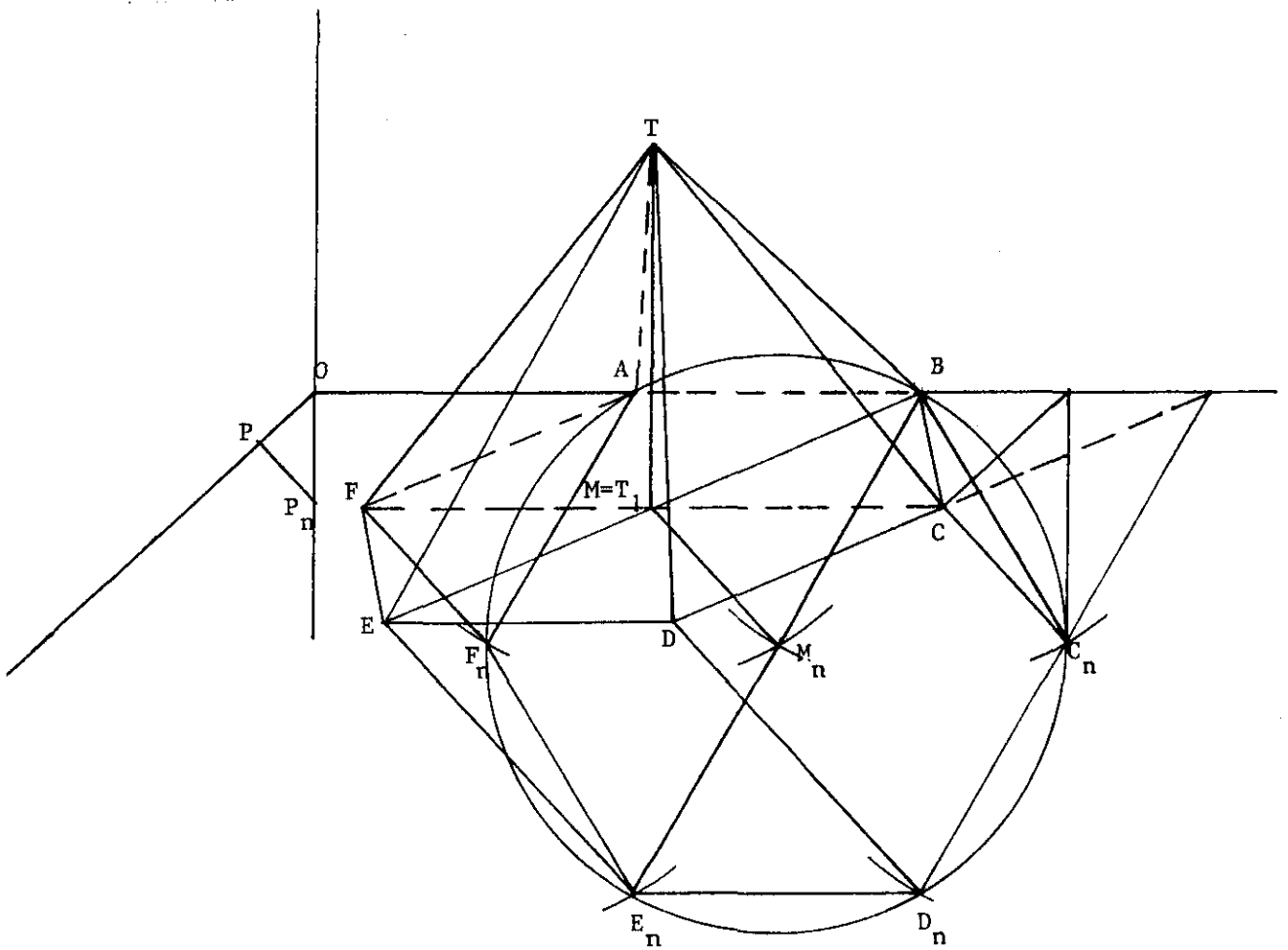
Figuur 86

### 5.5. Het neerslaan van vlakken

Omdat we hier een scheve parallelprojectie hebben, vormen de projecties van een vlakke figuur en de neergeslagen stand een affiniteit, met weer de wentelas als affiniteitsas, maar het is een scheve affiniteit. We zullen veel voorkomende situaties bespreken.

le geval. Het neerslaan van  $\pi_1$  om OY

Gevraagd wordt een regelmatige zeszijdige pyramide  $T_{ABCDEF}$  te tekenen, waarvan de grondribbe AB op de Y-as ligt, een gegeven lengte heeft, terwijl ook de hoogte bekend is. Omdat ABCDEF in  $\pi_1$  ligt, is de affiniteitsas de Y-as terwijl de affiniteit verder is vastgelegd door de projectiedriehoek. In neergeslagen stand is de regelmatige zeshoek geconstrueerd (zie Figuur 87). Daarna is C getekend met behulp van een projectiedriehoek vanuit  $C_n$ . Voor de punten D, E, F en M (die op dezelfde manier zouden kunnen worden geconstrueerd) is gebruik gemaakt van affiniteitsrichting en de as.



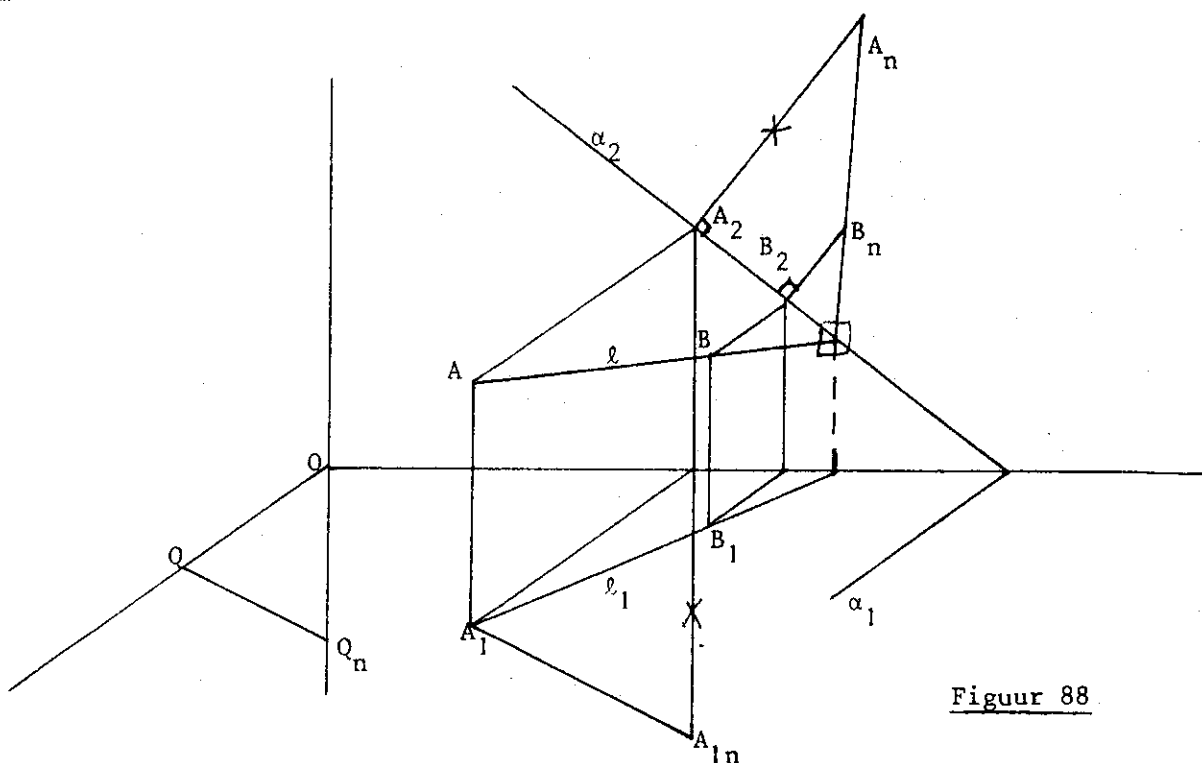
Figuur 87

(DC snijdt  $D_n C_n$  op de as,  $DD_n // CC_n$  enz.). Overigens is het nuttig om te bedenken dat  $CF // Y$ -as is, zodat  $C_n F_n // CF$  is (Waarom?)

Ter controle:  $E_n D_n // Y$ -as, dus  $E_n D_n // ED$ . Het middelpunt van de zeshoek is tevens  $T_1$ . De gegeven lengte is afgezet in de z-richting. Daarna is de pyramide (ondoorzichtig) getekend; de onzichtbare ribben zijn gestreept.

2e geval. Het neerslaan van een vlak dat loodrecht  $\pi_2$  is.

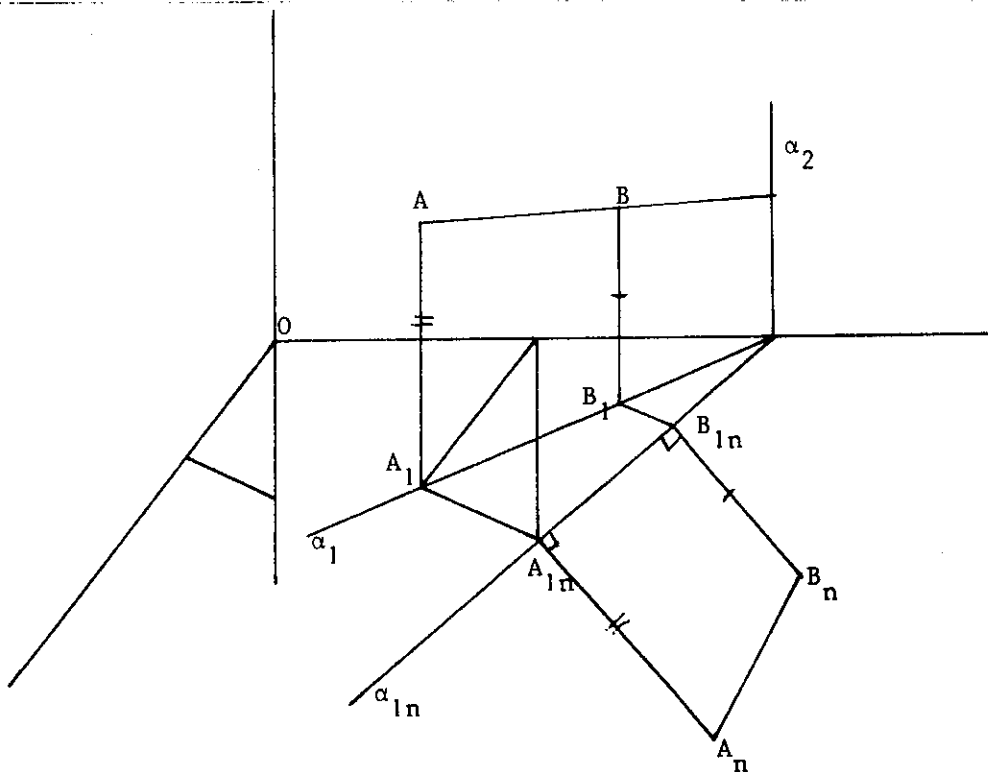
Gegeven is de lijn  $\ell$  met daarop de punten A en B. Gevraagd wordt de afstand van A tot B te construeren. In Figuur 88 brengen we door AB het vlak  $\alpha$  aan  $\perp \pi_2$  ( $= \tau$ ) en slaan dit vlak om  $\alpha_2$  neer in  $\tau$ . Het punt A beschrijft een cirkelboog met middelpunt  $A_2$  en gelegen in het vlak door  $A_2$  en  $\perp \alpha_2$ . De straal van deze cirkel is gelijk aan de ware lengte van  $AA_2$ , dat is de afstand van  $A_{1n}$  tot de Y-as (waarom?). De affiniteit is vastgelegd door  $\alpha_2$  (als as) en door het paar A,  $A_n$ .



Wat we in Figuur 88 hebben gedaan is de ware gedaante bepalen van het rechthoekige trapezium  $ABB_2A_2$ . We kunnen natuurlijk ook de gedaante van het rechthoekige trapezium  $ABB_1A_1$  bepalen. Zie hiervoor het derde geval.

3e geval. Het neerslaan van een vlak dat  $\perp \pi_1$  is.

(Zie Figuur 89.) We behandelen nu het neerslaan van het trapezium  $ABB_1A_1$ . Dit ligt in het vlak  $\alpha \perp \pi_1$ . We wentelennu om  $\alpha_{1n}$  in  $\pi_1$ . (Daarna wordt  $\pi_1$  gewenteld in  $\tau$ .) Daartoe moeten we eerst  $\alpha_{1n}$  (en  $A_{1n}$  en  $B_{1n}$ ) construeren.



Figuur 89

Uit de figuur blijkt dat deze constructie qua gedachtengang iets lastiger is dan die van het tweede geval.

4e geval. Een willekeurig vlak neerslaan om  $\alpha_2$ .

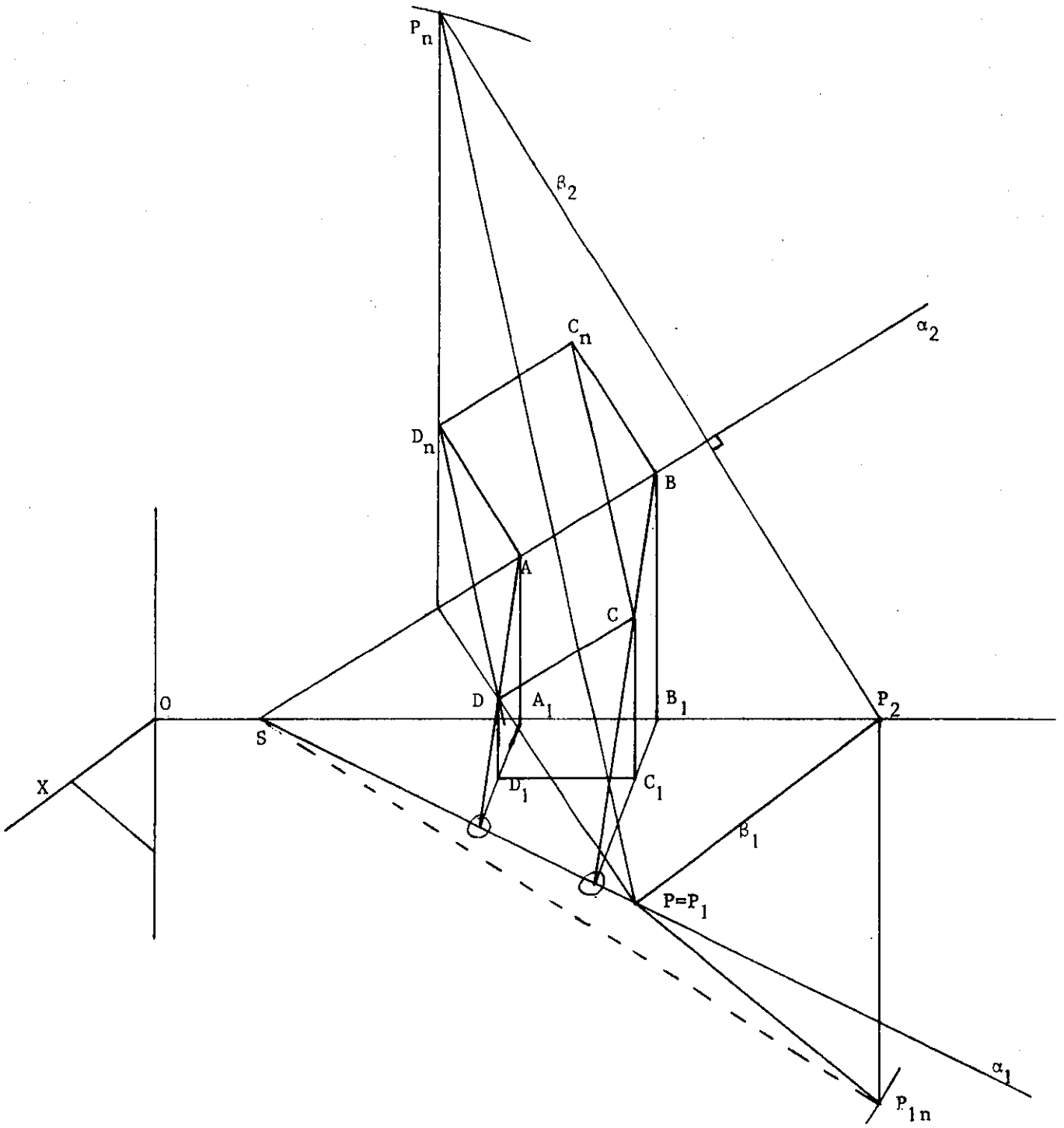
Stel dat in  $\alpha$  een vierkant ABCD geconstrueerd moet worden, waarin A en B op  $\alpha_2$  liggen. We wentelen  $\alpha$  om  $\alpha_2$  in  $\tau$ . De affiniteitsas is  $\alpha_2$ . Om de affiniteit vast te leggen nemen we een punt P op  $\alpha_1$  en bepalen  $P_n$ . Het punt P (=  $P_1$ ) beschrijft een cirkelboog in het vlak  $\beta$  door P en  $\perp \alpha_2$ ; hierbij is  $\beta_2 \perp \alpha_2$ ,  $\beta_1 // OX$  (waarom?) en  $SP = SP_n$ . Om in Figuur 90 de ware lengte SP te bepalen, wordt  $P_{1n}$  bepaald; dan is  $SP_n = SP_{1n}$ .

In neergeslagen stand worden  $C_n$  en  $D_n$  geconstrueerd zó dat  $ABC_n D_n$  een vierkant is.  $CC_n$  en  $DD_n$  zijn evenwijdig met de affiniteitsrichting  $PP_n$ . Verder snijden  $D_n P_n$  en DP elkaar op  $\alpha_2$ . C kan op verschillende manieren gevonden worden (bijv.  $CD // AB$ ).

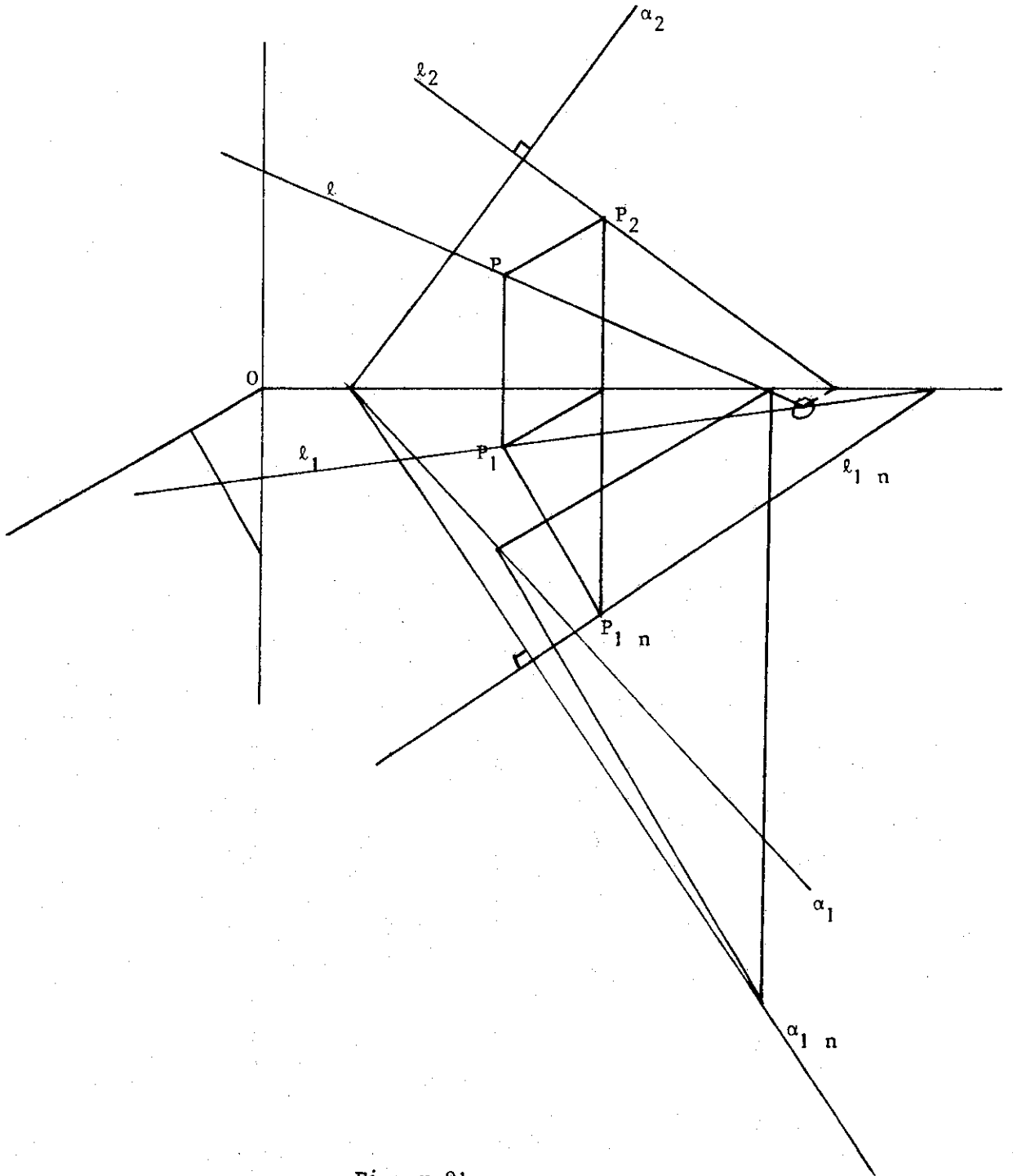
AD en BC snijden  $\alpha_1$  in hun eerste doorgangspunten, zodat  $A_1 D_1$  en  $B_1 C_1$  gevonden zijn. (Merk, ter controle, op dat  $A_1 B_1 C_1 D_1$  een parallellogram is.)

#### 5.6. Loodrechte stand en hoeken

We willen lijn  $\ell$  door een gegeven punt P loodrecht op  $\alpha$  construeren. Gebruik makend van Stelling 2.12 kan direct  $\ell_2 \perp \alpha_2$  getekend worden. Immers  $\ell_2$  is de orthogonale projectie van de gezochte lijn op  $\tau$ . Om  $\ell_1$  te tekenen bedenken we dat deze lijn de (scheve) projectie (op  $\pi_2$ ) is van de orthogonale projectie van de gezochte lijn op  $\pi_1$ ; dit betekent dat als we  $\ell_1$  en  $\alpha_1$  met  $\pi_1$  wentelen (om de  $\gamma$ -as) in  $\tau$  weer volgens Stelling 2.12 geldt:  $\ell_{1n} \perp \alpha_{1n}$ . (Zie Figuur 91.)



Figuur 90



Figuur 91





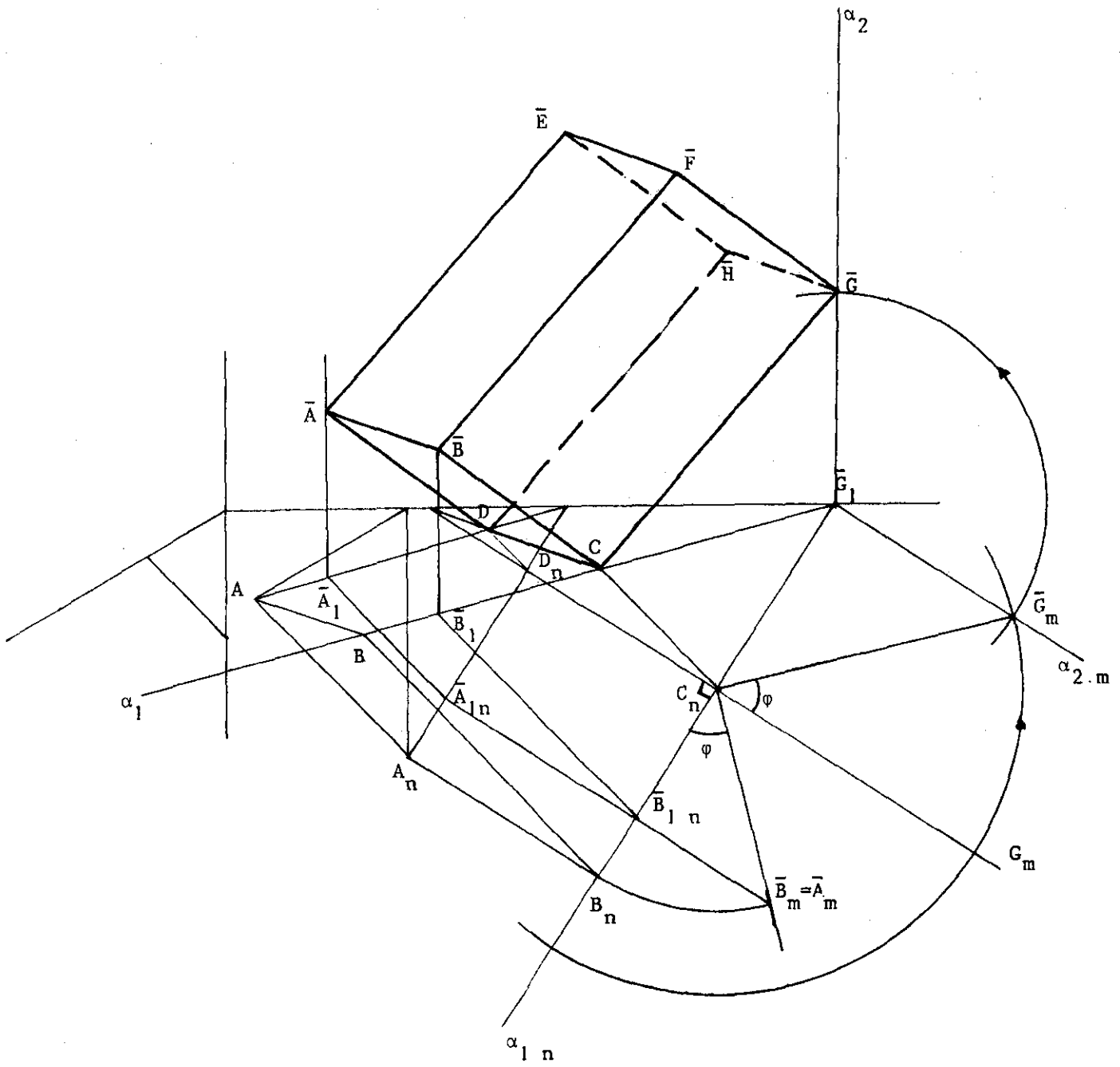
De hoek  $\varphi$  van twee snijdende lijnen wordt bepaald door het vlak dat  $l$  en  $m$  bevat, neer te slaan in  $\tau$ . Betreft het geen snijdende maar kruisende lijnen dan wordt door een punt van de ene lijn een lijn evenwijdig aan de andere getrokken.

De hoek tussen twee vlakken wordt weer bepaald met behulp van een standvlak. (Zie Definitie 2.10.) De hoek tussen een lijn en een vlak wordt op dezelfde wijze geconstrueerd als beschreven in §3.10.

### 5.7. Het wentelen van een lichaam

Gegeven is van het regelmatige vierzijdige prisma  $\begin{matrix} EFGH \\ ABCD \end{matrix}$  dat  $ABCD$  in  $\pi_1$  ligt. Tevens is de hoogte gegeven. Van  $ABCD$  is in de tekening  $\begin{matrix} A & B & C & D \\ n & n & n & n \end{matrix}$  bekend. Gevraagd wordt het lichaam te wentelen om  $CD$  tot  $G$  in  $\pi_2$  ligt. De constructie is uitgevoerd in Figuur 93. Eerst werd het parallellogram  $ABCD$  getekend met behulp van affiniteit (vastgelegd door de projectiedriehoek en de  $Y$ -as als affiniteitsas).  $G$  wentelt in het vlak  $\alpha$  door  $C$  en  $\perp CD$ ;  $\alpha_{1,n}$  is dus  $\perp D C$ . Teneinde het wentelen uit te voeren wordt het vlak om  $\alpha_{1,n}$  in de neergeslagen stand van  $\pi_1$  gewenteld (alles aangeduid met de index  $m$ ). De in  $\alpha$  gelegen punten  $G$  en  $B$  komen na wenteling in  $\bar{G}$  en  $\bar{B}$  terecht. De hoek  $\bar{G}_m C G_m = \angle \bar{B}_m C B_m (= \varphi)$ , omdat elk punt over de zelfde hoek wordt gewenteld. Na wentelen is  $\bar{G}_1 \bar{G}_m$  de hoogte van  $\bar{G}$  boven  $\pi_1$ ; ook is  $\bar{B}_1 \bar{B}_m =$  de hoogten van  $\bar{B}$  en  $\bar{A}$  boven  $\pi_1$ . Vervolgens wordt het prisma voltooid. Het is ondoorzichtig.

Opdracht: Merk op dat  $H$  achter  $\pi_2$  ligt. Construeer zelf de doorsnijding van het gewentelde lichaam met  $\pi_2$ .



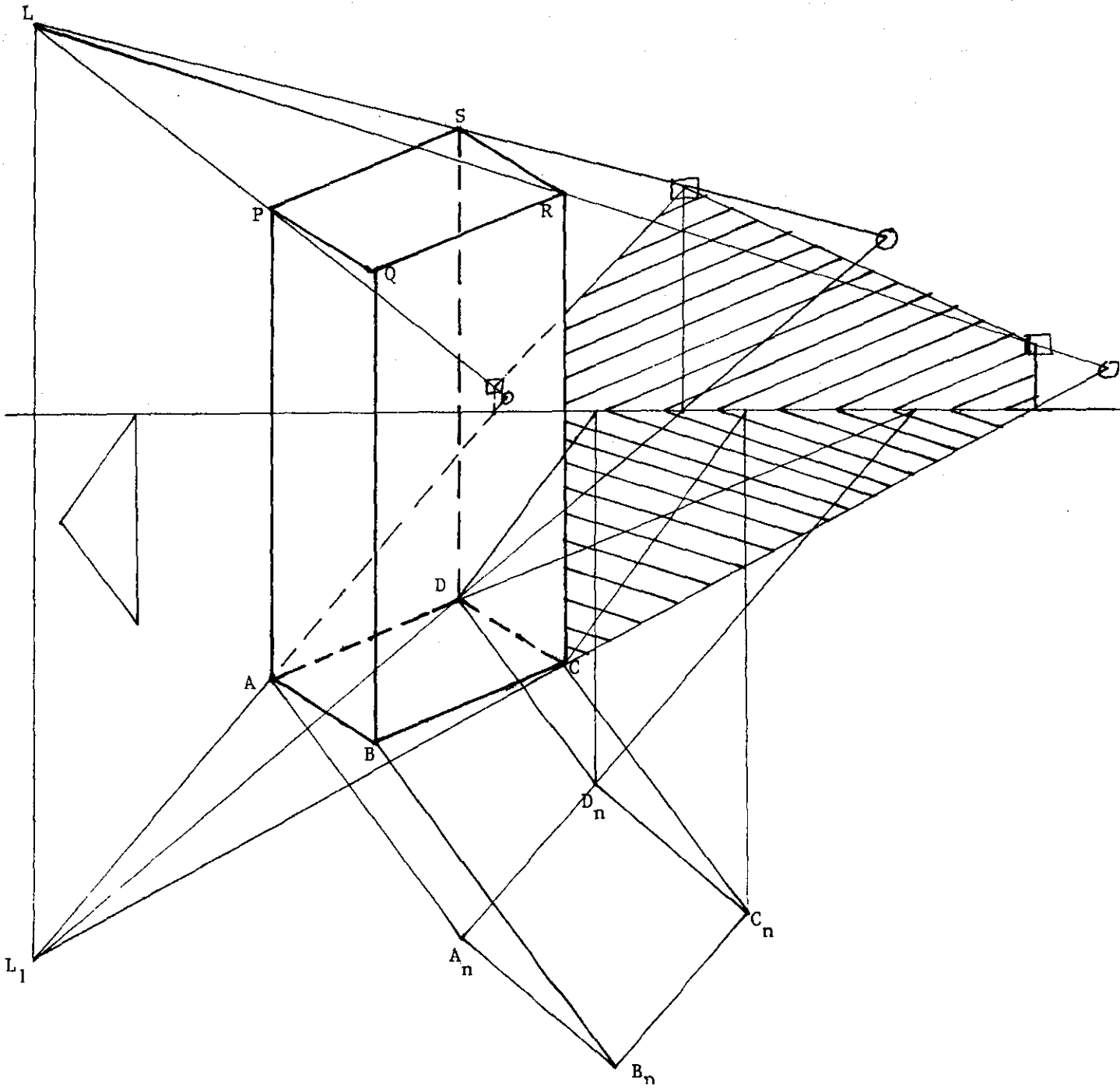
Figuur 93

### 5.8. Schaduwconstructies

In Figuur 94 is de schaduw geconstrueerd die een regelmatig vierzijdig prisma  $\begin{matrix} PQRS \\ ABCD \end{matrix}$  werpt op  $\pi_1$  en  $\pi_2$ . Het prisma wordt beschenen door een (puntvormige) lichtbron L. Van de opstaande ribben AP, CR en DS zijn de schaduwen geconstrueerd, nl. door middel van de resp. vlakken door L en die ribben. Uit de tekening blijkt dat LR het vlak  $\pi_1$  achter  $\pi_2$  snijdt. Daarom werpt RC ook schaduw op  $\pi_2$ . De schaduwlijnen op  $\pi_1$  resp.  $\pi_2$  zijn de doorgangen van het vlak LCR.

Het tweede doorgangspunt van LR is het eindpunt van de gebroken schaduw van RC. Op dezelfde manier is de schaduw van AP en DS geconstrueerd. De slagschaduw van het ondoorzichtige prisma op  $\pi_1$  en  $\pi_2$  voor zover zichtbaar, is gearceerd (grof, om de constructielijnen duidelijk te houden).

Slotopmerking bij scheve projectie. In Hoofdstuk 1 tot en met 5 zijn vele ruimtelijke schetsen gegeven ter verduidelijking van bepaalde situaties. Al deze schetsen zijn getekend in scheve parallelprojectie.



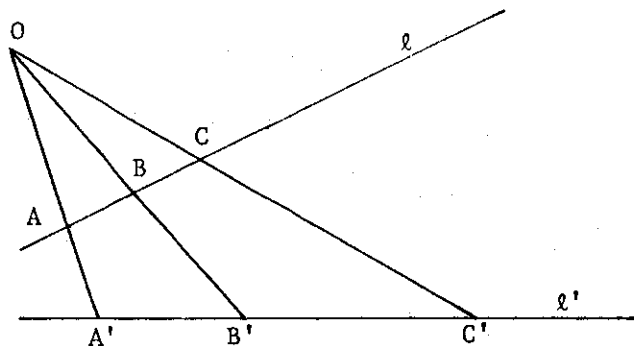
Figuur 94

## 6. Over kegelsneden

Cirkels, ellipsen, parabolen en hyperbolen worden kegelsneden genoemd. In dit hoofdstuk zullen ze besproken worden. Alvorens dit te doen, gaan we eigenschappen afleiden die we nodig hebben.

### 6.1. De dubbelverhouding, pool en poollijn

Tot nu toe hebben we ons met parallelprojectie bezig gehouden. Daarbij kwam Stelling 2.1, betrekking hebbende op het gelijk blijven van verhoudingen van lijnstukken bij projectie, aan de orde. Bij centrale projectie is zo'n verhouding niet invariant, zoals blijkt uit Figuur 95. De lijn  $\ell$  wordt van een centrum  $O$  uit geprojecteerd op  $\ell'$ . Nu geldt:  $AB : BC = 1 : 1$ , maar  $A'B' : B'C' \approx 2 : 3$ .



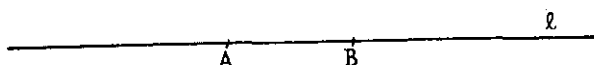
Figuur 95

Het blijkt nodig een nieuw begrip in te voeren, nl. het begrip dubbelverhouding. Dit vereist enige voorbereiding.

Op een lijn  $\ell$  (zie Figuur 96) spreken we een positieve en een negatieve richting af. Als we op  $\ell$  twee punten, zeg A en B, nemen dan zullen we onder  $\vec{AB}$  verstaan het getal dat we als volgt krijgen:

1. de lengte van AB als de richting van A naar B positief is,
2. de lengte van AB, voorzien van een minteken als de richting van A naar B negatief is.

Het zal duidelijk zijn dat  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .

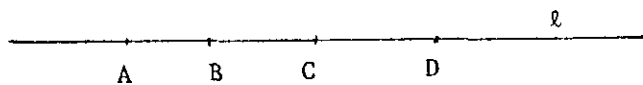


Figuur 96

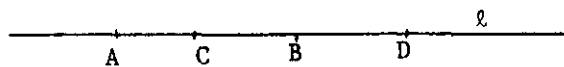
Opmerking: Liggen er drie punten, zeg A, B en C, op  $\ell$ , dan is  $\frac{\vec{CA}}{\vec{CB}}$  onafhankelijk van de gekozen positieve richting op  $\ell$ .

6.1.1. Definitie. Zijn A, B, C en D vier punten op de lijn  $\ell$ , dan geldt per

definitie:  $(AB, CD) = \frac{\vec{CA}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{DA}}{\vec{DB}}$ . (Zie Figuur 97 en 98.)



Figuur 97



Figuur 98

Opmerkingen.

1.  $(AB, CD)$  heet de dubbelverhouding van de vier punten op  $\ell$ .
2. Nemen we de +richting op  $\ell$  naar rechts, dan geldt in Figuur 97  $(AB, CD)$  is positief. Nemen we de +richting naar links, dan is de dubbelverhouding eveneens positief.
3. Ga na dat  $(AB, CD)$  in Figuur 98 negatief is.

6.1.2. Stelling. Bij centrale projectie is een dubbelverhouding invariant.

Bewijs: Als  $\ell // \ell'$  dan is het bewijs triviaal. Stel nu  $\ell$  niet evenwijdig met  $\ell'$ . We leveren het bewijs in twee stukken. Eerst bewijzen we dat de absolute waarde van de verhouding invariant is, daarna bewijzen we dat hetzelfde geldt voor het teken.

a) (Zie Figuur 99.) Op  $\ell$  liggen de punten A, B, C en D. Deze worden van O uit op de lijn  $\ell'$  geprojecteerd. Trek door B en B' lijnen  $// OA$ . Deze snijden OC en OD in punten, zoals aangegeven in de figuur.

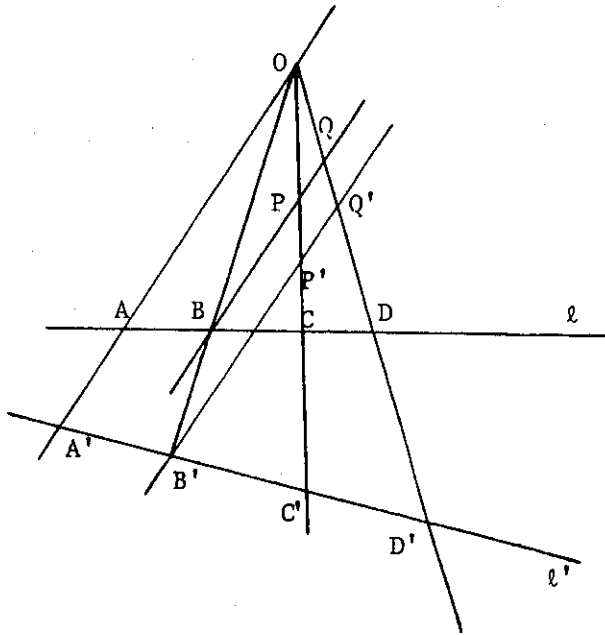
$\Delta CAO \sim \Delta CBP$  en  $\Delta DAO \sim \Delta DBQ$ , dus:  $\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BP}$  en  $\frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BQ}$ , zodat  
 $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{BQ}{BP}$ . Op analoge wijze vinden we:  $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{B'Q'}{B'P'}$ .  
Wegens  $BQ // B'Q'$  is  $\frac{BQ}{BP} = \frac{B'Q'}{B'P'}$ , zodat  $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$ .

b) O kan t.o.v.  $\ell$  en  $\ell'$  maar op twee plaatsen liggen, nl. zoals in Figuur 99 en zoals in Figuur 100 getekend.

In beide gevallen is de volgorde van punten dezelfde gebleven, zodat ook het teken van de verhoudingen niet veranderd is.

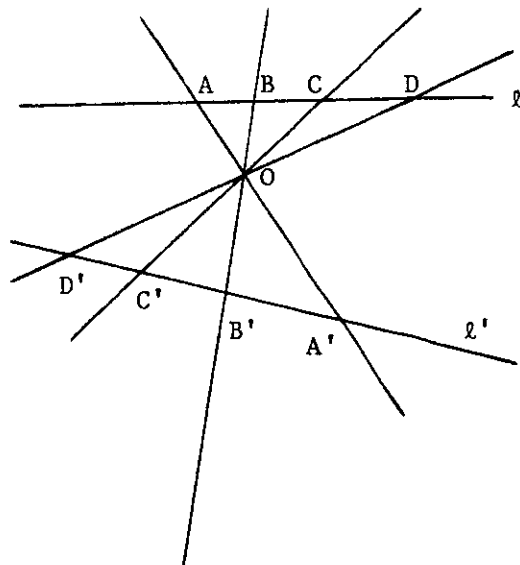
Conclusie:  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$

□



Figuur 99

Opmerking. Eén bijzonder geval, nl. dat  $l'$  evenwijdig met één der stralen OA, OB, OC of OD is, is hier onbesproken gebleven. We zullen daarom Stelling 112 aanvullen met de hieronder staande.



Figuur 100



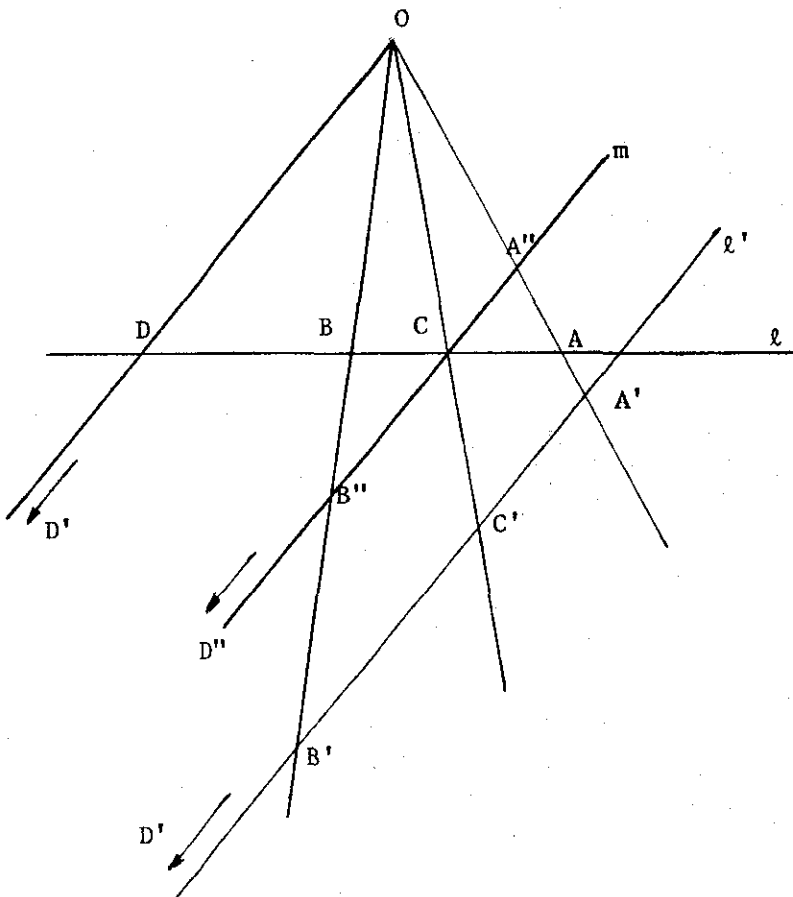
6.1.3. Stelling. Als op  $\ell$  de punten A,B,C en D gegeven zijn en deze van een punt O (buiten  $\ell$ ) uit geprojecteerd worden op  $\ell'$ , dan gaat (AB,CD) over in een (van een teken) voorziene gewone verhouding, als  $\ell'$  evenwijdig aan één der stralen is. Ook is de dubbelverhouding dezelfde als de verhouding.

Bewijs: (Figuur 101). Zij  $\ell' \parallel OD$ . Trek door C de lijn  $m \parallel \ell'$ , dan is

$$A''C : CB'' = A'C' : C'B' .$$

Verder is  $\triangle ACA'' \sim \triangle ADO$  en  $\triangle DBO \sim \triangle CBB''$ , dus

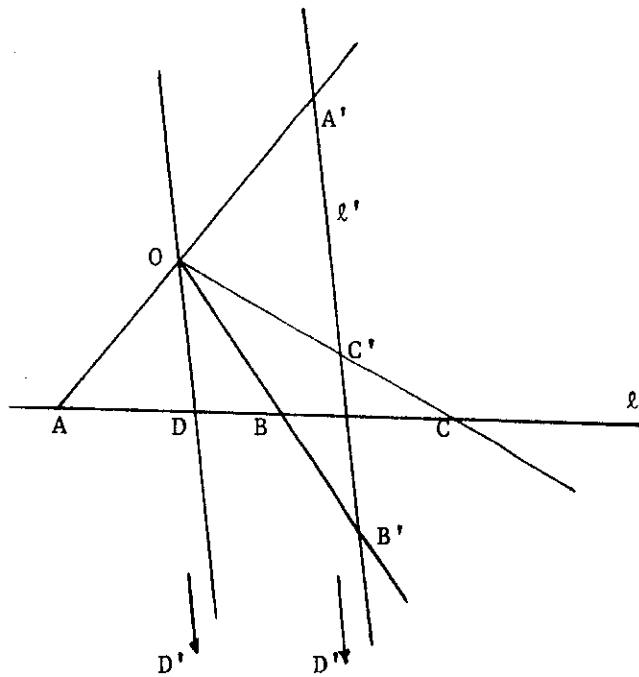
$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{CA}{DA} \cdot \frac{DB}{CB} = \frac{CA''}{DO} \cdot \frac{DO}{CB''} = \frac{CA''}{CB''} = \frac{C'A'}{C'B'} .$$



Figuur 101

De getalswaarde van  $(AB, CD)$  is dus gelijk aan  $\frac{C'A'}{C'B'}$ . Het nagaan van het teken kost iets meer moeite. Een deel van de dubbelverhouding is de van een teken voorziene verhouding  $\frac{DA}{DB}$ . In Figuur 101 is  $\frac{DA}{DB} > 0$ . Omdat  $D'$  een oneigenlijk punt is, is  $\frac{D'A'}{D'B'} = -1$ . In Figuur 101 is het teken van  $(AB, CD)$  dus hetzelfde als dat van  $\frac{CA}{CB}$ , dus negatief. Hetzelfde geldt voor  $\frac{C'A'}{C'B'}$ . In Figuur 102 is  $\frac{DA}{DB}$  negatief,  $\frac{CA}{CB}$  positief, maar  $\frac{C'A'}{C'B'}$  negatief, dus  $(AB, CD)$  heeft hetzelfde teken als  $\frac{C'A'}{C'B'}$ . Het voert ons te ver om te bewijzen dat we nu alle gevallen gehad hebben.

□



Figuur 102

Een bijzondere dubbelverhouding is de z.g. harmonische dubbelverhouding. Dit is de dubbelverhouding  $(AB, CD) = -1$ . We zeggen nu dat het paar  $C, D$  harmonisch is toegevoegd aan het paar  $A, B$ , of dat de paren  $C, D$  en  $A, B$  elkaar harmonisch scheiden.

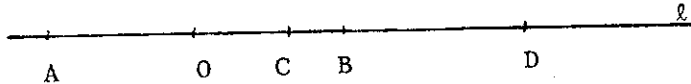
Merk op dat uit  $(AB, CD) = -1$  ook volgt dat

$$(AB, DC) = (BA, CD) = (BA, DC) = -1 .$$

Als in Figuur 102  $(AB, CD) = -1$ , dan is  $\frac{C'A'}{C'B'} = -1$ , dus  $C'$  is het midden van  $A'B'$ . We kunnen dit ook op een geheel andere wijze inzien.

Neem in Figuur 103 op  $\ell$  de oorsprong midden tussen A en B, geef A en B de coördinaten a resp. -a en C en D de coördinaten x en y.

$$-1 = (AB, CD) = \frac{\vec{CA}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} = \frac{a-x}{-a-x} : \frac{a-y}{-a-y} . \text{ Na enig rekenen levert dit } xy = a^2, \text{ dus } x = \frac{a^2}{y} .$$



Figuur 103

$$\lim_{y \rightarrow \infty} x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{a^2}{y} = 0, \text{ dus in de "limietstand" is C midden van AB.}$$

6.1.4. Stelling. Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en een punt P. Door P wordt een veranderlijke lijn  $\ell$  getrokken. De verzameling der punten Q op  $\ell$  zó dat P, Q als paar harmonisch is toegevoegd aan het paar snijpunten van  $\ell$  met de cirkel, is een rechte lijn.

Bewijs: (Figuur 104.) We kiezen een assenkruis met M als centrum en nemen de straal van de cirkel 1. De vergelijking van de cirkel is dan  $x^2 + y^2 = 1$ . Zij P: (a, b). De vergelijking van  $\ell$  is:  $y - b = \lambda(x - a)$  (met veranderlijke  $\lambda$ ). De snijpunten van  $\ell$  met  $\odot M$  noemen we S en T; we projecteren P, Q, S



zodat

$$x_S + x_T = -2\lambda \frac{b - \lambda a}{1 + \lambda^2} \quad \text{en} \quad x_S x_T = \frac{(b - \lambda a)^2 - 1}{1 + \lambda^2}.$$

Substitutie in (i) levert (na enig rekenen):

$$x_Q(a + b\lambda) = 1 + \lambda ab - b^2.$$

Ook geldt:

$$y_Q - b = \lambda(x_Q - a).$$

Elimineren van  $\lambda$  levert

$$ax_Q + by_Q = 1,$$

zodat Q de lijn  $ax + by = 1$  doorloopt.

□

#### Opmerkingen.

1. We kunnen de beschreven projectie op de X-as ook uitvoeren op de Y-as.
2. De gevonden lijn p heet de poollijn van P t.o.v.  $\odot M$ . P heet de pool van p t.o.v. de cirkel.
3. De vergelijking van de poollijn van P(a,b) t.o.v.  $\odot M$  met vergelijking  $x^2 + y^2 = 1$  luidt  $ax + by = 1$ .
4. Merk op dat  $MP \perp$  poollijn.

Bijzondere gevallen.

1. Ligt P op de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$ , dan is  $ax + by = 1$  de vergelijking van de raaklijn in P.

Bewijs: P ligt op de cirkel, dus geldt  $a^2 + b^2 = 1$ .

a) Als  $b = 0$  dan is  $a = \pm 1$  en inderdaad is nu  $x = +1$  resp.  $x = -1$  de raaklijn aan de cirkel in P.

b) Stel  $b \neq 0$ . De cirkelvergelijking schrijven we als volgt:

$$b^2 x^2 + (by)^2 = b^2.$$

Snijden met  $ax + by = 1$  levert

$$b^2 x^2 + (1 - ax)^2 = b^2.$$

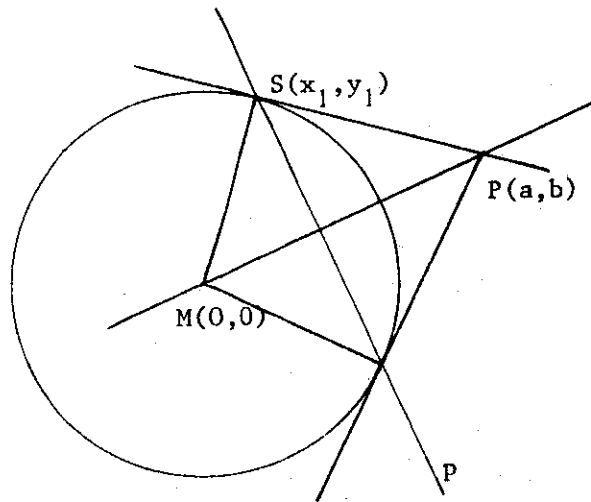
Wegens  $b^2 = 1 - a^2$  volgt nu  $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ , dus  $x_1 = x_2$ , zodat de lijn raaklijn is. Wegens  $x_1 = x_2 = a$  en  $y_1 = y_2 = b$  is P inderdaad het raakpunt. □

2. Als P buiten de cirkel ligt, dan kunnen we twee raaklijnen door P aan de cirkel trekken. De verbindingslijn van de raakpunten is poollijn p van P.

Bewijs: Stel dat  $S(x_1, y_1)$  één van de raakpunten is. Nu geldt (zie Figuur 105):  $(PM)^2 = (MS)^2 + (SP)^2$ , dus

$$a^2 + b^2 = 1 + (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2.$$

Wegens  $x_1^2 + y_1^2 = 1$  levert dit  $ax_1 + by_1 = 1$ , zodat S op de poollijn p van P ligt. Hetzelfde geldt voor het andere raakpunt. □



Figuur 105

## 6.2. Poolverwantschap

6.2.1. Stelling. Gegeven zijn  $\odot M$  en een punt  $P$  met poollijn  $p$  t.o.v. deze cirkel. Als punt  $Q$  op  $p$  ligt, dan gaat de poollijn  $q$  van  $Q$  door  $P$ .

