TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

GROEPENTHEORIE

Behorende bij het College van

Prof. Dr. W. Peremans

Voorjaarssemester 1968

Bibl Wsk

Onderafdeling der Wiskunde

Groepentheorie

BEHORENDE BIJ HET COLLEGE VAN PROF. DR. W. PEREMANS

VOORJAARSSEMESTER 1968

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 234
PRIJS f 1,50

INHOUD

INLEIDING

In deze syllabus bij het college groepentheorie zijn de definities en stellingen geformuleerd, die in dit college worden behandeld. Verder is er een aantal opgaven in opgenomen. De syllabus is bedoeld om het volgen van het college te vergemakkelijken, maar niet om het college te vervangen: de belangrijkste bestanddelen van het college ontbreken erin.

De bewijzen van de stellingen ontbreken: in de bewijzen kan men de in een theorie gebruikelijke gedachtengangen leren kennen.

Voorbeelden ontbreken: in de voorbeelden ziet men de draagwijdte en de toepassingsmogelijkheden van een theorie en komen de begrippen tot leven.

Het commentaar ter motivering van de keuze der begrippen en ter verduidelijking van de logische samenhang der stellingen ontbreekt; de draad, die een betoog tot een samenhangend geheel maakt en de volgorde van de behandeling der onderdelen begrijpelijk maakt, is niet expliciet aangegeven. Hoe de theorie elders kan worden gebruikt, wordt niet vermeld.

Een enkele maal wordt afgeweken van het hierboven vermelde patroon van hetgeen wel en niet behandeld wordt. Er staat wel eens een voorbeeld, een commentariërende opmerking of een verwijzing naar een toepassing. Dit zijn echter slechts uitzonderingen op de hierboven gegeven regels.

Het ontbrekende is te vinden in het college of in leerboeken.

LITERATUUR

Hoofdstuk I

1. P.S. Alexandrow, Einführung in die Gruppentheorie, Berlin, 1954.
2. W. Ledermann, Introduction to the theory of finite groups, Edinburgh, 1957.
3. M. Hall, The theory of groups, New York, 1959.
4. W.R. Scott, Group theory, Englewood Cliffs, 1964.
5. W. Specht, Gruppentheorie, Berlin, 1956.
6. A.G. Kurosh, The theory of groups, 2 delen, New York, 1955-56.
7. H. Zassenhaus, The theory of groups, Göttingen, 1958.
8. J.J. Rotman, The theory of groups; an introduction, Boston, 1965.
9. W. Burnside, Theory of groups of finite order, New York, 1911.

Hoofdstuk II

1. E.P. Wigner, Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra, New York, 1959.
2. H. Weyl, Theory of groups and quantum mechanics, Princeton, 1931.
3. B.L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, 1932.
4. H. Boerner, Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik, Berlin ,1955.
5. R. McWeeny, Symmetry - An introduction to group theory and its applications, Oxford, 1963.
6. S. Bhagavantam, T. Venkatarayudu, Theory of groups and its application to physical problems, Waltair, 1951.
7. G.Ya. Lyubarskii, The application of group theory in physics, Oxford, 1960.
8. M. Hamermesh, Group theory and its application to physical problems, Reading (Mass.), 1962.
9. Ch.W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York, 1962.
10. J.S. Lomont, Applications of finite groups, New York, 1959.

Hoofdstuk III

1. H. Weyl, Symmetry, Princeton, 1952.
2. J.J. Burckhardt, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, Basel, 1947.

HOOFDSTUK I ELEMENTAIRE GROEPENTHEORIE

§ 1. Verzamelingen en afbeeldingen.

Notaties: $a \in A$: a is een element van A.

$a \notin A$: a is geen element van A.

$\emptyset$: lege verzameling.

$A \subset B$: A is een deelverzameling van B.

$A \cup B$: vereniging van A en B.

$A \cap B$: doorsnede van A en B.

$A \setminus B$: complement van B in A.

$\{\alpha \mid \beta\}$: de verzameling der α, waarvoor β geldt.

$\mathcal{P}(A)$: de verzameling van alle deelverzamelingen van A.

Als $A \subset B$ en $A \neq B$, dan heet A een echte deelverzameling van B.
Als $A \cap B = \emptyset$, dan heten A en B disjunct.
Als er een vaste verzameling U is, waarvan alle verzamelingen, die we in een zekere contekst beschouwen, deelverzamelingen zijn, spreken we ook van het complement van A: $C(A) = U \setminus A$ (er geldt dan $A \subset U$).

Afbeelding. $f : A \to B$ betekent dat f een afbeelding is van A in B, d.w.z. aan iedere $x \in A$ is een $f(x) \in B$ toegevoegd. A heet de origineelverzameling van f, B de beeldverzameling van f. Het beeld van f is de verzameling

$$\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Met $f : A \to B$ zijn twee andere afbeeldingen $\overrightarrow{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ en $\overleftarrow{f} : B \to \mathcal{P}(A)$ geassocieerd, gedefinieerd door

$$\overrightarrow{f}(V) = \{f(x) \mid x \in V\} \quad \text{voor alle } V \subset A,$$

$$\overleftarrow{f}(y) = \{x \mid f(x) = y\} \quad \text{voor alle } y \in B.$$

Het beeld van f is dus $\overrightarrow{f}(A)$.

Opmerking. Men schrijft meestal f in plaats van $\overrightarrow{f}$. Hoewel het gebruik van dezelfde letter voor twee verschillende afbeeldingen tot verwarring aanleiding kan geven, zullen wij ons in het vervolg soms bij dit misbruik aansluiten.

Definitie 1.1 Als $f : A \to B$ en $g : B \to C$ afbeeldingen zijn, dan wordt de samengestelde afbeelding $g \circ f : A \to C$ gedefinieerd door

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ voor alle } x \in A.$$

Opmerking. Men noemt de samengestelde afbeelding wel het product van g en f en schrijft gf in plaats van $g \circ f$.

Definitie 1.2 Identieke afbeelding $I_A : A \to A$:

$$I_A(x) = x \text{ voor alle } x \in A.$$

Opmerking. Als duidelijk is, welke A bedoeld wordt, schrijven we ook I in plaats van I_A.

Definitie 1.3 Als voor $f : A \to B$ geldt, dat $B = \overline{f}(A)$, heet f een afbeelding op (uitvoeriger: een afbeelding van A op B).

Definitie 1.4 Als voor $f : A \to B$ geldt, dat voor alle $x \in A$ en alle $y \in A$ uit $x \neq y$ volgt $f(x) \neq f(y)$, dan heet f eeneenduidig.

Stelling 1.1 Als $f : A \to A$ en A eindig is, dan is f dan en slechts dan eeneenduidig, als f op is.

Definitie 1.5 Als voor $f : A \to B$ en $g : B \to A$ geldt $g \circ f = I_A$, dan heet g een linksinverse van f en f een rechtsinverse van g.

Stelling 1.2 Een afbeelding is dan en slechts dan op, als zij een rechtsinverse bezit.

Stelling 1.3 Een afbeelding van een niet-lege verzameling is dan en slechts dan eeneenduidig, als zij een linksinverse bezit.

Stelling 1.4 Als f een eeneenduidige afbeelding van A op B is, dan bestaat er een afbeelding $g : B \to A$, zodat iedere rechtsinverse van f en iedere linksinverse van f met g overeenstemt.

Definitie 1.6 De door een afbeelding f, die eeneenduidig op is, ondubbelzinnig bepaalde g van stelling 1.4, heet de inverse (afbeelding) van f; notatie f^{-1}.

Stelling 1.5 De inverse van een eeneenduidige afbeelding op is ook eeneenduidig op en heeft de oorspronkelijke afbeelding als inverse:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Bij een afbeelding $f : A \to B$, die niet op is, behoort een afbeelding op, die ontstaat door B te vervangen door het beeld van f: $f^{\sim}: A \to \overline{f}(A)$, gedefinieerd door $f^{\sim}(x) = f(x)$ voor alle $x \in A$.

Bij een afbeelding $f : A \to B$, die niet eeneenduidig is, trachten wij een eeneenduidige afbeelding te maken door de elementen van A, die door f op hetzelfde element van B worden afgebeeld samen te nemen; hetgeen we zo krijgen, noemen we vezels. Daar $\overleftarrow{f}$ juist de elementen van A, die op een gegeven element van B worden afgebeeld, samen neemt, geven we de volgende definitie.

Definitie 1.7 Als $f : A \to B$ een afbeelding is, dan wordt de vezeling van f gedefinieerd door

$$\text{vezeling van } f = \text{beeld van } (\overleftarrow{f} \circ f).$$

Elk element van de vezeling van f heet een vezel van f.

Stelling 1.6 Als $f : A \to B$, dan is een deelverzameling V van A dan en slechts dan een vezel van f als er een $a \in A$ bestaat, zodat

$$V = \{x \mid f(x) = f(a)\}.$$

Opmerking. Als x en y in dezelfde vezel van f zitten, geldt $f(x) = f(y)$. Verder is een vezel niet leeg, wegens $a \in \overleftarrow{f}(f(a))$. Op grond hiervan definiëren we de afbeelding $f^* : \Phi \to B$ (Φ = vezeling van f) door

$$f^*(V) = f(\text{een element van } V) \text{ voor alle } V \in \Phi;$$

dit is ondubbelzinnig vastgelegd, omdat het onafhankelijk is van de keuze van het element in V.

Opgave 1. De hierboven ingevoerde afbeelding f^* is eeneenduidig.

Definitie 1.8 Als A een verzameling is, dan heet een deelverzameling Φ van $\mathcal{P}(A)$ een klassenindeling van A als geldt:

1. $\emptyset \notin \Phi$,

2. Voor iedere $x \in A$ bestaat er een $K \in \Phi$, zodat $x \in K$,

3. Voor iedere $K_1 \in \Phi$ en iedere $K_2 \in \Phi$ geldt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ of $K_1 = K_2$.

Opmerking. In deze definitie mogen 2. en 3. samen vervangen worden door 2'. Voor iedere $x \in A$ bestaat er één en slechts één $K \in \Phi$, zodat $x \in K$.

Stelling 1.7 De vezeling van een afbeelding $f : A \to B$ is een klassenindeling van A.

Als A een verzameling is, dan is de <u>relatie</u> $\sim$ op A vastgelegd als voor ieder tweetal elementen x en y van A vastgelegd is of $x \sim y$ waar of onwaar is (voorbeeld: $\leqslant$ op de verzameling der reële getallen). We schrijven $x \sim y$, als de relatie voor het paar x, y waar is.

<u>Definitie 1.9</u> Een relatie $\sim$ op A heet een <u>equivalentierelatie</u> op A als geldt:

1. voor alle $x \in A$ geldt $x \sim x$ (<u>reflexief</u>),
2. voor alle $x \in A$ en alle $y \in A$ geldt
$$x \sim y \Rightarrow y \sim x \qquad \text{(symmetrisch)},$$
3. voor alle $x \in A$, alle $y \in A$ en alle $z \in A$ geldt
$$\left.\begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \sim z \qquad \text{(transitief)}.$$

<u>Stelling 1.8</u> Bij een afbeelding $f : A \to B$ is de relatie $\sim$ op A, gedefinieerd door
$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
een equivalentierelatie op A.

<u>Stelling 1.9</u> Als Φ een klassenindeling van A is, dan is de relatie $\equiv_\Phi$ op A, gedefinieerd door
$$x \equiv_\Phi y \Leftrightarrow x \text{ en } y \text{ liggen in dezelfde klasse van } \Phi$$
een equivalentierelatie op A.

<u>Stelling 1.10</u> Als $\sim$ een equivalentierelatie op A is, dan is de deelverzameling $\Psi_\sim$ van $\mathcal{P}(A)$, gedefinieerd door
$$V \in \Psi_\sim \Leftrightarrow \text{er bestaat een } a \in A \text{ zodat } V = \{x \mid a \sim x\}$$
een klassenindeling van A, genaamd de <u>quotiëntverzameling</u> $A/\sim$ van A ten opzichte van $\sim$.

Op grond van stelling 1.9 is aan iedere klassenindeling Φ een equivalentierelatie $\equiv_\Phi$ toegevoegd en op grond van stelling 1.10 is aan iedere equivalentierelatie $\sim$ een klassenindeling $\Psi_\sim$ toegevoegd. Deze toevoegingen zijn elkaars inverse op grond van de volgende stelling.

<u>Stelling 1.11</u> $\Psi_{\equiv_\Phi} = \Phi$, $\equiv_{\Psi_\sim} = \sim$.

Op grond hiervan behoren equivalentierelaties en klassenindelingen wederzijds bij elkaar.

Opgave 2. De klassenindeling van stelling 1.7 en de equivalentierelatie van stelling 1.8 van dezelfde functie horen bij elkaar in de zin van het bovenstaande.

Definitie 1.10 Een afbeelding $K : A \to \mathcal{P}(A)$ heet een projectie, als geldt:

1. voor alle $x \in A$ geldt $x \in K(x)$,

2. voor alle $x \in A$ en alle $y \in A$ geldt $y \in K(x) \Rightarrow K(y) = K(x)$.

Opmerking. In deze definitie mogen 1. en 2. samen worden vervangen door

1'. voor alle $x \in A$ en alle $y \in A$ geldt $y \in K(x) \Leftrightarrow K(y) = K(x)$.

Stelling 1.12 Als K een projectie is, dan geldt

$$\overleftarrow{K} \circ K = K,$$

dus de vezeling van K = het beeld van K.

Stelling 1.13 Als $f : A \to B$ een afbeelding is, dan is $\overleftarrow{f} \circ f$ een projectie.

