TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

TENSORREKENING

Gegeven door

Prof. Dr. J.J. Seidel

Najaarssemester 1980

2.237. Bibl/Mag

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.237
Prijs f. 6,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Tensorrekening

Gegeven door prof.dr. J.J. Seidel

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Tensorrekening

Prof. Dr. J.J. Seidel

Najaarssemester 1980

dec 82

INHOUD

LITERATUUR

Voor alle hoofdstukken:

A. Lichnerowicz, Eléments de calcul tensoriel, Collection A. Colin, Paris 1960.

A. Lichnerowicz, Einführung in die Tensoranalysis, Bibl. Inst. Mannheim, 1966.

Voor differentiaalmeetkunde:

J. Haantjes, Inleiding tot de differentiaalmeetkunde, Noordhoff, 1954.

T.J. Willmore, An introduction to differential geometry, Oxford 1959.

J.C.H. Gerretsen, Tensor calculus and differential geometry, Noordhoff, 1962.

D. Laugwitz, Differentialgeometrie, Teubner, 1960.

Voor toepassingen:

I.S. Sokolnikoff, Tensor analysis, Wiley, 1951.

L. Brillonin, Tensors in mechanics and elasticity, Acad. Press, 1964.

Anders gericht:

H. Flanders, Differential forms, with applications to the physical sciences, Acad. Press, 1963.

Veel geavanceerder:

R. Abraham, Foundations of mechanics, Benjamin, 1967.

R.L. Bishop and S.I. Goldberg, Tensor analysis on manifolds, Macmillan, 1968.

HOOFDSTUK I TENSORALGEBRA

§ 1 Vectorruimten*)

Zij V een vectorruimte met inproduct (,) van dimensie n. Zij $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n$ een basis van V. Elke vector $\underline{x} \in V$ is eenduidig te schrijven als lineaire combinatie van de basisvectoren:

$$\underline{x} = x^1\underline{c}_1 + \dots + x^n\underline{c}_n = x^i\underline{c}_i \quad .$$

Hierin zijn $x^1,\dots,x^n$ de componenten van $\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n$.

Opmerking. Wij maken gebruik van de Einstein conventie: wanneer in een formule dezelfde index zowel boven als beneden voorkomt, dan is bedoeld dat over deze index wordt gesommeerd van 1 t/m n.

De elementen van een andere basis $\underline{c}_{1'},\dots,\underline{c}_{n'}$ zijn lineaire combinaties van $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n$. Ook zijn de $\underline{c}_j$ lineaire combinaties van de $\underline{c}_{j'}$. Wij schrijven

$$\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i \qquad \text{en} \qquad \underline{c}_j = A^{j'}_j\underline{c}_{j'} \quad ,$$

met behulp van de overgangsmatrices $[A^i_{i'}]$ en $[A^{j'}_j]$, die elkaars inverse zijn. Inderdaad, na substitutie volgt uit

$$\underline{c}_j = A^{j'}_j\underline{c}_{j'} = A^{j'}_j A^i_{j'}\underline{c}_i \qquad \text{en} \qquad \underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i = A^i_{i'}A^{j'}_i\underline{c}_{j'}$$

dat $\qquad A^{j'}_j A^i_{j'} = \delta^i_j \qquad$ en $\qquad A^i_{i'}A^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'} \quad ,$

waarin δ^i_j voorstelt het Kronecker symbool, gedefinieerd door

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ voor } i = j \ , \\ 0 \text{ voor } i \neq j \ . \end{cases}$$

Het verband tussen de componenten $x^{i'}$ van een vector $\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{c}_{i'}$ en de componenten x^i van $\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{c}_i$ wordt gegeven door

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i \qquad \text{en} \qquad x^i = A^i_{i'}x^{i'} \quad ,$$

immers

$$\underline{x} = x^i\underline{c}_i = x^i A^{i'}_i\underline{c}_{i'} = x^{i'}\underline{c}_{i'} \quad .$$

---

*) De hoofdstukken betreffende Lineaire Algebra in Wiskunde 10, 20, 30 worden bekend verondersteld.

Het inwendig product van twee basisvectoren $\underline{c}_i$ en $\underline{c}_j$ wordt genoteerd volgens

$$(\underline{c}_i , \underline{c}_j) = g_{ij} \quad .$$

De getallen g_{ij} vormen een symmetrische matrix. Met behulp van de getallen g_{ij} kan het inwendig product van twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ worden uitgedrukt als dubbelsom in hun componenten x^i en y^i t.o.v. een basis $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (x^i \underline{c}_i , y^j \underline{c}_j) = x^i y^j (\underline{c}_i , \underline{c}_j) = x^i y^j g_{ij} \quad .$$

Voor de lengte $|\underline{x}|$ van $\underline{x}$ en voor de hoek φ tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt

$$|x|^2 = (\underline{x}, \underline{x}) = g_{ij} x^i x^j \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{g_{k\ell} x^k x^\ell \cdot g_{mn} y^m y^n}} \quad .$$

Hieruit volgt dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ loodrecht zijn dan en slechts dan als

$$g_{ij} x^i y^j = 0 \quad .$$

Uit $(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ volgt dat

$$g_{ij} x^i x^j > 0 \quad \text{voor alle} \quad x^i \neq (0,\ldots,0) \quad ,$$

m.a.w. dat de matrix $[g_{ij}]$ positief definiet is.
Voor een andere basis $\underline{c}_{1'}, \ldots, \underline{c}_{n'}$, geldt

$$(\underline{c}_{i'} , \underline{c}_{j'}) = (A^i_{i'} \underline{c}_i , A^j_{j'} \underline{c}_j) = A^i_{i'} A^j_{j'} (\underline{c}_i , \underline{c}_j)$$

waaruit volgt het verband

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij} \quad .$$

<u>Opmerking</u>. De n^2 getallen g_{ij} zijn de componenten t.o.v. $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ van de later te definiëren <u>fundamentaaltensor</u>.

§ 2 Reciproke bases

Zij $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ een basis van de vectorruimte V. De componenten g_{ij} van de fundamentaaltensor vormen een nietsinguliere matrix $[g_{ij}]$. Met behulp van de inverse $[g^{k\ell}]$ van deze matrix worden gedefinieerd de vectoren

$$\underline{c}^i = g^{ij}\,\underline{c}_j \quad .$$

De n vectoren $\underline{c}^1, \dots, \underline{c}^n$ vormen een basis van V, die reciprook t.o.v. de oorspronkelijke basis heet. Het verband tussen de beide bases wordt duidelijk uit

$$g_{hi}\,\underline{c}^i = g_{hi}\,g^{ij}\,\underline{c}_j = \delta^j_h\,\underline{c}_j = \underline{c}_h \quad ,$$

$$(\underline{c}^i, \underline{c}^j) = g^{im}g^{jn}(\underline{c}_m, \underline{c}_n) = g^{im}g^{jn}g_{mn} = g^{jn}\delta^i_n = g^{ij} \quad ,$$

$$(\underline{c}^i, \underline{c}_j) = g^{ih}(\underline{c}_h, \underline{c}_j) = g^{ih}g_{hj} = \delta^i_j \quad .$$

De laatste betrekking drukt uit dat $\underline{c}^1$ loodrecht is op $\underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$. Voorts is $(\underline{c}^1, \underline{c}_1) = 1$, dus de projectie van $\underline{c}^1$ op $\underline{c}_1$ heeft de lengte $1/|\underline{c}_1|$. Als $[A^i_{i'}]$ de overgangsmatrix is bij overgang van de basis $\underline{c}_i$ op de basis $\underline{c}_{i'}$, dus als

$$\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\,\underline{c}_i \quad ,$$

dan is het verband tussen de reciproke bases $\underline{c}^i$ en $\underline{c}^{i'}$

$$\underline{c}^i = A^i_{i'}\,\underline{c}^{i'} \qquad \text{en} \qquad \underline{c}^{i'} = A^{i'}_i\,\underline{c}^i \quad .$$

Inderdaad, stel $\underline{c}^{i'} = B^{i'}_i\,\underline{c}^i$, dan

$$\delta^{i'}_{j'} = (\underline{c}^{i'}, \underline{c}_{j'}) = (B^{i'}_i\,\underline{c}^i, A^j_{j'}\,\underline{c}_j) = B^{i'}_i A^j_{j'}(\underline{c}^i, \underline{c}_j) =$$

$$= B^{i'}_i A^j_{j'}\,\delta^i_j = B^{i'}_i A^i_{j'} \quad ,$$

dus $[B^{i'}_i]$ is de inverse van $[A^i_{i'}]$.

Niet-orthonormale regelmatige kristalroosters in R_3 kunnen als volgt worden beschreven met behulp van reciproke bases. Neem de oorsprong O in een molecuul en neem de basisvectoren $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ langs belangrijke richtingen. In een regelmatig rooster bevinden zich de moleculen in de eindpunten van de vectoren

$$\underline{x} = x^i \underline{c}_i \quad , \quad x^i \text{ geheel} .$$

Wij introduceren het reciproke rooster

$$\underline{y} = y_j \underline{c}^j \quad , \quad y_j \text{ geheel} .$$

Voor een vaste $\underline{y}$, dus voor vaste gehelen y_1, y_2, y_3, onderzoeken wij $(\underline{x}, \underline{y})$. Wanneer x^1, x^2, x^3 elk alle gehelen doorlopen, dan doorloopt

$$x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = (\underline{x}, \underline{y})$$

een verzameling Ω van gehele getallen waarvoor geldt

$$(\lambda a \in \Omega,\ a + b \in \Omega) \ , \text{ voor alle } a, b \in \Omega \ ,$$

voor gehele λ. Zij d het kleinste positieve gehele getal in Ω, dan bestaat Ω precies uit de gehele veelvouden van d. Inderdaad, stel dat p het kleinste positieve getal is in Ω dat niet veelvoud is van d. Schrijf $p = qd + r$ met $0 < r < d$, dan zou ook $r \in \Omega$, tegenspraak.
De getallen y_1, y_2, y_3 behoren tot Ω en zijn dus veelvouden van d. Anderzijds is iedere gemene deler van y_1, y_2, y_3 ook deler van alle getallen van Ω, dus deler van d. Wij concluderen:

$$d = \text{GGD van } y_1, y_2, y_3 \quad .$$

Wanneer y_1, y_2, y_3 nu GGD = 1 hebben, dan doorloopt

$$x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3$$

precies alle gehele getallen.
Voor een vaste $\underline{y}$ uit het reciproke rooster, waarvoor $\text{GGD}(y_1, y_2, y_3) = 1$, stelt de vergelijking

$$(\underline{x}, \underline{y}) = n \quad , \quad x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = n \quad , \quad n \text{ geheel} ,$$

een vlak loodrecht op $\underline{y}$ voor. De punten $\underline{x}$ van het kristalrooster liggen dus gelaagd in vlakken loodrecht op $\underline{y}$. De afstand van twee naburige vlakken is $1/|\underline{y}|$, omdat de projectie op $\underline{y}$ van alle in één vlak liggende roosterpunten $\underline{x}$ is

$$|\underline{x}|\cos\varphi = \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{|\underline{y}|} = \frac{n}{|\underline{y}|} \quad .$$

De getallen y_1, y_2, y_3, de zogenaamde Millerindices, beschrijven dus het gehele kristalrooster. Het voordeel van het werken met het reciproke rooster, liever dan met het kristalrooster, is dat het reciproke rooster te maken heeft met makroskopische vlakken. De rol van het reciproke rooster is ook te zien in de fourierontwikkeling. De eigenschappen van een kristal met een periodieke structuur laten zich voorstellen als een periodieke functie

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) \quad \begin{array}{l} \text{voor alle } \underline{x} = x^i \underline{c}_i \text{ , } x^i \text{ geheel ,} \\ \text{voor zekere } \underline{h} = h^i \underline{c}_i \text{ , } h^i \text{ geheel .} \end{array}$$

Deze functie is te schrijven als fourierreeks

$$f(\underline{x}) = \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} e^{2\pi i(n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3)} \quad ,$$

gesommeerd over alle gehele n_1, n_2, n_3. De exponent is, door invoering van de vector $\underline{y} = n_j \underline{c}^j$, te schrijven als

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (x^i \underline{c}_i , n_j \underline{c}^j) = x^i n_j \delta_i^j = x^i n_i \quad .$$

De fourierontwikkeling luidt dus

$$f(\underline{x}) = \sum_{\underline{y}} A(\underline{y}) e^{2\pi i(\underline{x}, \underline{y})}$$

waarbij wordt gesommeerd over alle $\underline{y}$ van het reciproke rooster.

Zij $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ een basis van de vectorruimte V en zij $\underline{c}^1, \ldots, \underline{c}^n$ de daarbij behorende reciproke basis. De vector $\underline{x} \in V$ heeft t.o.v. $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ de zogenaamde

<u>contravariante</u> componenten x^i, volgens $\underline{x} = x^i \underline{c}_i$,

en t.o.v. $\underline{c}^1, \ldots, \underline{c}^n$ de zogenaamde

<u>covariante</u> componenten x_j, volgens $\underline{x} = x_j \underline{c}^j$.

Voor de covariante componenten van $\underline{x}$ geldt

$$x_i = (\underline{x}, \underline{c}_i)$$

omdat $(\underline{x}, \underline{c}_i) = (x_j \underline{c}^j , \underline{c}_i) = x_j (\underline{c}^j , \underline{c}_i) = x_j \delta_i^j = x_i$. Als $|\underline{c}_i| = 1$ dan is dus x_i de lengte van de projectie van $\underline{x}$ op $\underline{c}_i$. Bij overgang op een andere basis $\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i$ geldt $x_{i'} = (\underline{x}, \underline{c}_{i'}) = A^i_{i'}(\underline{x}, \underline{c}_i) = A^i_{i'}x_i$. De covariante componenten van $\underline{x}$ veranderen dus op dezelfde manier als de basisvectoren; vandaar de naam. Tussen de covariante en de contravariante componenten van $\underline{x}$ bestaat **het verband**

$$x_i = g_{ij}x^j \quad \text{en} \quad x^j = g^{ji}x_i \quad .$$

Met behulp van de componenten van de fundamentaaltensor kunnen wij dus de indices <u>op en neer halen</u>. Inderdaad, dit volgt uit

$$x_i = (\underline{x}, \underline{c}_i) = (x^j\underline{c}_j, \underline{c}_i) = x^j(\underline{c}_j, \underline{c}_i) = x^j g_{ji} \quad ,$$

$$g^{jh}x_h = g^{jh}g_{hi}x^i = \delta^j_i x^i = x^j \quad .$$

Voor het inwendig product van twee vectoren hebben wij nu de volgende schrijfwijzen:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j = x^i y_i = g^{ik}x_k y_i \quad .$$

Wij beschouwen alle lineaire functies $\varphi(\underline{x})$ van vectoren $\underline{x}$ van de vectorruimte V. Deze functies vormen een vectorruimte V^* omdat $\varphi(\underline{x}) + \psi(\underline{x})$ en $\lambda\varphi(\underline{x})$ weer lineaire vectorfuncties zijn. Een voorbeeld van zulke lineaire functies is de functie x^1 die aan elke vector $\underline{x}$ toevoegt zijn eerste contravariante component x^1 t.o.v. een basis $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$. De n lineaire functies $x^1, \ldots, x^n$ vormen een basis voor V^* wegens

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x^i\underline{c}_i) = x^i\varphi(\underline{c}_i) \quad .$$

Hieruit volgt dat V^* de dimensie n heeft. Een ander voorbeeld van een lineaire functie is de functie x_i, die aan elke $\underline{x} \in V$ toevoegt zijn i^e covariante component x_i. Ook de n lineaire functies $x_1, \ldots, x_n$ vormen een basis voor V^* wegens

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x_j\underline{c}^j) = x_j\varphi(\underline{c}^j) \quad .$$

Elke lineaire vectorfunctie $\varphi(\underline{x})$ is, met behulp van een vaste $\underline{f} \in V$, te schrijven als inproduct

$$\varphi(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{f}) \quad .$$

Inderdaad, bij gegeven $\varphi(\underline{x}) \in V^*$ definiëren wij

$$\underline{f} = \underline{c}_j\, \varphi(\underline{c}^j) \quad ,$$

dan geldt

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x_j\, \underline{c}^j) = x_j\, \varphi(\underline{c}^j) = x_j\, f^j = (\underline{x}\,,\, \underline{f}) \quad .$$

Omgekeerd behoort bij elke gegeven $\underline{f} \in V$ een lineaire vectorfunctie $(\underline{x}\,,\,\underline{f})$. Omdat $\dim V = \dim V^* = n$ concluderen wij:

> Er is een één-éénduidig verband tussen de lineaire vectorfuncties $\varphi(\underline{x}) \in V^*$ en de vectoren $\underline{f} \in V$ volgens
>
> $\varphi(\underline{x}) = (\underline{x}\,,\,\underline{f})$.

Omdat in dit verband lineaire combinaties van lineaire vectorfuncties corresponderen met dezelfde lineaire combinaties der corresponderende vectoren, kunnen wij op grond van dit verband V en V^* identificeren. Met de vectoren van de reciproke basis $\underline{c}^1, \ldots, \underline{c}^n$ corresponderen dan de lineaire functies $x^1, \ldots, x^n$, gedefinieerd t.o.v. de oorspronkelijke basis $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$, omdat

$$(\underline{x}\,,\,\underline{c}^i) = (x^j\, \underline{c}_j\,,\, \underline{c}^i) = x^j (\underline{c}_j\,,\, \underline{c}^i) = x^j\, \delta^i_j = x^i \quad .$$

Opmerking. Het verband tussen lineaire vectorfuncties en vectoren komt overeen met het verband tussen hypervlakken door O en de daar loodrecht op staande normaalvectoren.

De overgangsmatrices van twee orthonormale bases $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ en $\underline{e}_{1'}, \ldots, \underline{e}_{n'}$, gedefinieerd door

$$\underline{e}_{i'} = A^i_{i'}\, \underline{e}_i \quad , \qquad \underline{e}_j = A^{j'}_j\, \underline{e}_{j'}$$

zijn orthogonale matrices. Inderdaad, wegens

$$(\underline{e}_{i'}\,,\,\underline{e}_{j'}) = A^i_{i'}\, A^j_{j'}\, (\underline{e}_i\,,\,\underline{e}_j)$$

moet voor orthonormale bases gelden

$$\delta_{i'j'} = A^i_{i'}\, A^j_{j'}\, \delta_{ij} \quad , \qquad \delta_{i'j'} = \sum_{i=1}^{n} A^i_{i'}\, A^i_{j'} \quad .$$

De componenten t.o.v. een orthonormale basis van de fundamentaaltensor zijn de Kroneckergetallen, omdat

$$g_{ij} = (\underline{e}_i , \underline{e}_j) = \delta_{ij} \quad .$$

Ten opzichte van een orthonormale basis verdwijnt het verschil tussen de contravariante en de covariante componenten van een vector $\underline{x}$ omdat

$$x_i = g_{ij} x^j = \delta_{ij} x^j = x^i \quad .$$

§ 3 Tensoren

> Een tensor is een functie van een aantal vectoren, die lineair is in elk van die vectoren.

Een 2-tensor is dus een functie $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ die lineair is zowel in $\underline{x} \in V$ als in $\underline{y} \in V$, d.w.z.

$$\varphi(\underline{x}+\underline{x}', \underline{y}) = \varphi(\underline{x}, \underline{y}) + \varphi(\underline{x}', \underline{y}) \quad , \quad \varphi(\underline{x}, \mu\underline{y}) = \mu\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \quad ,$$

$$\varphi(\lambda\underline{x}, \underline{y}) = \lambda\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \quad , \quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}+\underline{y}') = \varphi(\underline{x}, \underline{y}) + \varphi(\underline{x}, \underline{y}')$$

Schrijf $\underline{x}$ en $\underline{y}$ als lineaire combinatie van een basis $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$, dan

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(x^i \underline{c}_i , y^j \underline{c}_j) = x^i y^j \varphi(\underline{c}_i , \underline{c}_j) \quad .$$

De getallen $\varphi(\underline{c}_i , \underline{c}_j)$, die worden genoteerd met φ_{ij}, heten de covariante componenten van de tensor φ t.o.v. de basis $\underline{c}_i$:

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_{ij} x^i y^j \quad .$$

Tussen de componenten φ_{ij} t.o.v. de basis $\underline{c}_i$ en de componenten $\varphi_{i'j'}$ t.o.v. de basis $\underline{c}_{i'}$, bestaat het volgende verband

$$\varphi_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} \varphi_{ij} \quad .$$

Inderdaad,

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\underline{c}_{i'} , \underline{c}_{j'}) = \varphi(A^i_{i'} \underline{c}_i , A^j_{j'} \underline{c}_j) = A^i_{i'} A^j_{j'} \varphi(\underline{c}_i , \underline{c}_j) = A^i_{i'} A^j_{j'} \varphi_{ij}$$

Een tensor heeft ook contravariante componenten, namelijk

$$\varphi^{ij} = \varphi(\underline{c}^i , \underline{c}^j)$$

waarin $\underline{c}^i$ de t.o.v. $\underline{c}_i$ reciproke basis is. Het verband tussen de contravariante en de covariante componenten van de 2-tensor $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ luidt

$$\varphi_{hi}\, g^{hj}\, g^{ik} = \varphi^{jk} \qquad , \qquad \varphi^{hi}\, g_{hj}\, g_{ik} = \varphi_{jk} \qquad ,$$

zoals blijkt uit

$$\varphi^{jk} = \varphi(\underline{c}^{j}, \underline{c}^{k}) = \varphi(g^{jh}\underline{c}_{h}, g^{ki}\underline{c}_{i}) = g^{jh}g^{ki}\varphi(\underline{c}_{h}, \underline{c}_{i}) = g^{jh}g^{ki}\varphi_{hi} \quad .$$

Een tensor heeft ook <u>gemengde componenten</u>

$$\varphi_{i}^{\bullet j} = \varphi(\underline{c}_{i}, \underline{c}^{j}) \qquad \text{en} \qquad \varphi^{i}_{\bullet j} = \varphi(\underline{c}^{i}, \underline{c}_{j})$$

waarvan de indices weer op en neer kunnen worden gehaald met behulp van de fundamentaaltensor:

$$\varphi_{i}^{\bullet j}\, g_{jk} = \varphi_{ik} \quad , \quad \varphi_{i}^{\bullet j}\, g^{ih} = \varphi^{hj} \quad .$$

Met zijn diverse soorten componenten kan een 2-tensor op de volgende manieren worden geschreven

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_{ij}\, x^{i} y^{j} = \varphi^{ij}\, x_{i} y_{j} = \varphi_{i}^{\bullet j}\, x^{i} y_{j} = \varphi^{i}_{\bullet j}\, x_{i} y^{j} \quad .$$

Het is duidelijk dat de contravariante en de gemengde componenten transformeren volgens

$$\varphi^{i'j'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} \varphi^{ij} \quad , \quad \varphi_{i'}^{\bullet j'} = A^{i}_{i'} A^{j'}_{j} \varphi_{i}^{\bullet j} \quad , \quad \varphi^{j'}_{\bullet i'} = A^{j'}_{j} A^{i}_{i'} \varphi^{j}_{\bullet i} \quad .$$

<u>Opmerking</u>. In vele boeken wordt een tensor gedefinieerd als een grootheid die zich volgens bovenstaande formules transformeert.

<u>Voorbeeld</u>. Het meest eenvoudige voorbeeld van een 2-tensor is het inproduct $(\underline{x}, \underline{y})$, dat inderdaad zowel in $\underline{x}$ als in $\underline{y}$ lineair is. Deze 2-tensor heet de <u>fundamentaaltensor</u>. Zijn covariante componenten zijn $(\underline{c}_{i}, \underline{c}_{j}) = g_{ij}$, zijn contravariante componenten zijn $(\underline{c}^{i}, \underline{c}^{j}) = g^{ij}$ en zijn gemengde componenten zijn $(\underline{c}_{i}, \underline{c}^{j}) = \delta_{i}^{j}$. De fundamentaaltensor is dus te schrijven als

$$(\underline{x}, \underline{y}) = g_{ij}\, x^{i} y^{j} = g^{ij}\, x_{i} y_{j} = \delta_{i}^{j}\, x^{i} y_{j} = x^{i} y_{i} = x_{i} y^{i} \quad .$$

Een <u>0-tensor</u>, ook <u>scalar</u> genoemd, is een functie die aan elke vector hetzelfde getal toevoegt. Een <u>1-tensor</u> is een lineaire vectorfunctie

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(x^{i}\underline{c}_{i}) = x^{i}\varphi(\underline{c}_{i}) \quad .$$

Deze functie is bepaald door de getallen $\varphi(\underline{c}_i)$, die zijn op te vatten als de covariante componenten van een vector. Volgens § 2 bestaat er bij elke 1-tensor φ een vector $\underline{f}$ zodat $\varphi(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{f})$ en is er dus een éénéénduidig verband tussen 1-tensoren en vectoren.

Een <u>3-tensor</u> is een functie $\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ die lineair is in $\underline{x}$, in $\underline{y}$ en in $\underline{z}$. Schrijf

$$\underline{x} = x^h \underline{c}_h \quad , \quad \underline{y} = y^i \underline{c}_i \quad , \quad \underline{z} = z^j \underline{c}_j \quad , \quad \varphi(\underline{c}_h, \underline{c}_i, \underline{c}_j) = \varphi_{hij} \quad ,$$

dan

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = x^h y^i z^j \varphi_{hij} \quad .$$

φ_{hij} zijn de covariante componenten van de 3-tensor. Bij overgang op een andere basis geldt

$$\varphi_{h'i'j'} = A^h_{h'} A^i_{i'} A^j_{j'} \varphi_{hij} \quad .$$

De contravariante en de gemengde componenten van $\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, gedefinieerd door substitutie van reciproke basisvectoren op alle resp. enkele plaatsen, hangen onderling en met de covariante componenten samen volgens bijvoorbeeld

$$\varphi_{hij}\, g^{jk} = \varphi_{hi}{}^{\cdot\cdot k} \quad , \quad \varphi_{hij}\, g^{hk} g^{i\ell} g^{jm} = \varphi^{k\ell m} \quad .$$

Een <u>p-tensor</u> $\varphi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_p)$ heeft ten opzichte van een basis covariante componenten die zich bij overgang op een andere basis transformeren volgens

$$\varphi_{i'_1 i'_2 \ldots i'_p} = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_p}_{i'_p} \quad .$$

Elke tensor is blijkbaar bepaald door zijn componenten ten opzichte van één basis. Twee p-tensoren zijn dezelfde wanneer hun componenten t.o.v. een zekere basis dezelfde zijn. Hieruit volgt een eenvoudige methode om de gelijkheid van twee tensoren te bewijzen. Wanneer de gelijkheid van de componenten t.o.v. één basis is aangetoond, dan volgt op grond van het tensorkarakter dat de componenten t.o.v. elke andere basis eveneens gelijk zijn.

Omgekeerd, laat op een aantal bases telkens stelsels getallen zijn gegeven, bijvoorbeeld

$$\varphi_{hij} \text{ op } \underline{c}_k \quad , \quad \varphi_{h'i'j'} \text{ op } \underline{c}_{k'} \quad , \quad \varphi_{h''i''j''} \text{ op } \underline{c}_{k''} \quad , \quad \text{etc.}$$

Deze stelsels getallen zijn de covariante componenten van een 3-tensor, wanneer is voldaan aan één van de volgende <u>criteria</u>:

A. Voor willekeurige vectoren $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ geldt

$$\varphi_{hij}\, x^h y^i z^j = \varphi_{h'i'j'}\, x^{h'} y^{i'} z^{j'} = \varphi_{h''i''j''}\, x^{h''} y^{i''} z^{j''} = \ldots$$

B. Voor willekeurige vectoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ zijn

$$\varphi_{hij}\, x^h y^i \quad , \quad \varphi_{h'i'j'}\, x^{h'} y^{i'} \quad , \quad \varphi_{h''i''j''}\, x^{h''} y^{i''} \quad , \ldots$$

de componenten van een 1-tensor t.o.v. de verschillende bases.

C. Voor willekeurige vectoren $\underline{x}$ zijn

$$\varphi_{hij}\, x^h \ , \ \varphi_{h'i'j'}\, x^{h'} \ , \ \varphi_{h''i''j''}\, x^{h''} \quad , \ldots$$

de componenten van een 2-tensor t.o.v. de verschillende bases.

De hierboven gegeven criteria laten zich uitbreiden tot p-tensoren.

§ 4 Bewerkingen met tensoren

Zij V een vectorruimte van dimensie n. Wij definiëren de som van twee p-tensoren en het product van een p-tensor met een scalar λ teneinde de verzameling van alle p-tensoren over V te maken tot een vectorruimte.