Bewijs: Zie Figuur 106. Zij de vergelijking van de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$  en  $P(a,b)$ , dan is de vergelijking van  $p$ :  $ax + by = 1$ . Kies op  $p$  het punt  $Q(x_1, y_1)$  zodat geldt  $ax_1 + by_1 = 1$ . (i)

De vergelijking van de poollijn  $q$  van  $Q$  t.o.v. de cirkel is  $x_1x + y_1y = 1$ .

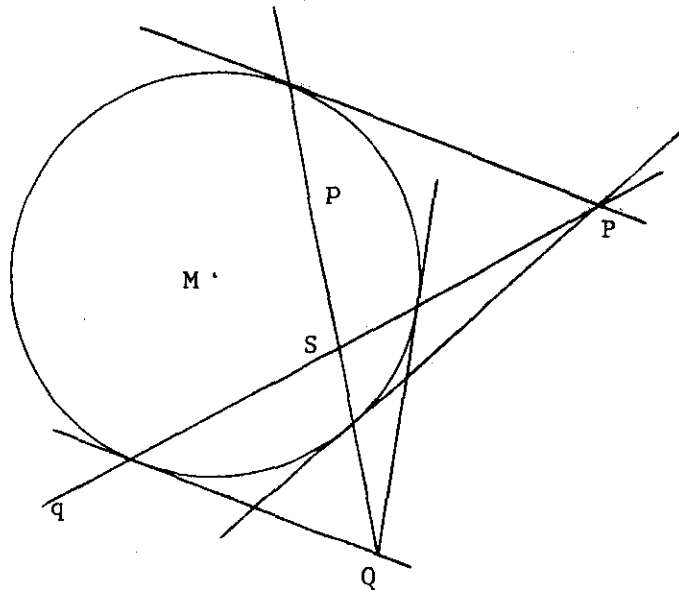
Wegens (i) ligt  $P$  op deze lijn.

□

### Opmerkingen.

1. De poollijnen  $p$  en  $q$  (met  $P$  op  $q$  en  $Q$  op  $p$ ) vormen een stel toegevoegde poollijnen.
2. Een direct gevolg van Stelling 6.2.1 is: Is  $S$  het snijpunt van  $p$  en  $q$ , dan liggen  $P$  en  $Q$  op de poollijn  $s$  van  $S$ . De driehoek  $PQS$  heet

een pooldriehoek t.o.v. de cirkel; elk hoekpunt en overstaande zijde vormen een pool-poollijncombinatie t.o.v. de cirkel.

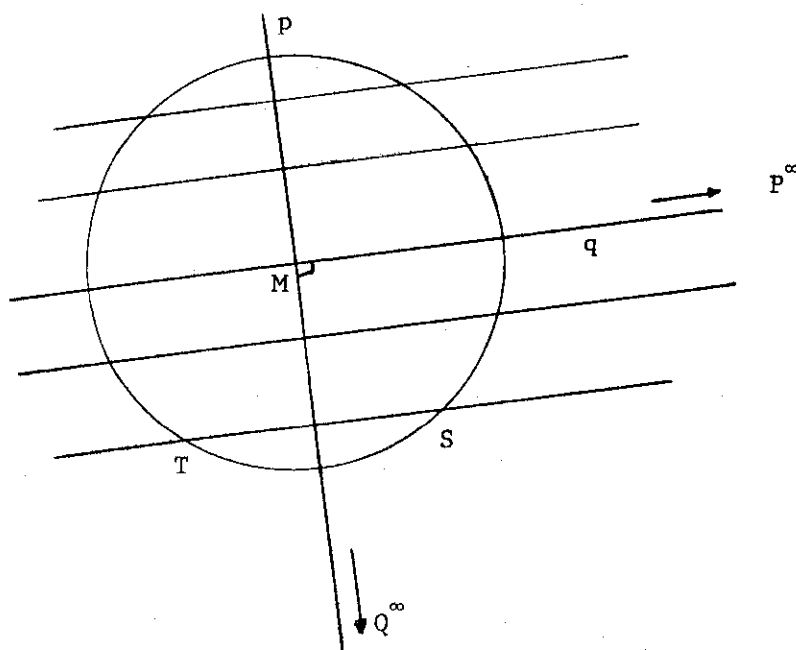


Figuur 106

3. In de bijzondere gevallen van Stelling 6.1.4 is besproken hoe de poollijn van een punt wordt geconstrueerd in het geval het punt buiten of op de cirkel ligt. Na Stelling 6.2.1 kunnen we ook de poollijn construeren in geval het punt binnen de cirkel ligt. Beschouwen we punt S in Figuur 106. Trek door S twee lijnen (p en q), bepaal de polen P en Q van p en q (met behulp van de raaklijnen). De poollijn s is de verbindingslijn PQ.



Zij  $q$  een lijn door het middelpunt  $M$  van de cirkel in Figuur 107. Stel verder dat  $P^\infty$  het oneigenlijke punt van  $q$  is. We trekken rechten "door"  $P^\infty$ , dus evenwijdig met  $m$ . Als zo'n rechte de cirkel snijdt in  $S$  en  $T$ , dan gaat de in Stelling 6.1.4 genoemde poollijn van  $P^\infty$  door het midden van  $ST$  (zie ook de afleiding vóór Stelling 6.1.4).



Figuur 107

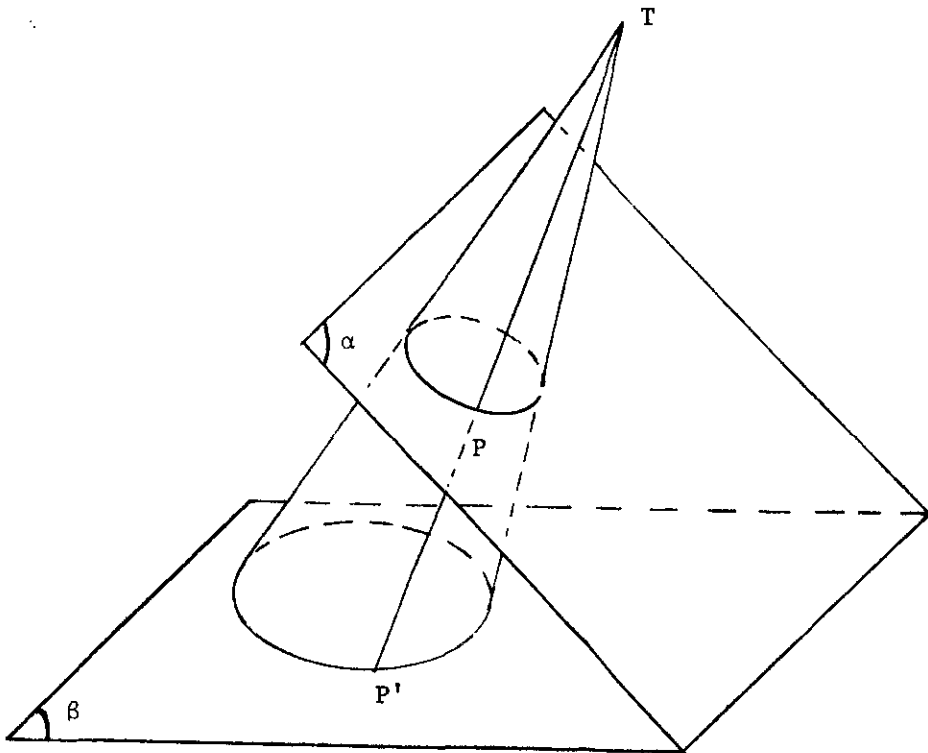
De poollijn  $p$  van het oneigenlijke punt  $P^\infty$  van lijn  $q$  vinden we door de raaklijnen door  $P^\infty$ , d.w.z. de raaklijnen  $// q$  te construeren. De verbindingslijn der raakpunten is de poollijn  $p$ .

Is  $Q^\infty$  het oneigenlijke punt van  $p$ , dan is  $q$  de poollijn van dit punt. We zien hieruit dat een tweetal onderling loodrechte middellijnen van een cirkel kan worden opgevat als een paar toegevoegde poollijnen. De middel-

lijnen worden toegevoegde middellijnen genoemd. De poollijn van M is de oneigenlijke rechte van het vlak.

### 6.3. Het projecteren van een cirkel

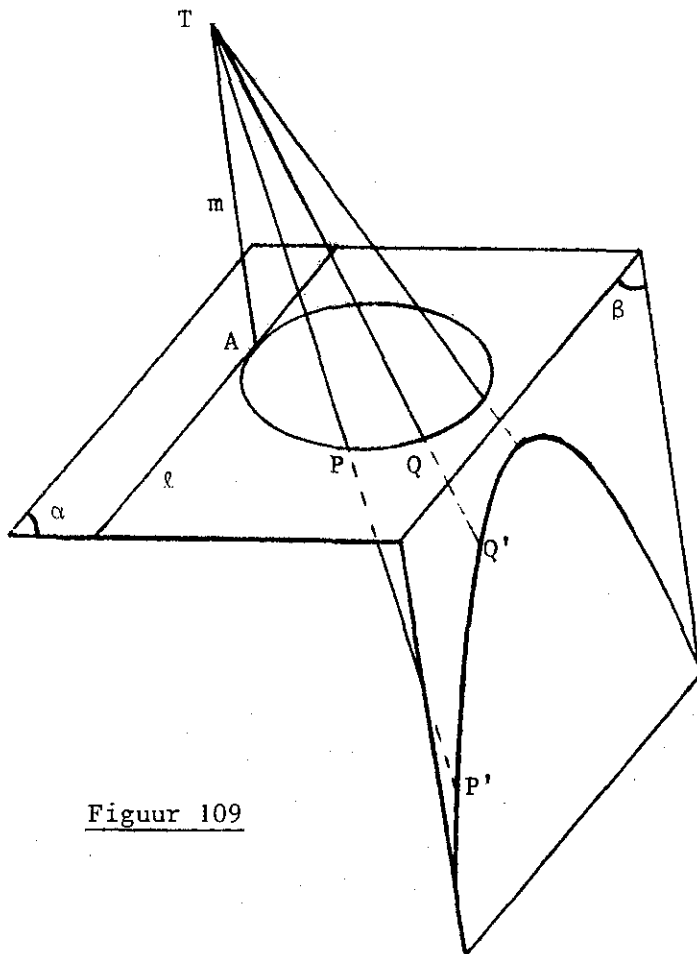
Stel dat we in het vlak  $\alpha$  een cirkel hebben die van een punt T (buiten  $\alpha$ ) uit op een vlak  $\beta$  wordt geprojecteerd. We beweren dat de projectiefiguur een kegelsnede is, d.w.z. een cirkel, een ellips, hyperbool of parabool (er zijn nog bijzondere gevallen die we buiten beschouwing laten). Het bewijs zullen we slechts schetsmatig geven.



Figuur 108

We gaan uit van een  $\mathbb{R}^3$ , met de X- en Y-as in  $\alpha$ . De vergelijking van de cirkel is dan bekend (van de tweede graad in x en y). De projecterende kegel met T als top en de cirkel als richtkromme is nu eveneens op te stellen (van de tweede graad in x,y en z). Als we de kegel met  $\beta$  ( $\beta$  niet door de top van de kegel) snijden, vinden we een vlakke kromme met een vergelijking van de tweede graad. Zo'n kromme is een cirkel, ellips, parabool of hyperbool. Als  $\beta$  door de top van de kegel gaat, dan is de doorsnijding een punt, een rechte of twee snijdende rechten.

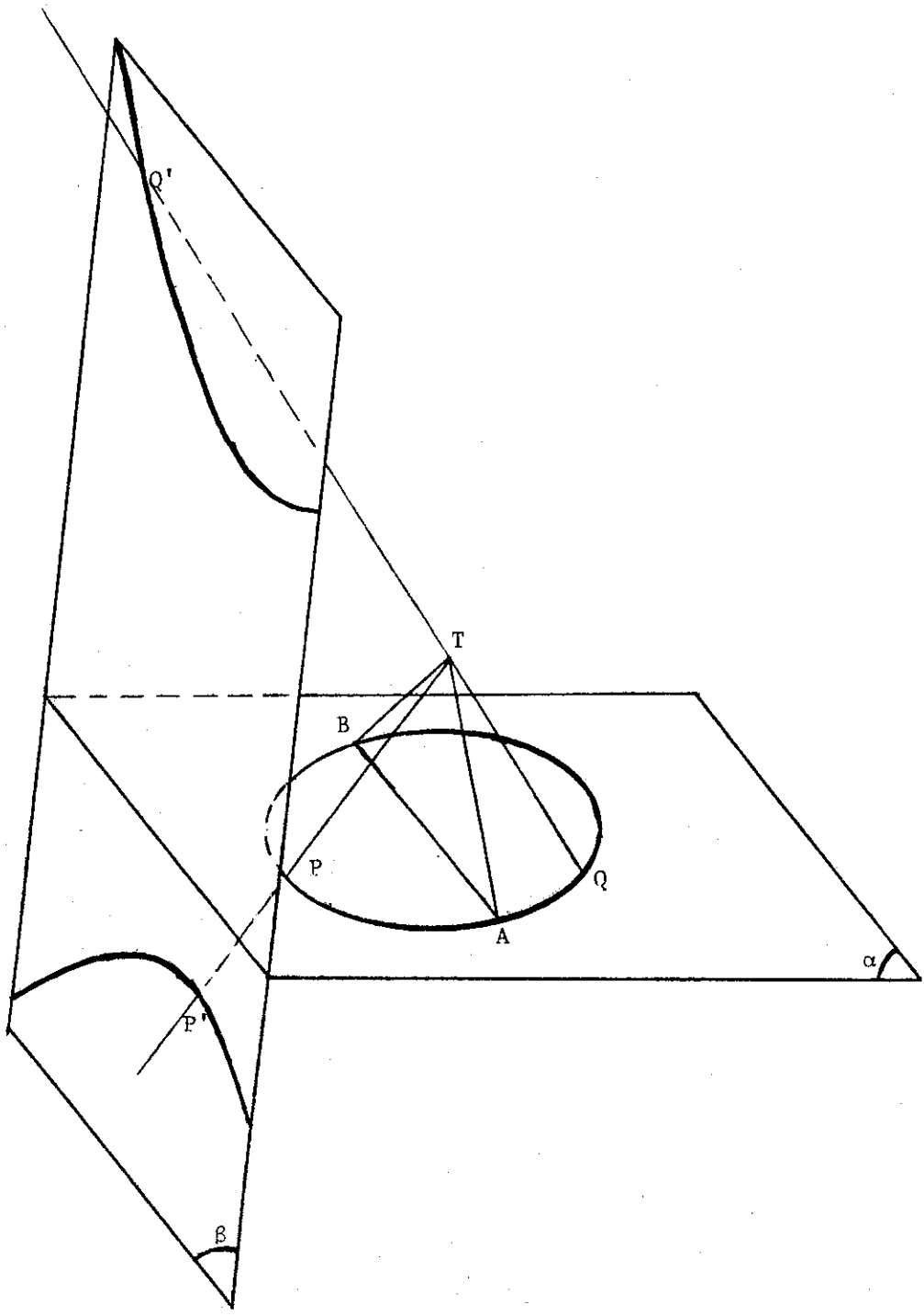
1e geval. (Figuur 108.) Het vlak  $\beta$  snijdt alle beschrijvenden van de kegel. De snijkromme in  $\beta$  is gesloten en heet ellips (of is, als  $\beta // \alpha$ , een cirkel).



Figuur 109

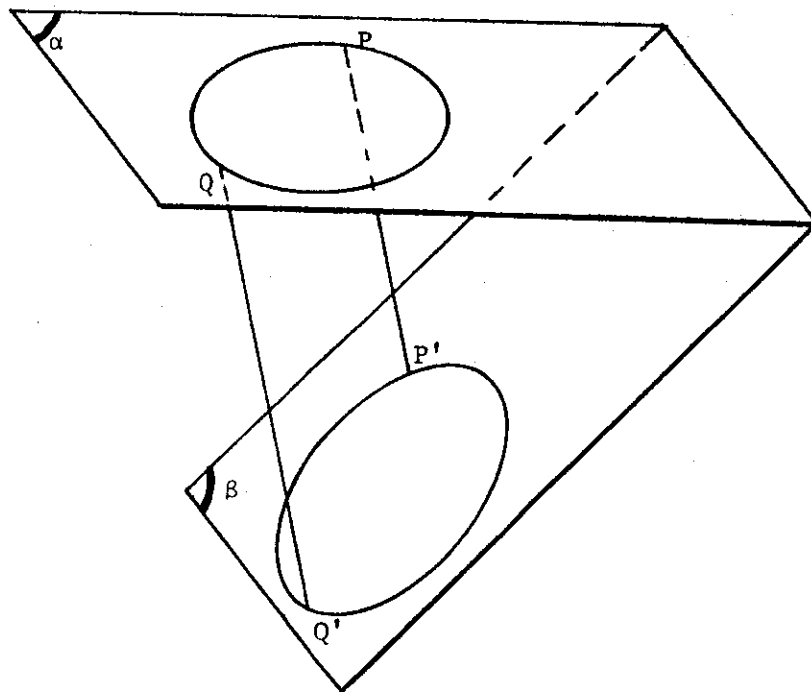
2e geval. (Figuur 109.) Het vlak  $\beta$  is evenwijdig met een raakvlak aan de kegel,  $\beta$  is evenwijdig met één beschrijvende van de kegel, nl. (hier) TA. De geprojecteerde cirkel is daarom niet "gesloten". De projectie is een parabool.

3e geval. (Figuur 110.) Het vlak  $\beta$  is evenwijdig met twee beschrijvenden van de kegel. In de figuur is  $\beta // TA$  en  $// TB$ . De projectie heet hyperbool. Deze kromme heeft twee takken.



Figuur 110

Is  $T$  een oneigenlijk punt, dan hebben we parallelprojectie. Ook nu is de projectie van de cirkel een kegelsnede, echter hebben we nu altijd een ellips (zie Figuur 111), tenzij  $\beta$  evenwijdig aan een beschrijvende is. In het laatste geval gaat  $\beta$  door de oneigenlijke top en snijdt de cilinder volgens één lijn of twee evenwijdige lijnen (of ligt geheel buiten de cilinder).



Figuur 111

#### 6.4. Pool en poollijn van een kegelsnede

Stel dat we nu in het vlak  $\alpha$  een cirkel  $c$  hebben, een punt  $P$  en de poollijn  $p$  t.o.v. de cirkel. Als we projecteren op het vlak  $\beta$ , dan hebben  $P'$  en  $p'$  dezelfde eigenschap t.o.v. de projectie van  $c$  als  $P$  en  $p$  t.o.v.  $c$ . We tonen dit aan. Zij  $\ell$  een lijn (in  $\alpha$ ) door  $P$ , die de cirkel in  $S$  en  $T$  snijdt. Het punt  $Q$  dat ontstaat door  $(ST, PQ) = -1$  te nemen, ligt bij veranderlijke lijn  $\ell$  op de poollijn  $p$ . We weten dat bij projectie de dubbelverhouding invariant is (Stelling 6.1.2).

□

Conclusie: Stelling 6.1.4 geldt niet slechts voor een cirkel, maar voor elke kegelsnede. Van de na Stelling 6.1.4 genoemde bijzondere gevallen, alsmede van Stelling 6.2.1 met opmerkingen kan hetzelfde gezegd worden.

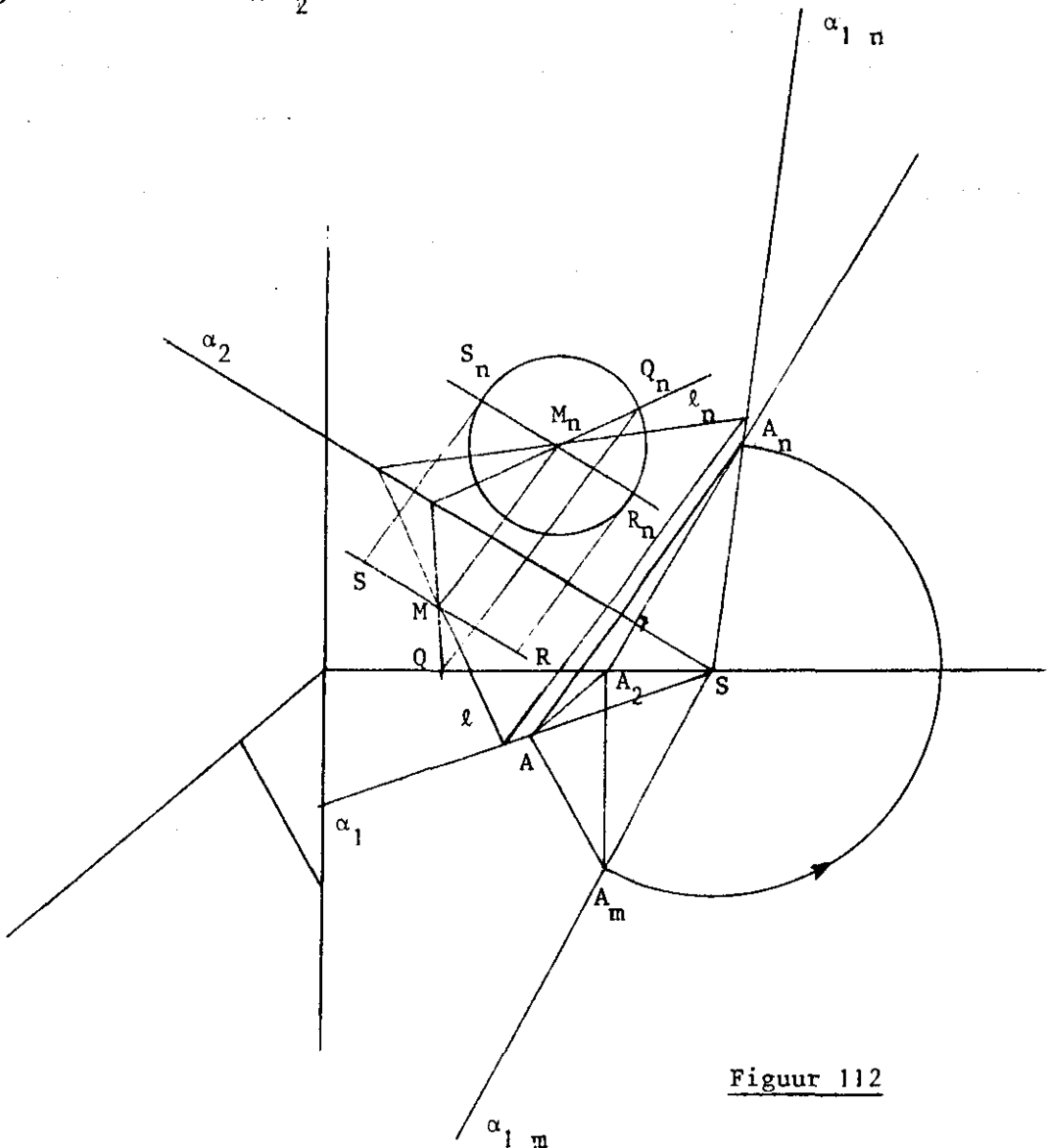
#### Opmerkingen.

1. De genoemde stellingen zijn afgeleid voor centrale projectie. Voor evenwijdige projectie gelden ze evenzo, omdat in dat geval verhoudingen, dus ook dubbelverhoudingen, invariant zijn.
2. Men kan ook bewijzen dat de projectie van een kegelsnede een kegelsnede is.

#### 6.5. Constructie van de projectie van een cirkel

Stel dat een cirkel  $C$  in een vlak  $\alpha$  ligt. Het tekenen van de projectie (of projecties) kan dan in principe steeds op dezelfde manier gebeuren nl. door middel van het punt voor punt tekenen. Dit is meestal omslachtig. Als echter slechts een klein stukje van de projectie vereist is, is de methode goed bruikbaar.

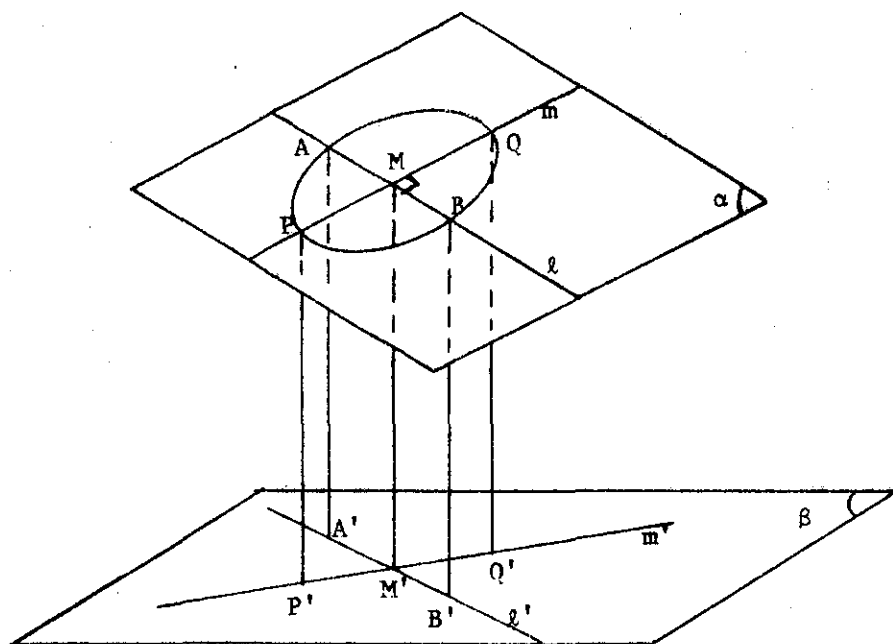
In Figuur 112 is een voorbeeld behandeld in scheve parallelprojectie. In het vlak  $\alpha$  ligt een cirkel met middelpunt  $M$  en gegeven straal. We willen enige punten van de projectie tekenen. Eerst is het vlak om  $\alpha_2$  in  $\tau$  gewenteld. Tussen de projectie en de neergeslagen stand bestaat de scheve affiniteit met  $\alpha_2$  als as. De affiniteit is vastgelegd door het paar  $A, A_n$ . Het gegeven punt  $M$  (op lijn  $\ell$ ) is ook gewenteld in  $\tau$ . Daarna is de cirkel getekend. De punten  $Q_n, R_n$  en  $S_n$  zijn daarna met behulp van de affiniteit in projectie gebracht. Daartoe is  $Q_n M_n$  gesneden met de affiniteitsas, terwijl  $Q_n Q // A_n A$  is.  $R_n S_n$  is een middellijn  $// \alpha_2$ , zodat  $RS$  door  $M$  gaat en eveneens  $// \alpha_2$  is.



Figuur 112



Gelukkig is ook een systematische behandeling mogelijk. In  $\alpha$  (zie Figuur 113) ligt een cirkel met middelpunt  $M$  en twee onderling loodrechte middellijnen  $\ell$  en  $m$ . De cirkel moet parallel geprojecteerd worden op vlak  $\beta$ . We hebben (zie § 6.2) gezien dat  $\ell$  en  $m$  een paar toegevoegde poollijnen vormen.

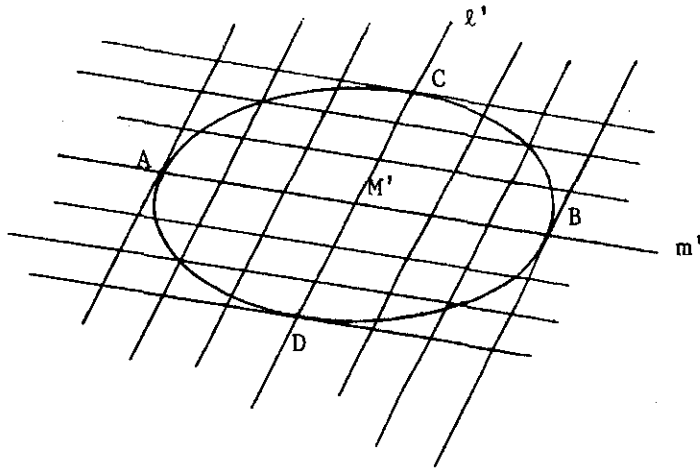


Figuur 113

Wegens het behoud van poolverwantschap zijn  $\ell'$  en  $m'$  ook toegevoegde poollijnen, maar er is meer.  $M$  is midden van  $AB$  (op  $\ell$ ) en midden van  $PQ$  (op  $m$ ). Daarom is ook  $M'$  midden van  $A'B'$  en van  $P'Q'$ .

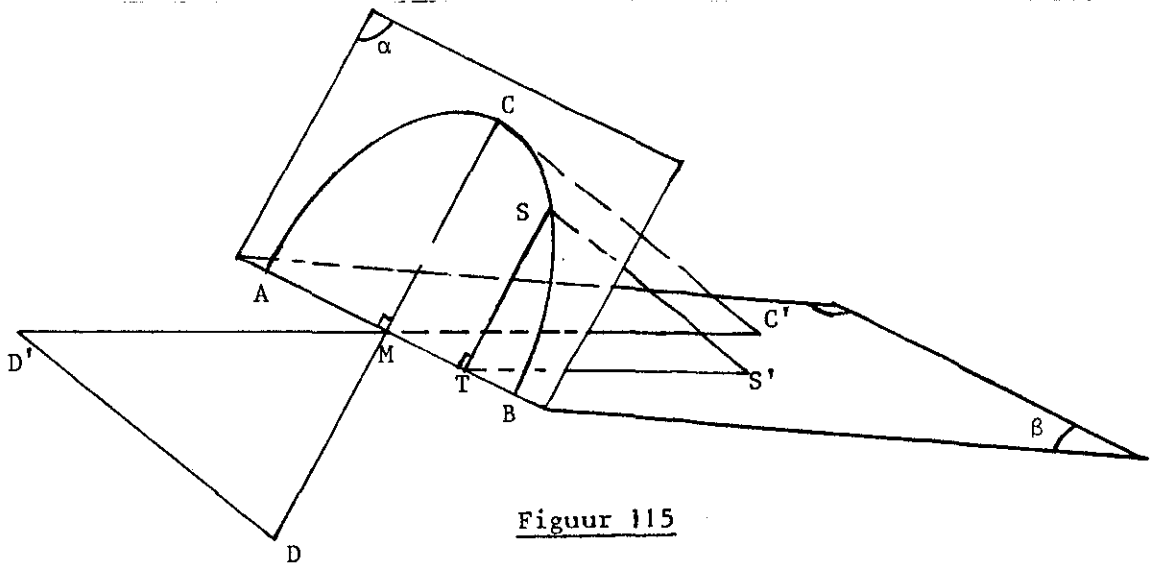
We noemen de lijnen  $\ell'$  en  $m'$  een paar toegevoegde middellijnen (Figuur 114). Wegens het feit dat ze toegevoegde poollijnen zijn geldt dat elke koorde in de ellips die  $// m'$  ( $\ell'$ ) is, door  $\ell'$  ( $m'$ ) doormidden wordt gedeeld. De raaklijnen  $// \ell'$  ( $m'$ ) hebben hun raakpunten op  $m'$  ( $\ell'$ ). Als  $\ell' \perp m'$  is, dan noemen we ze de assen van de ellips. In de constructie van elke ellips

gaan we van zo'n stel toegevoegde middellijnen gebruik maken.



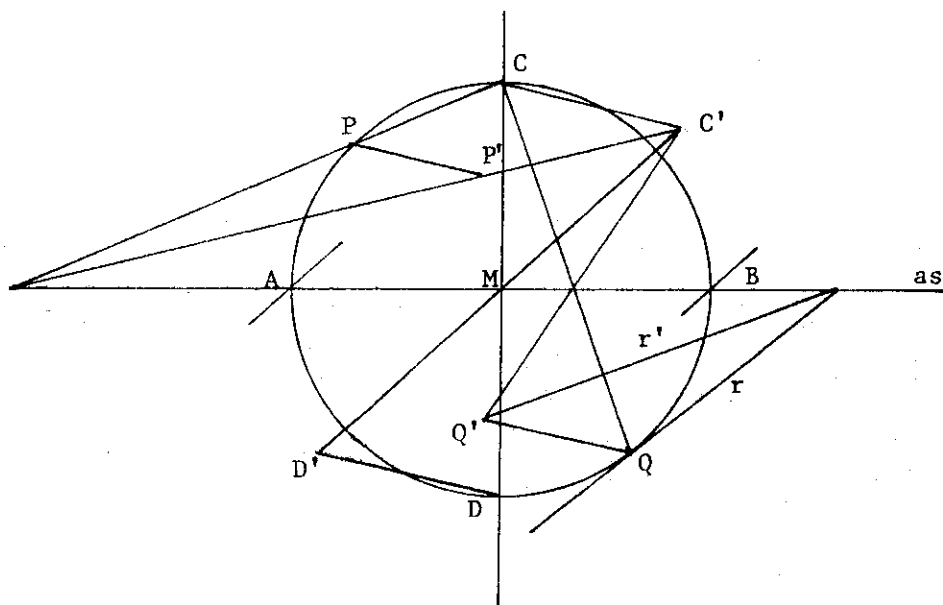
Figuur 114

We nemen nl. in het vlak  $\alpha$  een stel onderling loodrechte middellijnen  $\ell$  en  $m$  zó dat  $\ell //$  snijlijn van  $\alpha$  en  $\beta$  is;  $\ell$  is dus  $// \beta$ . Nu is  $\ell'$  één van de middellijnen van de projectie. Het gevolg is dat (zie Figuur 113)  $AB // A'B'$  en  $AB = A'B'$  is. We verschuiven het vlak  $\alpha$  evenwijdig tot  $AB$  samenvalt met  $A'B'$ . (Zie Figuur 115.) Daarna wordt  $\alpha$  om  $AB$  in  $\beta$  gewenteld.



Figuur 115

Tussen de gewentelde figuur en de geprojecteerde bestaat weer een affiniteit;  $AB$  is de affiniteitsas en het paar  $C, C'$  legt de affiniteit vast. In Figuur 116a is de constructie van enige punten van de ellips uitgevoerd. Bij punt  $P$  (op de cirkel) is  $P'$  geconstrueerd;  $CP$  en  $C'P'$  snijden elkaar op de affiniteitsas en  $PP' // CC'$ . Bij punt  $Q$  is de raaklijn  $r$  aan de cirkel getekend. Beide zijn affien afgebeeld. De lijn  $r'$  is nl. raaklijn in  $Q'$  aan de ellips (hetgeen we niet aantonen omdat dit gemakkelijk is in te zien). De raaklijnen in  $A$  en  $B$  aan de ellips zijn  $// C'D'$ , die in  $C'$  en  $D'$  zijn  $//$  de affiniteitsas.

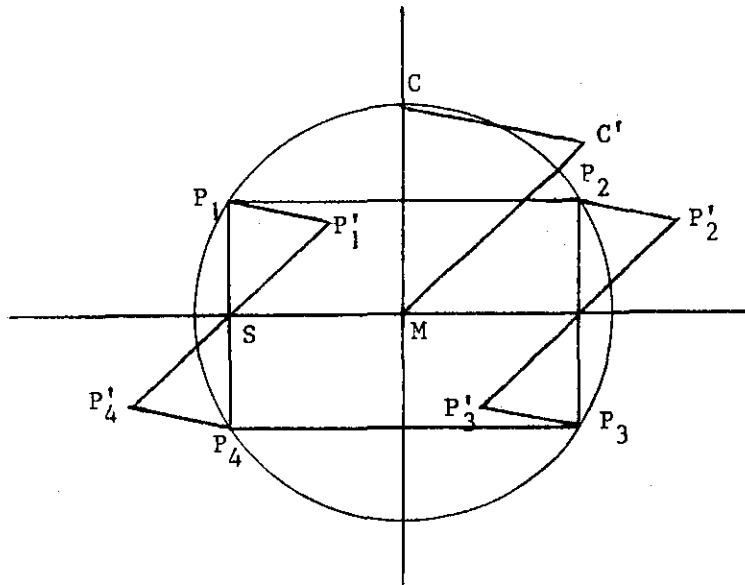


Figuur 116a

Als de projectierichting zó is dat  $C'$  op  $CM$  valt, is de affiniteit niet scheef maar orthogonaal.

Opmerking. In Figuur 116b is aangegeven hoe na de constructie van één ellipspunt de tekenaar er eigenlijk drie cadeau krijgt. Bij het punt  $P_1$

op de cirkel kunnen we nl. een rechthoek tekenen met één zijde //MC.



Figuur 116b

Dit betekent dat  $P_1P_3$  middellijn is van de cirkel (evenals  $P_2P_4$ ). Bovendien is  $P_1S = P_4S$ . Het beeld van de rechthoek is een parallellogram zodat  $P'_1P'_3$  en  $P'_2P'_4$  door M middendoor gedeeld worden. Ook is S midden van  $P'_1P'_4$ . Uit  $P'_1$  zijn dus gemakkelijk drie andere punten te construeren.

Hebben we omgekeerd van een ellips een stel toegevoegde middellijnen (al of niet loodrecht op elkaar) dan kunnen we de ellips als parallelprojectie van een cirkel beschouwen. Eén der middellijnen (bijv. AB in Figuur 116a) wordt als affiniteitsas aangewezen. De lijn  $C'D'$  is dan affien met de middellijn  $CD \perp AB$ . We kunnen de ellips punt voor punt, eventueel met de raaklijnen, construeren.

Opmerkingen.

1. In het V.W.O. is de ellips behandeld met behulp van de lange en de korte as. In Hoofdstuk 9 zullen we de assen construeren uit een paar toegevoegde middellijnen.
2. Als het gegeven stel toegevoegde middellijnen van de ellips onderling loodrecht is, dan zijn ze tevens symmetrie-assen van de ellips. De constructie van de punten verloopt analoog aan het in Figuur 116 behandelde. Figuur 116a wordt echter eenvoudiger.

Tenslotte behandelen we nog de centrale projectie van een cirkel (zie Figuur 117). We bespreken echter uitsluitend het geval waarbij de projectie een ellips is.

In het vlak  $\alpha$  ligt een cirkel die vanuit het punt  $O$  (buiten  $\alpha$  gelegen) moet worden geprojecteerd op een gegeven vlak  $\beta$ . Omdat verhoudingen bij centrale projectie niet behouden blijven, kunnen we niet uitgaan van toegevoegde middellijnen (dus onderling loodrecht!) van de cirkel. Anderzijds willen we van de projectie in  $\beta$  graag een stel toegevoegde middellijnen hebben.

Breng door  $O$  het vlak  $\bar{\beta} // \beta$  aan. De punten op de snijlijn  $m$  van  $\alpha$  en  $\bar{\beta}$  hebben als projectie de oneigenlijke punten van  $\beta$ . Neem een punt  $P$  op  $m$  en bepaal de poollijn  $p$  van  $P$  t.o.v. de cirkel.  $Q$  is het snijpunt van  $p$  met  $m$ ; we construeren vervolgens de poollijn  $q$  van  $Q$ . We hebben nu een pooldriehoek  $MPQ$ . De projectie van deze driehoek is de driehoek  $M'P'Q'$ , zodat  $p'$  en  $q'$  een paar toegevoegde middellijnen van de ellips zijn.  $M'$  is het middelpunt van de ellips. Merk hierbij op dat  $M$  niet het middelpunt van de cirkel is.



## 7. Cilinder, kegel en bol

### 7.1. Inleiding

Laten we een rechte of kromme lijn  $k$  wentelen om een rechte lijn  $a$ , dan beschrijft  $k$  een gebogen oppervlak  $\Sigma$ , dat omwentelingsoppervlak heet. We denken ons  $k$  en  $a$  in één vlak. De lijn  $k$  heet beschrijvende en  $a$  de as van  $\Sigma$ . Is  $k \parallel a$ , dan heet  $\Sigma$  een (omwentelings)cilindervlak. (Figuur 118a.) Met cilinder zullen we bedoelen een lichaam, begrensd door een cilindervlak (de mantel genoemd), en een onder en bovenvlak die loodrecht op  $a$  staan. (Figuur 119.)

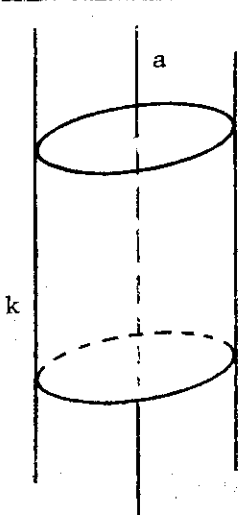


Fig. 118a

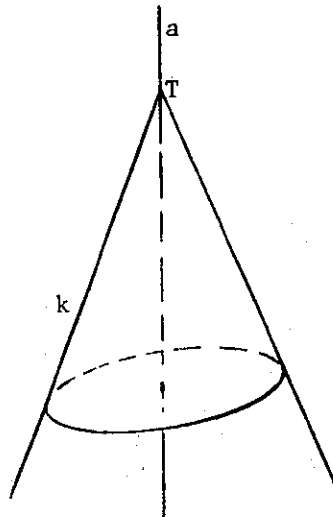


Fig. 118b

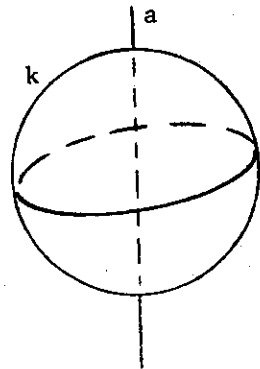
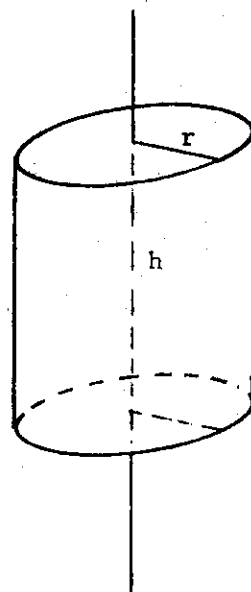


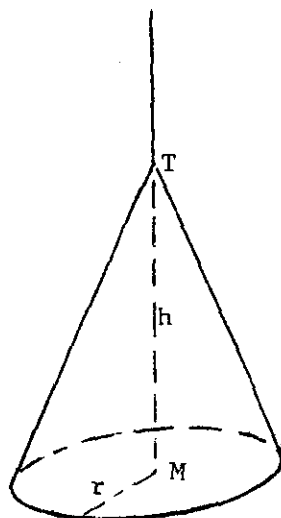
Fig. 118c

De afstand van de evenwijdige vlakken heet de hoogte  $h$  van de cilinder. Vaak wordt zo'n lichaam rechte cirkelcilinder genoemd.

Figuur 119



Als  $k$  de lijn  $a$  snijdt, dan heet  $\Sigma$  een (omwentelings)kegelvlak. (Figuur 118b.) Met kegel zullen we bedoelen een lichaam, begrensd door een kegelvlak (weer de mantel genoemd) en een vlak  $a$  (grondvlak genaamd). Het snijpunt van  $k$  en  $a$  heet de top van de kegel en de afstand van  $T$  tot het grondvlak heet de hoogte  $h$  van de kegel (Figuur 120). Het lichaam heet rechte cirkelkegel. Als  $k$  een halve cirkel is met zijn middelpunt op  $a$ , dan ontstaat een bol (Figuur 118c).



Figuur 120

Een vlak door de as heet meridiaanvlak van  $\Sigma$ . De doorsnede van zo'n vlak met  $\Sigma$  heet meridiaandoorsnede. Al deze doorsneden zijn congruent. Elk punt van  $k$  doorloopt bij wenteling een cirkel, gelegen in een vlak  $a$ ; het middelpunt ligt op  $a$ . Zo'n cirkel wordt parallelcirkel genoemd, het vlak parallelvlak.

Tenslotte zeggen we nog iets over het tekenen van deze lichamen in de diverse projecties. We tekenen een contour van het lichaam. In Figuur 119 is dit reeds uitgevoerd. Zo'n contour ontstaat aldus. Elk punt van het



lichaam wordt op  $\tau$  geprojecteerd. Een aantal van de projecterende lijnen vormen de rand. Bekijken we de cilinder in Figuur 119. De beide ellipsen zijn de projecties van grond- en bovensirkel, de beide rechte lijnen zijn de doorsnijdingen met  $\tau$  van raakvlakken aan de cilinder in projectierichting. Hetzelfde geldt voor de kegel. Bij de bol krijgen we de doorsnijding met  $\tau$  van de cilinder die de bol omhult. De punten waarin het lichaam wordt geraakt door projecterende lijnen (soms stralengenoemd) vormen de ware omtrek; de snijpunten van die stralen met  $\tau$  (of met  $\pi_1$ ) vormen de schijnbare omtrek van het lichaam. We kunnen aldus zeggen dat de schijnbare omtrek de projectie van de ware omtrek is.

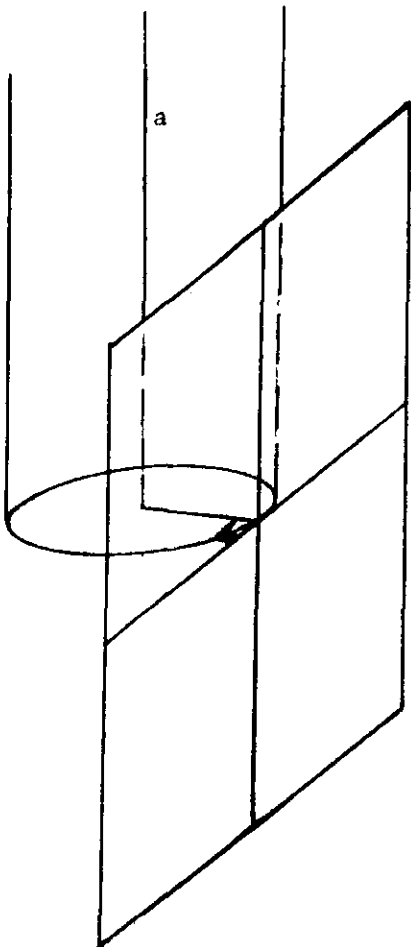
## 7.2. De cilinder

De lijnen op de mantel, dus  $// a$ , heten beschrijvenden van de cilinder. Een vlak  $// a$ , kan de cilinder volgens twee beschrijvenden snijden (wanneer?), het kan de cilinder raken en het kan buiten de cilinder liggen. Trekken we in een parallelvlak een raaklijn aan de cirkel in dat vlak en brengen we het vlak aan door die raaklijn en de beschrijvende door het raakpunt, dan ontstaat een raakvlak aan de cilinder. (Zie Figuur 121.) Een parallelvlak staat loodrecht op alle raakvlakken. We zullen enige constructies behandelen.

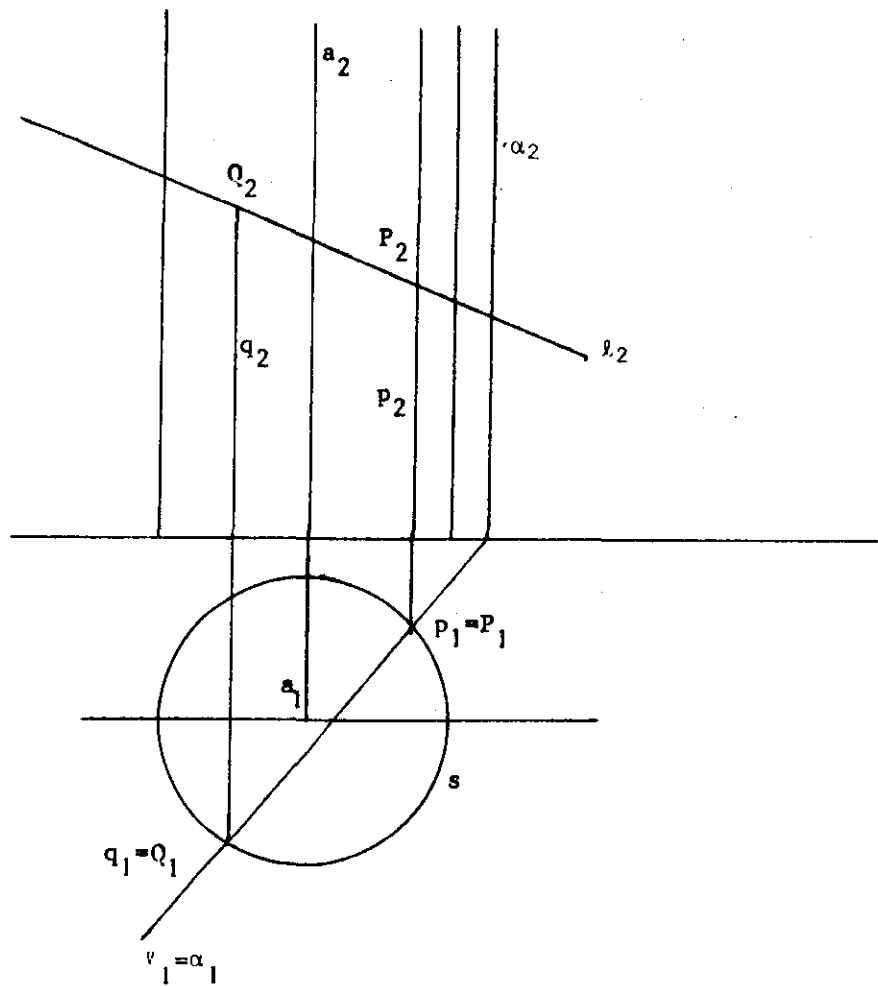
### 1. Snijpunten van $\ell$ met cilinder

Om de snijpunten van een rechte lijn  $\ell$  met een cilinder te construeren (zo ze er zijn), brengen we het vlak  $\alpha$  aan, door  $\ell$  en evenwijdig aan  $a$ . (Is  $\ell // a$ , dan is er geen snijpunt.) Vervolgens wordt  $\alpha$  gesneden met de cilinder. De beschrijvenden  $p$  en  $q$  in  $\alpha$  worden gesneden met  $\ell$ ; dit

alles uiteraard onder voorwaarde dat  $\alpha$  de cilinder snijdt. De snijpunten zijn P en Q. In Figuur 122 is de constructie in Amerikaanse projectie uitgevoerd voor een cilinder die op  $\pi_1$  staat.



Figuur 121



Figuur 122

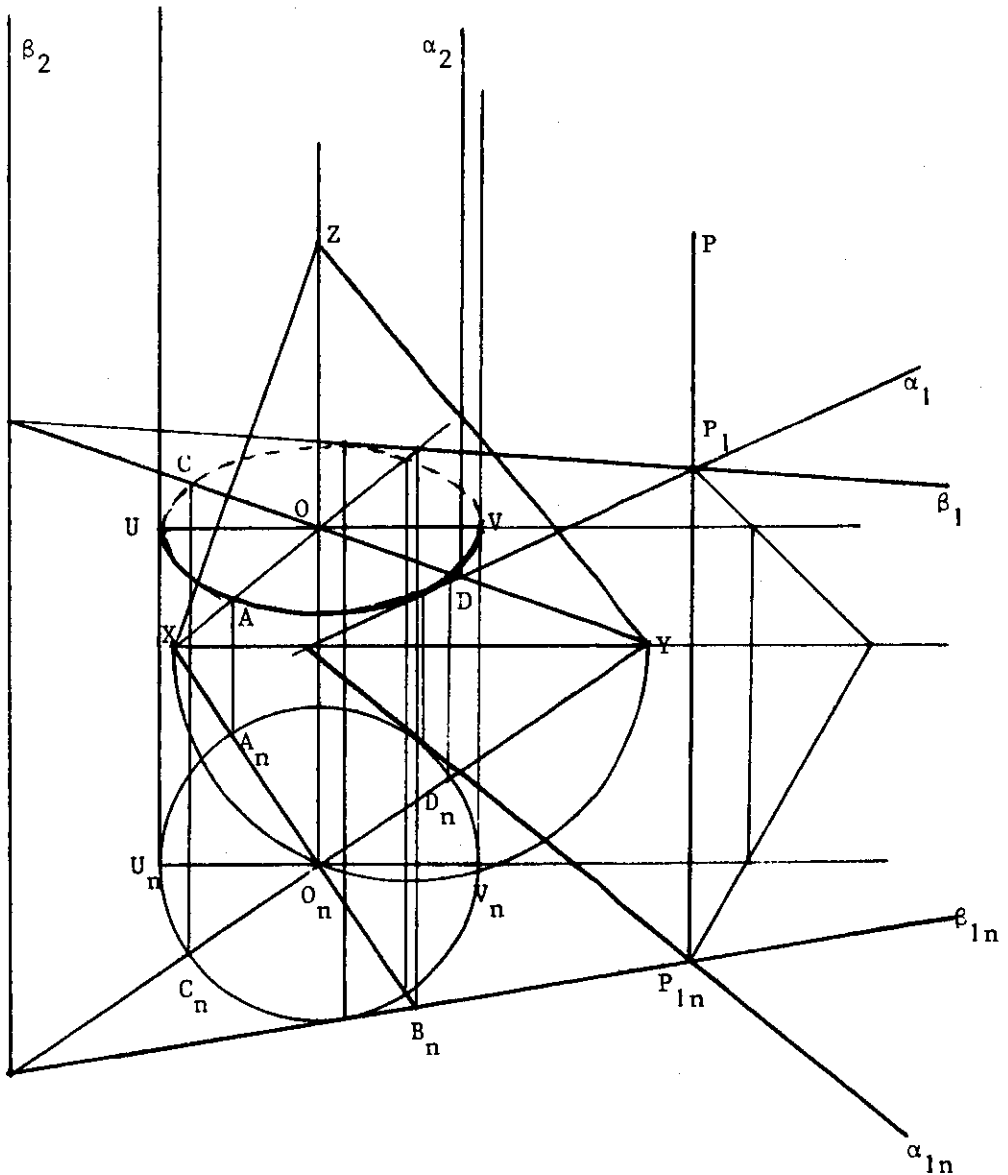
Over de cilinder zelf moeten ook nog enige opmerkingen gemaakt worden. De grondcirkel (in  $\pi_1$ ) is tevens de eerste projectie van de cilinder. De schijnbare omtrek in  $\tau$  wordt gevormd door de tweede doorgangen van de raakvlakken  $\perp \tau$ , dus  $\perp \pi_2$ . De lijnen volgens welke deze raakvlakken de cilinder raken vormen de ware omtrek.