Stelling 1.14 Als Φ een klassenindeling van A is, dan is de afbeelding $L_\Phi : A \to \mathcal{P}(A)$ gedefinieerd door

$$L_\Phi(x) = \text{de klasse van } \Phi\text{, die } x \text{ bevat}$$

een projectie, genaamd de projectie van A op Φ.

Opgave 3. Bewijs, dat voor $f : A \to B$ de projectie die op grond van stelling 1.14 bij de vezeling van f hoort, $\overleftarrow{f} \circ f$ is.

Opgave 4. Bij een equivalentierelatie $\sim$ behoort uiteraard ook een projectie $L_{\Psi_\sim}$. Bewijs dat

$$L_{\Psi_\sim}(x) = \{z \mid x \sim z\}.$$

Opgave 5. Op grond van het bovenstaande horen bij klassenindelingen en equivalentierelaties projecties. Men kan echter ook omgekeerd projecties als uitgangspunt nemen en daarbij klassenindelingen en equivalentierelaties vinden, zodat het verband wederzijds is. Om dit aan te tonen, bewijze men de volgende beweringen.

Als $K : A \to \mathcal{P}(A)$ een projectie is, dan is Ω_K = het beeld van K een klassenindeling van A, waarvoor geldt

$$L_{\Omega_K} = K \quad \text{en} \quad \Omega_{L_\Phi} = \Phi.$$

Voor de aan K toegevoegde equivalentierelatie $\equiv_{\Omega_K}$ geldt

$$x \equiv_{\Omega_K} y \Leftrightarrow y \in K(x).$$

Opgave 6. Als $B \subset A$, dan heet de afbeelding $i : B \to A$, gedefinieerd door $i(x) = x$ voor alle x de injectie van B in A. Bewijs, dat als $f : A \to B$ een afbeelding is, f kan worden geschreven als het product van de volgende drie na elkaar uitgevoerde afbeeldingen:

1. de projectie van A op de vezeling van f,

2. een eeneenduidige afbeelding van de vezeling van f op het beeld van f,

3. de injectie van het beeld f in B.

Definitie 1.11 Een eeneenduidige afbeelding van A op A heet een transformatie van A, een transformatie van een eindige verzameling heet een permutatie van die verzameling.

Stelling 1.15 Als f, g en h afbeeldingen van A in A zijn, dan geldt

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \qquad \text{(associatief)},$$

$$f \circ I_A = I_A \circ f = f.$$

Als f en g transformaties van A zijn, dan is ook $f \circ g$ een transformatie van A en er geldt

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A,$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

§ 2. Groepdefinitie.

Definitie 2.1 Een niet-lege verzameling G van transformaties van een verzameling A, waarvoor geldt, dat uit $T_1 \in G$ en $T_2 \in G$ volgt $T_1 \circ T_2 \in G$ en uit $T \in G$ volgt $T^{-1} \in G$, heet een groep van transformaties.

Stelling 2.1 Een groep van transformaties bevat de identieke transformatie.

<u>Definitie 2.2</u> Een <u>groep</u> is een verzameling G en een groepoperatie, dat is een binaire operatie, die aan ieder tweetal elementen x, y van G een element $x \circ y$ toevoegt, zodat geldt:

voor alle $x \in G$, alle $y \in G$, alle $z \in G$ geldt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

er is een element e van G, zodat voor alle $x \in G$ geldt $e \circ x = x$ en zodat

voor alle $x \in G$ een element $x^{-1} \in G$ bestaat, zodat $x^{-1} \circ x = e$.

We schrijven de groepoperatie vaak als vermenigvuldiging, dus xy in plaats van $x \circ y$. Het element e noemen we dan eenheidselement en x^{-1} de inverse van x. Soms schrijven we de groepoperatie als optelling: $x + y$. Dan schrijven we 0 in plaats van e en noemen dit nulelement en $-x$ in plaats van x^{-1} en noemen dit tegengestelde. Men zegt dat de groep dan additief geschreven is.

<u>Definitie 2.3</u> Een groep G, waarvoor geldt

voor alle $x \in G$ en alle $y \in G$ geldt $x \circ y = y \circ x$,

heet <u>commutatief</u> of <u>abels</u> (naar N.H. Abel, 1802 - 1829).

<u>Opgave 7.</u> In de groep der orthogonale lineaire transformaties met determinant = 1 in R_3 (draaiingen om 0) zij A de draaiing over 120° om de z-as en B de draaiing over 180° om de x-as. Beschrijf AB en BA en toon aan dat $AB \neq BA$.

<u>Afspraak.</u> Een groep, die additief geschreven wordt, is abels.

<u>Stelling 2.2</u> Een verzameling van transformaties van een verzameling A is dan en slechts dan een groep volgens definitie 2.2 met samenstellen der transformaties als groepoperatie, als zij een groep van transformaties volgens definitie 2.1 is.

<u>Stelling 2.3</u> Als a en b elementen van een groep G zijn, bestaat er één en slechts één $x \in G$, waarvoor $ax = b$, namelijk $x = a^{-1}b$ en één en slechts één $y \in G$, waarvoor $ya = b$, namelijk $y = ba^{-1}$.

<u>Gevolg.</u> Als a een element van een groep G is, dan is
e het enige element x van G, waarvoor $ax = a$,
e het enige element x van G, waarvoor $xa = a$,
a^{-1} het enige element x van G, waarvoor $ax = e$,
a^{-1} het enige element x van G, waarvoor $xa = e$.

<u>Stelling 2.4</u> Een verzameling G, waarop een binaire operatie gedefinieerd is, is dan en slechts dan een groep met deze binaire operatie als groepoperatie, als

1. G niet leeg is,

2. de operatie associatief is,

3. voor alle $a \in G$ en alle $b \in G$ de vergelijkingen $ax = b$ en $ya = b$ een oplossing hebben.

<u>Stelling 2.5</u> Als de verzameling G van stelling 2.4 eindig is, mag voorwaarde 3. vervangen worden door

3'. voor alle $a \in G$, alle $b \in G$ en alle $c \in G$ geldt
uit $ab = ac$ volgt $b = c$,
uit $ba = ca$ volgt $b = c$.

Men noemt dit de <u>schrapeigenschap</u>.

De schrapeigenschap geldt ook voor oneindige groepen.

<u>Definitie 2.4</u> Het aantal elementen van een eindige groep heet de <u>orde</u> van de groep.

<u>Opgave 8</u>. In iedere groep geldt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Op grond van de associatieve eigenschap kan een product $a_1 a_2 \ldots a_n$ zonder haakjes geschreven worden; het resultaat is onafhankelijk van de groepering bij de vermenigvuldiging (algemene associatieve eigenschap). Een product van n maal dezelfde factor a heet een <u>macht</u> van a: $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n.a$.

<u>Stelling 2.6</u> Als m en n natuurlijke getallen zijn, geldt

$$a^m a^n = a^{m+n} ,$$

$$(a^m)^n = a^{mn} .$$

Dit geldt voor iedere verzameling met een associatieve vermenigvuldiging.
In een groep kunnen we ook machten met gehele exponenten invoeren: $a^0 = e$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ (n natuurlijk).

<u>Stelling 2.7</u> Als stelling 2.6 met gehele m en n.

In abelse groepen mag ook de volgorde in een product $a_1 a_2 \ldots a_n$ veranderd worden (algemene commutatieve eigenschap).

Stelling 2.8 In een abelse groep geldt voor gehele n:

$$(ab)^n = a^n b^n .$$

Bij additieve schrijfwijze schrijven we na in plaats van a^n. De regels worden dan

$$ma + na = (m + n)a,$$

$$n(ma) = (nm)a,$$

$$n(a + b) = na + nb.$$

Opgave 9. In een groep volgt uit de geldigheid van $(ab)^n = a^n b^n$ voor alle a en b, dat de groep abels is.

Definitie 2.5 Een eeneenduidige afbeelding φ van een groep G_1 op een groep G_2 heet een isomorfe afbeelding als voor alle $a \in G_1$ en alle $b \in G_1$ geldt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Als er een isomorfe afbeelding van G_1 op G_2 bestaat, heten G_1 en G_2 isomorfe groepen. Notatie: $G_1 \cong G_2$.

Stelling 2.9 Samengestelden en inversen van isomorfe afbeeldingen zijn isomorfe afbeeldingen.

Stelling 2.10 Als φ een isomorfe afbeelding van G_1 op G_2 is dan geldt

$$\varphi(e_1) = e_2 \ (e_1 = \text{eenheidselement van } G_1,\ e_2 = \text{eenheidselement van } G_2),$$

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}.$$

Stelling 2.11 Als G een groep is en $a \in G$, dan is $f_a: G \to G$, gedefinieerd door $f_a(x) = ax$, een transformatie van G. De verzameling K van deze transformaties,die ontstaat als a de groep G doorloopt is een groep van transformaties. Verder is de afbeelding die f_a aan a toevoegt een isomorfe afbeelding van G op K.

Definitie 2.6 De isomorfe afbeelding van stelling 2.11 het de Cayley-representatie van G.

Notatie. Als A een verzameling is, dan is S_A de groep voor alle transformaties van A.

Stelling 2.12 Als A en B verzamelingen zijn en f een eeneenduidige afbeelding van A op B dan geldt voor ψ en φ, gedefinieerd door

$$\psi(\tau) = f \circ \tau \circ f^{-1} \text{ voor } \tau \in S_A \text{ ,}$$
$$\varphi(\sigma) = f^{-1} \circ \sigma \circ f \text{ voor } \sigma \in S_B \text{ ,}$$

dat ψ een isomorfe afbeelding van S_A op S_B en φ een isomorfe afbeelding van S_B op S_A is. Verder zijn φ en ψ inversen van elkaar.

§3. Ondergroepen. Permutatiegroepen.

Definitie 3.1 Een deelverzameling H van een groep G heet een ondergroep van G, als zij t.o.v. de groepoperatie van G een groep vormt.

Stelling 3.1 Een deelverzameling H van een groep G is dan en slechts dan een ondergroep van G, als geldt:

1. uit $a \in H$ en $b \in H$ volgt $ab \in H$,

2. $e \in H$,

3. uit $a \in H$ volgt $a^{-1} \in H$.

Stelling 3.2 In stelling 3.1 kan voorwaarde 2. vervangen worden door:

2'. H is niet leeg.

Stelling 3.3 Een deelverzameling H van een groep G is dan en slechts dan een ondergroep van G, als geldt:

1. H is niet leeg,

2. uit $a \in H$ en $b \in H$ volgt $ab^{-1} \in H$.

Stelling 3.4 Als H eindig is, mag in stelling 3.2 (of in stelling 3.1) voorwaarde 3. worden weggelaten.

Definitie 3.2 In een groep G heten de twee ondergroepen G en de ondergroep, die alleen uit het eenheidselement bestaat, de triviale ondergroepen van G.

Als B een eindige verzameling is met n elementen, dan is S_B isomorf met de groep van alle transformaties van de verzameling A der natuurlijke getallen $\leq n$ (stelling 2.12, de afbeelding f is een nummering van de elementen van B). In dit geval schrijven we S_n in plaats van S_A.

Definitie 3.3 S_n heet de symmetrische groep van n objecten.

Opgave 10. Bewijs dat de orde van S_n gelijk is aan n!

Definitie 3.4 Laat A een eindige verzameling zijn. Als $a_1,\dots,a_k$ verschillende elementen van A zijn, dan is de k-cykel $(a_1 a_2 \dots a_k)$ de permutatie $\sigma \in S_A$, gedefinieerd door

$$\sigma(a_j) = a_{j+1} \quad (j=1,\dots,k-1)$$

$$\sigma(a_k) = a_1$$

$$\sigma(x) = x \quad \text{voor andere elementen van A.}$$

Stelling 3.5 $(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_j \dots a_k a_1 \dots a_{j-1})$ voor $j=2,3,\dots,k$. (cyclische verwisseling).

Stelling 3.6 Iedere permutatie is te schrijven als een product van disjuncte cykels. Deze schrijfwijze is eenduidig op volgorde der factoren na, op cyclische verwisseling binnen cykels na en op toevoeging of weglating van 1-cykels na.

Opmerking. Men kan de afspraak maken 1-cykels altijd weg te laten. Dit geeft alleen moeilijkheden bij de identieke permutatie, omdat die dan een leeg product oplevert. Men kan ook alle 1-cykels bijschrijven, waarvan de objecten niet in de andere cykels voorkomen.

Definitie 3.5 Een transpositie is een permutatie (van minstens twee objecten), die twee objecten verwisselt en de overige invariant laat.

Stelling 3.7 Voor een transpositie τ geldt $\tau^{-1} = \tau$; als a en b de verwisselde objecten zijn, is (ab) een cykelschrijfwijze van τ.

Definitie 3.6 $k(\sigma)$ is het aantal cykels in een schrijfwijze met disjuncte cykels van σ, waarbij alle mogelijke 1-cykels zijn meegeteld.

Stelling 3.8 Als n het aantal gepermuteerde objecten is, geldt $1 \leq k(\sigma) \leq n$. Verder geldt

$$k(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \text{ is één n-cykel,}$$

$$k(\sigma) = n \Leftrightarrow \sigma \text{ is de identieke permutatie,}$$

$$k(\sigma) = n-1 \Leftrightarrow \sigma \text{ is een transpositie.}$$

Stelling 3.9 Door rechtsvermenigvuldiging van een permutatie σ met een transpositie wordt $k(\sigma)$ met één verhoogd of met één verlaagd. Bij gegeven σ kan de transpositie zo worden gekozen, dat verhoging optreedt (tenzij $k(\sigma) = n$) of dat verlaging optreedt (tenzij $k(\sigma) = 1$).