De som van twee 2-tensoren φ en ψ, te noteren met $\varphi + \psi$, en het λ-voud van φ, te noteren $\lambda\varphi$, worden gedefinieerd door

$$(\varphi + \psi)(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{x}, \underline{y}) + \psi(\underline{x}, \underline{y}) \quad , \quad (\lambda\varphi)(\underline{x}, \underline{y}) = \lambda\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \quad .$$

Deze functies zijn lineair in $\underline{x}$ en in $\underline{y}$, dus zijn weer 2-tensoren. Hun covariante componenten volgen uit

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) + \psi(\underline{x}, \underline{y}) = (\varphi_{ij} + \psi_{ij})x^i y^j \quad , \quad \lambda\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \lambda\varphi_{ij}\, x^i y^j \quad .$$

De definitie van de som en de vermenigvuldiging met λ van p-tensoren met $\varphi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p)$ en $\psi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p)$ is analoog:

$$(\varphi + \psi)(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) = \varphi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) + \psi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p)$$

en

$$(\lambda\varphi)(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) = \lambda\varphi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) \quad .$$

De som van een p-tensor en een q-tensor voor $p \neq q$ wordt niet gedefinieerd. Onder bovenstaande bewerkingen is de verzameling van alle p-tensoren over V een vectorruimte, die wordt aangeduid met

$$\otimes_p V = V \otimes \ldots \otimes V \qquad \text{(p stuks)} \ .$$

Het <u>tensorproduct</u> van een 3-tensor φ en een 2-tensor ψ, te noteren met $\varphi \otimes \psi$, wordt gedefinieerd door

$$(\varphi \otimes \psi)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}, \underline{v}) = \varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})\psi(\underline{u}, \underline{v}) \quad .$$

Deze functie is lineair in $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}, \underline{v}$, dus is een 5-tensor. Zijn covariante componenten zijn $\varphi_{hij}\ \psi_{k\ell}$, zoals volgt uit

$$(\varphi \otimes \psi)(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}, \underline{v}) = \varphi_{hij}\, x^h y^i z^j \psi_{k\ell}\, u^k v^\ell = \varphi_{hij}\, \psi_{k\ell}\, x^h y^i z^j u^k v^\ell \quad .$$

De definitie van het tensorproduct van een p-tensor $\varphi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p)$ en een q-tensor $\psi(\underline{x}_{p+1}, \dots, \underline{x}_{p+q})$ is analoog:

$$(\varphi \otimes \psi)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{p+q}) = \varphi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p)\psi(\underline{x}_{p+1}, \dots, \underline{x}_{p+q}) \quad .$$

$\varphi \otimes \psi$ is een $(p+q)$-tensor. Het tensorproduct is associatief:

$$(\varphi \otimes \psi) \otimes \chi = \varphi \otimes (\psi \otimes \chi) \quad ,$$

maar niet commutatief: voor 1-tensoren $\varphi(\underline{x})$ en $\psi(y)$ is

$$(\varphi \otimes \psi)(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{x})\psi(\underline{y}) \quad \text{en} \quad (\psi \otimes \varphi)(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{y})\psi(\underline{x})$$

en dit zijn niet dezelfde functies.

Zij $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ een basis van de vectorruimte V. Elk der n componenten $x^1, x^2, \dots, x^n$ ten opzichte van deze basis van een variabele vector $\underline{x}$ is een lineaire functie op V, dus een 1-tensor. Uit deze n lineaire functies kunnen n^2 tensorproducten

$$x^h \otimes y^i = x^h y^i$$

worden gevormd, elk een 2-tensor. Een willekeurige 2-tensor

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_{hi}\, x^h y^i$$

is een lineaire combinatie van deze speciale 2-tensoren. De vectorruimte $V \otimes V$ van alle 2-tensoren heeft, voor $n \geqslant 2$, deze speciale 2-tensoren als basis, dus heeft de dimensie n^2. Evenzo kunnen n^3 tensorproducten

$$x^h \otimes y^i \otimes z^j = x^h y^i z^j$$

worden gevormd, elk een 3-tensor. Een willekeurige 3-tensor

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \varphi_{hij}\, x^h y^i z^j$$

is een lineaire combinatie van deze speciale 3-tensoren.

Zij vormen een basis voor $V \otimes V \otimes V$, die dus dimensie n^3 heeft.
Met een redenering analoog aan die van hierboven wordt aangetoond dat de vectorruimte $V \otimes \ldots \otimes V$ van alle p-tensoren de dimensie n^p heeft omdat er n^p als p-tensor op te vatten elementen $x^{i_1} x^{i_2} \ldots x_p^{i_p}$ kunnen worden aangewezen waarvan elke p-tensor een lineaire combinatie is:

$$\varphi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) = \varphi_{i \ldots i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} \quad .$$

De ruimte van alle mogelijke tensoren

$$T(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \otimes_k V$$

heet de bij V behorende <u>tensoralgebra.</u> Dit is een algebra omdat erin kan worden vermenigvuldigd, namelijk volgens het tensorproduct.

<u>Contractie</u> is een operatie waardoor uit een p-tensor een (p - 2)-tensor wordt verkregen. Beschouw een 5-tensor φ met componenten

$$\varphi^{i}_{\bullet jk\ell m} = g^{hi} \varphi_{hjk\ell m} \quad .$$

Door contractie, dat is door sommatie over een index boven en beneden, wordt uit φ verkregen de 3-tensor ψ met de componenten

$$\psi_{k\ell m} = \varphi^{i}_{\bullet ik\ell m} = g^{hi} \varphi_{hik\ell m} = \varphi^{\bullet i}_{i \bullet k\ell m} \quad .$$

Deze operatie komt neer op het vervangen, in

$$\varphi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots, \underline{x}_p) = \varphi_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \ldots x_p^{i_p} \quad ,$$

van $x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ door $g^{i_1 i_2}$, dus op het vormen van

$$\psi(\underline{x}_3, \ldots, \underline{x}_p) = \varphi_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} g^{i_1 i_2} x_3^{i_3} \ldots x_p^{i_p} \quad .$$

Uit een 2-tensor $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ wordt door contractie gevormd de scalar

$$\varphi_i^{\bullet i} = \varphi^{j}_{\bullet j} = g^{ij} \varphi_{ij} \quad ,$$

die inderdaad bestand is tegen verandering van basis, immers

$$\varphi_{i'}^{\cdot i'} = A_{i'}^{m} A_{n}^{i'} \varphi_{m}^{\cdot n} = \delta_{n}^{m} \varphi_{m}^{\cdot n} = \varphi_{m}^{\cdot m} \quad .$$

Opmerking. De huidige inleiding in de tensoralgebra is voor ons doel voldoende. Voor een meer algemene behandeling zij verwezen naar de literatuur.

Opmerking. Met behulp van het in § 2 behandelde verband tussen 1-tensoren en vectoren kunnen nu ook tensorproducten van vectoren worden gedefinieerd.

§ 5 Uitwendige algebra

Een 2-tensor φ heet symmetrisch wanneer

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{y}, \underline{x}) \quad \text{voor alle } \underline{x} \in V, \underline{y} \in V \quad .$$

Een 2-tensor φ heet scheef wanneer

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = -\varphi(\underline{y}, \underline{x}) \quad \text{voor alle } \underline{x} \in V, \underline{y} \in V \quad .$$

De fundamentaaltensor $(\underline{x}, \underline{y})$ is symmetrisch. De determinant van afmeting twee, $\det(\underline{x}, \underline{y})$, is een scheve 2-tensor in R_2. Elke 2-tensor $\psi(\underline{x}, \underline{y})$ is de som van een symmetrische en een scheve 2-tensor, namelijk

$$\psi(\underline{x}, \underline{y}) = \tfrac{1}{2}[\psi(\underline{x}, \underline{y}) + \psi(\underline{y}, \underline{x})] + \tfrac{1}{2}[\psi(\underline{x}, \underline{y}) - \psi(\underline{y}, \underline{x})] \quad .$$

Voor de covariante componenten t.o.v. zekere basis van een symmetrische 2-tensor φ geldt $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. Voor de covariante componenten van een scheve 2-tensor φ geldt $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$, in het bijzonder $\varphi_{ii} = 0$ voor alle i.

Het uitwendig product van twee 1-tensoren α en β wordt gedefinieerd volgens

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad .$$

Dit uitwendig product is een scheve 2-tensor en voldoet aan

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \quad , \quad \alpha \wedge \alpha = 0 \quad .$$

De vectorruimte van alle scheve 2-tensoren wordt genoteerd met $V \wedge V$. Deze $V \wedge V$ is een deelruimte van dimensie $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ van de vectorruimte $V \otimes V$ van alle 2-tensoren. Om dit te bewijzen schrijven wij een willekeurige scheve 2-tensor ω t.o.v. de basis $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ van V.

$$\omega(\underline{x}, \underline{y}) = \omega(x^i \underline{c}_i, y^j \underline{c}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \omega(\underline{c}_i, \underline{c}_j) =$$

$$= \sum_{i<j} x^i y^j \omega(\underline{c}_i, \underline{c}_j) + 0 + \sum_{i>j} x^i y^j \omega(\underline{c}_i, \underline{c}_j) =$$

$$= \sum_{i<j} (x^i y^j - x^j y^i) \omega(\underline{c}_i, \underline{c}_j) = \sum_{i<j} \omega_{ij} x^i \wedge y^j \quad .$$

Hierbij moet worden bedacht dat van de lineaire functies $x^1, \dots, x^n$ de volgende 2-tensoren kunnen worden gemaakt:

$$x^i \otimes y^j = x^i y^j \quad , \quad x^j \otimes y^i = x^j y^i \quad , \quad x^i \wedge y^j = x^i y^j - x^j y^i \quad ,$$

en dat er $\frac{1}{2} n(n-1)$ onafhankelijke uitwendige producten $x^i \wedge y^j$ zijn.

Voorbeeld. Voor $n = 3$ staat er

$$\omega(\underline{x}, \underline{y}) = \omega_{23}(x^2y^3 - x^3y^2) + \omega_{13}(x^1y^3 - x^3y^1) + \omega_{12}(x^1y^2 - x^2y^1) \quad .$$

Wanneer in het bijzonder de basis van R_3 orthonormaal is, dan is dit te interpreteren als inproduct van de vector

$$\underline{\omega} = \omega_{23}\underline{e}_1 + \omega_{31}\underline{e}_2 + \omega_{12}\underline{e}_3$$

en het gewone vectorproduct

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = (x^2y^3 - x^3y^2)\underline{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\underline{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\underline{e}_3 \quad .$$

Een 3-tensor $\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ heet totaal scheef, of <u>alternerend</u>, wanneer hij scheef is t.o.v. elk paar der vectoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, dus wanneer

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \varphi(\underline{y}, \underline{z}, \underline{x}) = -\varphi(\underline{z}, \underline{y}, \underline{x}) = -\varphi(\underline{x}, \underline{z}, \underline{y}) =$$
$$= -\varphi(\underline{y}, \underline{x}, \underline{z}) = +\varphi(\underline{z}, \underline{x}, \underline{y}) \quad .$$

Een voorbeeld van een alternerende 3-tensor in R_3 is de determinant $\det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$. Ten opzichte van de basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ geldt

$$\det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = x^h y^i z^j \det(\underline{c}_h, \underline{c}_i, \underline{c}_j) =$$
$$= \delta^{123}_{hij} x^h y^i z^j \det(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3) \quad ,$$

waarin de Kroneckergetallen δ^{123}_{hij} zijn gedefinieerd volgens

$$\delta^{k\ell m}_{hij} = \begin{cases} 1 & \text{als } (k,\ell,m) \text{ is even permutatie van } (h,i,j), \\ -1 & \text{als } (k,\ell,m) \text{ is oneven permutatie van } (h,i,j), \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Ten opzichte van een orthonormale basis geldt

$$\det(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 1 \quad , \quad \det(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \delta^{123}_{hij} x^h y^i z^j \quad .$$

Merk op dat $\delta^{123}_{hij}\, x^h y^i$ de componenten van het gewone vectorproduct in R_3 zijn, en dat $\delta^{123}_{hij}\, z^j$ de componenten zijn van een scheve 2-tensor $\zeta(\underline{x}, \underline{y})$ in R_3, namelijk

$$\zeta_{12} = -\zeta_{21} = z^3 \ , \quad \zeta_{31} = -\zeta_{13} = z^2 \ , \quad \zeta_{23} = -\zeta_{32} = z^1 \quad .$$

Het <u>uitwendig product</u> van drie 1-tensoren $\alpha = \alpha^1$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$ in R_n wordt gedefinieerd door

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha \otimes \beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \gamma \otimes \alpha +$$
$$- \alpha \otimes \gamma \otimes \beta - \gamma \otimes \beta \otimes \alpha - \beta \otimes \alpha \otimes \gamma \quad ,$$

dus door

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 = \delta^{123}_{hij}\, \alpha^h \otimes \alpha^i \otimes \alpha^j \quad .$$

Dit uitwendig product is een alternerende 3-tensor. De vectorruimte $V \wedge V \wedge V$ van alle alternerende 3-tensoren van V is een deelruimte van dimensie $\binom{n}{3}$ van de vectorruimte $V \otimes V \otimes V$ van alle 3-tensoren van V. Inderdaad, voor elke alternerende $\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ is $\varphi_{hij} = 0$ als twee of drie der h,i,j gelijk zijn en voorts $\varphi_{hij} = -\varphi_{hji}$, etc. Er geldt

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \varphi_{hij}\, x^h y^i z^j =$$

$$= \left[\sum_{h<i<j} + \sum_{h<j<i} + \sum_{i<h<j} + \sum_{i<j<h} + \sum_{j<h<i} + \sum_{j<i<h} \right] \varphi_{hij}\, x^h y^i z^j =$$

$$= \sum_{h<i<j} \varphi_{hij} [x^h y^i z^j - x^h y^j z^i - x^i y^h z^j + x^i y^j z^h + x^j y^h z^i - x^j y^i z^h] =$$

$$= \sum_{h<i<j} \varphi_{hij}\, x^h \wedge y^i \wedge z^j \quad ,$$

dus $\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ is lineaire combinatie der $\binom{n}{3}$ alternerende 3-tensoren $x^h \wedge y^i \wedge z^j$, $h < i < j$.

Met een redenering analoog aan die van hierboven wordt aangetoond dat de vectorruimte $V \wedge \ldots \wedge V$ van alle alternerende p-tensoren de dimensie $\binom{n}{p}$ heeft omdat voor elke alternerende p-tensor geldt

$$\varphi(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}\, x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \varphi_{i_1 \ldots i_p}\, x_1^{i_1} \wedge \ldots \wedge x_p^{i_p}$$

waarbij het uitwendige product van p stuks 1-tensoren is gedefinieerd volgens

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^p = \delta^{1\ldots p}_{i_1\ldots i_p}\, \alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_p} \quad ,$$

met behulp van de Kroneckergetallen

$$\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p} = \begin{cases} 1 \text{ als } (j_1,\ldots,j_p) \text{ even permutatie van } (i_1,\ldots,i_p), \\ -1 \text{ als } (j_1,\ldots,j_p) \text{ oneven permutatie van } (i_1,\ldots,i_p), \\ 0 \text{ anders.} \end{cases}$$

Het uitwendig product $\varphi \wedge \psi$ van een alternerende p-tensor φ en een alternerende q-tensor ψ wordt gedefinieerd door lineaire uitbreiding van de definitie van het uitwendig product van $\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^p$ en $\beta^1 \wedge \ldots \wedge \beta^q$, met 1-tensoren α^i en β^i,

$$(\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^p) \wedge (\beta^1 \wedge \ldots \wedge \beta^q) = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^p \wedge \beta^1 \wedge \ldots \wedge \beta^q \quad .$$

Dit uitwendig product is associatief en distributief en voldoet aan

$$\psi \wedge \varphi = (-1)^{pq}\, \varphi \wedge \psi \quad .$$

De ruimte van alle mogelijke alternerende tensoren

$$U(V) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k V$$

heet de bij V behorende <u>uitwendige algebra</u>. Dit is een algebra, omdat er in kan worden vermenigvuldigd, namelijk volgens het uitwendige product.

HOOFDSTUK II VOORBEELDEN VAN TENSOREN

§ 1 Spanning en rek

Beschouw een in evenwicht verkerend continu medium, elastisch, plastisch of vloeibaar. Een stuk van dit medium, begrensd door een gesloten oppervlak S, wordt vrijgemaakt door in elk punt van S te definiëren een spanning $\underline{k}$ per eenheid van oppervlakte. De spanning $\underline{k}$ in een punt P hangt af van de normaal $\underline{\alpha}$ in P op S. Uit de hypothesen van de mechanica volgt dat deze afhankelijkheid lineair en symmetrisch is:

$$k^i = t_j^{\cdot i} \alpha^j \quad , \quad \text{met} \quad t_j^{\cdot i} = t_i^{\cdot j} \quad .$$

Omdat $\underline{k}$ en $\underline{\alpha}$ vectoren zijn, zijn volgens I, § 3 de coëfficiënten $t_j^{\cdot i}$ de gemengde componenten van een symmetrische tensor, de spanningstensor in P. Deze tensor kan worden geïnterpreteerd als de projectie van de spanning $\underline{k}$ in P op de richting $\underline{\beta}$, namelijk als

$$(\underline{k}, \underline{\beta}) = g_{hj} \beta^j k^h = g_{hj} \beta^j t_i^{\cdot h} \alpha^i = t_{ij} \alpha^i \beta^j \quad .$$

Uitwendige krachten, temperatuurveranderingen en dergelijke, brengen in een continu medium deformaties teweeg. Laat een punt $\underline{x}$ bij deformatie overgaan in het punt $\underline{x} + \underline{u}$, dan zijn de componenten van de uitwijking $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ functies van $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$. De functies $\underline{u}(\underline{x})$ worden ontwikkeld in een Taylorreeks rond een punt P:

$$u_j = (u_j)_P + (x^i - x_P^i)(\partial_i u_j)_P + (x^h - x_P^h)(x^i - x_P^i)(\partial_h \partial_i u_j)_P + \dots$$

met de notatie

$$\frac{\partial u_j}{\partial x^i} = \partial_i u_j \quad , \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^h \partial x^i} = \partial_h \partial_i u_j \quad .$$

De coëfficiënten $(\partial_i u_j)_P$ van het lineaire stuk zijn de componenten van een 2-tensor, immers voor een ander coördinatenstelsel geldt

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'} \quad , \quad u_{j'} = A^j_{j'} u_j \quad ,$$

dus

$$\partial_{i'} u_{j'} = \frac{\partial u_{j'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial [A^j_{j'} u_j]}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^j_{j'} A^i_{i'} \partial_i u_j \quad .$$

De tensorcomponenten $(\partial_i u_j)_P$ zijn de som van de componenten

$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)_P$ van de symmetrische <u>rektensor</u> in P en

$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)_P$ van de scheve <u>rotatietensor</u> in P.

Voor een rekvrije deformatie geldt in eerste benadering (neem de oorsprong in P)

$$u_j = x^i \omega_{ij}$$

hetgeen, als de z-as wordt genomen langs de vector $(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$, zich reduceert tot

$$u_1 = -rx^2 \quad , \quad u_2 = rx^1 \quad , \quad u_3 = 0 \quad ,$$

een rotatie rond de vector $(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$.

Bij deformatie hangen de spanningstensor t_{ij} en de rektensor e_{ij} samen. In de lineaire elasticiteitstheorie wordt deze afhankelijkheid lineair verondersteld:

$$t_{hi} = c_{hijk} e^{jk} \quad .$$

De getallen c_{hijk} zijn de componenten van de zogenaamde elasticiteitstensor γ, een 4-tensor in R_3, namelijk

$$c_{hijk} = \gamma(\underline{e}_h, \underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k) \; , \quad (h,i,j,k) \text{ uit } (1,2,3) \quad .$$

§ 2 <u>Anisotropie</u>

Een fysische inwerking I geeft een effect E. Zowel I als E worden vaak beschreven door een veld van tensoren, bijvoorbeeld:

I: temperatuur (scalar T), electrisch veld (vector E^i), spanning (tensor t_{ij}),

E: warmtestroom (vector w^i), dielectrische verplaatsing (vector D^i), deformatie (tensor e_{ij}).

In de lineaire theorie neemt men aan dat het effect op lineaire wijze samenhangt met de inwerking, dus dat E een lineaire functie van I is, waarbij de coëfficiënten van de lineaire functie als materiaalconstanten worden geïnterpreteerd.

De dielectrische verplaatsing hangt lineair samen met de electrische veldsterkte: $D^i = \varepsilon^{ij} E_j$.

De spanning in een elastisch medium hangt lineair samen met de deformatie: $t_{hi} = c_{hijk} e^{jk}$.

De deformatie van een kristal hangt (piëzoëlectriciteit) lineair samen met de electrische veldsterkte: $e_{hi} = a_{hij}E^j$.
De coëfficiënten van de lineaire samenhang vormen volgens I, § 3 de componenten van een tensor, die de eigenschappen van de stof beschrijft. Deze tensor heeft op elk coördinatenstelsel componenten. Bij isotrope stoffen zijn deze componenten dezelfde op alle orthonormale bases. Bij anisotrope stoffen is dit niet het geval. Wel kan het voorkomen, bijvoorbeeld bij symmetrieën in een kristal, dat de componenten ten opzichte van bepaalde orthonormale bases dezelfde zijn.

Voorbeeld. De wet van Hooke voor isotrope elastische media.
De componenten van de elasticiteitstensor γ zijn dezelfde t.o.v. alle orthonormale bases:

$$\gamma(\underline{e}_{h'}, \underline{e}_{i'}, \underline{e}_{j'}, \underline{e}_{k'}) = \gamma(\underline{e}_h, \underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k) \quad .$$

De componenten c_{hijk}, waarin één der indices precies eenmaal voorkomt, zijn nul. Inderdaad, neem

$$\underline{e}_{1'} = -\underline{e}_1 \quad , \quad \underline{e}_{2'} = \underline{e}_2 \quad , \quad \underline{e}_{3'} = \underline{e}_3 \quad , \qquad \text{dan}$$

$$c_{1233} = \gamma(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_3) = \gamma(-\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_3) = -\gamma(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_3) = -c_{1233}$$

De overige componenten zijn in groepen gelijk. Inderdaad, neem

$$\underline{e}_{1'} = \underline{e}_2 \quad , \quad \underline{e}_{2'} = \underline{e}_3 \quad , \quad \underline{e}_{3'} = \underline{e}_1 \quad , \qquad \text{dan}$$

$$c_{1122} = \gamma(\underline{e}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_2) = \gamma(\underline{e}_2, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_3) = c_{2233} \quad .$$

Ongelijk aan nul zijn dus slechts de volgende groepen van onderling gelijke componenten

$$c_{iiii} = H \ , \quad c_{iijj} = A \ , \quad c_{ijij} = B \ , \quad c_{ijji} = C \ , \quad \text{voor } i \neq j \text{ uit } 1,2,3$$

Tussen deze componenten bestaat het verband

$$H = A + B + C \quad ,$$

want neem $\underline{e}_{1'} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$, $\underline{e}_{2'} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$, $\underline{e}_{3'} = \underline{e}_3$,
dan

$$H = c_{1111} = \gamma(\underline{e}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_1) = \tfrac{1}{4}\gamma(\underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(2H + 2A + 2B + 2C) \quad .$$

De rek-spanningsrelaties

$$t_{hi} = c_{hijk}\, e^{jk}$$

reduceren zich dus tot

$$t_{11} = c_{1111}\, e^{11} + c_{1122}\, e^{22} + c_{1133}\, e^{33} = A(e^{11} + e^{22} + e^{33}) + (B+C)e^{11} \quad ,$$

$$t_{12} = c_{1212}\, e^{12} + c_{1221}\, e^{21} = (B+C)e^{12} \quad ,$$

dus algemeen tot

$$t_{ij} = \delta_{ij} A(e^{11} + e^{22} + e^{33}) + (B+C)e^{ij} \quad ,$$

waarin de zogenaamde Lamécoëfficiënten A en $B+C$ op eenvoudige wijze samenhangen met de glijdings-, elasticiteits- en Poissonmodulus.

Voorbeeld. Piëzoelectriciteit, Seignettezout.
Het Seignettezout bestaat uit orthorombische kristallen (drie onderling loodrechte assen), waarvan de eigenschappen slechts dezelfde blijven bij rotatie over 180° rond een as. Het is een voorbeeld van een anisotrope stof waarbij toch zekere symmetrieën zijn toegelaten. Wij gaan na welke gevolgen het bestaan van deze symmetrieën heeft voor de componenten a_{hij} van de 3-tensor α die het lineaire verband tussen de deformatietensor e_{hi} en de electrische veldvector E^h regelt in het verschijnsel der piëzoelectriciteit:

$$e_{hi} = a_{hij} E^j \quad , \quad a_{hij} = \alpha(\underline{e}_h , \underline{e}_i , \underline{e}_j) \quad .$$

a_{hij} is symmetrisch in de beide eerste indices omdat e_{hi} dat is. Voorts geldt

$$\alpha(\underline{e}_{h'} , \underline{e}_{i'} , \underline{e}_{j'}) = \alpha(\underline{e}_h , \underline{e}_i , \underline{e}_j)$$

wanneer de overgang $\underline{e}_1 , \underline{e}_2 , \underline{e}_3$ op $\underline{e}_{1'} , \underline{e}_{2'} , \underline{e}_{3'}$ een rotatie over π rond een as is. Neem $\underline{e}_1 , \underline{e}_2 , \underline{e}_3$ langs de assen van het kristal en neem

$$\underline{e}_{1'} = -\underline{e}_1 \quad , \quad \underline{e}_{2'} = -\underline{e}_2 \quad , \quad \underline{e}_{3'} = \underline{e}_3 \quad ,$$

dan

$$a_{133} = \alpha(\underline{e}_1 , \underline{e}_3 , \underline{e}_3) = \alpha(-\underline{e}_1 , \underline{e}_3 , \underline{e}_3) = -a_{133} \quad ,$$

$$a_{111} = \alpha(\underline{e}_1 , \underline{e}_1 , \underline{e}_1) = \alpha(-\underline{e}_1 , -\underline{e}_1 , -\underline{e}_1) = -a_{111} \quad .$$

De a_{hij} met twee of drie gelijke indices zijn dus nul, zodat overblijft

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0 \, , \quad e_{23} = a_{231} E^1 \quad , \quad e_{31} = a_{312} E^2 \quad , \; e_{12} = a_{123} E^3 \quad .$$

Neem in het bijzonder het electrische veld evenwijdig aan de z-as, dus neem $E^i = (0,0,E)$, dan

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0 \quad \text{en} \quad e_{12} = a_{123}E = c \quad .$$

Voor de deformatie

$$u_j = x^i(\partial_i u_j)_0 \quad , \quad \text{of} \quad u_j = x^i e_{ij}$$

wanneer wij afzien van ruimtelijke rotatie van het kristal, betekent dit

$$u_1 = cy \; , \quad u_2 = cx \; , \quad u_3 = 0 \quad ;$$

een vierkant in het XOY-vlak wordt dus gedeformeerd in een ruit. Bij Seignettezout, anders dan bijvoorbeeld bij kwarts, kan geen electrisch veld een zuivere samendrukking langs een as veroorzaken, omdat $\underline{u} = (a,0,0)$ geeft $e_{11} \neq 0$, rest $= 0$ en dit is niet mogelijk. Omgekeerd geeft een zo samengedrukt Seignettekristal geen electrisch veld.

§ 3 Speciale relativiteitstheorie volgens Lorentz *)

Het wereldbeeld van Ptolemaeus (150 v. Chr.) gaat uit van een absoluut begrip van boven en onder (platte aarde) en van absolute tijd. Bij Galilei en Newton (17e eeuw) zijn tijd en ruimte nog absoluut en is de zon het middelpunt van de ruimte. De wetten der mechanica, zoals $k = ma$, zijn dezelfde voor coördinatenstelsels die zich ten opzichte van elkaar met een constante snelheid bewegen, m.a.w. zijn invariant bij Galileitransformaties.
Bij beweging langs de x-as luiden deze Galileitransformaties

$$x' = x - vt \quad , \quad t' = t \quad .$$

De vergelijkingen van Maxwell zijn echter niet invariant bij Galileitransformaties (Lorentz, Poincaré).
De snelheid $c \approx 3.10^{10}$ cm/sec van het licht is eindig (Römer 1675), dezelfde voor alle kleuren, en constant. Maar wat meet een waarnemer die zich t.o.v. een andere waarnemer beweegt met een snelheid v? Worden de lichtgolven, net als de geluidsgolven, gedragen door een absoluut medium, de aether?
Michelson (1881) tracht onze snelheid v ten opzichte van de aether te meten. Is een staaf ℓ gericht volgens v dan is de tijd voor een lichtsignaal heen en weer

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c(1-\beta^2)}$$

*) Zie ook de appendix.

waarin $\beta = \frac{v}{c}$. Is ℓ loodrecht op v, dan geldt

$$\tfrac{1}{4}t_2^2c^2 = \tfrac{1}{4}t_2^2v^2 + \ell^2 , \qquad t_2 = \frac{2\ell}{c\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Michelson mat echter geen verschil tussen t_1 en t_2. Lorentz (1895) verklaarde het negatieve resultaat van het experiment van Michelson met de Lorentzcontractie:

> Wanneer een staaf zich ten opzichte van een waarnemer beweegt met een constante snelheid v, gericht volgens v, dan meet die waarnemer een kortere lengte dan wanneer dezelfde staaf zich ten opzichte van de waarnemer in rust bevindt.