## 2. Raakvlakken - door punt P - aan de cilinder

Een tweede constructie is het aanbrenge van de beide raakvlakken door een gegeven punt P (buiten de cilinder). Deze constructie is in Figuur 123 uitgevoerd in axonometrie. Het punt P is bepaald door P en  $P_1$ . De cilinder staat met de grondcirkel op  $\pi_1$ , terwijl het middelpunt van de cirkel in O ligt. In neergeslagen stand is de cirkel getekend. De projectie van de cirkel is een ellips. Van deze ellips is een stel toegevoegde middellijnen getekend met behulp van een stel onderling loodrechte middellijnen van de neergeslagen cirkel. (We nemen  $O_n X$  en  $O_n Y$  zodat  $OX$  en  $OY$  halve toegevoegde middellijnen van de ellips zijn.) Tot de schijnbare omtrek van de cilinder behoren (behalve een deel van de ellips) de projecties van twee beschrijvende, nl. de meest linkse en de meest rechtse. Ze zijn // Z-as en raken de ellips (waarom?). Om ze te construeren tekenen we in neergeslagen stand de raakpunten  $U_n$  en  $V_n$  op de grondcirkel;  $U_n V_n$  is // XY en gaat door  $O_n$ . (Waarom?) Daarna worden met behulp van affiniteit (XY is as, O en  $O_n$  zijn toegevoegde punten) U en V getekend. Om de raakvlakken door P aan de cilinder te construeren hebben we de raaklijnen door  $P_1$  aan de parallelkromme nodig. Deze ( $\alpha_1$  en  $\beta_1$ ) worden (bijv. met behulp van affiniteit) bepaald uit de raaklijnen die we (in de neerslag) door  $P_{1n}$  aan de grondcirkel kunnen construeren. We

noemen deze lijnen  $\alpha_{1n}$  en  $\beta_{1n}$ . Verder zijn  $\alpha_2$  en  $\beta_2 // Z$ -as.

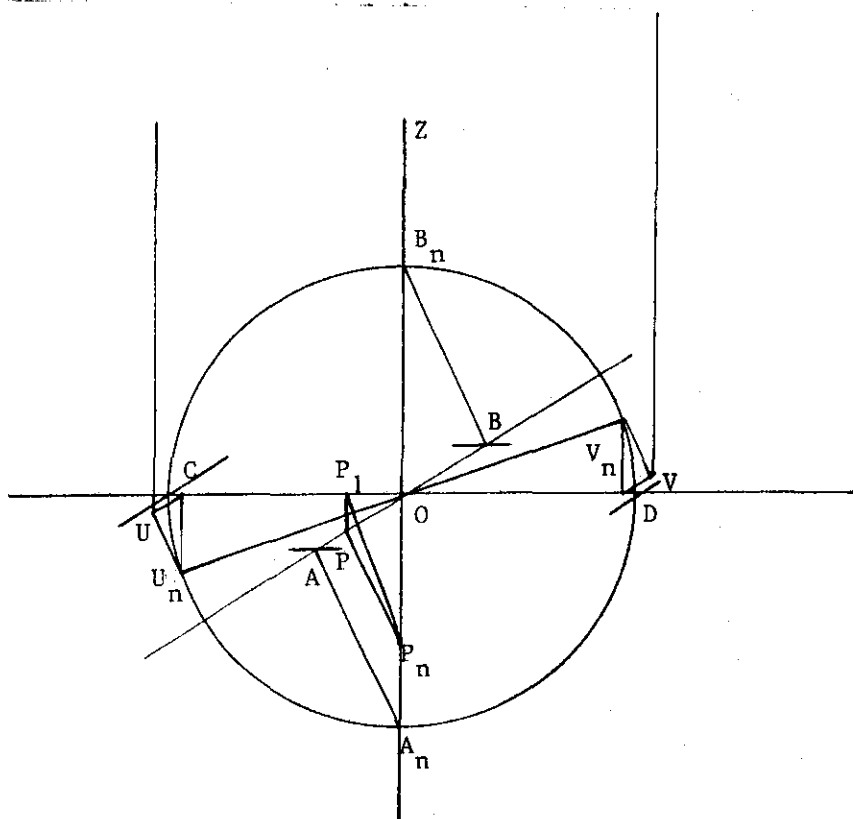
Opmerking. Door de gevraagde constructie hebben we, behalve de uiteinden A,B,C en D van de toegevoegde middellijnen, nog vier punten gevonden, nl. U en V en de raakpunten van  $\alpha$  en  $\beta$  met de parallelkromme. De ellips is m.b.v. deze acht punten en hun raaklijnen geschetst.



Figuur 123

3. Constructie cilinder in scheve projectie

Tenslotte construeren we (in Figuur 124) de scheve parallelprojectie van een cilinder. De parallelcirkel ligt in  $\pi_1$ , het middelpunt in  $O$ . Met behulp van scheve affiniteit ( $Y$ -as is  $as$ ,  $A$  en  $A_n$  zijn toegevoegde punten) bepalen we een paar toegevoegde middellijnen van de projectie van de cirkel. We gaan hiertoe uit van het paar onderling loodrechte middellijnen  $A_n B_n$  en  $CD (= C_n D_n)$ .



Figuur 124

We willen ook de schijnbare omtrek van de cilinder construeren. Beschouwen we eerst de ruimtelijke Figuur 125. De projectierichting is  $PP_s$ . Voor de schijnbare omtrek hebben we de raakvlakken  $//PP_s$  aan de cilinder nodig. Deze raakvlakken zijn ook  $//Z$ -as.



Opmerking. De ellips zelf is niet getekend, teneinde de figuur niet te vol te maken. We zien slechts zes punten met hun raaklijnen. Bedenk dat de punten U en V bij ondoorzichtige cilinder juist de grenzen van zichtbaar en onzichtbaar vormen.

### 7.3. De kegel

Uit de definitie van de kegel volgt dat elke beschrijvende dezelfde hoek maakt met de as  $a$ . Een vlak door de top  $T$  van de kegel kan de kegel snijden (volgens twee beschrijvenden), raken (volgens één beschrijvende) dan wel geen ander punt dan  $T$  met de kegel gemeen hebben.

Een raakvlak snijdt een parallelvlak volgens een raaklijn aan de cirkel in dat parallelvlak. Een vlak dat niet door  $T$  gaat, snijdt de kegel volgens een kegelsnede (zie Hoofdstuk 6). Een lijn die niet door  $T$  gaat, kan de kegel in hoogstens twee punten snijden.

Alvorens iets over de constructie te vertellen, zullen we iets over het tekenen van de kegel zeggen. Van belang is weer de schijnbare omtrek. We brengen raakvlakken aan door  $T$  en evenwijdig aan de projectierichting. De snijlijnen van deze vlakken met  $\tau$  gevende schijnbare omtrek.

#### Enige constructies aan de kegel

##### 1. Snijpunten van lijn $\ell$ met de kegel

De constructie is uitgevoerd in Amerikaanse projectie. (Figuur 126.) De kegel heeft een parallelcirkel in  $\pi_1$ . De schijnbare omtrek in  $\pi_2$  is aangegeven, nl. als tweede doorgangen van de raakvlakken door  $T$  en  $\perp \pi_2$  (eerste doorgangen  $\perp Y$ -as). De gevraagde snijpunten vinden we aldus. We construeren het vlak  $\alpha$  door  $T$  en  $\ell$  (met behulp van lijn  $m$  door  $T$



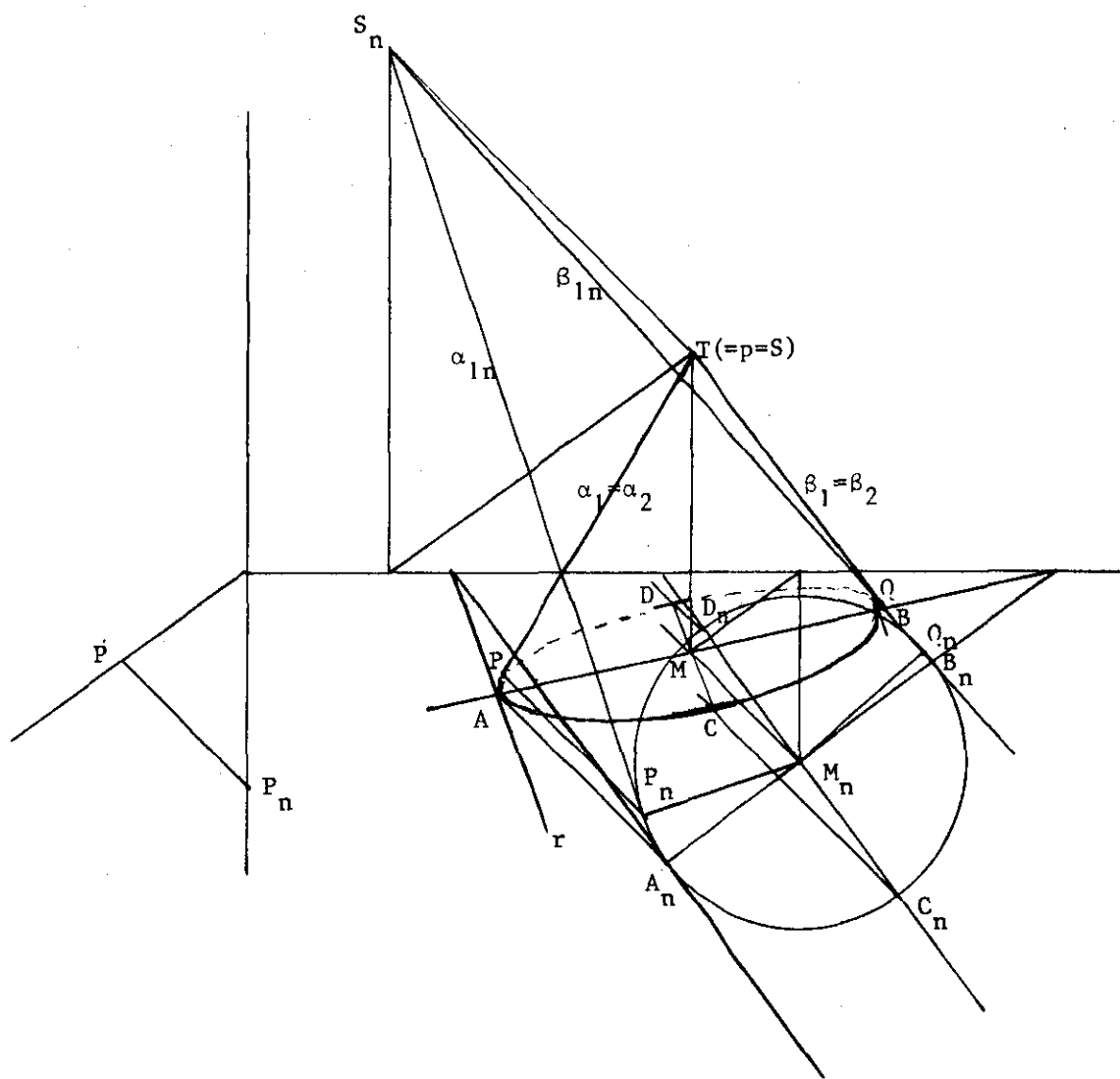


2. De constructie van een kegel in scheve projectie

In Figuur 127 is de projectie van de kegel getekend die met een parallelcirkel op  $\pi_1$  staat. Van de projectie van de grondcirkel is het paar toegevoegde middellijnen AB en CD gegeven. Deze ontstaan uit een paar onderling loodrechte middellijnen van de neergeslagen grondcirkel. Om de schijnbare omtrek te voltooien hebben we de raakvlakken ( $\alpha$  en  $\beta$ ) door de top T van de kegel en evenwijdig aan de projectierichting nodig (zie §7.1). De snijlijnen van  $\alpha$  en  $\beta$  met  $\tau$  geven de gezochte elementen van de schijnbare omtrek. De genoemde raakvlakken gaan dus door de projecterende straal p van T. Als p het grondvlak  $\pi_1$  in S snijdt, dan is  $\alpha$  bepaald door p en één der raaklijnen door S aan de grondcirkel,  $\beta$  door p en de andere raaklijn.

Hiermee is de constructie aangegeven: We bepalen het snijpunt S van p met  $\pi_1$ . Dit punt vinden we door te bedenken dat de projectie van p samenvalt met de projectie T van de top; in de neerslag van  $\pi_1$  (vlak van de cirkel) is  $S_n$  nu te vinden met behulp van de projectiedriehoek. De in  $\tau$  neergeslagen eerste doorgangen  $\alpha_{1n}$  en  $\beta_{1n}$  der raakvlakken zijn de raaklijnen  $S_n P_n$  en  $S_n Q_n$  aan de (neergeslagen) grondcirkel. De aan de raakpunten  $P_n$  en  $Q_n$  toegevoegde punten zijn de punten P en Q, waarin de schijnbare omtrek van de mantel raakt aan de grondcirkelprojectie. Van de  $\tau$ -doorgangen van  $\alpha$  en  $\beta$  zijn nu twee punten bekend nl. het snijpunt van  $\alpha_1$ , resp.  $\beta_1$  met de Y-as, en T. Ze zijn dus bekend.

Merk op dat SP toegevoegd is aan  $S_n P_n$ .

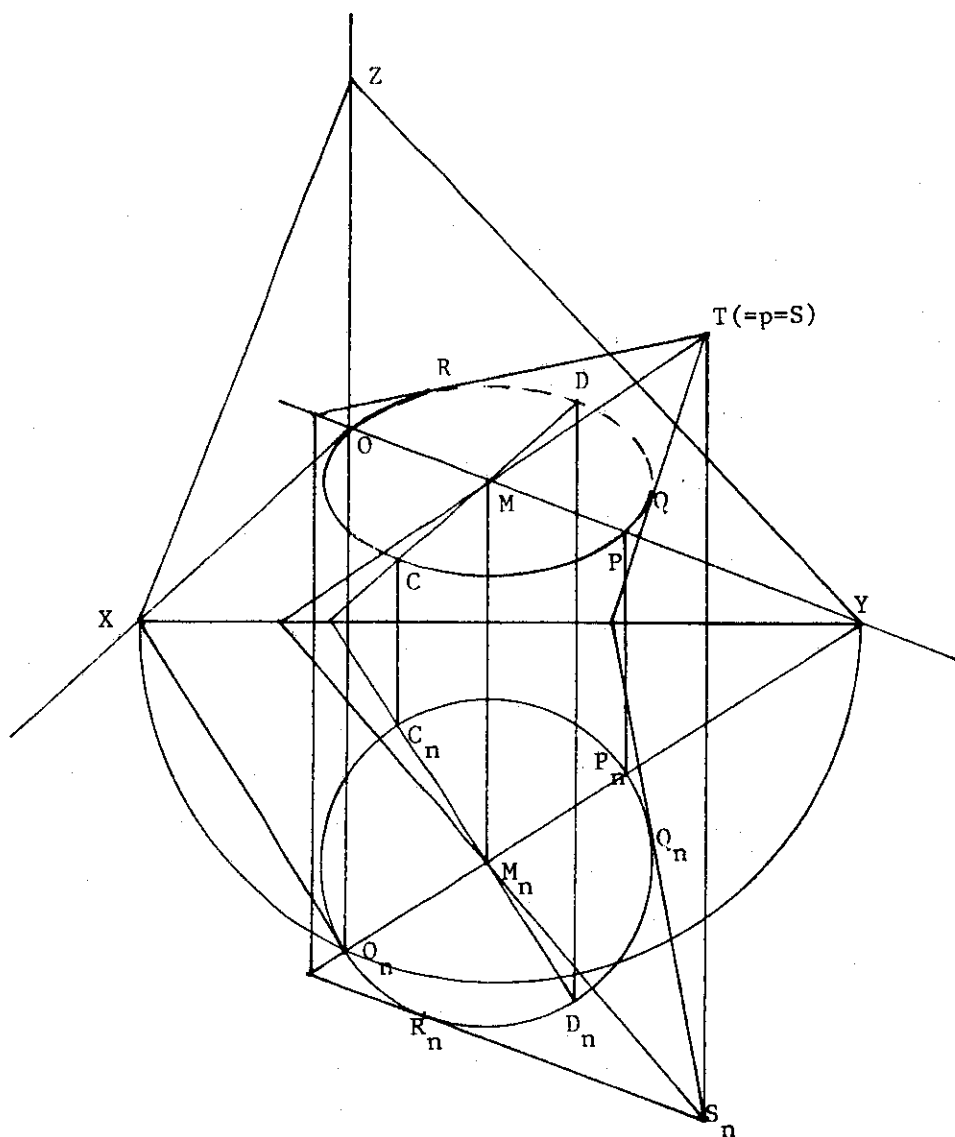


Figuur 127

Na de behandeling van de schijnbare omtrek blijkt de uitvoering op het volgende neer te komen: Construeer het aan  $S$  ( $=T$ ) toegevoegde punt  $S_n$ ; construeer daarna de raaklijnen door  $S_n$  aan de neergeslagen grondcirkel; bepaal met affiniteit de beelden van deze lijnen (met hun raakpunten).

3. Constructie van een kegel in axonometrie (zie Figuur 128)

De kegel is bepaald door de grondcirkel in  $\pi_1$  en de top T. De cirkel is in neergeslagen stand getekend (door  $O_n$ ). Met behulp van orthogonale affiniteit (vastgelegd door de as XY en het paar  $O, O_n$ ) is een paar toegevoegde lijnen getekend, nl. OP en CD. De schijnbare omtrek van de kegel wordt voltooid door de raaklijnen door  $S (=T)$  aan de grondcirkelprojectie. Deze worden bepaald door de aan hen toegevoegde raaklijnen in de neerslagfiguur. Het punt  $S_n$  wordt bepaald m.b.v. de overweging dat  $S_n$  de neerslag is van het eerste doorgangspunt S van de projecterende straal p door de top T.



Figuur 128

#### 7.4. De bol

Als een vlak een bol snijdt, dan is de snijkromme een cirkel (bewijs dit zelf). Gaat dat vlak door het middelpunt dan heet de snijkromme grote cirkel.

Het vlak kan ook de bol raken (de verbindingslijn middelpunt-raakpunt is nu loodrecht op dat vlak). Tenslotte kan een vlak geheel buiten de bol liggen.

Een lijn kan een bol in hoogstens twee punten snijden. Lig een punt  $P$  buiten de bol, dan kunnen we door  $P$  raaklijnen aan de bol aanbrengen. Bewijs zelf dat deze raaklijnen een kegel vormen met  $P$  als top. De raakpunten liggen in een vlak en vormen dus een cirkel. Alle raaklijnen aan een bol, evenwijdig aan een gegeven lijn vormen een cilinder. De raakpunten liggen in een vlak en vormen een grote cirkel.

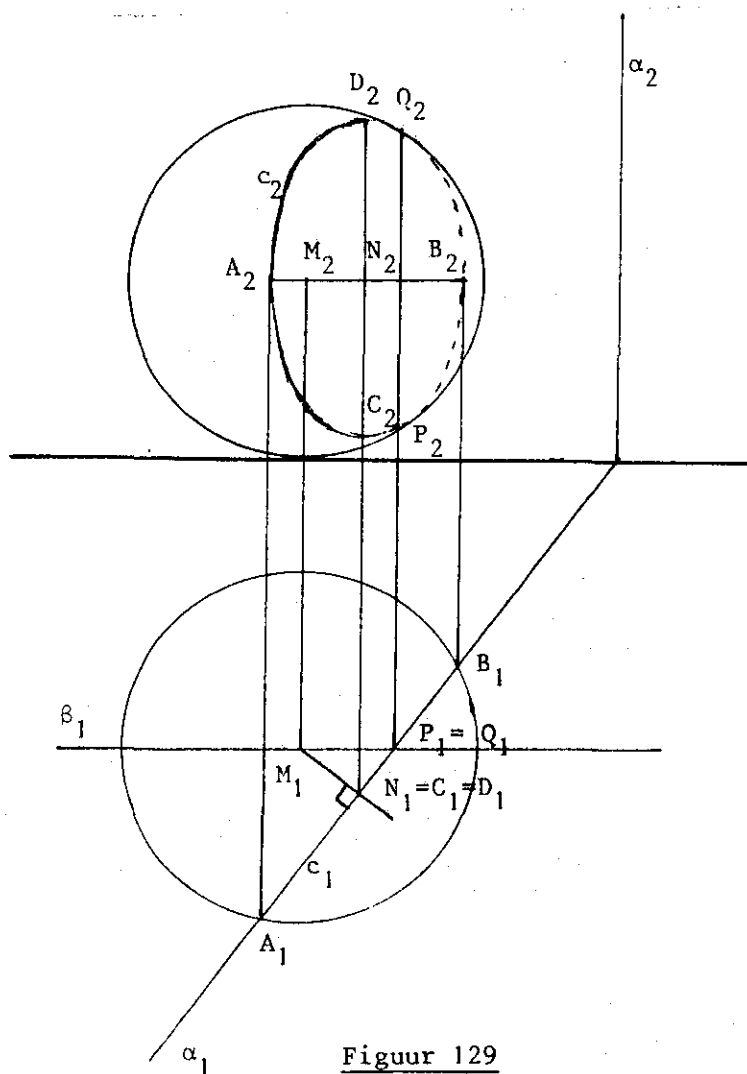
Bij projectie van een bol is de schijnbare omtrek van belang. Bij evenwijdige projectie denken we ons een cilinder met as-richting evenwijdig aan de projectierichting. Bij orthogonale projectie is daarom de projectie een cirkel, met dezelfde straal als die van de bol. Bij scheve projectie snijdt de cilinder  $\tau$  volgens een ellips (zie § 6.3).

We zullen nu enige constructies behandelen.

##### 1. Doorsnijding van een bol met vlak $\alpha$ dat $\perp \pi_1$ is

De bol heeft middelpunt  $M$  en ligt op  $\pi_1$ . De uitvoering is in orthogonale projectie (Figuur 129). De schijnbare omtrek is een cirkel (zowel in  $\pi_1$  als in  $\pi_2$ ). Het vlak  $\alpha$  snijdt de bol volgens een cirkel  $c$ . In de eerste projectie zien we  $A_1B_1$  van de middellijn  $AB$  van  $c$  en  $N_1$  van het middelpunt  $N$  van  $c$ . De middellijn  $AB$  is  $\parallel \pi_1$ , zodat  $A_2B_2 \parallel Y$ -as is.

$N_2$  is ook bekend. Verder geldt dat de middellijn  $CD \perp AB$ , dus  $\perp \pi_1$  is;  $C_2D_2$  is daarom bekend, want  $C_2D_2 \perp Y$ -as en de lengte van  $C_2D_2$  is de diameter van  $c$ . Van  $c$  is dus  $c_2$  bepaald door een paar onderling loodrechte toegevoegde middellijnen (assen).



Figuur 129

Van belang zijn nog de punten die  $c_2$  met de schijnbare omtrek van de bol (op  $\pi_2$ ) gemeen heeft. Aangezien deze schijnbare omtrek de projectie is van de grote cirkel, gelegen in  $\beta // \pi_2$ , vinden we de bedoelde punten op de snijlijn van  $\alpha$  en  $\beta$ . In de figuur zijn ze aangegeven met P en Q. Ze vormen de grens van zichtbaar en onzichtbaar op  $c_2$ .

Opmerking. We hebben hier geen gebruik gemaakt van affiniteit van neerslag (in  $\pi_2$ ) en de tweede projectie van  $c$ .

2. Doorsnijding van een bol met een (willekeurig) vlak  $\alpha$ .

De te construeren projecties  $c_1$  en  $c_2$  van de doorsnijdingscirkel  $c$  (zie Figuur 130) zijn ellipsen. Zij zijn bepaald als we een paar assen of een ander paar toegevoegde middellijnen geconstrueerd hebben. Het middelpunt  $N$  van  $c$  vinden we als snijpunt van de lijn  $\ell$  door  $M$  en  $\perp \alpha$ . Om  $\ell$  met  $\alpha$  te snijden tekenen we het hulpvlak  $\beta$  door  $\ell$  en  $\perp \pi_1$ . In dit vlak kunnen we de straal van  $c$  vinden. Deze straal wordt nl. bepaald door de afstand van  $M$  tot  $N$ . We slaan daarom  $\beta$  (met  $M$ ,  $N$ , grote cirkel en snijlijn  $s$  met  $\alpha$ ) neer in  $\pi_1$ . De diameter van  $c$  is in de figuur aangegeven als  $A_n B_n$ . We kunnen nu door  $N_1$  het paar assen van  $c_1$  tekenen, nl.  $A_1 B_1$  en  $C_1 D_1$ , die  $\perp A_1 B_1$  is en in lengte gelijk aan de diameter van  $c$  (waarom?).

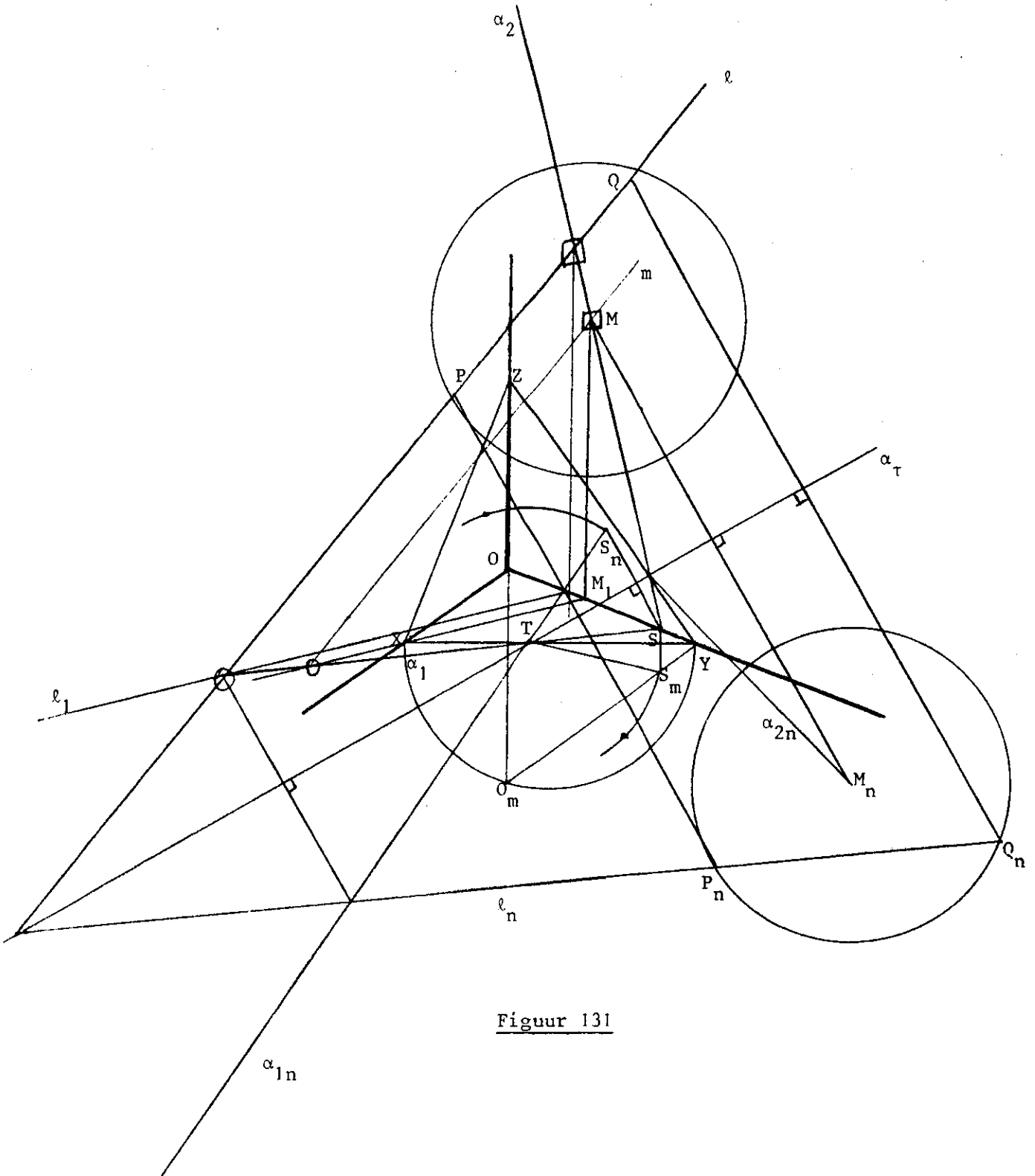
De raakpunten  $P$  en  $Q$  van  $c_1$  met de schijnbare omtrek (op  $\pi_1$ ) van de bol vinden we door het vlak  $\gamma$ , door  $M$  en  $// \pi_1$ , te snijden met  $\alpha$ .

Om de ellips  $c_2$  te bepalen kunnen we op analoge wijze door  $M$  en  $N$  het vlak  $\perp \pi_2$  aanbrengen; we vinden dan de assen van  $c_2$ . In onze figuur hebben we echter de tweede projecties van  $AB$  en  $CD$  getekend:  $C_2 D_2 // Y$ -as (waarom?) en  $A_2 B_2$  op de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$ . Hiermee is een paar toegevoegde middellijnen van  $c_2$  bekend, dus  $c_2$  zelf. De raakpunten  $R$  en  $S$  van  $c_2$  met de schijnbare omtrek (op  $\pi_2$ ) van de bol liggen op de snijlijn van  $\alpha$  en het vlak  $\delta$  door  $M$  en  $// \pi_2$ .



3. Snijpunten van rechte  $\ell$  met een bol

In Figuur 131 zijn de snijpunten P en Q van de lijn  $\ell$  met een bol M geconstrueerd in axonometrie.



Figuur 131



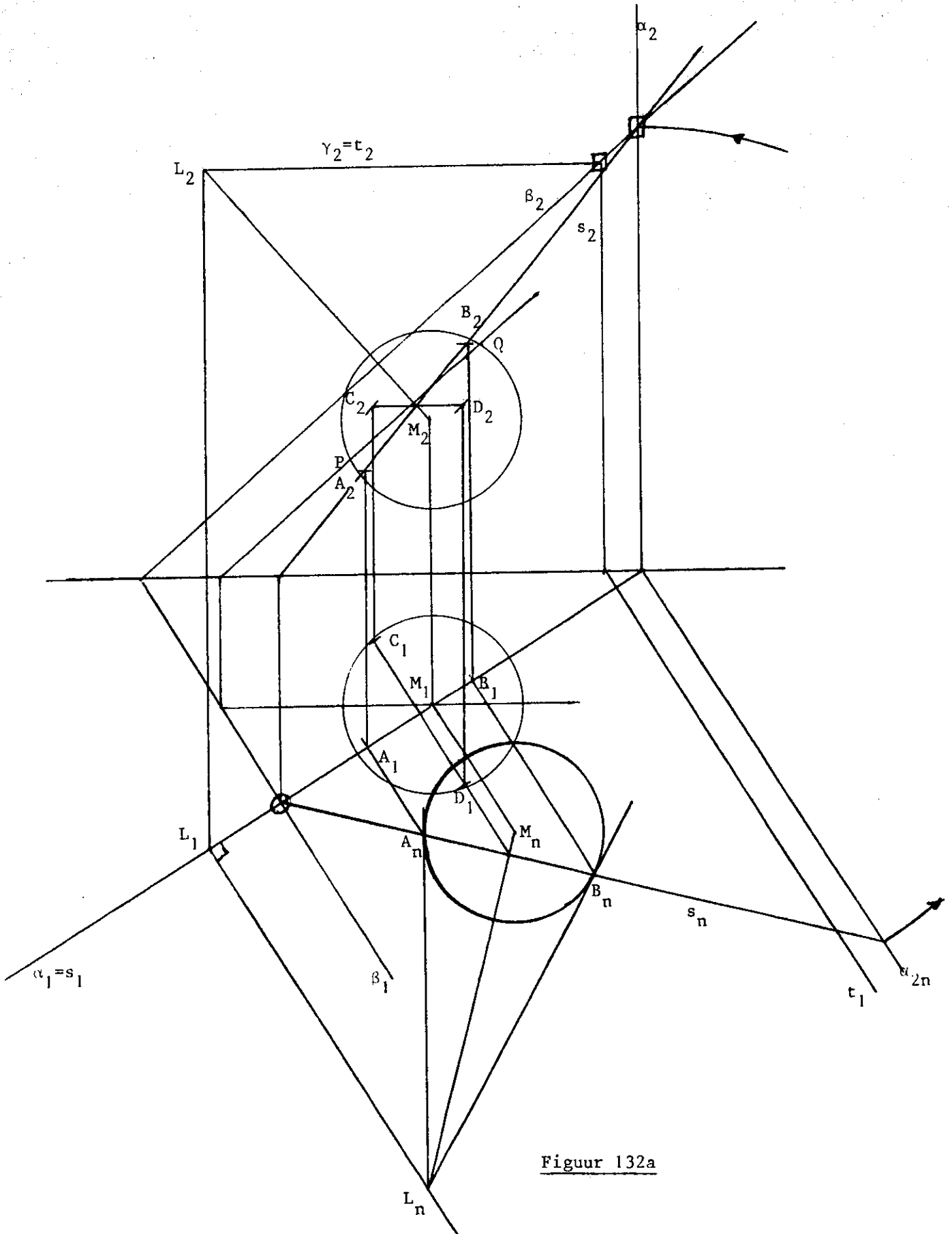
Het middelpunt  $M$  van de bol ligt in het  $YOZ$ -vlak. Het hulpvlak  $\alpha$  door  $M$  en  $\ell$  wordt geconstrueerd met behulp van de lijn  $m$  door  $M$  en  $// \ell$ . Dit vlak snijdt de bol volgens een grote cirkel. Het vlak  $\alpha$  is om  $\alpha_T$  gewenteld. De manier waarop dit gebeurt is reeds in Hoofdstuk 4 besproken. (Ga na!) De orthogonale affiniteit is vastgelegd door de as  $\alpha_T$  en het paar  $S, S_n$ . Vervolgens zijn  $\ell$  en  $M$  neergeslagen. De snijpunten van  $\ell_n$  met de grote cirkel om  $M$  zijn  $P_n$  en  $Q_n$ . De projecties  $P$  en  $Q$  zijn nu bekend.

Opmerking. Stel dat gevraagd wordt om de projectie van de snijcirkel van  $\alpha$  met de bol te construeren. Ook dan slaan we  $\alpha$  om  $\alpha_T$  neer. Vervolgens bepalen we in de neergeslagen grote cirkel een paar loodrechte middellijnen. De affiene beelden leveren dan een paar toegevoegde middellijnen van de ellips die projectie van de cirkel is.

#### 4. De schaduwen van een bol bij puntvormig licht

In Figuur 132a is in Amerikaanse projectie de bol  $M$  getekend en de puntvormige lichtbron  $L$ . Eerst bepalen we de eigenschaduw. Daartoe construeren we de kegel met top  $L$ , die de bol omhult. De raakcirkel van kegel en bol is de eigenschaduw-grens op de bol. Om het vlak  $\beta$  van deze raakcirkel te bepalen is het vlak  $\alpha \perp \pi_1$  door  $L$  en  $M$  aangebracht;  $\alpha$  is daarna om  $\alpha_1$  gewenteld. Door  $L_n$  zijn de raaklijnen  $L_n A_n$  en  $L_n B_n$  aan de grote cirkel (met middelpunt  $M_n$ ) getekend.  $A_n B_n$  is de middellijn van de raakcirkel, terwijl  $AB$  op de snijlijn  $s$  van de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  ligt. Het vlak  $\beta$  bevat  $s$  en is  $\perp LM$ . De loodrecht op  $AB$  staande middellijn  $CD$  is  $// \beta_1$  dus  $// \pi_1$ , zodat  $C_1 D_1 \perp A_1 B_1$  is, terwijl de lengte van  $C_1 D_1 =$  de lengte van  $A_n B_n$ . De middellijn  $A_2 B_2$  ligt op  $s_2$ ,  $C_2 D_2$  is  $// Y$ -as en gaat door het midden van  $A_2 B_2$ . (Waarom?) De beide projecties

van de eigenschaduwcirkel zijn hiermee gevonden.

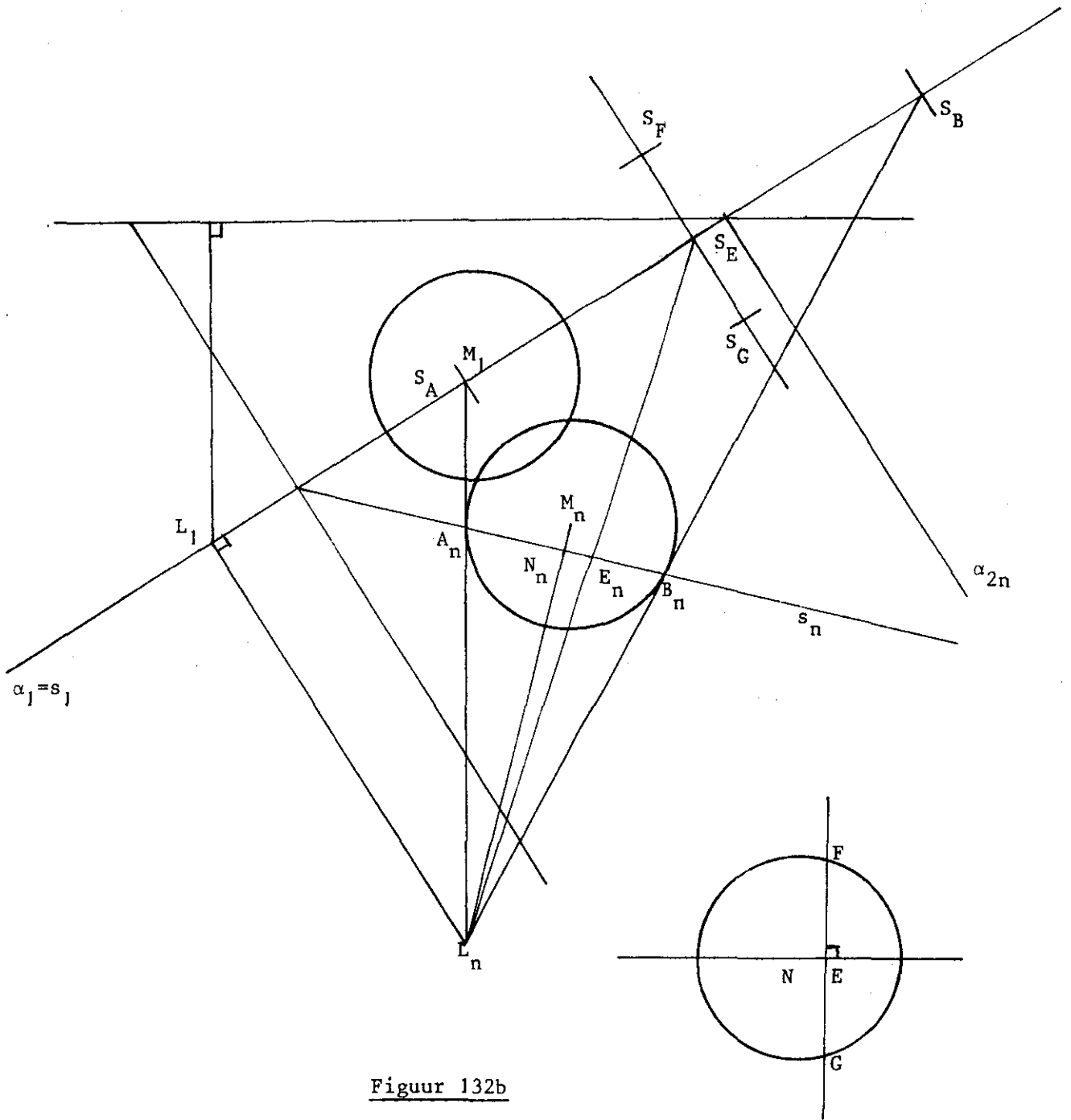


Figuur 132a

In tweede projectie zijn de raakpunten P en Q van de ellips en de schijnbare omtrek aangegeven. Ze liggen op de snijlijn van  $\beta$  en het vlak door M en  $//\pi_2$ . (In eerste projectie niet uitgevoerd.)

Om de slagschaduw op  $\pi_1$  te bepalen kan men punten van de eigenschaduwgrens met L verbinden en deze verbindingslijnen snijden met  $\pi_1$ . In het hier beschreven geval ligt L hoger dan het hoogste punt van de bol, zodat elke aan de bol rakende lichtstraal  $\pi_1$  snijdt. De slagschaduw is daarom een ellips. Om een paar toegevoegde middellijnen van deze ellips te construeren brengen we het vlak  $\gamma$  aan door L en  $//\pi_1$  en snijden dit met  $\beta$ ; het vlak  $\beta$  wordt met de snijlijn t en de eigenschaduwcirkel om  $\beta_1$  of  $\beta_2$  gewenteld, waarna de constructie wordt uitgevoerd, zoals beschreven in Hoofdstuk 6 (zie Figuur 117). Omdat we in Hoofdstuk 8 deze methode toch nog zullen ontmoeten, beschrijven we hier een andere, die zelfs tot de assen leidt. In Figuur 132b, waarvoor de gegevens uit de vorige zijn overgenomen, is de constructie uitgevoerd.

Om de lange as  $S_A S_B$  van de ellips te vinden snijden we  $L A_n$  en  $L B_n$  met  $\alpha_1$ . (Waarom is dit de lange as?) De korte as gaat door het midden  $S_E$  van  $S_A S_B$  en is  $\perp \alpha_1$ . Deze as is de schaduw van een koorde van de raakcirkel van kegel en bol,  $S_E$  is de slagschaduw van E (op AB). De koorde zelf gaat dus door E en is  $\perp \alpha$  (waarom?). De lengte van de koorde is geconstrueerd in een hulpfiguur. (Zie onderin Figuur 132b.) De raakcirkel met middelpunt N is daar getekend (straal =  $N A_n$ ). In de cirkel is  $NE = N E_n$ . Door E is de koorde  $\perp NE$  getekend; de lengte  $FG =$  de lengte van de korte as  $S_F S_G$ .



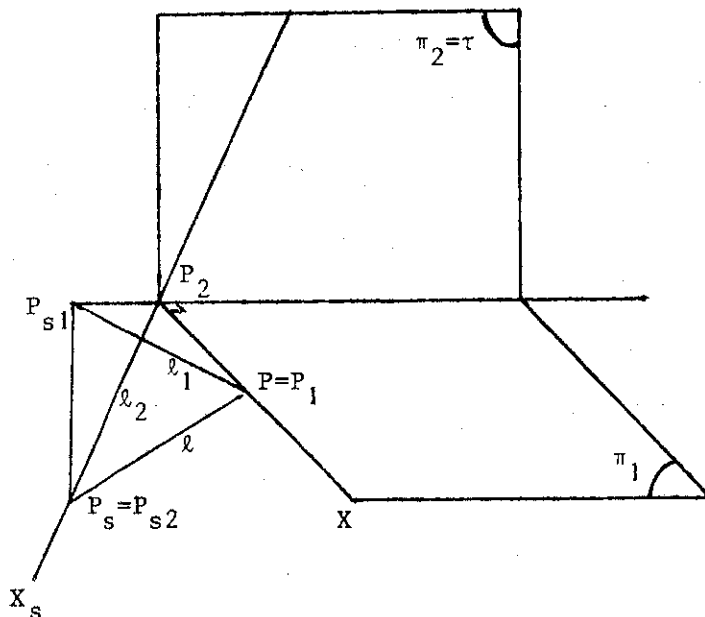
Figuur 132b

Opgave: Ga na dat het zoëven beschrevene een bijzonder geval is van de theorie bij Figuur 117.

5. Projectie van een bol in scheve projectie

De scheve projectie van een bol is een ellips. Immers, we brengen de cilinder aan die de bol omhult; de asrichting is evenwijdig aan de projectierichting zodat de cilinder  $\tau$  volgens een ellips snijdt.

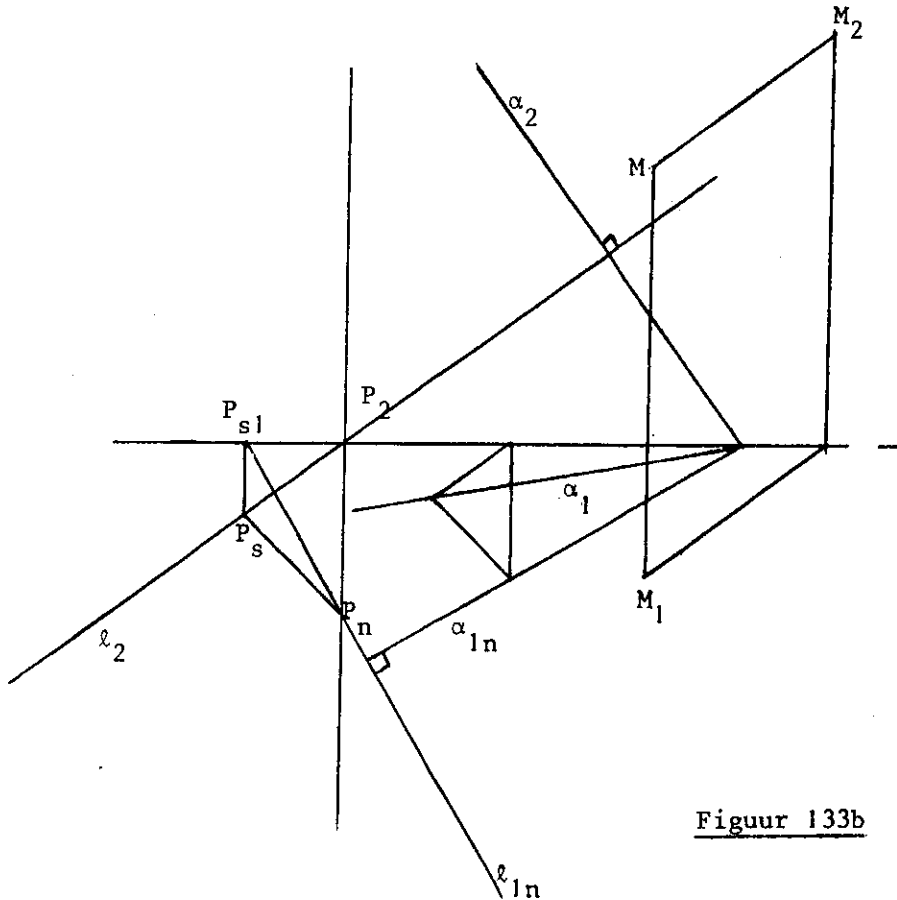
Deze ellips is de scheve projectie van de grote cirkel, volgens welke bol en cilinder elkaar raken. Om deze cirkel te kennen moeten we door  $M$  het vlak loodrecht op de projectierichting kennen. Om een vlak  $\alpha \perp$  projectierichting  $\ell$  te construeren stellen we aan de hand van (de reeds bekende) stereometrische Figuur 133a vast dat de doorgangen in de ruimte loodrecht moeten staan op de gelijknamige orthogonale projecties van  $\ell$ . We kunnen nu  $\alpha$  in onze constructietekening (Figuur 133b) aangeven.



Figuur 133a

In de neerslag van  $\pi_1$  in  $\tau$  is  $\ell_{1n} = P_{s1}P_n$  getekend,  $\alpha_{1n} \perp \ell_{1n}$ ;  $\ell_2 = P_2P_{s1}$  en  $\alpha_2 \perp \ell_2$ . Na het tekenen van  $\alpha_1$  is  $\alpha$  bekend.

Door het middelpunt M van de bol brengen we nu het vlak  $\bar{\alpha}$  aan  $\parallel \alpha$ ; dit vlak  $\bar{\alpha}$  wordt om  $\bar{\alpha}_2$  gewenteld in  $\tau$ . Tussen de projectie en de neerslag bestaat een scheve affiniteit. De straal r van de grote cirkel in de neerslag is dezelfde als de straal van de bol; in de neerslag wordt een paar onderling loodrechte middellijnen van de cirkel getekend en met behulp van de scheve affiniteit vinden we een paar toegevoegde middellijnen van de ellips. De constructie is niet uitgevoerd.



Figuur 133b

Opmerking. Uit het bovenstaande blijkt dat de scheve parallelprojectie zich niet goed leent voor het tekenen van de projectie van een bol.

## 8. Centrale projectie (perspectief)

### 8.1. Inleiding

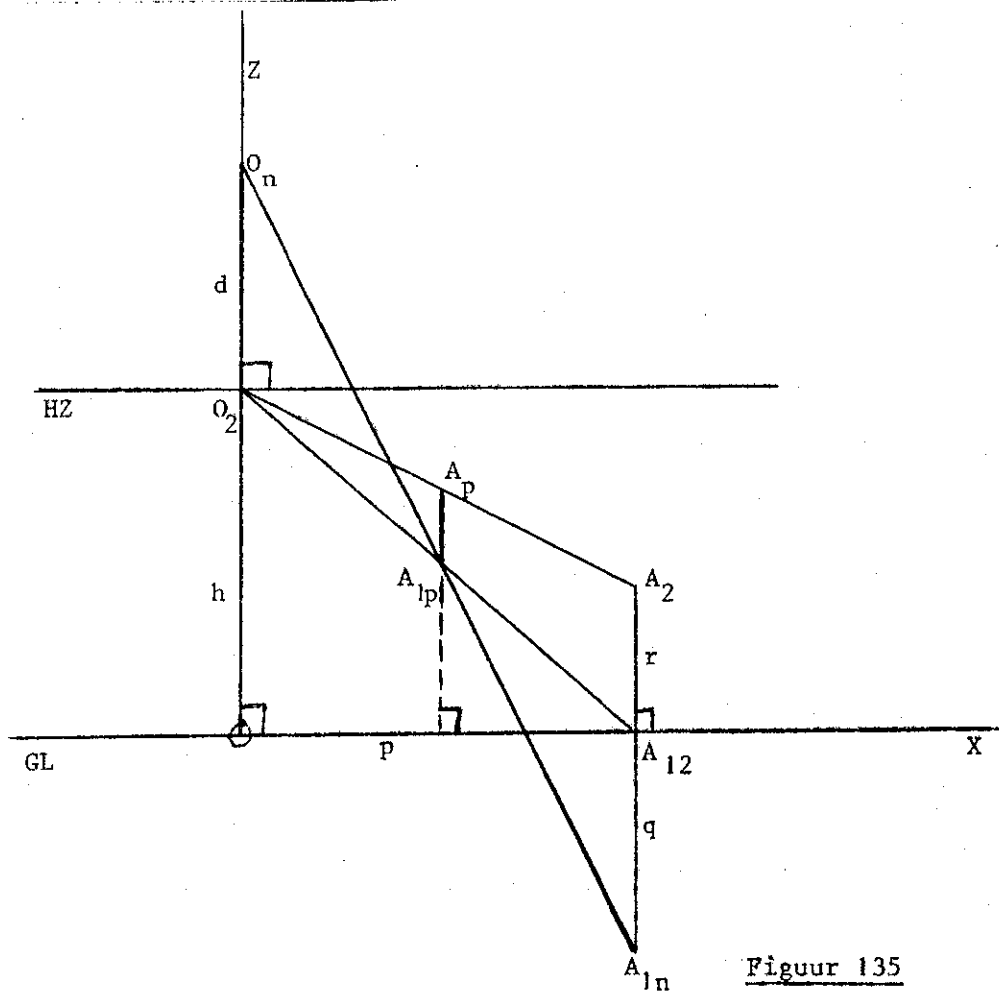
In Figuur 134 is in een ruimtelijke figuur het principe van het perspectief tekenen getekend. We gaan uit van het vlak  $\pi_1$ , en het vlak  $\tau$  dat  $\perp \pi_1$  is. Vanuit een punt  $O$  (afkorting van oogpunt) wordt geprojecteerd op  $\tau$ . Hierbij kiezen we  $O$  zó dat  $\tau$  zich tussen het voorwerp en  $O$  bevindt. De afstand van  $O$  tot  $\tau$ , dus de lengte van de loodlijn  $OO_2$  heet distantie (afgekort:  $d$ ). Het vlak door  $O$  en evenwijdig aan  $\pi_1$  heet het vlak van de horizon. De snijlijn van dit vlak en  $\tau$  heet horizon (afgekort:  $HZ$ ), de snijlijn van  $\tau$  en  $\pi_1$  heet grondlijn (afgekort:  $GL$ ). De afstand  $h$  van  $O$  tot  $\pi_1$  is belangrijk voor de indruk die de afbeelding geeft van het voorwerp. Als  $O$  dichtbij  $\pi_1$  ligt (zoals een mens een wolkenkrabber ziet) spreekt men van kikkerperspectief; als  $O$  zo ligt dat men als het ware horizontaal kan kijken, spreekt men van normaal perspectief; als  $O$  zo hoog ligt dat men gebouwen beneden zich ziet, spreekt men van vogel-perspectief.