Stelling 3.10 Iedere permutatie van een eindige verzameling met minstens twee elementen is te schrijven als een product van transposities.

Definitie 3.7 Een permutatie heet even (resp. oneven), als zij te schrijven is als product van een even (resp. oneven) aantal transposities.

Opmerking. Deze definitie wordt gerechtvaardigd door stelling 3.10 en door het uit stelling 3.9 volgende feit, dat voor een gegeven permutatie het even of oneven zijn (de pariteit) van het aantal factoren in een product van transposities onafhankelijk is van de keuze van dit product.

Stelling 3.11 Een permutatie σ van n objecten is dan en slechts dan even (resp. oneven) als $n - k(\sigma)$ even (resp. oneven) is.

Stelling 3.12 Voor het product van permutaties geldt:

even . even = even,
even . oneven = oneven,
oneven . even = oneven,
oneven . oneven = even.

Deze regel correspondeert met de regel voor het optellen van gehele getallen.

Stelling 3.13 Als A eindig is, vormen de even permutaties in S_A een ondergroep van S_A. Verder is de inverse van een oneven permutatie oneven.

Stelling 3.14 Als A een aantal elementen ≥ 2 heeft, zijn er in S_A evenveel even als oneven permutaties.

Definitie 3.8 De ondergroep der even permutaties in S_n voor $n \geq 2$ heet de alternerende groep A_n van n objecten.

De orde van A_n is $\frac{1}{2}n!$

Opgave 11. Een k-cykel is even als k oneven is en oneven als k even is.

Opgave 12. De groep van de vlakke draaiingen, die een gelijkzijdige driehoek in dat vlak op zichzelf afbeelden, is isomorf met A_3.

Opgave 13. Laat A de verzameling zijn der n veranderlijken $x_1, \ldots, x_n$; definieer

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)\ldots(x_{n-1} - x_n).$$

Een element σ van S_A is even of oneven naargelang Δ bij toepassing van σ overgaat in Δ of in $-\Delta$.

§ 4. Voortbrengende verzameling. Cyclische groepen.

Stelling 4.1 Als D een niet-lege deelverzameling van een groep G is, dan is de verzameling van alle producten $a_1a_2\ldots a_k$ met een willekeurig aantal factoren, zodat voor iedere factor a_j geldt $a_j \in D$ of $a_j^{-1} \in D$, een ondergroep van G, die D omvat en die deelverzameling is van iedere ondergroep van G, die D omvat.

Definitie 4.1 De ondergroep van stelling 4.1 heet de door D voortgebrachte ondergroep van G.

Definitie 4.2 Als D uit één element a bestaat, heet de door D voortgebrachte ondergroep de door a voortgebrachte cyclische ondergroep van G.

Opmerking. Deze cyclische ondergroep bestaat uit alle a^m (m geheel).

Definitie 4.3 Als een groep G een element a bevat, zodat G de door a voortgebrachte cyclische ondergroep van G is, heet G een cyclische groep (met voortbrengende a).

Stelling 4.2 Een cyclische groep met voortbrengende a kan zijn:

1. oneindig; dan zijn alle a^m verschillend.
2. van eindige orde n; dan zijn alle $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ verschillend; $a^m = a^k \Leftrightarrow m - k$ is deelbaar door n.

Opgave 14. De additieve groep van de gehele getallen is oneindig cyclisch; in S_n heeft de cyclische ondergroep voortgebracht door $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ de orde n.

Opgave 15. Twee oneindige cyclische groepen zijn isomorf. Twee eindige cyclische groepen van dezelfde orde zijn isomorf.

Opgave 16. S_2 en A_3 zijn cyclisch.

Opgave 17. De groep van de vlakke draaiingen, die een regelmatige n-hoek in dat vlak op zichzelf afbeelden, is cyclisch van orde n.

Opgave 18. De verzameling $\{(12),(13),\ldots,(1\ n)\}$ brengt S_n voort als $n \geq 2$.

Opgave 19. De verzameling $\{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1 2\ n)\}$ brengt A_n voort als $n \geq 3$. (Aanwijzing: bewijs achtereenvolgens dat A_n voortgebracht wordt door: de verzameling van alle 3 - cykels, de verzameling van alle 3 - cykels, die 1 bevatten, de verzameling van alle 3 - cykels, die 1 en 2 bevatten.)

Stelling 4.3 Iedere ondergroep van een cyclische groep is cyclisch.

Stelling 4.4 De ondergroepen van een oneindige cyclische groep G met voortbrengende a zijn, met uitzondering van de triviale ondergroep die alleen uit e bestaat, alle oneindig cyclisch en kunnen worden voortgebracht door a^k met $k > 0$.

Stelling 4.5 De orde van een ondergroep van een eindige cyclische groep G met voortbrengende a is een deler van de orde n van G. Bij iedere deler h van n bestaat er **één** en slechts **één** ondergroep van orde h; als voortbrengende van deze ondergroep kan $a^{n/h}$ worden gekozen.

Opgave 20. Een groep, die alleen triviale ondergroepen heeft, is cyclisch en heeft een orde, die 1 of een priemgetal is.

Definitie 4.4 In een groep G heet de orde van de cyclische ondergroep voortgebracht door a de orde van a.

Opgave 21. De orde van a is het kleinste onder de natuurlijke getallen n, waarvoor $a^n = e$. Het enige element van orde 1 is e. De elementen a en a^{-1} hebben dezelfde orde.

§ 5. Homomorfie. Congruentierelatie. Quotiëntgroep.

Definitie 5.1 Een afbeelding φ van een groep G in een groep G' heet een homomorfe afbeelding als voor alle $a \in G$ en alle $b \in G$ geldt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Definitie 5.2 Een equivalentierelatie $\equiv$ op een groep G heet een congruentierelatie als voor alle $a \in G$, alle $b \in G$, alle $c \in G$ en alle $d \in G$ geldt

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \\ c \equiv d \end{array}\right\} \Rightarrow ac \equiv bd.$$

Stelling 5.1 Als $\equiv$ een congruentierelatie op een groep G is, dan kan de quotiëntverzameling $G/\equiv$ tot een groep gemaakt worden door de volgende productdefinitie: als $K_1 \in G/\equiv$, $K_2 \in G/\equiv$, $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$ dan is K_1K_2 de klasse in $G/\equiv$, die a_1a_2 bevat. Het eenheidselement van de groep is de klasse die e bevat, de inverse van de klasse, die a bevat, is de klasse, die a^{-1} bevat.

Definitie 5.3 De groep $G/\equiv$ van stelling 5.1 heet de quotiëntgroep van G naar $\equiv$.

Opmerking. In plaats van quotiëntgroep zegt men ook factorgroep.

Stelling 5.2 De projectie van G op $G/\equiv$ is een homomorfe afbeelding van G op de quotiëntgroep, genaamd de kanonieke homomorfe afbeelding van G op $G/\equiv$.

Definitie 5.4 Een eeneenduidige homomorfe afbeelding heet een monomorfe afbeelding.

Stelling 5.3 (Homomorfiestelling; eerste versie). Als φ een homomorfe afbeelding van G in G' is, dan is de relatie $\equiv$ op G, gedefinieerd door $a \equiv b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ een congruentierelatie, waarvan de quotiëntverzameling de vezeling van φ is. De afbeelding $\varphi^* : G/\equiv \to G'$ gedefinieerd door $\varphi^*(K) = \varphi(\text{element van } K)$ is een monomorfe afbeelding van de quotiëntgroep in G', waarvan het beeld een ondergroep van G' is. In het bijzonder als φ een afbeelding op is, geldt $G/\equiv \,\cong G'$. Omgekeerd is van iedere congruentierelatie op G de quotiëntverzameling vezeling van een homomorfe afbeelding van G, namelijk van de kanonieke homomorfe afbeelding van G op de quotiëntgroep naar de congruentierelatie.

Stelling 5.4 Als $\equiv$ een congruentierelatie is, dan legt de klasse N die e bevat de relatie geheel vast door $a \equiv b \Leftrightarrow ba^{-1} \in N$.

Definitie 5.5 Een ondergroep H van G heet een normale ondergroep van G als voor alle $a \in G$ en alle $h \in H$ geldt $a\,h\,a^{-1} \in H$.

Stelling 5.5 In een abelse groep zijn alle ondergroepen normaal. In iedere groep zijn de triviale ondergroepen normaal.

Stelling 5.6 Bij een congruentierelatie is de klasse, die het eenheidselement bevat, een normale ondergroep.

Stelling 5.7 Als H een ondergroep van G is, is de relatie $\equiv$ op G, gedefinieerd door $a \equiv b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$ een equivalentierelatie, waarbij H een klasse is. Als H een normale ondergroep is, is deze relatie een congruentierelatie.

Definitie 5.6 Als H een ondergroep van G is en $a \in G$, dan heet de verzameling der elementen ha, waarbij h de verzameling H doorloopt, een rechter nevenklasse van H; notatie Ha.

Stelling 5.8 De verzameling der rechter nevenklassen van een ondergroep H van G is de klassenindeling behorende bij de in stelling 5.7 gedefinieerde equivalentierelatie; de afbeelding die Ha aan a toevoegt is de bijbehorende projectie.

Definitie 5.7 Als H een normale ondergroep van G is, heet de bij de congruentierelatie van stelling 5.7 behorende quotiëntgroep ook de quotiëntgroep van G naar H; notatie G/H.

Stelling 5.9 De elementen van de quotiëntgroep G/H van een groep G naar een normale ondergroep H zijn de rechter nevenklassen van H; vermenigvuldiging: $Ha \,.\, Hb = Hab$.

Analoog als hierboven definieert men een relatie $a \equiv b \Rightarrow a^{-1}b \in H$ en linker nevenklassen aH van H.

Stelling 5.10 Van een ondergroep zijn de rechter en linker nevenklassenindelingen dan en slechts dan hetzelfde als de ondergroep normaal is.

Opgave 22. Bepaal in S_4 de linker en rechter nevenklassen van de volgende twee ondergroepen:

$V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (groep van Klein),

$\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1423), (1324)\}$.

Toon eerst aan dat dit ondergroepen zijn.

Opgave 23. De transformatie $x \to x^{-1}$ van G beeldt elke linker nevenklasse van een ondergroep H af op een rechter nevenklasse van H.

Stelling 5.11 Als van de aantallen linker en rechter nevenklassen van een ondergroep één van beide eindig is, is de andere ook eindig en zijn ze aan elkaar gelijk. Dit aantal heet de index van de ondergroep.

Stelling 5.12 Als een ondergroep H eindig is, hebben alle linker en rechter nevenklassen van H evenveel elementen als H.

Stelling 5.13 Als een groep G eindig is en H een ondergroep van G, dan geldt orde van G = (orde van H) . (index van H).

Stelling 5.14 De orde van een ondergroep van een eindige groep is een deler van de orde van de groep.

Opgave 24. Als G orde n heeft en $a \in G$, dan is $a^n = e$.

Opgave 25. In de groep der orthogonale lineaire afbeeldingen van R_n heeft de ondergroep, bestaande uit de elementen van deze groep met determinant = 1, index 2.

Opgave 26. Als de orde van G een priemgetal is, bevat G alleen triviale ondergroepen; bovendien is G dan cyclisch.

Opgave 27. Een ondergroep van index 2 is normaal (voorbeeld: A_n in S_n).

Opgave 28. Laat G cyclisch zijn met voortbrengende a. Elke ondergroep H van orde > 1 heeft een eindige index = het kleinste getal k onder de natuurlijke getallen m waarvoor $a^m \in H$. Een stelsel representanten voor de nevenklassen van H is $e = a^\circ, a, a^2, \ldots, a^{k-1}$.

Opgave 29. Iedere groep van orde 4 is cyclisch of isomorf met de groep van Klein. Alle groepen van orde ≤ 5 zijn abels.

Definitie 5.8 Als φ een homomorfe afbeelding van G in G' is, dan heet de verzameling der elementen van G, die door φ in het eenheidselement van G' worden afgebeeld, de kern van φ.

Stelling 5.15 De kern van een homomorfe afbeelding $\varphi : G \to G'$ is een normale ondergroep van G.

Opgave 30. Een homomorfe afbeelding is dan en slechts dan monomorf, als de kern orde 1 heeft.

Opgave 31. $\varphi(A) = \det A$ levert een homomorfe afbeelding φ van de groep der reguliere lineaire transformaties van R_n op de multiplicatieve groep der reële getallen $\neq 0$. Bewijs dit. Wat is de kern?

Opgave 32. $\varphi(z) = e^z$ geeft een homomorfe afbeelding φ van de additieve groep der complexe getallen op de multiplicatieve groep der complexe getallen $\neq 0$. Wat is de kern? Wat is het beeld van de ondergroep van de zuiver imaginaire getallen?

Stelling 5.16 (Homomorfiestelling; tweede versie). Als φ een homomorfe afbeelding van G in G' is met kern N, dan is G/N de vezeling van φ. De afbeelding $\varphi^* : G/N \to G'$ gedefinieerd door $\varphi^*(Na) = \varphi(a)$ is een monomorfe afbeelding, waarvan het beeld een ondergroep van G' is. In het bijzonder als φ een afbeelding op is, geldt $G/N \cong G'$. Omgekeerd is van iedere normale ondergroep van G de quotiëntgroep vezeling van een homomorfe afbeelding van G, namelijk van de kanonieke homomorfe afbeelding van G op deze quotiëntgroep.

Gevolg. Het beeld van een homomorfe afbeelding $\varphi : G \to G'$ is een ondergroep van G'.