Stel een staaf is in rust t.o.v. een waarnemer $\mathcal{O}'$, en in beweging (met een constante snelheid v en gericht volgens v) t.o.v. een waarnemer $\mathcal{O}$. De hypothese van de Lorentz contractie zegt:
Als $\mathcal{O}'$ meet lengte ℓ_0, dan meet $\mathcal{O}$ lengte $\ell_0\sqrt{1-\beta^2}$.
Een consequentie hiervan is:
Als $\mathcal{O}'$ meet tijdsinterval Δt_0, dan meet $\mathcal{O}$ tijdsinterval $\Delta t_0/\sqrt{1-\beta^2}$.
Inderdaad, een lichtflits die langs de staaf heen en weer loopt duurt $\Delta t_0 = 2\ell_0/c$ seconden volgens $\mathcal{O}'$, en

$$\frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c-v} + \frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c+v} = \frac{2\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta^2)} = \frac{2\ell_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

seconden volgens $\mathcal{O}$.

Een verdere consequentie is het klokverschil: Gebeurtenissen op verschillende plaatsen, die gelijktijdig zijn voor $\mathcal{O}'$, zijn niet gelijktijdig voor $\mathcal{O}$.

Inderdaad, beschouw twee lichtflitsen die uitgaan van het midden M van de staaf, één naar het ene uiteinde K en één naar het andere uiteinde L. Volgens $\mathcal{O}'$ komen de lichtflitsen beide ten tijde $\ell_0/2c$ aan, en is er geen tijdverschil. Volgens $\mathcal{O}$ echter is er een tijdsverschil van

$$\frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{2(c-v)} - \frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{2(c+v)} = \frac{\ell_0\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

gemeten in σ seconden.

Tenslotte volgt een afleiding van de Lorentz-transformaties, die voor hetzelfde evenement het verband geven tussen plaats en tijd (x,t) voor de waarnemer σ en plaats en tijd (x',t') voor de waarnemer σ'. Daarbij laten wij $(x,t) = (0,0)$ corresponderen met $(x',t') = (0,0)$.

De weg $x - vt$ in het σ-stelsel komt overeen met de weg x' in het σ'-stelsel. Volgens de Lorentz-contractie geldt

(1) $$x - vt = x'\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

σ' plaatst voor hem gelijklopende klokken op de plaatsen 0 en x', en laat deze klokken na t' seconden een lichtflits uitzenden. Op welke tijdstippen neemt σ deze lichtflitsen waar? Het signaal van de klok in $x' = 0$ wordt door σ waargenomen na $t'/\sqrt{1-\beta^2}$ seconden. Het signaal van de klok in x' wordt door σ nog $x'\beta/c\sqrt{1-\beta^2}$ seconden later waargenomen, vanwege het klokverschil. Omdat $(x,t) = (0,0)$ correspondeert met $(x',t') = (0,0)$ geldt

(2) $$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x'\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Uit de betrekkingen (1) en (2) volgen de Lorentz-transformaties

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

§ 4 Speciale relativiteitstheorie volgens Einstein en Minkowski

Einstein (1905) formuleerde het principe der speciale relativiteitstheorie:

> Waarnemers die zich ten opzichte van elkaar met een constante snelheid bewegen zijn gelijkwaardig. Voor zulke waarnemers zijn de natuurwetten gelijkluidend, bij voorbeeld de wet: lichtsnelheid = c. Snelheid t.o.v. de aether is principieel niet meetbaar.

Een ten tijde $t = t' = 0$ uit de oorsprong gezonden lichtgolf plant zich voor twee, zich t.o.v. elkaar met een constante snelheid v bewegende, waarnemers op dezelfde wijze bolvormig voort met een snelheid c ; zie appendix:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 .$$

Dit inspireerde Minkowski (1908) tot het volgende wiskundige model. De Minkowski ruimte M_4 is een vectorruimte van dimensie 4 over de reële getallen, voorzien van een indefiniet inwendig product $<\underline{a},\underline{b}>$. Dit inwendige product is bilineair, en wordt als volgt gedefinieerd door zijn waarden $g_{\alpha\beta} = <\underline{c}_\alpha,\underline{c}_\beta>$ ten opzichte van een zekere basis $\underline{c}_\alpha$:

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

De vector $\underline{x} = x^\alpha \underline{c}_\alpha$ heeft de kwadraatlengte

$$<\underline{x},\underline{x}> = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 .$$

Vectoren met kwadraatlengte 0 zijn de vectoren op de kegel

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0 .$$

Wij interpreteren als volgt. De Minkowskiruimte is het universum. De basis $\underline{c}_\alpha$ is een waarnemer, die plaats x,y,z en tijd t meet volgens

$$x^1 = x , \quad x^2 = y , \quad x^3 = z , \quad x^4 = ct .$$

De vectoren met negatieve kwadraatlengte (binnen de kegel) zijn de gebeurtenissen, die met $x^4 = ct > 0$ de toekomstige, die met $x^4 = ct < 0$ de historische. Gebeurtenissen zijn voor de waarnemer gelijktijdig wanneer zij dezelfde ct-coördinaat hebben. Het verloop van een gebeurtenis in t heet een wereldlijn en wordt weergegeven door een kromme in M_4. Een punt (0,0,0,0) dat t.o.v. de waarnemer in rust is heeft als wereldlijn de ct-as. Een punt (0,0,0,0) dat t.o.v. de waarnemer een constante snelheid v heeft, heeft als wereldlijn $x = vt$, een rechte die met de ct-as de hoek φ met $\tan\varphi = \beta = v/c$ maakt. Een lichtsignaal in (0,0,0,0) heeft als wereldlijn een beschrijvende van de kegel

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \,,$$

die daarom de lichtkegel heet.
Wij zoeken nu alle bases $\underline{c}_{\alpha'}$ waarvoor de componenten van de fundamentaaltensor, en dus ook de kwadraatlengte der vectoren $\underline{x}$, net zo eenvoudig is als hierboven, dus waarvoor

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{voor } \alpha = \beta = 1,2,3, \\ -1 & \text{voor } \alpha = \beta = 4 \,, \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

Anders gezegd, wij zoeken alle waarnemers waarvoor een lichtgolf zich op dezelfde wijze voortplant als voor de oorspronkelijke waarnemer. Wij beperken ons tot het zoeken van de gevraagde bases $\underline{c}_{\alpha'}$ waarvoor

$$\underline{c}_{2'} = \underline{c}_2 \,, \quad \underline{c}_{3'} = \underline{c}_3 \,, \quad \underline{c}_{1'} = p\underline{c}_1 + q\underline{c}_4 \,, \quad \underline{c}_{4'} = r\underline{c}_1 + s\underline{c}_4 \,.$$

De gezochte coëfficiënten p, q, r, s moeten nu voldoen aan

$$p^2 - q^2 = 1 \,, \quad r^2 - s^2 = -1 \,, \quad pr - qs = 0 \,.$$

Deze vergelijkingen worden opgelost door

$$p = \cosh\varphi \,, \quad q = \sinh\varphi \,, \quad r = \sinh\varphi \,, \quad s = \cosh\varphi \,, \text{ dus}$$

$$\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i \,, \quad \text{met } \left[A^i_{i'}\right] = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{bmatrix},$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i \,, \quad \text{met } \left[A^{i'}_i\right] = \left[A^i_{i'}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\varphi & -\mathrm{sh}\varphi \\ -\mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{bmatrix}.$$

Wanneer wij noemen

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \quad \sinh\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \quad 0 \le \beta < 1 \,,$$

dan vinden wij weer de Lorentz transformaties

$$x^{1'} = \frac{x^1 - \beta x^4}{\sqrt{1-\beta^2}} , \qquad x^{2'} = x^2 , \qquad x^{3'} = x^3 , \qquad x^{4'} = \frac{-\beta x^1 + x^4}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

die het verband aangeven tussen de coördinaten $x^{1'} = x'$, $x^{4'} = ct'$ t.o.v. waarnemer $\mathcal{O}'$ en de coördinaten $x^1 = x$, $x^4 = ct$ t.o.v. waarnemer $\mathcal{O}$.

Wij lichten het bovenstaande toe met behulp van een Euclidische tekening. Hierin zijn $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_4$ getekend als Euclidische loodrechte eenheidsvectoren. Voorts zijn $\underline{c}_{1'}$ en $\underline{c}_{4'}$ getekend volgens

$$\underline{c}_{1'} = \underline{c}_1 \mathrm{ch}\varphi + \underline{c}_4 \mathrm{sh}\varphi , \qquad \underline{c}_{4'} = \underline{c}_1 \mathrm{sh}\varphi + \underline{c}_4 \mathrm{ch}\varphi .$$

Volgens de Minkowski metriek zijn zowel $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_4$ als $\underline{c}_{1'}$ en $\underline{c}_{4'}$ loodrecht. In de Euclidische tekening zijn $\underline{c}_{1'}$ en $\underline{c}_{4'}$ niet loodrecht; hun Euclidische kwadraatlengte is $\mathrm{ch}^2\varphi + \mathrm{sh}^2\varphi > 1$, en hun uiteinden liggen op orthogonale hyperbolen wegens $\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1$. De Euclidische hoek tussen $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_{1'}$ is, evenals die tussen $\underline{c}_4$ en $\underline{c}_{4'}$, gelijk aan $\arctan \beta$.

Wij noemen de as door $\underline{c}_1$ de x-as, die door $\underline{c}_4$ de ct-as, die door $\underline{c}_{1'}$ de x'-as, die door $\underline{c}_{4'}$ de ct'-as. Een evenement $\underline{e}$ wordt gegeven door de coördinaten (x,ct) en door de coördinaten (x',ct') volgens

$$\underline{e} = x\underline{c}_1 + ct\underline{c}_4 = x'\underline{c}_{1'} + ct'\underline{c}_{4'} .$$

a) De wereldlijn van $\mathcal{O}'$ is $x' = 0$, dus $x - \beta ct = 0$. Voor de snelheid v van $\mathcal{O}'$ t.o.v. $\mathcal{O}$ geldt dus $v = \beta c$. De wereldlijn van $\mathcal{O}$ is $x = 0$, dus $x' + \beta ct' = 0$. De snelheid van $\mathcal{O}$ t.o.v. $\mathcal{O}'$ is dus $-\beta c = -v$.
b) De uiteinden van een lijnstuk ℓ_0 langs de x'-as duiden gebeurtenissen aan die voor $\mathcal{O}'$ gelijktijdig zijn. Voor $\mathcal{O}$ zijn die gebeurtenissen echter niet gelijktijdig. Er is een klokverschil dat wordt bepaald uit

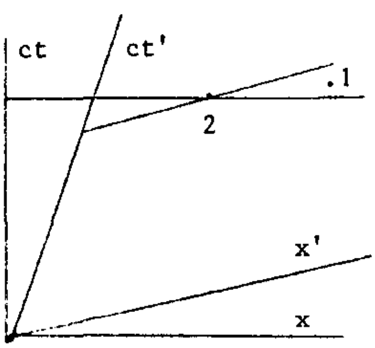
$$x' = \ell_0 , \qquad t' = 0 , \qquad \text{dus} \qquad ct = \frac{\beta \ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

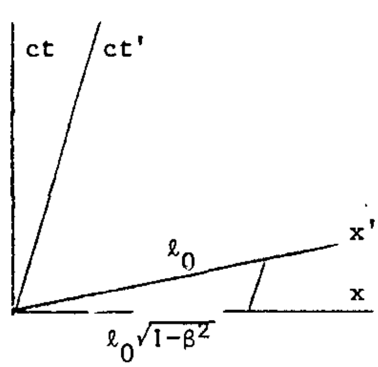
c) Er zijn gebeurtenissen 1 en 2 waarvoor geldt $t_1 > t_2$ en $t'_1 < t'_2$.

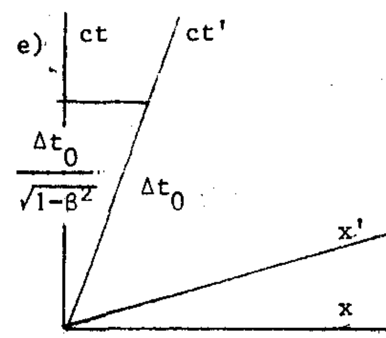
d) De wereldlijn van een zich t.o.v. $\mathcal{O}'$ in rust bevindend punt $(x', t') = (\ell_0, 0)$ is een rechte evenwijdig aan de ct'-as. Snijdt deze rechte met $t = 0$, dan blijkt de door $\mathcal{O}$ waargenomen lengte te zijn $x = \ell_0\sqrt{1 - \beta^2}$. Dit is de Lorentz-contractie.

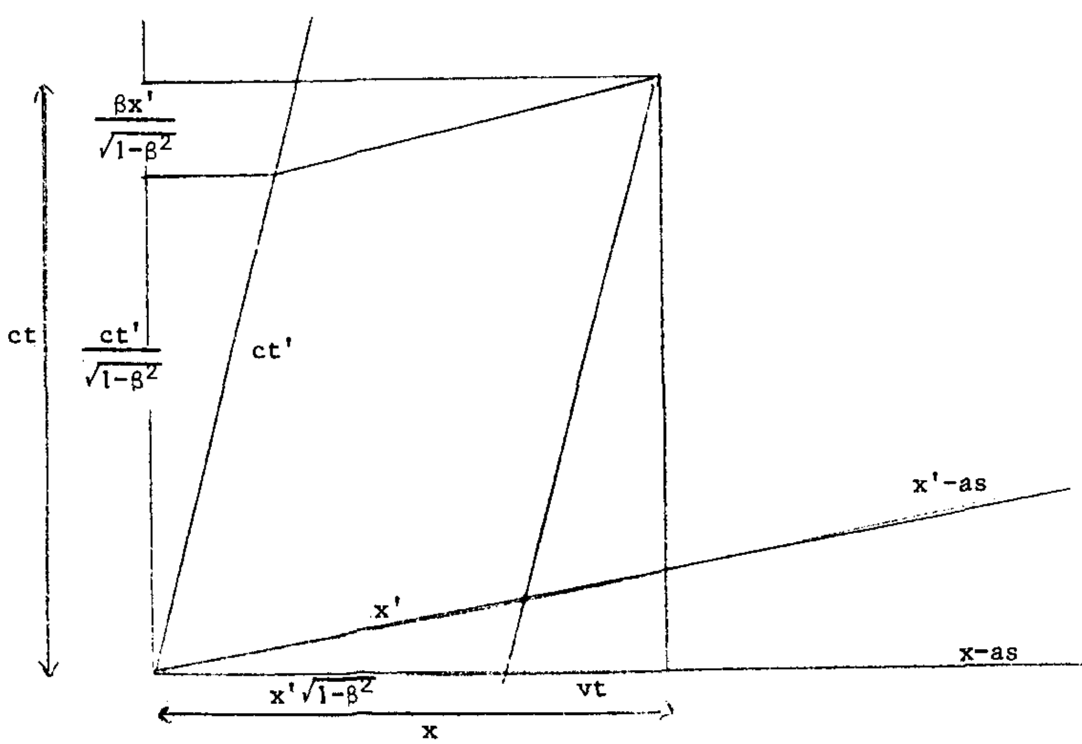
e) Zij Δt_0 een tijdsinterval in het $\mathcal{O}'$-stelsel (langs de ct'-as). In het $\mathcal{O}$ stelsel wordt dit tijdsinterval waargenomen als $\Delta t_0/\sqrt{1 - \beta^2}$ (lijn evenwijdig aan de x-as snijden met de ct-as).

f) In de volgende tekening worden de Lorentz-transformaties nogmaals gedemonstreerd:

c)


d)


e)


f)


Wanneer twee Lorentztransformaties na elkaar worden uitgevoerd,

$$(x,ct) \xrightarrow{\varphi_1} (x',ct') \xrightarrow{\varphi_2} (x'',ct'') \quad ,$$

dan heeft de producttransformatie de matrix

$$\begin{bmatrix} ch\varphi_2 & sh\varphi_2 \\ sh\varphi_2 & ch\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch\varphi_1 & sh\varphi_1 \\ sh\varphi_1 & ch\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\varphi_1+\varphi_2) & sh(\varphi_1+\varphi_2) \\ sh(\varphi_1+\varphi_2) & ch(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} \quad .$$

Het product is dus weer een Lorentztransformatie. Daarom vormen de Lorentztransformaties een groep. Met behulp van

$$ch\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \quad , \quad ch\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \quad , \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c} \quad , \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

leiden wij af dat

$$ch(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_2^2}{1+\beta_1^2\beta_2^2+2\beta_1\beta_2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} \quad .$$

Voor de bij de producttransformatie behorende β en v volgt dus

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad , \quad v = \frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1v_2}{c^2}} \quad .$$

Dit is de wet volgens welke twee snelheden v_1 en v_2 relativistisch moeten worden gesuperponeerd. Superpositie van twee snelheden $\leq c$ levert nooit een snelheid $> c$ op. Bijvoorbeeld volgt voor

$$v_1 = \tfrac{1}{2}c \quad , \quad v_2 = \tfrac{1}{2}c \quad , \quad \text{dat} \quad v = \frac{4}{5}c \quad .$$

§ 5 De vergelijkingen van Maxwell

Wanneer in elk punt van een gebied in R_3 een vector [resp. tensor] is gegeven, dan spreekt men van een vectorveld [resp. tensorveld]. De componenten t.o.v. een coördinatenstelsel kunnen behalve van de plaats ook van de tijd afhangen: $v^h = v^h(x^i, t)$ resp. $\varphi_{hi} = \varphi_{hi}(x^j, t)$. Wij noteren:

$$\frac{\partial v^h}{\partial x^i} = \partial_i v^h \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial v^h}{\partial t} = \partial_4 v^h \quad .$$

Ten opzichte van een rechthoekig coördinatenstelsel wordt dan

$$\text{grad } f = \partial_i f \quad ; \quad \text{div } \underline{v} = \partial_i v^i$$

$$\text{rot } \underline{v} = (\partial_2 v^3 - \partial_3 v^2, \partial_3 v^1 - \partial_1 v^3, \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \quad .$$

Voor electrische veldsterkte $\underline{E}$, magnetische veldsterkte $\underline{H}$,
dielectrische verplaatsing $\underline{D}$, magnetische inductie $\underline{B}$,
ladingsdichtheid ρ, stroomdichtheid $\rho\underline{u}$,
luiden de vergelijkingen van Maxwell:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \text{rot } \underline{E} = \underline{0} \quad , \quad \partial_4 c B^1 + \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 = 0 \quad , \text{ etc.,}$$

$$\text{div } \underline{B} = 0 \quad , \quad \partial_1 c B^1 + \partial_2 c B^2 + \partial_3 c B^3 = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \text{rot } \underline{H} = -\rho\underline{u} \quad , \quad \partial_4 c D^1 - \partial_2 H^3 + \partial_3 H^2 = -\rho u^1 \quad , \text{ etc.,}$$

$$\text{div } \underline{D} = \rho \quad , \quad \partial_1 c D^1 + \partial_2 c D^2 + \partial_3 c D^3 = \rho c \quad .$$

Wij vatten $\underline{H}$ en $\underline{B}$ nu niet op als vector maar als scheve 2-tensor H_{ij} en B_{ij} in R_3. De rechtvaardiging hiervan wordt gevonden in de wet van Biot-Savart en in het ontbreken van de eenheid van magnetisme. De vergelijkingen van Maxwell worden dan

$$\partial_4 c B_{23} + \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 = 0 \quad , \text{ etc.} \quad ; \quad \partial_1 c B_{23} + \partial_2 c B_{31} + \partial_3 B_{12} = 0 \quad ;$$

$$\partial_4 c D^1 + \partial_2 H_{21} + \partial_3 H_{31} = -\rho u^1 \quad , \text{ etc.}; \quad \partial_1 c D^1 + \partial_2 c D^2 + \partial_3 c D^3 = \rho c \quad .$$

In de 4-dimensionale Minkowskiruimte worden nu twee scheve 2-tensoren, de veldtensor F en de aanslagtensor G, gedefinieerd door hun componenten $F_{\alpha\beta}$ en $G_{\alpha\beta}$ ten opzichte van de speciale basis $\underline{c}_\alpha$ waarvoor

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, [F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & cB_{12} & cB_{13} & E^1 \\ -cB_{12} & 0 & cB_{23} & E^2 \\ -cB_{13} & -cB_{23} & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{bmatrix}, [G_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} & cD^1 \\ -H_{12} & 0 & H_{23} & cD^2 \\ -H_{13} & -H_{23} & 0 & cD^3 \\ -cD^1 & -cD^2 & -cD^3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Voorts wordt de stroomvector $\underline{J}$ gedefinieerd door zijn componenten

$$J^\alpha = (\rho u^1, \rho u^2, \rho u^3, \rho c) \quad .$$

De Maxwellvergelijkingen worden dan

$$\partial_4 F_{23} + \partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} = 0 \ , \quad \text{etc.} \quad ; \quad \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad ;$$

$$\partial_4 G_{14} + \partial_2 G_{21} + \partial_3 G_{31} = -J^1 \ , \quad \text{etc.}; \quad \partial_1 G_{14} + \partial_2 G_{24} + \partial_3 G_{34} = J^4 \quad ,$$

en laten zich herleiden tot de uiteindelijke vorm

$$\partial_\beta (F^*)^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \partial_\beta G^{\alpha\beta} = J^\alpha \quad .$$

Inderdaad, de eerste vier vergelijkingen worden met behulp van de Kronecker-getallen en de duale veldtensor

$$(F^*)^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1234} F_{\gamma\delta} \quad \text{tot} \quad \delta^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1234} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = \partial_\beta (F^*)^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

De laatste vier vergelijkingen worden omgevormd met behulp van

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} G^{\gamma\delta} \quad , \quad G_{12} = g_{1\gamma} g_{2\delta} G^{\gamma\delta} = G^{12} \quad , \quad G_{14} = g_{1\gamma} g_{4\delta} G^{\gamma\delta} = -G^{14} \quad ,$$

tot

$$\partial_4 G^{41} + \partial_2 G^{21} + \partial_3 G^{31} + \partial_1 G^{11} = -J^1 \quad , \text{etc.}; \quad \partial_1 G^{14} + \partial_2 G^{24} + \partial_3 G^{34} + \partial_4 G^{44} = -J^4.$$

Opmerking. Daar de aanslagtensor $G^{\alpha\beta}$ scheef is volgt uit $\partial_\beta G^{\alpha\beta} = J^\alpha$ de continuïteitsvergelijking, immers

$$\partial_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta G^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \partial_i (\rho u^i) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad .$$

Opmerking. In de lineaire theorie wordt het verband tussen de veldtensor en de aanslagtensor lineair verondersteld:

$$F_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta} \quad .$$

De coëfficiënten van de, de materiaaleigenschappen karakteriserende, 4-tensor M hangen samen met de dielectrische en magnetische permeabiliteitsconstanten.

Voor het isotrope geval reduceren zij zich tot ε en μ, voor vacuum tot ε_0 en μ_0, met $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Opmerking. Uit het verband tussen de componenten van de veldtensor ten opzichte van verschillende speciale bases $\underline{c}_\alpha$ en $\underline{c}_{\alpha'}$

$$F_{\alpha'\beta'} = A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} F_{\alpha\beta}$$

is in benadering af te leiden de wet van Faraday

$$\underline{E}' = E + \underline{v} \times \underline{B} \quad :$$

een zich met constante snelheid $\underline{v}$ bewegende waarnemer meet als electrisch veld het oorspronkelijke veld benevens een door het ten opzichte van hem bewegende magneetveld veroorzaakte bijdrage, de Lorentzkracht. Evenzo is in benadering af te leiden de wet van Ampère

$$\underline{H} = \underline{H} - \underline{v} \times \underline{D} \quad :$$

een zich met constante snelheid $\underline{v}$ bewegende waarnemer meet als magnetisch veld het oorspronkelijke veld benevens een door de ten opzichte van hem bewegende lading veroorzaakte bijdrage.

§ 6 De bewegingsvergelijkingen van continue media

Wij beschouwen een continu medium met dichtheid $\rho(x,y,z,t)$ en snelheid $\underline{u}(x,y,z,t)$ met behulp van een rechthoekig coördinatenstelsel dat niet constant met de tijd behoeft te zijn, dus $x^i = x^i(t)$. De kinematische continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j(\rho u^j) = 0$$

drukt uit dat geen stof verloren gaat. De dynamische vergelijkingen van Euler luiden

$$\rho a^i = K^i - \partial_j t^{ij} \quad ,$$

waarin t^{ij} de componenten van de spanningstensor, K^i die van de uitwendige kracht en a^i die der versnelling voorstellen. Met behulp van

$$\rho a^i = \rho \frac{du^i}{dt} = \rho \frac{\partial u^i}{\partial t} + \rho u^j \partial_j u^i =$$

$$= \frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + \partial_j(\rho u^i u^j) - u^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j(\rho u^j) \right]$$

worden de vergelijkingen herleid tot

$$\partial_4(c^2\rho) + \partial_j(c\rho u^j) = 0 \quad ; \quad \partial_4(c\rho u^i) + \partial_j[\rho u^i u^j + t^{ij}] = K^i \quad .$$

In de vierdimensionale Minkowskiruimte wordt nu ingevoerd de symmetrische <u>impulsenergie-tensor</u>

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho u^1u^1 + t^{11} & \rho u^1u^2 + t^{12} & \rho u^1u^3 + t^{13} & c\rho u^1 \\ \rho u^1u^2 + t^{12} & \rho u^2u^2 + t^{22} & \rho u^2u^3 + t^{23} & c\rho u^2 \\ \rho u^1u^3 + t^{13} & \rho u^2u^3 + t^{23} & \rho u^3u^3 + t^{33} & c\rho u^3 \\ c\rho u^1 & c\rho u^2 & c\rho u^3 & c^2\rho \end{bmatrix} ,$$

die zijn naam dankt aan het feit dat $\rho u^i u^1 + t^{i1}$ de totale impulsstroom in x-richting aangeeft. In het geval dat er geen uitwendige krachten optreden luiden de bewegingsvergelijkingen in 4-dimensionale vorm

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

<u>Opmerking</u>. Ook de klassieke Newtonse mechanica kan in relativistische vorm worden gebracht.

HOOFDSTUK III DIFFERENTIAALMEETKUNDE

§ 1 Ruimtekrommen

In deze en in de volgende paragraaf beperken wij ons tot R_3 met een vaste orthonormale basis. Een punt wordt voorgesteld door

$$\underline{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \quad .$$

Een ruimtekromme is de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{x}(t) \quad , \quad \text{dus} \quad x^h = x^h(t) \quad ,$$

waarin t een reële parameter voorstelt en waarin de functies $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ voldoend vaak differentieerbaar zijn.

De booglengte van het stuk kromme $x^h = x^h(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, wordt gedefinieerd door

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\, d\tau \quad .$$

De afgeleide van de booglengte $s(t)$ naar t is de lengte van de vector $d\underline{x}/dt$:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\underline{x}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{dt}\right) \quad .$$

Voorbeeld. Voor de cirkelschroeflijn

$$x = a \cos t \ , \quad y = a \sin t \ , \quad z = ht$$

geldt

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + h^2}\, d\tau = t\sqrt{a^2 + h^2} \quad .$$

Het is vaak handig om als parameter van een ruimtekromme te nemen zijn booglengte: $\underline{x} = \underline{x}(s)$. De afgeleide wordt dan genoteerd volgens

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \dot{\underline{x}} \quad .$$

Deze vector heeft de lengte één, immers

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{dt}\frac{dt}{ds} \quad , \quad (\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = \left(\frac{d\underline{x}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \quad .$$

De eenheidsvector $\dot{\underline{x}}$ blijkt te zijn de richtingsvector van de raaklijn aan de ruimtekromme in het bij s behorende punt.

De <u>raaklijn</u> in een punt P van een ruimtekromme is de limietstand van de rechte PQ, wanneer Q langs de ruimtekromme nadert tot P.

Geef P en Q aan door $\underline{x}(t)$ en $\underline{x}(t+\Delta t)$. De richting PQ wordt bepaald door

$$\underline{x}(t+\Delta t) - \underline{x}(t) \quad , \quad \text{ook door } \frac{1}{\Delta t}\,[\underline{x}(t+\Delta t) - \underline{x}(t)] \quad .$$

De richting van de raaklijn is dus $d\underline{x}/dt$. Wanneer de booglengte wordt gebruikt als parameter dan wordt de raaklijn voorgesteld door

$$\underline{y} = \underline{x} + \lambda\dot{\underline{x}} \quad ,$$

waarin $|\lambda|$ de afstand aanduidt vanaf het raakpunt langs de raaklijn.

Het <u>osculatievlak</u> in een punt P van een ruimtekromme is de limietstand van het vlak door de raaklijn in P en een punt Q, wanneer Q langs de ruimtekromme nadert tot P.