8.2. De projectie van een punt

Zij  $A$  een punt (zie Figuur 134) gegeven door zijn coördinaten  $(p, q, r)$  t.o.v. een assenkruis (waarbij de  $O$  van oorsprong vervangen is door  $\odot!$ ).  $A_1$  en  $A_2$  zijn de projecties op resp.  $\pi_1$  en  $\pi_2 (= \tau)$ . De centrale projectie  $A_p$  van  $A$  (vaak kortweg projectie van  $A$  genoemd) is het snijpunt van  $OA$  met  $\tau$ . Om  $OA$  met  $\tau$  te snijden gebruiken we het vlak  $OO_2AA_2$  dat  $\tau$  is. We zien dat  $A$  zijn projectie  $A_p$  bepaalt; het omgekeerde is niet waar. We construeren nu ook de projectie  $A_{1p}$  van  $A_1$  met behulp van het vlak  $OO_2A_1A_2$ . Het is duidelijk dat  $A_pA_{1p} // AA_1 // Z$ -as is. Verder stellen we vast dat  $A$  door  $A_p$  en  $A_{1p}$  wel bepaald is.



Figuur 135

In de constructietekening kunnen we slechts in  $\tau$  werken. In  $\tau$  tekenen we HZ en GL op afstand h. We missen  $O$ , maar hebben de distantie  $d$  nodig. Het vlak van de horizon wordt nu om HZ gewenteld in  $\tau$ ; resultaat  $O_n$  met  $O_n O_2 \perp HZ$  en  $O_n O_2 = d$ . (In dit hoofdstuk zal  $O_n$  steeds boven HZ liggen.) Het vlak  $\pi_1$  wordt om GL in  $\tau$  gewenteld en wel in dezelfde draairichting als  $O$ . Met  $\pi_1$  wordt ook het punt  $A_1$  gewenteld; resultaat  $A_{1n}$ . In Figuur 135 zien we hoe de coördinaten  $(p, q, r)$  van  $A$  gebruikt zijn om  $A_{1n}$  en  $A_2$  te vinden. In Figuur 134 geldt:  $\Delta O O_2 A_{1p} \sim \Delta A_1 A_{12} A_{1p}$  (verhouding der zijden  $d:q$ ). Stel dat (na het wentelen)  $O_n A_{1n}$  en  $O_2 A_{12}$  elkaar in  $S$  snijden. We hebben dan  $\Delta O_n O_2 S \sim \Delta A_{1n} A_{12} S$ ; de verhouding der zijden is eveneens  $d:q$ . Dit betekent dat  $S$  samenvalt met  $A_{1p}$ .

We zijn nu toe aan de constructie van  $A_p$ .

$A_{1p}$  is snijpunt van  $O_2 A_{12}$  en  $O_n A_{1n}$ ;  $A_p$  ligt op  $O_2 A_2$  en de lijn door  $A_{1p} \perp GL$ .

Opmerking. De constructie van  $A_p$  in Figuur 135 is een belangrijke basisconstructie.

### 8.3. De projectie van een lijn

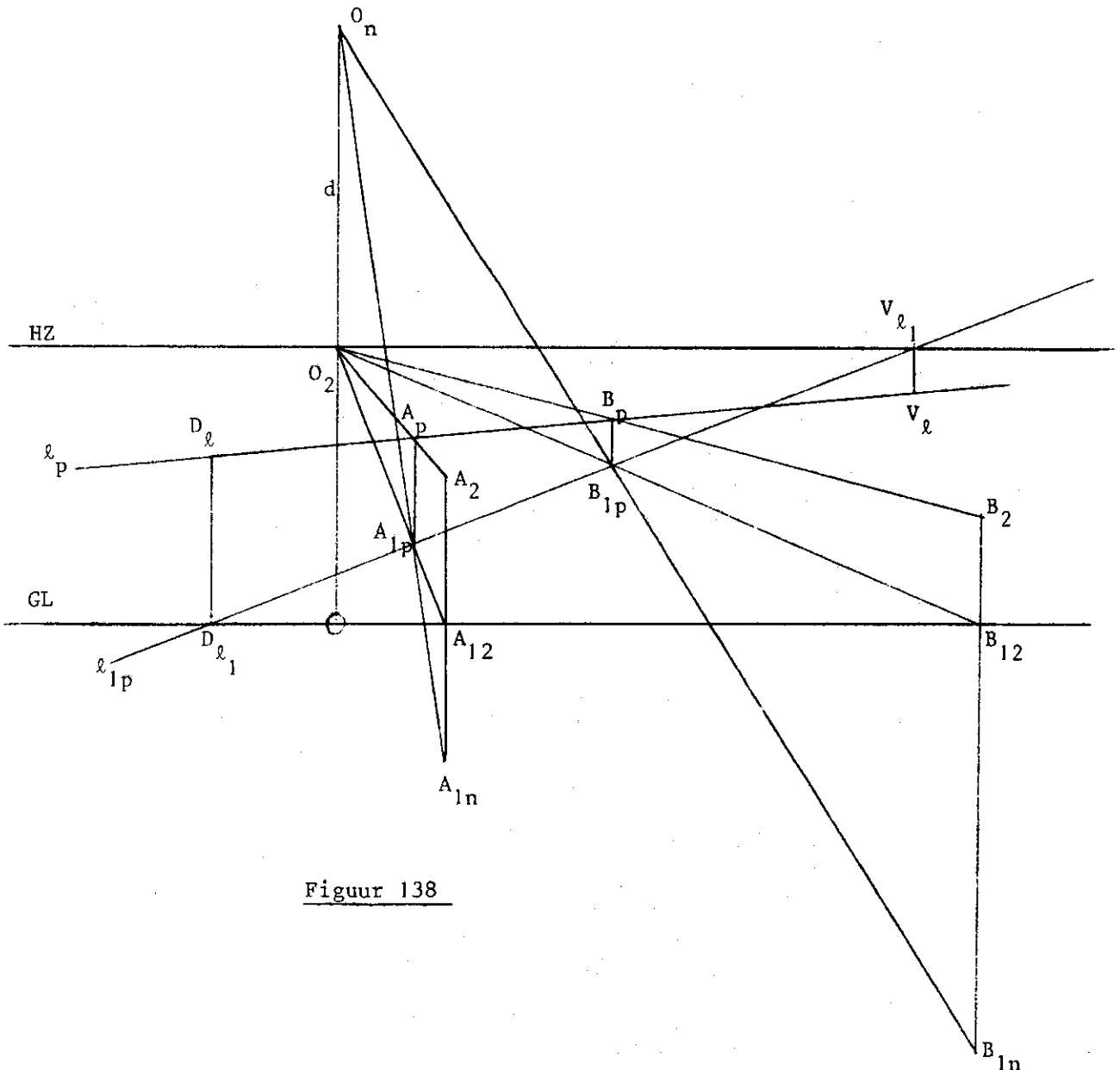
In de ruimtelijke Figuur 136 gaan we een lijn  $\ell$  (niet in  $\pi_1$  en  $\not\parallel \tau$ ) projecteren. Getekend is ook  $\ell_1$ . De projectie  $\ell_p$  van  $\ell$  gaat door het  $\tau$ -doorgangspunt van  $\ell$ , dat niet  $\square$ , maar  $D_\ell$  wordt genoemd. Om  $\ell_p$  te bepalen is een tweede punt nodig; hiervoor nemen we het oneigenlijke punt van  $\ell$ . De projectie van dit punt is het snijpunt van  $\tau$  met de lijn  $\bar{\ell}$  door  $O$  en  $\parallel \ell$ .





Opmerking. Het snijpunt van  $\ell_p$  en  $\ell_{1p}$  is de projectie van het snijpunt van  $\ell$  met  $\pi_1$ .

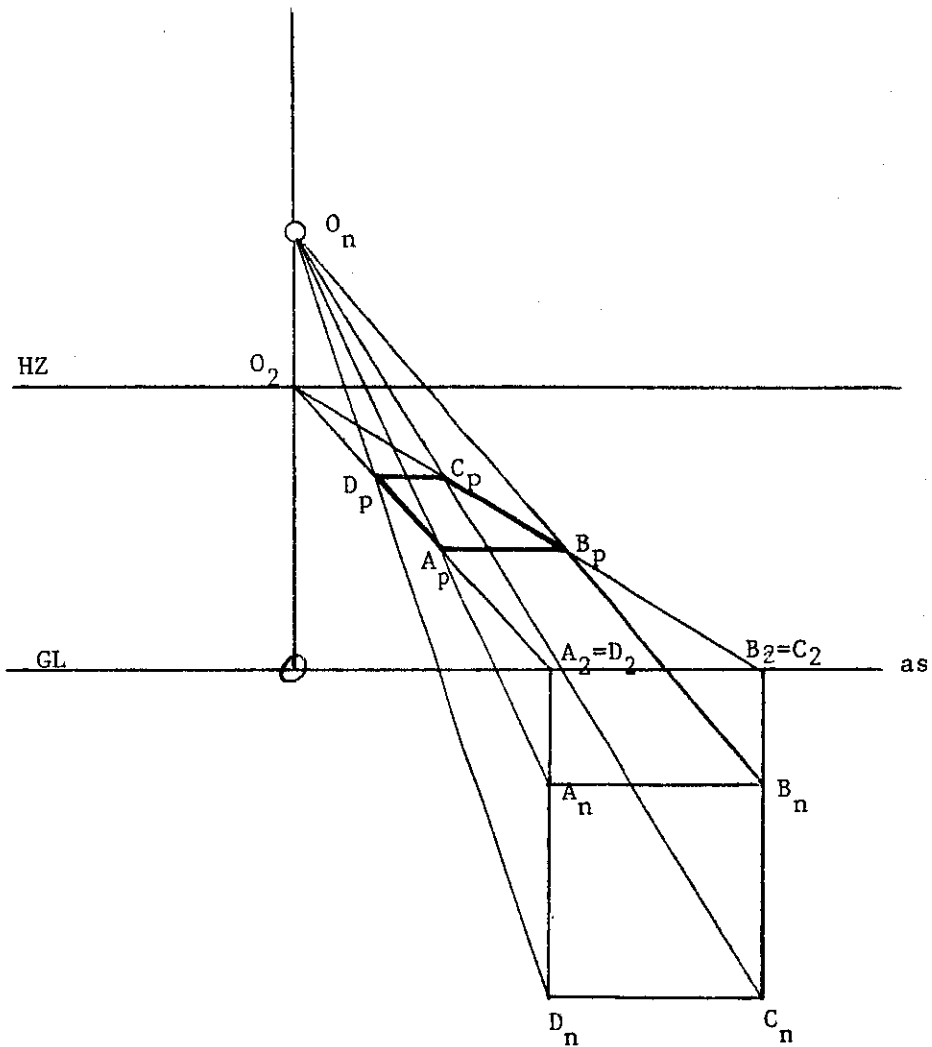
Voorbeeld 1. Gegeven zijn de punten A en B (door hun coördinaten). Teken de verbindingslijn  $\ell$  met daarop  $D_\ell$  en  $V_\ell$ . In Figuur 138 is  $\ell_p$  door  $A_p$  en  $B_p$  getekend. Om  $V_\ell$  en  $D_\ell$  te vinden tekenen we  $\ell_{1p}$  die  $A_{1p}$  met  $B_{1p}$  verbindt. Deze lijn snijdt de horizon in  $V_{\ell_1}$ ;  $V_{\ell_1}V_\ell$  is  $\perp$  horizon waarmee  $V_\ell$  bekend is (analoog  $D_\ell$ ). (Zie Figuur 138.)



Figuur 138

Voorbeeld 2. Constructie van de projectie van het vierkant ABCD dat in  $\pi_1$  ligt.

In Figuur 139a is  $\tau // AB$  gekozen. De projecties  $A_p, B_p, C_p$  en  $D_p$  worden op de bekende wijze bepaald. ( $O_n A_n$  snijden met  $O_2 A_2$  enz.) Het resultaat overziende bedenken we dat we gebruik kunnen maken van twee belangrijke eigenschappen.

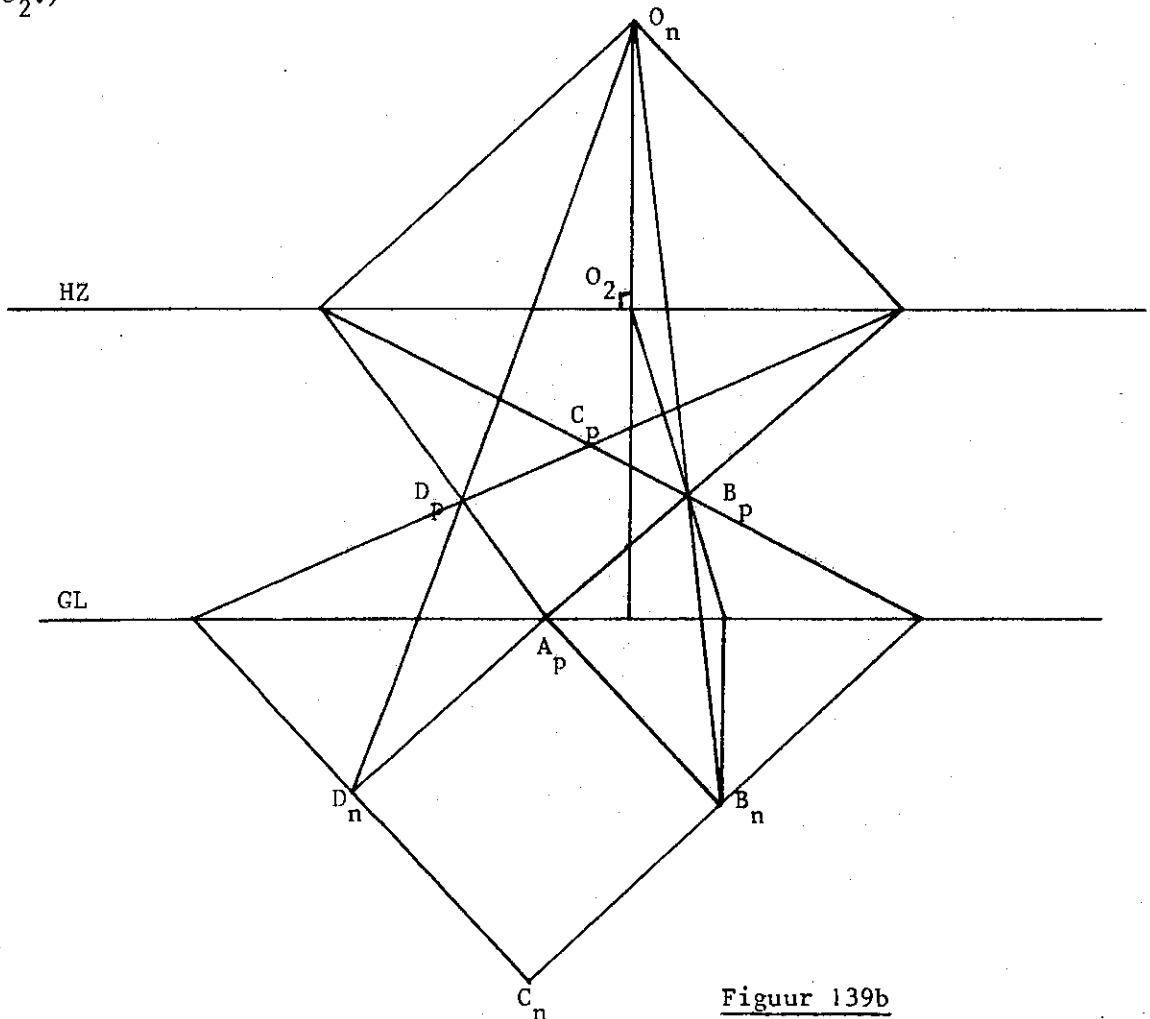


Figuur 139a

1. De neerslag en de projectie zijn perspectief. De as van perspectiviteit is GL. Om het centrum te vinden bedenken we (zie §3.8, Figuur 43 en blz. 39 bovenaan) dat het wentelen een parallelprojectie is met richting  $OO_n$ , terwijl we centraal projecteren op  $\tau$  vanuit  $O$ , zodat  $O_n$  het perspectiefcentrum is. Dit betekent dat bijv.  $A_n A_p$  door  $O_n$  gaat en ook dat  $D_n A_n$  en  $D_p A_p$  elkaar op GL snijden.

2. De projecties van evenwijdige lijnen ( $\nparallel GL$ ) hebben hetzelfde vluchtpunt. Gebruik maken van deze eigenschappen werkt een vlotte uitvoering van de constructie in de hand, met niet meer lijnen dan strikt nodig. Bovendien geven ze goede controle op de nauwkeurigheid van de tekening.

(Ga na waarom hier het snijpunt van  $A_p D_p$  en  $B_p C_p$  op de horizon ligt, juist in  $O_2$ .)



Figuur 139b

In Figuur 139b kozen we  $\tau$  zó dat ABCD geen lijnen  $//\tau$  bevat. We maken voor de constructie weer gebruik van perspectiviteit en van het samenvallen van vluchtpunten van evenwijdige lijnen. Ga na hoe  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  en  $D_p$  gevonden zijn en constateer dat er voor de constructie overbodige lijnen getrokken zijn.

In aansluiting op de constructie maken we nog een belangrijke opmerking. In Figuur 136 zien we dat  $\ell_1$  en  $\bar{\ell}_1$  na wenteling in  $\tau$  weer evenwijdig zijn. Zo zijn in Figuur 139b door  $O_n$  de lijnen  $//B_n C_n$  en  $//C_n D_n$  getrokken. Deze snijden HZ in de vluchtpunten  $V_1$  en  $V_2$  van de paren AD en BC resp. AB en DC.

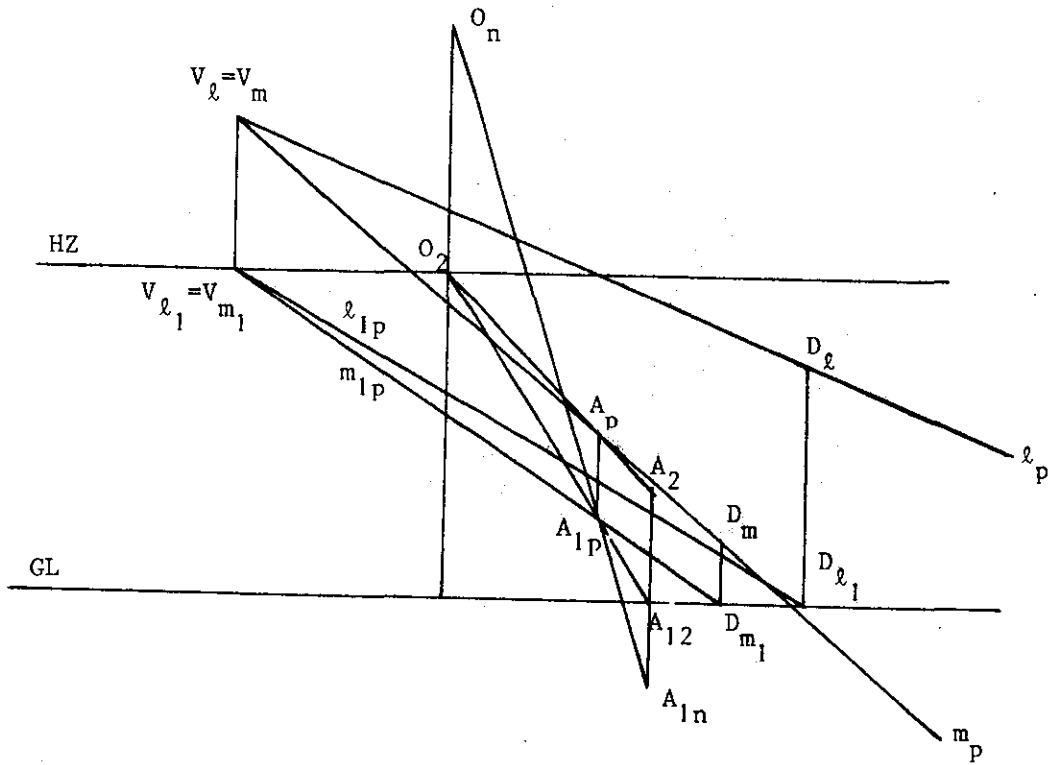
Opmerking. Afhankelijk van het af te beelden object wordt de stand van  $\tau$  t.o.v. het object gekozen.

Wordt  $\tau$  evenwijdig aan de gevel van een gebouw gekozen dan spreekt men wel van eenpuntperspectief (zie Figuur 139a); in een andere stand van  $\tau$  spreekt men van tweepuntperspectief. (Zie Figuur 139b.)

Voorbeeld 3. Constructie van de rechte  $m$  door een gegeven punt A en evenwijdig aan een gegeven lijn  $\ell$  (zie Figuur 140). Het punt A is gegeven door zijn coördinaten, in de figuur dus door  $A_{1n}$  en  $A_2$ , de lijn  $\ell$  door  $D_\ell$  en  $V_\ell$ . Op de bekende wijze zijn  $A_{1p}$  en  $A_p$  geconstrueerd. Omdat  $m//\ell$  is, is  $V_\ell = V_m$ . De projectie  $m_p$  van  $m$  is dus de lijn  $V_m A_p$ . We willen ook  $D_m$  bepalen. Daartoe bedenken we dat  $\ell_1//m_1$  is. We tekenen daarom op de gebruikelijke wijze  $D_{\ell_1}$  en  $V_{m_1}$ ;  $V_{m_1} = V_{\ell_1}$  en  $m_{1p}$  is de verbindingslijn van  $A_{1p}$  en  $V_{1p}$ . Het punt  $D_{m_1}$  ligt op GL terwijl  $D_m D_{m_1} \perp GL$  is. Hiermee is ook  $D_m$  gevonden.

Opmerking. Als  $\ell//\tau$  dan  $\ell//m_p$  (waarom?).





Figuur 140

Opmerking.

In de constructietekeningen wordt voortaan de index  $p$  weggelaten.

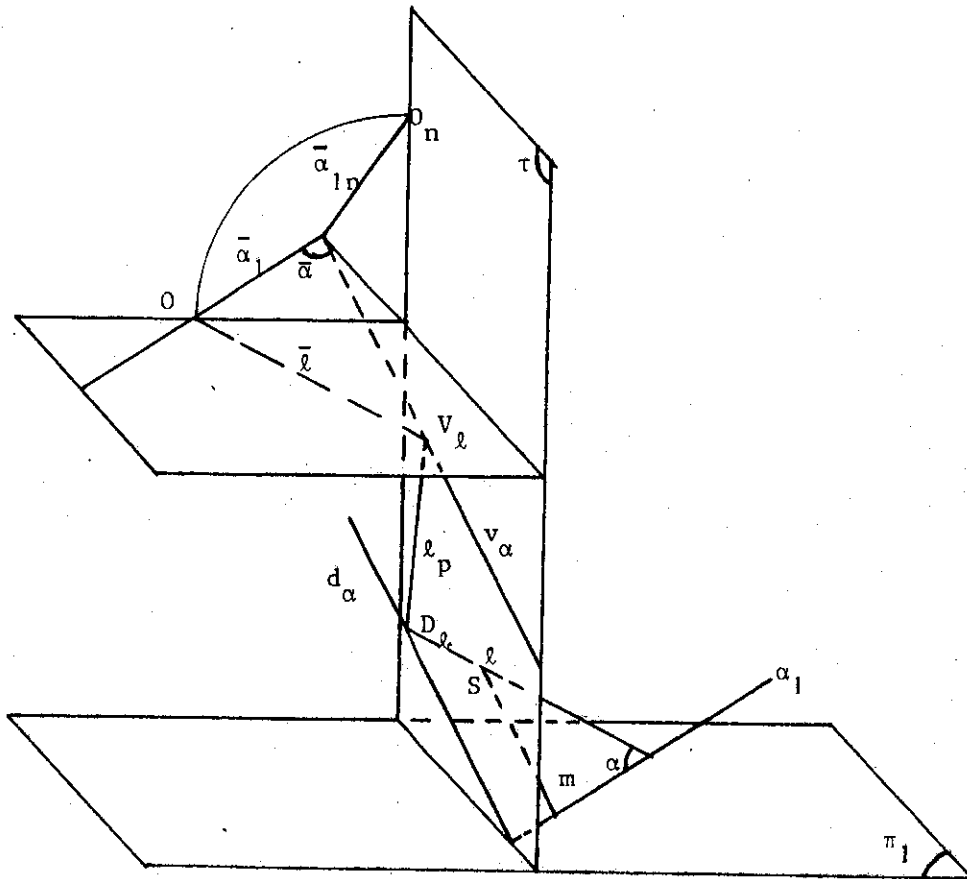
Voorbeeld 4. Het lijnstuk  $AB$ , gelegen op de lijn  $\ell$  wordt in vier gelijke delen verdeeld. Construeer de projectie van de deelpunten  $P$ ,  $Q$  en  $R$ .

Zie Figuur 141. Bij de punten  $P$ ,  $Q$  en  $R$  behoren de punten  $P_1$ ,  $Q_1$  en  $R_1$  op  $\ell_1$ , omdat  $AA_1 // PP_1, \dots // Z$ -as zijn. Als dus de punten  $P_1$ ,  $Q_1$  en  $R_1$  bekend zijn, dan zijn  $P$ ,  $Q$  en  $R$  dat ook. We voeren daarom de constructie uit op  $\ell_1$ , want deze kunnen we gemakkelijk in  $\pi_1$  neerslaan ( $\ell_{1n}$  door  $D_{\ell_1}$



8.4. Snijdende en evenwijdige lijnen bepalen een vlak

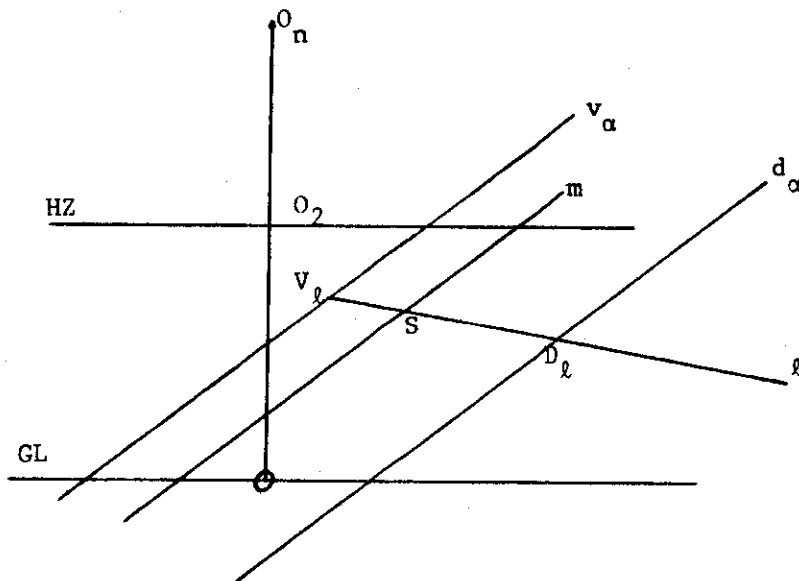
Aangezien de voorstelling van een vlak in het perspectief nogal afwijkt van die bij de andere projecties beschouwen we eerst de ruimtelijke Figuur 142a. Van het vlak  $\alpha$  zijn getekend  $\alpha_1$  en de snijlijn met  $\tau$ . Deze laatste snijlijn wordt aangeduid met  $d_\alpha$  (d.i. doorgang van  $\alpha$  met  $\tau$ ). Bovendien is door O het vlak  $\bar{\alpha} // \alpha$  getekend. Dit vlak snijdt  $\tau$  volgens de lijn  $v_\alpha$  (vluchtlijn van  $\alpha$ ) en het vlak van de horizon volgens  $\bar{\alpha}_1 (// \alpha_1)$ .



Figuur 142a

De lijnen  $d_\alpha$  en  $v_\alpha$  zijn evenwijdig en leggen het vlak  $\alpha$  vast (waarom?). In Figuur 142b is het vlak  $\alpha$  dan ook aangegeven met behulp van deze lijnen. Van de lijn  $\ell$  ligt  $D_\ell$  op  $d_\alpha$  en  $V_\ell$  op  $v_\alpha$ . De lijn ligt daarom in  $\alpha$ . Het omgekeerde geldt ook, mits de lijn niet  $//\tau$  is.

Een lijn  $//\tau$  heeft als doorgangspunt en vluchtpunt een oneigenlijk punt van  $\tau$ . De projectie  $m$  van een lijn die  $//\tau$  is en in  $\alpha$  ligt, is  $//d_\alpha$  (waarom?)



Figuur 142b

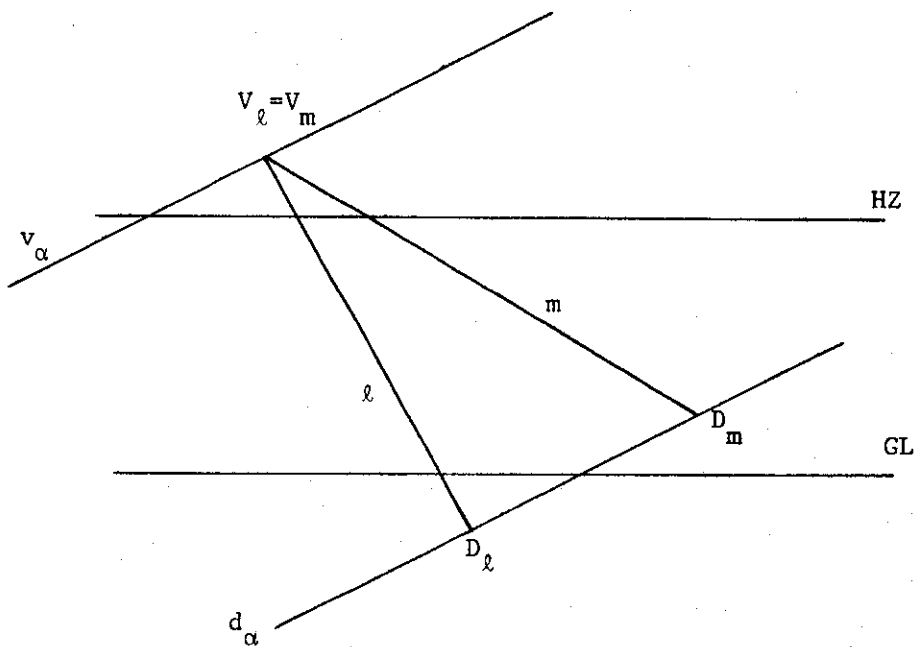
Tekenen we  $m //d_\alpha$  dan is niet te zien dat  $m$  de projectie is van een lijn die in  $\alpha$  ligt. In Figuur 142b is dit duidelijk gemaakt door aan te geven dat  $m$  de projectie  $\ell$  van een in  $\alpha$  gelegen lijn (in  $S$ ) snijdt.

Voor bepaalde constructies hebben we  $\alpha_{1n}$  nodig (zie Figuur 142a). We vinden deze lijn door te bedenken dat hij  $//\bar{\alpha}_{1n}$  is. Deze laatste lijn

verbindt  $O_n$  met het snijpunt van  $v_\alpha$  met HZ.

Als  $\alpha // \tau$  is, kunnen we uiteraard geen doorgang of vluchtlijn aangeven. In dat geval speelt  $\alpha_{1n}$  een belangrijke rol.

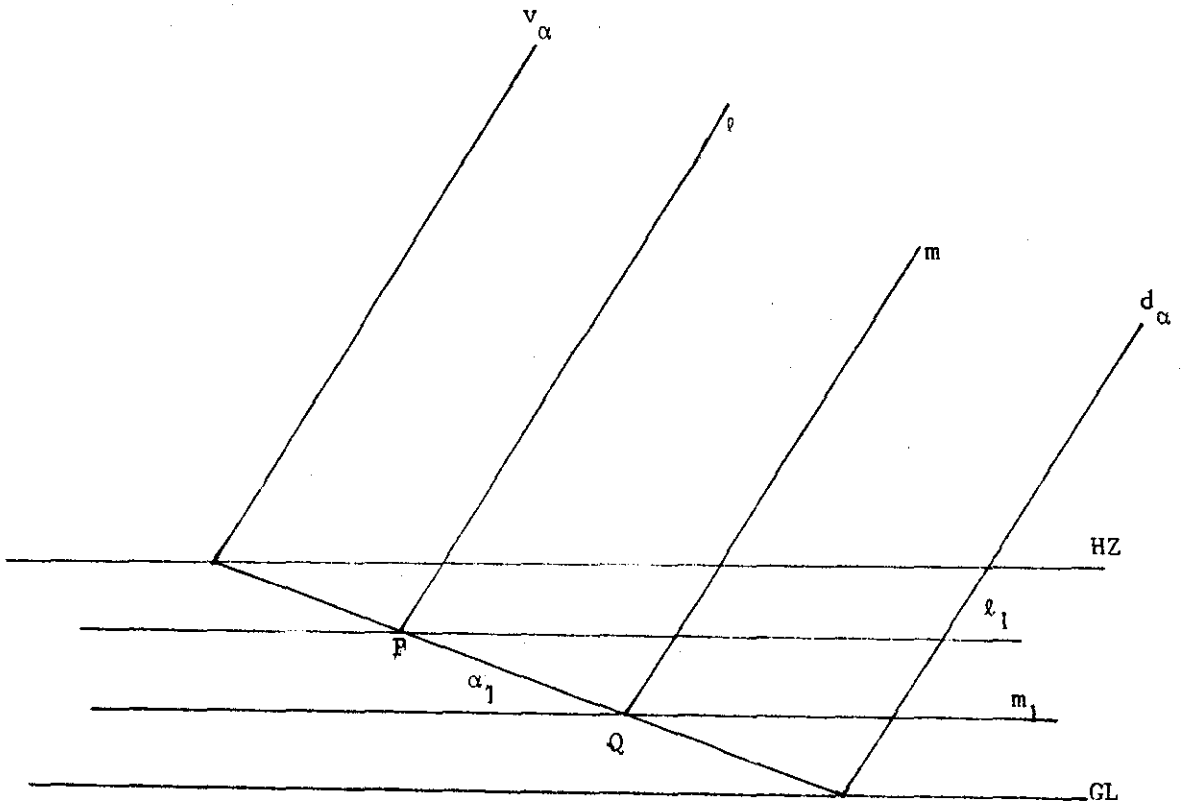
Evenwijdige lijnen bepalen een vlak. In Figuur 143a tekenen we het vlak  $\alpha$  door de evenwijdige lijnen  $\ell$  en  $m$ . De doorgang  $d_\alpha = D_\ell D_m$ ,  $v_\alpha$  gaat door  $V_\ell (= V_m)$  en is  $// d_\alpha$ .



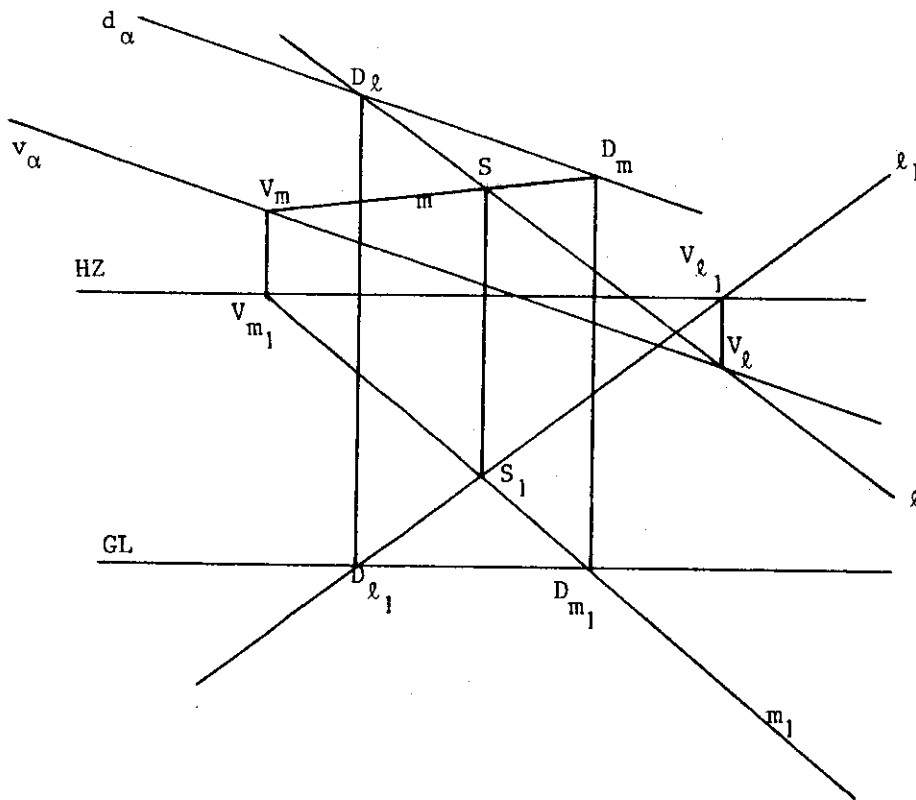
Figuur 143a

Als  $\ell // m // \tau$  dan moeten we een geheel andere methode volgen. De lijnen zijn in Figuur 143b gegeven door hun projecties en de projecties van de orthogonale projecties op  $\pi_1$ . De verbindingslijn van de snijpunten

P en Q van  $\ell$  en  $m$  met  $\pi_1$  is  $\alpha_1$ ;  $v_\alpha$  is  $\parallel \ell$  en gaat door het snijpunt van  $\alpha_1$  met HZ; we vinden  $d_\alpha$  door het snijpunt van  $\alpha_1$  met GL.



Figuur 143b



Figuur 144

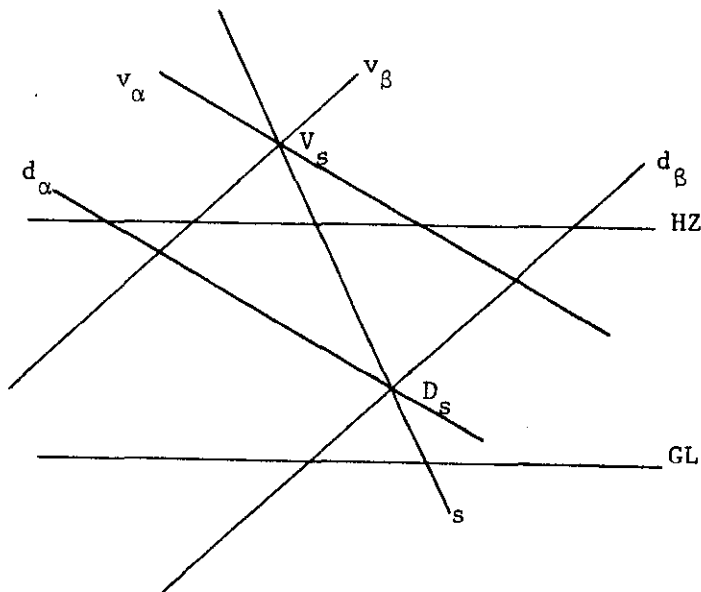
Als van twee lijnen  $l$  en  $m$  geldt dat  $D_l D_m // V_l V_m$  (dus  $V_l \neq V_m$ ) dan zijn  $D_l D_m$  en  $V_l V_m$  resp. doorgang  $d_\alpha$  en vluchtlijn  $v_\alpha$  van een vlak  $\alpha$  dat blijkbaar  $l$  en  $m$  bevat. De lijnen  $l$  en  $m$  zijn dus niet kruisend en niet evenwijdig, dus snijden  $l$  en  $m$  elkaar. Overigens blijkt het snijden van  $l$  en  $m$  ook uit het feit dat het snijpunt  $S$  van  $l$  en  $m$  in de projectiefiguur en het snijpunt  $S_1$  van  $l_1$  en  $m_1$  (in de projectiefiguur) samenhangen, d.w.z.  $SS_1$  is  $\perp GL$ .

Als voor twee lijnen  $l$  en  $m$  geldt dat  $D_l D_m \not// V_l V_m$  dan kruisen  $l$  en  $m$  elkaar.

8.5. Onderlinge ligging van vlakken

Twee vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn  $\delta f$  evenwijdig  $\delta f$  ze snijden elkaar. Als  $\alpha // \beta$ , dan is  $v_\alpha = v_\beta$ , tenzij beide vlakken  $// \tau$  zijn. Als omgekeerd  $v_\alpha = v_\beta$ , dan is  $\alpha // \beta$ .

Als  $\alpha \not// \beta$  dan is hun snijlijn  $s$  bepaald door het snijpunt  $V_s$  van  $v_\alpha$  en  $v_\beta$  en het snijpunt  $D_s$  van  $d_\alpha$  en  $d_\beta$ . (Zie Figuur 145.)



Figuur 145

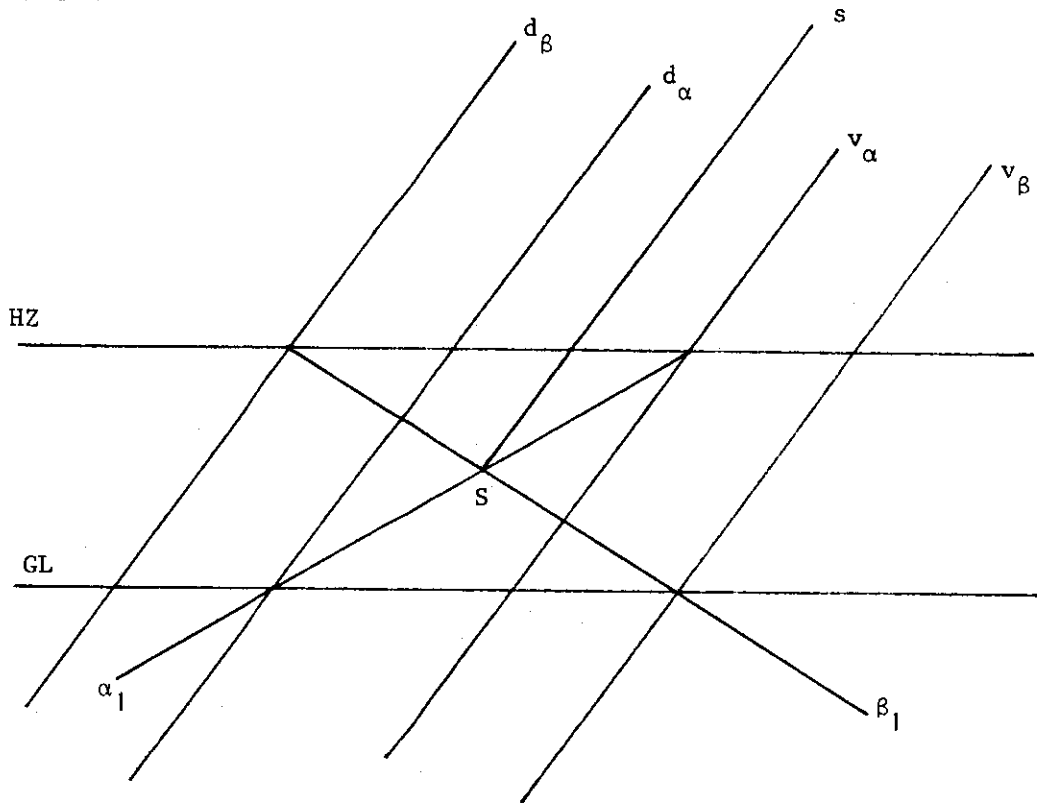
Er zijn vele bijzondere standen van  $\alpha$  en  $\beta$ . We beperken ons tot het behandelen van twee van deze gevallen.

Stel dat  $d_\alpha // d_\beta$ ,  $v_\alpha \neq v_\beta$ . De snijlijn  $s$  is  $// d_\alpha$  (gevolg van Stelling 1.2).

Om een punt van  $s$  te construeren, tekenen we een vlak  $\gamma$  met  $d_\gamma \not// d_\alpha$ . De snijlijnen  $s_{\alpha\gamma}$  en  $s_{\beta\gamma}$  snijden elkaar in een punt  $S$  dat tot  $s$  behoort.

(Waarom?) Daarna tekenen we  $s$  door  $S$  en  $// d_\alpha$ .





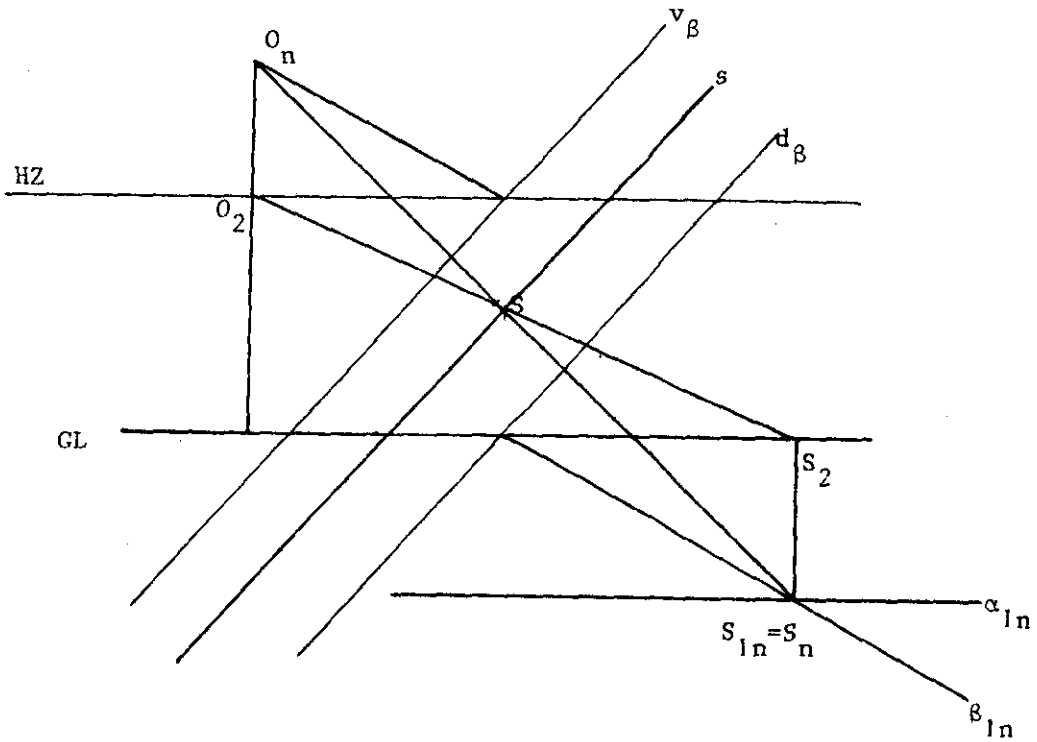
Figuur 146

Andere werkwijze : het snijpunt van  $v_\alpha$  en HZ is een punt van  $\alpha_1$ , evenals het snijpunt van  $d_\alpha$  en GL;  $\alpha_1$  is dus bekend: Evenzo is  $\beta_1$  bekend. Het snijpunt S van  $\alpha_1$  en  $\beta_1$  is een punt van s. Deze constructie is in Figuur 146 uitgevoerd.

Stel  $\alpha // \tau$  en  $\beta$  willekeurig (Figuur 147).

We hebben  $\alpha$  gegeven door  $\alpha_{1n}$  ( $// GL$ ). De snijlijn  $s$  is  $// d_\beta$  (waarom?).

We hebben nu  $\alpha_{1n}$  gesneden met  $\beta_{1n}$  en het perspectieve beeld  $S$  van het snijpunt  $S_n (= S_{1n})$  geconstrueerd. We hadden natuurlijk ook eerst  $\alpha_1$  kunnen construeren en  $S$  kunnen vinden als snijpunt van  $\alpha_1$  en  $\beta_1$ .

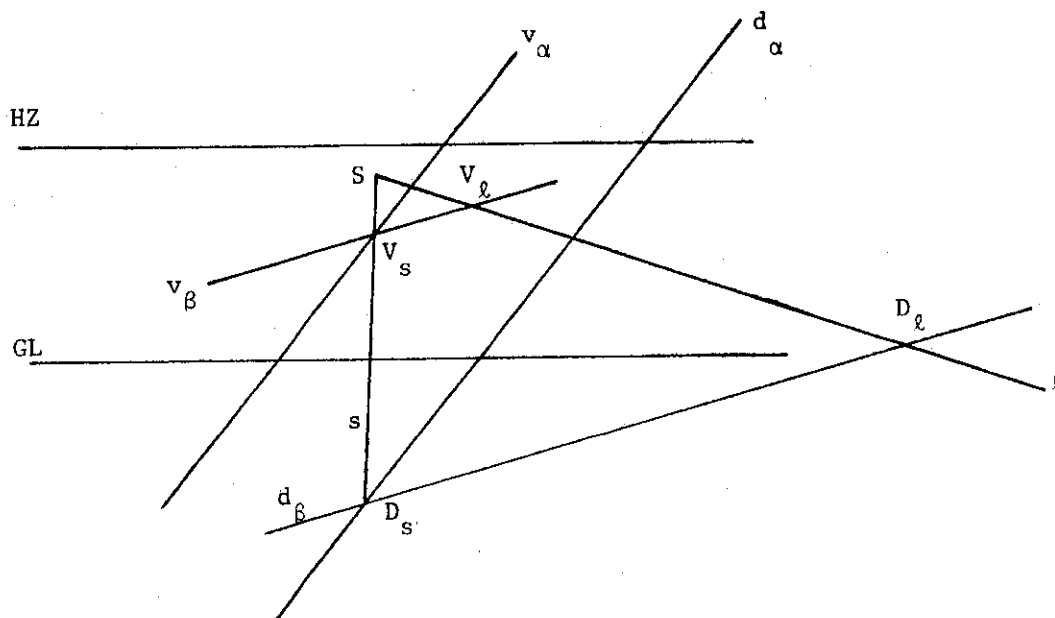


Figuur 147

8.6. Snijpunt van een lijn  $\ell$  met een vlak  $\alpha$

Stel dat  $\ell$  gegeven is door  $V_\ell$  en  $D_\ell$  en  $\alpha$  door  $v_\alpha$  en  $d_\alpha$ . We brengen in Figuur 148 een vlak  $\beta$  aan door  $\ell$  en bepalen de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$ .

Het gezochte punt  $S$  is het snijpunt van  $\ell$  en  $s$ .



Figuur 148

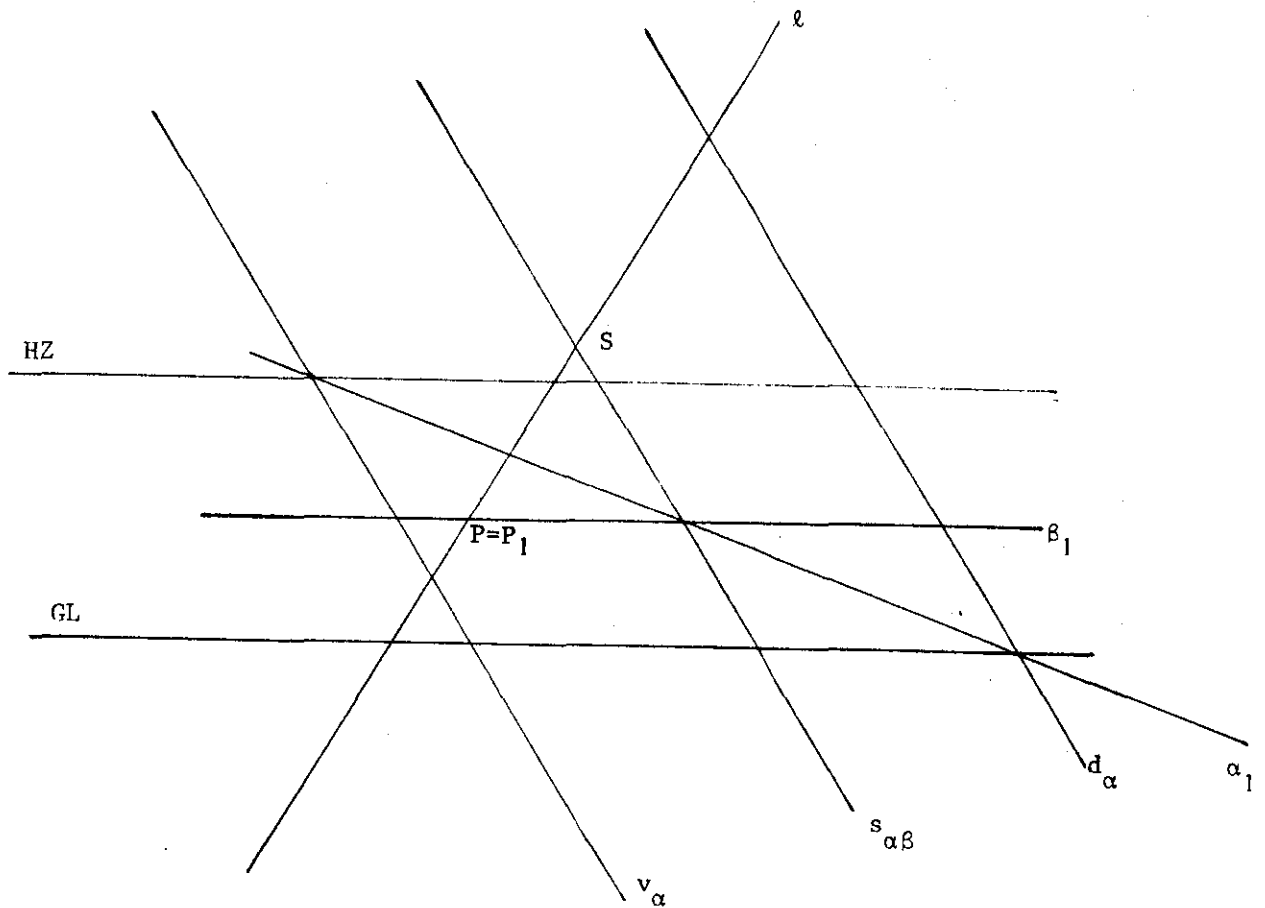
Er zijn bijzondere standen mogelijk. We zullen er enige van behandelen.