Opgave 33. Bewijs, dat $S_4/V_4 \cong S_3$ (Voor V_4 zie opgave 22).

Definitie 5.9 Een groep heet enkelvoudig als de triviale ondergroepen de enige normale ondergroepen zijn.

Opgave 34. De enige enkelvoudige abelse groepen zijn de cyclische groepen met een orde, die een priemgetal of 1 is.

Opmerking. Er bestaan ook niet-abelse enkelvoudige groepen, bijv. A_n voor $n \geqslant 5$ (dit tonen we niet aan; A_2 en A_3 zijn enkelvoudig, maar abels, A_4 is niet-abels en niet-enkelvoudig, want V_4 is een normale ondergroep van A_4). Dat A_n enkelvoudig is speelt een belangrijke rol bij de groepentheoretische behandeling van de theorie der algebraïsche vergelijkingen (theorie van Galois naar E. Galois, 1811 - 1832), in het bijzonder bij de stelling dat een vergelijking van graad $\geqslant 5$ geen oplossingsformule bezit, die een wortel uitdrukt in de coëfficiënten van de vergelijking met uitsluitende toepassing van optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling en worteltrekking.

Een recente stelling over enkelvoudige groepen zegt, dat iedere eindige, niet-abelse, enkelvoudige groep even orde heeft (Feit en Thompson, 1963).

Definitie 5.10 Als a en b elementen van een groep G zijn heet $aba^{-1}b^{-1}$ de commutator van a en b. De ondergroep van G voortgebracht door de verzameling van alle commutatoren van elementen van G heet de commutatorgroep C(G) van G.

Stelling 5.17 C(G) is een normale ondergroep van G.

Stelling 5.18 Voor een homomorfe afbeelding φ van G op G' met kern N geldt, dat G' dan en slechts dan abels is als $C(G) \subset N$. De commutatorgroep is de kleinste normale ondergroep met abelse quotiëntgroep.

Opgave 35. $C(S_n) = A_n$ $(n \geq 2)$.

Opgave 36. $C(A_n) = A_n$ voor $n \geq 5$, $C(A_4) = V_4$, $C(A_3)$ en $C(A_2)$ hebben orde 1.

Als een abelse groep additief geschreven wordt, noemt men nevenklassen restklassen; notatie $H + a$. Men zegt dat twee elementen, die in dezelfde restklasse van H liggen, congruent modulo H zijn en schrijft dit $a \equiv b \pmod H$ of korter $a \equiv b(H)$. Dit betekent $b-a \in H$.

Speciaal als G de additieve groep der gehele getallen is, bestaat een ondergroep uit alle veelvouden van een vast positief getal k; men schrijft dan $a \equiv b \pmod k$ of $a \equiv b\ (k)$. Dit betekent dat $b-a$ door k deelbaar is.

De quotiëntgroep van G naar H heet restklassengroep of restklassenmodulus.

Opgave 37. Een lineaire afbeelding A van een vectorruimte V in een vectorruimte W is een homomorfe afbeelding van de additieve groep van V in de additieve groep van W, waarvan de kern de nulruimte van A is.

§ 6. Transitiviteit. Inwendige en uitwendige automorfieën. Klassen geconjugeerden.

Stelling 6.1 Als G een groep van transformaties van een verzameling A is, definiëren we een relatie $\sim$ op A door: $a \sim b$ dan en slechts dan als er een $g \in G$ bestaat, zodat $g(a) = b$. Deze relatie is een equivalentierelatie.

Definitie 6.1 De klassen van de bij de in stelling 6.1 ingevoerde equivalentierelatie behorende klassenindeling heten transitiviteitsgebieden van G. Als de klassenindeling uit slechts één klasse bestaat (die dan A is), heet G transitief. Als $a \in A$, heet de deelverzameling G_a van G, bestaande uit de transformaties g van G, waarvoor $g(a) = a$, de stabilisator van a.

Stelling 6.2 Een stabilisator G_a is een ondergroep van G.

Stelling 6.3 Als G een groep van transformaties van A is, T een eindig transitiviteitsgebied van G, $a \in T$, G_a de stabilisator van a, dan geldt

$$\text{index van } G_a = \text{aantal elementen van } T.$$

In het bijzonder als G eindig is:

$$\text{orde van } G = (\text{orde van } G_a).(\text{aantal elementen van } T).$$

Bij elk der vijf regelmatige lichamen hoort de groep der ruimtelijke draaiingen, die het lichaam invariant laten.

	aantal						
	zij-vlakken	ribben	hoek-punten	ribben per zijvlak	ribben per hoekpunt	orde groep	groep $\cong$
tetraëder	4	6	4	3	3	12	A_4
kubus	6	12	8	4	3	24	S_4
octaëder	8	12	6	3	4	24	S_4
dodecaëder	12	30	20	5	3	60	A_5
icosaëder	20	30	12	3	5	60	A_5

<u>Opgave 38</u>. Bij de transformatiegroep van de Cayley-representatie van een groep heeft iedere stabilisator orde 1.

<u>Opgave 39</u>. Als A eindig is, heeft een transitieve transformatiegroep van A een orde, die een veelvoud is van het aantal elementen van A.

<u>Opgave 40</u>. Als G een transformatiegroep van A is en T een transitiviteitsgebied van G, dan is de afbeelding, die aan iedere $g \in G$ zijn restrictie tot T toevoegt, een homomorfe afbeelding op een transitieve groep van transformaties van T. Wat is de kern? (Voorbeeld: kubusgroep met hoekpunten.)

<u>Stelling 6.4</u> Als a een element van een groep G is, dan is $\tau_a : G \to G$, gedefinieerd door $\tau_a(x) = axa^{-1}$ een isomorfe afbeelding van G op G.

<u>Definitie 6.2</u> Een isomorfe afbeelding van een groep G op G heet een <u>automorfie</u> van G. Een automorfie als in stelling 6.4 heet een <u>inwendige automorfie</u> van G; de andere automorfieën van G heten <u>uitwendige automorfieën</u> van G.

<u>Stelling 6.5</u> De automorfieën van een groep G vormen een groep A(G) van transformaties; de inwendige automorfieën van G vormen een ondergroep van I(G) van A(G) (zie ook opgave 43).

<u>Stelling 6.6</u> De afbeelding die aan elk element a van G de inwendige automorfie τ_a toevoegt (zie stelling 6.4) is een homomorfe afbeelding van G op I(G).

Definitie 6.3 De kern van de homomorfe afbeelding van stelling 6.6 heet het centrum $Z(G)$ van G.

Stelling 6.7 Het centrum van een groep G bestaat uit de elementen a van G, waarvoor geldt, dat $ax = xa$ voor alle $x \in G$.

Opgave 41. Als G abels is, is $Z(G) = G$, dus heeft $I(G)$ orde 1.

Opgave 42. $A(V_4) \cong S_3$.

Opgave 43. $I(G)$ is een normale ondergroep van $A(G)$.

Opgave 44. $Z(S_n)$ heeft orde 1 en $I(S_n) \cong S_n$, behalve als $n = 2$.

Opgave 45. In een abelse groep is de afbeelding $x \rightarrow x^{-1}$ een automorfie.

Opgave 46. Als a een reëel getal $\neq 0$ is en V een vectorruimte, dan is de afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ gedefinieerd door $\varphi(\underline{x}) = a\underline{x}$ een automorfie van de additieve groep van V.

Opgave 47. In de groep van alle lineaire transformaties van R_n bestaat het centrum uit alle scalaire veelvouden aI met $a \neq 0$ van de identieke afbeelding.

Definitie 6.4 De transitiviteitsgebieden van $I(G)$ heten klassen geconjugeerden van G; twee elementen in dezelfde klasse heten geconjugeerd.

Definitie 6.5 Als a een element is van een groep G dan is de normalisator N_a van a de verzameling der elementen x van G, waarvoor $ax = xa$.

Stelling 6.8 De normalisator N_a van een element a van een eindige groep G is een ondergroep van G, waarvan de index gelijk is aan het aantal elementen van de klasse geconjugeerden van G, dia a bevat. Het aantal elementen van een klasse geconjugeerden van G is deler van de orde van G.

Opgave 48. Het aantal elementen van een klasse geconjugeerden is dan en slechts dan $= 1$, als de klasse een element van het centrum van de groep bevat. In een abelse groep bestaan alle klassen geconjugeerden uit één element.

Opgave 49. Een ondergroep is dan en slechts dan normaal, als hij met ieder element ook alle geconjugeerden van dat element bevat.

Opgave 50. De normalisator van a is een ondergroep, die de door a voortgebrachte cyclische ondergroep als normale ondergroep bevat.

Opgave 51. Als de groep G orde p^k heeft, waarin p een priemgetal en k een natuurlijk getal is, dan heeft $Z(G)$ orde > 1.

Opgave 52. Een automorfie van een groep beeldt een klasse geconjugeerden af op een klasse geconjugeerden.

Opgave 53. Als G een groep is en H een normale ondergroep van G, dan is de restrictie tot H van een inwendige automorfie van G een automorfie van H. Laat door een voorbeeld zien, dat deze automorfie van H niet inwendig behoeft te zijn.

Definitie 6.6 De cykelstructuur van een element σ van S_n is de combinatie van cykellengtes van σ.

Stelling 6.9 Twee elementen van S_n zijn dan en slechts dan geconjugeerd, als ze dezelfde cykelstructuur bezitten.

Stelling 6.10 Elke klasse geconjugeerden van S_n, die in A_n ligt, is of ook klasse in A_n of valt in A_n uiteen in twee even grote klassen; het laatste geval doet zich dan en slechts dan voor als de cykelstructuur uitsluitend cykels van oneven en onderling ongelijke lengte bevat (1-cykels meegeteld).

Opgave 54. Bewijs, dat A_5 enkelvoudig is (gebruik het resultaat van opgave 49).

§ 7. Direct product.

Stelling 7.1 Als G_1 en G_2 groepen zijn, dan vormt de verzameling van alle geordende paren (a_1, a_2) met $a_1 \in G_1$ en $a_2 \in G_2$ met de operatie

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$$

een groep.

Definitie 7.1 De groep, die gedefinieerd is in stelling 7.1, heet het (uitwendige) directe product $G_1 \times G_2$ van G_1 en G_2.

Stelling 7.2 In $G_1 \times G_2$ vormen de elementen (a_1, e_2), waarin e_2 het eenheidselement van G_2 is, een ondergroep G_1^*, die isomorf is met G_1 op grond van de afbeelding $(a_1, e_2) \to a_1$. Analoog G_2^* isomorf met G_2.

Definitie 7.2 Als een groep G ondergroepen G_1 en G_2 heeft, die voldoen aan

1. uit $g_1 \in G_1$ en $g_2 \in G_2$ volgt $g_1g_2 = g_2g_1$,

2. $G_1 \cap G_2$ heeft orde 1,

3. ieder element van G is te schrijven als product van een element van G_1 en een element van G_2,

dan heet G (<u>inwendig</u>) <u>direct product</u> van G_1 en G_2.

<u>Stelling 7.3</u> $G_1 \times G_2$ is inwendig direct product van G_1^* en G_2^* (zie stelling 7.2).

<u>Stelling 7.4</u> Als G inwendig direct product is van G_1 en G_2, dan geldt $G \cong G_1 \times G_2$.

<u>Opmerking</u>. Op grond van de stellingen 7.3 en 7.4 wordt het onderscheid tussen inwendig en uitwendig direct product niet scherp volgehouden. Zo schrijven we ook $G = G_1 \times G_2$, als G inwendig direct product van G_1 en G_2 is.

<u>Stelling 7.5</u> In de voorwaarden 1., 2., 3. van definitie 7.2 kan 2. vervangen worden door:

2'. uit $a_1 \in G_1$, $b_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$, $b_2 \in G_2$ en $a_1a_2 = b_1b_2$ volgt $a_1 = b_1$ en $a_2 = b_2$.

<u>Stelling 7.6</u> Als G inwendig direct product van G_1 en G_2 is, dan zijn G_1 en G_2 normale ondergroepen van G en $G/G_1 \cong G_2$, $G/G_2 \cong G_1$.

<u>Stelling 7.7</u> In definitie 7.1 (of in stelling 7.5) kan voorwaarde 1. vervangen worden door

1'. G_1 en G_2 zijn normale ondergroepen van G.

<u>Opgave 55</u>. Als G_1 en G_2 ondergroepen van de groep G zijn, die aan voorwaarden 1. en 2. van definitie 7.2 voldoen, dan is de door $G_1 \cup G_2$ voortgebrachte ondergroep van G inwendig direct product van G_1 en G_2.

<u>Definitie 7.3</u> Een ondergroep G_1 van een groep G, waarbij een ondergroep G_2 van G bestaat, zodat G inwendig direct product van G_1 en G_2 is, heet een <u>directe factor</u> van G.

<u>Definitie 7.4</u> Een groep G heet <u>inwendig direct product</u> van de ondergroepen $G_1, \ldots, G_n$ als geldt:

1. uit $g_j \in G_j$, $g_k \in G_k$, $j \neq k$ volgt $g_jg_k = g_kg_j$,

2. iedere $g \in G$ is op één en slechts één manier te schrijven in de vorm

$$g = g_1 g_2 \ldots g_n \text{ met } g_j \in G_j.$$

Bij additieve schrijfwijze spreekt men van <u>directe som</u> en schrijft men $G_1 \oplus G_2$. In plaats van directe factor zegt men <u>directe summand</u>.