Geef P en Q aan door $\underline{x}(s)$ en $\underline{x}(s+\Delta s)$. De richting PQ wordt bepaald door

$$\underline{x}(s+\Delta s) - \underline{x}(s) = \dot{\underline{x}}\,\Delta s + \frac{1}{2!}\,\ddot{\underline{x}}(\Delta s)^2 + \frac{1}{3!}\,\dddot{\underline{x}}(\Delta s)^3 + \dots \quad .$$

Het osculatievlak gaat door de raaklijn en, voor $\Delta s \to 0$, door PQ. Het osculatievlak is evenwijdig aan $\dot{\underline{x}}(s)$ en aan $\underline{x}(s+\Delta s) - \underline{x}(s)$, dus aan

$$\frac{2}{(\Delta s)^2}\,[\underline{x}(s+\Delta s) - \underline{x}(s) - \dot{\underline{x}}(s)\Delta s] = \ddot{\underline{x}} + \frac{1}{3}\dddot{\underline{x}}\,\Delta s + \dots$$

voor $\Delta s \to 0$, dus aan $\ddot{\underline{x}}(s)$. Daarom luidt de voorstelling van het osculatievlak

$$\underline{y} = \underline{x} + \lambda\dot{\underline{x}} + \mu\ddot{\underline{x}} \quad , \quad \text{m.a.w.} \quad \det(\underline{y} - \underline{x}\,,\,\dot{\underline{x}}\,,\,\ddot{\underline{x}}) = 0 \quad .$$

<u>Opmerking</u>. Bij deze afleiding is aangenomen dat in P geldt $\ddot{\underline{x}} \neq \underline{0}$, dus dat de ruimtekromme in P geen buigpunt heeft. In een buigpunt wordt de voorstelling van het osculatievlak, tenminste als daar $\dddot{\underline{x}} \neq \underline{0}$,

$$\underline{y} = \underline{x} + \lambda\dot{\underline{x}} + \mu\dddot{\underline{x}} \quad .$$

<u>Opmerking</u>. Bij gebruik van een willekeurige parameter t is de vergelijking van het osculatievlak

$$\det\left(\underline{y} - \underline{x}\,,\,\frac{d\underline{x}}{dt}\,,\,\frac{d^2\underline{x}}{dt^2}\right) = 0 \quad .$$

Voorbeeld. Voor de cirkelschroeflijn luidt de vergelijking van het osculatievlak

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ y - a\sin t & a\cos t & -a\sin t \\ z - ht & h & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Dit vlak gaat door het punt (0,0,ht).

§ 2 De formules van Frenet

Zij P het bij de booglengte s behorende punt van de ruimtekromme $\underline{x}(s)$ en zij P niet buigpunt. Wegens

$$(\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}) = 1 \qquad \text{geldt} \qquad (\dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}) = 0 \quad .$$

De vector $\ddot{\underline{x}}$, die evenwijdig is aan het osculatievlak, staat dus loodrecht op de raaklijn in P. Wij beschouwen de volgende drie rechten door P met de hen bepalende richtingsvectoren:

de raaklijn, met eenheidsvector $\underline{\iota} = \dot{\underline{x}}$,
de hoofdnormaal, met eenheidsvector $\underline{n}$ in de richting $\ddot{\underline{x}}$,
de binormaal, met eenheidsvector $\underline{b}$ in de richting $\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}$.

De hoofdnormaal ligt dus in het osculatievlak, de binormaal staat daar loodrecht op en het drietal $\underline{\iota}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ vormt een orthonormale basis met positieve oriëntatie.

Zij P een punt en zij Q een naburig punt van de ruimtekromme $\underline{x}(s)$. Zij $\Delta\varphi$ de hoek tussen de raaklijnen in P en in Q en zij $\Delta\psi$ de hoek tussen de osculatievlakken (binormalen) in P en in Q.

De kromming ρ en de torsie τ van de ruimtekromme in P worden gedefinieerd door

$$\rho^2 = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \lim_{\Delta s \to 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)^2 \quad , \qquad \rho > 0 \quad ,$$

$$\tau^2 = \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = \lim_{\Delta s \to 0} \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right)^2 \quad , \qquad \text{teken def. volgt.}$$

Voor vlakke krommen is ρ de traditionele kromming en is $\tau = 0$.

Stelling. $\rho^2 = (\dot{\underline{\iota}}, \dot{\underline{\iota}}) = (\ddot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}})$ en $\tau^2 = (\dot{\underline{b}}, \dot{\underline{b}})$.

Bewijs. Voeg aan ieder punt van de kromme $\underline{x}(s)$ toe een vector $\underline{a}(s)$, met lengte 1 en op differentieerbare wijze. Dan geldt

$$(\underline{a},\underline{a}) = 1 \;, \quad (\underline{a},\dot{\underline{a}}) = 0 \;, \quad (\dot{\underline{a}},\dot{\underline{a}}) + (\underline{a},\ddot{\underline{a}}) = 0 \quad .$$

Voor de hoek $\Delta\alpha$ tussen de vectoren $\underline{a}(s)$ en $\underline{a}(s+\Delta s)$ geldt

$$\cos\Delta\alpha = (\underline{a}(s)\,,\underline{a}(s+\Delta s)) \quad ,$$

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\alpha = (\underline{a}(s)\,,\underline{a}(s) + \dot{\underline{a}}(s)\Delta s + \tfrac{1}{2}\ddot{\underline{a}}(s)(\Delta s)^2 + \ldots) \quad ,$$

$$\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\Delta\alpha}{(\Delta s)^2} = -(\underline{a}(s)\,,\ddot{\underline{a}}(s)) + O(\Delta s) = $$

$$= (\dot{\underline{a}}(s)\,,\dot{\underline{a}}(s)) + O(\Delta s) \quad ,$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right)^2 = (\dot{\underline{a}},\dot{\underline{a}}) \quad .$$

Door achtereenvolgens voor $\underline{a}$ te nemen $\underline{\iota}$ en $\underline{b}$ wordt het gestelde bewezen.

In de formules van Frenet worden de afgeleiden van $\underline{\iota}, \underline{n}, \underline{b}$ uitgedrukt als lineaire combinaties van deze vectoren:

$$(1) \quad \dot{\underline{\iota}} = \rho\underline{n} \;, \qquad (2) \quad \dot{\underline{n}} = -\rho\,\underline{\iota} + \tau\underline{b} \;, \qquad (3) \quad \dot{\underline{b}} = -\tau\,\underline{n} \quad .$$

Bewijs. (1) volgt uit het feit dat $\dot{\underline{\iota}} = \ddot{\underline{x}}$ langs $\underline{n}$ ligt en lengte ρ heeft. Teneinde (3) te bewijzen merken wij op dat uit $(\underline{b},\underline{b}) = 1$ volgt $(\dot{\underline{b}},\underline{b}) = 0$ en dat uit $(\underline{b},\underline{\iota}) = 0$ volgt $(\dot{\underline{b}},\underline{\iota}) = -(\dot{\underline{\iota}},\underline{b}) = 0$. De vector $\dot{\underline{b}}$ is dus afhankelijk van $\underline{n}$. Het teken van τ, die het kwadraat van de lengte van $\dot{\underline{b}}$ is, kiezen wij zodanig dat (3) geldt.
Teneinde (2) te bewijzen merken wij op dat uit $(\underline{n},\underline{n}) = 1$ volgt $(\dot{\underline{n}},\underline{n}) = 0$, dat uit $(\underline{n},\underline{\iota}) = 0$ volgt $(\dot{\underline{n}},\underline{\iota}) = -(\underline{n},\dot{\underline{\iota}}) = -\rho$, en dat uit $(\underline{n},\underline{b}) = 0$ volgt $(\dot{\underline{n}},\underline{b}) = -(\underline{n},\dot{\underline{b}}) = \tau$. Met behulp van deze componenten van $\dot{\underline{n}}$ t.o.v. de orthonormale basis $\{\underline{\iota},\underline{n},\underline{b}\}$ volgt (2).

Opmerking. Uit $\ddot{\underline{x}} = \rho\underline{n}$ volgt met behulp van de formules van Frenet

$$\dddot{\underline{x}} = \dot{\rho}\underline{n} + \rho(-\rho\underline{\iota} + \tau\underline{b}) \quad , \qquad \text{waaruit}$$

$$\det(\dot{\underline{x}},\ddot{\underline{x}},\dddot{\underline{x}}) = \rho^2\tau \quad ,$$

een handige formule ter berekening van de torsie.

Opmerking. Voor vlakke krommen is $\tau = 0$ en luiden de formules van Frenet

$$\dot{\underline{t}} = \rho \underline{n} \quad , \quad \dot{\underline{n}} = -\rho \underline{t} \quad .$$

Voorbeeld 1. Een vlakke kromme met een constante kromming is een cirkel. Inderdaad, met de formules van Frenet voor R_2 volgt voor constante ρ:

$$\ddot{\underline{t}} = \rho \dot{\underline{n}} = -\rho^2 \underline{t} \quad , \quad \rho^{-2} \dddot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}} = \underline{0} \quad ,$$

$$\rho^{-2} \ddot{\underline{x}} + \underline{x} = \underline{m} = \text{constant} \; .$$

De lengte van $\underline{m} - \underline{x}$ is die van $\rho^{-2} \ddot{\underline{x}}$, is $1/\rho$. De punten van de kromme liggen dus op constante afstand van het vaste punt $\underline{m}$.

Voorbeeld 2. De cirkelschroeflijn heeft, voor $h = a \tan \varphi$, de parametervoorstelling

$$\underline{x} = (a \cos t, a \sin t, at \tan \varphi) \quad .$$

Daar $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2 + a^2 \tan^2\varphi = \frac{a^2}{\cos^2\varphi}$, is $\frac{dt}{ds} = \frac{\cos \varphi}{a}$ en

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt}\frac{dt}{ds} = (-\sin t \cos \varphi, \cos t \cos \varphi, \sin \varphi) \quad .$$

De raaklijn maakt dus een constante hoek $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ met de z-as. Voorts is

$$\ddot{\underline{x}} = \frac{d\dot{\underline{x}}}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(-\frac{\cos t \cos^2\varphi}{a}, -\frac{\sin t \cos^2\varphi}{a}, 0\right) \quad ,$$

$$\dddot{\underline{x}} = \frac{d\ddot{\underline{x}}}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(\frac{\sin t \cos^3\varphi}{a^2}, -\frac{\cos t \cos^3\varphi}{a^2}, 0\right) \quad ,$$

$$\rho^2\tau = \det(\dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}, \dddot{\underline{x}}) = \frac{\cos^5\varphi}{a^3}\begin{vmatrix} -\sin t \cos \varphi & \cos t \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} \; .$$

Uit deze formules volgt

$$\rho = \frac{1}{a}\cos^2\varphi \quad , \quad \tau = \frac{1}{a}\sin \varphi \cos \varphi \quad , \quad \tau/\rho = \tan \varphi \quad .$$

Voorbeeld 3. Gevraagd worden alle ruimtekrommen die de eigenschap hebben dat het quotiënt van torsie en kromming in elk punt dezelfde waarde aanneemt. Noem de constante verhouding $\tau/\rho = \tan \varphi$. Met de formules van Frenet

$$\dot{\underline{t}} = \rho \underline{n} \quad , \quad \dot{\underline{b}} = -\tau \underline{n}$$

volgt $\quad \dot{\underline{b}} + \tau/\rho\, \dot{\underline{\iota}} = \underline{0} \quad , \quad \frac{d\underline{b}}{ds} + \tan\varphi\, \frac{d\underline{\iota}}{ds} = \underline{0} \quad , \quad \underline{b} + \underline{\iota}\, \tan\varphi = \underline{v} \quad ,$

waarin $\underline{v}$ een constante vector is. Met behulp van $(\underline{v}\,,\underline{\iota}) = \tan\varphi$ en $(\underline{v}\,,\underline{v}) = 1 + \tan^2\varphi$ blijkt dat

$$\frac{(\underline{\iota}\,,\underline{v})}{\sqrt{(\underline{v}\,,\underline{v})}} = \pm \sin\varphi \quad .$$

De hoek die de raaklijn aan de ruimtekromme maakt met de constante richting $\underline{v}$ is constant, $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$. Krommen met deze eigenschap heten <u>schroeflijnen</u>. Teneinde deze schroeflijnen nader te onderzoeken nemen wij de z-as van het coördinatenstelsel langs $\underline{v}$, dan is $\dot{z} = \sin\varphi$ en luidt de schroeflijn

$$x = x(s) \;,\quad y = y(s) \;,\quad z = s \sin\varphi \quad .$$

Hierin is s de booglengte van de ruimtekromme, dus geldt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \sin^2\varphi = 1 \quad .$$

Van de projectie van de schroeflijn op het XOY-vlak

$$x = x(s) \;,\quad y = y(s) \;,\quad z = 0$$

is de booglengte s cos φ. Wanneer de cylinder

$$x = x(s) \;,\quad y = y(s)$$

wordt uitgewikkeld in R_2 dan wordt de schroeflijn wegens $z = s \sin\varphi$ tot een rechte lijn.

<u>Opmerking</u>. Wanneer behalve τ/ρ ook ρ constant is, dan is de ruimtekromme een cirkelschroeflijn. Inderdaad, de projectie op het XOY-vlak heeft dan eveneens constante kromming en is een cirkel.

<u>Opmerking</u>. Wij beschikken thans over de volgende karakteriseringen:

schroeflijnen	door τ/ρ = constant,
cirkelschroeflijnen	door τ = constant, ρ = constant,
vlakke krommen	door $\tau = 0$,
cirkels	door ρ = constant, $\tau = 0$,
rechten	door $\rho = \tau = 0$.

Men kan bewijzen *) dat elke ruimtekromme op congruentie na bepaald is door de kromming $\rho(s)$ en de torsie $\tau(s)$ als functies van de booglengte s.

*) Zie J. Haantjes, Inleiding tot de differentiaalmeetkunde, pag. 38.

§ 3 Oppervlakken in R_3

Een oppervlak in R_3 is de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{x}(u,v) \quad , \quad \text{dus} \quad x^h = x^h(u,v) = x^h(u^1,u^2) = x^h(u^\alpha)$$

met $h = 1,2,3$ en $\alpha = 1,2$. Hierin zijn $u = u^1$ en $v = u^2$ reële parameters en $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ voldoend vaak differentieerbare functies. De partiële afgeleiden van deze functies worden genoteerd volgens

$$\frac{\partial x^h}{\partial u^\alpha} = \partial_\alpha x^h \quad .$$

Wij beschouwen slechts de stukken van een oppervlak waarvoor in elk punt de matrix van deze zes getallen de rang 2 heeft. De parameters dienen als coördinaten voor het oppervlak omdat elk punt van het oppervlak wordt aangewezen door een paar (u,v) van parameterwaarden. Op het oppervlak liggen twee stelsels krommen, namelijk met

$$u = \text{constant} \quad , \quad \text{resp.} \quad v = \text{constant} \ .$$

Deze krommen heten de parameterkrommen van het oppervlak.

Voorbeeld 1. De bol heeft als parametervoorstelling

$$\underline{x} = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r\cos\theta) \quad , \quad r = \text{constant} \quad .$$

De parameterkrommen zijn de meridianen (φ = constant) en de parallelen (θ = constant).

Voorbeeld 2. Het rechte schroefoppervlak, dat wordt verkregen door de x-as om de z-as omhoog te schroeven, heeft de parametervoorstelling

$$\underline{x} = (u\cos v,\ u\sin v,\ hv) \quad .$$

De parameterkrommen zijn rechten (v = constant) en cirkelschroeflijnen (u = constant).

Door $u = u(t)$, $v = v(t)$, t variabel, wordt op het oppervlak de kromme

$$\underline{x} = \underline{x}(u(t),\ v(t))$$

bepaald. De raaklijn in een punt P aan deze kromme heeft de richtingsvector

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{du}{dt}\,\partial_1 \underline{x} + \frac{dv}{dt}\,\partial_2 \underline{x} \quad ,$$

die afhankelijk is van $\partial_1 \underline{x}$ en $\partial_2 \underline{x}$, de richtingsvectoren van de raaklijnen aan de parameterkrommen door P. De raaklijnen in P aan alle krommen door P op het oppervlak liggen dus in een vlak, het <u>raakvlak</u> in P aan het oppervlak. Nemen wij de oorsprong in P dan hebben wij als basis voor het raakvlak in P de vectoren

$$\underline{c}_1 = \partial_1 \underline{x} \quad \text{en} \quad \underline{c}_2 = \partial_2 \underline{x} \quad .$$

Elke vector $\underline{v}$ van het raakvlak is te schrijven als

$$\underline{v} = v^1 \underline{c}_1 + v^2 \underline{c}_2 = v^\alpha \underline{c}_\alpha \quad .$$

Als parameters voor het oppervlak kunnen worden gebruikt alle tweetallen functies $u' = u'(u,v)$, $v' = v'(u,v)$, waaruit $u = u(u',v')$, $v = v(u',v')$ kunnen worden opgelost, dus met van nul verschillende Jacobiaan. Wij noteren als volgt:

$$u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^\alpha) \ , \quad u^\alpha = u^\alpha(u^{\alpha'}) \ , \quad A^{\alpha'}_\alpha = \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha} \ , \quad A^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \quad ,$$

dan geldt

$$A^{\alpha'}_\alpha A^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \quad , \quad A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\alpha'} = \delta^\beta_\alpha \quad .$$

Bij overgang op nieuwe parameters geldt

$$\partial_{\alpha'} \underline{x} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \partial_\alpha \underline{x} \quad , \quad \underline{c}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \underline{c}_\alpha \quad ,$$

hetgeen in het raakvlak neerkomt op overgang op een andere basis. Voor de componenten van een vector $\underline{v}$ van het raakvlak t.o.v. de nieuwe basis geldt

$$\underline{v} = v^{\alpha'} \underline{c}_{\alpha'} = v^{\alpha'} A^\alpha_{\alpha'} \underline{c}_\alpha \quad ,$$

$$v^\alpha = v^{\alpha'} A^\alpha_{\alpha'} \quad , \quad v^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha v^\alpha \quad .$$

Het raakvlak in P is een vectorruimte van dimensie 2 waarvan de bases zijn de raakvectoren aan de paren parameterkrommen door P.

§ 4 De eerste fundamentaaltensor

Zij P een punt van het oppervlak $\underline{x} = \underline{x}(u^\alpha)$. Van twee krommen door P op het oppervlak, aan te geven door $u^\alpha = u^\alpha(t)$, $u^\alpha = v^\alpha(\tau)$, zijn de raakvectoren in P

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{du^\alpha}{dt}\,\partial_\alpha \underline{x} \quad , \quad \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{dv^\beta}{d\tau}\,\partial_\beta \underline{x} \quad .$$

De <u>eerste fundamentaaltensor</u> van het oppervlak in P is het inwendig product van deze raakvectoren

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{d\tau}\right) = (\partial_\alpha \underline{x}, \partial_\beta \underline{x})\,\frac{du^\alpha}{dt}\,\frac{dv^\beta}{d\tau} = (\underline{c}_\alpha, \underline{c}_\beta)\,\frac{du^\alpha}{dt}\,\frac{dv^\beta}{d\tau} \quad .$$

De covariante componenten t.o.v. de basis $\underline{c}_\alpha = \partial_\alpha \underline{x}$ zijn

$$g_{\alpha\beta} = (\underline{c}_\alpha, \underline{c}_\beta) \quad ,$$

getallen die afhangen van de plaats van P op het oppervlak en van de gebruikte parameters u^1 en u^2. De zojuist gedefinieerde eerste fundamentaaltensor van het oppervlak in P is de fundamentaaltensor van de tweedimensionale vectorruimte die wordt gevormd door het raakvlak in P aan het oppervlak.

Voor de hoek ω tussen de parameterkrommen in P,

$$u = t,\ v = \text{constant} \quad ; \quad u = \text{constant},\ v = \tau \quad ,$$

geldt

$$\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad ,$$

zodat de parameterkrommen in P loodrecht zijn dan en slechts dan als $g_{12} = 0$ in P. Voor de booglengte s vanuit P langs de kromme $u^\alpha(t)$ geldt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\underline{x}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{dt}\right) = g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\alpha}{dt}\,\frac{du^\beta}{dt} \quad ,$$

hetgeen met behulp van differentialen als volgt wordt geschreven

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,du^\alpha du^\beta \quad .$$

Deze uitdrukking heet het <u>lijnelement</u> in P. De meetkundige betekenis van ds is de "infinitesimale afstand" van de punten $P = (u^1, u^2)$ en $Q = (u^1 + du^1, u^2 + du^2)$. Wij spreken van het lijnelement van het oppervlak wanneer $g_{\alpha\beta}$ worden beschouwd als functies van u^1 en u^2.

Voorbeeld 1. Voor de cirkelcylinder $\underline{x} = (r \cos v,\ r \sin v,\ u)$ geldt

$$\underline{c}_1 = (0,0,1)\ ,\quad \underline{c}_2 = (-r \sin v, r \cos v, 0)\ ,\quad ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2\quad .$$

Voorbeeld 2. Voor de bol geldt $g_{12} = 0$ omdat meridianen en parallelen loodrecht zijn. Daar op de meridianen $ds = r d\theta$ en op de parallelen $ds = r \sin\theta\, d\varphi$ geldt, volgt voor het lijnelement van de bol

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\quad .$$

Voorbeeld 3. Voor het rechte schroefoppervlak $\underline{x} = (u \cos v,\ u \sin v,\ hv)$ geldt

$$\underline{c}_1 = (\cos v, \sin v, 0)\quad ,\quad \underline{c}_2 = (-u \sin v, u \cos v, h)\quad ,$$

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + h^2) dv^2\quad .$$

Voorbeeld 4. In het XOZ-vlak ligt de kettinglijn $\underline{x} = (\cosh u, 0, u)$. Uit deze kromme ontstaat door wenteling om de z-as het oppervlak

$$\underline{x} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

met het lijnelement

$$ds^2 = \cosh^2 u (du^2 + dv^2)\ .$$

Voorbeeld 5. Wanneer op de cirkelcylinder $\underline{x} = (r \cos v, r \sin v, u)$ nieuwe parameters $\bar{u} = u$, $\bar{v} = vr$ worden ingevoerd, dan wordt het lijnelement $ds^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2$ van een vlak verkregen. Het vlak en de cylinder heten <u>isometrisch</u> omdat blijkbaar de lengtemeting dezelfde is. De bol en het vlak zijn niet isometrisch.

Voorbeeld 6. Het rechte schroefoppervlak van voorbeeld 3 is, voor $h = 1$, isometrisch met het omwentelingsoppervlak van voorbeeld 4. Inderdaad, ga op het rechte schroefoppervlak volgens $u = \sinh \bar{u}$, $v = \bar{v}$ over op nieuwe parameters $\bar{u}$ en $\bar{v}$, dan wordt het lijnelement van voorbeeld 4 verkregen.

§ 5 Christoffelsymbolen en tweede fundamentaaltensor

Zij $\underline{x} = \underline{x}(u^\alpha)$ een oppervlak. De raakvectoren in een punt P aan de parameterkrommen door P zijn de vectoren

$$\underline{c}_\beta = \partial_\beta \underline{x}\quad .$$

Wij zijn geïnteresseerd in de afgeleiden naar u^1 en u^2, zeg naar u^α, van de raakvectoren $\underline{c}_\beta$, dus in

$$\partial_\alpha \partial_\beta \underline{x} = \partial_\alpha \underline{c}_\beta = \lim_{\Delta u^\alpha \to 0} \frac{\underline{c}_\beta(u^\alpha + \Delta u^\alpha) - \underline{c}_\beta(u^\alpha)}{\Delta u^\alpha} .$$

Deze vier vectoren van R_3 zijn elk lineair afhankelijk van de vectoren $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ en $\underline{N}$, de eenheidsvector in P loodrecht op het oppervlak. Wij noteren als volgt

$$\partial_\alpha \underline{c}_\beta = \{\alpha{}^\gamma{}\beta\} \underline{c}_\gamma + h_{\alpha\beta} \underline{N}$$

waarin de coëfficiënten als volgt worden genoemd:

$\{\alpha{}^\gamma{}\beta\}$ heten de <u>Christoffelsymbolen</u>,

$h_{\alpha\beta}$ heten de componenten van de <u>tweede fundamentaaltensor</u>.

<u>Stelling</u>. $h_{\alpha\beta}$ zijn wel, $\{\alpha{}^\gamma{}\beta\}$ zijn niet de componenten van een tensor van het raakvlak.

<u>Bewijs</u>. Uit de definitie volgt

$$(\underline{c}_\delta , \partial_\alpha \underline{c}_\beta) = \{\alpha{}^\gamma{}\beta\}(\underline{c}_\delta , \underline{c}_\gamma) + h_{\alpha\beta}(\underline{c}_\delta , \underline{N}) ,$$

$$\{\alpha{}^\gamma{}\beta\} = (\underline{c}^\gamma , \partial_\alpha \underline{c}_\beta) , \quad h_{\alpha\beta} = (\underline{N}, \partial_\alpha \underline{c}_\beta) .$$

Bij overgang op andere parameters

$$u^\alpha = u^\alpha(u^{\alpha'}) \quad \text{met} \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} = A^\alpha_{\alpha'}$$

volgt voor de ons interesserende afgeleiden van de raakvectoren aan de parameterkrommen

$$\partial_{\alpha'} \underline{c}_{\beta'} = \partial_{\alpha'}(A^\beta_{\beta'} \underline{c}_\beta) = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \partial_\alpha \underline{c}_\beta + \underline{c}_\beta \partial_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} ,$$

$$h_{\alpha'\beta'} = (\underline{N}, \partial_{\alpha'} \underline{c}_{\beta'}) = (\underline{N}, A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \partial_\alpha \underline{c}_\beta) = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} h_{\alpha\beta} .$$

De $h_{\alpha\beta}$ zijn dus de covariante componenten van een tensor. Deze tensor, die symmetrisch is, heet de tweede fundamentaaltensor.
Wanneer in de formule voor $\partial_{\alpha'} \underline{c}_{\beta'}$ het inproduct met $\underline{c}^{\gamma'}$ wordt genomen, dan verdwijnt de laatste term niet:

$$\{\alpha'{}^{\gamma'}{}\beta'\} = (\underline{c}^{\gamma'} , \partial_{\alpha'} \underline{c}_{\beta'}) =$$

$$= (A^{\gamma'}_{\gamma}\,\underline{c}^{\gamma}\,,\,A^{\alpha}_{\alpha'}\,A^{\beta}_{\beta'}\,\partial_{\alpha}\underline{c}_{\beta} + \underline{c}_{\beta}\,\partial_{\alpha'}\,A^{\beta}_{\beta'}) =$$

$$= A^{\gamma'}_{\gamma}\,A^{\alpha}_{\alpha'}\,A^{\beta}_{\beta'}\{\alpha\ {}^{\gamma}\ \beta\} + A^{\gamma'}_{\gamma}\,\partial_{\alpha'}\,A^{\gamma}_{\beta'} \quad .$$

Omdat de $A^{\gamma}_{\beta'}$ niet constant zijn vormen de Christoffelsymbolen niet de componenten van een 3-tensor.

Stelling. De Christoffelsymbolen hangen slechts af van de componenten van de eerste fundamentaaltensor en hun afgeleiden naar u^1 en u^2:

$$\{\alpha\ {}^{\varepsilon}\ \beta\} = \tfrac{1}{2} g^{\varepsilon\gamma}(\partial_{\alpha}\, g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}\, g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}\, g_{\alpha\beta}) \quad .$$

Bewijs.
$$\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}(\underline{c}_{\beta}\,,\underline{c}_{\gamma}) = (\partial_{\alpha}\underline{c}_{\beta}\,,\underline{c}_{\gamma}) + (\underline{c}_{\beta}\,,\partial_{\alpha}\,\underline{c}_{\gamma}) \quad ,$$

$$\partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} = \partial_{\beta}(\underline{c}_{\alpha}\,,\underline{c}_{\gamma}) = (\partial_{\beta}\underline{c}_{\alpha}\,,\underline{c}_{\gamma}) + (\underline{c}_{\alpha}\,,\partial_{\beta}\,\underline{c}_{\gamma}) \quad ,$$

$$-\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = -\partial_{\gamma}(\underline{c}_{\alpha}\,,\underline{c}_{\beta}) = -(\partial_{\gamma}\underline{c}_{\alpha}\,,\underline{c}_{\beta}) - (\underline{c}_{\alpha}\,,\partial_{\gamma}\underline{c}_{\beta}) \quad , \quad \text{dus}$$

$$\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 2(\partial_{\alpha}\underline{c}_{\beta}\,,\underline{c}_{\gamma}) = 2\,g_{\gamma\delta}\{\alpha\ {}^{\delta}\ \beta\} \quad .$$

Na overschuiving met $g^{\varepsilon\gamma}$ volgt het gestelde.

Stelling. De doorsnijding van een oppervlak met een vlak, dat dichtbij een punt P van het oppervlak ligt en evenwijdig is met het raakvlak in P, is in eerste benadering een kegelsnede waarvan de vorm wordt bepaald door de waarde der $h_{\alpha\beta}$ in P.

