

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

# COMBINATORIEK

naar het college van

**Prof. Dr. N.G. de Bruijn**

opgeschreven door

**Dr. J.W. Nienhuys**

Najaarssemester 1981

# Inhoudsbeschrijving

## COMBINATORIEK

N.G. de Bruijn

najaarssemester 1981

INLEIDING	1	GRAFEN	69
VOORTBRENGENDE FUNCTIES	2	inleiding	69
formele machtreeksen	5	bomen	76
wisselgeldprobleem	7	Prüfer codering bomen	81
sommatieformule	9	tellen van bomen	87
multisets	15	UD-code	92
gewichtenprobleem	16	KE-code voor binaire bomen	96
partities van getallen	18	alcoholen tellen	99
noten	22	matrix tree theorem	103
PERMUTATIES	23	Eulergraaf	107
schapentellen	23	lijngraaf	110
permutaties	24	shiftregistersequence	113
stirlinggetallen	28	opspannende bomen	121
partities van verzamelingen	30	BIPARTITIEGRAFEN	122
rangschikkingen multiset	34	inleiding	122
genummerde partities	35	overdekkings- en representantenprobleem	125
POLYA THEORIE	37	Stelling van König en Hall	127
zwart-witkleuringen kubus	37	Stelling van König-Egerváry	129
cykelindex	39	latijnse vierkanten	132
Cauchy-Frobenius lemma	40	Ford-Fulkersonstelling	133
kleuringen en kleurpatronen	43	GRAFEN EN SPELTHEORIE	139
stelling van Pólya	45	inleiding	139
invariante kleuringen	53	winstfunctie	142
superpatronen	57	Nim	143
Krausproduct	66	Grundy functie	146
nog een stelling van Pólya	68	Wijthoff-spel	148
		andere spelletjes	151
	LITERATUUROVERZICHT		152
	NAWOORD		155
	INDEX		156

# College Combinatoriek

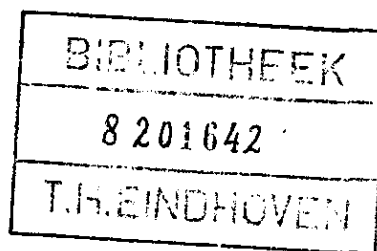
van

N.G. de Bruijn

(2.950.0)

gegeven najaarssemester 1981

opgeschreven door J.W. Nienhuys



overname s.v.p. alleen met bronvermelding.  
Van deze tekst bestaan 5 genummerde  
exemplaren, waarvan 1 gebonden.  
Dit is no 2

# Inhoudsopgave ii

Inleiding	1
Voortbrengende functies	2
formele machtreksen, 5 - wisselgeld probleem, 7 -	
sommatie formule, 9 - multisets, 15 - gewichten probleem, 16 -	
partities van getallen, 16 - roken, 22 - schapen tellen, 23 -	
Permutaties	23
schapen tellen, 23 - permutaties 24 - stirling getallen, 28 -	
partities van verzamelingen, 30 - rangschikkingen	
multiset, 34 - genummerde partities, 35 -	
Pólya theorie	37
zwart witkleuringen kubus, 37 - cykelindex, 39 -	
Cauchy-Frobenius lemma, 40 - kleuringen en	
kleur patronen, 43 - stelling van Pólya, 45 -	
invariante kleuringen, 53 - superpatronen, 57 -	
Krans product, 66 - Nog een stelling van Pólya, 68 -	
Grafen	69
inleiding, 69 - bomen, 76 - prüfer codering bomen, 81	
tellen van bomen, 87 - u.c. code, 92, u.c. code voor	
binair bomen, 96 - alcoholen tellen, 99 - matrix tree	
theorem, 103 - Euler graaf 107 - lijngraaf, 101 -	
shiftregister sequence, 113 - opspannende bomen 121	
Bi-partitie grafen	122
inleiding, 122 - overdekkingen en representanten-	
probleem, 125 - Stelling van König en Hall 127	
Stelling van König-Egerváry, 129 - Latijnse vierkanten 132	
Ford-Fulkerson stelling 133	
Grafen en speltheorie	139
Inleiding, 139 - winst functie, 142 - min, 143 -	
grundy functie, 146 - wijthoff-spel, 148 -	
andere spelletjes 151	
Literatuur overzicht	152
Nawoord	155
Index	156

## College combinatoriek van N.G. de Bruijn.

Hoof  $\diamond \diamond$  geven bewegingen van de dictaat schijfveraan.