<u>Opgave 56</u>. Als V een vectorruimte is, $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ een basis van V en D_j de 1-dimensionale deelruimte van V opgespannen door $\underline{e}_j$, dan geldt $V = D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots \oplus D_n$ in de additieve groep.

<u>Stelling 7.8</u> Als V een vectorruimte is en D een deelruimte van V, dan is D een directe summand van de additieve groep van V.

<u>Opmerking</u>. Een belangrijke stelling, die we hier niet bewijzen, zegt dat iedere eindige abelse groep direct product is van cyclische groepen.

<u>Opgave 57</u>. V_4 is direct product van twee cyclische groepen van orde 2.

<u>Opgave 58</u>. Als m en n onderling ondeelbare getallen zijn (d.w.z. dat m en n grootste gemene deler = 1 hebben), dan is de cyclische groep van orde mn direct product van een cyclische groep van orde m en een cyclische groep van orde n. (Aanwijzing: als (h,k) de grootste gemene deler en $\{h,k\}$ het kleinste gemene veelvoud van twee natuurlijke getallen h en k zijn, dan geldt $\{h,k\}(h,k) = hk$. Gebruik verder stelling 4.3.)

<u>Opgave 59</u>. De groep van de orthogonale lineaire transformaties van R_3 is direct product van de ondergroep bestaande uit de transformaties met determinant = 1 en de groep van orde 2, bestaande uit de identieke transformatie en de transformatie J, die bepaald is door $J\underline{x} = -\underline{x}$. (Een analoge stelling geldt voor R_n met <u>oneven</u> n.)

HOOFDSTUK II REPRESENTATIES VAN GROEPEN

§ 8. Complexe vectorruimten.

Definitie 8.1 Een vectorruimte, waarvan het lichaam der scalaren het lichaam der complexe getallen is, heet een complexe vectorruimte.

Definitie 8.2 Een inwendig product in een complexe vectorruimte is een toevoeging aan ieder geordend paar vectoren $\underline{x},\underline{y}$ van een complex getal $(\underline{x},\underline{y})$, zodat de volgende voorwaarden vervuld zijn voor alle vectoren $\underline{x},\underline{y}$ en $\underline{z}$ en alle complexe getallen a:

1. $(\underline{x},\underline{y}) = \overline{(\underline{y},\underline{x})}$,
2. $(a\underline{x},\underline{y}) = a(\underline{x},\underline{y})$,
3. $(\underline{x} + \underline{y},\underline{z}) = (\underline{x},\underline{z}) + (\underline{y},\underline{z})$,
4. $(\underline{x},\underline{x})$ is reëel en voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ is $(\underline{x},\underline{x}) > 0$.

Opmerking. Er geldt

$$(\underline{z},\underline{x} + \underline{y}) = (\underline{z},\underline{x}) + (\underline{z},\underline{y}) ,$$

$$(\underline{x},a\underline{y}) = \bar{a}(\underline{x},\underline{y}) .$$

Definitie 8.3 Als V een complexe vectorruimte met inwendig product is, dan heet een lineaire afbeelding U van V in V unitair als voor alle $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in V geldt

$$(U\underline{x},U\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y}) .$$

Definitie 8.4 Als V een complexe vectorruimte met inwendig product is, dan heet een lineaire afbeelding H van V in V hermitisch als voor alle $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in V geldt

$$(H\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},H\underline{y}) .$$

Definitie 8.5 Een basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ van een complexe vectorruimte met inwendig product heet orthonormaal als voor j=1,...,n en k=1,...,n geldt

$$(\underline{e}_j,\underline{e}_k) = \begin{cases} 0 \text{ als } j \neq k , \\ 1 \text{ als } j = k . \end{cases}$$

Opmerking. Met het symbool van Kronecker δ_{jk}:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ als } j \neq k \,, \\ 1 \text{ als } j = k \,, \end{cases}$$

schrijven we $(\underline{e}_j, \underline{e}_k) = \delta_{jk}$ voor een orthonormale basis.

Stelling 8.1 In iedere complexe vectorruimte met inwendig product van eindige dimensie bestaat er een orthonormale basis.

Definitie 8.6 Als A een matrix is met complexe elementen, dan ontstaat $\overline{A}$ uit A door alle elementen door hun geconjugeerd complexe te vervangen.

Definitie 8.7 Een vierkante matrix U met complexe elementen heet unitair als

$$U^{-1} = \overline{U}^T .$$

Definitie 8.8 Een vierkante matrix H met complexe elementen heet hermitisch als

$$H = \overline{H}^T .$$

Stelling 8.2 Een lineaire afbeelding van een complexe vectorruimte met inwendig product van eindige dimensie in zichzelf is dan en slechts dan unitair (resp. hermitisch) als haar matrix ten opzichte van een orthonormale basis unitair (resp. hermitisch) is.

Gevolg. Een unitaire afbeelding van een vectorruimte van eindige dimensie is een transformatie.

Opmerking. Voor reële vectorruimten is een analoge theorie op te zetten. Met unitair correspondeert dan orthogonaal en met hermitisch symmetrisch. Voor een orthogonale matrix O geldt

$$O^{-1} = O^T$$

en voor een symmetrische matrix S

$$S = S^T .$$

Definitie 8.9 Als V een complexe vectorruimte met inwendig product is en W een deelruimte van V, dan heet de verzameling bestaande uit de vectoren $\underline{x}$ van V waarvoor geldt, dat $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ voor alle $\underline{y} \in W$, het orthogonale complement van W in V.

Stelling 8.3 Het orthogonale complement W_1 van W in V is een deelruimte van V.

Als W een eindige dimensie heeft, geldt

$$V = W \oplus W_1 .$$

Stelling 8.4 Als V een complexe vectorruimte met inwendig product van eindige dimensie is, U een unitaire transformatie van V en W een deelruimte van V, die door U in zichzelf wordt afgebeeld, dan wordt het orthogonale complement van W in V ook door U in zichzelf afgebeeld.

§ 9. Groeprepresentatie.

Definitie 9.1 Een representatie van een groep G is een homomorfe afbeelding van G in de groep van de lineaire transformaties van een complexe vectorruimte van eindige, positieve dimensie.

Stelling 9.1 Als aan ieder element g van een groep G een lineaire afbeelding $\sigma(g)$ van een complexe vectorruimte van eindige, positieve dimensie in zichzelf is toegevoegd zodat $\sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)$ voor alle $g_1 \in G, g_2 \in G$ en zodat er een $a \in G$ bestaat, waarvoor $\sigma(a)$ regulier is, dan is σ een representatie van G.

Opmerking. Voor a kiest men vaak het eenheidselement e. Als $\sigma(e)$ de identieke transformatie is, is $\sigma(e)$ uiteraard regulier.

Stelling 9.2 Als σ een representatie van G is met kern N en H een normale ondergroep van G, waarvoor geldt $H \subset N$, dan definieert $\sigma^*(Hg) = \sigma(g)$ een representatie van G/H. Als H een normale ondergroep van een groep G is en τ een representatie van G/H, dan definieert $\sigma(g) = \tau(Hg)$ een representatie σ van G, waarvoor geldt $H \subset$ kern.

Definitie 9.2 Als een representatie een monomorfe afbeelding is, heet zij getrouw.

Definitie 9.3 Als V de vectorruimte is, waarop de lineaire afbeeldingen van een representatie werken, dan spreekt men van een representatie in V. De dimensie van V noemen we de dimensie (of de graad) van de representatie.

Definitie 9.4 Twee representaties σ(in V) en τ(in W) van dezelfde groep G heten equivalent, als er een reguliere lineaire afbeelding T van V op W bestaat, zodat

$$\tau(g) = T\sigma(g)T^{-1} \text{ voor alle } g \in G.$$

Definitie 9.5 Als G een groep is en n een natuurlijk getal en als aan iedere $g \in G$ een reguliere $n \times n$ complexe matrix $\Sigma(g)$ is toegevoegd, zodat $\Sigma(g_1g_2) = \Sigma(g_1)\Sigma(g_2)$ voor alle $g_1 \in G, g_2 \in G$, dan heet Σ een matrixrepresentatie van G van dimensie n.

Definitie 9.6 Twee matrixrepresentaties Σ en Σ^* beide van dezelfde dimensie n en van dezelfde groep G heten equivalent, als er een reguliere $n \times n$ complexe matrix S bestaat, zodat

$$\Sigma^*(g) = S\Sigma(g)S^{-1} \text{ voor alle } g \in G.$$

Stelling 9.3 Als σ een representatie van G in V is, $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ een basis van V en $\Sigma(g)$ de matrix van $\sigma(g)$ ten opzichte van $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$, dan is Σ een matrixrepresentatie van G. Doet men hetzelfde met een andere basis van V, dan ontstaat een matrixrepresentatie Σ^*, die equivalent is met Σ. Als σ en τ representaties van G zijn en construeert men op vermelde wijze bijbehorende matrixrepresentaties Σ en T, dan zijn deze dan en slechts dan equivalent als σ en τ equivalent zijn.

Definitie 9.7 Als σ een representatie van G in V is en als in V een inwendig product gegeven is, zodat $\sigma(g)$ unitair is voor alle $g \in G$, dan heet de representatie σ unitair (ten opzichte van dit inwendige product).

Stelling 9.4 Als A een verzameling is en B een complexe vectorruimte, dan is de verzameling Φ van alle afbeeldingen van A in B een complexe vectorruimte op grond van de definities

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) \ ,$$

$$(\alpha\varphi)(a) = \alpha\varphi(a)$$

voor alle $\varphi \in \Phi, \psi \in \Phi, a \in A$, α complex. Als T een transformatie van A is, dan is de afbeelding $T' : \Phi \to \Phi$ gedefinieerd door

$$(T'\varphi)(x) = \varphi(T^{-1}x) \text{ voor alle } \varphi \in \Phi \text{ en alle } x \in A$$

een transformatie van Φ, die lineair is. Als T_1 en T_2 transformaties van A zijn, dan geldt

$$(T_1T_2)' = T_1'T_2' \ .$$

Als Ψ een deelruimte van Φ is, $[T]$ de restrictie van T' tot Ψ en G een groep van transformaties van A, zodat geldt

$$T'\psi \in \Psi \text{ voor alle } T \in G \text{ en alle } \psi \in \Psi,$$

dan is $T \to [T]$ voor $T \in G$ een homomorfe afbeelding van G in de groep der lineaire transformaties van Ψ, die, als Ψ bovendien eindige positieve dimensie heeft, een representatie van G is.

Opmerking. De keuze $A = R_3$, B = verzameling der complexe getallen, G = de groep der orthogonale transformaties en Ψ = verzameling der homogene polynomen u in drie veranderlijken van vaste graad ℓ, die voldoen aan $\Delta u = 0$ geeft een voorbeeld, dat belangrijk is in de quantummechanica; ℓ = azimutaal quantengetal; $\ell = 0,1,2,3,\ldots$ correspondeert met s,p,d,f,...; $2\ell + 1$ = ontaardingsgraad = dimensie van Ψ.

Stelling 9.5 Als G een eindige groep is en Φ de vectorruimte van de afbeeldingen van G in de verzameling der complexe getallen, dan is ρ gedefinieerd door

$$(\rho(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x) \text{ voor alle } g \in G,\ \varphi \in \Phi,\ x \in G$$

een representatie van G in Φ, genaamd de reguliere representatie van G. Een basis van Φ wordt verkregen doorvoor iedere $a \in G$ het element e_a van Φ te nemen, gedefinieerd door $e_a(g) = \delta_{a,g}$. Er geldt dan

$$\rho(g)e_a = e_{ga}$$

voor alle $g \in G$, $a \in G$. Als men door een nummering van de elementen van G een nummering van deze basis tot stand brengt, kan men de matrix $P(g)$ van $\rho(g)$ vormen; deze matrix is voor iedere $g \in G$ een permutatiematrix, d.w.z. een matrix, die in iedere rij en in iedere kolom precies één 1 en overigens nullen bevat.

Opgave 60. Bepaal de reguliere representatie van V_4 met bijbehorende matrices.