Stel  $\alpha // \tau$  en  $\ell$  gegeven door  $V_\ell$  en  $D_\ell$ . We brengen door  $\ell$  weer een vlak  $\beta$  aan.

Om dit met  $\alpha$  te snijden gebruiken we net als in Figuur 147 het snijpunt van  $\beta_{1n}$  met  $\alpha_{1n}$ . (Zie aldaar.)

Stel  $\ell // \tau$  en  $\alpha$  gegeven door  $v_\alpha$  en  $d_\alpha$ . De lijn is gegeven met behulp van een punt, bijvoorbeeld zijn eerste doorgangspunt  $P$ .

In principe doen we hetzelfde als in het algemene geval, maar het probleem is de keuze van  $\beta$  door  $\ell$ . We kunnen  $\beta // \tau$  kiezen, of  $\beta$  bepalen als het vlak door  $\ell$  en een willekeurige lijn  $m$  die  $\ell$  snijdt (in  $P$ , dat ligt voor de hand). Het vlak  $\beta$  is dan door  $V_m$  en  $D_m$  bepaald. ( $v_\beta // d_\beta // \ell$ .)



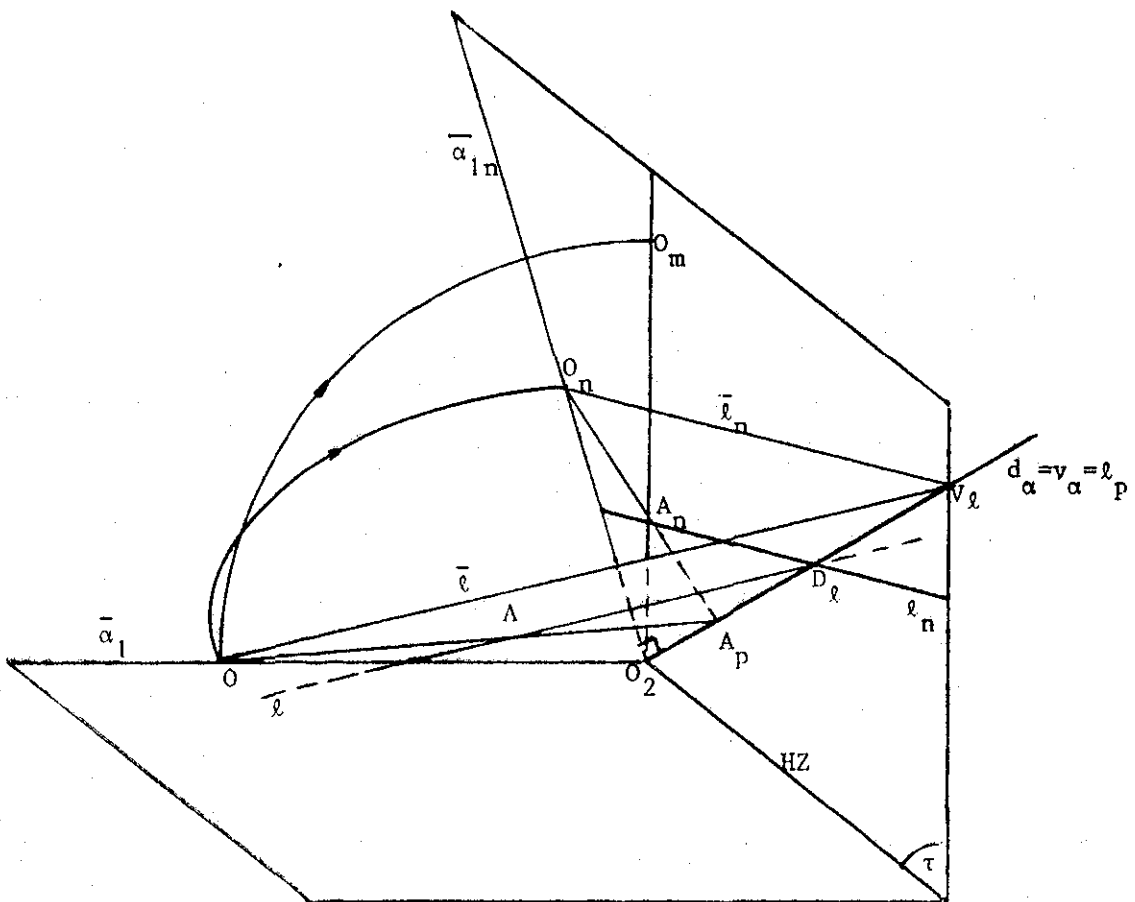
Figuur 149

In Figuur 149 hebben we gekozen voor de eerste oplossing. Het vlak  $\beta$  is bepaald door  $\beta_1$ . De snijlijn  $s_{\alpha\beta}$  van  $\alpha$  en  $\beta$  gaat door het snijpunt van  $\alpha_1$  en  $\beta_1$  en is  $// v_\alpha$ . De lijn  $s_{\alpha\beta}$  snijdt  $\ell$  in het gezochte punt  $S$ . Merk op dat het gesuggereerde aan het einde van de behandeling van Figuur 147 hier is uitgevoerd, nl. niet neerslaan maar het rechtstreeks werken met eerste doorgangen.

8.7. Het wentelen van vlakken

Sinds het begin van dit hoofdstuk hebben we  $\pi_1$  neergeslagen in  $\tau$ . Zie bijv. Figuur 139a. We hebben bij de behandeling reeds aangegevendat tussen de projectiefiguur en de neerslag perspectiviteit bestaat, met GL als as en  $O_n$  als centrum.

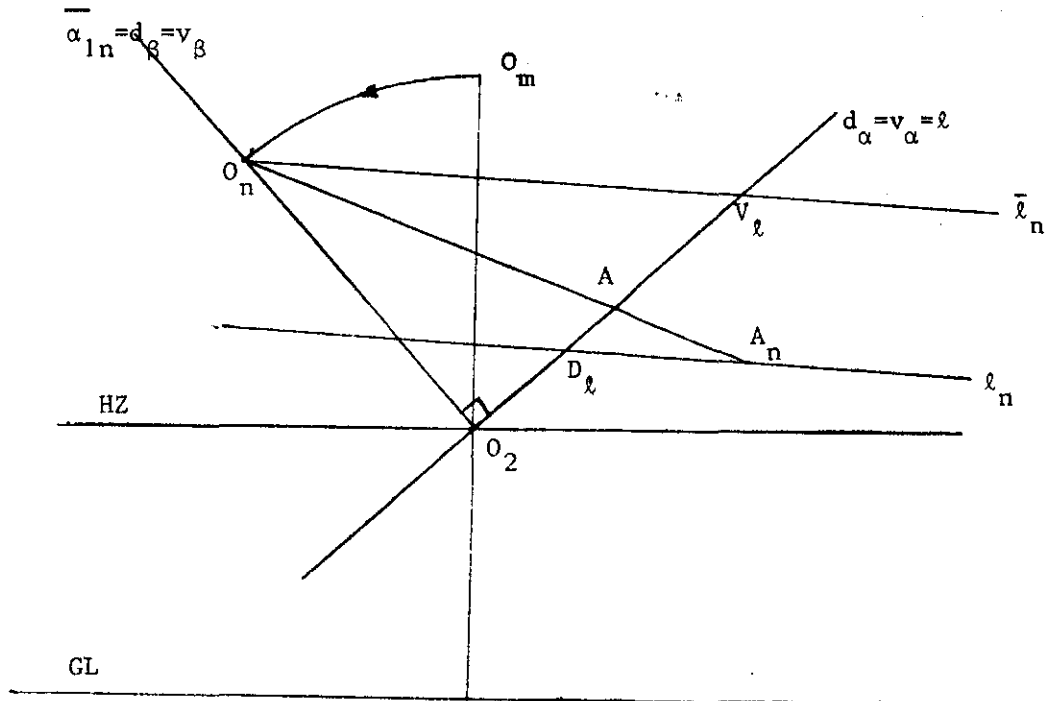
Eén type vlak speelt als hulpvlak bij het wentelen van vlakken een grote rol, nl. de vlakken door O en  $\perp \tau$ . We behandelen daarom dit type apart. In Figuur 150a is een ruimtelijke tekening van de situatie (in de figuur is  $\pi_1$  weggelaten). Het vlak  $\alpha$  gaat door O en is  $\perp \tau$ , dus  $v_\alpha$  en  $d_\alpha$  vallen samen en gaan door  $O_2$ .



Figuur 150a

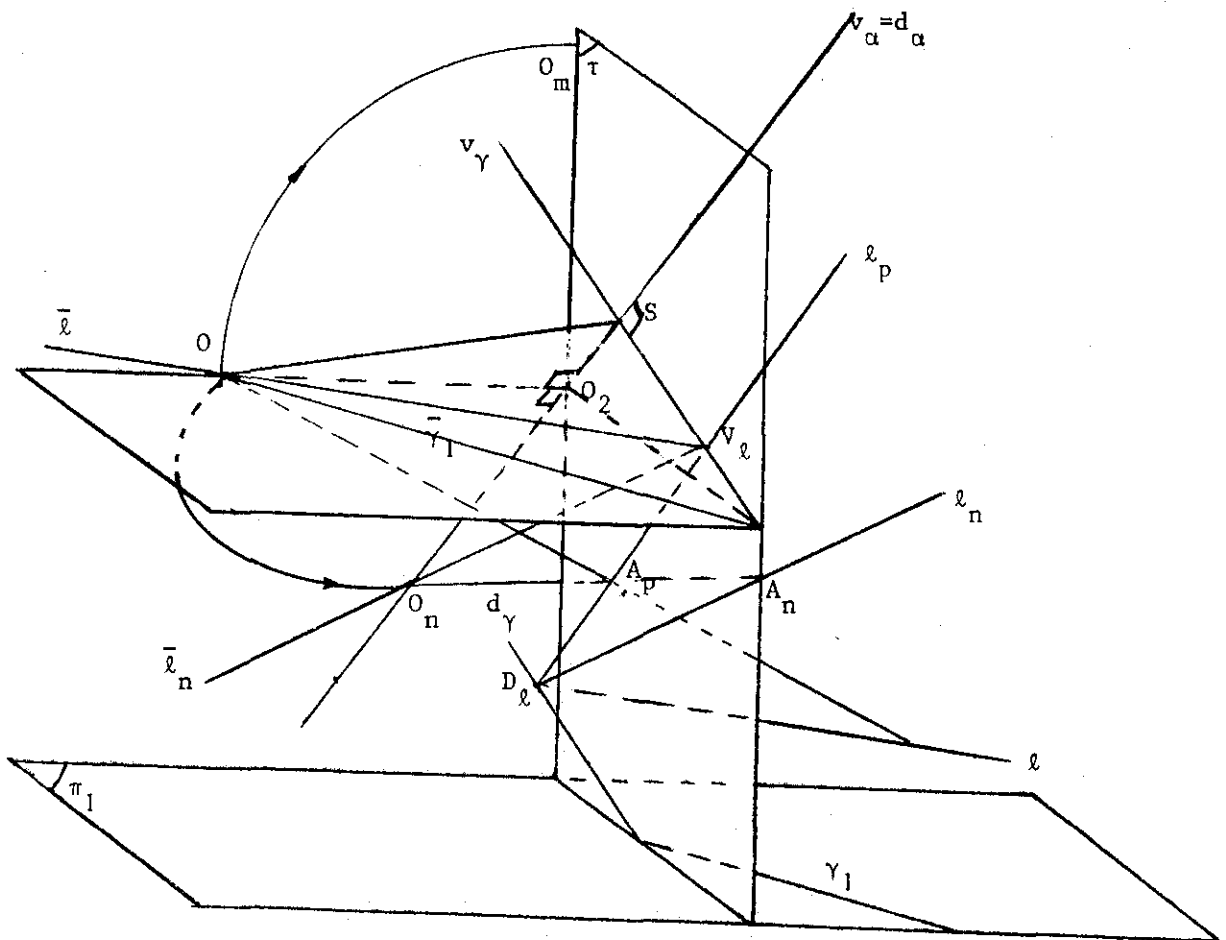
Bij het wentelen van  $\alpha$  wordt de index  $n$  gebruikt. Ter onderscheiding wordt de neerslag van  $O$ , die correspondeert met het neerslaan van  $\pi_1$  en  $\bar{\pi}_1$ , nu  $O_m$  genoemd. Het vlak  $\alpha$  gaan we om  $d_\alpha$  wentelen in  $\tau$ .  $O$  beschrijft een cirkelboog, gelegen in het vlak  $\beta$  dat door  $OO_2$  gaat en  $\perp \alpha$  is. In de neerslag is  $O_2O_n \perp d_\alpha$  en de lengte van  $O_2O_n =$  de distantie. In  $\alpha$  ligt de lijn  $\ell$ , met uiteraard  $D_\ell$  en  $V_\ell$  op  $d_\alpha$ . Om  $\ell$  te wentelen trekken we  $O_nV_\ell = \bar{\ell}_n$ , waarna  $\ell_n$  door  $D_\ell$  en  $\parallel \bar{\ell}_n$  getekend wordt. Tussen de projectiefiguur en de neerslag bestaat weer een perspectiviteit, met as  $d_\alpha$  en centrum  $O_n$ ; de perspectiviteit is echter hier nauwelijks bruikbaar (waarom?).

In Figuur 150b is de constructie uitgevoerd.



Figuur 150b

De voorafgaande wenteling van vlakken ( $\pi_1$ , Figuur 134 en  $\alpha$  door  $O$  en  $\perp \tau$ , Figuur 150) zijn stereometrisch geanalyseerd en leiden tot de bekende perspectiviteitsconstructies. Ook bij het wentelen van een willekeurig vlak  $\gamma$  om  $d_\gamma$  zijn neerslag en projectie perspectief.

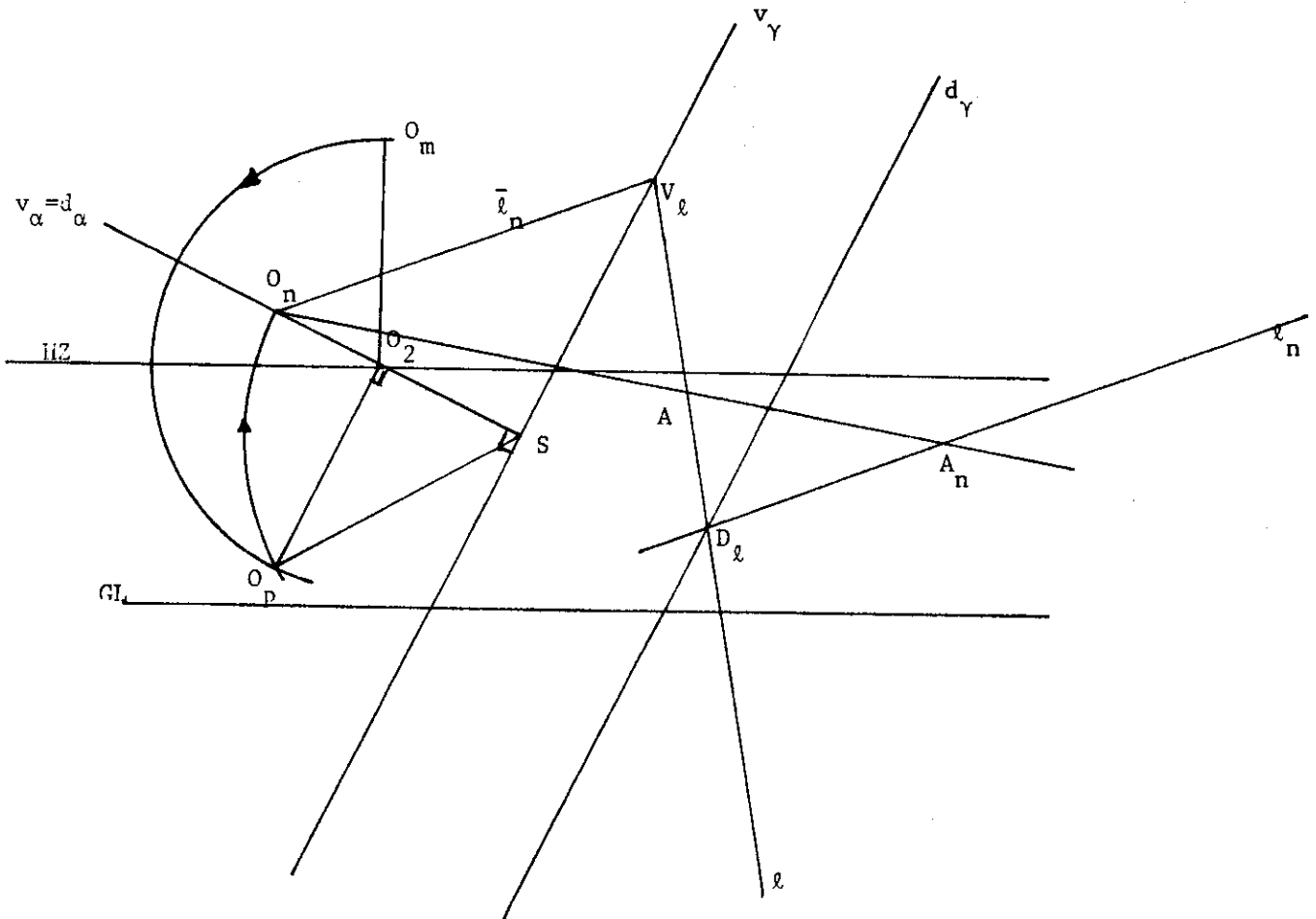


Figuur 151a

In Figuur 151a is het principe getekend. De perspectiviteitsas is  $d_\gamma$ . Om het centrum van de perspectiviteit te vinden wentelen we  $\bar{\gamma}$  ( $// \gamma$  en door  $O$ ) om  $v_\gamma$ . De wenteling van  $O$  tot  $O_n$  kan worden opgevat (zie § 3.8)

als een scheve parallelprojectie met richting  $OO_n$ . Het gevolg is dat  $O_n$  ook centrum van perspectiviteit is (immers de lijn door  $O$  in de projectie-richting is  $OO_n$ ). De perspectiviteit is vastgelegd.

In Figuur 151b is de neerslag van  $\gamma$  (met een daarin gelegen lijn  $\ell$ ) geconstrueerd.  $O_n$  vinden we met behulp van de overweging dat de lijn  $\ell$  en  $\bar{\ell}$  (d.i. de lijn door  $O$  en  $\parallel \ell$ ) na wentelen in dezelfde richting en over dezelfde hoek (elk om een eigen as) weer evenwijdig zijn ( $\ell_n \parallel \bar{\ell}_n$ ). Het vlak  $\gamma$  en de lijn  $\ell$  wentelen om  $d_\gamma$ ; de lijn  $\bar{\ell}$  wentelt om  $v_\gamma$ .



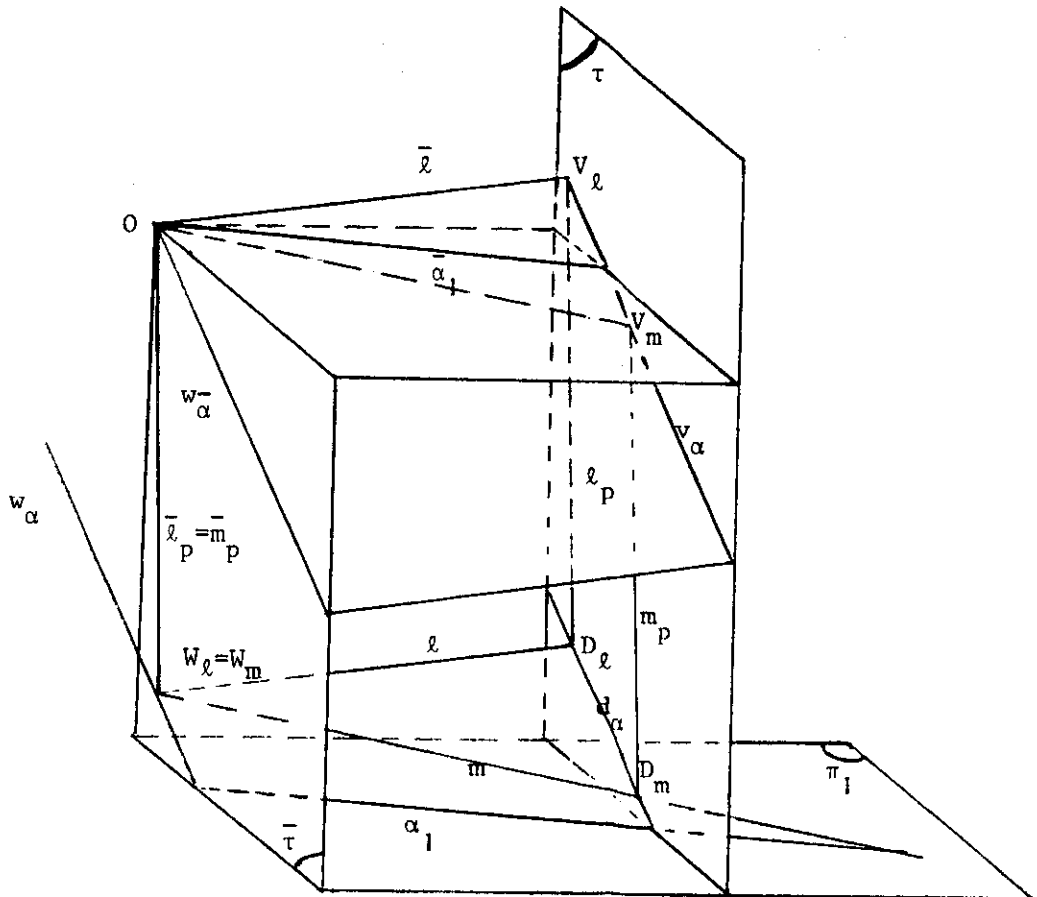
Figuur 151b





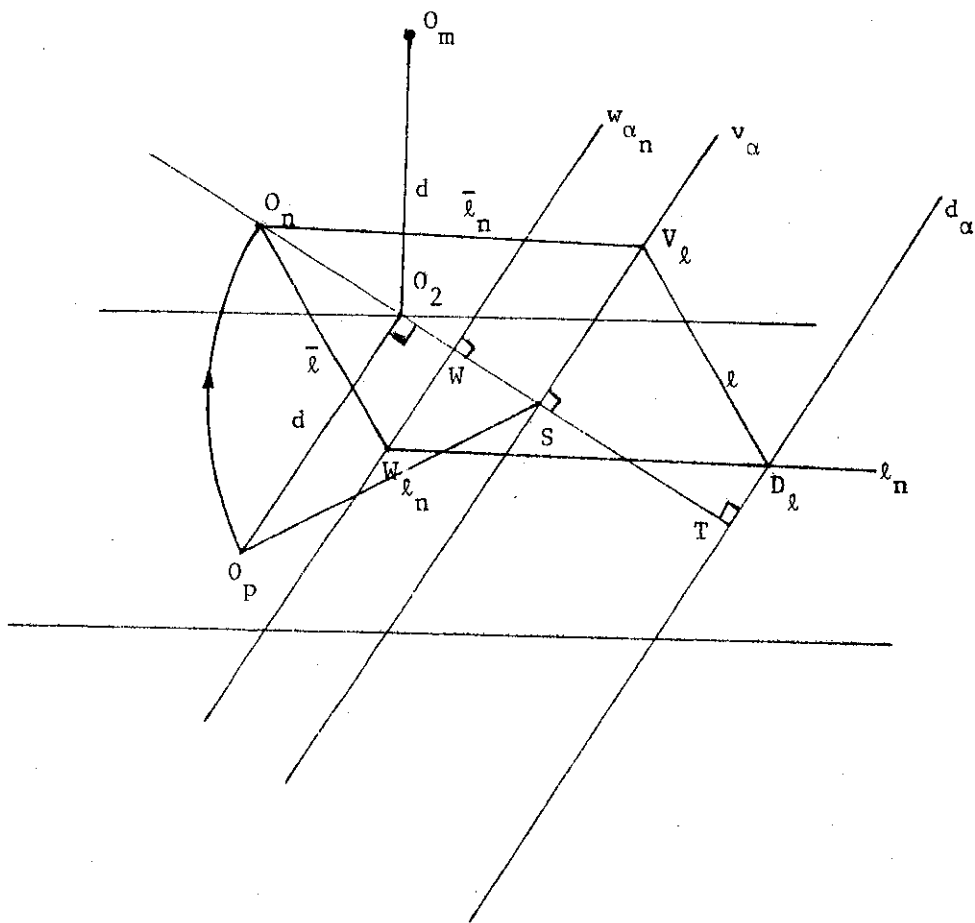
Het derde hoekpunt  $M$  van de gelijkzijdige  $\Delta A B M$  is middelpunt van de omgeschreven cirkel van de zeshoek. Bij de constructie van de zeshoek  $ABCDEF$  is enerzijds gebruik gemaakt van perspectiviteit, anderzijds van evenwijdige lijnen die dus eenzelfde vluchtpunt hebben.

Ten behoeve van het volgende voorbeeld hebben we uitbreiding van de theorie nodig. Deze houdt verband o.a. met de in Hoofdstuk 6 (bij Figuur 117) beschreven constructie. Beschouw Figuur 153.



Figuur 153

Het vlak  $\bar{\tau}$  door  $O$  en  $// \tau$  snijdt  $\alpha$  volgens de verdwijsas van  $\alpha$  (notatie:  $w_\alpha$ ). Het vlak  $\bar{\tau}$  heet verdwijsvlak. Elk punt van  $\bar{\tau}$  heeft de eigenschap dat het geen (d.w.z geen eigenlijke) projectie heeft. We zullen van de lijn  $w_\alpha$  gebruik maken. Voor dat gebruik wordt hij met  $\alpha$  meegewenteld tot  $w_{\alpha_n}$ . Om  $w_{\alpha_n}$  te tekenen bedenken we dat  $w_\alpha // d_\alpha$  en dat de afstand van  $O$  tot  $v_\alpha$  dezelfde is als die van  $w_\alpha$  tot  $d_\alpha$ . In Figuur 154 is  $w_{\alpha_n} // d_\alpha$  getekend, zó dat  $TW = SO_n$ . Hierbij is van belang te bedenken dat  $\alpha$  en  $\alpha_n$  in dezelfde richting zijn gewenteld, zodat de richting van  $T$  naar  $W$  dezelfde is als die van  $S$  naar  $O_n$ .



Figuur 154

In Figuur 153 zijn nog de lijnen  $\ell$  en  $m$  getekend, beide in  $\alpha$  en zó dat  $W_\ell = W_m$ . Dit betekent dat de oneigenlijke punten van  $\ell_p$  en  $m_p$  samenvallen, dus  $\ell_p // m_p$ . De conclusie is: lijnen met hetzelfde verdwijnpunt hebben evenwijdige projecties.

In Figuur 153 is verder ook nog te zien dat de lijn  $OW_\ell // \ell_p$  is, dus  $OW_\ell = \bar{\ell}_p$  (en ook  $= \bar{m}_p$ ). Zie ook Figuur 154:  $\ell, \bar{\ell}_n, \bar{\ell}$  en  $\ell_n$  vormen een parallellogram.

Voorbeeld 2. In het vlak  $\alpha$  ligt een cirkel met gegeven middelpunt  $M$  en gegeven straal. We willen de projectie van de cirkel construeren, met daarbij een paar toegevoegde middellijnen. (Zie opmerking onderaan.)

In Figuur 155 is het voorbeeld uitgewerkt. Op  $w_{\alpha_n}$  is een punt  $P_n$  genomen;  $p_n$  is de poollijn van  $P_n$  t.o.v. de cirkel ( $M$  is op  $d_\alpha$  gegeven). De lijn  $p_n$  snijdt  $w_{\alpha_n}$  in  $Q_n$ ,  $q_n$  is de poollijn van  $Q_n$  t.o.v. de cirkel (en gaat door  $P_n$ !). We hebben nu een pooldriehoek  $P_n Q_n W_n$ ;  $p$  en  $q$  zijn toegevoegde middellijnen van de ellips. Immers de bijbehorende  $\Delta P_p Q_p W_p$  is pooldriehoek t.o.v. de gevraagde ellips. Tevens is  $P_p Q_p$  de oneigenlijke rechte van  $\tau$ , dus  $W_p$  is de pool van de oneigenlijke rechte, zodat  $W_p$  middelpunt van de ellips is. De raaklijnen door  $P_n$  aan de cirkel geven in projectie de raaklijnen in de eindpunten van de middellijn  $p$ ; ze zijn  $// q$ . (Waarom?)

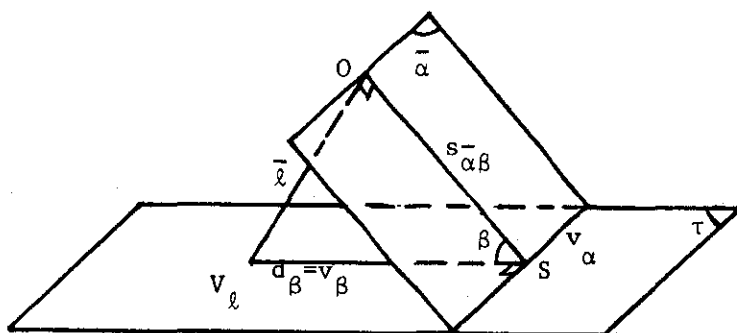
Opmerking. De cirkel is in  $\alpha$  zó gekozen dat hij met  $w_\alpha$  geen enkel punt gemeen heeft. De kegel met  $O$  tot top en de cirkel tot richtcirkel heeft daarom geen beschrijvende met het verdwijnvlak  $\bar{\tau}$  gemeen; daarom is de projectie een ellips (zie Hoofdstuk 6). Als de cirkel één of twee punten met  $w_\alpha$  gemeen heeft, dan is de projectie een parabool resp. een hyperbool.



8.8. Loodrechte stand, hoeken, afstanden

Alle lijnen die loodrecht op een gegeven vlak  $\alpha$  staan, hebben hetzelfde vluchtpunt. We vinden dit vluchtpunt aldus:

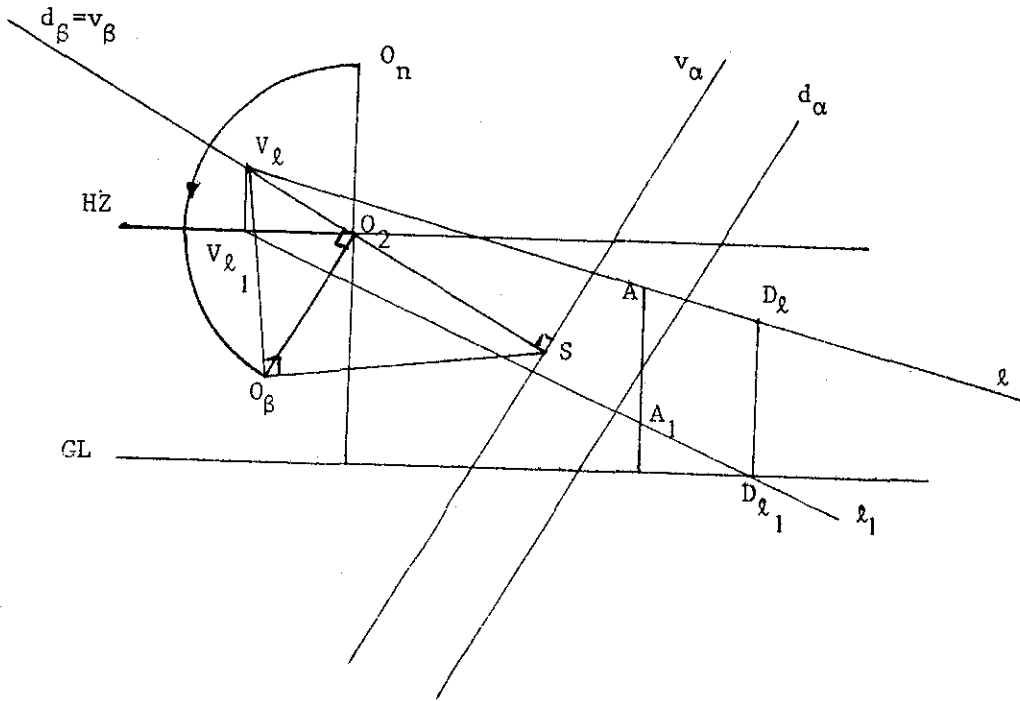
Breng door  $O$  het hulpvlak  $\beta$  aan  $\perp v_\alpha$ , dus  $\perp \tau$ . De lijn  $\bar{\ell}$  in  $\beta$  en  $\perp s_{\alpha\beta}^-$  is dan  $\perp \alpha$  (waarom?) In Figuur 156a is een stereometrische illustratie gegeven.



Figuur 156a

In Figuur 156b is door een gegeven punt  $A$  de loodlijn  $\ell$  op het vlak  $\alpha$  geconstrueerd.  $A$  is gegeven door zijn projectie en de projectie van de orthogonale projectie  $A_1$ .

Figuur 156a kunnen we ook gebruiken voor het onderzoeken van de constructie van een vlak  $\perp \ell$ . Alle vlakken  $\perp \ell$  zijn evenwijdig en hebben dus dezelfde vluchtlijn. In de genoemde figuur kunnen we, uitgaande van  $V_\ell$  in het vlak  $\beta$  het punt  $S$  construeren;  $v_\alpha$  gaat door  $S$  en is  $\perp d_\beta$ .



Figuur 156b

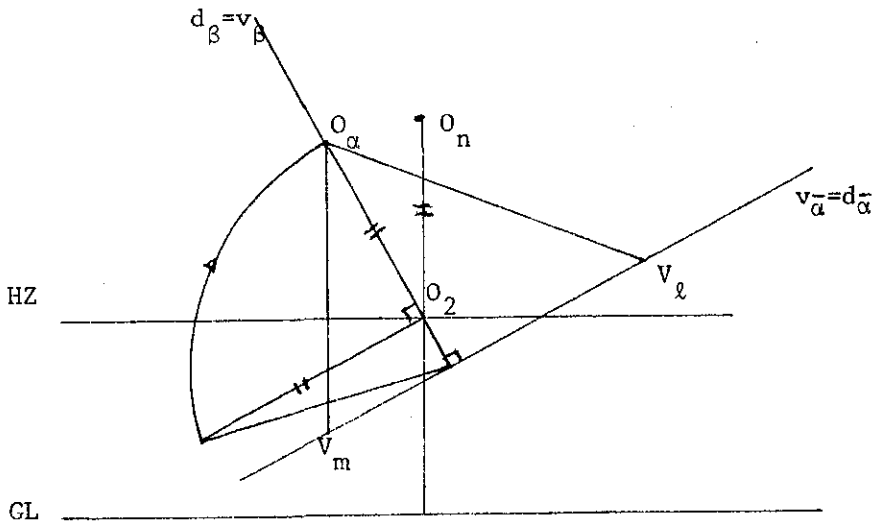
In Figuur 156c is door het punt A (gegeven door A en  $A_1$ ) het vlak  $\alpha \perp l$  geconstrueerd. De richting van de lijn  $l$  is gegeven door  $v_l$ . Op de hierboven beschreven wijze wordt  $v_\alpha$  getekend.

Om  $d_\alpha$  te vinden brengen we door A een lijn  $m$  aan die in  $\alpha$  ligt (dus  $v_m$  op  $v_\alpha$ ). Via  $m_1$  wordt  $D_m$  gevonden, waarmee  $d_\alpha$  vastgelegd is.



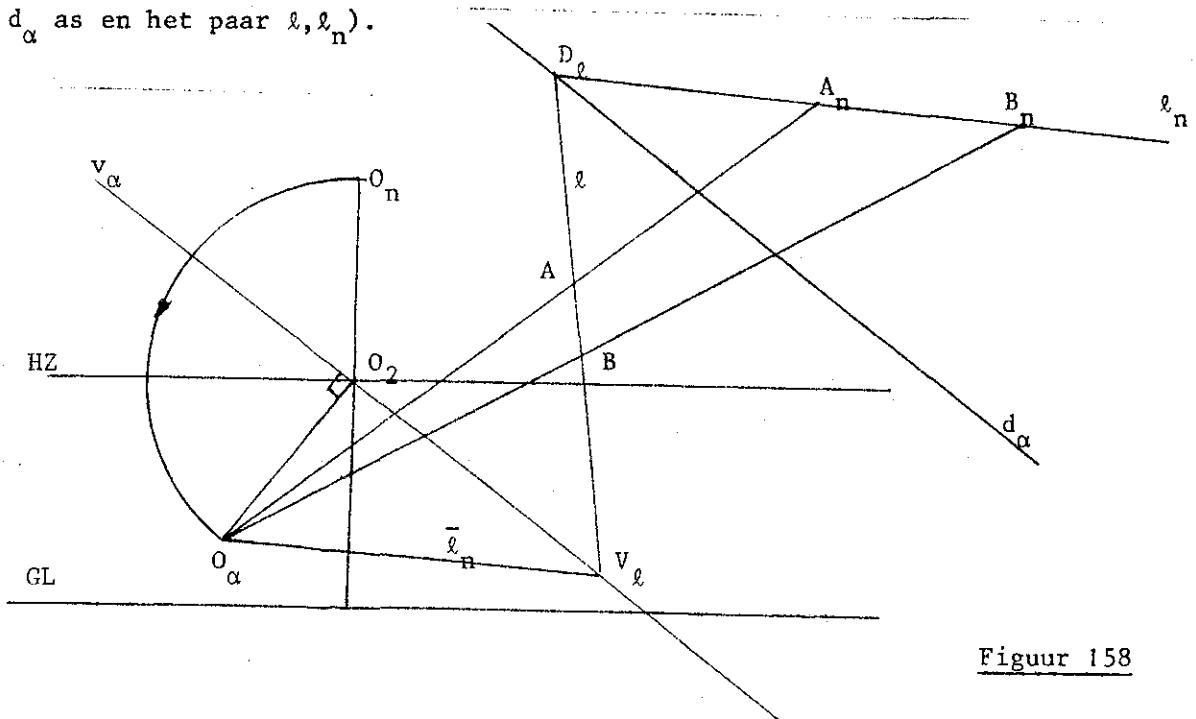


Als we de hoek tussen de vlakken  $\gamma$  en  $\delta$  willen bepalen dan construeren we  $\bar{\ell} \perp \gamma$  en  $\bar{m} \perp \delta$ . De hoek tussen  $\bar{\ell}$  en  $\bar{m}$  is gelijk aan de hoek tussen  $\gamma$  en  $\delta$ .



Figuur 157

Om de ware afstand van twee punten A en B op een gegeven lijn  $\ell$  te bepalen, (zie Figuur 158) brengen we door deze punten het vlak aan  $\perp \tau$ :  $v_\alpha = O_2 V_\alpha$ . De doorgang  $d_\alpha$  gaat door  $D_\ell$  en is  $\parallel v_\alpha$ . Het vlak  $\alpha$  wordt vervolgens om  $d_\alpha$  in  $\tau$  gewenteld,  $A_n$  en  $B_n$  worden met perspectiviteit bepaald ( $O_2$  centrum,  $d_\alpha$  as en het paar  $\ell, \ell_n$ ).



Figuur 158

### 8.9. Enige voorbeelden

1. Een afgeknotte regelmatige vierzijdige pyramide  $\begin{matrix} EFGH \\ ABCD \end{matrix}$  staat met het grondvlak op  $\pi_1$ ; AB ligt in  $\tau$ , de lengte van EF is de helft van die van AB terwijl het bovenvlak op een gegeven hoogte h boven  $\pi_1$  ligt. Het lichaam wordt door een puntvormige lichtbron L (gegeven door L en  $L_1$ ) beschenen. Gevraagd wordt de projectie van het lichaam, de eigenschaduw en de slagschaduw op  $\pi_1$ .

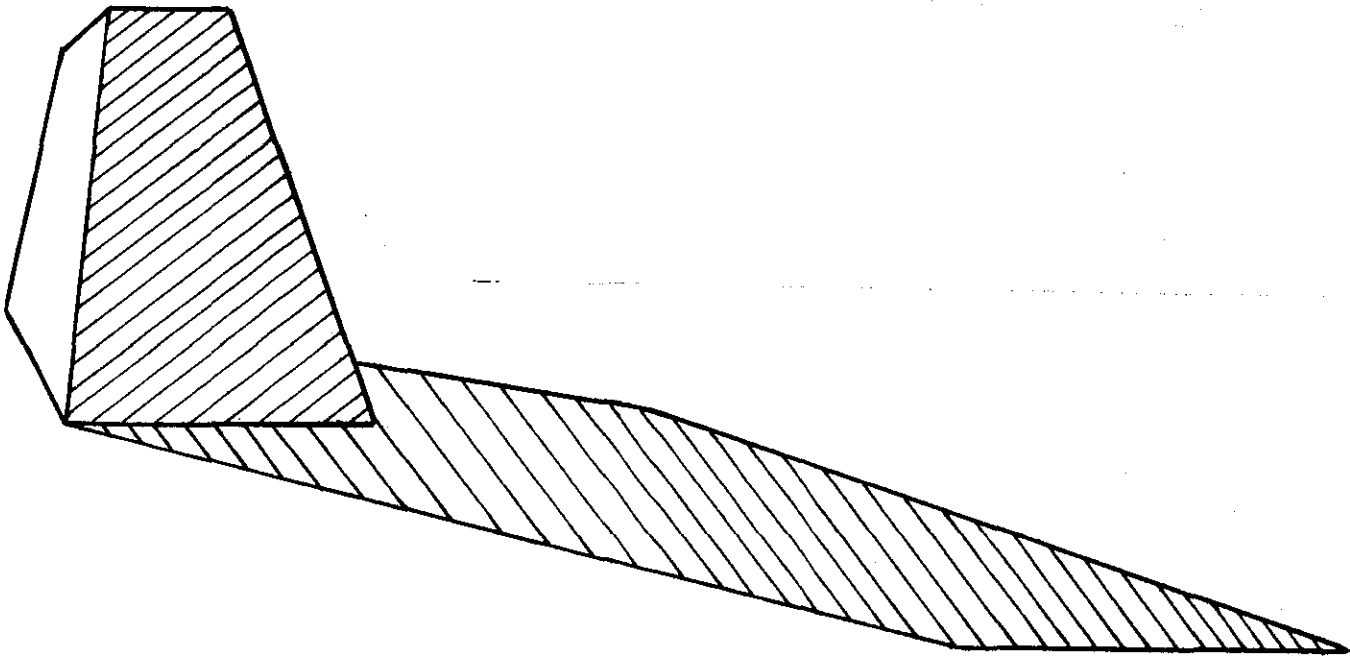
In Figuur 159a wordt de constructie uitgevoerd. Voor de beschrijving spreken we af dat (om veel indices te vermijden) de orthogonale projectie van EFGH op  $\pi_1$  met PQRS wordt aangeduid. In de gewentelde  $\pi_1$  wordt het vierkant ABCD met daarin het vierkant PQRS getekend. Met behulp van perspectiviteit (centrum  $O_n$ , as GL) worden de projecties van de beide vierkanten getekend. De lijnen AD, PS, QR en BC zijn  $\perp \tau$ , hebben dus  $O_2$  als vluchtpunt. (Als de constructie van de beide vierkanten punt voor punt zou worden uitgevoerd, is het genoemde punt  $O_2$  een goed controlemiddel; een ander is dat  $D_n C_n // DC$  enz.)

We zijn nu toe aan het bovenvlak  $\beta$ , waarin EFGH ligt. We kunnen  $d_\beta$  tekenen, nl. op afstand h van GL. De punten E en G liggen in het vlak  $\gamma$  door P en R en  $\perp \pi_1$ , E en G liggen dus op de snijlijn (UV genaamd) van  $\beta$  en  $\gamma$  (merk op dat  $v_\beta = HZ$ ). Als controlemiddel hebben we dat  $EP \perp HZ$  is evenals RG. Om de punten F en H te construeren kunnen we het vlak door QS  $\perp \pi_1$  aanbrengen en snijden met  $\beta$ . We kiezen hier een andere weg:  $HE // SP$ , dus HE gaat door  $O_2$ ; verder is  $HS \perp GL$  (waarom?).

Op analoge wijze wordt F bepaald. Hierna wordt de projectie van de schaduw van het lichaam op  $\pi_1$  geconstrueerd. LF wordt gesneden met  $L_1 Q (= L_1 F_1)$  enz.; zo vinden we de schaduwen  $S_E$ ,  $S_F$  en  $S_G$  van de



punten E, F en G. De schaduw van H blijkt niet nodig! (Waarom?) Daarmee is gevonden de slagschaduwgrens  $AS_E S_F S_G C$ . Bedenk hierbij dat  $EF // GL$  is dus  $S_E S_F // EF$  (waarom?). Ook is in de ruimte  $S_G S_F // GF$ , dus in projectie hebben genoemde lijnen het vluchtpunt  $O_2$  gemeen (controlemiddel).



Figuur 159b

In Figuur 159b is het lichaam met schaduw nogmaals getekend, maar ont-  
daan van alle constructielijnen.

2. Een rechte cirkelcilinder met gegeven hoogte  $h$  staat met zijn grondcir-  
kel op  $\pi_1$  (gegeven middelpunt, gegeven straal). We construeren van grond-  
en bovenvlak een paar toegevoegde middellijnen, daarna de schijnbare  
omtrek van het lichaam.



In neergeslagen stand van  $\pi_1$  (zie Figuur 160) wordt de cirkel getekend (hij raakt aan GL). Op de verdwijnas  $w_n$  van  $\pi_1$  wordt  $P_n$  genomen en wel zó dat  $P_n M_n \perp GL$  is. De poollijn  $p_n$  wordt geconstrueerd (hulplijnen zijn weggelaten). Omdat  $P_n M_n \perp GL$  is, is  $Q_n$  (zie Figuur 155) het oneigenlijke punt van  $w_n$  (immers  $Q_n$  op  $p_n$  en op  $w_n$ ). De lijn  $q_n$  is dus dezelfde als  $P_n M_n$ . De paren snijpunten  $A_n, B_n$  van  $p_n$  en  $C_n, D_n$  van  $q_n$  worden in projectie de eindpunten van een paar toegevoegde middellijnen.

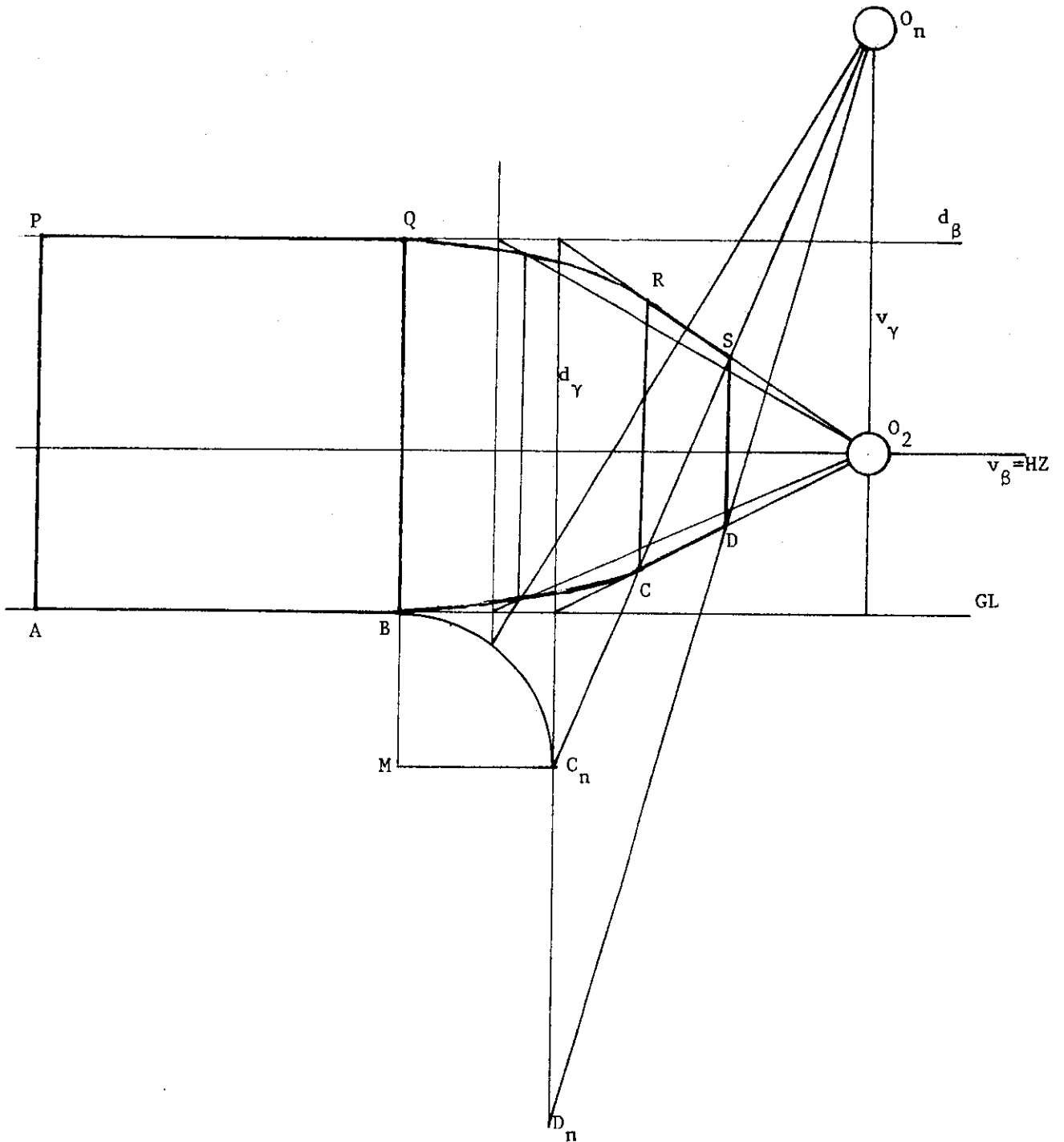
Met behulp van perspectiviteit worden A, B, C en D geconstrueerd. Bedenk hierbij dat  $AB // A_n B_n // GL$  is. Na het construeren van C en D wordt W als midden van CD genomen en daarna de lijn door  $W // GL$ , A en B zijn nu bekend. In de uiteinden worden ook de raaklijnen aan de ellips getekend. Om een paar toegevoegde middellijnen in het bovenvlak  $\beta$  te vinden, bedenken we dat deze te vinden zijn als parallelprojectie van een paar in het grondvlak. De projectierichting is in de ruimte  $\perp \pi_1$ , dus in projectie  $\perp GL$ . We brengen daarom het vlak  $\gamma$  aan door CD en  $\perp \pi_1$ . De snijlijn van  $\beta$  en  $\gamma$  ( $O_2 R$ ) snijden we met lijnen door D en C  $\perp GL$ . Dit geeft het paar S, R. Het middelpunt W van de grondellips wordt eveneens "opgehaald" tot RS; het resultaat is U, dat middelpunt van de bovenellips is. We trekken nu door U de rechte  $// AB$  en snijden deze met de loodlijnen door A en B op GL. Het resultaat is de middellijn PQ, toegevoegd aan RS (waarom?).

Om de schijnbare omtrek te completeren denken we aan de ware omtrek. Een raakvlak door O aan de cilinder wordt gemakkelijk bepaald door zijn door-gang met  $\pi_1$  te construeren. Daartoe projecteren we O op  $\pi_1$  en trekken in het neergeslagen  $\pi_1$  de raaklijnen door  $O_{1n}$  aan de neergeslagen grond-cirkel. (Ga na waarom  $O_{1n}$  het snijpunt is van  $O_n O_2$  met de neergeslagen

verdwijnas van  $\pi_1$ .) Van ons projecterend raakvlak is nu de  $\tau$ -doorgang ( $d_\epsilon$  resp.  $d_\sigma$ ) bekend. We merken hierbij op dat  $d_\epsilon$  perspectivisch is toegevoegd aan de neergeslagen eerste doorgang van het raakvlak  $\epsilon$  omdat  $\epsilon$  een projecterend vlak is. Vervolgens wordt op  $d_\epsilon$  het raakpunt  $F$  met de grondvlak-ellips verkregen uit  $F_n$ . Voor de constructie van het raakpunt van  $d_\epsilon$  met de bovenellips is geen perspectiviteitsrelatie ter beschikking. We snijden  $\epsilon$  gemakkelijk met het bovenvlak  $\beta$  door een hulpvlak te gebruiken. Daarna is de tekening te voltooien.