Bewijs. Wij nemen de coördinaten in R_3 zodanig dat het oppervlak in O raakt aan het XOY-vlak. In de Taylorontwikkeling van de vergelijking van het oppervlak

$$z = f(x,y) = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \ldots$$

zijn dan de eerste drie termen nul. Snijding met het vlak $z = \varepsilon$ geeft in eerste benadering de kegelsnede

$$2\varepsilon = rx^2 + 2sxy + ty^2 \quad .$$

Anderzijds geldt voor de raakvectoren aan de parameterkrommen en voor de waarden van $h_{\alpha\beta} = (\underline{N}\,,\,\partial_{\alpha}\underline{c}_{\beta})$ in de oorsprong

$$\underline{c}_1 = (1, 0, rx+sy+\ldots) \ , \quad \underline{c}_2 = (0, 1, sx+ty+\ldots) \ , \quad \underline{N} = (0,0,1)$$

$$h_{11} = r \ , \quad h_{12} = h_{21} = s \ , \quad h_{22} = t \ .$$

Hiermee is het verband tussen bovengenoemde kegelsnede en de componenten van de tweede fundamentaaltensor gelegd. De kegelsnede is een ellips als $\det(h_{\alpha\beta}) > 0$, een hyperbool als $\det(h_{\alpha\beta}) < 0$, en bestaat uit twee evenwijdige rechten als $\det(h_{\alpha\beta}) = 0$.

Opmerking. Een handige formule ter berekening der $h_{\alpha\beta}$ is

$$h_{\alpha\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\det[g_{\alpha\beta}]}} \det(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \partial_\alpha \underline{c}_\beta) \quad .$$

Inderdaad, met $\underline{c}_1 \times \underline{c}_2 = \lambda \underline{N}$ wordt

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda} (\underline{c}_1 \times \underline{c}_2, \partial_\alpha \underline{c}_\beta) = \frac{1}{\lambda} \det(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \partial_\alpha \underline{c}_\beta)$$

waarin $|\lambda|$ de oppervlakte van het door $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_2$ opgespannen parallelogram is.

§ 6 Krommen op een oppervlak

Op het oppervlak $\underline{x} = \underline{x}(u^\alpha)$ wordt een kromme gegeven door

$$u^\alpha = u^\alpha(s) \quad , \quad \text{dan} \quad \underline{x} = \underline{x}(u^\alpha(s)) \quad ,$$

waarin s de booglengte van de kromme voorstelt. De richting van de raaklijn in een punt P van de kromme wordt bepaald door de eenheidsvector

$$\underline{t} = \dot{\underline{x}} = \dot{u}^\alpha \partial_\alpha \underline{x} = \dot{u}^\alpha \underline{c}_\alpha \quad ,$$

die als vector van het raakvlak de componenten $\dot{u}^\alpha$ heeft. Voor de langs de hoofdnormaal van de kromme vallende vector $\ddot{\underline{x}}$ geldt

$$\ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{t}} = \frac{d}{ds}(\dot{u}^\alpha \underline{c}_\alpha) = \ddot{u}^\alpha \underline{c}_\alpha + \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \partial_\beta \underline{c}_\alpha =$$

$$= \ddot{u}^\alpha \underline{c}_\alpha + \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \left\{{}_\alpha{}^\gamma{}_\beta\right\} \underline{c}_\gamma + \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta h_{\alpha\beta} \underline{N} =$$

$$= (\ddot{u}^\gamma + \left\{{}_\alpha{}^\gamma{}_\beta\right\} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \underline{c}_\gamma + h_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \underline{N} \quad .$$

De lengte van $\ddot{\underline{x}}$ is de kromming ρ van de kromme in P. De projectie van $\ddot{\underline{x}}$ op het raakvlak is een vector van het raakvlak met componenten

$$p^\gamma = \ddot{u}^\gamma + \left\{{}_\alpha{}^\gamma{}_\beta\right\}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \quad ,$$

waarvan de lengte heet de geodetische kromming van de kromme in P. Deze geodetische kromming hangt slechts af van de eerste en niet van de tweede fundamentaaltensor en blijft dezelfde wanneer het oppervlak met behoud van het lijnelement wordt verbogen. De projectie van $\ddot{\underline{x}}$ op de normaal $\underline{N}$ heeft de lengte

$$p = h_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \quad ,$$

die de normale kromming van de kromme in P heet. Blijkbaar hebben verschillende krommen op het oppervlak met dezelfde raakvector in P gelijke normale kromming. Dit is de stelling van Meusnier.

Een geodetische lijn van een oppervlak is een kromme op het oppervlak waarvoor in elk punt de hoofdnormaal van de kromme samenvalt met de normaal op het oppervlak.

Voor een geodetische lijn moet in elk punt $p^\gamma = 0$ dus

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2} + \left\{{}_\alpha{}^\gamma{}_\beta\right\} \frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0 \quad .$$

Dit is een stelsel van differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in u^1 en u^2 als functies van s. Uit de theorie van de differentiaalvergelijkingen volgt dat er precies één geodetische lijn bestaat die gaat door een gegeven punt en die daar een gegeven richting heeft.

Voorbeeld. De baan van een deeltje, dat zich op een oppervlak beweegt onder invloed van geen andere dan de normale kracht, is een geodetische lijn van het oppervlak.

Bewijs. De versnellingsvector is gericht volgens de normaal op het oppervlak en staat dus loodrecht op de snelheidsvector

$$\left(\frac{d^2\underline{x}}{dt^2}, \frac{d\underline{x}}{dt}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{d\underline{x}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{dt}\right) = \text{constant} \quad .$$

De snelheid heeft dus een constante grootte ds/dt. Maar dan volgt, met

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{dt}\frac{dt}{ds} \quad , \quad \ddot{\underline{x}} = \frac{d^2\underline{x}}{ds^2} = \frac{d^2\underline{x}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \quad ,$$

dat $\ddot{\underline{x}}$ is gericht langs de normaal op het oppervlak en dat de baan een geodetische lijn is.

Voor geodetische lijnen geldt de later te bewijzen

Stelling. De kortste krommen op het oppervlak zijn geodeten.

Voorbeeld. Op een cylinder zijn de schroeflijnen de kortste krommen, dus geodetische lijnen.

§ 7 Covariante afgeleiden

Door $u^\alpha = u^\alpha(t)$ wordt op het oppervlak $\underline{x} = \underline{x}(u^\alpha)$ een kromme bepaald. Zij in elk punt van deze kromme een vector $\underline{v} = v^\alpha \underline{c}_\alpha$ van het bijbehorende raakvlak gegeven. Dan heet $\underline{v} = \underline{v}(t)$ een vectorveld van het oppervlak langs de kromme. De afgeleide van $\underline{v}(t)$ in een punt P van de kromme, de vector

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\underline{v}(t+\tau) - \underline{v}(t)}{\tau}$$

ligt meestal niet in het bij P behorende raakvlak. Het gewone differentiëren is niet een bij het oppervlak behorende operatie. Dit is wel het geval bij het covariant differentiëren.

De covariante afgeleide in P van een vectorveld van een oppervlak langs een kromme is de projectie op het raakvlak in P van de gewone afgeleide in P.

Notatie: $\dfrac{\nabla \underline{v}}{dt} = \mathcal{P}\dfrac{d\underline{v}}{dt}$.

De covariante differentiatie $\dfrac{\nabla}{dt} = \mathcal{P}\dfrac{d}{dt}$ in een punt is een lineaire afbeelding van het bij dat punt behorende raakvlak in zichzelf. Voorts geldt voor scalaire $f(t)$

$$\frac{\nabla f\underline{v}}{dt} = \mathcal{P}\frac{df\underline{v}}{dt} = \underline{v}\,\frac{df}{dt} + f\,\frac{\nabla \underline{v}}{dt} \quad .$$

Voor elke vector $\underline{r}$ van het raakvlak geldt wegens $\underline{r} \perp \underline{N}$ dat

$$\left(\underline{r}\,,\,\frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \left(\underline{r}\,,\,\frac{\nabla \underline{v}}{dt}\right) \quad .$$

Voor twee vectorvelden $\underline{v}(t)$ en $\underline{w}(t)$ langs dezelfde kromme van het oppervlak volgt hieruit de regel van Leibniz

$$\frac{d(\underline{v},\underline{w})}{dt} = \left(\underline{v}\,,\,\frac{\nabla\underline{w}}{dt}\right) + \left(\underline{w}\,,\,\frac{\nabla\underline{v}}{dt}\right) \quad .$$

Voor de covariante differentiatie langs de parameterkrommen geldt

$$\nabla_\gamma \underline{v} = \mathcal{P}\partial_\gamma \underline{v} \quad .$$

In het bijzonder geldt voor de basisvectoren van het raakvlak

$$\nabla_\gamma \underline{c}_\beta = \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \underline{c}_\alpha \quad , \quad (\nabla_\gamma \underline{c}_\beta\,,\,\underline{c}^\alpha) = \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \quad .$$

Omdat $(\underline{c}_\beta\,,\,\underline{c}^\alpha) = \delta^\alpha_\beta$ de afgeleide nul heeft volgt hieruit met behulp van de regel van Leibniz dat

$$(\nabla_\gamma \underline{c}^\alpha\,,\,\underline{c}_\beta) = -\left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \quad , \quad \nabla_\gamma \underline{c}^\alpha = -\left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \underline{c}^\beta \quad .$$

Deze formules stellen ons in staat om de componenten te bepalen van de covariante afgeleiden langs de parameterkrommen van een vectorveld $\underline{v}(u^\alpha)$ van het oppervlak:

$$\nabla_\gamma \underline{v} = \nabla_\gamma (v^\beta \underline{c}_\beta) = \underline{c}_\beta \partial_\gamma v^\beta + v^\beta \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \underline{c}_\alpha = \underline{c}_\alpha (\partial_\gamma v^\alpha + \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} v^\beta) \quad ,$$

$$\nabla_\gamma \underline{v} = \nabla_\gamma (v_\alpha \underline{c}^\alpha) = \underline{c}^\alpha \partial_\gamma v_\alpha - v_\alpha \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} \underline{c}^\beta = \underline{c}^\beta (\partial_\gamma v_\beta - \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} v_\alpha) \quad .$$

De componenten van $\nabla_\gamma \underline{v}$ worden als volgt genoteerd

$$\nabla_\gamma v^\alpha = \partial_\gamma v^\alpha + \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} v^\beta \quad , \quad \nabla_\gamma v_\beta = \partial_\gamma v_\beta - \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\beta\right\} v_\alpha \quad .$$

Dit zijn de componenten van een 2-tensor van het raakvlak. Inderdaad, bij overgang op andere parameters geldt

$$\underline{c}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \underline{c}_\alpha \quad , \quad \underline{c}^{\beta'} = A^{\beta'}_\beta \underline{c}^\beta \quad , \quad \nabla_{\gamma'} \underline{v} = \mathcal{P}\partial_{\gamma'} \underline{v} = A^\gamma_{\gamma'} \nabla_\gamma \underline{v} \quad ,$$

$$\nabla_{\gamma'} v^{\alpha'} = A^\gamma_{\gamma'} A^{\alpha'}_\alpha \nabla_\gamma v^\alpha \quad , \quad \nabla_{\gamma'} v_{\beta'} = A^\gamma_{\gamma'} A^\beta_{\beta'} \nabla_\gamma v_\beta \quad .$$

Zo is door covariante differentiatie aan een vectorveld van het oppervlak een 2-tensorveld van het oppervlak toegevoegd.

Lemma van Ricci: $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \left\{{}_\gamma{}^\varepsilon{}_\alpha\right\} g_{\varepsilon\beta} - \left\{{}_\gamma{}^\varepsilon{}_\beta\right\} g_{\alpha\varepsilon} = 0 \quad ,$

$$\partial_\gamma g^{\alpha\beta} + \left\{{}_\gamma{}^\alpha{}_\varepsilon\right\} g^{\varepsilon\beta} + \left\{{}_\gamma{}^\beta{}_\varepsilon\right\} g^{\alpha\varepsilon} = 0 \quad .$$

<u>Bewijs</u>. Pas toe de regel van Leibniz voor $\underline{c}_\alpha$, $\underline{c}_\beta$ en voor $\underline{c}^\alpha$, $\underline{c}^\beta$,

$$\partial_\gamma(\underline{c}_\alpha, \underline{c}_\beta) = (\underline{c}_\alpha, \nabla_\gamma \underline{c}_\beta) + (\underline{c}_\beta, \nabla_\gamma \underline{c}_\alpha) \quad ,$$

$$\partial_\gamma(\underline{c}^\alpha, \underline{c}^\beta) = (\underline{c}^\alpha, \nabla_\gamma \underline{c}^\beta) + (\underline{c}^\beta, \nabla_\gamma \underline{c}^\alpha) \quad ,$$

en vul in.

<u>Opmerking</u>. Later zullen de componenten van de covariante afgeleide van een 2-tensor φ worden gedefinieerd volgens

$$\nabla_\gamma \varphi_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \varphi_{\alpha\beta} - \left\{{}_{\gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right\}\varphi_{\varepsilon\beta} - \left\{{}_{\gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\right\}\varphi_{\alpha\varepsilon} \quad ,$$

$$\nabla_\gamma \varphi^{\alpha\beta} = \partial_\gamma \varphi^{\alpha\beta} + \left\{{}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon}\right\}\varphi^{\varepsilon\beta} + \left\{{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}\right\}\varphi^{\alpha\varepsilon} \quad ,$$

$$\nabla_\gamma \varphi_{\alpha}^{\cdot\beta} = \partial_\gamma \varphi_{\alpha}^{\cdot\beta} - \left\{{}_{\gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right\}\varphi_{\varepsilon}^{\cdot\beta} + \left\{{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}\right\}\varphi_{\alpha}^{\cdot\varepsilon} \quad .$$

Volgens deze definities spreekt het lemma van Ricci uit dat

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma g^{\alpha\beta} = 0 \quad ,$$

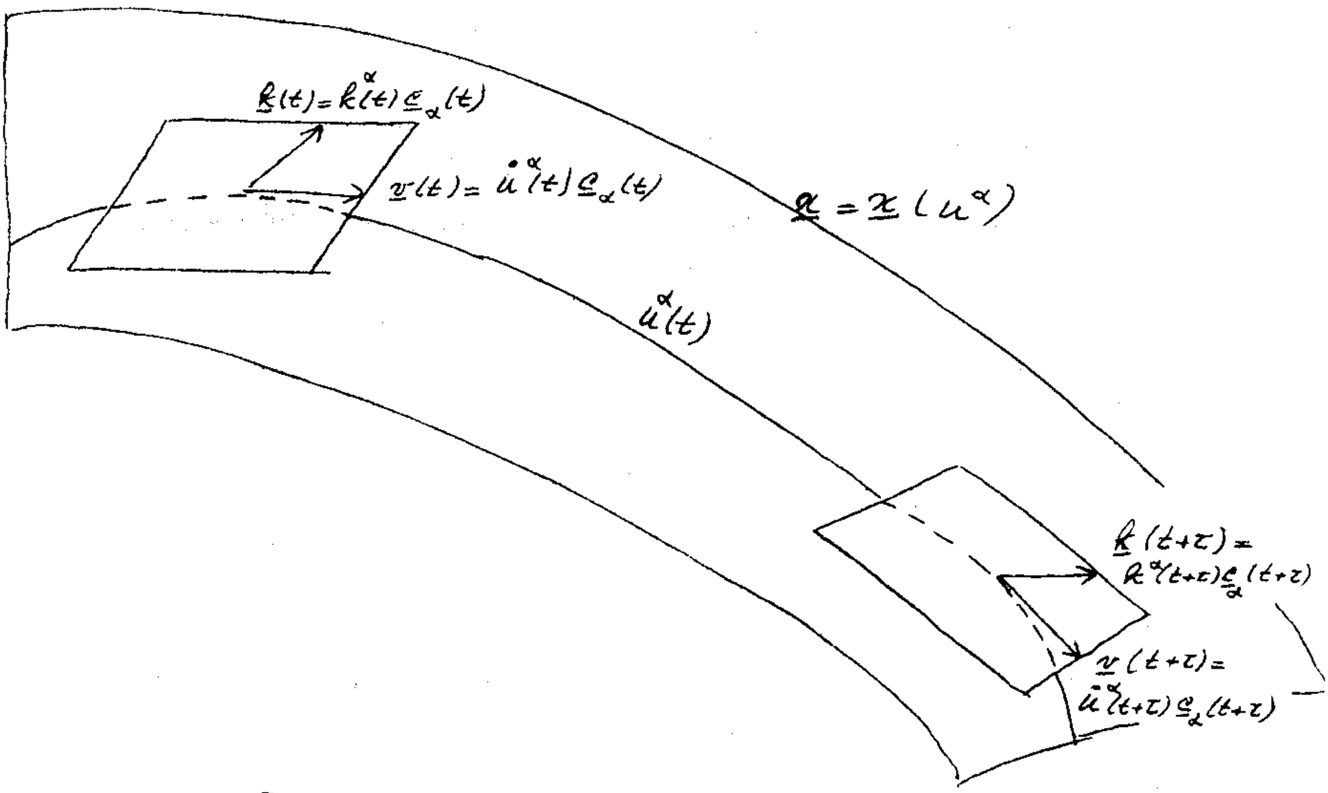
dus dat de componenten van de eerste fundamentaaltensor zich bij covariante differentiatie als constanten gedragen. Dit is in overeenstemming met de volgende uit het tensorkarakter van $\nabla_\gamma v_\beta$ en $\nabla_\gamma v^\alpha$ volgende formules .

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} v^\alpha = \nabla_\gamma v_\beta = g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma v^\alpha \quad ,$$

$$\nabla_\gamma g^{\alpha\beta} v_\beta = \nabla_\gamma v^\alpha = g^{\alpha\beta} \nabla_\gamma v_\beta \quad .$$

Voorbeeld:

Hoe moet een op een oppervlak wandelende mier de wet $\underline{k} = m\underline{a}$ uitschrijven in coördinaten?



$$\underline{k} = m\frac{\nabla \underline{v}}{dt}$$

$$k = m\frac{\nabla \dot{u}^{\alpha}}{dt} = m\,\dot{u}^{\gamma}\,\nabla_{\gamma}\dot{u}^{\alpha} = m\,\dot{u}^{\gamma}(\partial_{\gamma}\,\dot{u}^{\alpha} + \{\gamma^{\alpha}\beta\}\dot{u}^{\beta}) =$$

$$= m(\ddot{u}^{\alpha} + \{\gamma^{\alpha}\beta\}\dot{u}^{\beta}\dot{u}^{\gamma})\;.$$

Dus niet $\underline{k} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$ en niet $k^{\alpha} = m\,\ddot{u}^{\alpha}$!

Wanneer $\underline{k} = 0$, dan krijgen wij een geodetische lijn van het oppervlak.

HOOFDSTUK IV RIEMANNSE MEETKUNDE

§ 1 Differentieerbare functies*)

Zij U een open deelverzameling van R_n. De vectorfunctie

$$\underline{f} : U \subset R_n \to R_m$$

heet differentieerbaar voor $\underline{a} \in U$ als er een lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_m$ bestaat zodat geldt

$$\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + \mathcal{A}\underline{h} + |\underline{h}|\underline{e}(\underline{h}) \ , \qquad \lim_{|\underline{h}|\to 0} |\underline{e}(\underline{h})| = 0 \ .$$

In coördinaten uitgedrukt volgt hieruit dat de functies $f^j(x^i)$ voor $x^i = a^i$ differentieerbaar zijn met functionaalmatrix

$$A = \left[\partial_i f^j\right]_{(x^i=a^i)} \ .$$

$\underline{f} : U \subset R_n \to R_m$ heet r-differentieerbaar als voor alle $\underline{x} \in U$ van de functies $f^j(x^i)$ de $r^{\underline{e}}$ partiële afgeleiden bestaan en continu zijn. Wanneer een 1-differentieerbare $\underline{f} : U \subset R_n \to R_n$ eeneenduidig is met functionaaldeterminant (Jacobiaan) ongelijk aan nul voor alle $\underline{x} \in U$, dan is de inverse functie $\underline{f}^{-1} : \underline{f}(U) \subset R_n \to R_n$ weer 1-differentieerbaar, met functionaalmatrix A^{-1}. Omgekeerd is een 1-differentieerbare $\underline{f}$ met nietsinguliere functionaalmatrix echter slechts locaal eeneenduidig.

Voorbeeld. $\underline{f} : R_2 \to R_2$, gedefinieerd door

$$f(x,y) = e^x \cos y \ , \quad g(x,y) = e^x \sin y \ .$$

Een kromme $\underline{k}$ in R_n is een r-differentieerbare functie

$$\underline{k} : U \subset R_1 \to R_n \ , \quad U = \{t \mid t_1 < t < t_2\} \ .$$

Een functie f op R_n is een r-differentieerbare

$$f : U \subset R_n \to R_1 \ .$$

De richtingsafgeleide van de functie f in een punt $\underline{a}$ ten opzichte van de vector $\underline{v}$ is het getal

$$(\underline{v}, \text{grad } f) = v^i \partial_i f \ , \quad \text{voor } \underline{x} = \underline{a} \ .$$

*) Zie ook Wiskunde 40.

De richtingsafgeleide van f ten opzichte van een kromme $\underline{x}(t)$ in een punt P, $t = t_0$, van de kromme is het getal

$$(\underline{\iota}, \text{grad } f) = (\underline{\dot{x}}, \text{grad } f) = \dot{x}^i \partial_i f = \frac{df(x^i(t))}{dt} \quad , \quad \text{voor } t = t_0 \quad .$$

§ 2 Manifolds

Voorbeeld. De cirkel laat zich niet in zijn geheel op eeneenduidige differentieerbare wijze met behulp van één parameter beschrijven. Omdat dit wel kan voor delen van de cirkel, zoekt men een beschrijving van een aantal delen die samen de hele cirkel vormen en die in de overlapping van die delen geen tegenstrijdigheid geeft.

Voorbeeld. De sfeer S_2 is niet in zijn geheel, maar wel locaal te beschrijven met coördinaten van één R_2. Met twee of meer van deze R_2 kan de gehele S_2 wel met coördinaten worden beschreven. De eis is dat in de overlappende gebieden de coördinatenbeschrijvingen glad in elkaar overgaan.

Zij M een verzameling. Een kaart van M is een deel $U \subset M$ met een eeneenduidige $\varphi : U \to R_n$.

Beschouw twee kaarten $\{U,\varphi\}$ en $\{V,\psi\}$. De functie $\psi\varphi^{-1}$ is een eeneenduidige afbeelding van $\varphi(U \cap V) \subset R_n$ op $\psi(U \cap V) \subset R_n$.

Een atlas van M is een collectie van kaarten $\{U_i,\varphi_i\}$ zodat M de vereniging is van alle U_i en zodat $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ (en dus ook $\varphi_i\varphi_j^{-1}$) alle r-differentieerbaar zijn. Een manifold*) van dimensie n is een verzameling M voorzien van een atlas.

Voorbeeld. Het aardoppervlak, voorzien van een volledige atlas van land- en zeekaarten, is een manifold van dimensie twee.

Voorbeeld. De configuratieruimte van een dynamisch systeem met n vrijheidsgraden is op te vatten als een manifold van dimensie n.

Voorbeeld. Een tweedimensionale dubbelslinger bestaat uit een massa m, met een staaf ter lengte ℓ scharnierend bevestigd aan een massa m, die met een staaf ter lengte ℓ scharnierend is bevestigd aan een vast punt. De configuratieruimte is een manifold van dimensie 2, namelijk een torus, die in R_2 kan worden voorgesteld als een vierkant waarvan de overstaande zijden zijn geïdentificeerd.

*) Frans: Variété; Duits: Mannigfaltigkeit.

Een punt P van een manifold, dat behoort tot twee kaarten K en K', kan op twee manieren door coördinaten worden beschreven, namelijk

$$P = (u^1,\dots,u^n) \in K \subset R_n \quad \text{en} \quad P = (u^{1'},\dots,u^{n'}) \in K' \subset R_n \quad .$$

De door $\psi\varphi^{-1}$ en door $\varphi\psi^{-1}$ gedefinieerde functies

$$u^{i'} = u^{i'}(u^i) \quad \text{en} \quad u^i = u^i(u^{i'})$$

zijn r-differentieerbaar met Jacobiaan

$$\det(\partial_i u^{i'}) \neq 0 \quad .$$

Zoals gebruikelijk noteren wij weer

$$A^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \partial_{i'} u^i \quad \text{en} \quad A^{i'}_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} = \partial_i u^{i'} \quad .$$

Voorbeeld. Een open deel van R_n, voorzien van een of meer kromlijnige coördinatensystemen, is een manifold van dimensie n.

> Een kromlijnig coördinatensysteem voor R_n (of voor een open deel van R_n) is een stelsel van n stuks r-differentieerbare functies $u^i = u^i(x^h)$ op R_n, waaruit omgekeerd r-differentieerbare $x^h = x^h(u^i)$ kunnen worden bepaald.

Elk punt $P \in R_n$ wordt dus eenduidig bepaald door een stel waarden $u^1,\dots,u^n$. Wij noteren

$$\frac{\partial x^h}{\partial u^i} = \partial_i x^h \quad .$$

Een parameterkromme is een kromme die wordt verkregen door één der u^i variabel en de rest constant te nemen. Twee kromlijnige coördinatensystemen voor R_n geven aanleiding tot twee kaarten.

Voorbeeld. De bolcoördinaten r,φ,θ vormen een kromlijnig coördinatensysteem voor geschikte delen van R_3, waarbij het verband tussen x^h en r,φ,θ wordt gegeven door

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \ , \quad z = r\cos\theta \quad .$$

De parameterkrommen door een punt P zijn de halfrechte OP, de meridiaancirkel en de parallelcirkel door P.

§ 3 Raakruimten

Zij M een manifold van dimensie n.

Een kromme k van M is een afbeelding van een open interval I in M, m.a.w. $k : I \subset R_1 \to M$.

Op een kaart $\{U,\varphi\}$ wordt de kromme beschreven door $\varphi k : R_1 \to R_n$, dus door $u^i(t)$. Op een andere kaart $\{U',\varphi'\}$ wordt de kromme beschreven door $\varphi' k : R_1 \to R_n$, dus door $u^{i'}(t) = u^{i'}(u^i(t))$. De kromme k heet r-differentieerbaar als φk, en daarmee ook $\varphi' k$, dat zijn. De kromme, die op de kaart $\{U,\varphi\}$ wordt gegeven door

$$u^1 = u_0^1 + t,\ u^2 = u_0^2,\ \ldots,\ u^n = u_0^n\ ,\quad u_0^i \text{ constant}\quad ,$$

heet een bij deze kaart behorende eerste parameterkromme van de manifold. Op analoge wijze wordt de bij de kaart behorende $i^{\underline{e}}$ parameterkromme gedefinieerd.

Voorbeeld. De parameterkrommen van een kromlijnig coördinatensysteem voor R_n.

Een functie f van M is een afbeelding van een deel van M in de reële getallen, m.a.w. $f : U \subset M \to R_1$.

Op een kaart $\{U,\varphi\}$ wordt de functie beschreven door $f\varphi^{-1} : \varphi(U) \subset R_n \to R_1$. De functie heet r-differentieerbaar als $f\varphi^{-1}$ dat is. Krommen en functies worden beschreven door middel van de kaarten. Wij noteren krommen en functies verder door hun beschrijving op de kaarten.

Twee krommen van M heten in een punt P equivalent als voor hun beschrijvingen $u^i(t)$ en $v^i(t)$ op een kaart geldt

$$u^i(t_0) = v^i(t_0)\ ,\quad \dot{u}^i(t_0) = \dot{v}^i(t_0)\quad .$$

Deze definitie is kaartonafhankelijk omdat voor $t = t_0$ geldt

$$u^{i'}(t) = u^{i'}(u^i(t))\ ,\quad \dot{u}^{i'}(t) = A_i^{i'}\,\dot{u}^i(t)\quad .$$

Een raakvector in P aan de manifold M is een klasse van in P equivalente krommen. De raakruimte in P is de verzameling van de raakvectoren in P aan M.

Deze raakruimte is een vectorruimte van dimensie n. De raakvectoren $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n$ in P van de bij een kaart $\{U,\varphi\}$ behorende parameterkrommen vormen een basis voor deze vectorruimte. Het verband met de raakvectoren $\underline{c}_{i'}$ van de bij een andere kaart $\{U',\varphi'\}$ behorende parameterkrommen is

$$\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i \quad .$$

Twee functies heten in een punt P equivalent als voor hun beschrijvingen $f(u^i)$ en $g(u^i)$ op een kaart geldt

$$\partial_j f(u^i_0) = \partial_j g(u^i_0) \ .$$

Deze definitie is kaartonafhankelijk wegens

$$u^{i'} = u^{i'}(u^i) \ , \quad \partial_{j'} f = A^j_{j'}\partial_j f \quad .$$

Een differentiaal in P aan de manifold M is een klasse van in P equivalente functies. De coraakruimte in P is de verzameling der differentialen in P aan M.