Opmerking over toepassing in de quantummechanica. De configuratieruimte C is een reële vectorruimte, die ontstaat door de coördinaten van de deeltjes in een fysisch stelsel samen te nemen. Een toestandsfunctie $\Psi(\underline{q},t)$ is een complexwaardige functie, die afhangt van een vector $\underline{q}$ in de configuratieruimte en de tijd t. Deze voldoet aan de vergelijking van Schroedinger

$$H\Psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 \; ;$$

hierin is H de energieoperator, een lineaire differentiaaloperator. We beschouwen slechts oplossingen, waarvoor

$$\int_C \Psi\overline{\Psi}\, d\underline{q}$$

eindig is. Speciale oplossingen zijn de staande golven, d.w.z. functies van de gedaante

$$\Psi(\underline{q},t) = \psi(\underline{q})e^{-i\omega t} \qquad (\omega \text{ reëel en constant}).$$

Nu hangt H niet van de tijd af, d.w.z. als $\Psi(\underline{q},t) = \psi(\underline{q})\chi(t)$, dan is $(H\Psi)(\underline{q},t) = \chi(t)(H\psi)(\underline{q})$, dus voor een staande golf geldt

$$H\psi = \varepsilon\psi, \text{ waarin } \varepsilon = \hbar\,\omega,$$

dus ψ is een eigenfunctie van H bij eigenwaarde ε, het energieniveau. We beschouwen nu de ruimte L van de complexwaardige functies gedefinieerd in C, waarvoor $\int \varphi\overline{\varphi}\, d\underline{q}$ over de hele ruimte C gedefinieerd en eindig is. Als

$\varphi \in L$, $\psi \in L$, dan is ook $(\varphi,\psi) = \int \varphi\overline{\psi}\, d\underline{q}$ eindig en voldoet aan de eisen van

een inwendig product. De operator H is wegens de differentiaties niet op de hele L gedefinieerd, maar voldoet aan

$$(H\varphi,\psi) = (\varphi,H\psi)$$

voor functies, waarvoor $H\varphi$ en $H\psi$ gedefinieerd zijn. De oplossingen van $H\psi = \varepsilon\psi$ bij vaste ε vormen een vectorruimte $L_{(\varepsilon)}$, die in vele praktische gevallen een eindige dimensie heeft. Als deze positief is, dan heet de dimensie de graad van ontaarding van het energieniveau ε. Laat nu T een transformatie van C zijn, die de fysische situatie niet verandert: een symmetrieoperatie van de fysische configuratie. Voorbeelden: T is geïnduceerd door een draaiing of spiegeling van de gewone ruimte, die de fysische gegevens onveranderd laat, zoals een draaiing om de verbindingsas bij een tweeatomig molecuul, of T is geïnduceerd door een permutatie van gelijkwaardige deeltjes in een configuratie. We passen nu stelling 9.4 toe, waarbij A de configuratieruimte C is, B de verzameling der complexe getallen en Ψ de ruimte L. Als nu G een groep van symmetrieoperaties van C is en $T \in G$, dan is $[T]$ de restrictie van T' tot L; we moeten nagaan of uit $\varphi \in L$ volgt dat $[T]\varphi \in L$. In de hierbovengenoemde voorbeelden is dat inderdaad het geval en geldt zelfs voor $\varphi \in L$ en $\psi \in L$:

$$([T]\varphi,\ [T]\psi) = (\varphi,\psi),$$

zodat $[T]$ een unitaire transformatie van L is. Omdat G een symmetrieoperatie is gaat een eigenfunctie bij eigenwaarde ε bij $[T]$ over in een eigenfunctie bij eigenwaarde ε. Conclusie:

Voor iedere symmetriegroep G van de configuratieruimte induceert de afbeelding $T \to [T]$ een representatie van G in $L_{(\varepsilon)}$ voor iedere eigenwaarde ε van de energieoperator H.

Bestudering van representaties levert gegevens over de energieniveau's; bijvoorbeeld geven de representaties van de driedimensionale draaiingsgroep informatie over het rotatiesymmetrische atoommodel.

§ 10. Reducibiliteit en volledige reducibiliteit.

Definitie 10.1 Als σ een representatie van G in V is en W een deelruimte van V, zodat voor alle $\underline{x} \in W$ en alle $g \in G$ geldt $\sigma(g)\underline{x} \in W$, dan heet W een invariante deelruimte van V (ten opzichte van σ).

Stelling 10.1 Als σ een representatie van G in V is en W een invariante deelruimte van V met dimensie > 0, dan is τ gedefinieerd door $\tau(g)$ = restrictie van $\sigma(g)$ tot W een representatie van G in W, die de restrictie van σ tot W wordt genoemd.

Definitie 10.2 Als V een vectorruimte is, dan heten de deelruimten V en de ruimte, die alleen uit de nulvector van V bestaat, de triviale deelruimten van V.

Definitie 10.3 Als σ een representatie van G in V is en als de triviale deelruimten van V de enige invariante deelruimten van V t.o.v. σ zijn, dan heet σ irreducibel. Als σ niet irreducibel is, heet σ reducibel.

Definitie 10.4 Als σ een representatie van G in V is en W een invariante deelruimte van V t.o.v. σ is, dan heet W irreducibel (resp. reducibel) t.o.v. σ, als de restrictie van σ tot W irreducibel (resp. reducibel) is.

Definitie 10.5 Als σ een representatie van G in V is en V is directe som van een aantal invariante irreducibele deelruimten t.o.v. σ met dimensie > 0, dan heet σ volledig reducibel; hierbij is inbegrepen het geval, dat de directe som slechts één term bevat en σ dus irreducibel is.

Stelling 10.2 Als σ een representatie van G in V van dimensie n is en W een invariante deelruimte van V met dimensie $k > 0$ en als $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ een basis van V is, zodat $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ een basis van W is, dan hebben de matrices van $\sigma(g)$ t.o.v. deze basis alle de volgende blokstructuur

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix};$$

hierin is A een $k \times k$ matrix, B een $(n-k)\times(n-k)$ matrix, 0 de $(n-k)\times k$ nulmatrix. Verder is A de bij de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ behorende matrix van de restrictie van σ tot W.

Stelling 10.3 Als σ een volledig reducibele representatie van G in V is en $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ is een directe splitsing van V in invariante irreducibele deelruimten van dimensie > 0, dan hebben de matrices van $\sigma(g)$ t.o.v. een basis, die ontstaan is uit het achter elkaar zetten van bases van $W_1,\dots,W_k$, alle de volgende blokstructuur

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix},$$

waarbij buiten de getekende blokken overal nullen staan, en waarin A_j de matrix van de restrictie van σ tot W_j is bij de gekozen basis $(j = 1,\dots,k)$. De representatie σ is door haar restricties tot $W_1,\dots,W_k$ geheel vastgelegd.

Stelling 10.4 Iedere unitaire representatie is volledig reducibel.

Stelling 10.5 Als σ een representatie is van een eindige groep G in V, dan kan in V een inwendig product worden gedefinieerd, zodat σ unitair is.

Stelling 10.6 (Stelling van Maschke) Iedere representatie van een eindige groep is volledig reducibel.

Opmerking. De in de quantummechanica ingevoerde representaties zijn altijd unitair en dus volledig reducibel, ook als de groep oneindig is.

Opgave 61. Neem een driedimensionale ruimte met basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en definieer een representatie σ van S_3 door bij iedere permutatie van S_3 de corresponderende permutatie van de basis uit te voeren, bijv. $\sigma((12))\underline{e}_1 = \underline{e}_2$, $\sigma((12))\underline{e}_2 = \underline{e}_1$, $\sigma((12))\underline{e}_3 = \underline{e}_3$. Stel

$$\left.\begin{aligned} \underline{f}_1 &= \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \\ \underline{f}_2 &= \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \\ \underline{f}_3 &= \quad\;\; \underline{e}_2 - \underline{e}_3 \end{aligned}\right\}.$$

Dan brengt f_1 een eendimensionale en brengen $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ een tweedimensionale invariante deelruimte voort. Bepaal de matrices van de restrictie tot de ruimte voortgebracht door $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ en laat zien dat de restrictie irreducibel is.

Stelling 10.7 (Lemma van Schur) Als σ en τ irreducibele representaties van G in V resp. W zijn en P een lineaire afbeelding van V in W is, waarvoor geldt

$$P\sigma(g) = \tau(g)P \text{ voor alle } g \in G,$$

dan is P de nulafbeelding of P is regulier (in het laatste geval zijn σ en τ equivalent). Als bovendien gegeven is, dat σ en τ equivalent zijn op grond van een reguliere lineaire afbeelding S van V op W:

$$\tau(g) = S\sigma(g)S^{-1} \text{ voor alle } g \in G,$$

dan bestaat er een complex getal α, zodat $P = \alpha S$.

Gevolg. Als σ een irreducibele representatie van G in V is en P is een lineaire afbeelding van V in V, waarvoor geldt

$$P\sigma(g) = \sigma(g)P \text{ voor alle } g \in G,$$

dan bestaat er een complex getal α, zodat $P = \alpha I$.

Stelling 10.8 (Eenduidigheidsstelling) Als σ een representatie van G in V is en

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k,$$
$$V = W_1 \oplus \dots + W_\ell,$$

waarin $V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_\ell$ invariante irreducibele deelruimten van V t.o.v. σ met dimensie > 0 zijn, dan is $k = \ell$ en er is een verandering van volgorde $V'_1,\dots,V'_k$ van $V_1,\dots,V_k$, dusdanig dat de restricties van σ tot V'_j en W_j equivalent zijn voor $j = 1,\dots,k$.

Definitie 10.6 Als σ een volledig reducibele representatie van G in V is en τ een irreducibele representatie van G, dan is het aantal malen dat τ in σ voorkomt het aantal der deelruimten $V_1,\dots,V_k$ in een directe splitsing $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ van V in invariante irreducibele deelruimten t.o.v. σ met dimensie > 0, waarvoor de restrictie van σ tot die deelruimte equivalent is met τ.

Opmerking 1. Deze definitie wordt gerechtvaardigd door het uit stelling 10.8 volgende feit, dat het aantal malen dat τ in σ voorkomt alleen van σ en τ en niet van de keuze van de directe splitsing van V afhangt.

Opmerking 2. Een volledig reducibele representatie van G is op equivalentie na vastgelegd, wanneer voor iedere irreducibele representatie τ van G bekend is hoeveel malen zij in de gegeven representatie voorkomt.

§ 11. Representaties van abelse groepen.

Stelling 11.1 Iedere irreducibele representatie van een abelse groep heeft dimensie 1.

Een lineaire transformatie van een ééndimensionale vectorruimte is een vermenigvuldiging met een vast complex getal $a \neq 0$; dit getal is tevens het enige matrixelement van de matrix van de lineaire transformatie t.o.v. een willekeurige basis; de transformatie is dan en slechts dan unitair als $|a| = 1$. Een ééndimensionale representatie kan dus worden beschreven met een getallenfunctie χ, die aan ieder element g van de groep een complex getal $\chi(g) \neq 0$ toevoegt, zodat voldaan is aan $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$.

Directe splitsing van een representatie σ in V van een abelse groep in irreducibele bestanddelen komt neer op het transformeren van de matrices in diagonaalvorm ofwel op het bepalen van n onafhankelijke vectoren ($n = \dim V$), die eigenvectoren zijn van $\sigma(g)$ voor alle g.

Stelling 11.2 Voor ieder complex getal $\alpha \neq 0$ levert $\chi(k) = \alpha^k$ (k geheel) een representatie van de additieve groep der gehele getallen; andere ééndimensionale representaties van deze groep zijn er niet.

Stelling 11.3 Als C_m een cyclische groep van orde m met voortbrengende a is en h geheel, $h = 0,1,\ldots,m-1$, dan levert

$$\chi_h(a^k) = e^{\frac{2\pi i h k}{m}}$$

voor elke h een representatie van C_m; andere ééndimensionale representaties van C_m zijn er niet.

Opgave 62. Splits de reguliere representatie van C_m in irreducibele.

Opgave 63. Splits de reguliere representatie van V_4 in irreducibele.

Stelling 11.4 De groep O_2^+ van de orthogonale lineaire transformaties van R_2 met determinant = 1 heeft als elementen de draaiingen $D(\varphi)$ over een draaiingshoek φ. Voor ieder geheel getal h levert

$$\chi_h(D(\varphi)) = e^{-ih\varphi}$$

een representatie van O_2^+. Deze ééndimensionale representaties van O_2^+ zijn de enige, waarbij χ een continue functie van φ is.

Opgave 64. Reduceer de matrixrepresentatie

$$D(\varphi) \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Stelling 11.5 Iedere ééndimensionale representatie van een willekeurige groep G is verkrijgbaar uit een representatie van $G/C(G)$ op de wijze van stelling 9.2.

Stelling 11.6 Bij iedere groep G levert $\chi(g) = 1$ voor alle $g \in G$ een ééndimensionale representatie van G, die de identieke representatie genoemd wordt.

Opgave 65. Bepaal alle ééndimensionale representaties van A_n (zie opgave 36).

§ 12. Karakters en karakterrelaties.

Definitie 12.1 Het spoor sp(A) van een $n \times n$ matrix $A = (a_{jk})$ is de som van de elementen in de hoofddiagonaal:

$$sp(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} .$$

Stelling 12.1 Als A en S $n \times n$ matrices zijn en S regulier is, dan geldt

$$sp(S^{-1} A S) = sp(A) .$$

Definitie 12.2 Het spoor sp(A) van een lineaire afbeelding A van een n-dimensionale vectorruimte V in zichzelf is het spoor van de matrix van A ten opzichte van een basis van V.

Opmerking. Deze definitie wordt gerechtvaardigd doordat op grond van stelling 12.1 het spoor van de matrix van A niet afhangt van de keuze van de basis in V.

Definitie 12.3 Als σ een representatie van een groep G is, dan heet de afbeelding χ_σ van G in de verzameling der complexe getallen gedefinieerd door

$$\chi_\sigma(g) = sp(\sigma(g)) \text{ voor alle } g \in G$$

het karakter van G behorend bij σ. Als σ irreducibel is, heet het bijbehorende karakter enkelvoudig (of irreducibel).

Opmerking. Soms spreekt men over een karakter χ zonder de bijbehorende representatie te specificeren.

Stelling 12.2 Bij equivalente representaties van een groep behoort hetzelfde karakter.

Omgekeerd geldt, dat twee volledig reducibele representaties van een groep, waarbij hetzelfde karakter behoort, equivalent zijn; dit bewijzen we niet algemeen, maar binnenkort wel voor eindige groepen (stelling 12.6).

Opgave 66. $\chi_\sigma(e)$ = dimensie van σ.