3. Constructie van de gevel van een gebouw, waarvan twee delen onderling loodrecht zijn, terwijl de delen verbonden worden door een cirkelvormige boog.

De gevel  $ABQP$  ligt in  $\tau$ . In de neergeslagen  $\pi_1$  is de plattegrond van de gevel,  $ABCD$  getekend. Met perspectiviteit is deze in projectie gebracht. Omdat we hier slechts een kwart van een ellips nodig hebben, hebben we geen toegevoegde middellijnen geconstrueerd, maar enige punten van de cirkel geprojecteerd (zie Figuur 161). Daarna is de zijgevel het vlak  $\gamma$  (door  $GDSR$ ) gesneden met het bovenvlak  $\beta$  (de afstand  $d_\beta$  tot  $GL$  is gelijk aan de hoogte van de gevels). Op dezelfde wijze zijn enige punten van de grondellips opgehaald tot het bovenvlak.



Figuur 161

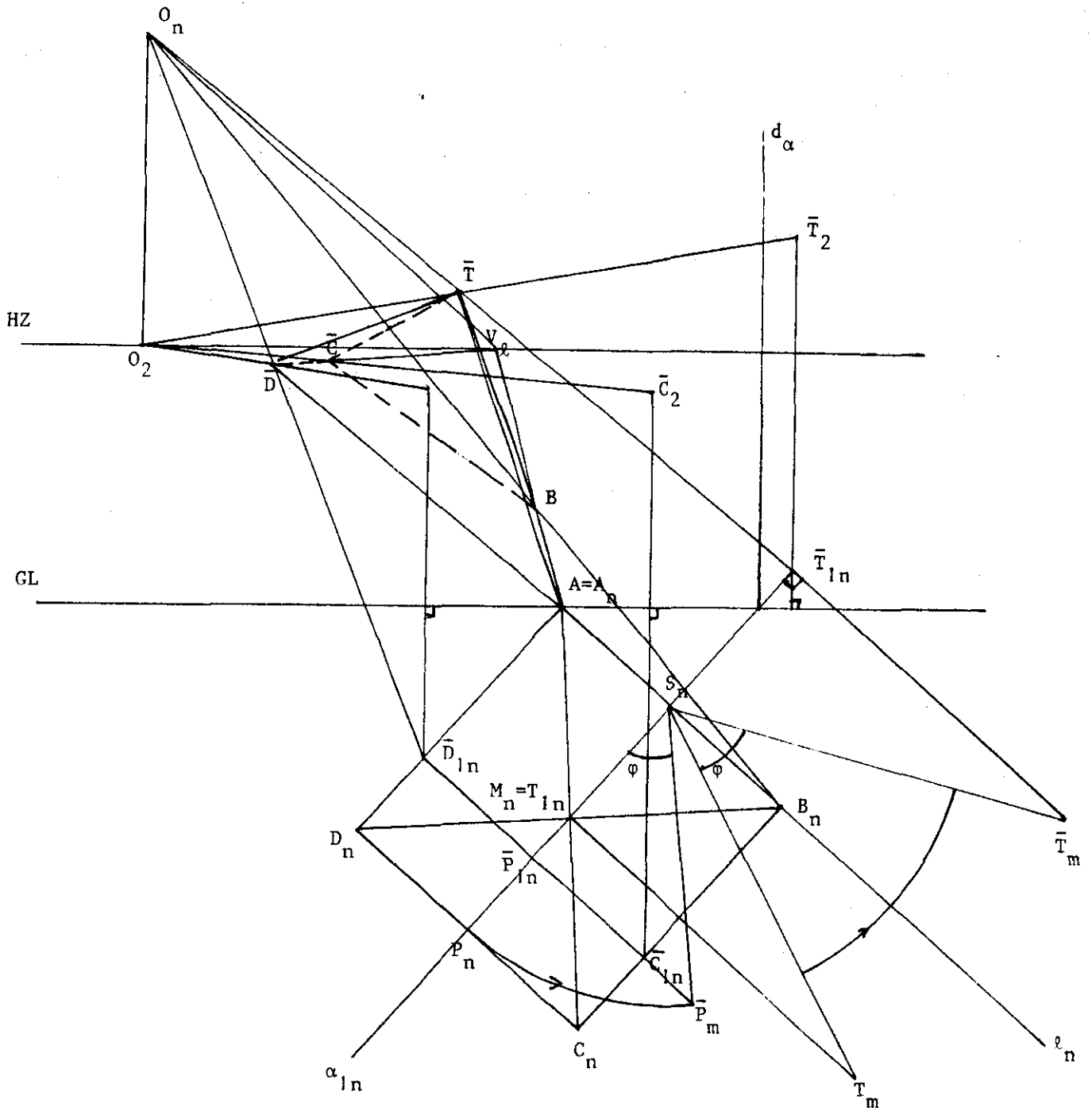


4. Van een regelmatige vierzijdige pyramide  $ABCD^T$  ligt het grondvlak ABCD in  $\pi_1$ ; de afstand van T tot het grondvlak is bekend. We willen de pyramide om AB over een hoek  $\varphi$  wentelen.

De constructie is uitgevoerd in Figuur 162. Een algemene theorie over het wentelen van een lichaam zullen we niet geven, omdat die tot gecompliceerde en weinig heldere tekeningen leidt.

Van het grondvlak ABCD wordt de neerslag in de gewentelde  $\pi_1$  getekend, alsmede van M d.i. de orthogonale projectie van T op  $\pi_1$ . Het wentelen gebeurt in een vlak  $\perp AB$ . We nemen daarvoor het vlak  $\alpha$  door M, omdat T daarin ligt. In de ruimte is P de orthogonale projectie van C en D op  $\alpha$ , S de projectie van A en B op  $\alpha$ . S is het rotatiemiddelpunt. In de tekening is de wenteling uitgevoerd in het neergeslagen vlak  $\alpha$ . Dit vlak hebben we echter niet om  $d_\alpha$  in  $\tau$  neergeslagen, maar zoals in de andere projectiemethoden, om  $\alpha_1$  in  $\pi_1$ . Bij dit neerslaan vinden we  $T_m$  zó dat  $M T_m \perp \alpha_{1n}$  en  $M T_m =$  de afstand van T tot  $\pi_1$  (dus de afstand van  $T_2$  tot GL). De gevraagde wenteling over  $\varphi$  levert ons de punten  $\bar{P}_m$  en  $\bar{T}_m$ . Het voetpunt van de loodlijn uit  $\bar{T}_m$  op  $\alpha_{1n}$  is  $\bar{T}_{1n}$ , de afstand  $\bar{T}_m \bar{T}_{1n} =$  de afstand van  $\bar{T}$  tot  $\pi_1$ . Hieruit vinden we  $\bar{T}$ .

$\bar{C}$  en  $\bar{D}$  liggen in vlakken door B resp. A en  $\perp$  de wentelas AB; daarin ligt  $\bar{C}_{1n}$  op  $C B_{nn}$  en  $\bar{D}_{1n}$  op  $D A_{nn}$ . We vinden deze punten door de loodlijn uit  $\bar{P}_m$  te snijden met  $C B_{nn}$  en  $D A_{nn}$ . De afstand van  $\bar{P}_m$  tot  $\alpha_{1n}$  is de afstand van  $\bar{C}$  en  $\bar{D}$  tot  $\pi_1$ . Hieruit vinden we  $\bar{C}_2$  en  $\bar{D}_2$  en daarmee  $\bar{C}$  en  $\bar{D}$ .



Figuur 162

## 9. Diversen

### Inleiding

In dit hoofdstuk zullen we enige stellingen over kegelsneden behandelen, alsmede verscheidene vaak voorkomende oppervlakken en lichamen.

### 9.1. Kegelsneden

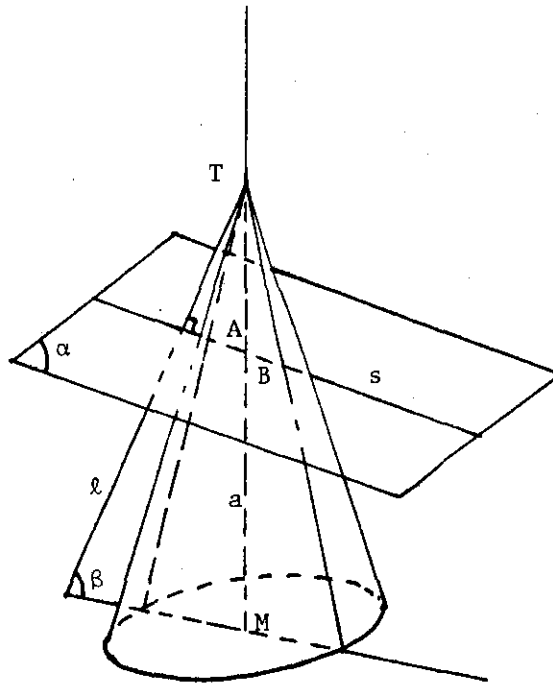
In het V.W.O. worden kegelsneden op algebraïsche wijze behandeld; men gaat uit van de brandpuntsdefinitie en komt op vergelijkingen als:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{voor de ellips ,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{voor de hyperbool ,}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{voor de parabool .}$$

In §6.3 hebben we met een heel andere definitie kennis gemaakt, nl. een kegelsnede is de doorsnijding van een kegel en een vlak dat niet door de top van de kegel gaat. In deze § zullen we het verband leggen tussen de beide methoden. Beschouw daartoe Figuur 156. Het vlak  $\alpha$  snijdt de rechte cirkelkegel volgens een kegelsnede  $K$ . Neem  $\alpha$  niet loodrecht op de as van de kegel; breng door de as het vlak  $\beta \perp \alpha$  aan. Zij  $P$  een punt van  $K$  en  $P'$  zijn gespiegelde t.o.v.  $\beta$ .  $P$  ligt in  $\alpha$ ; omdat  $\alpha \perp \beta$  is ligt  $P'$  in  $\alpha$ .  $P$  ligt op de kegel,  $\beta$  is meridiaanvlak van de kegel, dus  $P'$  ligt ook op de kegel. Het gevolg is dat  $P'$  ook op  $K$  ligt. Het vlak  $\beta$  is dus symmetrievlak van  $K$ , zodat de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$  symmetrie-as van  $K$  is.



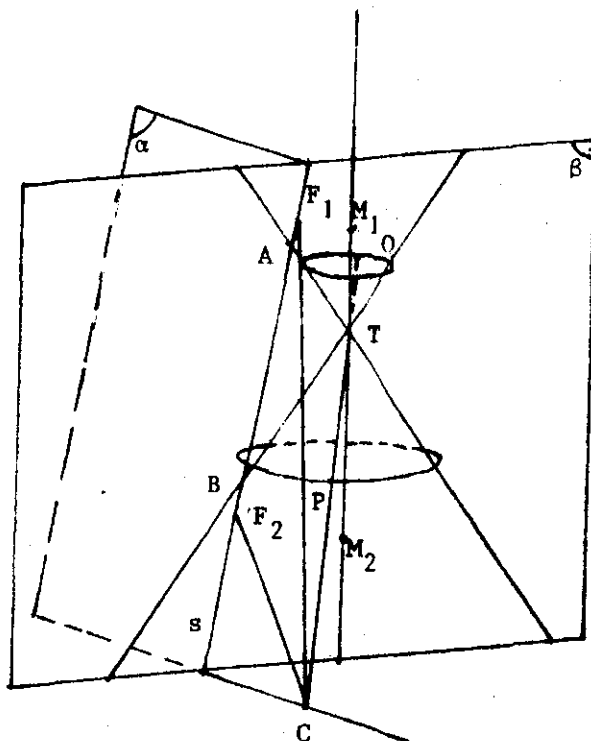
Figuur 156

In Figuur 156 zijn de punten A en B op s ook punten van K. Het vlak  $\alpha$  is zó gekozen dat K een ellips is. Als  $\alpha$  evenwijdig met twee beschrijvenden van de kegel is, dan is K een hyperbool in de zin van § 6.3. De snijlijn s van  $\alpha$  en  $\beta$  is ook nu symmetrie-as. Als  $\alpha$  evenwijdig met één beschrijvende is, dan is K een parabool, eveneens in de zin van § 6.3; s heeft dan één punt met K gemeen.

Eerst bekijken we Figuur 157, waar K een ellips is. In het vlak  $\beta$  kunnen we twee cirkels tekenen, die TA, TB en AB raken. Hun middelpunten  $M_1$  en  $M_2$  liggen op de as (bissectrice van  $\angle ATB$ ) en op de bissectrices van de binnen- en buitenhoek TAB. De raakpunten van AB met de cirkels noemen we  $F_1$  en  $F_2$ . Omdat de middelpunten op de as liggen, kunnen we de cirkels beschouwen als meridiaandoorsneden van bollen. Deze bollen raken de kegel volgens cirkels en raken  $\alpha$  omdat  $\alpha \perp \beta$  is.



hebben met de letters  $F_1$  en  $F_2$ . Ze zijn de brandpunten van de ellips.  
In Figuur 158 is  $\alpha$  zó gekozen dat  $K$  een hyperbool is. Ook nu zijn er in  $\alpha$  twee cirkels die  $TA$ ,  $TB$  en  $AB$  raken. Hun middelpunten  $M_1$  en  $M_2$  vinden we op dezelfde manier als bij Figuur 157 is beschreven.



Figuur 158

De cirkels zijn ook weer meridiaandoorsneden van bollen die de kegel volgens cirkels en  $\alpha$  in  $F_1$  resp.  $F_2$  raken.

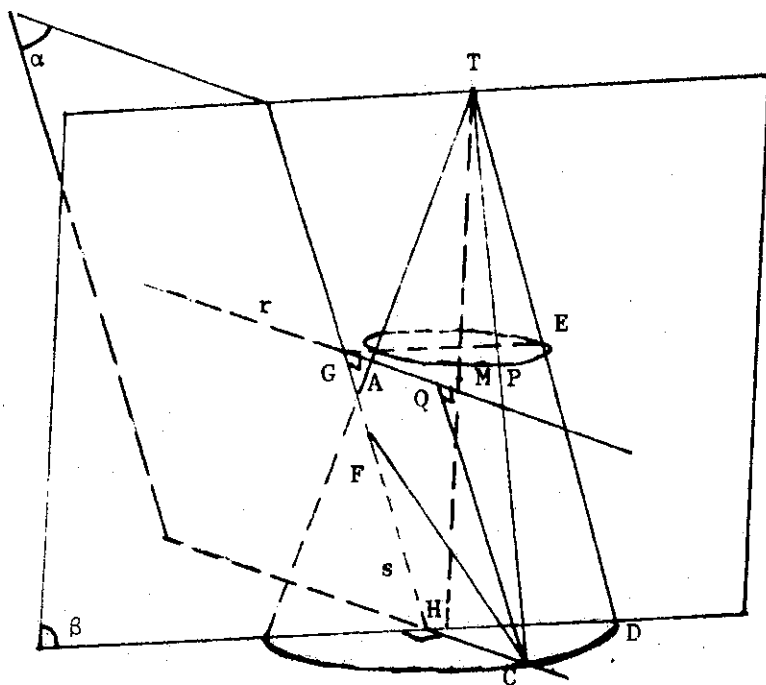
$C$ , een punt van  $K$ , ligt op de kegel en in  $\alpha$ . Trek de beschrijvende  $CT$ . Deze snijdt de raakcirkels in de punten  $P$  en  $Q$ . Op dezelfde manier als bij de ellips geldt:  $CF_1 = CQ$ ,  $CF_2 = CP$ ; hier volgt  $CF_1 - CF_2 = PQ$ .

Nemen we  $C$  op de bovenste tak van de doorsnijding dan vinden we  $CF_2 - CF_1 = PQ$ .

Gevolg: voor de punten van de hyperbool K geldt dat de absolute waarde van het verschil der afstanden tot  $F_1$  en  $F_2$  constant is.

Opmerking. Ook hier is  $AF_1 = BF_2$ .

Tenslotte brengen we  $\alpha$  aan evenwijdig aan één beschrijvende. In Figuur 159 is  $\alpha // TD$  d.w.z. de snijlijn  $s$  van  $\alpha$  en  $\beta$  is  $// TD$ ;  $s$  snijdt  $K$  slechts in een punt  $A$ . Nu is er slechts één cirkel die de beide beschrijvenden in  $TA, TD$  en  $s$  raakt. (Ga dit na door  $\beta$  als tafereel te gebruiken.)



Figuur 159

De cirkel is meridiaancirkel van de bol die de kegel volgens een cirkel en het vlak  $\alpha$  in  $F$  raakt. Zij verder  $r$  de snijlijn van  $\alpha$  en het vlak van de raakcirkel, dan is  $r \perp \beta$  (waarom?).

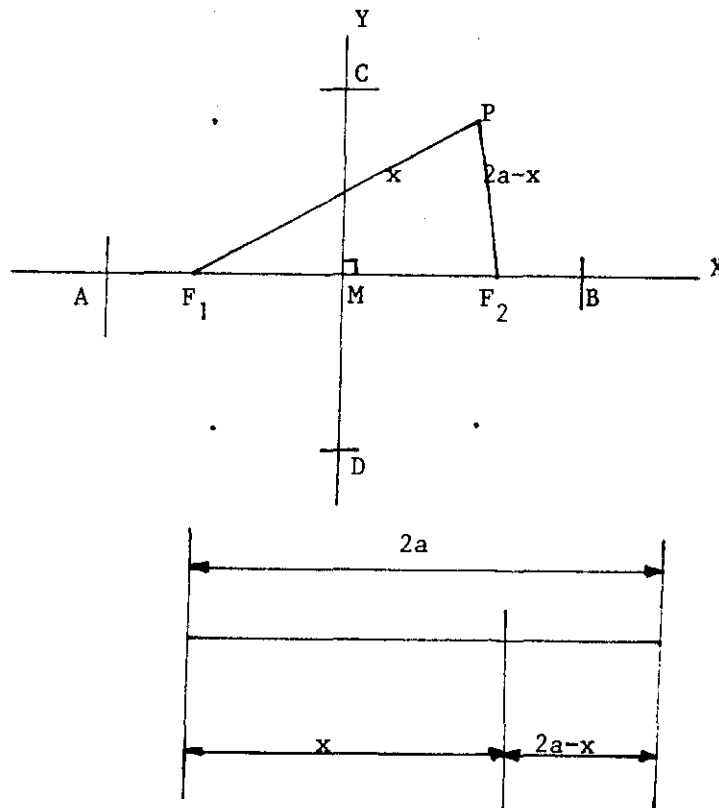
Zij  $C$  een punt van  $K$ ;  $CT$  snijdt het vlak van de raakcirkel in  $P$ . Nu is  $CF = CP$  en  $CP = DE$  (zie figuur).

Omdat  $s // DE$  en  $HD // GE$  is  $DE = HG$ . Trek door  $C$  de lijn  $CQ // HG$ , dan is  $CQ = HG$ . Dus is  $CF = CQ$ . Ook is  $HG \perp r$  (waarom?), dus  $CQ \perp r$ . Het gevolg is dat van elk punt van  $K$  de afstand tot  $F$  gelijk is aan die tot de lijn  $r$ .

Opmerking. Uit de behandeling van de drie doorsnijdingssituaties blijkt dat de in de vlakke meetkunde gebruikte definities van ellips, hyperbool in de stereometrie eigenschappen zijn. Deze eigenschappen staan bekend als de stellingen van Dandelin (Belgisch wiskundige 1794-1847).

### 9.2. De ellips

De brandpuntsdefinitie die, zoals we nu weten, een eigenschap van de ellips uitdrukt, leidt tot de constructie, zoals getekend in Figuur 160. Is  $2a$  de gegeven som der afstanden dan worden, door  $x$  te laten veranderen, punten als  $P$  geconstrueerd z6 dat  $PF_1 + PF_2 = 2a$  (de z.g. tuimansconstructie).



Figuur 160

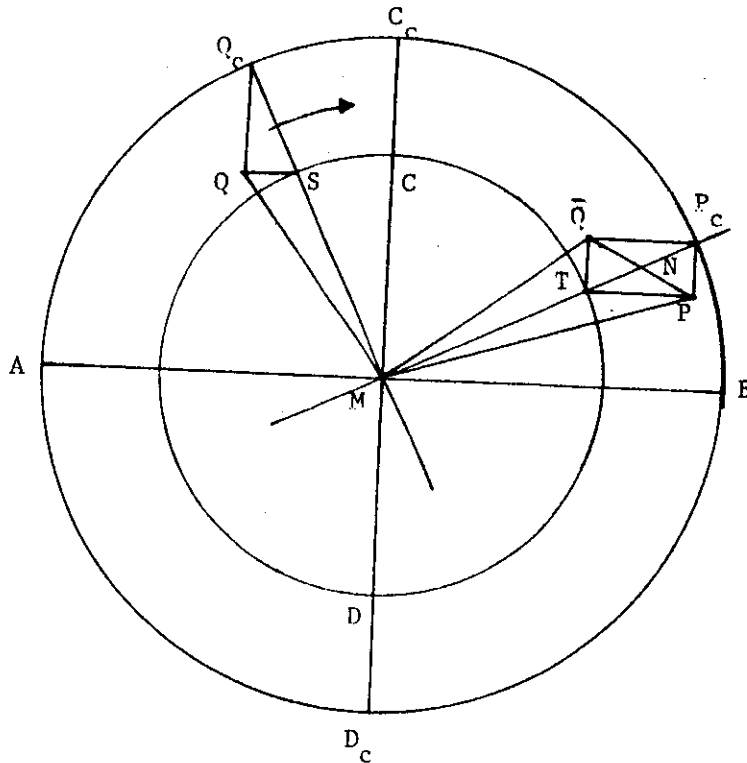




tie, waarbij de affiniteit is vastgelegd door de as AB en het paar  $C_c C$ .  
(Zie ook §6.5, Figuur 116a en 116b.)

We kunnen uit de gevonden verkortingsfactor  $\frac{b}{a}$  (in Y-richting) ook nog een andere constructie afleiden, één die we hierna nog zullen gebruiken. Beschouw een punt  $Q_c$ ; als  $MQ_c$  de cirkel met middelpunt M en straal b snijdt in T, dan is Q snijpunt van de lijn door  $Q_c \perp AB$  en de lijn door  $T // AB$ . (Ga dit na!)

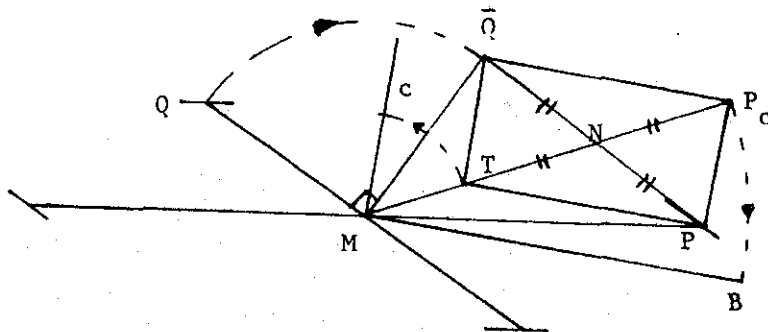
We nemen in Figuur 162 de punten  $P_c$  en  $Q_c$  zó dat  $\angle Q_c M P_c = 90^\circ$ , dus  $M P_c$  en  $M Q_c$  vormen een paar (halve) toegevoegde middellijnen van de cirkel.



Figuur 162

De affiene beelden zijn P en Q; MP en MQ vormen een paar (halve) toegevoegde middellijnen van de ellips. In de figuur is  $\triangle QQ_c S \cong \triangle PTP_c$  (waarom?). We draaien  $\triangle QQ_c S$  om M over een hoek van  $90^\circ$ ; het beeld van de driehoek is  $\triangle \bar{Q}P_c T$ ; vierhoek  $TPP_c \bar{Q}$  is een rechthoek.  $P_c P$  is loodrecht op de lange as AB,  $MP_c$  is de lengte van de lange as, MT de lengte van de korte as.

We maken van het behandelde gebruik om, uitgaande van een gegeven paar toegevoegde middellijnen, de assen van de ellips te construeren. Zie Figuur 163 waar MP en MQ gegeven zijn. (We nemen het paar halve middellijnen dat een stompe hoek insluit).

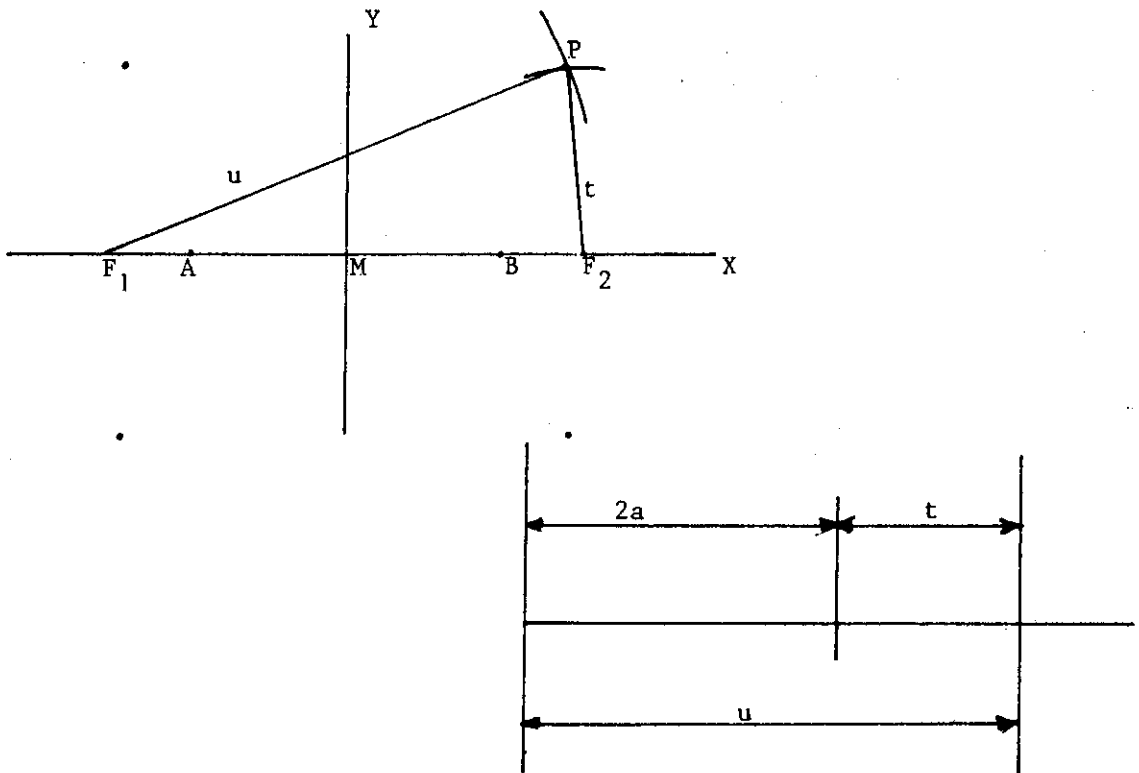


Figuur 163

Om de assen te vinden draaien we MQ om een hoek van  $90^\circ$  in de richting van MP, het resultaat is  $\bar{Q}$ . We construeren nu de rechthoek  $TPP_c \bar{Q}$ : diagonaal  $TP_c$  gaat door M en het midden N van  $P\bar{Q}$ ; ook is  $TP_c$  even lang als  $P\bar{Q}$ . De halve lange as MB is evenwijdig aan TP en  $MB = MP_c$ , terwijl de lengte van de halve korte as MC gelijk is aan MT.

### 9.3. De hyperbool

De brandpuntseigenschap leidt tot de constructie van punten, zoals getekend in Figuur 164 (De lengte  $t$  is veranderlijk,  $|PF_1 - PF_2| = 2a$ .)



Figuur 164

Vanwege de symmetrie vinden we bij het punt  $P$  nog drie punten.

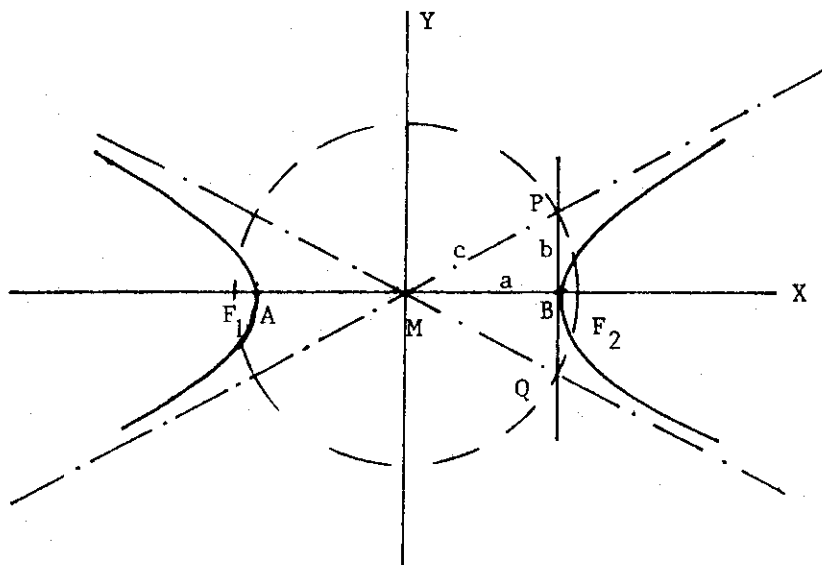
Op de symmetrie-as  $F_1F_2$  liggen de punten  $A$  en  $B$  met  $AM = MB = a$  ( $M$  midden van  $F_1F_2$ ). Stellen we  $F_1F_2 = 2c$ , dan vinden we bij het assenkruis als getekend in de figuur) de vergelijking van de hyperbool:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; hierin is  $b^2 := c^2 - a^2$ .

In Figuur 158 hebben we gezien dat de kegel twee beschrijvende heeft die het vlak  $\alpha$  niet snijden. De hyperbool heeft dus twee oneigenlijke punten. We vinden de richtingen van deze punten aldus:

We snijden de lijn door de oorsprong  $y = px$  met de hyperbool (zie Figuur 165). De x-coördinaten van de snijpunten vinden we uit

$$x^2 \left( \frac{b^2}{a^2} - p^2 \right) = b^2 \quad (y \text{ geëlimineerd})$$

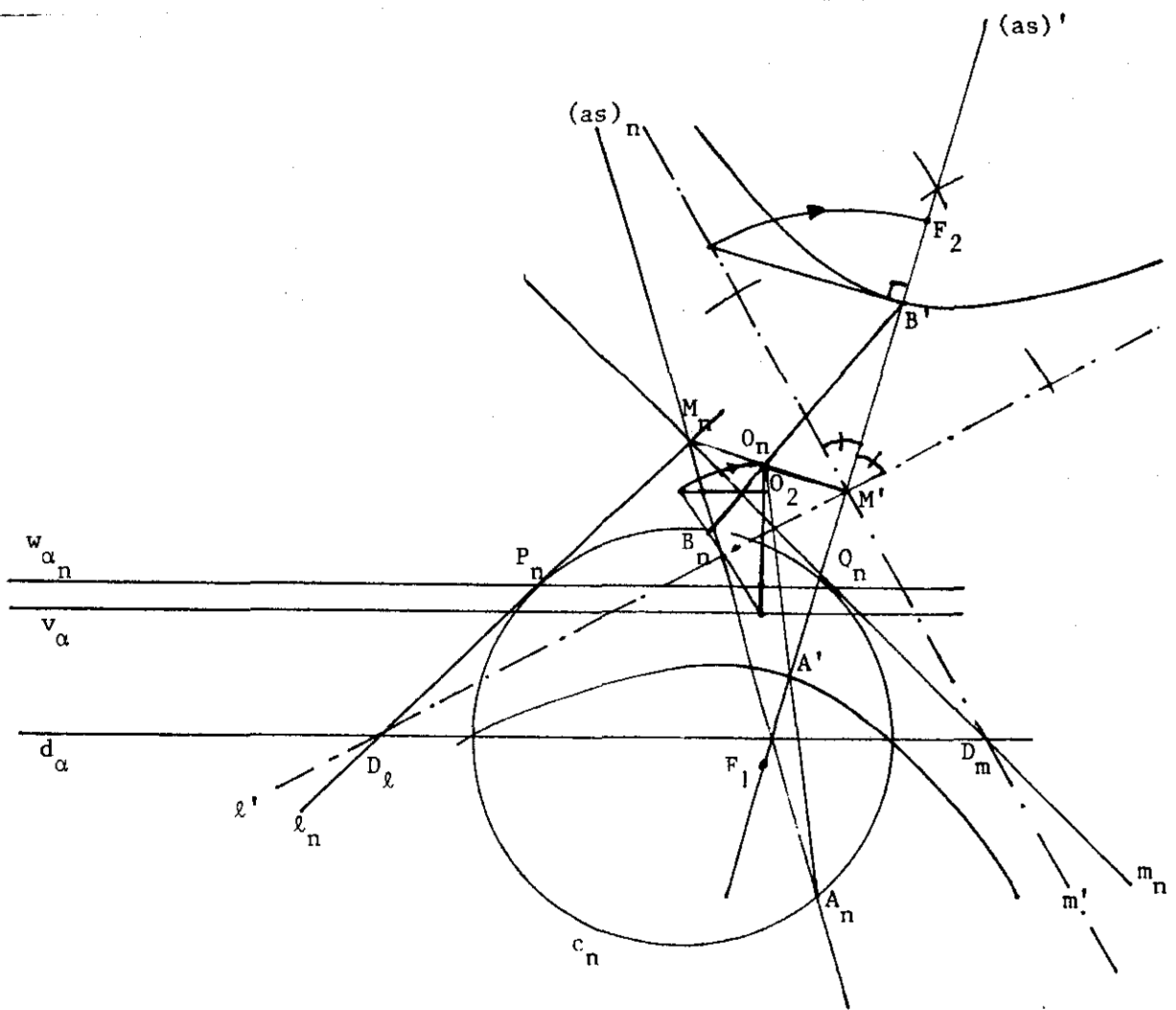
We vinden dus steeds snijpunten, behalve voor  $p^2 \geq \frac{b^2}{a^2}$ . De lijnen  $y = \pm \frac{b}{a} x$  hebben oneigenlijke snijpunten met de hyperbool gemeen. Deze lijnen heten asymptoten van de hyperbool. De symmetrie-assen zijn bissectrices van de hoeken der asymptoten. Uit de vergelijkingen  $y = \pm \frac{b}{a} x$  zien we ook een constructiemogelijkheid voor de asymptoten. Passen we nl. op de loodlijn door B op de X-as het stuk b af, dan zijn P en Q punten van de asymptoten. Bovendien is  $MP = \sqrt{a^2 + b^2} = c$ , dus P,  $F_1$ ,  $F_2$  en Q liggen op de cirkel met straal c en middelpunt M.



Figuur 165

Het zal duidelijk zijn dat in Figuur 158 de twee beschrijvende van de kegel die  $\alpha$  niet snijden evenwijdig zijn met de asymptoten.

In Figuur 166 hebben we de constructie van de centrale projectie van een cirkel uitgevoerd in het geval de cirkel  $c$  twee punten met  $W_\alpha$  gemeen heeft. De cirkel  $c$  is met  $\alpha$  in  $\tau$  gewenteld. De snijpunten van  $c_n$  met  $W_{n\alpha}$  zijn  $P_n$  en  $Q_n$ ;  $O_n P_n$  en  $O_n Q_n$  zijn de asymptotische richtingen.



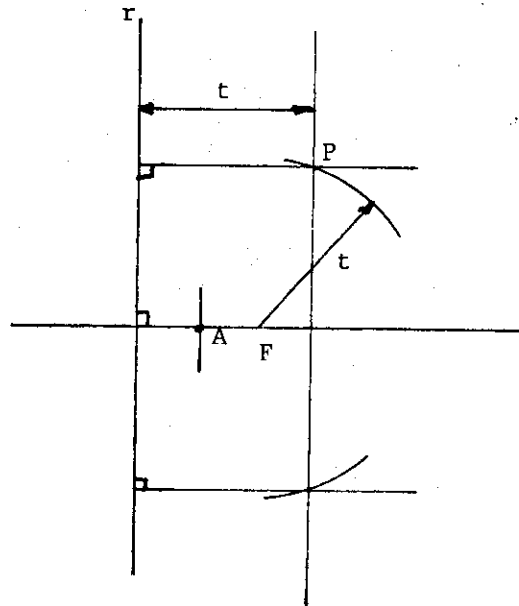
Figuur 166

De asymptoot  $\ell'$  gaat door  $D_\lambda$  en is evenwijdig  $O P_n$  (waarom?). Analoog is  $m' // O_n Q_n$ . Hun snijpunt  $M'$  is middelpunt van de hyperbool; de as is één der bissectrices van de hoeken tussen  $\ell'$  en  $m'$ . (In deze figuur snijdt de cirkel  $d_\alpha$ , zodat we de bissectrice direct kunnen herkennen. In een ander geval zullen we eerst één punt van de hyperbool kunnen construeren.)

Uit  $(as)'$  wordt zijn origineel  $as_n$  gevonden als lijn door het doorgangspunt van  $(as)'$  en  $M_n$ . De snijpunten  $A_n$  en  $B_n$  van  $as_n$  en  $c_n$  hebben de toppen  $A'$  en  $B'$  op  $(as)'$  tot beeld. Met behulp van de constructie van Figuur 165 vinden we  $F_1$  en  $F_2$ . Omdat  $A'F_2 - A'F_1 = 2a$ , is  $2a$  bekend, zodat we de hyperbool kennen.

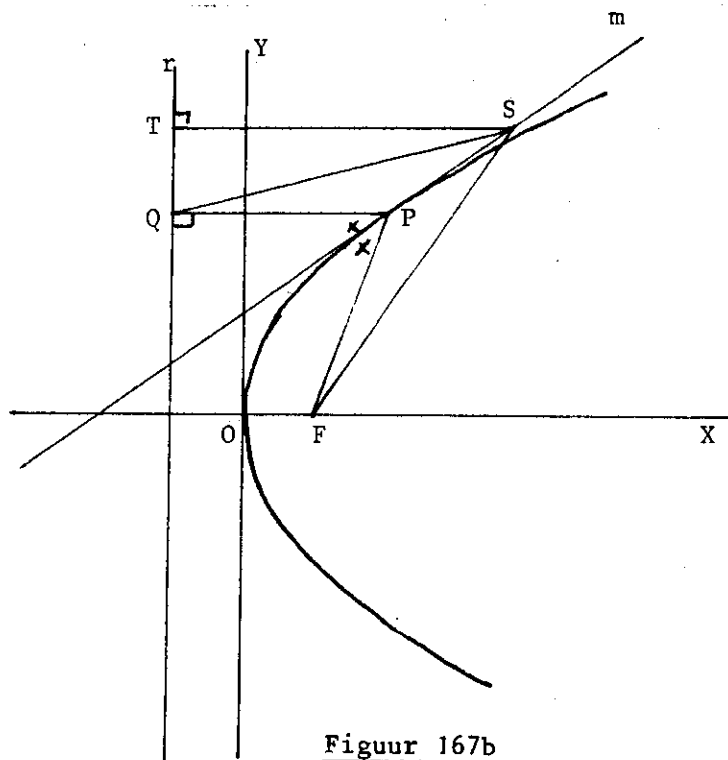
#### 9.4. De parabool

Uitgaande van de brandpuntseigenschap van de parabool kunnen we, door  $t$  te laten variëren, deze punt voor punt construeren. (Zie Figuur 167a.)



Figuur 167a

De lijn  $r$  uit Figuur 159 heet richtlijn (notatie:  $r$ ). De lijn door  $F$  en  $\perp r$  is symmetrie-as van de parabool. Op de as ligt het punt  $A$ , de top van de parabool. De raaklijn in  $A$  is loodrecht op de as. Beschouw nu Figuur 167b.



Figuur 167b

$PQ = PF$ , dus  $P$  ligt op de middelloodlijn  $m$  van  $FQ$ . De lijn  $m$  is raaklijn in  $P$  aan de parabool. We tonen dit aan. Is  $S$  een punt van  $m$  ( $S \neq P$ ) dan is  $SQ = SF$ ; omdat  $SQ > ST$  (zie figuur) is  $ST \neq SF$ , zodat  $S$  niet op de parabool ligt. Omdat dit voor elk punt (behalve  $P$ ) van  $m$  geldt, heeft  $m$  slechts het punt  $P$  met de parabool gemeen, is dus raaklijn. (Merk op dat  $m$  de  $\angle QPF$  doormidden deelt.) Kiezen we de as als  $X$ -as,  $A$  als oorsprong en  $F(p,0)$ , dan vinden we als vergelijking van de parabool  $y^2 = 2px$ . De  $X$ -as heeft een oneigenlijk punt met de parabool gemeen.

In Figuur 168 is de centrale projectie getekend van de cirkel  $c$  (gelegen in het vlak  $\alpha$ ) in 't geval dat die projectie een parabool is. In de ruimte





Het brandpunt F vinden we met behulp van de bij Figuur 167b genoemde gelijkheid van hoeken. Een in onze tekening snel te vinden raaklijn aan de parabool is toegevoegd aan de raaklijn van de cirkel in één der doorgangspunten. Met F is ook de richtlijn r bekend.

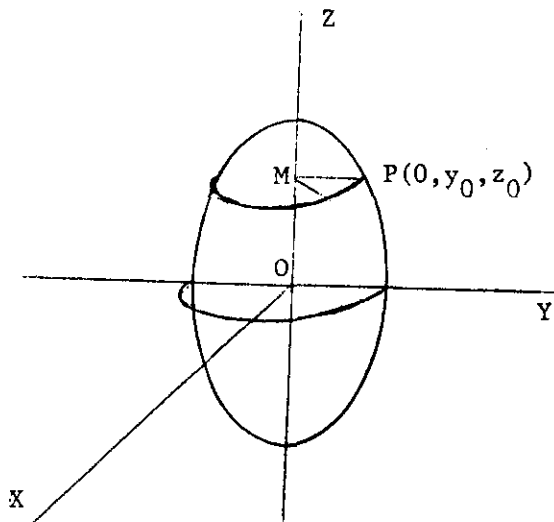
### 9.5. Omwentelingsoppervlakken

We hebben in Hoofdstuk 7 kennis gemaakt met enige omwentelingsoppervlakken, nl. de kegel, de cilinder en de bol. Ze ontstaan door een lijn resp. een cirkel te laten wentelen om een as a die met de lijn of de cirkel in één vlak ligt. We kunnen ook andere krommen, die met a in één vlak liggen, om a laten wentelen.

Gezien het belang van omwentelingsoppervlakken in de bouwkunde zullen we er enige van behandelen. We nemen daarom de ellips, de hyperbool en de parabool die we laten wentelen om een symmetrie-as.

#### 1. De omwentelingsellipsoïde

In het YOZ-vlak (zie Figuur 169) ligt de ellips met vergelijking  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ . We wentelen om de Z-as. Elk punt beschrijft een cirkel, gelegen in het vlak door het punt  $\perp$  Z-as. Ze beschrijft het punt  $P(0, y_0, z_0)$



Figuur 169

de cirkel met middelpunt  $M(0,0,z_0)$  gelegen in het vlak  $z = z_0$ . De vergelijking van de cirkel in dit vlak is  $x^2 + y^2 = z_0^2$ . Om de vergelijking van het oppervlak te vinden moeten we  $y_0$  en  $z_0$  elimineren uit de vergelijkingen

$$\frac{y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{b^2} = 1 \quad (P \text{ op de ellips!}) ,$$

$$x^2 + y^2 = z_0^2 ,$$

$$z = z_0 .$$

Het resultaat is  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  .

Het oppervlak heet omwentelingsellipsoïde.

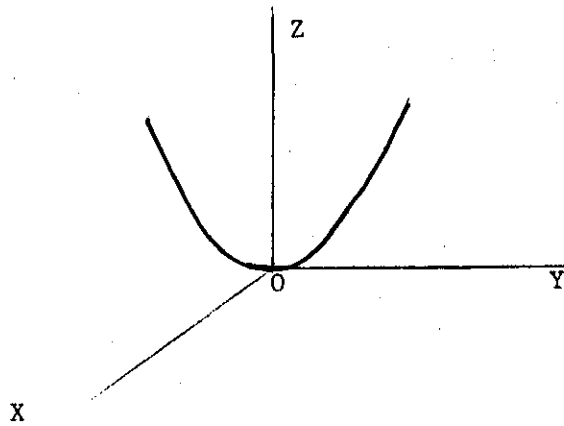
Zonder bewijzen vermelden we het volgende:

- a) Een vlak  $\perp$  Z-as (zeg  $z=c$ ) snijdt het oppervlak volgens een cirkel (als  $-|b| < c < |b|$ ), het raakt (als  $c = \pm b$ ) of het heeft er geen punt mee gemeen.
- b) Een in een andere stand liggend vlak snijdt het oppervlak volgens een ellips, het raakt of heeft er geen punt mee gemeen.

## 2. De omwentelingsparaboloïde

In Figuur 170 ligt de parabool met vergelijking  $y^2 = 2pz$  in het YOZ-vlak. De Z-as is wentelingsas. Als vergelijking van het oppervlak vinden we  $x^2 + y^2 = 2pz$  (ga na). Het oppervlak heet omwentelingsparaboloïde. Zonder bewijzen vermelden we het volgende:

- a) Een vlak  $\perp$  Z-as (zeg  $z=c$ ) snijdt het oppervlak volgens een cirkel (als  $pc > 0$ ), het raakt (als  $c = 0$ ) of het heeft geen punt er mee gemeen.

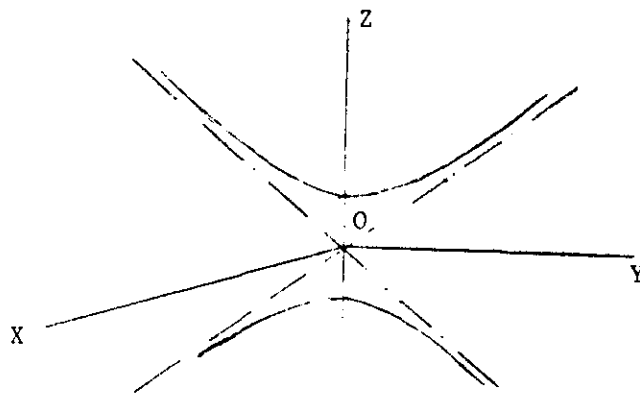


Figuur 170

- b) Een vlak //Z-as snijdt het oppervlak volgens een parabool.
- c) Een in een andere stand gelegen vlak snijdt het oppervlak volgens een ellips, het raakt aan het oppervlak of het heeft er geen punt mee gemeen.

3. De twebladige omwentelingshyperboloïde

In Figuur 171 ligt de hyperbool met vergelijking  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$  in het YOZ-vlak. Wentelen om de Z-as levert het oppervlak met vergelijking



Figuur 171

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1 \text{ (ga na).}$$

Het oppervlak heet een tweebladige omwentelingshyperboloïde (afgekort T.O.H.).

Laten we de asymptoten meewentelen dan ontstaat een kegel met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ . (Ga na.) Deze kegel heet asymptotenkegel.

Zonder bewijzen vermelden we het volgende:

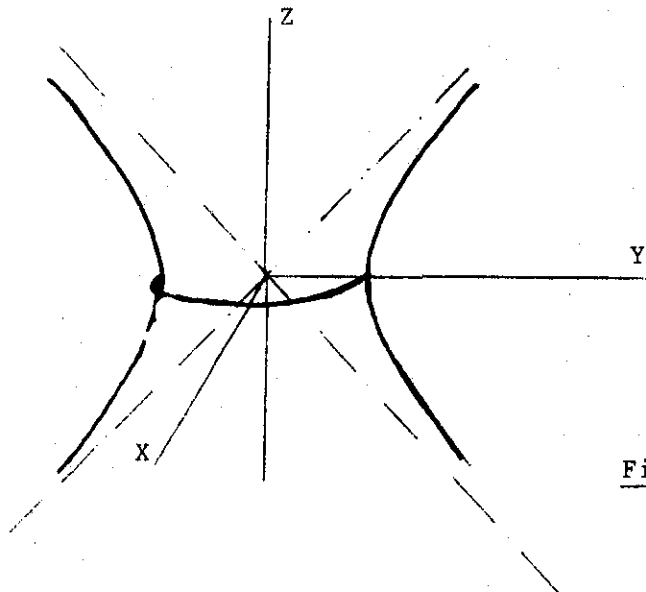
- a) Een vlak  $\perp$  Z-as (zeg  $z=c$ ) snijdt de T.O.H. volgens een cirkel (als  $|c| > |b|$ ), het raakt (als  $c = \pm b$ ) of het heeft er geen punt mee gemeen.
- b) Een vlak  $//$  Z-as snijdt de T.O.H. volgens een hyperbool.
- c) Een vlak in andere stand snijdt de T.O.H. volgens een hyperbool, een ellips, is raakvlak of heeft er geen punt mee gemeen.

#### 4. De eenbladige omwentelingshyperboloïde

In Figuur 172 ligt de hyperbool met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = +1$  in

het YOZ-vlak. Wentelen om de Z-as levert het oppervlak met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = +1.$$



Figuur 172

Het oppervlak heet eenbladige omwentelingshyperboloïde (afgekort E.O.H.)

De bijbehorende asymptotenkegel heeft tot vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ .

Zonder bewijs vermelden we:

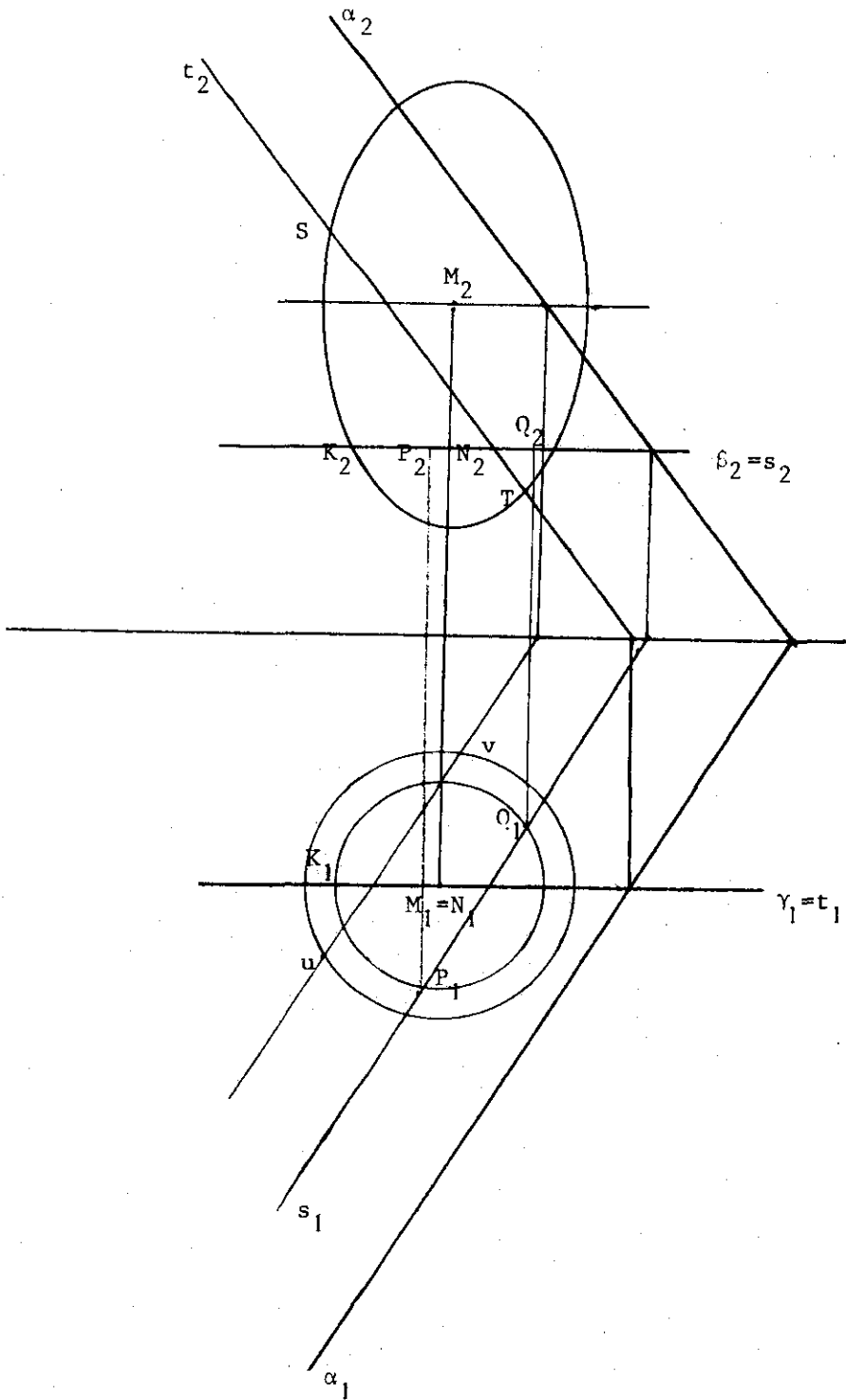
- a) Een vlak  $\perp$  Z-as snijdt de E.O.H. volgens een cirkel.
- b) Een vlak  $//$  Z-as snijdt de E.O.H. volgens een hyperbool.
- c) Een in een andere stand gelegen vlak snijdt E.O.H. volgens een hyperbool òf een ellips òf raakt de E.O.H.