Deze coraakruimte is een vectorruimte van dimensie n. De differentialen $du^1,\dots,du^n$ in P van de bij een kaart $\{U,\varphi\}$ behorende parameterfuncties $u^1,\dots,u^n$ vormen een basis voor de vectorruimte. Voor twee kaarten geldt

$$du^{i'} = A^{i'}_i du^i \ .$$

Voor een functie f en een kromme k in een punt P van M is $fk : I \subset R_1 \to R_1$ en voor $t = t_0$ geldt

$$\frac{dfk}{dt} = \frac{df(u^i(t))}{dt} = \dot{u}^i\partial_i f = \partial_1 f\frac{du^1}{dt} + \dots + \partial_n f\frac{du^n}{dt} \ .$$

Deze uitdrukking, die weer kaartonafhankelijk is, heet de richtingsafgeleide in P van de functie ten opzichte van de kromme en stemt overeen met de in § 1 genoemde richtingsafgeleide. In de richtingsafgeleide in P herkent men de differentialen als lineaire vormen op de raakruimte en de raakvectoren als lineaire vormen op de coraakruimte. Raakruimte en coraakruimte in P kunnen daarom als elkaars duale worden beschouwd.

Voorbeeld. Een open deel van R_n, voorzien van kromlijnige coördinatensystemen $u^i(x^h)$, is een manifold van dimensie n. Zij $u^i(t)$ een kromme door het punt P, dat wordt gegeven door $t = t_0$, dus door $u^i(t_0) = u^i_0$. De raakvector in P is

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{du^i}{dt}\right)_0 (\partial_i \underline{x})_0 = \left(\frac{du^i}{dt}\right)_0 \underline{c}_i \quad ,$$

waarin $\underline{c}_i = (\partial_i \underline{x})_0$ de raakvector in P aan de i^e parameterkromme door P is. De vectoren $\underline{c}_i$ spannen de raakruimte in P op. Deze raakruimte is dus R_n met P als oorsprong.

Voorbeeld. De basis van de bij een punt P en de bolcoördinaten r,φ,θ behorende raakruimte wordt gevormd door

$$\partial_r \underline{x} = \underline{c}_1 = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \quad ,$$

$$\partial_\varphi \underline{x} = \underline{c}_2 = (-\,r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0) \quad ,$$

$$\partial_\theta \underline{x} = \underline{c}_3 = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -\,r\sin\theta) \quad .$$

Blijkbaar geldt $|\underline{c}_1| = 1$, $|\underline{c}_2| = r\sin\theta$, $|\underline{c}_3| = r$.

Opmerking. Een raakvector in een punt P aan de manifold M kan ook als volgt worden gedefinieerd:

> Een raakvector in P is een lineaire afbeelding $\mathcal{D}$ in R_1, die tevens afgeleide is, van de verzameling der 1-differentieerbare in P gedefinieerde functies f van M:
>
> $$\mathcal{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{D}f + \beta\mathcal{D}g \ , \quad \mathcal{D}(fg) = f\mathcal{D}g + g\mathcal{D}f$$
>
> in P, voor constante α en β.

Een raakvector volgens de vroegere definitie is inderdaad als zo'n lineaire afbeelding op te vatten. Immers, zij k een kromme, dan voldoet de richtingsafgeleide in P

$$\mathcal{D}f := \frac{dfk}{dt} = \dot{u}^i\,\partial_i f$$

aan de eisen, omdat voor constante α en β geldt

$$\dot{u}^i\,\partial_i(\alpha f + \beta g) = \alpha\dot{u}^i\,\partial_i f + \beta\dot{u}^i\,\partial_i g \ , \quad \dot{u}^i\,\partial_i(fg) = f\dot{u}^i\,\partial_i g + g\dot{u}^i\,\partial_i f \quad .$$

Opmerking. Met behulp van de bij de punten van een manifold behorende raakruimten en coraakruimten kan de differentiaal- en integraalrekening voor manifolds worden ontwikkeld.

§ 4 Riemannse ruimten

Een vectorveld [tensorveld] van een manifold is een afbeelding die aan elk punt van de manifold een vector [tensor] van de bij het punt behorende raakruimte toevoegt.

Een vectorveld [tensorveld] heet r-differentieerbaar wanneer de bij behorende afbeelding dat is. Op een kaart betekent dit dat de componenten van de vector [tensor] r-differentieerbare functies zijn van de parameters.

In elke raakruimte kan een inwendig product worden ingevoerd met behulp waarvan tensoralgebra kan worden bedreven. Anders dan bij oppervlakken in R_3 beschikken wij echter in het algemeen niet over een a priori gegeven inwendig product, dat voor alle raakruimten tegelijk kan worden gebruikt. Deze missende "samenhang" (connection) tussen de verschillende raakruimten van een manifold wordt aangevuld in de volgende definitie.

Een Riemannse ruimte is een manifold voorzien van een r-differentieerbaar 2-tensorveld van symmetrische, positief definiete 2-tensoren.

Dit betekent dat bij elk punt P van de manifold M en bij elk paar vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ van de raakruimte van P een getal $\gamma(P;\ \underline{x}, \underline{y})$ behoort zodat:

$\gamma(P;\ \underline{x}, \underline{y})$ hangt op r-differentieerbare wijze af van P,
$\gamma(P;\ \underline{x}, \underline{y})$ is lineair in $\underline{x}$ en in $\underline{y}$, is symmetrisch in $\underline{x}$ en $\underline{y}$,
$\gamma(P;\ \underline{x}, \underline{x}) > 0$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$.
Uitgeschreven op een kaart $\{U,\varphi\}$, met parameters u^h, geldt

$$\gamma(P;\ \underline{x}, \underline{y}) = g_{ij}\, x^i y^j$$

met r-differentieerbare functies g_{ij} van u^h, met $g_{ij} = g_{ji}$ en met $[g_{ij}]$ positief definiet. In de raakruimte van elk punt P fungeert de bij P behorende γ als fundamentaaltensor. Daarom noemen wij het 2-tensorveld, waarvan sprake is bij de definitie van een Riemannse ruimte, het fundamentaaltensorveld.

Voorbeeld. Een oppervlak in R_3, met als fundamentaaltensorveld het inproduct van R_3, is een Riemannse ruimte.

Voorbeeld. De manifold bestaande uit een open deel van R_n met kromlijnige coördinatensystemen, voorzien van het inproduct van R_n als fundamentaaltensorveld, is een Riemannse ruimte.

Voorbeeld. De configuratieruimte van een 2-dimensionale dubbelslinger, voorzien van de kinetische energie als fundamentaaltensorveld, is een Riemannse ruimte van dimensie 2.

Inderdaad,

$$P = (\ell \sin \varphi, -\ell \cos \varphi) \ , \quad Q = (\ell \sin \varphi + \ell \sin \psi, -\ell \cos \varphi - \ell \cos \psi) \ ,$$

$$T = \tfrac{1}{2} m(v_P^2 + v_Q^2) = \tfrac{1}{2} m\ell^2 [2\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi \cos(\varphi - \psi)] \ ,$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi-\psi) \\ \cos(\varphi-\psi) & 1 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} m\ell^2 .$$

Zij k een kromme van de Riemannse ruimte M, die op een kaart $\{U,\varphi\}$ wordt beschreven door $u^i(t)$. De <u>lengte</u> van de kromme wordt gedefinieerd door

$$s := \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}\, dt \ . \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j \ ,$$

het <u>lijnelement</u>, kan worden opgevat als het kwadraat van de infinitesimale afstand van de punten u^i en $u^i + du^i$.

<u>Voorbeeld</u>. Bij het bolcoördinatensysteem voor R behoort het lijnelement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \ .$$

Bij het cylindercoördinatensysteem voor R_3 behoort

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \ .$$

Beschouw van een Riemannse ruimte M twee punten P en Q die met behulp van dezelfde kaart $\{U,\varphi\}$ worden beschreven door $u^h(P)$ en $u^h(Q)$. Wij zoeken de kortste onder alle krommen van M die door P en door Q gaan. Zij k een kromme van M die op de kaart wordt voorgesteld door

$$u^h(s), \ s_1 \leq s \leq s_2, \ u^h(s_1) = u^h(P), \ u^h(s_2) = u^h(Q) \ ,$$

waarin s de booglengte van k is. De functie

$$T(u^h, \dot u^h) := \sqrt{g_{ij} \dot u^i \dot u^j}$$

neemt dus in elk punt van k de waarde 1 aan. De kromme k wordt nu gevarieerd op differentieerbare wijze met vasthouden van de eindpunten P en Q. Dit betekent dat een nieuwe kromme $\bar k$ wordt beschouwd,

$$u^h(s) + \varepsilon^h(s), \ \varepsilon^h(s_1) = \varepsilon^h(s_2) = 0 \ , \ \varepsilon^h(s) \text{ differentieerbaar} .$$

Voor $\bar k$ treedt s op als parameter, niet als booglengte, en $T(u^h + \varepsilon^h, \dot u^h + \dot\varepsilon^h)$ is niet constant $= 1$. De lengte van $\bar k$ tussen P en Q is

$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij}(u^h+\varepsilon^h)\,\frac{d(u^i+\varepsilon^i)}{ds}\,\frac{d(u^j+\varepsilon^j)}{ds}}\,ds = \int_{s_1}^{s_2} T(u^h+\varepsilon^h,\dot{u}^h+\dot{\varepsilon}^h)ds \quad .$$

De variatie δs van de booglengte is het verschil in booglengte van k en $\bar{k}$,

$$\delta s = \int_{s_1}^{s_2} [T(u^h+\varepsilon^h,\dot{u}^h+\dot{\varepsilon}^h) - T(u^h,\dot{u}^h)]ds =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial T}{\partial u^h}\,\varepsilon^h + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\,\dot{\varepsilon}^h\right] ds + \text{hogere orde termen} =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial T}{\partial u^h}\,\varepsilon^h - \varepsilon^h\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\right)\right] ds + \left[\varepsilon^h\,\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\right]_{s_1}^{s_2} + \text{h.o.t.} =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial T}{\partial u^h} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\right)\right] \varepsilon^h\,ds + \text{h.o.t.}$$

De oorspronkelijke kromme k heet de kortste kromme tussen P en Q als de variatie van de booglengte nul is voor elke nieuwe kromme $\bar{k}$, dus voor elke ε^h. Daartoe is nodig dat de kromme $u^h(s)$ voldoet aan

$$\frac{\partial T}{\partial u^h} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\right) = 0 \quad ,$$

de <u>vergelijkingen van Euler</u> voor het gestelde variatieprobleem. Omdat in elk punt van de kromme geldt dat

$$T^2(u^h,\dot{u}^h) = g_{ij}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 1$$

kunnen de vergelijkingen van Euler als volgt worden geschreven

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^h} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T^2}{\partial \dot{u}^h}\right) = 0 \quad ,$$

$$\dot{u}^i\,\dot{u}^j\,\partial_h\,g_{ij} - \frac{d}{ds}\,(g_{hi}\,\dot{u}^i + g_{hj}\,\dot{u}^j) = 0 \quad ,$$

$$\dot{u}^i\,\dot{u}^j\,\partial_h\,g_{ij} - 2g_{hi}\,\ddot{u}^i - (\partial_j\,g_{hi} + \partial_i\,g_{hj})\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 0 \quad ,$$

$$\ddot{u}^k + \tfrac{1}{2}\,g^{kh}(\partial_i\,g_{jh} + \partial_j\,g_{hi} - \partial_h\,g_{ij})\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 0 \quad ,$$

$$\ddot{u}^k + \left\{{}_{i}{}^{k}{}_{j}\right\}\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 0 \quad ,$$

met de voor de hand liggende definitie van de

Christoffelsymbolen: $\{{}_i{}^k{}_j\} := \frac{1}{2} g^{kh}(\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij})$.

Toepassing van het bovenstaande op oppervlakken in R_3 levert het bewijs van de stelling van Hoofdstuk III, § 6:

Stelling. De kortste krommen op een oppervlak in R_3 zijn geodeten.

Het ligt voor de hand om in het algemene geval van een Riemannse ruimte de krommen, die voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\ddot{u}^k + \{{}_i{}^k{}_j\}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0 \quad ,$$

te noemen de geodetische krommen van de Riemannse ruimte.

Stelling. In een Riemannse ruimte zijn de kortste krommen geodetische krommen.

Voorbeeld. Beschouw een mechanisch systeem met n vrijheidsgraden, met gegeneraliseerde coördinaten $q^1,\dots,q^n$, waarvoor de kinetische energie een positief definiete kwadratische norm in $\dot{q}^i$ is met van q^i afhangende coëfficiënten:

$$T = \tfrac{1}{2} a_{ij}(q^h)\dot{q}^i\dot{q}^j \quad .$$

De differentiaalvergelijkingen van de beweging van het systeem zijn de vergelijkingen van Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^h} = K_h \quad ,$$

waarin $K_h(q^j,t)$ de gegeneraliseerde uitwendige krachten zijn.
De configuraties van het systeem vormen een Riemannse ruimte van dimensie n, waarvoor T als fundamentaaltensor optreedt. De vergelijkingen van Lagrange zijn te schrijven als

$$\ddot{q}^h + \{{}_i{}^h{}_j\}\dot{q}^i\dot{q}^j = K^h \quad .$$

Wanneer er geen uitwendige krachten optreden dan doorloopt het systeem een baan, die een geodetische kromme van de Riemannse ruimte is.

Voorbeeld. Beschouw de Riemannse ruimte gevormd door een open deel van R_n met kromlijnige coördinatensystemen, voorzien van het inproduct van R_n als fundamentaaltensor. Voor de speciale kaart der gewone rechthoekige coördinaten x^h van R_n is het lijnelement

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 \quad ,$$

dus zijn de g_{ij} constant en zijn de Christoffelsymbolen nul. De geodetische krommen hebben tot vergelijking $\ddot{x}^h = 0$, dus zijn de rechten van R_n. Voor een willekeurig kromlijnig coördinatensysteem $u^h(x^j)$ zijn de Christoffelsymbolen echter niet nul en luiden de differentiaalvergelijkingen van deze rechten

$$\ddot{u}^h + \{{}_i{}^k{}_j\} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0 \quad .$$

Voorbeeld. Beschouw de Riemannse ruimte gevormd door een oppervlak in R_3 voorzien van het inproduct van R_3 als fundamentaaltensor. Dan geldt

$$g_{ij} = (\underline{c}_i, \underline{c}_j)$$

en er volgt (zie bewijs van de stelling op p. 43, Hoofdstuk III, § 5)

$$\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij} = 2(\partial_i \underline{c}_j, \underline{c}_h) \quad .$$

De voor willekeurige Riemannse ruimten gedefinieerde Christoffelsymbolen komen dus in het voorbeeld der oppervlakken in R_3 overeen met de daarvoor vroeger ingevoerde Christoffelsymbolen.

Opmerking. Volgens de definitie van Riemannse ruimten wordt elke raakruimte voorzien van een positief definiete fundamentaaltensor. Met geringe moeite kunnen de resultaten van deze en de volgende paragrafen, met enige correcties, geldig worden gemaakt voor Riemannse ruimten met een indefiniete fundamentaaltensor. Hierin is elke raakruimte een Minkowskiruimte. Deze opmerking wordt gemaakt in verband met de in § 8 te geven schets van de algemene relativiteitstheorie.

§ 5 Covariante afgeleiden

Zij M een Riemannse ruimte, zij $\{U,\varphi\}$ een kaart met parameters u^h en Christoffelsymbolen $\{{}_h{}^j{}_i\}$. Wij wensen van een gegeven tensorveld te bepalen het afgeleide tensorveld.

Een pseudoparallel vectorveld is een vectorveld $\underline{a}(u^h) = a^m(u^h)\underline{c}_m(u^h)$, waarvan de componenten $a^m(u^h)$ voor alle waarden der u^h voldoen aan

$$\partial_h a^m + \{{}_h{}^m{}_i\} a^i = 0 \quad .$$

Uit de theorie der differentiaalvergelijkingen volgt, dat deze lineaire differentiaalvergelijkingen bij gegeven beginvoorwaarden $a^m(u_0^h)$ precies één oplossing hebben.

Voorbeeld. Beschouw de Riemannse ruimte gevormd door een open deel van R_n met kromlijnige coördinatensystemen. Zij $\underline{a}$ een parallel vectorveld, d.w.z. zij aan elk punt van R_n toegevoegd een evenwijdige, even lange, gelijkgerichte vector $\underline{a}$. Terwijl dus $\underline{a}$ constant is ten opzichte van de parameters u^h van een kaart, hangen de componenten a^i van $\underline{a}$ t.o.v. de basis $\underline{c}_i$ van de betreffende raakruimte wel af van u^h, omdat $\underline{c}_i$ afhangt van u^h. Wegens

$$\partial_h \underline{c}_i = \{_h{}^j{}_i\} \underline{c}_j$$

levert differentiatie van het parallele vectorveld $\underline{a}$ naar u^h

$$\underline{0} = \partial_h \underline{a} = \partial_h(a^i \underline{c}_i) = \underline{c}_i \partial_h a^i + a^i \partial_h \underline{c}_i = \underline{c}_j [\partial_h a^j + \{_h{}^j{}_i\} a^i] \quad ,$$

$$0 = \partial_h a^j + \{_h{}^j{}_i\} a^i \quad .$$

Het parallele vectorveld $\underline{a}$ van dit voorbeeld is dus een pseudoparallel vectorveld in bovengenoemde zin.

Van een Riemannse ruimte M beschouwen wij een pseudoparallel vectorveld $\underline{a}$ en een willekeurig vectorveld $\underline{x}$. Het scalaire veld $a^m x_m$ wordt gedifferentieerd naar de parameters u^h:

$$\partial_h(a^m x_m) = x_m \partial_h a^m + a^m \partial_h x_m = -x_m \{_h{}^m{}_i\} a^i + a^i \partial_h x_i =$$

$$= [\partial_h x_i - \{_h{}^m{}_i\} x_m] a^i \quad .$$

Bij overgang op andere parameters, op een andere kaart, gedraagt zich het linkerlid als de covariante componenten van een vectorveld. Daar a^i de contravariante componenten zijn van het vectorveld $\underline{a}$, zijn

$$\nabla_h x_i := \partial_h x_i - \{_h{}^m{}_i\} x_m$$

de covariante componenten van een 2-tensorveld, genaamd het <u>afgeleide veld</u> van het vectorveld $\underline{x}$; zijn componenten $\nabla_h x_i$ heten de <u>covariante afgeleiden</u> der x_i

Op analoge wijze wordt een willekeurig 2-tensorveld φ behandeld. Met behulp van twee pseudoparallele vectorvelden $\underline{a}$ en $\underline{b}$ wordt het scalaire veld $\varphi_{mn} a^m b^n$ gevormd, dat wordt gedifferentieerd naar de parameters u^h:

$$\partial_h(\varphi_{mn} a^m b^n) = a^m b^n \partial_h \varphi_{mn} + b^n \varphi_{mn} \partial_h a^m + a^m \varphi_{mn} \partial_h b^n =$$

$$= a^i b^j \partial_h \varphi_{ij} - b^n \varphi_{mn} \{_h{}^m{}_i\} a^i - a^m \varphi_{mn} \{_h{}^n{}_j\} b^j =$$

$$= a^i b^j [\partial_h \varphi_{ij} - \varphi_{mj} \{_h{}^m{}_i\} - \varphi_{in} \{_h{}^n{}_j\}] \quad .$$

Links staan de covariante componenten van een vectorveld. Daar a^i en b^j de contravariante componenten zijn van de vectorvelden $\underline{a}$ en $\underline{b}$, zijn

$$\nabla_h \varphi_{ij} := \partial_h \varphi_{ij} - \varphi_{mj}\{_h{}^m{}_i\} - \varphi_{im}\{_h{}^m{}_j\}$$

de covariante componenten van een 3-tensorveld, genaamd het <u>afgeleide veld</u> van het 2-tensorveld φ; zijn componenten $\nabla_h \varphi_{ij}$ heten de <u>covariante afgeleiden</u> der φ_{ij}.

Op analoge wijze worden de covariante afgeleiden van de componenten φ_{ijk} van een 3-tensorveld gedefinieerd volgens

$$\nabla_h \varphi_{ijk} := \partial_h \varphi_{ijk} - \varphi_{mjk}\{_h{}^m{}_i\} - \varphi_{imk}\{_h{}^m{}_j\} - \varphi_{ijm}\{_h{}^m{}_k\} \quad ,$$

de covariante componenten van het afgeleide 4-tensorveld.

<u>Lemma van Ricci</u>. De covariante afgeleiden van de componenten van de fundamentaaltensor zijn nul.

<u>Bewijs</u>. Uit de definities van $\nabla_h g_{ij}$ en $\{_h{}^m{}_i\}$ volgt

$$\nabla_h g_{ij} = \partial_h g_{ij} - g_{mj}\{_h{}^m{}_i\} - g_{im}\{_h{}^m{}_j\} =$$

$$= \partial_h g_{ij} - \tfrac{1}{2}(\partial_h g_{ij} + \partial_i g_{jh} - \partial_j g_{hi}) - \tfrac{1}{2}(\partial_h g_{ji} + \partial_j g_{ih} - \partial_i g_{hj}) = 0 \quad .$$

<u>Gevolg</u>. De vectoren van een pseudoparallel vectorveld hebben constante lengte. De vectoren van twee pseudoparallele vectorvelden maken met elkaar een constante hoek.

<u>Bewijs</u>. Zij $\underline{a}$ en $\underline{b}$ pseudoparallele vectorvelden. Dan geldt

$$\partial_h(g_{mn}\, a^m b^n) = a^i b^j \nabla_h g_{ij} = 0 \quad .$$

<u>Gevolg</u>. Voor de covariante componenten van een pseudoparallel vectorveld $\underline{a}$ geldt

$$\partial_h a_i - \{_h{}^m{}_i\} a_m = 0 \quad .$$

<u>Bewijs</u>. Zij $\underline{b}$ een willekeurig ander pseudoparallel veld. Dan is

$$0 = \partial_h(a_m b^m) = b^m \partial_h a_m + a_m \partial_h b^m =$$

$$= b^m \partial_h a_m - a_m\{_h{}^m{}_i\} b^i = b^i [\partial_h a_i - \{_h{}^m{}_i\} a_m] \quad .$$

Met behulp van deze formule kunnen wij analoog aan hierboven afleiden de covariante afgeleiden van contravariante en gemengde componenten van tensoren:

$$\nabla_h x^i := \partial_h x^i + \{_h{}^i{}_m\} x^m \quad ,$$

$$\nabla_h \varphi^{ij} := \partial_h \varphi^{ij} + \left\{{i \atop h\ m}\right\}\varphi^{mj} + \left\{{j \atop h\ m}\right\}\varphi^{im} \quad ,$$

$$\nabla_h \varphi^{i}_{\cdot j} := \partial_h \varphi^{i}_{\cdot j} + \left\{{i \atop h\ m}\right\}\varphi^{m}_{\cdot j} - \left\{{m \atop h\ j}\right\}\varphi^{i}_{\cdot m} \quad ,$$

$$\nabla_h \varphi_i^{\cdot jk} := \partial_h \varphi_i^{\cdot jk} - \left\{{m \atop h\ i}\right\}\varphi_m^{\cdot jk} + \left\{{j \atop h\ m}\right\}\varphi_i^{\cdot mk} + \left\{{k \atop h\ m}\right\}\varphi_i^{\cdot jm} \quad ,$$

en zo voort. Al deze uitdrukkingen zijn weer componenten van tensoren.

Opmerking. De regels van Leibniz voor het differentiëren van som en product zijn geldig voor het covariant differentiëren, bijvoorbeeld

$$\nabla_h v^i w_j = v^i \nabla_h w^j + w_j \nabla_h v^i \quad ,$$

$$\nabla_h \varphi^{ij} \psi_{jk\ell} = \varphi^{ij} \nabla_h \psi_{jk\ell} + \psi_{jk\ell} \nabla_h \varphi^{ij} \quad .$$

De covariante afgeleide langs een kromme $u^h(s)$ van de componenten van een tensorveld φ worden gedefinieerd door

$$\frac{\nabla \varphi_{ij..}^{\ \ \ mn..}}{ds} := \dot{u}^h \nabla_h \varphi_{ij..}^{\ \ \ mn..} \quad .$$

Voorbeeld. De differentiaalvergelijkingen voor geodetische krommen in een Riemannse ruimte kunnen als volgt worden geschreven:

$$\frac{\nabla \dot{u}^k}{ds} = 0 \quad ,$$

immers

$$\ddot{u}^k + \left\{{k \atop i\ j}\right\}\dot{u}^i \dot{u}^j = \dot{u}^h \partial_h \dot{u}^k + \dot{u}^h \left\{{k \atop h\ j}\right\}\dot{u}^j =$$

$$= \dot{u}^h [\partial_h \dot{u}^k + \left\{{k \atop h\ j}\right\}\dot{u}^j] = \dot{u}^h \nabla_h \dot{u}^k = \frac{\nabla \dot{u}^k}{ds} \quad .$$

Voorbeeld. De vergelijkingen van Lagrange voor een mechanisch systeem met n vrijheidsgraden kunnen als volgt worden geschreven:

$$\frac{\nabla \dot{q}^h}{dt} = K^h \quad .$$

De beweging van het systeem is dus te interpreteren als de beweging van punt met massa $m = 1$ in de Riemannse ruimte der configuraties.

§ 6 De kromtetensor

In tegenstelling tot de gewone tweede afgeleide is de tweede covariante afgeleide niet symmetrisch.

$$\begin{aligned}\nabla_h \nabla_i v^k &= \partial_h(\nabla_i v^k) - \{{}_h{}^m{}_i\} \nabla_m v^k + \{{}_h{}^k{}_m\} \nabla_i v^m = \\ &= \partial_h \partial_i v^k + v^j \partial_h \{{}_i{}^k{}_j\} + \{{}_i{}^k{}_j\} \partial_h v^j - \{{}_h{}^m{}_i\} \nabla_m v^k + \\ &+ \{{}_h{}^k{}_m\} \partial_i v^m + \{{}_h{}^k{}_m\}\{{}_i{}^m{}_j\} v^j \ .\end{aligned}$$

Verwissel h en i en trek af, dan vallen vier termen weg en er blijft

$$\begin{aligned}&\nabla_h \nabla_i v^k - \nabla_i \nabla_h v^k = \\ &= [\partial_h\{{}_i{}^k{}_j\} - \partial_i\{{}_h{}^k{}_j\} + \{{}_h{}^k{}_m\}\{{}_i{}^m{}_j\} - \{{}_i{}^k{}_m\}\{{}_h{}^m{}_j\}]v^j \ .\end{aligned}$$

Het linkerlid, het verschil van twee 3-tensoren, is een 3-tensor. Daar v^j componenten van een vector zijn, vormt de uitdrukking tussen de haken de componenten van een 4-tensor, genaamd de <u>kromtetensor van Riemann-Christoffel</u>:

$$K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot k} := \partial_h\{{}_i{}^k{}_j\} - \partial_i\{{}_h{}^k{}_j\} + \{{}_h{}^k{}_m\}\{{}_i{}^m{}_j\} - \{{}_i{}^k{}_m\}\{{}_h{}^m{}_j\} \ .$$

Van de hierna volgende formules zijn de tweede en derde op analoge wijze af te leiden.

$$\begin{aligned}(\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h)v^k &= K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot k} v^j \ , \\ (\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h)w_j &= - K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot k} w_k \ , \\ (\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h)\varphi_j^{\cdot k} &= K_{him}^{\cdot\cdot\cdot k} \varphi_j^{\cdot m} - K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot m} \varphi_m^{\cdot k} \ ,\end{aligned}$$

en zo voort.

<u>Voorbeeld</u>. Beschouw de Riemannse ruimte gevormd door een open deel van R_n met kromlijnige coördinatensystemen. Voor de speciale kaart der gewone rechthoekige coördinaten x^h van R_n zijn de Christoffelsymbolen, en dus de componenten van de kromtetensor, nul. Omdat $K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot k}$ de componenten van een tensor zijn, volgt hieruit dat ook voor een willekeurig kromlijnig coördinatensysteem $u^h(x_j)$ de componenten van de kromtetensor nul zijn. Dit zijn de compatibiliteitsvergelijkingen uit de elasticiteitstheorie.

Voorbeeld. Beschouw de Riemannse ruimte gevormd door een oppervlak in R_3. Van de covariante componenten van de kromtetensor

$$K_{hijk} = g_{km} K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot m} \quad , \quad h,i,j,k,m = 1,2 \ ,$$

is, vanwege symmetrieëigenschappen, slechts van belang

$$K_{1212} = - K_{2112} = K_{2121} = - K_{1221} \quad .$$

Deze grootheid is de Gausz-kromming van het oppervlak en hangt slechts af van de parameters en van de eerste fundamentaaltensor van het oppervlak. Daarom is de Gauszkromming invariant bij isometrische verbuiging van het oppervlak. De Gauszkromming is nul wanneer het oppervlak isometrisch is met een vlak.