Opgave 67. Voor de reguliere representatie ρ van een eindige groep G met orde m geldt

$$\chi_\rho(e) = m, \quad \chi_\rho(g) = 0 \text{ voor } g \neq e .$$

Stelling 12.3 Als G een eindige groep van orde m is, en σ en τ irreducibele representaties van G zijn, dan geldt

$$\sum_{a \in G} \chi_\tau(a)\chi_\sigma(a^{-1}) = \begin{cases} 0 \text{ als } \sigma \text{ en } \tau \text{ niet equivalent zijn,} \\ m \text{ als } \sigma \text{ en } \tau \text{ equivalent zijn.} \end{cases}$$

Stelling 12.4 Voor een representatie σ van een eindige groep G geldt

$$\chi_\sigma(a^{-1}) = \overline{\chi_\sigma(a)} \text{ voor alle } a \in G \text{ .}$$

Opmerking. Op grond van stelling 12.4 heet de in stelling 12.3 vermelde relatie een orthogonaliteitsrelatie voor enkelvoudige karakters. Er bestaan nog andere dergelijke orthogonaliteitsrelaties, die wij echter niet bespreken.

Stelling 12.5 Als σ en τ representaties zijn van een eindige groep G van orde m en τ irreducibel is, dan is

$$\frac{1}{m} \sum_{a \in G} \chi_\sigma(a)\chi_\tau(a^{-1})$$

het aantal malen dat τ in σ voorkomt.

Opmerking. Uit het bewijs van stelling 12.5 is makkelijk een nieuw bewijs voor eindige groepen van de eenduidigheidsstelling (stelling 10.8) te halen.

Stelling 12.6 Twee representaties van een eindige groep met hetzelfde karakter zijn equivalent.

Stelling 12.7 Als σ een representatie van een eindige groep G van orde m is, dan is

$$\frac{1}{m} \sum_{a \in G} \chi_\sigma(a)\chi_\sigma(a^{-1})$$

gelijk aan de som van de kwadraten van de aantallen malen, dat irreducibele representaties in σ voorkomen. In het bijzonder is σ dan en slechts dan irreducibel, als dit getal = 1 is.

Stelling 12.8 Het aantal malen dat een irreducibele representatie van een eindige groep in de reguliere representatie van die groep voorkomt is gelijk aan haar dimensie. De som van de kwadraten van deze aantallen is gelijk aan de orde van de groep.

Gevolg. Een abelse groep van orde m heeft m enkelvoudige karakters.

Opmerking. Uit stelling 12.8 volgt dat iedere irreducibele representatie van een eindige groep minstens één equivalente kopie in de reguliere representatie bezit.

Stelling 12.9 Voor een karakter χ van een groep G geldt

$$\chi(a g a^{-1}) = \chi(g) \text{ voor alle } a \in G,\ g \in G\ .$$

Opmerking. Op grond van stelling 12.9 is een karakter een klassefunctie, d.w.z. constant voor alle elementen van een klasse geconjugeerden. Daarom vat men een karakter ook wel op als een functie, die gedefinieerd is op de verzameling der klassen geconjugeerden van een groep:

$$\chi(K) = \chi(\text{een element van } K).$$

Wij zullen beide interpretaties door elkaar gebruiken.

Opgave 68. Bepaal alle enkelvoudige karakters van S_4 en A_4.

Karaktertabellen van S_3, S_4 en A_4.

S_3:

h	K	χ_1	χ_2	χ_3
1	(1)	1	1	2
2	(123)	1	1	-1
3	(12)	1	-1	0

S_4:

h	K	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
1	(1)	1	1	2	3	3
8	(123)	1	1	-1	0	0
3	(12)(34)	1	1	2	-1	-1
6	(12)	1	-1	0	1	-1
6	(1234)	1	-1	0	-1	1

A_4:

h	K	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
1	(1)	1	1	1	3
4	(123)	1	ρ	ρ^2	0
4	(132)	1	ρ^2	ρ	0
3	(12)(34)	1	1	1	-1

Hierin is K = klasse, h = aantal elementen in klasse, $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Stelling 12.10 Als σ een irreducibele representatie van dimensie n is van een eindige groep G en K een klasse geconjugeerden van G met h elementen, dan geldt

$$\sum_{a \in K} \sigma(a) = \frac{h}{n} \chi_\sigma(K) I .$$

Stelling 12.11 Van een eindige groep is het aantal niet-equivalente irreducibele representaties gelijk aan het aantal klassen geconjugeerden.

Stelling 12.12 Laat G een eindige groep van orde m zijn en $K_1,\ldots,K_q$ de klassen geconjugeerden van G met aantallen elementen $h_1,\ldots,h_q$; $K_1 = \{e\}$, $h_1 = 1$. Dan hangt het aantal malen, dat een element $c \in K_k$ geschreven kan worden in de vorm $c = ab$ met $a \in K_i$, $b \in K_j$ niet af van de keuze van c in K_k; noem dit aantal $g_{ij}^{(k)}$. Het stelsel vergelijkingen

$$(*)\begin{cases} h_i h_j x_i x_j = \sum_{k=1}^{q} g_{ij}^{(k)} h_k x_1 x_k \text{ voor } i = 1,\ldots,q;\ j = 1,\ldots,q, \\ \sum_{j=1}^{q} h_j |x_j|^2 = m, \\ x_1 \text{ reëel} > 0, \end{cases}$$

heeft als de verzameling van oplossingen de $(x_1,\ldots,x_q)$, waarvoor geldt $x_j = \chi(K_j)$, waarin χ een enkelvoudig karakter van G is.

Stelling 12.13 Met dezelfde gegevens als in stelling 12.12 heeft het stelsel vergelijkingen

$$(**)\begin{cases} y_i y_j = \sum_{k=1}^{q} g_{ij}^{(k)} y_k \text{ voor } i = 1,\ldots,q;\ j = 1,\ldots,q, \\ (y_1,\ldots,y_q) \neq (0,0,\ldots,0), \end{cases}$$

oplossingen $(y_1,\ldots,y_q)$, die door de definitie

$$\text{(a)} \qquad n = \sqrt{\frac{m}{\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{h_j} |y_j|^2}} \ , \quad x_j = \frac{n}{h_j} y_j \text{ voor } j = 1,\ldots,q$$

oplossingen $(x_1,\dots,x_q)$ van (*) leveren. Omgekeerd levert een oplossing $(x_1,\dots,x_q)$ van (*) door de definitie

$$\text{(b)} \qquad y_j = \frac{h_j x_j}{x_1} \text{ voor } j = 1,\dots,q$$

een oplossing $(y_1,\dots,y_q)$ van (**). Toepassing van eerst (a) en dan (b) op een oplossing van (**) levert weer dezelfde oplossing; toepassing van eerst (b) en dan (a) op een oplossing van (*) levert weer dezelfde oplossing.

Opmerking. De opstelling der karaktervergelijkingen wordt vergemakkelijkt door gebruik te maken van de volgende feiten.

1. $g_{ij}^{(k)} = g_{ji}^{(k)}$.

2. Neem een vaste $a \in K_i$, vermenigvuldig deze met alle $b \in K_j$ en tel het aantal elementen in K_k onder deze producten, dan is
   $g_{ij}^{(k)} = \frac{h_i}{h_k}$ maal dat aantal.

3. Stel $y_1 = 1$ en laat de vergelijkingen met $i = 1$ of $j = 1$ weg; dit verandert de verzameling der oplossingen niet.

Voorbeeld. In S_3 stellen we

$$K_1 = \{(1)\}, \qquad h_1 = 1,$$
$$K_2 = \{(123),(132)\}, \qquad h_2 = 2,$$
$$K_3 = \{(12),(13),(23)\}, \qquad h_3 = 3,$$

dan zijn de karaktervergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} y_2^2 &= 2 + y \\ y_2 y_3 &= 2y_3 \\ y_3^2 &= 3 + 3y_2 \end{aligned}\right\} .$$

Opgave 69. Bepaal uit bovenstaande vergelijkingen de enkelvoudige karakters van S_3.

Opgave 70. Bepaal de karaktervergelijkingen en de enkelvoudige karakters van A_4 en S_4.

HOOFDSTUK III SYMMETRIEGROEPEN

§ 13. Eindige ondergroepen van de orthogonale groep.

Definitie 13.1 O_n is de groep van de orthogonale lineaire transformaties van R_n, O_n^+ de ondergroep van O_n bestaande uit de transformaties met determinant = 1.

Stelling 13.1 O_2^+ bestaat uit draaiingen om de oorsprong, de elementen van $O_2 \backslash O_2^+$ zijn spiegelingen in een lijn door de oorsprong. Als D een draaiing is en S een spiegeling, dan geldt $S^2 = I$, $SD = D^{-1}S$.

Stelling 13.2 O_3^+ bestaat uit draaiingen om een draaiingsas, de elementen van $O_3 \backslash O_3^+$ zijn draaispiegelingen; een draaispiegeling is het product van een draaiing om een as en een spiegeling in een vlak loodrecht op die as. Iedere draaiing behalve de identieke I legt haar draaiingsas vast; hij heeft de richting van een eigenvector bij eigenwaarde 1. Iedere draaispiegeling behalve de draaispiegeling J met draaispiegelhoek π legt haar draaispiegelas vast; hij heeft de richting van een eigenvector bij eigenwaarde -1. J is de spiegeling in de oorsprong: $J\underline{x} = -\underline{x}$.

Opgave 71. $Z(O_3)$ bestaat uit I en J.

Stelling 13.3 Iedere eindige ondergroep van O_2^+ is cyclisch met voortbrengende $D(\frac{2\pi}{m})$, m een natuurlijk getal.

Stelling 13.4 In een ondergroep van O_n, die geen ondergroep van O_n^+ is, vormen de elementen met determinant = 1 een ondergroep van index 2.

Stelling 13.5 Als K een ondergroep van O_2^+ is en $S \in O_2 \backslash O_2^+$, dan vormen de elementen D en DS, waarbij D de groep K doorloopt, een ondergroep van O_2. Op deze wijze worden alle ondergroepen van O_2 verkregen, die niet bevat zijn in O_2^+.

Stelling 13.6 De eindige ondergroepen van O_2 zijn de cyclische ondergroepen C_m van O_2^+ en de diëdergroepen D_m van orde 2m, die bestaan uit de elementen D en DS, waarin D de groep C_m doorloopt en S een vaste spiegeling is.

Stelling 13.7 De eindige ondergroepen van O_3^+ zijn:

cyclische groepen C_m,
diëdergroepen D_m,
de tetraëdergroep $\mathcal{T}$,
de octaëdergroep $\mathcal{O}$,
de icosaëdergroep $\mathcal{J}$.

Alle draaiingen van C_m hebben dezelfde as evenals alle draaiingen van de cyclische ondergroep van D_m. De andere draaiingen in D_m hebben assen loodrecht op de as van de cyclische ondergroep en draaiingshoek π.

Tabel van geconjugeerde polen van de eindige ondergroepen van O_3^+

geval	aantal geconjugeerde polen	orde	naam, symbool
I			cyclische groep C_1, $N = 1$.
II	1 1	N N	cyclische groep C_N, $N \geqslant 2$.
III	$\frac{1}{2}N$ $\frac{1}{2}N$ 2	2 2 $\frac{1}{2}N$	diëdergroep $D_{\frac{1}{2}N}$, N even $\geqslant 4$.
IV	6 4 4	2 3 3	tetraëdergroep $\mathcal{T}$, $N = 12$.
V	12 8 6	2 3 4	octaëdergroep $\mathcal{O}$, $N = 24$.
VI	30 20 12	2 3 5	icosaëdergroep $\mathcal{J}$, $N = 60$.

Stelling 13.8 Als K een ondergroep van O_3^+ is, dan vormen de elementen D en DJ, waarbij D de groep K doorloopt, een ondergroep K^i van O_3. Als K een ondergroep van O_3^+ is, die een ondergroep L van index 2 bezit, dan vormen de elementen D, waarbij D de groep L doorloopt, en DJ, waarbij D de verzameling $K \setminus L$ doorloopt, een ondergroep van O_3, die isomorf is met K. Op deze wijzen worden alle ondergroepen van O_3 verkregen, **die niet bevat zijn in** O_3^+; **de eerste methode levert de ondergroepen** H, **waarvoor** $J \in H$, **de tweede die met** $J \notin H$.

Stelling 13.9 De eindige ondergroepen van O_3, die geen ondergroepen van O_3^+ zijn, luiden als volgt.

1. Ondergroepen H, waarvoor geldt $J \in H$:

   C_m^i, D_m^i, $\mathcal{T}^i$, $\mathcal{O}^i$, $\mathcal{Y}^i$.

2. Ondergroepen H, waarvoor geldt $J \notin H$:

   C_m^h (m oneven), ontstaan uit C_{2m} met ondergroep C_m,

   $\overline{C_{4m}}$, ontstaan uit C_{4m} met ondergroep C_{2m},

   C_m^v , ontstaan uit D_m met ondergroep C_m,

   D_m^h (m oneven), ontstaan uit D_{2m} met ondergroep D_m,

   $\overline{D_{4m}}$, ontstaan uit D_{4m} met ondergroep D_{2m},

   $\mathcal{T}^d$, ontstaan uit $\mathcal{O}$ met ondergroep $\mathcal{T}$.

Opgave 72. De ondergroepen van O_3 bestaande uit de transformaties, die een tetraëder, octaëder of icosaëder invariant laten, zijn resp. $\mathcal{T}^d$, $\mathcal{O}^i$ en $\mathcal{Y}^i$.

§ 14. Isometrieën van de ruimte. Roosters. Puntgroepen.

Definitie 14.1 Een isometrie is een afbeelding van de ruimte in zichzelf, die afstanden bewaart, d.w.z. **voor** ieder tweetal punten p,q is de afstand van de beeldpunten p' tot q' gelijk aan de afstand van p tot q.