Op dit raken komen we in een later stadium terug.

#### 9.6. Doorsneden van een vlak met een omwentelingsoppervlak

Bij de hiervoor ingevoerde omwentelingsoppervlakken bestaan methoden om toegevoegde middellijnen, assen, asymptoten enz. te bepalen van de doorsnede met een vlak. We zullen ze niet systematisch behandelen maar slechts een enkel voorbeeld geven; verder zullen we punt-voor-punt constructies gebruiken.

In Figuur 173 is (Amerikaanse projectie) aangegeven hoe punten van de doorsnijding van  $\alpha$  en een omwentelingsellipsoïde worden gevonden. (De wentelingsas is  $//$  Z-as.) Als hulpvlakken gebruiken we vlakken  $// \pi_1$ . Zo'n vlak snijdt  $\alpha$  volgens een lijn  $// \alpha_1$  en de ellipsoïde volgens een cirkel. Zo snijdt  $\beta$  het vlak  $\alpha$  volgens de rechte  $s$ , en de ellipsoïde volgens een cirkel met middelpunt  $N$  en straal  $N_2K_2$ ; van de snijpunten  $P$  en  $Q$  vinden we  $P_1$  en  $Q_1$  als snijpunten van  $s_1$  en de cirkel met middelpunt  $N_1$  en straal  $K_1N_1 (= K_2N_2)$ . Voor zover aanwezig vinden we de raakpunten van de projecties van de snij-ellips met de schijnbare omtrekken door de ware omtrekken te snijden met  $\alpha$ . Voor de schijnbare omtrek in  $\pi_2$  is het vlak  $\gamma$  door  $M$  en  $// \pi_2$  gevonden met  $\alpha$ . De snijlijn  $t$  is gesneden met de ellips. We vinden  $S$  en  $T$  als raakpunten.



Figuur 173

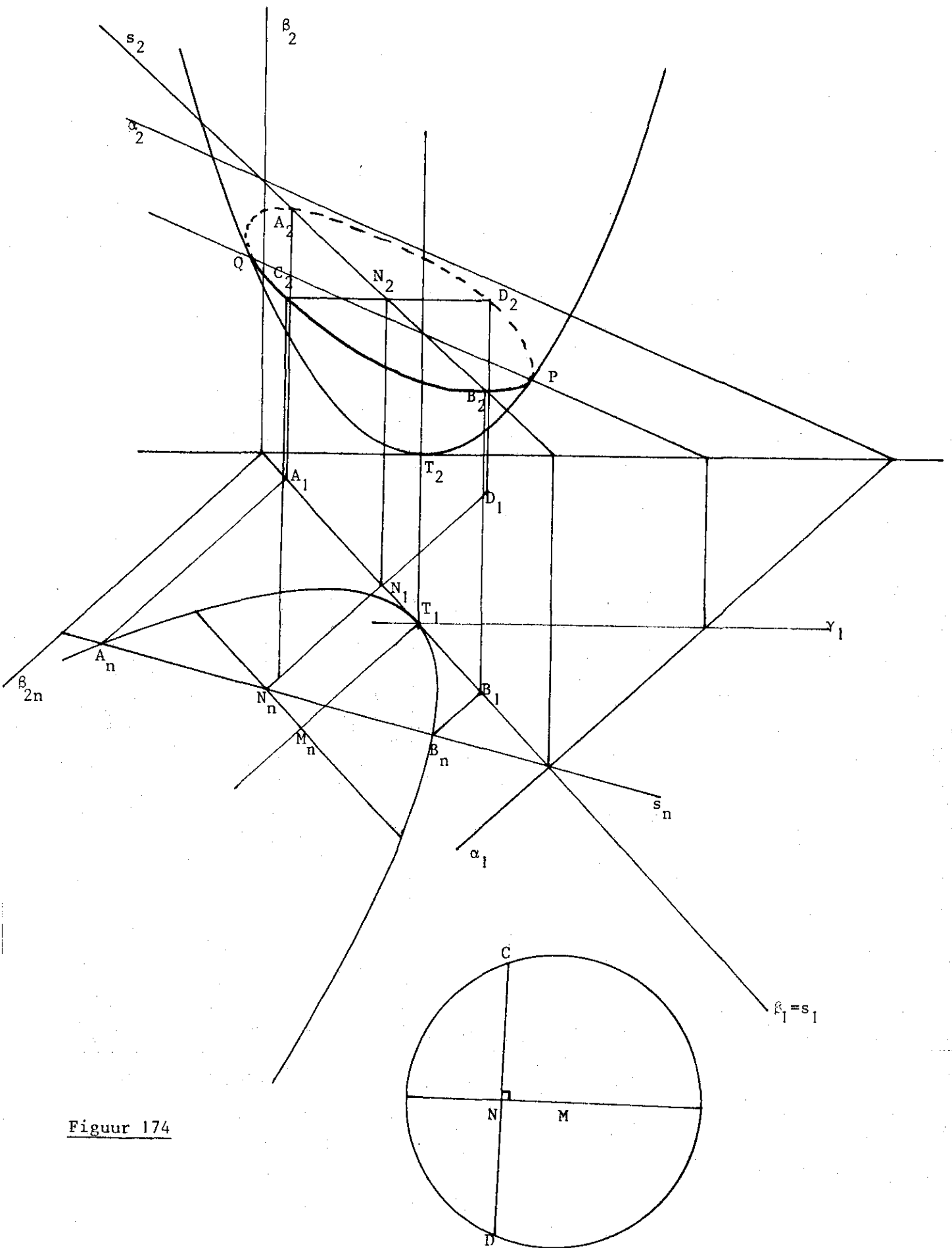
Opmerkingen

1. Het zal duidelijk zijn dat het bij punt-voor-punt constructies van groot belang is dat de krommen, nodig voor de uitvoering van die constructies, zeer zorgvuldig zijn getekend. Zo is in Figuur 173 een mal gebruikt om de ellips te tekenen.
2. Merk op dat een schijnbare omtrek niet altijd punten met een snijkromme gemeen heeft.

In Figuur 174 is (Amerikaanse projectie) een paraboloid met as  $\perp \pi_1$  en top in  $\pi_1$  gesneden met vlak  $\alpha$ . De lange as AB van de snij-ellips ligt in het meridiaanvlak  $\beta$  dat  $\perp \alpha$  is. In de projectie kunnen we  $A_1B_1$  en  $A_2B_2$  aangeven op de snijlijn s van  $\alpha$  en  $\beta$ . Het midden N van AB is middelpunt van de snij-ellips. De lengte van de korte as CD vinden we in de hulpfiguur. CD ligt nl. in het vlak door N en  $\parallel \pi_1$ . De afstand MN en de straal van de parallelcirkel in dit vlak bepalen de lengte van CD. Daarna zijn  $C_1D_1$  en  $C_2D_2$  bekend.

Ook tekenen we op de bekende wijze de raakpunten P en Q van de schijnbare omtrek in  $\pi_2$  en de projectie van de ellips (bepaald door  $\gamma$ ). Merk op dat er geen schijnbare omtrek van de paraboloid in  $\pi_1$  is.





Figuur 174

9.7. Snijpunten van een rechte met een omwentelingsoppervlak

De snijpunten van een rechte  $\ell$  met een omwentelingsoppervlak vinden we met behulp van een geschikt vlak  $\alpha$  door  $\ell$ .

Als  $\ell$  loodrecht op de wentelingsas is, kiezen we  $\alpha$  eveneens loodrecht op de as. De doorsnede van  $\alpha$  met het oppervlak is immers een cirkel. Als  $\ell$  de wentelingsas snijdt, dan nemen we voor  $\alpha$  het vlak door  $\ell$  en de as. We vinden nu de snijpunten door  $\alpha$  met de in  $\alpha$  gelegen meridiaankromme, alsmede  $\ell$  neer te slaan. Als  $\ell$  een willekeurige stand heeft, dan zullen we  $\alpha$  bij voorkeur door  $\ell$  en evenwijdig aan de wentelingsas kiezen. We zullen enkele punten van de doorsnede van  $\alpha$  en het oppervlak construeren en aan de hand hiervan een schatting van de snijpunten maken. (Er bestaat een exacte constructiemethode, maar die voert ons te ver.)

9.8. Raakvlak in een punt van een omwentelingsoppervlak

Zij  $P$  een punt op een omwentelingsoppervlak. We willen het raakvlak door  $P$  aan het oppervlak construeren. Zonder bewijs vermelden we dat zo'n vlak vastgelegd wordt door 2 lijnen die in  $P$  aan het oppervlak raken. We kunnen voor deze lijnen kiezen:

1. de raaklijn door  $P$  aan de parallelcirkel waarop  $P$  ligt.
2. De raaklijn door  $P$  aan de meridiaankromme waarop  $P$  ligt.

Zo'n raakvlak vertoont in sommige gevallen iets interessants.

In een vroeger stadium hebben we al de raakvlakken aan kegel, cilinder en bol besproken. Bij de kegel en de cilinder heeft een raakvlak een rechte met het oppervlak gemeenschappelijk, de bol raakt het vlak in precies één punt. Zonder bewijs vermelden we (men kan zich dit ruimtelijk gemak-



De vergelijking van het beschreven oppervlak krijgen we door  $\lambda$  te elimineren. We vinden voor die vergelijking

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{za}{b}\right)^2 + a^2, \text{ dus}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \text{ de reeds eerder gevonden vergelijking van}$$

de E.O.H. Blijkbaar kan de E.O.H. ook worden "opgebouwd" gedacht uit rechte lijnen. Het zal duidelijk zijn dat alle lijnen, corresponderend met één der posities van  $\ell$ , het XOY-vlak snijden op de cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  (keelcirkel genaamd) en dat ze elkaar kruisen. Ons omwentelingsoppervlak heeft o.a. het vlak  $x = 0$  als symmetrievlak. Spiegelen we  $\ell$  in dit vlak dan ontstaat  $m$ ; wentelen we  $m$  om dezelfde as dan wordt dezelfde E.O.H. verkregen. (Ga dit na.)

De gevonden series lijnen duiden we aan met  $p$ - resp.  $q$ -lijnen. (In de literatuur spreekt men vaak van rode en blauwe lijnen.) We vermelden (zonder bewijs)enige eigenschappen:

1. Een E.O.H. bevat precies twee series rechte lijnen.
2. Elke  $p$ -lijn kruist elke andere  $p$ -lijn (idem voor  $q$ -lijnen).
3. Elke  $p$ -lijn snijdt elke  $q$ -lijn.
4. Door elk punt van een E.O.H. gaat één  $p$ -lijn en één  $q$ -lijn
5. Een raakvlak in een punt van een E.O.H. bevat de  $p$ -lijn en de  $q$ -lijn, genoemd in punt 4.

Als we een punt  $P$  op de E.O.H. hebben en we bepalen met behulp van parallelcirkel en meridiaankromme het raakvlak  $\alpha$  in  $P$ , dan vinden we de  $p$ - en  $q$ -lijn in  $\alpha$  aldus: We snijden  $\alpha$  met de keelcirkel. De snijpunten, verbonden met  $P$ , leveren de gezochte  $p$ - en  $q$ -lijn.

Opmerking. Het is nu wel duidelijk waarom een koeltoren van beton uitgevoerd wordt als een E.O.H.

Tot slot geven we nog een aanwijzing voor de constructie van het raakvlak in een punt  $P$  dat op dat oppervlak ligt. In het algemeen hebben we hiervoor een meridiaanvlak nodig. Het kan doelmatig zijn om het punt  $P$  zó te wentelen dat het (als  $P^*$ ) in het vlak van een reeds bekende meridiaandoorsnede komt te liggen. Terugwentelen over de goede hoek van het raakvlak in  $P^*$  levert het gevraagde raakvlak.

#### 9.9. Schijnbare omtrek en schaduw

Uit voorgaande hoofdstukken is de werkwijze in principe reeds geheel bekend: Voor het bepalen van een schijnbare omtrek (voortaan s.o. genoemd) in  $\tau$  of in  $\pi_1$  dienen die projecterende stralen gesneden te worden met  $\tau$  resp.  $\pi_1$ , die aan het lichaam raken. Met andere woorden de gezochte s.o. is de projectie van de bijbehorende ware omtrek (w.o.). Dit alles geldt onafhankelijk van de gekozen (of te kiezen) projectie.

Voor schaduwconstructies (evenwijdig of puntvormig licht) geldt hetzelfde: de slagschaduwgrens (s.s.g.) is de s.o., dus de projectie van de betreffende w.o. die de eigenschaduwgrens (e.s.g.) vormt. Voor al deze constructies geldt, althans bij kwadratische oppervlakken, een belangrijke eigenschap (die we overigens niet bewijzen):

Bij kwadratische oppervlakken is de w.o. (en dus ook de e.s.g.) een kegelsnede, dus een vlakke figuur.

Deze eigenschap betekent dat een w.o. (en dus een e.s.g.) zou kunnen worden bepaald als doorsnede van het vlak van die w.o. (resp. de e.s.g.) met het kwadratische oppervlak.

Afhankelijk van het in tekening te brengen object en afhankelijk van de bedoeling die de tekenaar met zijn tekening heeft, kunnen verschillende werkwijzen gevolgd worden om w.o. (en s.o.) dan wel e.s.g (en s.s.g) te vinden. We hebben er reeds enige ontmoet, nl. de punt-voor-punt methode en het gebruik van een meridiaanvlak (om b.v. een paar toegevoegde middel-lijnen te vinden). We zullen er nog enkele bespreken.

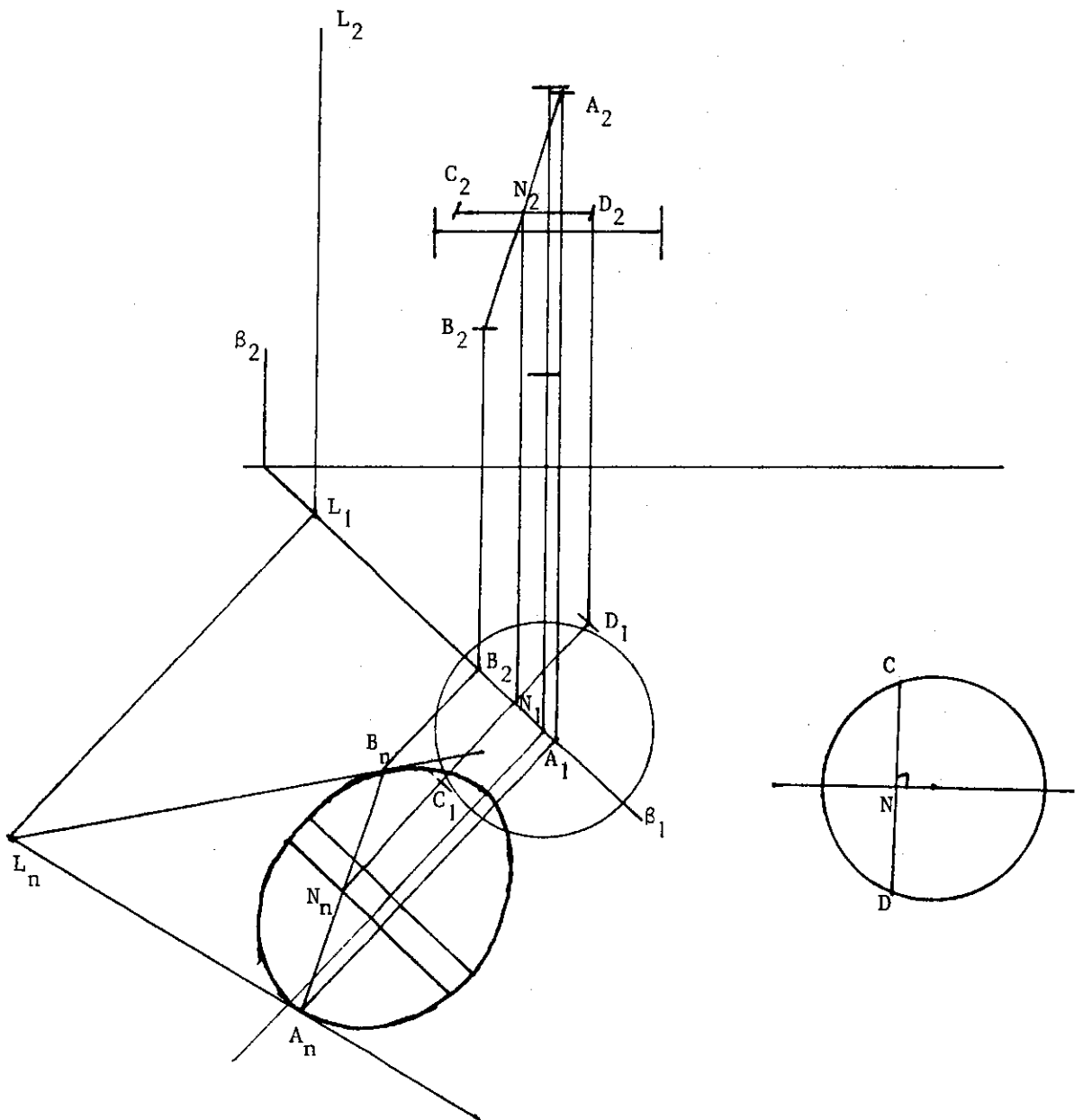
Beschouw in een omwentelingsoppervlak met as  $a$  een parallelcirkel  $c$ : In elk punt van  $c$  kunnen we een raakvlak aan het oppervlak aanbrengen. Deze raakvlakken snijden de as in één punt ( $T$ ); ze omhullen een rechte cirkel-kegel (raakkegel genaamd) met  $c$  als parallelcirkel, de top op  $a$ . Om op de cirkel  $c$  de punten te vinden van de w.o. zoeken we de raakvlakken aan de raakkegel die evenwijdig de projectierichting zijn dan wel door  $O$  gaan (bij evenwijdige resp. centrale projectie).

We gaan op dezelfde wijze te werk indien we de punten van de e.s.g. op  $c$  zoeken in geval van evenwijdig licht resp. puntlicht.

Het hierboven beschrevene is uitgebeeld in Figuur 176. In Amerikaanse projectie is een omwentelingsellipsoïde getekend met as  $a$  ( $\perp \pi_1$ ). We willen bij evenwijdig licht, in de richting van de lijn  $l$ , punten van de e.s.g. construeren, die liggen in het vlak  $\alpha$ . Daartoe construeren we de raakkegel met top  $T$  die de ellipsoïde raakt volgens de parallelcirkel in  $\alpha$ . We construeren de schaduw  $S_T$  van  $T$  op  $\pi_1$  en trekken de raaklijnen  $S_T P$  en  $S_T Q$  aan de parallelcirkel in  $\pi_1$  van de raakkegel. De gezochte punten  $A$  en  $B$  vinden we als snijpunten van  $TP$  en  $TQ$  met  $\alpha$ .



Bij ons volgende voorbeeld maken we gebruik van de eigenschap dat de w.o. op een kwadratisch oppervlak een kegelsnede is. In Figuur 177 (Amerikaanse projectie) hebben we weer een ellipsoïde met as  $\perp \pi_1$ , nu verlicht door de lichtbron L. Noem de e.s.g. op de ellipsoïde c. We willen  $c_1$  en  $c_2$  construeren (c is een kegelsnede).



Figuur 177



Een der assen van  $c$ , zeg  $AB$ , ligt in het meridiaanvlak  $\beta$  dat  $L$  bevat; dit vlak is immers symmetrievlak van  $c$ . We slaan  $\beta$  (met  $L$  en de meridiaandoorsnede) om  $\beta_1$  neer in  $\pi_1$ . De raaklijnen door  $L_n$  aan de meridiaandoorsnede bepalen de punten  $A$  en  $B$ , waarvan we de beide projecties kunnen aangeven. De tweede as, zeg  $CD$ , gaat door het midden  $N$  van  $AB$ , is  $\perp \beta$  en dus  $\parallel \pi_1$ . De ware lengte van  $CD$  is in de hulpfiguur geconstrueerd, m.b.v. de diameter van de parallelcirkel van  $N$  en de afstand van  $N$  tot as  $a$  (beide in de neerslag van  $\beta$  af te lezen). Hiermee is  $c_1$  door zijn assen en  $c_2$  door een paar toegevoegde middellijnen bepaald. Teken zelf in Figuur 177 de doorgangen van het vlak waarin  $c$  ligt.

Opmerking. We hebben, ten behoeve van de constructie van  $c_1$  en  $c_2$ , het vlak van  $c$  niet zelf gebruikt. In Figuur 130 (blz. 146) is een opdracht uitgevoerd die enige overeenkomst heeft met de opdracht in Figuur 177 (ga na!).

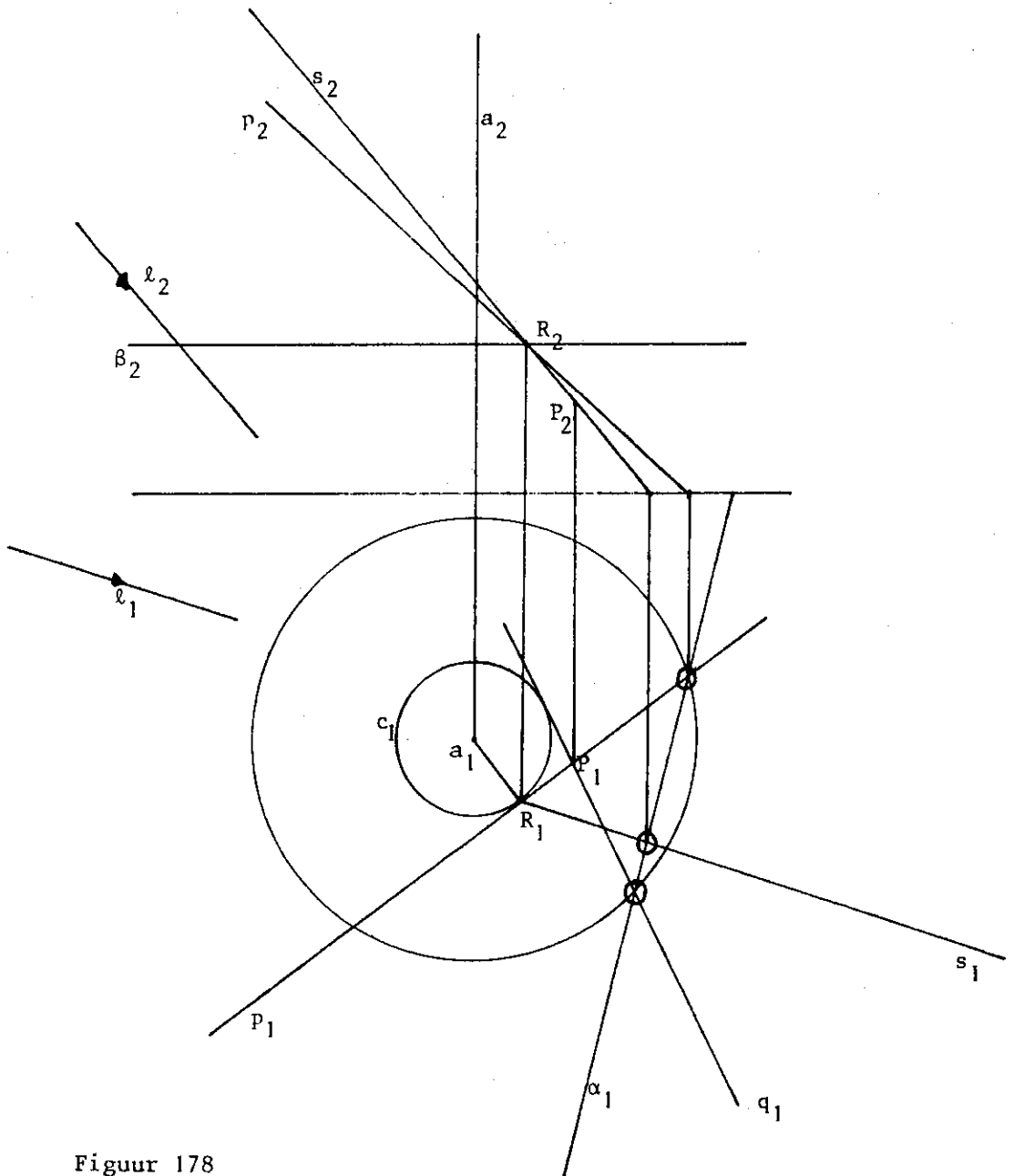
In Figuur 130 was het doorsnijdingsvlak  $\alpha$  aangegeven en werd het hulpvlak  $\beta$  door  $M$  en  $\perp \alpha$  ingevoerd; in Figuur 177 is het doorsnijdingsvlak slechts indirect gegeven. De overeenstemming in de beide constructies is duidelijk. Een detailverschil: bij de bol in Figuur 130 kon de ware lengte van de tweede as rechtstreeks in de neerslag van  $\beta$  worden afgelezen.

We besluiten onze voorbeelden met het maken van een w.o. (of e.s.g.) van een E.O.H.; dit gebeurt om het werken met  $p$ - en  $q$ -lijnen toe te lichten.

De punt-voor-puntconstructie bestaat nu hierin dat we zoeken naar dat punt op een  $p$ -lijn waarvoor geldt dat het raakvlak evenwijdig is aan de projectierichting (bij parallelprojectie of evenwijdig licht) dan wel door het projectiecentrum  $O$  gaat (bij centrale projectie of puntvormige

lichtbron).

In Figuur 178 (Amerikaanse projectie) is een E.O.H. gegeven door zijn as ( $\perp \pi_1$ ) en een p-lijn (in de figuur p genoemd). De E.O.H. wordt door evenwijdig licht ( $// \ell$ ) beschenen. Gevraagd wordt naar de projecties van het punt P op p dat op de e.s.g. ligt.



Figuur 178

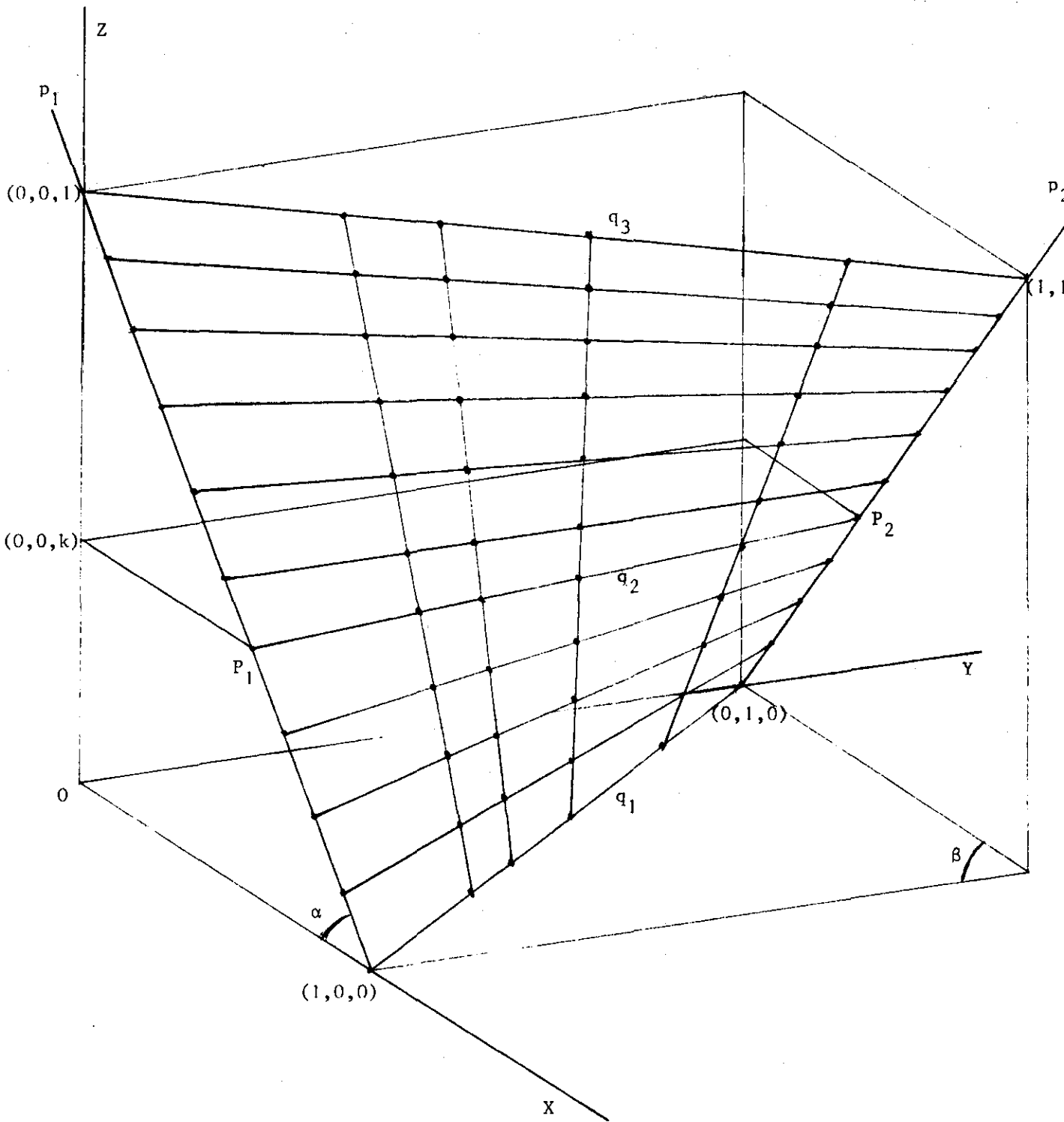
Een belangrijk uitgangspunt is dat de eerste projecties van  $p$ - en  $q$ -lijnen raken aan de eerste projectie  $c_1$  van de keelcirkel  $c$  (waarom?). Via  $c_1$  is is het vlak  $\beta$  van de keelcirkel bepaald. Voor het gevraagde punt  $P$  geldt dat het vlak door  $p$  en de  $q$ -lijn door  $P$  evenwijdig aan de lichtrichting  $\ell$  is. De  $q$ -lijn door  $P$  ligt dus in het vlak  $\alpha$  door  $p$  en  $//\ell$ . Met behulp van een hulplijn  $s$ , die  $p$  in punt  $R$  snijdt en  $//\ell$  is wordt  $\alpha_1$  bepaald. Het eerste doorgangspunt van de gezochte  $q$ -lijn is nu bekend. Het is het snijpunt van  $\alpha_1$  met de cirkel volgens welke de E.O.H. het vlak  $\pi_1$  snijdt. (Deze cirkel zelf is vastgelegd door het eerste doorgangspunt van  $p$ .) Door het gevonden doorgangspunt kan  $q_1$  worden getekend als raaklijn aan  $c_1$ . (Er zijn twee raaklijnen aan  $c_1$ ; de overweging dat de E.O.H. ontstaat door rotatie van een  $p$ -lijn om  $a$  leidt tot de goede keuze). Hierna liggen  $P_1$  en  $P_2$  vast als punten van de e.s.g. in  $\pi_1$  en  $\pi_2$ .

Opmerking. In de uitwerking brengen we het vlak aan door  $p$  en  $//\ell$ . Waarom snijdt zo'n vlak de E.O.H. volgens een  $q$ -lijn?

#### 9.10. Het zadenvlak

We zullen nog één kwadratisch oppervlak bespreken dat in de bouwkunde zijn plaats heeft gekregen, nl. het zadenvlak (of hyperbolische paraboloid). (Zie Figuur 179.) We gaan uit van twee kruisende lijnen  $p_1$  en  $p_2$  en een vlak  $\beta$  dat  $\not\parallel p_1$  en  $\not\parallel p_2$  is. We construeren rechte lijnen  $q$  die  $p_1$  en  $p_2$  snijden en  $//\beta$  zijn. (In onze figuren hebben we daarvoor hulpvlakken  $//\beta$  getekend die we met  $p_1$  en  $p_2$  hebben gesneden.) Het gebogen oppervlak dat aldus ontstaat heet zadenvlak. We zullen enige eigenschappen van zo'n zadenvlak bepalen aan de hand van één overzichtelijk voorbeeld waarin  $p_1, p_2$  en  $\beta$  "gemakkelijk" gekozen zijn. In Figuur 179 valt  $\beta$  met het XOY-vlak

samen:  $p_1$  gaat door  $(1,0,0)$  en  $(0,0,1)$ ,  $p_2$  door  $(0,1,0)$  en  $(1,1,1)$ .



Figuur 179

Parametervoorstelling van  $p_1$  is:  $\underline{x} = (1,0,0) + \lambda(1,0,-1)$  en

van  $p_2$  :  $\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,0,1)$ .

Zij  $z = k$  een vlak ( $//\beta$ ) dat we snijden met  $p_1$  resp.  $p_2$ . Als snijpunten vinden we:  $P_1 = (1-k,0,k)$

$$P_2 = (k,1,k).$$

$P_1P_2$  heeft nu als parametervoorstelling:  $\underline{x} = (k,1,k) + \lambda(2k-1,1,0)$ .

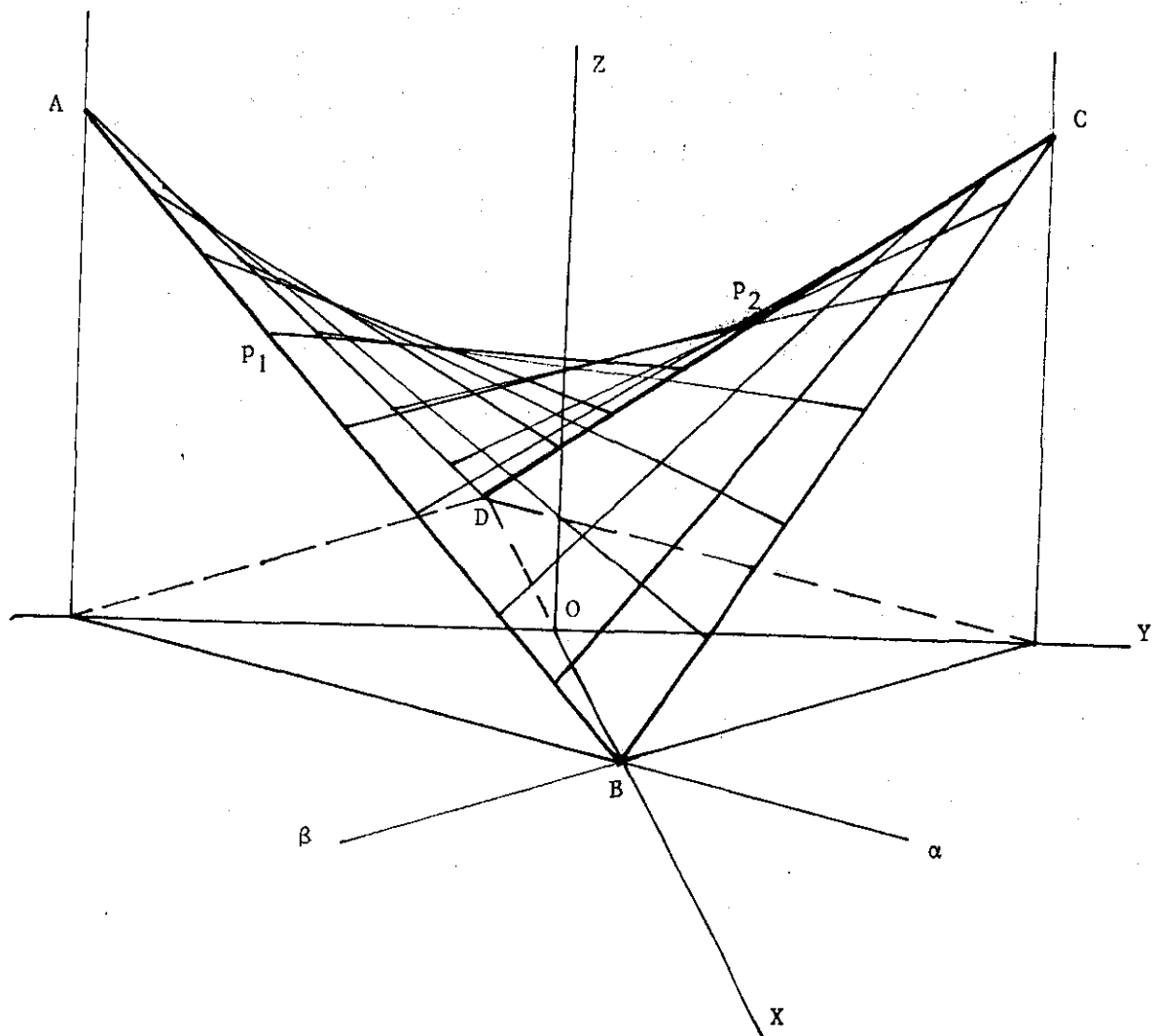
Door  $k$  en  $\lambda$  te elimineren vinden we de vergelijking van het beschreven oppervlak:

$$2yz - x - y - z + 1 = 0 \text{ (ga na).}$$

Deze vergelijking is kwadratisch. Dit betekent dat een plat vlak het oppervlak volgens een kegelsnede snijdt. De lijnen die op de beschreven manier ontstaan (dus  $p_1$  en  $p_2$  snijdend en  $//\beta$ ) noemen we  $q$ -lijnen van het oppervlak. Het is duidelijk dat alle  $q$ -lijnen elkaar kruisen: Stel nl. dat  $q_1$  en  $q_2$  in één vlak zouden liggen, dan zouden  $p_1$  en  $p_2$  in hetzelfde vlak liggen. Behalve de  $q$ -lijnen is er nog een verzameling onderling kruisende rechten, Als we uitgaan van twee  $q$ -lijnen, b.v. de rechten  $q_1$  en  $q_2$  en het vlak  $\alpha$  ( $//p_1$  en  $//p_2$ ) en we bepalen de lijnen die  $q_1$  en  $q_2$  snijden en  $//\alpha$  zijn, dan vinden we hetzelfde oppervlak.

Zonder bewijs vermelden we dat het raakvlak in een punt van het zadelvlak bepaald is door de  $p$ - en  $q$ -lijn door dat punt.

We geven nog een voorbeeld. In Figuur 180 is  $p_1$  gegeven door A (0,-1,1) en B (1,0,0);  $p_2$  is gegeven door C (0,1,1) en D (-1,0,0). Het vlak  $\alpha$  (door  $p_1$  en  $//p_2$ ) heeft tot vergelijking  $x-y = 1$ , als  $\beta$  nemen we  $x+y = +1$ .



Figuur 180

De parametervoorstelling van  $p_1$  is:  $\underline{x} = (1,0,0) + \lambda(1,1,-1)$ , die van  $p_2$  luidt:  $\underline{x} = (-1,0,0) + \lambda(1,1,1)$ . Een vlak //  $\beta$ , bijv.  $x+y = k$  snijdt  $p_1$  in  $P_1: (\frac{k+1}{2}; \frac{k-1}{2}; \frac{-k+1}{2})$  en  $p_2$  in  $P_2: (\frac{k-1}{2}; \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2})$ .

Een parametervoorstelling van  $P_1P_2$  luidt:

$$\underline{x} = \left( \frac{k-1}{2}; \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} \right) + \lambda(1,-1,-k) .$$

Door elimineren van  $k$  en  $\lambda$  vinden we voor de vergelijking van het oppervlak:  $x^2 - y^2 + 2z - 1 = 0$ .

We beschouwen nu doorsnijdingen van het zadelvlak met verschillende vlakken.

1. Een vlak  $//\alpha$  geeft een p-lijn.
2. Een vlak  $//\beta$  geeft een q-lijn.
3. Een vlak  $//XOZ$ , dus van de gedaante  $y = k$  geeft als doorsnijding de kromme  $2z = -x^2 + k+1$ , dus een parabool met de opening naar beneden (bergparabool).
4. Een vlak  $//YOZ$ , dus van de gedaante  $x = k$  geeft de kromme  $2z = y^2 - k^2 + 1$ , dus een parabool met de opening naar boven (dalparabool).
5. Een vlak  $//XOY$ , dus van de gedaante  $z = k$  geeft de kromme  $x^2 - y^2 = 1 - 2k$ , dus een hyperbool voor  $k \neq \frac{1}{2}$ . Als  $k = \frac{1}{2}$  vinden we  $x^2 - y^2 = 0$ , dus  $x = y$  ( $//\alpha$ , dus een p-lijn) en  $x = -y$  ( $//\beta$ , dus een q-lijn).
6. Zij  $y = ax$  een vlak door de Z-as. De snijkromme met dit vlak met het oppervlak heeft (in dat vlak!) tot vergelijking:  $2z = 1 + (a^2 - 1)x^2$ .

We hebben de volgende gevallen:

$a > 1$ ; we hebben een dalparabool.

$a = 1$ ; we hebben de rechte  $y = x$ ,  $z = \frac{1}{2}$ , dus met parameterform

$$\underline{x} = (0, 0, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 1, 0).$$

Deze lijn is  $//\alpha$ , dus een p-lijn.

$-1 < a < 1$ ; we hebben een bergparabool.

$a = -1$ ; we hebben de rechte  $y = -x$ ,  $z = \frac{1}{2}$ , dus met parameterform

$$\underline{x} = (0, 0, \frac{1}{2}) + \lambda(1, -1, 0).$$

Deze lijn is  $//\beta$ , dus een q-lijn.

$a < -1$ ; we hebben een dalparabool.

7. Het  $XOZ$ -vlak is evenals het  $YOZ$ -vlak een vlak van symmetrie van het oppervlak. De snijlijn van beide vlakken is as van symmetrie. Het

snijpunt van deze lijn met het zadelvlak heet de top. Bij het geleidelijk laten draaien van een vlak om de Z-as zagen we onder punt 6 dat de dalparabolen via een p- of q-lijn "overgaan" in een bergparabool. Het punt  $(0,0,\frac{1}{2})$ , de top van het zadelvlak is dus noch een hoogste, noch een laagste punt. De naam "zadelvlak" zal de lezer nu zonder meer duidelijk zijn.

#### Opmerkingen

1. Een technische toepassing is het dak van het N.S.-station in Tilburg.
2. Het zadelvlak is een kwadratisch oppervlak. (We hebben dit niet algemeen, maar met enige voorbeelden voldoende duidelijk gemaakt.) Voor het bepalen van een w.o. en een e.s.g. herinneren we de lezer eraan dat deze kegelsneden zijn.

#### 9.11. Doorsnijdingen van kwadratische oppervlakken

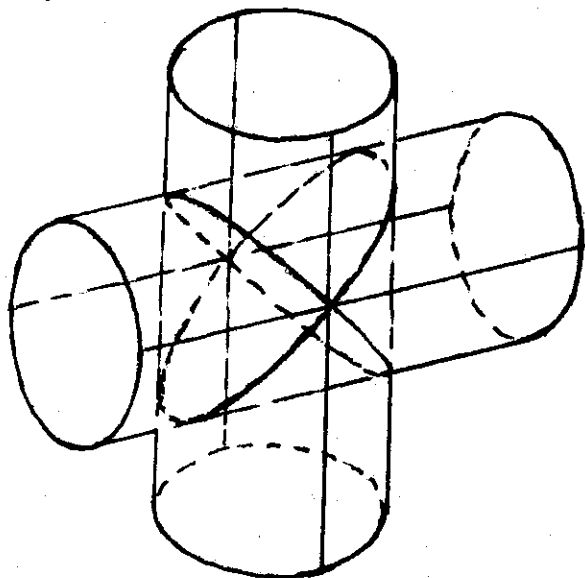
Om twee kwadratische oppervlakken met elkaar te snijden dienen we te bedenken dat de doorsnijding in 't algemeen een ruimtelijke kromme is van de vierde graad (geen bewijs!).

Een dergelijke kromme dient punt voor punt geconstrueerd te worden. Er zijn ook overzichtelijke situaties. We geven hiervan enige voorbeelden.

1. De doorsnijding van twee bollen is een cirkel. Het vlak van de cirkel is loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten der bollen.
2. De doorsnijding van een bol met een rechte cirkelcilinder (met straal van de parallelcirkel kleiner dan die van de bol en as door het middelpunt) bestaat uit twee cirkels. Hierbij doet zich het verschijnsel voor dat de kromme van de vierde graad uiteen valt in twee krommen van de tweede graad. Van een kromme van de tweede graad kan men bewijzen dat het een vlakke kromme is. (Omdat deze vlakke krommen op een bol liggen zijn het cirkels.)



3. Snijden twee cilinders elkaar dan hebben we twee mogelijkheden. Hebben de cilinders verschillende diameter dan bestaat de doorsnijding uit twee geïsoleerde krommen die geen vlakke krommen zijn. Hebben de cilinders dezelfde diameter dan hebben deze krommen gemeenschappelijke punten. In Figuur 181 is een voorbeeld getekend. (Hierbij is aangenomen dat de assen elkaar snijden.)



Figuur 181

Voor de constructie van een doorsnijding zijn in het algemeen veel hulpvlakken nodig (punt-voor-puntconstructie). We geven enige voorbeelden.

1. Bij twee kegels kunnen vlakken door beide toppen gebruikt worden. Zo'n vlak snijdt elke kegel immers volgens beschrijvenden. Hebben de kegels hun richtcirkel in evenwijdige vlakken dan kunnen ook hulpvlakken evenwijdig die vlakken gebruikt worden. Zo'n hulpvlak snijdt beide kegels nl. volgens een cirkel.

2. Bij twee cilinders gebruiken we hulpvlakken evenwijdig aan de beide assen. Hebben de cilinders richtcirkels in evenwijdige vlakken, dan gebruiken we hulpvlakken evenwijdig aan die vlakken.
3. Bij een kegel en een bol gebruiken we hulpvlakken door de as van de kegel. Zo'n vlak snijdt de kegel volgens twee beschrijvende en de bol volgens een cirkel.
4. Om de doorsnede van een E.O.H. met een bol te construeren brengen we vlakken aan door een p-lijn van de E.O.H. Zo'n vlak snijdt nl. de bol volgens een cirkel en de E.O.H. behalve volgens de p-lijn, ook nog volgens een q-lijn. In Figuur 178 is de constructie van zo'n q-lijn aangegeven. Meridiaanvlakken van de E.O.H. zijn hier weinig effectief. Ze snijden immers de E.O.H. volgens een hyperbool.
5. Bij de doorsnijding van een kegel en een cilinder kunnen we gebruik maken van vlakken door de top van de kegel en evenwijdig aan de as van de cilinder.

#### 9.12. Regelmatige veelvlakken

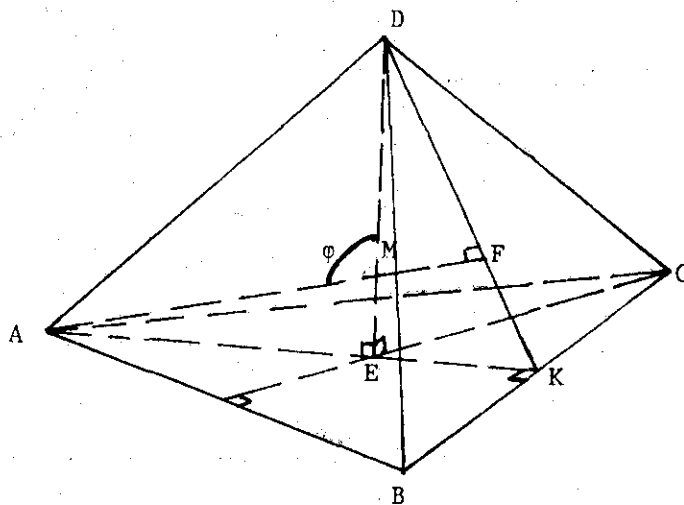
Een regelmatig veelvlak is een veelvlak dat begrensd wordt door congruente regelmatige veelhoeken, waarvan de hoekpunten op een bol liggen en waarbij in elk hoekpunt evenveel ribben samenkomen. Men kan bewijzen dat voor de veelhoeken driehoeken, vierhoeken en vijfhoeken in aanmerking komen. (Een voetbal bestaat uit vijfhoeken en zeshoeken en is dus in onze zin, afgezien van het niet plat zijn van deze vlakken, geen regelmatig veelvlak.) Er bestaan vijf regelmatige veelvlakken. (Dit wordt niet bewezen.)

1. Regelmatig viervlak: 4 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken; 4 hoekpunten, in elk hoekpunt komen 3 ribben samen.
2. Kubus (regelmatig zesvlak): 6 vierkanten als zijvlakken, 8 hoekpunten; in elk punt komen 3 ribben samen.
3. Regelmatig achthek: 8 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, 6 hoekpunten; in elk hoekpunt komen 4 ribben samen.
4. Regelmatig twaalfvlak: 12 regelmatige vijfhoeken als zijvlakken, 20 hoekpunten; in elk hoekpunt komen 3 ribben samen.
5. Regelmatig twintigvlak: 20 gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken, 12 hoekpunten; in elk hoekpunt komen 5 ribben samen.

We zullen de genoemde veelvlakken en hun eventueel bestaande onderlinge betrekkingen achtereenvolgens bespreken.

### 9.13. Het regelmatige viervlak

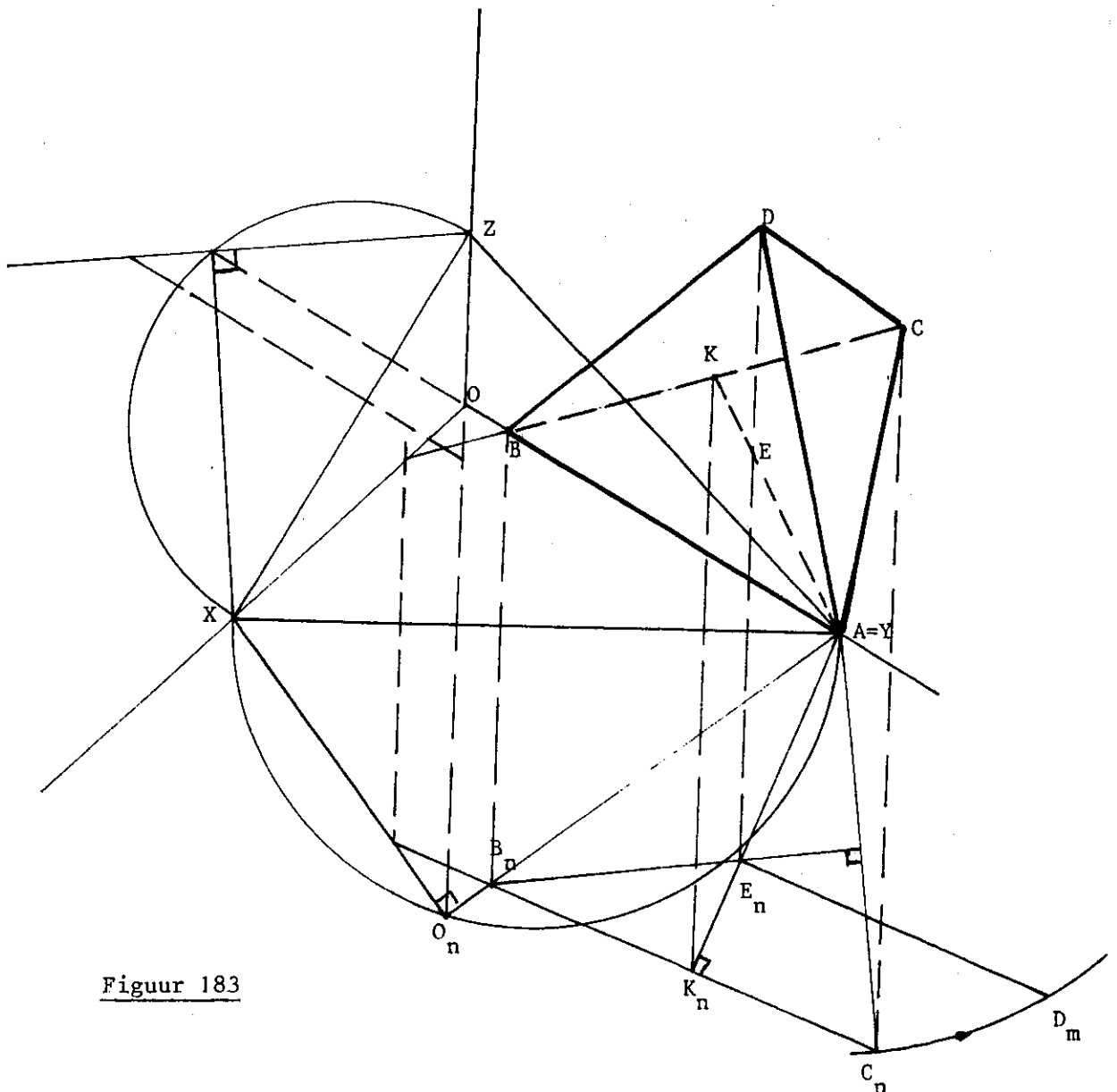
Aan de hand van Figuur 182 noemen we (zonder bewijzen) een aantal eigenschappen.