Opmerking. Uit de kromtetensor van Riemann-Christoffel kan door contractie worden afgeleid de 2-tensor

$$K_{hi} = K_{hij}^{\cdot\cdot\cdot j}$$

en hieruit de scalar

$$K = K_{hi}\, g^{hi} \quad .$$

De volgende 2-tensor G_{hi}, die de ernaast vermelde eigenschappen bezit, en die slechts afhangt van de fundamentaaltensor, speelt een belangrijke rol in de algemene relativiteitstheorie:

$$G_{hi} = K_{hi} - \tfrac{1}{2} K g_{hi} \ , \quad G_{hi} = G_{ih} \ , \quad \nabla_i G^{hi} = 0 \quad .$$

§ 7 Het generaliseren van formules

In de tensorrekening worden fysische grootheden beschreven door tensorvelden. Met behulp van de bewerkingen op tensoren, zoals de optelling, de vermenigvuldiging, de contractie, de covariante differentiatie, kunnen nieuwe tensorvelden worden gevormd. Fysische wetten worden uitgedrukt door de gelijkheid van twee tensorvelden, dus door te stellen dat in elk punt van het beschouwde gebied twee tensoren dezelfde zijn. Uit de gelijkheid van twee tensoren in een punt P volgt de gelijkheid van de componenten van de tensoren ten opzichte van de bij een kaart behorende basis van de raakruimte van P, en zulks voor elke P beschrijvende kaart. Wanneer men nu weet dat voor één kaart de componenten van twee tensoren in P gelijk zijn, dan kan men concluderen dat die tensoren, en ook hun componenten voor elke andere kaart, eveneens gelijk zijn in P. Zo kan men uit de componentvorm t.o.v. een orthonormaal coördinatensysteem in R_n van een fysische wet op eenvoudige wijze afleiden de componentvorm t.o.v. een willekeurig kromlijnig coördinatensysteem in R_n van die wet.

Voorbeeld. De wet van Newton, $\underline{k} = m\underline{a}$, drukt uit dat in R_3 voor een bewegend deeltje met massa m geldt, dat in elk punt van zijn baan het vectorveld der uitwendige kracht evenredig is met de afgeleide naar de tijd van het snelheidsveld. Voor kromlijnige coördinatensystemen moet deze wet dus worden geformuleerd met de covariante afgeleide naar t:

$$k^h = m\frac{\nabla v^h}{dt} = m\left[\frac{dv^h}{dt} + \left\{ {}_i{}^h{}_j \right\} v^i v^j\right] .$$

Voorbeeld. De vergelijkingen der hydromechanica voor kromlijnige coördinatensystemen worden verkregen door generalisatie van de continuïteitsvergelijking en der vergelijkingen van Euler:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0 , \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0 ,$$

$$\rho a^h = k^h - \partial_i t^{hi} , \quad \rho\,\frac{\nabla v^h}{dt} = k^h - \nabla_i t^{hi} ,$$

waaruit weer volgt

$$\frac{\nabla(\rho v^h)}{\partial t} + \nabla_i(\rho\, v^h v^i + t^{hi}) = k^h .$$

In 4-dimensionale vorm, bij afwezigheid van uitwendige krachten, worden de vergelijkingen samengevat tot

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 .$$

Voorbeeld. De vergelijkingen van Maxwell, geschreven in 4-dimensionale vorm, kunnen worden gegeneraliseerd t.o.v. willekeurige bases $\underline{c}_\alpha$ in de Minkowskiruimte tot

$$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = J^\alpha , \quad \nabla_\beta (F*)^{\alpha\beta} = 0 .$$

Wij gaan na hoe de bij orthonormale coördinatensystemen bekende differentiaaloperaties grad, rot, div, Δ, moeten worden verstaan bij het gebruik van kromlijnige coördinatensystemen $u^i(x^h)$.

De gradiënt levert nauwelijks moeilijkheden. Zij $f(u^i)$ een scalair veld. Het afgeleide veld, grad f, is een 1-tensorveld met covariante componenten

$$\nabla_i f = \partial_i f \quad .$$

Voor de contravariante componenten en voor de lengte geldt

$$(\text{grad } f)^h = g^{hi}\,\partial_i f \quad , \quad |\text{grad } f| = g^{hi}\,\partial_h f\,\partial_i f \quad .$$

De rotatie verandert evenmin. Voor een 1-tensorveld φ geldt bij orthonormale coördinaten

$$(\text{rot } \varphi)_{ij} = \partial_j \varphi_i - \partial_i \varphi_j \quad ,$$

de componenten van een scheve 2-tensor in R_3. Voor kromlijnige coördinatensystemen kunnen dezelfde formules worden gebruikt, omdat het rechterlid niet verandert wanneer covariant wordt gedifferentieerd:

$$\nabla_j \varphi_i - \nabla_i \varphi_j = \partial_j \varphi_i - \left\{ {}_j{}^m{}_i \right\} \varphi_m - \partial_i \varphi_j + \left\{ {}_i{}^m{}_j \right\} \varphi_m = \partial_j \varphi_i - \partial_i \varphi_j \quad .$$

De divergentie behoeft een aangepaste definitie. Zij $\underline{v}(u^h)$ een vectorveld. De voor een orthonormaal coördinatensysteem geldende definitie $\text{div } \underline{v} = \partial_i v^i$ komt erop neer, dat uit het vectorveld $\underline{v}$ een scalair veld div $\underline{v}$ wordt verkregen door toepassing van twee bewerkingen: het vormen van het afgeleide tensorveld en vervolgens het contraheren. Bij gebruik van kromlijnige coördinatensystemen komt dit neer op

$$\text{div } \underline{v} = \nabla_i v^i = \partial_i v^i + \left\{ {}_i{}^i{}_h \right\} v^h \quad .$$

Voorbeeld. Bij gebruik van kromlijnige coördinatensystemen geldt voor de bronsterkte q van een stroomveld met snelheid v^i

$$q = \text{div } \underline{v} = \partial_i v^i + \left\{ {}_i{}^i{}_h \right\} v^h \quad .$$

De Laplaceoperator Δ bestaat uit het achtereenvolgens toepassen van de bewerkingen grad en div op een scalair veld. Voor kromlijnige coördinatensystemen komt dit neer op

$$\Delta f = g^{hi}\,\nabla_h \nabla_i f \quad ,$$

daar $\quad \Delta f = \text{div grad } f = \text{div}[g^{hi}\,\partial_i f] = \nabla_h g^{hi}\,\partial_i f = g^{hi}\,\nabla_h \partial_i f \quad .$

<u>Opmerking</u>. Handige formules voor het gebruik van kromlijnige coördinatensystemen zijn:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial_h[v^h \sqrt{\det[g_{mn}]}\,]}{\sqrt{\det[g_{mn}]}} \quad , \quad \Delta f = \frac{\partial_h[g^{hi}\,\partial_i f \sqrt{\det[g_{mn}]}\,]}{\sqrt{\det[g_{mn}]}} \quad ,$$

$$\int \operatorname{div} \underline{v}\, dV = \int \partial_h[v^h \sqrt{\det[g_{mn}]}\,]du^1 \ldots du^n \quad .$$

§ 8 <u>Algemene relativiteitstheorie</u>

Gravitatie is het verschijnsel dat massa's in de ruimte elkaars beweging beïnvloeden. In de algemene relativiteitstheorie wordt van dit verschijnsel een model gemaakt met behulp van de Riemannse meetkunde, ruwweg volgens het volgende schema

$$\begin{tikzcd}
\text{massa} \arrow[r, leftrightarrow, "1"] \arrow[d] & \text{invloed} \arrow[r, leftrightarrow, "3"] \arrow[d] & \text{beweging} \arrow[d] & , \\
\text{massastroom} \arrow[r, leftrightarrow, "2"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{gravitatiepotentiaal} \arrow[r, leftrightarrow, "4"] \arrow[d, leftrightarrow, "5"', "7"] & \text{baan} \arrow[d, leftrightarrow, "6"'] & , \\
\text{impulsenergietensor} \arrow[r, leftrightarrow, "9"] & \text{fundamentaaltensor} \arrow[r, leftrightarrow, "8"] & \text{geodeten} & .
\end{tikzcd}$$

1. Volgens de aantrekkingswet van Newton veroorzaakt een massapunt M een gravitatiepotentiaalveld φ met

$$\varphi = f\,\frac{M}{r} \quad .$$

2. Voor een continue massaverdeling met dichtheid ρ kan het gravitatiepotentiaalveld φ onder passende randvoorwaarden worden opgelost uit de vergelijking van Poisson

$$\Delta\varphi = -\,4\pi f\rho \quad .$$

3. De kracht, die in het veld φ wordt uitgeoefend door een massapunt met zware massa m_{zw} is

$$K = m_{zw} \operatorname{grad} \varphi \quad .$$

Anderzijds geldt voor de trage massa m_{tr} op grond van de bewegingswet van Newton

$$K = m_{tr}\, a \quad .$$

Uit de wet van gelijkheid van zware en trage massa

$$m_{zw} = m_{tr}$$

volgt dat voor het verband van de versnelling a en de potentiaal φ geldt

$$a = \text{grad } \varphi \quad .$$

4. Deze betrekking kan ook worden verkregen uit het volgende, voor de som van de kinetische en de potentiële energie geldende, variatieprincipe

$$\delta \int (\tfrac{1}{2}v^2 + \varphi)dt = 0 \quad .$$

5. Een gravitatieveld kan worden geïmiteerd door een versnellingsveld: in een vrij vallende lift is van gravitatie niets te merken. Deze uitspraak heeft echter slechts locale betekenis, in tegenstelling tot de wet van gelijkheid van zware en trage massa, waarvan hij een gevolg is. Immers, de uitspraak geldt slechts voor een homogeen krachtveld. Weliswaar vallen alle lichamen in vacuum met dezelfde versnelling, maar de zwaartekracht is centraal gericht en neemt af met de hoogte. Eigenlijk wordt alleen in het zwaartepunt van een vallende lift het zwaartekrachtveld weggetransformeerd.

6. Sterren, die wij zien in de buurt van de zon, lijken van snelheid te veranderen. Dit kan slechts worden verklaard door aan te nemen dat langs de zon de lichtstralen worden afgebogen en niet volgens een rechte lijn verlopen. Beschouw het volgende beeld. Plaats onder een rechtlijnig gestreept tafelkleed een steen op de vlakke tafel. De strepen op het kleed zijn niet meer recht, doch gebogen, in de buurt van de steen. Een massapunt, dat zich vrij langs een streep beweegt, verlaat de rechte baan en volgt de door de oppervlaktekromming van het tafelkleed gebogen streep.

De Minkowskiruimte voldoet niet ter beschrijving van de gravitatie. Een van elke massa ver verwijderde massaeenheid volgt een rechte baan volgens de wet der traagheid. Wanneer de massaeenheid echter in de buurt van een andere massa komt, dan wijkt de baan af van de rechte. Deze baan kan niet worden beschreven door de fundamentaaltensor van de Minkowskiruimte, die immers voor elk punt dezelfde is.

Omdat blijkbaar gravitatie enerzijds samenhangt met de structuur van de ruimte en anderzijds met de verdeling van de massa's, zoeken wij een beeld waarin enerzijds de locale wet a = grad φ wordt beschreven en anderzijds de structuur van de ruimte als geheel met de verdeling van de massa's wordt gekoppeld ter beschrijving van de vergelijking van Poisson.

Hypothese A. Ga uit van een Riemannse ruimte van dimensie 4, waarvan de raakruimten de structuur van de Minkowskiruimten hebben.

7. Teneinde het verband te vinden tussen de fundamentaaltensor g_{ij} en het gravitatiepotentiaalveld φ, laten wij ons leiden door het in 4 genoemde variatieprincipe

$$\delta\int(\tfrac{1}{2}v^2+\varphi)dt = 0 \quad , \quad \delta\int[c-\tfrac{1}{c}(\tfrac{1}{2}v^2+\varphi)]dt = 0 \quad .$$

De integrand is, voor $\frac{1}{2}v^2+\varphi \ll c^2$, de eerste benadering van

$$\sqrt{c^2-2\varphi-v^2}\;dt = \sqrt{(c^2-2\varphi)dt^2-dx^2-dy^2-dz^2} \quad .$$

Daarom gebruiken wij als lijnelement voor de Riemannse ruimte

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = dx^2+dy^2+dz^2-\left(1-\frac{2\varphi}{c^2}\right)d(ct)^2 \quad ,$$

waardoor de metriek van de Minkowski raakruimten is vastgelegd.

8. De geodeten van de Riemannse ruimte bepalen de baan van een massapunt onder invloed van een gravitatiepotentiaalveld φ. De bewegingsvergelijking a = grad φ ziet er dan als volgt uit

$$\frac{\nabla \dot{x}^h}{ds} = 0 \quad ,$$

met de g_{ij} als in 7. De lichtstralen hebben tot baan de geodeten die in elk van zijn punten raakt aan de lichtkegel van de raakruimte.

9. Tenslotte zoeken wij het, de vergelijking van Poisson generaliserende, verband tussen de massaverdeling ρ en de gravitatiepotentiaal φ, die verwerkt is in de fundamentaaltensor g_{ij}. Dit zal zijn een verband tussen tensoren. De massaverdeling wordt opgevat als een massastroom, gekarakteriseerd door de symmetrische impulsenergietensor

$$T^{ij} \quad , \quad \text{met} \quad \nabla_i T^{ij} = 0 \quad ,$$

de grondvergelijkingen van de hydromechanica. Voor de tensor, die de meetkundige eigenschappen van de Riemannse ruimte karakteriseert, wordt genomen de in § 6 genoemde, met de kromtetensor van Riemann-Christoffel samenhangende, symmetrische tensor

$$G^{ij} \quad , \quad \text{met} \quad \nabla_i G^{ij} = 0 \quad .$$

<u>Hypothese B</u>. De tensoren T^{ij} en G^{ij} zijn evenredig.

Men kan aantonen, dat de (4,4) component van deze tensorvergelijking juist de vergelijking van Poisson oplevert.

Hiermee is een schets van de algemene relativiteitstheorie voltooid. Indien met electromagnetische invloeden rekening moet worden gehouden, dient T^{ij} te worden vermeerderd met een de electromagnetische impulsenergie beschrijvende 2-tensor. Deze hangt samen met de electromagnetische veldtensor.

APPENDIX

Uit "De Gids" no. 10, december 1962.

Martin J. Klein

Ehrenfest komt naar Leiden / Na vijftig jaar

Een halve eeuw geleden, op 4 december 1912, hield Paul Ehrenfest de inaugurale rede waarmee hij zijn ambt als professor in de theoretische natuurkunde aan de Universiteit van Leiden officieel aanvaardde. De vijftigste verjaardag van die gebeurtenis is alleszins het herdenken waard. De naam Ehrenfest, die nooit algemene bekendheid in de wereld heeft gekregen, is zelfs bij de jongere generatie van natuurkundigen niet in zo ruime mate bekend als hij zou moeten zijn. Hoewel geen grote theorie zijn naam draagt, stond hij een kwart eeuw lang, om Paul Langevin te citeren, "midden in het drama van de eigentijdse fysica". In de moeilijke, opwindende jaren toen de moderne opvattingen over de quantumtheorie en de bouw van het atoom werden uitgewerkt, was geen man dieper bij deze worsteling betrokken dan Ehrenfest. Zijn pogingen om in de vloedgolf van nieuwe ontwikkelingen helderheid en begrijpelijkheid te handhaven deden hem de onofficiële benaming "het geweten der fysica" verdienen.

De verjaardag van zijn professoraat is de meest passende gelegenheid om Ehrenfest te herdenken, want onderwijzen was zijn ware roeping: "De grote vreugde om aan anderen door te geven wat ik zelf meende te begrijpen vormde de eigenlijke ruggegraat van mijn leven." Zijn onovertroffen colleges, waarin louter de essentie van een onderwerp werd belicht en onvergetelijk duidelijk gemaakt, vormden slechts een deel van zijn onderwijs. Hij had een groot talent voor de Socratische dialoog en beoefende deze overal met zijn studenten en collega's, de waarheid door zijn aanhoudende kritische vragen dwingend te voorschijn te komen. Zijn studenten verlieten hem vol zelfvertrouwen, gereed om onafhankelijk te werken. Zijn enorme enthousiasme voor zijn wetenschap en zijn vermogen om het opwindende ervan aan anderen mede te delen, verlevendigde de atmosfeer in Leiden en maakte dit in zijn tijd tot een van de belangrijkste centra voor theoretische natuurkunde ter wereld. Waar Ehrenfest ging - en hij reisde veel om lezingen te houden en conferenties in alle delen van Europa en de Verenigde Staten bij te wonen - , de directheid en openheid van zijn optreden, waarbij hij niets van zijn levendige, warme, complexe persoonlijkheid achterhield, bracht hem in nauw contact met allerlei soorten mensen. Zijn persoonlijke invloed reikte van zijn grote kring vrienden en correspondenten tot jonge studenten die hem misschien slechts één keer college hadden horen geven, en deze persoonlijke invloed wordt ook nu nog, negenentwintig jaar na zijn dood, sterk gevoeld door hen die hem gekend hebben - en door nog vele anderen met wie dit niet het geval is.

De leerstoel voor de theoretische natuurkunde in Leiden was in 1878 voor H.A. Lorentz, Nederlands grootste natuurkundige sinds Christiaan Huygens, ingesteld. Bij de eeuwwisseling werd Lorentz erkend als een leidende geest onder de theoretische natuurkundigen van de wereld, een briljante, serene, klassieke denker. In 1911, hoewel hij toen slechts achtenvijftig jaar oud was en nog op het toppunt van zijn krachten, gaf Lorentz zijn leerstoel in Leiden op om curator te worden van Teyler's Instituut in Haarlem. Deze nieuwe positie kwam neer op een professoraat voor wetenschappelijk onderzoek met weinig officiële plichten, dat Lorentz de vrijheid gaf zich aan zijn eigen studies te wijden en aan zijn steeds groter wordende verantwoordelijkheden als internationale figuur, die voortdurend werd uitgenodigd voor congressen en lezingen, te kunnen voldoen. De taak om een opvolger voor hem in Leiden te kiezen was een ernstige zaak en Lorentz kon de ernst ervan beter dan wie ook naar waarde schatten.

De natuurkunde was in gisting als nooit tevoren. Sinds de jaren 1890 was het imposante bouwsel van de negentiende-eeuwse natuurkunde minder en minder toereikend gebleken. Een stroom van nieuwe experimentele ontdekkingen (röntgenstralen, het elektron, radioactiviteit, het foto-elektrische effect) waren op grondslag van de gevestigde theorie blijkbaar onverklaarbaar. Albert Einsteins "speciale relativiteitstheorie" betekende een nieuwe benadering van fundamentele problemen ten aanzien van ruimte en tijd. De meest radicale van alle was Max Plancks suggestie in 1900 dat energie, die altijd als een voortdurend wisselende, oneindig deelbare kwantiteit was beschouwd, slechts in onderbroken eenheden op quanta kon worden geabsorbeerd of uitgestraald. Planck had deze vreemde conceptie nodig gehad om de waargenomen eigenschappen van de warmtestraling die van ieder heet voorwerp, zoals een gloeiende oven, uitgaat, te verklaren. In de jaren 1905 tot 1911 had Einstein Plancks werk uitgebreid en verdiept en met succes de nieuwe opvatting, om straling als een verzameling discontinue hoeveelheden energie te beschouwen, op een aantal andere problemen toegepast. De kracht en tegelijkertijd het diep paradoxale karakter van energiequanta stonden in het middelpunt van de belang-

stelling tijdens een week van intensieve beraadslagingen, onder voorzitterschap van Lorentz, op het eerste Solvay-congres, dat in oktober 1911 in Brussel werd gehouden.
Het was duidelijk dat Lorentz' opvolger een man zou moeten zijn voor het tijdvak van revolutionaire veranderingen dat juist begonnen was, een man die op de nieuwe denkbeelden kon reageren en zich deze eigen maken, en helpen de zich ontwikkelende nieuwe natuurkunde een vorm te geven die datgene wat nog deugdelijk was in de oude behield en gebruikte. Bovenal zou hij een man moeten zijn die de volgende generatie van Nederlandse natuurkundigen voor de wereld van denkbeelden waarin zij zouden moeten leven en werken, kon voorbereiden. Lorentz' meest voor de hand liggende keuze zou Einstein zijn geweest die op tweeëndertig-jarige leeftijd al duidelijk de diepzinnigste en oorspronkelijkste geest was die de natuurkunde in vele generaties had voortgebracht. Einstein was echter niet beschikbaar omdat hij juist een professoraat aan de Zwitserse Technische Hogeschool (E.T.H.) te Zürich had aanvaard. Zo er van Einstein geen sprake kon zijn, op wie moest de keus dan wel vallen? Lorentz besloot inlichtingen omtrent Paul Ehrenfest in te winnen. Twee belangrijke publicaties van Ehrenfest in de laatste maanden van 1911 hadden de aandacht van de Nederlandse geleerden getrokken. In de ene, over de essentiële trekken van de quantumtheorie, had Ehrenfest de bases voor de noodzaak van de hypothese van energiequanta naar voren gebracht en het verband met de tweede hoofdwet van de thermodynamica op een oorspronkelijke en indringende wijze onderzocht. Deze verhandeling, die vlak voor het Solvay-congres was verschenen, beantwoordde in feite verscheidene vragen die tijdens de gesprekken op dat congres waren geformuleerd. De tweede, nog belangrijkere publicatie, was een verhandeling van negentig bladzijden over de conceptuele grondslagen van de statistische mechanica die Ehrenfest samen met zijn vrouw Tatiana voor de Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften had geschreven. Deze monografie vond onmiddellijk erkenning als een meesterlijke uiteenzetting en kritische ontwarring van de gecompliceerde gedachtengang in het werk van Ludwig Boltzmann en Willard Gibbs. Lorentz, die zelf lang en diep over deze vraagstukken had nagedacht, vond in deze monografie goede redenen om aan te nemen dat Ehrenfest de man was die hij zocht, de man die "in de fysica de puntjes op de i kon zetten".

In het voorjaar van 1912 toen hij Lorentz' informerende brief ontving en spoedig daarna het aanbod om als zijn opvolger een van de voornaamste leerstoelen in de theoretische natuurkunde in Europa te bezetten, woonde

Ehrenfest zonder geregelde betrekking in Sint-Petersburg. Hij was op 18 januari 1880 als jongste van vijf zonen van een Joodse kruidenier in Favoriten, een arbeiderswijk van de stad Wenen, geboren. De onderzoekende, nieuwsgierige geest van de jonge Paul werd door zijn oudere broers gestimuleerd en aangemoedigd, met name door Arthur, die voor ingenieur studeerde, en Hugo, met wie hij zich het nauwst verbonden voelde, die later arts werd. Zijn levendige belangstelling voor wiskundige problemen en voor de wereld van de wetenschap, en zijn geboeidheid door mechanische instrumenten die hij met hun hulp reeds vroeg ontwikkelde, hielp hem zijn teleurstellende schooljaren te boven komen. (Wenens antisemitisme in die jaren liet een blijvend litteken achter; het was een stad waarin hij zich nooit thuis zou voelen.) In 1899 deed Ehrenfest zijn intrede aan de Universiteit van Wenen waar hij onder Boltzmann, de voornaamste bouwmeester van de statistische mechanica en de toenmalige apostel van de atoomtheorie, studeerde. Ehrenfest onderbrak zijn studie in Wenen voor een verblijf van anderhalf jaar in Göttingen, waar hij Felix Kleins artistieke lezingen over wiskunde en de wiskundige denkbeelden van Hilbert in zich opnam. Het was ook op een van Kleins colleges dat Ehrenfest Tatiana Afanassjewa, een jonge Russische studente in de wiskunde, met wie hij in 1904 in Wenen trouwde, leerde kennen. Ehrenfest ondernam nog een studie-excursie in het voorjaar van 1903 en wel naar Leiden om de colleges van Lorentz bij te wonen. Hij keerde naar Wenen terug en promoveerde in 1904 onder Boltzmann.

(Wanneer wij vragen naar de herkomst van Ehrenfests karakteristieke wijze van handelen, zijn geschriften en zijn onderricht in de natuurkunde, kunnen wij vele van de eigenschappen tot zijn leermeesters herleiden. Zijn talent om eenvoudige modellen in te voeren die de essentiële kenmerken van de een of andere gecompliceerde theorie bevatten, was ongetwijfeld door zijn studie bij Boltzmann ontwikkeld. Ehrenfest schreef zelf over Boltzmanns toepassing van hetzelfde middel: "In die grote werken wier resultaten altijd een enorm terrein omvatten, krijgt het eenvoudige voorbeeld ook een uitvoerige, liefdevolle behandeling. Deze wezenstrek maakt Boltzmanns omstandige argumenten ongemeen levendig: de manier waarop hij door middel van het voorbeeld illustreert, dat altijd alle karakteristieke trekken van het grote probleem vertoont, gecombineerd met de werkzaamheden die deze immense verbeelding moest verrichten alvorens zij tot de veelomvattende resultaten doordrong." Van Klein leerde Ehrenfest aan te dringen op geometrisch inzicht in gecompliceerde formules, opdat men de resultaten "op zijn vingers" kon begrijpen. En zijn oudere broers, Arthur en Hugo, komt zeer zeker een gedeelte van de

toe voor Ehrenfests vermogen om ingewikkelde denkbeelden in krachtige en puntige alledaagse woorden te vertalen.)
In 1907, na verscheidene jaren post-doctorale arbeid in Wenen en Göttingen te hebben verricht, verhuisden de Ehrenfests naar wat toen Sint-Petersburg heette, in de hoop zich blijvend in Rusland te kunnen vestigen. Maar ondanks Ehrenfests liefde voor dit land, en vooral voor het volk, en ondanks het gevoel, dat Rusland "zonder twijfel een tehuis in de meest ernstige zin van het woord had kunnen worden", bleek dit onmogelijk. Als jood, en vooral als een die sinds zijn huwelijk geen vaste religieuze binding had, werd het hem duidelijk dat geen officiële academische positie voor hem openstond. Deze Russische jaren waren voor Ehrenfest echter jaren van zeer grote activiteit. Hij werd een leidende figuur onder de jonge Russische natuurkundigen en de woning van Ehrenfest in Sint-Petersburg werd een plaats voor geregelde bijeenkomsten van een informeel natuurkunde-colloquium dat hij stichtte. Hoewel hij er geen positie bekleedde blies hij het wiskunde-colloquium van de studenten aan de Universiteit nieuw leven in. Het enige officiële onderwijs dat hij gaf was een college in 1910 aan het Polytechnische Instituut van Sint-Petersburg waarvoor hij, dankzij het zeldzame geluk van een begrotingsoverschot, werd uitgenodigd. Hij hield lezingen over de partiële differentiaalvergelijkingen van de mathematische fysica en verlevendigde dit doorgaans dorre onderwerp door het sterke element van persoonlijk contact dat hij erin bracht.
Deze Russische jaren waren bovenal gevuld met hevige discussies, die zich uitstrekten van natuurkundige en wiskundige problemen tot alle andere, zeer uiteenlopende vormen van belangstelling bij Paul en Tatiana Ehrenfest en hun jeugdige vriendenkring. Gesprekken bij de thee in een overvolle kamer tot laat in de nacht en dan naar buiten met één of twee vrienden door de eindeloze winterse straten van Petersburg in de snerpende kou, tot aan de ogen ingepakt. Het was deze intensiteit en vrijheid van discussie, deze Russische openheid in het gesprek, die de Ehrenfests het meest zouden missen toen zij Rusland verlieten voor het meer ingetogen Nederland.
In 1911 had Ehrenfest besloten te pogen een academische benoeming in West-Europa te krijgen, gedeeltelijk om financiële redenen, maar ook omdat voor hem de beoefening van de natuurkunde en het overdragen van zijn denkbeelden op anderen in gesprekken en colleges volstrekt onscheidbaar waren. Dienovereenkomstig maakte hij in de winter van 1911 op 1912 een grote tournee langs de voornaamste universiteiten van Duitsland, Zwitserland en het Oostenrijks-Hongaarse keizerrijk om de mogelijkheden te onderzoeken. De resultaten waren

pijnlijk teleurstellend; dezelfde redenen die hem op Russische universiteiten van een betrekking uitsloten, waren elders evenzeer van gelding. Hoogstens waren er slechts zeer kleine mogelijkheden in Praag en Zürich. De tournee had echter zijn lichtzijden: bezoeken aan Planck in Berlijn, aan zijn oude schoolvriend en medestudent, de wiskundige Gustav Herglotz in Leipzig en zijn medeleerling in de statistische mechnica, Maryan von Smoluchowski in Lemberg, het tegenwoordige Lwow. In het Natuurkundig instituut in Wenen maakte hij kennis met Erwin Schrödinger, toen een jeugdig student, en sleepte hem meteen mee naar het dichtsbijzijnde koffiehuis om hem de nieuwe theorie over het magnetisme van Langevin en Pierre Weiss uiteen te zetten; dit was voor Schrödinger een gedenkwaardig gesprek omdat het zijn speurwerk in een nieuwe baan leidde.