We kiezen een oorsprong O in de ruimte en leggen de punten vast door hun positievectoren uit O. De voorwaarde voor een isometrie B luidt dan:

$$|B\underline{x} - B\underline{y}| = |\underline{x} - \underline{y}| \text{ voor alle } \underline{x} \text{ en } \underline{y}.$$

Definitie 14.2 Een translatie T is een afbeelding, die bepaald wordt door $T\underline{x} = \underline{x} + \underline{p}$ ($\underline{p}$ een vaste vector). De vector $\underline{p}$ heet de translatievector van de translatie T.

Stelling 14.1 Een translatie is een isometrie; de translaties vormen een transformatiegroep. De afbeelding, die aan iedere translatie haar translatievector toevoegt, is een isomorfe afbeelding van de groep der translaties op de additieve groep der vectoren. De groep der translaties is abels.

Stelling 14.2 Een orthogonale lineaire transformatie is een isometrie.

Stelling 14.3 Iedere isometrie B is op één en slechts één manier te schrijven als het product van een orthogonale lineaire transformatie en een translatie:

$$B = TO \quad (T \text{ translatie, } O \text{ orthogonaal}).$$

Stelling 14.4 De isometrieën vormen een groep van transformaties.

Definitie 14.3 Als B een isometrie is en $B = TO$, waarin T een translatie en O een orthogonale lineaire transformatie is, dan heet T het translatieve en O het rotatieve bestanddeel van B. Als $\det O = 1$ heet B een beweging.

Stelling 14.5 De groep der translaties is een normale ondergroep van de groep der isometrieën.

Stelling 14.6 Als G een groep van isometrieën is, $\underline{p}$ translatievector van een translatie in G en O rotatief bestanddeel van een isometrie in G, dan is $O\underline{p}$ translatievector van een translatie in G.

Stelling 14.7 De afbeelding, die aan een isometrie haar rotatieve bestanddeel toevoegt, is een homomorfe afbeelding met de groep der translaties als kern.

In deze paragraaf gebruiken we voortaan de letter G voor een groep van isometrieën, H voor de ondergroep van G bestaande uit de translaties in G, K voor de groep der rotatieve bestanddelen van isometrieën in G en H' voor de groep der translatievectoren behorende bij de translaties van H.

Stelling 14.8 $K \cong G/H$.

In deze paragraaf veronderstellen we voortaan, dat H aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. Er is een $\delta > 0$ zodat voor alle translatievectoren $\underline{p}$ van translaties in H geldt $\underline{p} = \underline{0}$ of $|\underline{p}| \geqslant \delta$.

2. Er bestaan drie lineair onafhankelijke translatievectoren bij translaties in H.

<u>Stelling 14.9</u> H' is een <u>rooster</u>, d.w.z. er bestaan drie vectoren $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ in H', zodat H' bestaat uit alle vectoren, die te schrijven zijn in de gedaante $n_1\underline{v}_1 + n_2\underline{v}_2 + n_3\underline{v}_3$ met gehele n_1, n_2, n_3. Het stelsel vectoren $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ heet een <u>basis</u> van het rooster.

<u>Stelling 14.10</u> De elementen van K voeren het rooster in zichzelf over.

<u>Stelling 14.11</u> K is eindig. Voor de draaiingshoek of draaispiegelhoek φ van iedere transformatie in K geldt, dat $2 \cos \varphi$ geheel is. K bevat slechts elementen van de orde 1,2,3,4 of 6.

De groep K heet in de kristallografie <u>puntgroep</u>. Op grond van stelling 14.11 en de resultaten van § 13 komen voor de puntgroepen slechts in aanmerking de groepen die in de volgende tabel zijn vermeld.

<u>Tabel van puntgroepen</u>

<u>Plat vlak</u>

C_2	C_1
C_2^s	C^s
C_4	
C_4^s	
C_6	C_3
C_6^s	C_3^s

<u>Ruimte</u>

C_1	C^i		
C_2	C_2^i	C^s	
D_2	D_2^i	C_2^v	
C_3	C_3^i		
D_3	D_3^i	C_3^v	
C_4	C_4^i	$\overline{C}_4$	
D_4	D_4^i	C_4^v	D_2^d
C_6	C_6^i	C_3^h	
D_6	D_6^i	C_6^v	D_3^h
$\mathcal{T}$	$\mathcal{T}^i$		
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}^i$	$\mathcal{T}^d$	

Wat de notatie betreft merken we op dat $C^s = C^h_1$, $D^d_2 = \overline{D_4}$ en $D^h_1 = C^v_2$. De rangschikking van de groepen in de tabel hangt samen met de bij de groepen behorende roosters. Dat bij de groepen, die op dezelfde horizontale lijn staan, hetzelfde rooster behoort, volgt direct uit het feit, dat de transformatie $\underline{x} \to -\underline{x}$ ieder rooster in zichzelf overvoert; deze transformatie is in het platte vlak de draaiing over een hoek π en in de ruimte de draaispiegeling J. Dat de horizontale lijnen, die met een pijl verbonden zijn ook hetzelfde rooster opleveren, volgt pas na een discussie van de afzonderlijke gevallen.

De 32 puntgroepen in de ruimte corresponderen met de 32 kristalklassen. Ze bepalen het macroscopische gedrag van het kristal.

Van de 32 puntgroepen zijn er sommige isomorf als groep. Er blijven 18 niet-isomorfe groepen over.

Stelling 14.12 Bij ieder rooster en iedere groep van orthogonale lineaire transformaties, die dit rooster in zichzelf overvoeren, bestaat een groep G van isometrieën, waarvoor K de gegeven groep van orthogonale transformaties en H' het gegeven rooster is.

Door de gegevens van stelling 14.12 is de groep G in het algemeen niet vastgelegd. De discussie van alle mogelijke groepen G leidt tot de 230 ruimtegroepen van de kristallografie; deze discussie voeren we niet uit. Wel bespreken we de roosters, die bij gegeven puntgroepen behoren. De grootste groep bij een rooster heet de holoëdrie van dit rooster, de groepen van halve orde de hemiëdrieën, de groepen van kwart orde de tetartoëdrieën.

Tabel van puntgroepen gerangschikt naar roosters

Plat vlak

hol. N		hem. N		tet. N	
2	C_2	1	C_1		
4	C_2^s	2	C^s		
8	C_4^s	4	C_4		
12	C_6^s	6	C_3^s, C_6	3	C_3

Ruimte

hol. N		hem. N		tet. N	
2	C^i	1	C_1		
4	C_2^i	2	C_2, C^s		
8	D_2^i	4	D_2, C_2^v		
12	D_3^i	6	D_3, C_3^v, C_3^i	3	C_3
16	D_4^i	8	D_4, C_4^v, D_2^d, C_4^i	4	C_4, $\overline{C_4}$
24	D_6^i	12	D_6, C_6^v, D_3^h, C_6^i	6	C_6, C_3^h
48	$\mathcal{O}^i$	24	$\mathcal{O}, \mathcal{T}^d, \mathcal{T}^i$	12	$\mathcal{T}$

N = orde van groep, hol. = holoëdrie, hem. = hemiëdrie, tet. = tetartoëdrie.

Roosters behorende bij de puntgroepen in het platte vlak

Basis van rooster: $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$.

C_1: willekeurige basis; willekeurig rooster.

C^s: $\underline{v}_1$ langs spiegelas, $\underline{v}_2$ loodrecht op $\underline{v}_1$;
ongecentreerd rechthoekig rooster.

$\underline{v}_1$ langs spiegelas, projectie van $\underline{v}_2$ op $\underline{v}_1$ op midden $\underline{v}_1$;
gecentreerd rechthoekig rooster.

C_4: basisvectoren even lang en onderling loodrecht;
vierkant rooster.

C_3: basisvectoren even lang en onder een hoek van 60°;
hexagonaal (of trigonaal) rooster.

Roosters behorende bij de puntgroepen in de ruimte

Basis van rooster: $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$.

C_1 (triklien): willekeurige basis;

willekeurig rooster.

C_2 (monoklien): $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ loodrecht op draaias en overigens willekeurig, $\underline{v}_3$ langs draaias;

ongecentreerd monoklien rooster.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ loodrecht op draaias en overigens willekeurig, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ op midden $\underline{v}_1$;

gecentreerd monoklien rooster.

D_2 (orthorombisch): basisvectoren twee aan twee loodrecht en langs de draaiassen;

ongecentreerd rechthoekig rooster.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ onderling loodrecht langs twee draaiassen, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ in midden $\underline{v}_1$;

enkelvoudig vlak gecentreerd rechthoekig rooster.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ onderling loodrecht langs twee draaiassen, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ in midden van basisrechthoek;

ruimtelijk gecentreerd rechthoekig rooster.

$\underline{v}_1$ langs een (eerste) draaias, $\underline{v}_2$ (resp. $\underline{v}_3$) in vlak van eerste draaias en nog een (tweede resp. derde) draaias met projectie op $\underline{v}_1$ in midden $\underline{v}_1$ (dus vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ loodrecht op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_3$);

drievoudig vlak gecentreerd rechthoekig rooster.

C_3 (trigonaal): $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onder een hoek van 60° in vlak loodrecht op draaias, $\underline{v}_3$ langs draaias;

ongelaagd trigonaal rooster.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onder een hoek van 60° in vlak loodrecht op draaias, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ in zwaartepunt van driehoek opgespannen door $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$;

gelaagd trigonaal rooster.

C_4 (tetragonaal): $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onderling loodrecht in vlak loodrecht op draaias, $\underline{v}_3$ langs draaias;

ongecentreerd tetragonaal rooster.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onderling loodrecht in vlak loodrecht op draaias, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ in midden basisvierkant;

<u>gecentreerd tetragonaal rooster</u>.

C_6 (<u>hexagonaal</u>): $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onder een hoek van $60°$ in vlak loodrecht op draaias, $\underline{v}_3$ langs draaias;

<u>hexagonaal rooster</u>.

$\mathcal{T}$(<u>kubisch</u>): basisvectoren even lang en twee aan twee loodrecht langs de diëderassen;

<u>ongecentreerd kubisch rooster</u>.

$\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ even lang en onderling loodrecht langs twee diëderassen, projectie van $\underline{v}_3$ op vlak van $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ in midden basisvierkant, lengte van projecterende lijn helft van lengte $\underline{v}_1$;

<u>ruimtelijk gecentreerd kubisch rooster</u>.

$\underline{v}_1$ langs een (eerste) diëderas, $\underline{v}_2$ (resp. $\underline{v}_3$) in vlak van eerste diëderas en nog een (tweede, resp. derde) diëderas met projectie op $\underline{v}_1$ in midden $\underline{v}_1$, lengte van projecterende lijn helft van lengte $\underline{v}_1$;

<u>vlak gecentreerd kubisch rooster</u>.

§ 15. <u>Representaties van enkele symmetriegroepen</u>.

<u>Stelling 15.1</u> Laat G een groep zijn met een abelse ondergroep H van index 2, zodat er een element d van G\H bestaat, waarvoor geldt $d^2 = e$, $dh = h^{-1}d$ voor alle $h \in H$. Irreducibele representaties van G kunnen als volgt worden verkregen:

1. Als χ een enkelvoudig karakter van H is, dat slechts de waarden ± 1 aanneemt, een eendimensionale representatie σ van G bepaald door $\chi_\sigma(h) = \chi(h)$, $\chi_\sigma(hd) = \chi(h)$ en een eendimensionale representatie τ van G bepaald door $\chi_\tau(h) = \chi(h)$, $\chi_\tau(hd) = -\chi(h)(h \in H)$.
2. Als χ een enkelvoudig karakter van H is, dat andere waarden dan ± 1 aanneemt, een tweedimensionale representatie σ van G met matrices:

$$\Sigma(h) = \begin{pmatrix} \chi(h) & 0 \\ 0 & \chi(h)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Sigma(hd) = \begin{pmatrix} 0 & \chi(h) \\ \chi(h)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Iedere irreducibele representatie van G is equivalent met één der bovenstaande.

Stelling 15.2 O_2 heeft de volgende irreducibele continue representaties:

1. De identieke representatie (dimensie = 1).
2. χ(draaiing) = 1, χ(spiegeling) = -1 (dimensie = 1).
3. Voor ieder natuurlijk getal m de representatie σ_m met matrices:

$$\Sigma_m\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{im\varphi} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_m\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-im\varphi} \\ e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Iedere irreducibele continue representatie van O_2 is equivalent met één der bovenstaande.

Opgave 73. Bepaal de irreducibele representaties van de diëdergroep D_m. Tel het aantal klassen geconjugeerden in D_m en verifieer, dat dit aantal gelijk is aan het aantal niet-equivalente irreducibele representaties.

Stelling 15.3 Als K een ondergroep van O_3 is en σ een irreducibele representatie van K, dan zijn σ_+ en σ_-, gedefinieerd door

$$\sigma_+(D) = \sigma(D) \quad , \quad \sigma_+(DJ) = \sigma(D) \; ,$$

$$\sigma_-(D) = \sigma(D) \quad , \quad \sigma_-(DJ) = -\sigma(D) \quad (D \in K) \; ,$$

irreducibele representaties van K^i. Iedere irreducibele representatie van K^i wordt op deze wijze verkregen.

Opgave 74. Als G een groep van orthogonale lineaire transformaties van R_3 is, dan is de afbeelding, die aan ieder element van G zijn matrix toevoegt, een matrixrepresentatie van G. Onderzoek deze representatie voor de puntgroepen en vergelijk ze met de reeds bekende irreducibele representaties van deze groepen. (Aanwijzing: het spoor van een draaiing is $1 + 2\cos\varphi$ en het spoor van een draaispiegeling is $-1 + 2\cos\varphi$; de draaiingshoeken resp. draaispiegelhoeken φ volgen direct uit de ordes van de groepelementen.)