Figuur 182

1. D ligt op de normaal van het vlak ABC door het zwaartepunt (tevens hoogtepunt en middelpunt van de omschreven cirkel) van  $\triangle ABC$ .
2. De vier normalen liggen twee aan twee in één vlak en verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 3 : 1 ( $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$ ).
3. Als gevolg van punt 2 gaan de vier normalen door één punt M.
4. M is middelpunt van de omschreven bol en zwaartepunt van het lichaam.

In Figuur 183 wordt in axonometrie het regelmatig viervlak  $ABCD$  geconstrueerd. ABC ligt in  $\pi_1$ , A = Y en AB valt langs OY. De hoogte is met



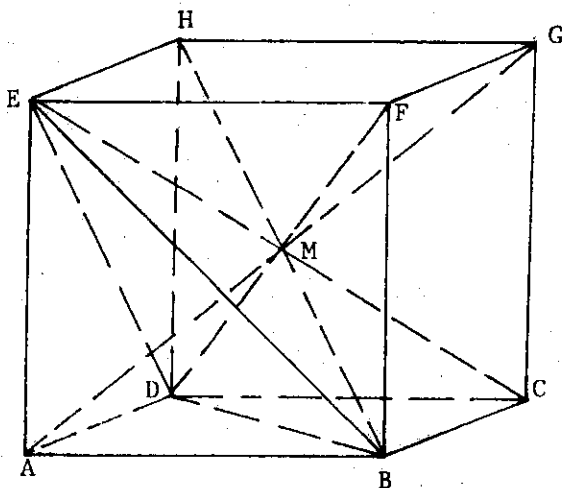
Figuur 183

behulp van het hulpvlak door  $AE \perp \pi_1$  geconstrueerd. De lengte van de projectie van DE is gevonden met behulp van het in  $\tau$  gewentelde XOZ-vlak.

#### 9.14. De kubus

Aan de hand van Figuur 184 geven we (zonder bewijzen) enige belangrijke eigenschappen (de ribbe van de kubus is  $a$ ).

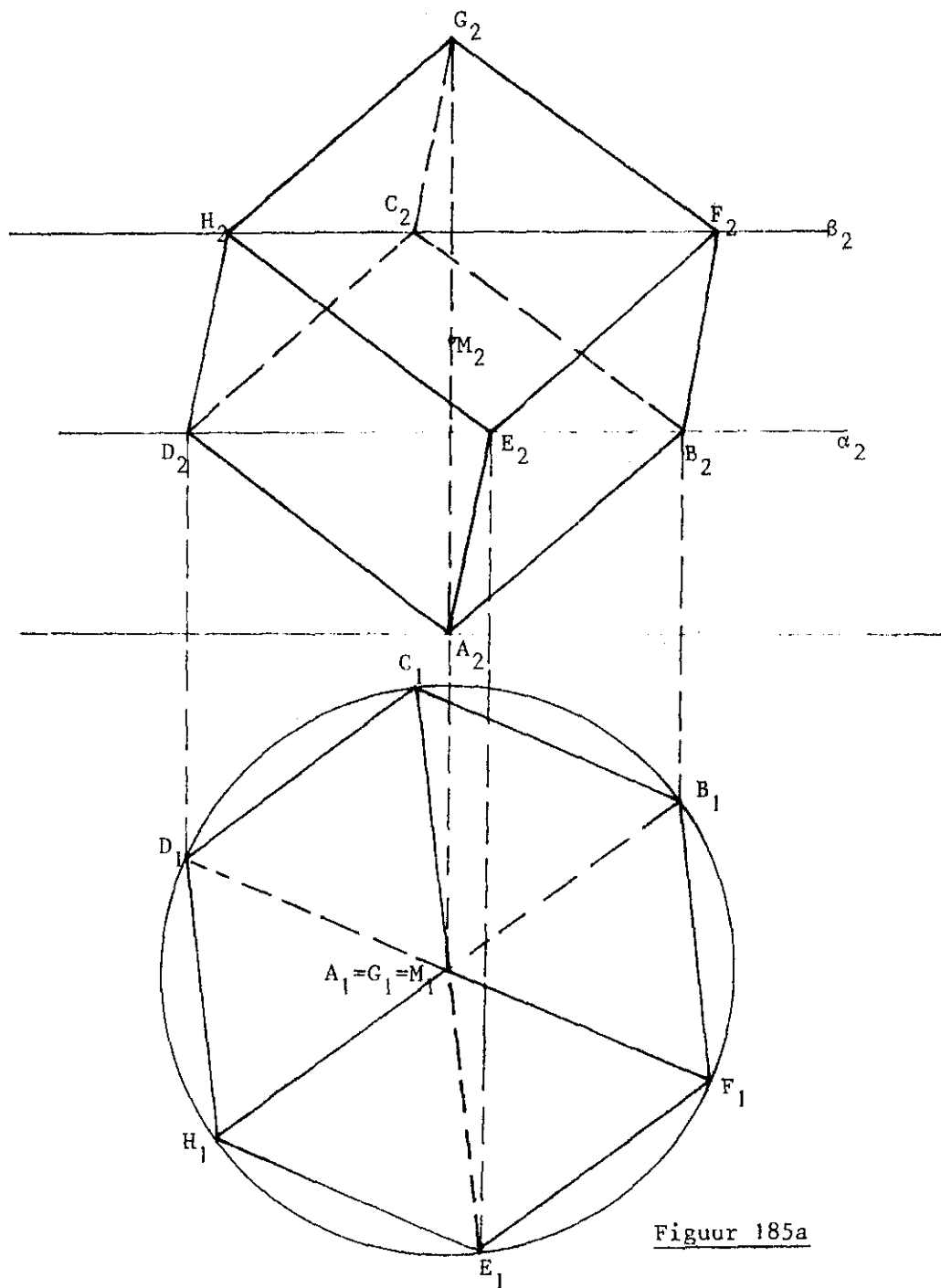
1. De vier lichaamsdiagonalen gaan door één punt (M) en delen elkaar middendoor.
2. M is middelpunt van de omschreven bol. De straal van deze bol is  $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ . M is tevens punt van symmetrie van het lichaam.
3.  $\Delta BDE$  is gelijkzijdig en het vlak van deze driehoek staat loodrecht op de lichaamsdiagonaal AG. Hetzelfde geldt voor  $\Delta HFC$ .
4. Het snijpunt van het vlak BDE en AG is zwaartepunt van  $\Delta BDE$ . Hetzelfde geldt voor  $\Delta HFC$ .



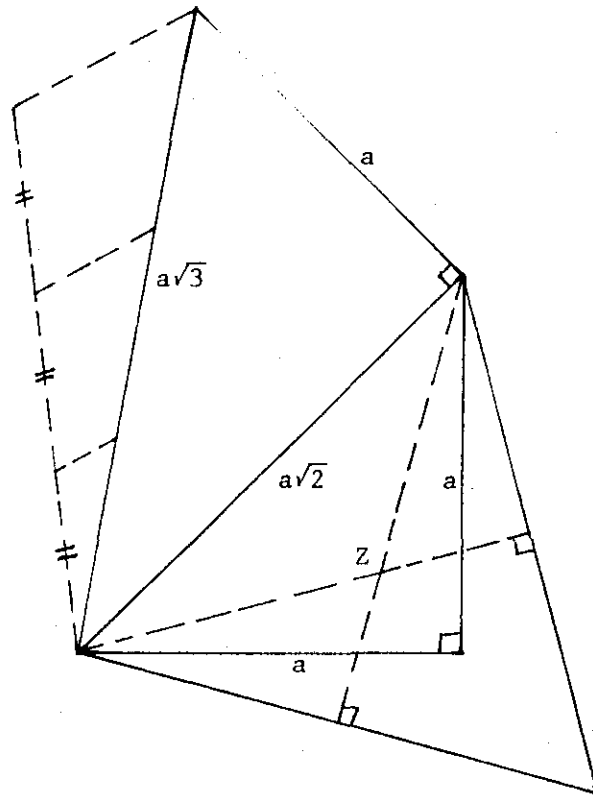
Figuur 184

5. De diagonaal AG wordt door de vlakken BDE en HFC in drie gelijke delen verdeeld.

Ter illustratie wordt (Amerikaanse projectie) in Figuur 185a een kubus getekend die met één lichaamsdiagonaal  $\perp \pi_1$  staat (A in  $\pi_1$ ).



De lengte van de lichaamsdiagonaal  $AG (=a\sqrt{3})$  wordt geconstrueerd in de hulpfiguur 185b. In deze figuur construeren we ook  $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$  en de gelijkzijdige driehoek genoemd in eigenschap 3.



Figuur 185b

Met behulp van twee hoogtelijnen in de driehoek construeren we de straal van de omschreven cirkel. Al deze gegevens gebruiken we voor de constructie van de projecties van de kubus. Met A is G bekend. De punten B, D en E (zie ook Figuur 184) liggen in het vlak  $\alpha // \pi_1$  en op hoogte  $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ , de punten C, F en H liggen in  $\beta$ , eveneens  $// \pi_1$  en op hoogte  $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$ . De hoekpunten van de eerste projectie van  $\Delta BDE$  kunnen we kiezen op de

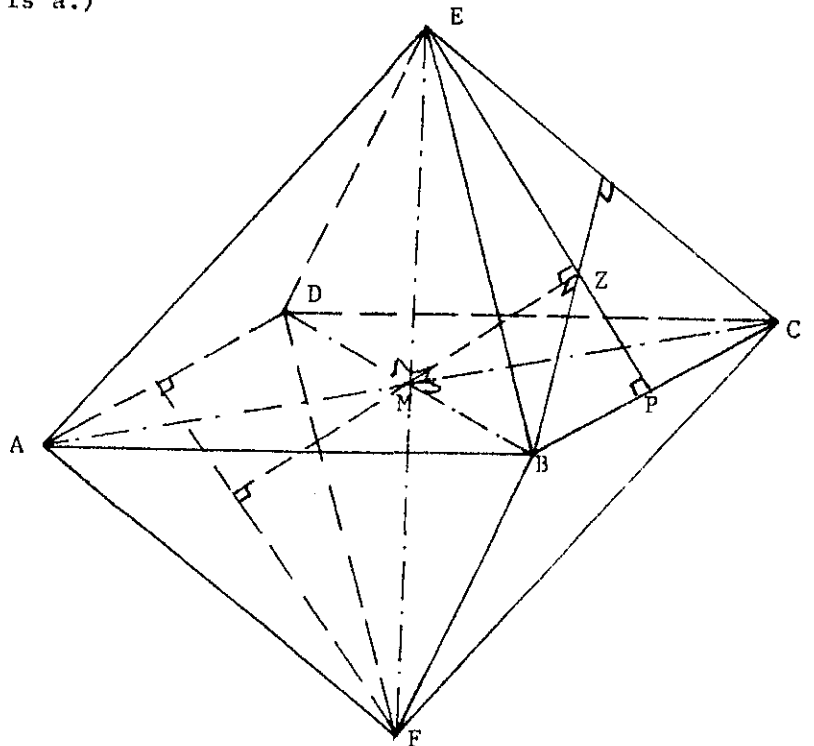
omgeschreven cirkel met middelpunt  $A_1$  en de straal, bepaald in de hulpfiguur. De punten  $B_2$ ,  $D_2$  en  $E_2$  zijn nu bekend. De hoekpunten van de eerste projectie van  $\triangle HFC$  liggen op dezelfde cirkel. (Zie eigenschap 4.) Bovendien zijn hun tweede projecties te construeren (met behulp van parallellogrammen). De kubus kan nu voltooid worden.

De eerste projecties van de congruente driehoeken  $BDE$  en  $HFC$  vertonen nog een interessante eigenschap (duidelijk te zien in Figuur 185a). De zijden van de driehoeken zijn twee aan twee evenwijdig; dit geldt dus ook voor de projecties van de driehoeken. Zo is  $C_1F_1 // D_1E_1$  enz. Het gevolg is dat de eerste projecties van de zes hoekpunten een regelmatige zeshoek vormen.

Opmerking. Van de laatste eigenschap is gebruik gemaakt om Figuur 185a te voltooien.

#### 9.15. Het regelmatige achthvlak

Aan de hand van Figuur 186 geven we (zonder bewijzen) enige eigenschappen. (De lengte van de ribbe is  $a$ .)

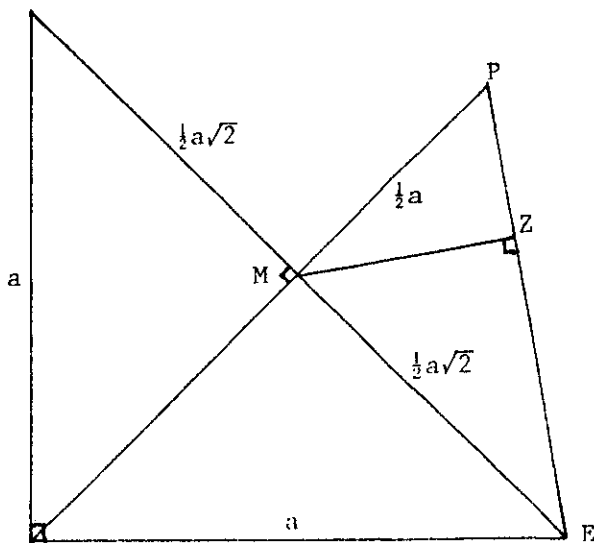
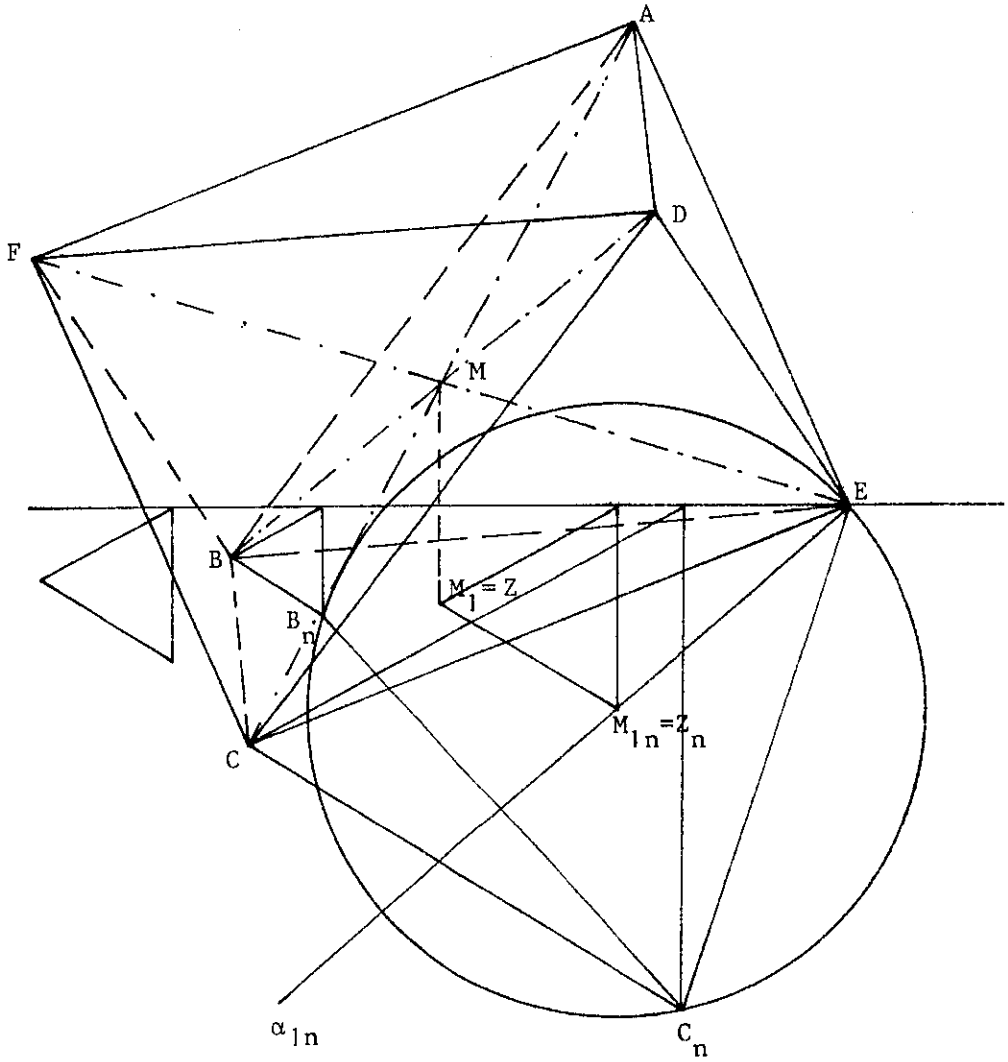


Figuur 186



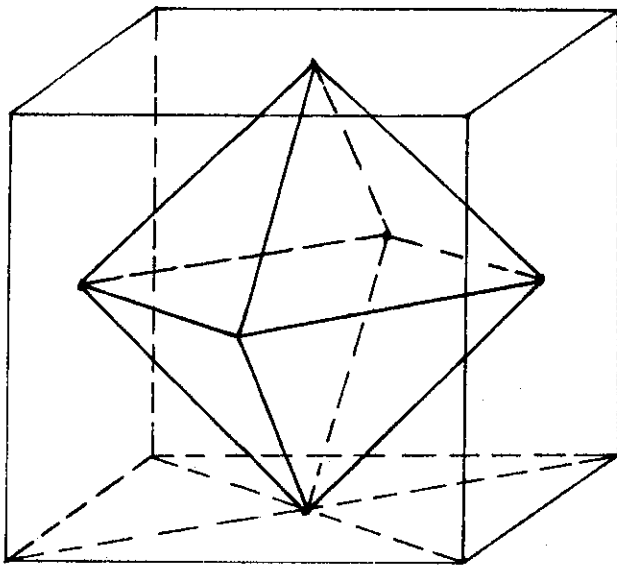
1. De drie lichaamsdiagonalen hebben de lengte  $a\sqrt{2}$ .
2. De drie lichaamsdiagonalen gaan door één punt (M) en delen elkaar doormidden. M is middelpunt van de omschreven bol en punt van symmetrie van het lichaam.
3. De lichaamsdiagonalen staan twee aan twee loodrecht op elkaar.
4. De normaal uit M op een zijvlak snijdt dat vlak in het zwaartepunt van de bijbehorende driehoek.
5. De vlakken waarin overstaande driehoeken liggen, zijn onderling evenwijdig.

In Figuur 187 is (scheve projectie) de projectie van een achthoek getekend; de letters zijn gekozen als in Figuur 186. Het achthoek ligt met  $\triangle BCE$  in  $\pi_1$ . Het middelpunt M ligt op de normaal door Z op  $\pi_1$ . De afstand van MZ tot  $\pi_1$  is (in een hulpfiguur) in  $\triangle MPE$  geconstrueerd. De drie onbekende punten zijn geconstrueerd met behulp van M.



Figuur 187

In Figuur 188 is het verband tussen een kubus en een achthoekig vlak gedemonstreerd. Behalve de omschreven heeft elk der genoemde lichamen een ingeschreven bol. In het geval van de kubus zijn de raakpunten de middelpunten van de zijvlakken. Verbinden we deze zes punten (op gepaste wijze) dan vinden we een regelmatig achthoekig vlak.



Figuur 188

Een lichaamsdiagonaal van de kubus snijdt twee zijvlakken van het achthoekig vlak en wel in de zwaartepunten van de bijbehorende driehoeken. Deze snijpunten verdelen de lichaamsdiagonaal in drie gelijke delen. Hiervan uitgaande kunnen we de hoekpunten van de kubus terugvinden als het achthoekig vlak gegeven is. Ook een achthoekig vlak heeft een ingeschreven bol. De bol raakt de zijvlakken in de zwaartepunten van de bijbehorende driehoeken. Als we

deze acht punten ( op gepaste wijze) verbinden vinden we een kubus. Een lichaamsdiagonaal van het achthoekvlak snijdt twee zijvlakken van de kubus en wel in de middelpunten van de bijbehorende vierkanten. Deze snijpunten verdelen de lichaamsdiagonaal in drie gelijke delen. Hiervan uitgaande kunnen we de hoekpunten van het achthoekvlak terugvinden als de kubus gegeven is.

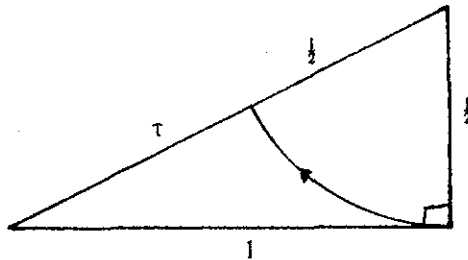
#### 9.16. De gulden snede en de regelmatige vijfhoek

In de nog te behandelen regelmatige twaalf- en twintigvlakken spelen regelmatige vijfhoeken een rol. Bij de constructie van de regelmatige vijfhoek maken we gebruik van de gulden snede. Bij dit begrip staan we uitvoerig stil omdat het o.a. in de bouwkunde in de loop der eeuwen zo belangrijk is geweest.

Het gaat hier om een bepaalde verhouding van breedte en hoogte van gevels, vensters, terwijl ook fotoformaten (vaak) aan dezelfde verhouding voldoen. Men heeft lang gedacht dat deze verhouding, in het Latijn *sectio divina* genaamd, afkomstig is van de Grieken. Bij Engelse opgravingen echter ( $\approx 1930$ ) in de stad Ur der Sumeriërs (deze stad ligt onder het Ur der Chaldeeërs) vond men op een sarcophaag in tekst en beeld het begrip gulden snede. Deze sarcophaag dateert van ongeveer 3000 vóór Christus.

We gaan uit van een lijnstuk ter lengte 1 dat we in twee delen,  $\tau$  en  $1 - \tau$ , gaan verdelen zó dat  $1 : \tau = \tau : (1 - \tau)$ . Blijkbaar is  $\tau$  de lengte van het grootste stuk. Als (positieve)oplossing van de v.k.v.  $\tau^2 + \tau - 1 = 0$  vinden we  $\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . De gevonden lengten  $\tau$  en  $1 - \tau$  gebruiken we als lengte en breedte van een rechthoek (dus met halve omtrek 1). We zeggen dat de lengte

en breedte van deze rechthoek aan de gulden snede voldoen en de rechthoek noemen we een gulden rechthoek.



Figuur 189

In Figuur 189 is een constructie van  $\tau$  uitgevoerd. Uit de verhouding  $1 : \tau = \tau : (1 - \tau)$  kunnen we ook aflezen dat de kortste zijde =  $\tau \times$  de langste zijde .

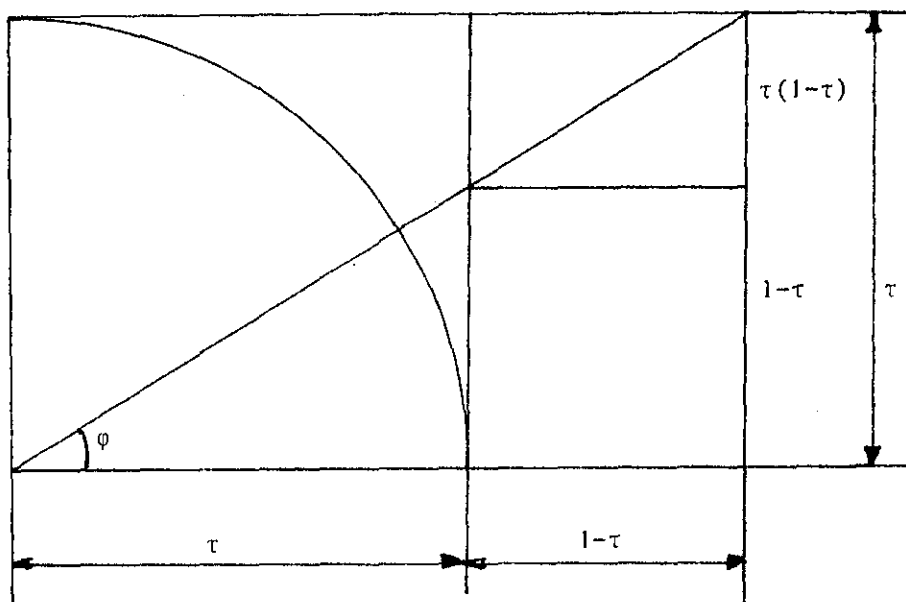
Gaan we niet uit van de halve omtrek van de rechthoek maar van de langste zijde (=1), dan vinden we voor de kortste zijde  $\tau$ , (gaan we uit van de kortste zijde (=1) dan is de langste zijde dus  $\tau^{-1}$ ).

In de onderstaande tabel geven we een samenvatting van de maten van een gulden rechthoek.

halve omtrek	grootste zijde	kleinste zijde	alles voor $\tau$
1	$\tau$	$1 - \tau$	$\tau^2 + \tau - 1 = 0$ $\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ $\tau \approx 0.618$ $\tau^{-1} \approx 1.618$
$1 + \tau$	1	$\tau$	
$1 + \tau^{-1}$	$\tau^{-1}$	1	

Enige toepassingen van  $\tau$

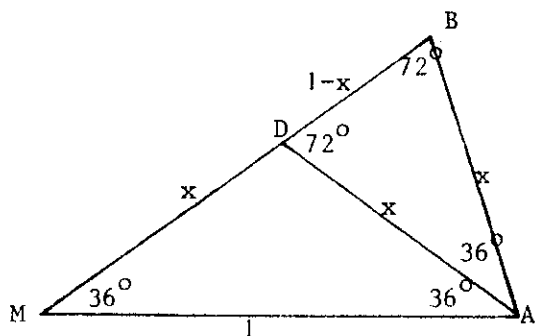
1. In Figuur 190 is een gulden rechthoek getekend met zijden  $l$  en  $\tau$ . We tekenen een vierkant met zijde  $\tau$  in de rechthoek. De overblijvende rechthoek is weer een gulden rechthoek. We lezen dit direct uit de tekening af. Merk op dat  $\tan \varphi = \tau$ .



Figuur 190

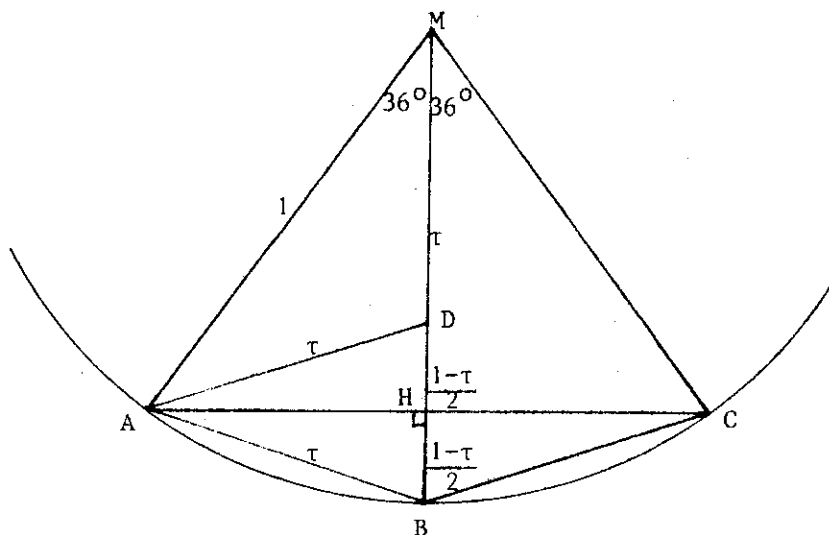
2. In Figuur 191 is de gelijkbenige driehoek MAB getekend met  $\angle M = 36^\circ$ ,  $MA = MB = 1$ . Bewering:  $AB = \tau$ . Trek om dit te bewijzen de bissectrice van  $\angle A$ .  $\triangle MAD$  is gelijkbenig met basishoeken van  $36^\circ$ ;  $\triangle ABD$  is gelijkbenig met tophoek  $36^\circ$ , dus  $MD = DA = AB (= x)$ . Uit de gelijkvormigheid van  $\triangle MAB$  en  $\triangle ABD$  volgt:

$$1 : x = x : (1-x), \text{ zodat } x = \tau.$$



Figuur 191

Om de zijde van een regelmatige vijfhoek te bepalen gaan we uit van een cirkel met middelpunt M en straal 1. (Zie Figuur 192.) We tekenen MA en MC z6 dat  $\angle AMC = 72^\circ$ ; AC is de gezochte zijde. We willen hem ook berekenen.



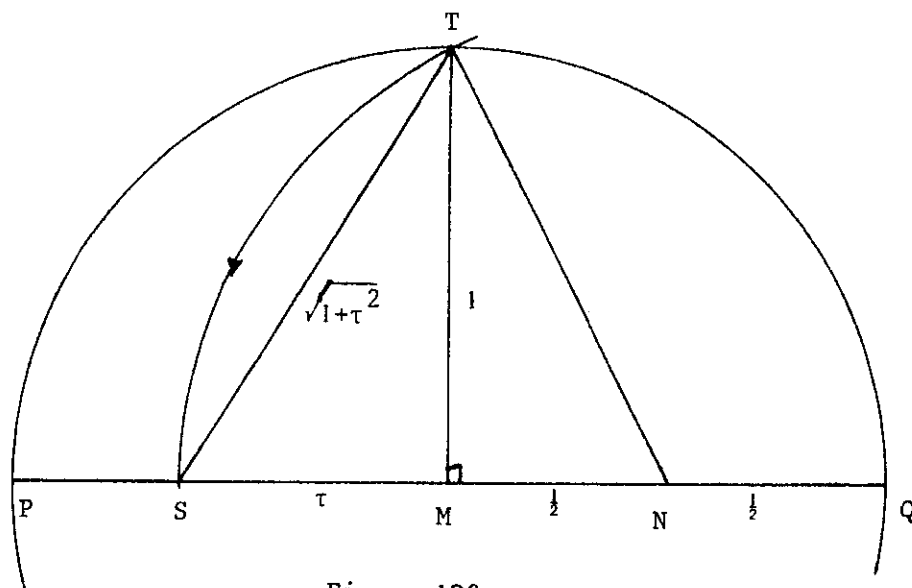
Figuur 192

Trek daarom de bissectrice MB. Duidelijk is dat  $AC \perp MB$  en  $AH = HC$ . Om AC te berekenen is het dus voldoende om AH te bepalen. We weten (zie Figuur 191) dat  $\triangle ABD$  gelijkbenig is,  $AB = \tau$  en  $HB = \frac{1-\tau}{2}$ .

Met de Stelling van Pythagoras en de relatie  $\tau = 1 - \tau^2$  vinden we

$$(AH)^2 = \frac{1+\tau}{4}, \text{ dus } AC = \sqrt{1+\tau^2},$$

dus de zijde van de vijfhoek is schuine zijde van de rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijde 1 en  $\tau$  zijn.



Figuur 193

In Figuur 193 is een andere constructie van de zijde van de regelmatige vijfhoek uitgevoerd die behoort bij een cirkel met straal 1.

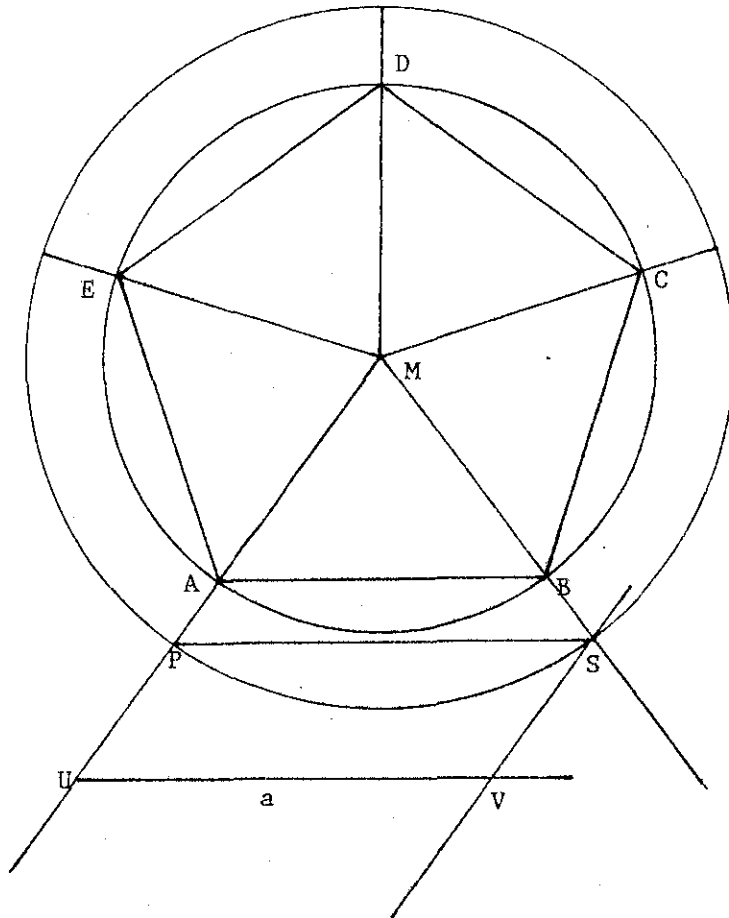
Puntsgewijze luidt de constructie:

1. Trek een middellijn PQ en deel MQ doormidden.
2. Trek de straal MT  $\perp$  PQ.
3. Pas NT vanuit N af op PQ

ST is nu de gezochte zijde. Immers  $NT = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ , dus  $SM = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \tau$ , zodat  $ST = \sqrt{1+\tau^2}$ .



In de praktijk is vaak de zijde  $a$  van de vijfhoek gegeven. Om de vijfhoek te construeren (met passer en liniaal) gaan we als volgt te werk. Construeer (zie Figuur 194) eerst een willekeurige, regelmatige vijfhoek  $ABCDE$ . Neem op  $MA$  een punt  $U$  en pas op de lijn door  $U$  en  $//AB$  het stuk  $a$  af. Pas op het verkregen stuk  $UV$  een translatie toe tot  $PS$  ontstaat ( $S$  op  $MB$ ).  $MS$  is de straal van de omschreven cirkel van de gezochte vijfhoek.

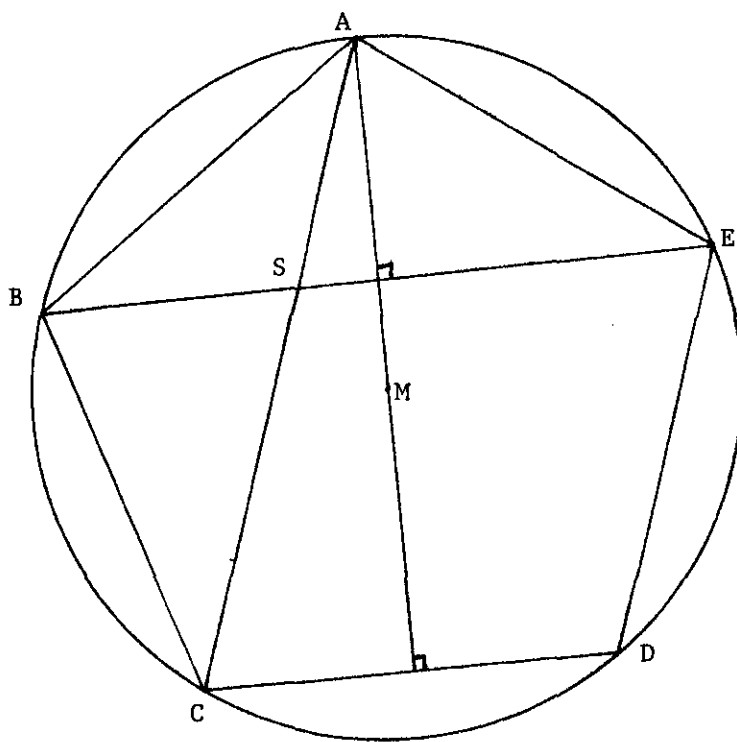


Figuur 194

Enige eigenschappen van de vijfhoek

In Figuur 195 is een regelmatige vijfhoek getekend met twee diagonalen die elkaar binnen de figuur snijden, alsmede een middellijn door een hoekpunt. Als eigenschappen noemen we:

1. Twee diagonalen delen elkaar in stukken die de zijden vormen van een gulden rechthoek (bijv. CS en AS). Aanwijzing voor de oplossing: Bekijk  $\Delta BSC$  en vergelijk die met Figuur 191.
2. De middellijn door een hoekpunt staat loodrecht op een zijde (bijvoorbeeld  $AM \perp CD$ ).



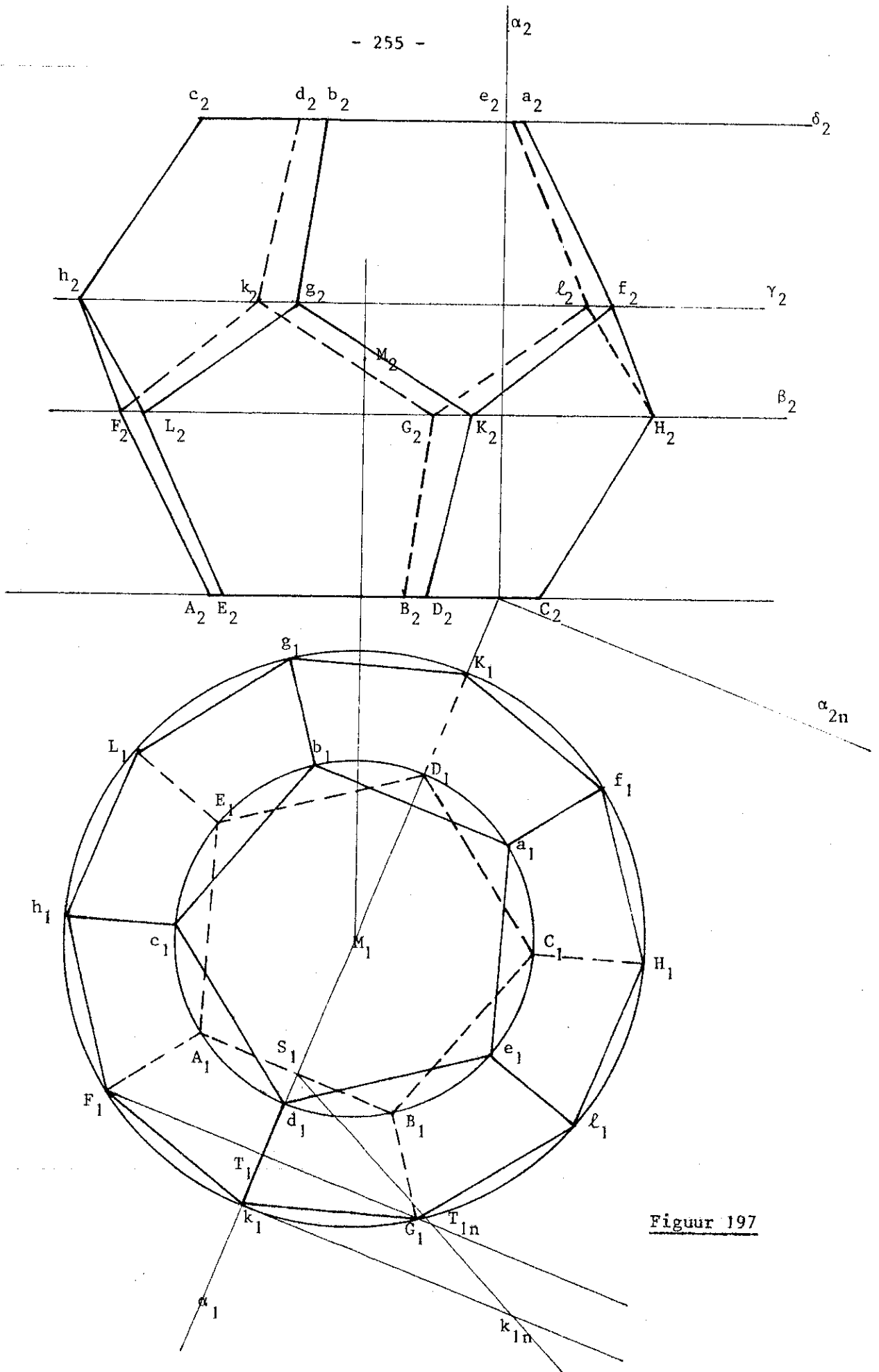
Figuur 195



Omdat de ribben in grond- en bovenvlak twee aan twee evenwijdig zijn vormen de tien punten in het grondvlak een regelmatige tienhoek.

5.  $FG // AB$ ,  $GH // BC$  enz.; Ook is  $FG = GH = \dots$ . Het gevolg is dat de punten  $F, G, H, K$  en  $L$  in één vlak liggen dat evenwijdig aan het grondvlak is. De punten liggen op een regelmatige vijfhoek, waarvan de zijde gelijk is aan de diagonaal  $FG$ . Hetzelfde geldt voor de punten  $f, g, h, k$  en  $\ell$ .
6. Projecteren we de punten  $F, G, H, K, L, f, g, h, k$  en  $\ell$  op het grondvlak dan vormen de projecties een regelmatige tienhoek (waarom?). Het middelpunt valt samen met het middelpunt van  $ABCDE$ , de straal vinden we met behulp van  $FG$ .

In Figuur 197 zijn (Amerikaanse projectie) de projecties van het twaalfvlak getekend. Uitgegaan is van een in  $\pi_1$  gelegen vijfhoek  $ABCDE$  met omgeschreven cirkel (middelpunt  $M_1$ ). In eerste projectie breiden we de vijfhoek uit tot een tienhoek, waarbij  $a_1$  diametraal ligt t.o.v.  $A_1$ . Om de projecties op  $\pi_1$  van de tien punten in de middenvlakken te construeren, bedenken we dat  $FG$  gelijk is aan een diagonaal van de getekende vijfhoek. Met behulp van de constructie in Figuur 194 kunnen we nu de cirkel construeren (middelpunt  $M_1$ ). Bij de constructie van de tien punten bedenken we dat (bijvoorbeeld)  $k_1$  in het vlak  $\alpha$  ligt dat  $DS$  bevat en  $\perp \pi_1$  is (zie ook Figuur 196). In eerste projectie is  $k_1$  nu bekend. Op analoge wijze vinden we de andere negen punten. Hiermee is de eerste projectie van het lichaam bekend. Om de tweede projectie te vinden bepalen we de vlakken  $\beta, \gamma$  en  $\delta // \pi_1$ , waarin de respectieve punten liggen. We gebruiken nogmaals het vlak  $\alpha$ . (Zie ook Figuur 196.) We slaan  $\alpha$  om  $\alpha_1$  neer in  $\pi_1$ . We kennen  $S, T_1$  en  $k_1$ . De ware lengte van het stuk  $Sk$  kunnen we vinden in de vijfhoek  $ABCDE$ . In de neergeslagen  $\alpha$  vinden we daarmee  $k_{1n}$  en daarna  $T_{1n}$ .  $T_1 T_{1n}$  is de afstand van  $\beta$ ,



Figuur 197

$k_1 k_{1n}$  die van  $\gamma$  tot  $\pi_1$ . Ook  $M_2$  is nu bekend en daarmee  $\delta_2$ . We kunnen de tweede projectie van het twaalfvlak nu tekenen.

We bespreken ook nog de constructie van het twaalfvlak als een middellijn  $\perp \pi_1$  is. We nemen hiervoor  $bB$  (zie Figuur 196).

De punten liggen nu ook in vlakken en wel als volgt verdeeld:

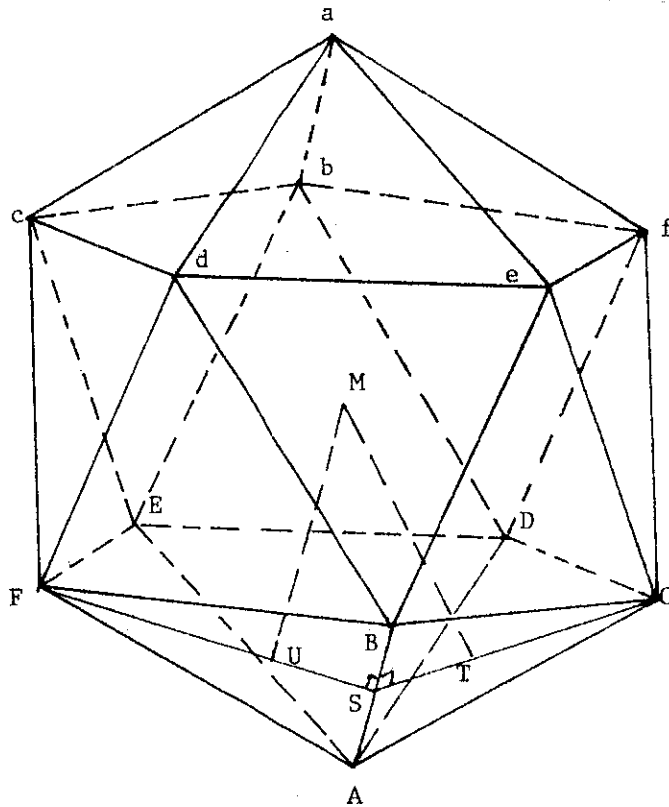
				b					
			a	c	g				
		d	e	f	K	L	h		
		D	E	F	k	ℓ	H		
				A	C	G			
						B			

Dat bijvoorbeeld de punten A, C en G in één vlak liggen blijkt uit het volgende: Ze liggen op een bol en  $BA = BC = BG$ . Zonder bewijs vermelden we dat het vlak van deze punten A, C en G  $\perp Bb$  (dus  $\perp BM$ ) is. Ze vormen een gelijkzijdige driehoek met het middelpunt op MB. Projecteren we deze punten en de punten a, c, g op een vlak  $\perp Bb$ , dan vormen de projecties een regelmatige zeshoek. De punten D, E, F, k, ℓ en H liggen eveneens in één vlak dat loodrecht op Bb is. Ze vormen een regelmatige zeshoek. Als we deze punten en de punten d, e, f, K, L en h projecteren op een vlak  $\perp Bb$ , dan vormen de projecties een regelmatige twaalfhoek.

Om het lichaam in een dergelijke stand te tekenen beginnen we met  $\triangle ACG$ , waarna het punt B getekend wordt als top van de pyramide. Bedenk dat AC diagonaal is van de regelmatige vijfhoek, AB de zijde van die vijfhoek. We kennen nu van bijv. de vijfhoek ABGkF drie punten, kunnen dus de vijfhoek voltooien. Met de gevonden punten F en k kunnen we nu de regelmatige zeshoek, waartoe ze behoren, voltooien. Maak zelf deze tekening.

9.18. Het regelmatige twintigvlak

Aan de hand van Figuur 198 vermelden we (zonder bewijzen) enige eigenschappen.



Figuur 198

1. De hoekpunten liggen twee aan twee symmetrisch t.o.v. het bolmiddenpunt M. Diametrale punten zijn aangeduid met dezelfde letter (A en a enz.).
2. Twee overstaande driehoeken liggen in evenwijdige vlakken.
3. De verbindingslijn van de middelpunten van overstaande zijvlakken gaat door M en is loodrecht op de betreffende zijvlakken.
4. De punten F, B, C, D en E liggen in één vlak. Ze vormen een regelmatige vijfhoek. Hetzelfde geldt voor fbcde. Beide vlakken staan  $\perp$  Aa en de middelpunten van beide vijfhoeken liggen op Aa. Projecteren we beide vijf-

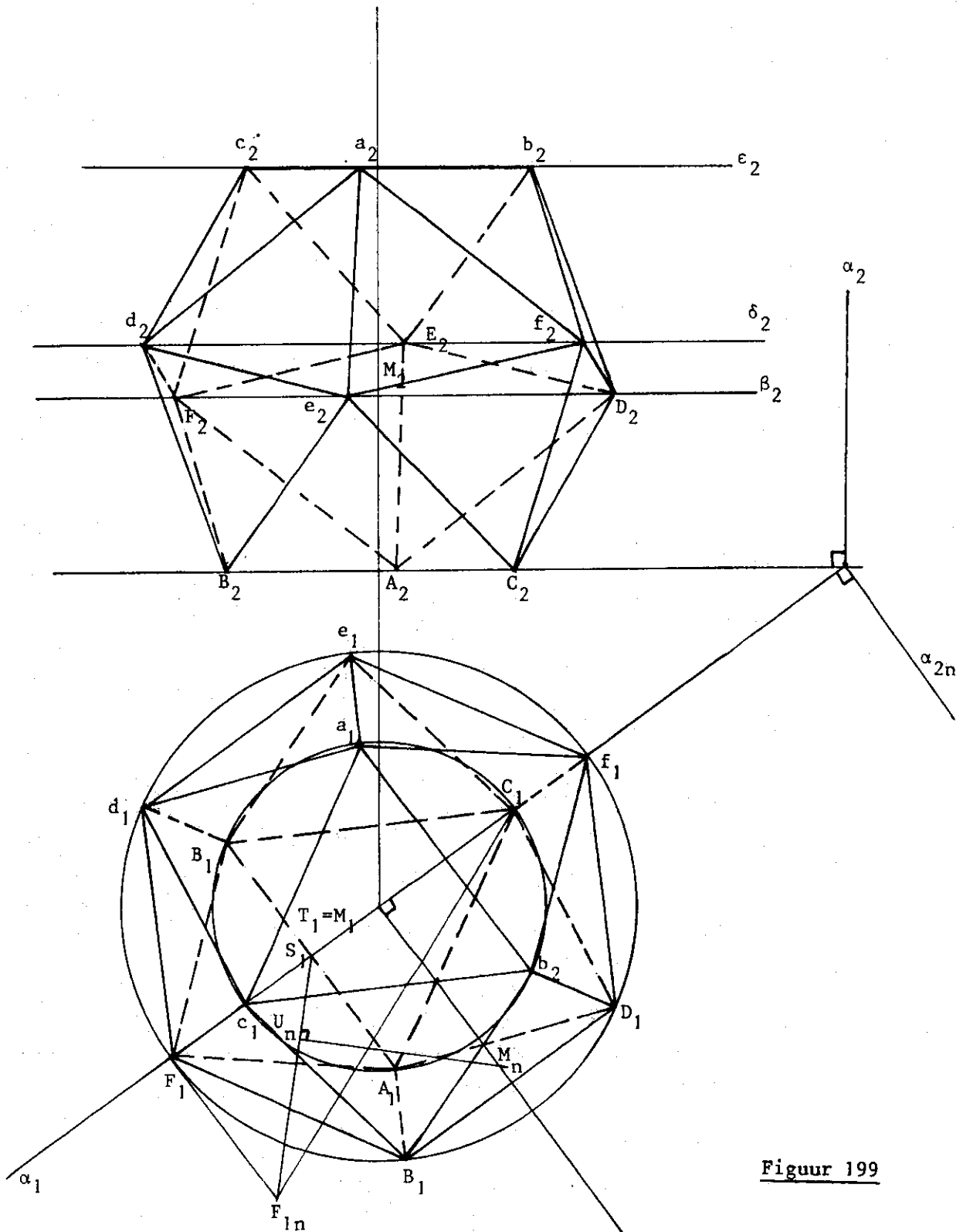
hoeken op een vlak  $\perp Aa$  dan vormen ze een regelmatige tienhoek.

Met behulp van deze eigenschappen kan het lichaam in de stand  $Aa \perp \pi_1$  eenvoudig geconstrueerd worden. In Figuur 199 (Amerikaanse projectie) is de projectie van het lichaam geconstrueerd. Het ligt met  $ABC$  in  $\pi_1$ . We beschouwen eerst de eerste projectie van het lichaam. De punten  $a_1, b_1$  en  $c_1$  vormen met  $A_1, B_1$  en  $C_1$  een regelmatige zeshoek. (Zie ook Figuur 198.) Omdat  $F, e$  en  $D$  op de bol liggen en gelijke afstand tot  $T$  hebben vormen hun eerste projecties een gelijkzijdige driehoek. Het middelpunt van de cirkel is  $M_1$ . Op dezelfde wijze blijkt dat de punten  $f_1, E_1$  en  $d_1$  op dezelfde cirkel liggen. De zes punten vormen een regelmatige zeshoek. Om de straal van deze cirkel te vinden beschouwen we Figuur 198. We brengen het vlak  $\alpha$  door  $C, F$  en het midden  $S$  van  $AB$  aan. Dit vlak  $\alpha$  is  $\perp \pi_1$ . In  $\alpha$  zijn  $CS, FS$  en  $CF$  (te construeren met behulp van Figuur 194) bekend.

In Figuur 199 is het vlak  $\alpha$  om  $\alpha_1$  in  $\pi_1$  neergeslagen en  $\Delta C_1 F_1 S_1$  geconstrueerd.  $F_1 F_{1n}$  geeft de hoogte van het vlak  $\beta$  (waarin  $F, e$  en  $D$ ). In de neergeslagen  $\alpha$  wordt nu nog  $M_n$  geconstrueerd ( $F_{1n} U_n : U_n S_1 = 2 : 1$ ) waarna met symmetrie de tweede projectie van het twintigvlak wordt voltooid.



Opmerking. Ook tussen twaalf- en twintigvlak is een verband. De middelpunten van de zijvlakken van het ene vormen de hoekpunten van het andere.



Figuur 199