Voor Ehrenfest kwam het hoogtepunt van zijn rondreis in Praag waar hij Einstein voor het eerst van zijn leven ontmoette. Binnen de paar minuten nadat Einstein hem van het station had afgehaald, zaten zij in een koffiehuis over statistische mechanica te praten. Om half twee de volgende morgen zaten ze nog op in Einsteins huis, thee te drinken en te praten, disputeerden aan het ontbijt over Plancks quantumtheorie, speelden samen sonates voor viool en piano en werden vrienden voor het leven. "Ja, wij zullen vrienden zijn - was enorm gelukkig", schreef Ehrenfest in zijn zakboekje en voor Einstein was het "alsof onze dromen en aspiraties voor elkaar bestemd waren".

Toen Lorentz' brief Ehrenfest in april 1912 bereikte, was hij al vrijwel besloten om met zijn gezin naar Zürich te verhuizen. Einstein ging naar Zürich als professor aan de Technische Hogeschool, zijn leerstoel in Praag eraan gevend, en er was een kans dat hij daar voor Ehrenfest een aanstelling als docent kon verkrijgen. Niets was zeker, maar de gelegenheid om in Einsteins buurt te vertoeven scheen de onderneming de moeite waard te maken. Met het aanbod van Lorentz veranderde alles; een geheel nieuwe wereld ging voor Ehrenfest open met het Leidse professoraat als middelpunt.

Wanneer wij Ehrenfests inaugurale rede thans, vijftig jaar nadat zij werd uitgesproken, lezen voelen wij nog iets van de opwinding die deze in zijn gehoor van toen wakker riep. De gedrukte woorden kunnen de buiging van de stem, de wisselende gelaatsuitdrukkingen, de levendigheid van de spreker niet opnieuw oproepen, maar de eigenlijke opwinding ligt in het drama van de denkbeelden. En het is juist dit drama, zo boeiend voor de wetenschapsman maar zo moeilijk over te dragen op een algemeen publiek, dat Ehrenfest op onnavolgbare wijze tot uitdrukking wist te brengen.

"Sta mij toe over een crisis te spreken", zo begon hij, "een crisis die op het ogenblik een fundamentele natuurkundige hypothese bedreigt - de ether-hypothese. Het komt mij voor dat deze crisis een levendig beeld geeft van de typisch revolutionaire stemming die de theoretische natuurkunde op het ogenblik beheerst." Hiermee was meteen een toon van directheid en dringendheid aangeslagen. Ehrenfest had besloten over de ontwikkelingen te spreken die leidden tot Einsteins relativiteitstheorie, die in 1905 was gepubliceerd en over de gangbare discussies over de noodzaak van een andere ether-hypothese waaraan hij had deelgenomen.
De ether, aanvankelijk voorgesteld als het onzichtbare, ontastbare medium waardoor de lichtgolven zich voortplanten, was problematisch geworden door het klassieke experiment dat in 1887 in Cleveland door A.A. Michelson en E.W. Morley was ondernomen. Om dit subtiele, fijnzinnige experiment voor zijn toehoorders tot leven te wekken nam Ehrenfest zijn toevlucht tot wat hij zelf een "groteske overdrijving" noemde, bedoeld om de voornaamste trekken van de situatie zo helder mogelijk te belichten.
"Veronderstel dat wij een enorme bol voor ons hebben. Veel groter dan de aarde, veel groter dan de baan van de aarde. Zo groot dat een lichtstraal er twee uur voor nodig heeft om van de ene naar de andere kant te reizen. Een proefnemer zit precies in het midden van de bol. De bol staat in rust voor ons. Laat de proefnemer nu het volgende experiment uitvoeren: hij laat een zeer heldere lamp een ogenblik oplichten en wacht dan op wat hij vervolgens zal zien. Eerst ziet hij de lamp een ogenblik. Dan twee uur duisternis. Want het licht heeft er een uur voor nodig om van het midden naar de binnenste wand van de bol te reizen en nogmaals een uur om naar de proefnemer terug te keren na door deze wand te zijn weerkaatst. En juist op dat ogenblik ziet de proefnemer de gehele binnenste wand van de bol tegelijkertijd een ogenblik oplichten. Daarna wederom duisternis. Veronderstel nu dat wij een tweede bol hebben, precies zoals de eerste. Deze tweede bol bevindt zich echter niet in rust voor ons, maar beweegt daarentegen met een enorme snelheid, bijvoorbeeld een tiende van de snelheid van het licht. De proefnemer beweegt zich met de bol mee. Laat deze tweede proefnemer nu, net als de eerste, een heldere lamp een ogenblik doen oplichten en weer wachten op wat hij vervolgens zal zien. Onze vraag luidt: ziet de proefnemer in de bewegende bol ook de gehele binnenoppervlakte van de bol op een en hetzelfde ogenblik, of ziet hij iets anders?"

Na dit opmerkelijke beeld van de proefnemer die zijn lamp doet oplichten in de enorme donkere bol die door de ruimte raast te hebben gebruikt, kon Ehrenfest overgaan tot de antwoorden die op deze vraag mogelijk waren. Met een reeks weloverwogen streken, met dezelfde korte zinnen, werkende als een karikaturist, die slechts de wezenstrekken van zijn onderwerp vastlegt, schetste Ehrenfest de ontwikkeling van de ethertheorie. Indien de ether, waardoor het licht zich voortplantte, stilstaand was, zoals deze ontwikkeling scheen te vereisen, dan zouden de gevolgen van de "etherwind" die door de bewegende bol woei, ertoe leiden dat de waarnemingen van de tweede proefnemer sterk van die van de eerste zouden verschillen. Het ontbreken van dergelijke effecten van de etherwind was het paradoxale resultaat van het experiment van Michelson en Morley. De theorieën die waren opgeworpen om de paradox eruit te elimineren, waren alle vreemd en nieuw; Ehrenfest beschouwde ze één voor één. Lorentz zelf had aangetoond dat alle tegenstellingen werden geëlimineerd wanneer de beweging door de ether de vorm van het bewegende lichaam veranderde. Volgens deze contractie-hypothese zouden de gevolgen van de etherwind de waarnemingen verricht door de bewegende proefnemer precies opheffen. Einsteins relativiteitstheorie wierp deze paradox omver door het bestaan van de ether te ontkennen. Einsteins resultaten en de vergelijkingen waarin deze werden uitgedrukt waren identiek met die van Lorentz, maar zijn postulaten waren radicaal verschillend. Ehrenfest merkte, met een karakteristiek trekje, op dat Einstein in feite van zijn lezers verlangde dat zij behalve de twee postulaten van deze theorie een derde verklaring zouden onderschrijven: "Wij verklaren dat de combinatie van deze twee beweringen ons bevredigt".

Ehrenfest besloot zijn lezing met enkele opmerkingen over een fragmentarische theorie, eveneens etherloos, maar geheel verschillend van die van Einstein, naar voren gebracht door zijn vriend Walther Ritz. (Ritz' dood op jeugdige leeftijd verhinderde dat deze theorieën werden uitgewerkt en latere experimenten hebben zijn grondpremisse geëlimineerd, maar toentertijd was zijn werk het onderwerp van veel gesprekken.) Met een terloopse verwijzing naar het verwarde kluwen van problemen verbonden aan quanta eindigde Ehrenfest, zijn gehoor opzettelijk achterlatend met het gevoel dat het laatste woord over het probleem van de ether nog niet was gesproken.

De traditie van inaugurale redevoeringen aan Nederlandse Universiteiten verlangt dat de nieuwe professor passende woorden van dank voor zijn benoeming aan zijn rede verbindt, en woorden van welkom en belofte tot zijn nieuwe collegae en studenten richt. In deze opmerkingen kon Ehrenfest evenmin formeel en onpersoonlijk zijn als in zijn lezing academisch en professoraal. Hij maakte geen geheim van zijn verering voor Lorentz, een verering die met de jaren nog dieper zou worden. Zich rechtstreeks tot hem richtend, zei Ehrenfest:

"Wanneer een van ons jongere mensen met U in aanraking komt, moet hij één ding wel bovenal voelen: U leest onze zielen als een open boek, rustig glimlachend. U ziet niet alleen onze wetenschappelijke plannen en denkbeelden voor U ontvouwd, met al hun verdiensten en tekortkomingen, die wij eerst veel later zullen zien; U doorschouwt ook helder en indringend onze zuiver menselijke gevoelens, verlangens en bekwaamheden. En zo ziet U duidelijk de wirwar van strijdige gevoelens waarmee ik uit Uw handen dit ambt ontving dat U wenste neer te leggen. Maar de gedachte dat onze gezamenlijke professorale plichten mij het grote voorrecht zullen schenken van een nauwe persoonlijke verhouding tot U, vervult mij met onverdeelde blijdschap."

Tot de studenten sprak Ehrenfest woorden die uit het diepst van zijn innerlijk kwamen en die de volgende eenentwintig jaar van zijn leven zouden bevestigen:

"Ik vat mijn plichten jegens U als volgt op: bij mijn beste weten en naar mijn beste vermogen zal ik elk van U, met zo min mogelijk schade, helpen de weg te vinden die het meest met het wezenlijke van zijn talenten overeenstemt. De stelselmatige colleges die ik verplicht ben U over de verschillende leervakken en de afzonderlijke problemen van de theoretische natuurkunde te geven zijn een noodzakelijk, maar zeker geen voldoende middel om dit doel te bereiken. Het is bovendien absoluut noodzakelijk dat ik persoonlijk contact met individuen tot stand breng. Ik vraag U mij te beschouwen bij Uw studie als een oudere collega en niet als iemand die in een absoluut verschillend stadium van wetenschappelijke ontwikkeling verkeert. Ikzelf kan mij voorwaar niet anders gevoelen in aanwezigheid van onze grote gemeenschappelijke leermeester Lorentz."

Wanneer wij proberen tot uitdrukking te brengen wat Ehrenfest voor zijn studenten betekende, en niet alleen voor hen die nauw met hem samenwerkten, maar evenzeer voor de velen die hem slechts één keer hoorden, komen wij in de verleiding aan Socrates te denken. De parallel gaat dieper, maar het is wellicht voldoende de woorden aan te halen de Plato Alcibiades in de mond gaf toen hij zich tot Socrates richtte:

"Wanneer wij welke andere spreker ook horen, zelfs een zeer goede, heeft hij absoluut geen uitwerking op ons, of slechts een geringe, terwijl enkele fragmenten van U en Uw woorden, zelfs uit de tweede hand en hoe onvolmaakt ook herhaald, de ziel van iedere man, vrouw en kind die er binnen gehoorafstand van komt, verbaast en overmeestert.... Ik heb Pericles en andere grote redenaars gehoord en ik was van mening dat zij goede sprekers waren, maar ik heb nooit een dergelijk gevoel gehad; mijn ziel werd niet door hen beroerd."

Vertaald door Max Schuchart.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Tensorrekening op zaterdag 8 februari 1975, 9.00-12.00 uur.

|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|

1. Door uitwendige invloeden ondergaat een 2-dimensionaal medium M een deformatie, die voor $(x,y) \in M$ weergegeven wordt door

$$u = u(x,y) \text{ in } x\text{-richting}, \quad v = v(x,y) \text{ in } y\text{-richting} .$$

In elk punt van M beschouwen wij de tensoren

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i) .$$

Wat is, in eerste benadering, het effect op M

a) van ω_{ij}, als e_{ij} de nultensor is?

b) van e_{ij}, als ω_{ij} de nultensor is en $e_{11} = e_{22} = 0$?

c) van e_{ij}, als ω_{ij} de nultensor is?

2. Ga uit van de Lorentz transformatie

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{-\beta x + ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

a) Formuleer en verklaar hieruit de Lorentz contractie.

b) De waarnemers O' en O" bewegen zich t.o.v. de waarnemer O in dezelfde richting. De snelheid van O' t.o.v. O is $\frac{3}{5}c$, de snelheid van O" t.o.v. O in $\frac{4}{5}c$. Bepaal de snelheid van O" t.o.v. O' (relativistisch).

3. In een Riemann ruimte, met fundamentaal tensor g_{ij} en locale coördinaten u^h, wordt een kromme K gegeven door $u^h = u^h(s)$. Voorts is gegeven dat voor elk punt van K de functie

$$T(u^h, \dot{u}^h) := g_{ij}(u^h)\dot{u}^i\dot{u}^j$$

voldoet aan de relaties

$$\frac{\partial T}{\partial u^h} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^h}\right) .$$

a) Bewijs dat K een geodeet is.

b) Herschrijf de relaties met behulp van de covariante afgeleide.

Z.O.Z.

Examen/tentamen Tensorrekening op zaterdag 8 februari 1975.

|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|~|

4. In een 2-dimensionale Riemannse ruimte is de metriek gegeven door

$$(ds)^2 = (du)^2 + 2\lambda\ dudv + (dv)^2 ,$$

waarin $\lambda = \lambda(u,v)$ een functie is van de coördinaten u en v.
Zoals bekend worden de Christoffelsymbolen bepaald door

$$2g_{\gamma\delta}\{{}^{\delta}_{\alpha\beta}\} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} .$$

a) Bewijs dat $\{{}_1{}^1{}_2\} = 0$ en $\{{}_1{}^2{}_2\} = 0$.
b) Bewijs dat het vectorveld van de raakvectoren aan de krommen u = constant, langs een kromme v = constant de covariante afgeleide nul heeft.

5. Een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{aligned} x &= z\cos\varphi, & -\infty < z < \infty \\ y &= z\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z &= z \end{aligned}$$

a) Toon aan dat dit oppervlak een kegel voorstelt, en bereken het lijnelement.
b) Op het oppervlak is een kromme gegeven door

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \sqrt{1+s^2},\quad \varphi = \sqrt{2}\ \arctan s .$$

Bewijs dat deze kromme een geodeet van het oppervlak is.

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{bmatrix} \quad \left\{ {1 \atop ij} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix}, \quad \left\{ {2 \atop ij} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u}{1+u^2} \\ \frac{u}{1+u^2} & 0 \end{bmatrix}$$

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Tensorrekening op zaterdag 4 februari 1978, 9.00-12.00 uur.

-.-

1. Bereken de Christoffelsymbolen van het schroefoppervlak $\underline{x} = (u\cos v, u\sin v, v)$.

2. Zij $\varphi_i^{\cdot j}$ de gemengde componenten van een op een Riemann ruimte gegeven 2-tensor. Geef de definitie van de covariante afgeleiden $\nabla_h \varphi_i^{\cdot j}$, en toon aan dat zij de componenten van een 3-tensor zijn.

3. Een mier beweegt zich over een oppervlak. Er werkt op hem geen tangentiële kracht. Toon aan dat zijn baan een geodeet van het oppervlak is.

4. Zij V een vectorruimte van dimensie 2, met basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2$. In V wordt een inproduct $<\ ,\ >$ gedefinieerd door

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\underline{c}_1,\underline{c}_1> & <\underline{c}_1,\underline{c}_2> \\ <\underline{c}_2,\underline{c}_1> & <\underline{c}_2,\underline{c}_2> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

en verder door bilineariteit $<\underline{x},\underline{y}> = g_{ij}x^i y^j$.

a) Bepaal de bases $\underline{c}_{i'}$ waarvoor

$$<\underline{c}_{1'},\underline{c}_{1'}> = 1,\ <\underline{c}_{1'},\underline{c}_{2'}> = 0,\ <\underline{c}_{2'},\underline{c}_{2'}> = -1,\ \det(\underline{c}_{1'},\underline{c}_{2'}) = 1.$$

b) Bepaal het verband tussen de coördinaten $x^{i'}$ en x^i van de vector $\underline{x} = x^i \underline{c}_i = x^{i'} \underline{c}_{i'}$.

c) Voor welke $\underline{x}$ is de verhouding van zijn coördinaten onafhankelijk van de in a) gevonden bases?

5. Zij $\underline{x}(u^\alpha)$ een oppervlak in $\mathbb{R}^3$. Duid de eenheidsnormaal, de raakvectoren aan de parameterkrommen, en de tweede fundamentaaltensor aan door $\underline{N}(u^\alpha)$, $\underline{c}_\beta(u^\alpha)$, $h_{\beta\gamma}(u^\alpha)$, respectievelijk. Bewijs dat

$$\partial_\alpha \underline{N} = -h_\alpha^{\cdot\beta} \underline{c}_\beta\ .$$

6. [Bij dit vraagstuk kan het resultaat van vraagstuk 5 worden gebruikt].
Zij $\underline{x} = x(u^\alpha(s))$ een kromme op het oppervlak $\underline{x} = \underline{x}(u^\alpha)$, en zij $\dot{u}^\alpha \neq 0$. Zij $\lambda(s)$ een functie van s, met $\lambda(s) \neq 0$.

a) Druk de raakvector $\dot{\underline{y}}$ aan de ruimtekromme

$$\underline{y} = \underline{x}(u^\alpha(s)) + \frac{1}{\lambda(s)} \underline{N}(u^\alpha(s))$$

uit in $\underline{N}$, $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$.

Z.O.Z.

-.-

b) Neem aan dat $\underline{\dot{y}}$ loodrecht staat op het raakvlak in $\underline{x}$ aan het oppervlak.
Bewijs dat λ een eigenwaarde is van de matrix

$$[h_{\alpha}^{\cdot\beta}] .$$

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Tensorrekening op zaterdag 23 juni 1979, 9.00-12.00 uur.

N.B. De vraagstukken zijn geordend volgens de behandeling van de stof, en niet volgens moeilijkheid.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven een ruimtekromme K met booglengte s, parametervoorstelling $\underline{x}(s)$, kromming $\rho(s)$, torsie $\tau(s)$. Beschouw de kromme L met parametervoorstelling $\underline{y} = \dot{\underline{x}}(s)$ en laat $\bar{\rho}(s)$ de kromming van L voorstellen. Vraag: druk $\bar{\rho}(s)$ uit in $\rho(s)$ en $\tau(s)$.

2. Beschouw het rechte schroefoppervlak

$$\underline{x} = (u \cos v,\ u \sin v,\ v)\ .$$

   a) Bereken de componenten $g_{\alpha\beta}$ van de eerste, en $h_{\alpha\beta}$ van de tweede fundamentaaltensor.

   b) Zijn de cirkelschroeflijnen u = constant geodetische krommen van het oppervlak? Verklaar Uw antwoord.

3. Op een oppervlak $\underline{x}(u^{\alpha})$ in $\mathbb{R}^3$ is gegeven een kromme $u^{\alpha}(t)$. In elk punt van de kromme is gegeven een vector $\underline{v}(t)$ in het bijbehorende raakvlak, en wel zo dat de covariante afgeleide $\frac{\nabla \underline{v}(t)}{dt} = 0$. Bewijs dat de lengte van $\underline{v}(t)$ constant is.

4. Zij (U,) een kaart van een Riemannse ruimte R, met parameters u^h en Christoffelsymbolen $\{i{}^h{}j\}$. Herinner U dat een pseudoparallel vectorveld $\underline{a}(u^h) = a^m(u^h)\underline{c}_m(u^h)$ is gedefinieerd door

$$\partial_h a^m + \{h{}^m{}i\}a^i = 0\ .$$

   Zij φ een 2-tensorveld van R, en zij ψ het afgeleide veld van φ.

   a) Wat is het verband tussen de covariante componenten van ψ en die van φ? Waarom?

   b) Leid af een betrekking tussen de covariante componenten a_i van $\underline{a}$ en hun afgeleiden $\partial_h a_i$.

   c) Wat is het verband tussen pseudoparallele vectorvelden van R en geodetische krommen op R?

5. Leid af de Lorentztransformaties; naar keuze òf volgens Lorentz, òf volgens Einstein-Minkowski.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen/tentamen Tensorrekening, zaterdag 31 januari 1981, 9.00 - 12.00 uur.

Norm: 1 + 1½ + 2 + 3 + 3 voor som 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

---

1. Wat verstaat men onder de gemengde componenten $\varphi_i^{\bullet j}$ van een 2-tensor φ ?

   Toon aan dat $\varphi_i^{\bullet i}$ onafhankelijk is van de basiskeuze.

2. Zij $\varphi(u^1,\ldots,u^n)$ een scalaire functie, gedefinieerd op een kaart van een Riemannse ruimte. Bereken

$$\nabla_h \nabla_i \varphi - \nabla_i \nabla_h \varphi .$$

3. $\mathcal{O},\mathcal{O}',\mathcal{O}''$ zijn drie waarnemers, die als plaats- en tijdcoördinaten respectievelijk (x,t), (x',t'), (x'',t'') hanteren. $\mathcal{O}'$ beweegt zich t.o.v. $\mathcal{O}$ met een constante snelheid v_1 langs de x-as. $\mathcal{O}''$ beweegt zich t.o.v. $\mathcal{O}'$ met een constante snelheid v_2 langs de x'-as. Leid de formule af waardoor de snelheid v van $\mathcal{O}''$ t.o.v. $\mathcal{O}$ wordt uitgedrukt in v_1 en v_2.

4. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven het boloppervlak

$$\underline{x} = (\sin u \cos v\ ,\ \sin u \sin v\ ,\ \cos u) .$$

   a) Bereken de raakvectoren aan de parameterkrommen

$$\underline{c}_1(u,v) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}(u,v)\ ,\ \underline{c}_2(u,v) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(u,v) .$$

   b) Bewijs dat voor het lijnelement geldt

$$(ds)^2 = (du)^2 + (\sin u)^2 (dv)^2 .$$

   c) Bereken $\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}$ en $\left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} = \left\{ {2 \atop 2\ 1} \right\}$.

   [Alle andere Christoffelsymbolen blijken nul te zijn] .

z.o.z.

Examen/tentamen Tensorrekening, zaterdag 31 januari 1981, 9.00 - 12.00 uur.

---

d) Beschouw langs de kleine cirkel $u = \pi/3$, $0 \leq v < 2\pi$ het pseudoparallele vectorveld

$$\underline{a}(v) = a(v)\underline{c}_1(\tfrac{\pi}{3},v) + b(v)\underline{c}_2(\tfrac{\pi}{3},v) \ , \ \underline{a}(0) = \underline{c}_1(\tfrac{\pi}{3},0) \ .$$

Leid uit

$$\partial_h a^m + \left\{ {m \atop h \ i} \right\} a^i = 0$$

de differentiaalvergelijkingen af voor

$$a^1 \equiv a(v) \text{ en } a^2 \equiv b(v) \text{ , en los die op.}$$

e) Toon aan dat $\underline{a}(2\pi) + \underline{a}(0) = \underline{0}$.

5. De Taylor-formule

$$\underline{x}(s + h) = \underline{x}(s) + h\,\dot{\underline{x}}(s) + \frac{1}{2}h^2\ddot{\underline{x}}(s) + \frac{1}{6}h^3\dddot{\underline{x}}(s) + \ldots$$

geeft het verband tussen twee naburige punten $P = \underline{x}(s)$ en $Q = \underline{x}(s + h)$ van een *ruimtekromme*, die in P de kromming $\rho(s)$ en de torsie $\tau(s)$ heeft. De bol $(\underline{x} - \underline{a},\underline{x} - \underline{a}) = r^2$ sluit in P zo goed mogelijk aan bij de ruimtekromme. Gevraagd wordt om r^2 uit te drukken in ρ,τ en hun afgeleiden.
[Schrijf daartoe de voorwaarden op dat P en Q op de bol liggen, zorg dat de verkregen vergelijking een viervoudige wortel $h = 0$ heeft, en teken het vlak door P loodrecht op de raaklijn $\dot{\underline{x}}(s)$] .

Aanwijzingen Tentamen Tensorrekening 31-1-1981.

1. $\overset{\bullet}{\varphi}_i{}^j = \varphi(e_i, e^j)$ en

$\overset{\bullet}{\varphi}_{i'}{}^{i'} = A^i_{i'} A^{i'}_j \overset{\bullet}{\varphi}_i{}^j = \delta^i_j \overset{\bullet}{\varphi}_i{}^j = \overset{\bullet}{\varphi}_i{}^i$.

!! Fout is $\overset{\bullet}{\varphi}_{i'}{}^{i'} = A^i_{i'} A^{i'}_i \overset{\bullet}{\varphi}_i{}^i = \overset{\bullet}{\varphi}_i{}^i$.

2. $\nabla_k \nabla_i \varphi = \nabla_k \partial_i \varphi = \partial_k \partial_i \varphi - \left\{ {j \atop k\ i} \right\} \partial_j \varphi$,

voorts $\partial_k \partial_i \varphi = \partial_i \partial_k \varphi$ en $\left\{ {j \atop k\ i} \right\} = \left\{ {j \atop i\ k} \right\}$.

4. $\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} = -\sin u \cos u = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

voor $u = \pi/3$. De vergelijkingen voor $a(v)$ en $b(v)$ zijn

$\frac{da}{dv} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\, b = 0$, $\frac{db}{dv} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, a = 0$, $a(0) = 1$, $b(0) = 0$,

dus $a(v) = \cos \frac{1}{2} v$, $b(v) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{1}{2} v$ en

$\underline{a}(v) = \underline{e}_1 \cos\frac{1}{2}v - \frac{2}{\sqrt{3}}\, \underline{e}_2 \sin \frac{1}{2} v$, dus $\underline{a}(2\pi) = -\underline{e}_1 = -\underline{a}(0)$.

Maak plaatje !

5. Taylor invullen in $(\underline{x}(s+h) - \underline{a}, \underline{x}(s+h) - \underline{a}) = r^2$ geeft

$(\underline{x}-\underline{a}, \underline{x}-\underline{a}) - r^2 + 2h(\dot{\underline{x}}, \underline{x}-\underline{a}) + h^2\left(1 + (\ddot{\underline{x}}, \underline{x}-\underline{a})\right) + \frac{h^3}{3}(\dddot{\underline{x}}, \underline{x}-\underline{a}) + \dots = 0$.

Dus $(\underline{a} - \underline{x}, \dot{\underline{x}}) = 0$: $\underline{a}$ in normaalvlak $\perp \underline{t}$.

$(\underline{a} - \underline{x}, \ddot{\underline{x}}) = 1$: $(\underline{a} - \underline{x}, \underline{n}) = \frac{1}{\rho}$.

$(\underline{a} - \underline{x}, \dddot{\underline{x}}) = 0$ waaruit $(\underline{a} - \underline{x}, \underline{b}) = -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \tau}$.

Pythagoras: $r^2 = \frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho^2 \tau}\right)^2$.

3. Zie syllabus. Voor mondeling tentamen bel 2758.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Examen /tentamen Tensorrekening op zaterdag 12 juni 1982, 9.00-12.00 uur.

$\overset{v}{\leftarrow}$ O'' ——————— O ——————— O' $\overset{}{\rightarrow}$ v

1. De waarnemers O' en O'' bewegen zich t.o.v. de waarnemer O in strikt tegengestelde richting met dezelfde constante snelheid v.

   a) Bepaal de snelheid w van O'' t.o.v. O' (relativistisch)

   b) Hoe luidt het verband tussen de coördinaten (x',ct') t.o.v. O' en (x'',ct'') t.o.v. O'' ?

2. Zij $\underline{x}(u^\gamma)$ een oppervlak in $\mathbb{R}^3$, met $g_{\alpha\beta}(u^\gamma)$ als eerste en $h_{\alpha\beta}(u^\gamma)$ als tweede fundamentaaltensor. Zij $\underline{x}(u^\gamma(s))$ een kromme op het oppervlak, met booglengte s. Druk de kromming^2 $(\ddot{\underline{x}},\ddot{\underline{x}})$ van de kromme uit in de hierboven aangegeven grootheden (en hun afgeleiden).

3. Zij $\underline{x} = \underline{x}(u,v)$ een oppervlak in $\mathbb{R}^3$. Voor de componenten van de eerste fundamentaaltensor is gegeven dat in elk punt van het oppervlak geldt

$$g_{11} = 1 \quad \text{en} \quad g_{12} = g_{21} = 0 \;.$$

Bewijs dat de parameterkromme v = constant een geodeet van het oppervlak is.

zie bladz. 2

Examen /tentamen Tensorrekening op zaterdag 12 juni 1982, 9.00-12.00 uur.

---

4. In $\mathbb{R}^3$ beschouwen wij de helicoidale coördinaten u,v,w, die met de orthonormale (Cartesische) coördinaten x,y,z samenhangen volgens

$$x = u \cos v \,, \quad y = u \sin v \,, \quad z = v + w \,.$$

Het punt P_0 heeft (x_0,y_0,z_0) resp. (u_0,v_0,w_0) als orthonormale resp. helicoidale coördinaten.

a) Teken en beschrijf de drie parameterkrommen door P_0 [de u-kromme heeft $v = v_0$, $w = w_0$; etc.].

b) Bereken $\det[g_{ij}]$ voor de fundamentaaltensor g_{ij} .

c) Toon aan dat

$$\left\{ {2 \atop 1\ \ 2} \right\} = \frac{1}{u} \,, \quad \left\{ {3 \atop 1\ \ 2} \right\} = -\frac{1}{u} \,, \quad \left\{ {1 \atop 2\ \ 2} \right\} = -u \,.$$

[U hoeft niet aan te tonen dat de overige Christoffelsymbolen nul zijn].

5. [Voor dit vraagstuk kunt U gebruik maken van de in 4.c) vermelde Christoffelsymbolen].

Zij $\underline{a}$ een vectorveld in $\mathbb{R}^3$. Druk uit in helicoidale coördinaten:

a) div $\underline{a}$,

b) de componenten van rot $\underline{a}$.