Eerste les. maandag 7 september, 3<sup>e</sup> uur.

1981

### Inleiding.

Wat is combinatoriek? Je zou kunnen zeggen dat combinatoriek de wiskunde is van eindige systemen. Dat is niet helemaal waar: de theorie van eindige groepen, ringen en lichamen behoort niet tot de combinatoriek.

Met combinatoriek is het als met asymptotiek. Je zou asymptotiek willen definiëren als de theorie van de limieten, maar grote stukken differentiaal- en integraalrekening horen er niet bij.

Lange tijd bestond de combinatoriek alleen maar in de vorm van puzzeltjes en spelletjes. Voor 1960 werd er misschien niet eens college in gegeven.

Hoofdzakelijk bij combinatoriek is tellen. De aardigheid van het tellen is echter dat je wat leert over hetgeen je telt. Je merkt al tellende dat je nog niet precies genoeg weet wat je eigenlijk telt. Zo wordt tellen leerzaam. Als twee verzamelingen hetzelfde aantal elementen blijken te hebben, probeer je te begrijpen waarom dat zo is, door een natuurlijke bijjectie tot stand te brengen.

Naast 1 Zo heb ik eens, een jaar of 5 geleden het aantal logica's van een bepaald soort met drie variabelen geteld. Het waren er heel veel, een getal van 14 cijfers. Enige tijd later kreeg ik een artikel onder ogen dat over heel iets anders ging, maar het concludeerde wel dat dat object precies dat aantal van 14 cijfers aan elementen had. Dit wekte mijn belangstelling en ik ging het artikel aandachtig lezen. En inderdaad, als je <sup>er</sup>diep over nadacht kon je inzien dat de elementen van dat

object ook konden worden opgevat als logica's.  
 Waar wordt de combinatoriek toegepast? In de statistiek wordt heel wat geteld en in de informatica speelt de combinatoriek bij beschouwingen over complexiteit een rol.

Laten we nu beginnen om combinatoriek te doen.

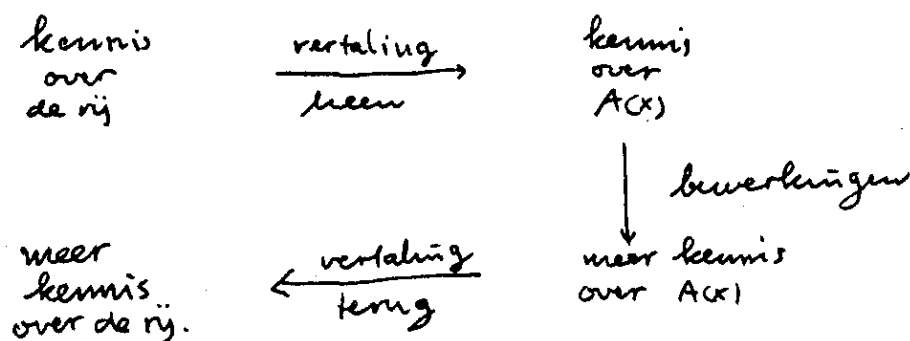
Noot 2 Een heel oud idee in de combinatoriek is het idee van de voortbrengende functie. Dit idee is al te vinden bij Laplace  
 Gegeven een oneindig voortlopende rij:

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

van getallen, dan verstaan we onder de voortbrengende functie van die rij de volgende reeks:

$$A(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

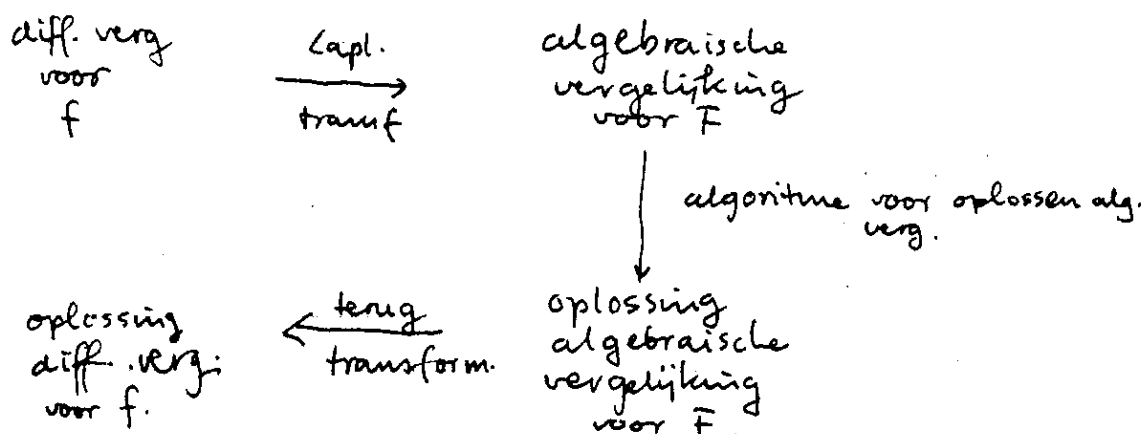
De techniek van de voortbrengende functie is dat je het volgende schema probeert te volgen:



Het schema lijkt een beetje op dat van de Laplace integraal

$$F(x) := \int_0^{\infty} e^{xt} f(t) dt$$

Een analoog schema wordt dan:



### Opmerking

Behalve

beschouwd

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

wordt soms ook

$$\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \dots$$

maar dat willen wij niet doen.

Notatie afspraak: Ten gevolge van de door N. Bourbaki veroorzaakte verwarring over de natuurlijke getallen, zijn we genoodzaakt te definiëren:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_1 := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Not3 Een voorbeeld. De Fibonacci rij wordt gedefinieerd als volgt:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1$$

$$a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}_1$$

De voortbrengende functie van de Fibonacci rij is dan:

$$A(x) := 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots$$

Voor  $A(x)$  vinden we na enig gepuzzel, op grond van de recurrente betrekking tussen de coëfficiënten:

$$x(x+1)A(x) = A(x) - 1$$

dus

$$A(x) = \frac{-1}{-1+x+x^2}$$

Breuksplitsing levert

$$A = \left( \frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{x-\alpha_2} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}, \text{ voor } \alpha_{1,2} \text{ wortels van } x^2+x-1.$$

Als we deze breuken nu weer als machtrekken schrijven, termen samenrapen, en uitschrijven, vinden we:

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Dit gegoochel kunnen we op drie manieren goedpraten

1) Als heuristische methode.

We vinden een resultaat - hoe, dat doet er niet toe - en daarna verifiëren we het op andere wijze, in dit geval bijvoorbeeld door volledige inductie.

2) Via de theorie van de convergente machtrekken.

We vatten  $A$  op als een analytische functie, gedefinieerd op een voldoende kleine omgeving van 0 in  $\mathbb{C}$ . Dit rechtvaardigt het rekenen met  $A$  alsof het een functie is.

Het nadeel van deze methode is dat we convergentie-onderzoek moeten doen: we moeten laten zien dat  $A$  een positieve convergentiestraak heeft.



In dit geval is dit niet bijzonder lastig:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad |a_n| \leq 2^{n/2}$$

Laat zich makkelijk met volledige inductie bewijzen, waaruit dan volgt dat de convergentiestraal  $\geq 2$  is.

- 3) Door ontwikkelen van de theorie van de formele machtrekken. Dit kan helemaal formeel en exact, maar dat is tamelijk vervelend om te leren.

Noot 4. Voor wie geïnteresseerd is: Tutte, J. Comb. Th. 1975  
Er komt ook niets nieuws en verrassends bij zo'n bewijs.

Overzicht van de theorie van de formele machtrekken.

Ik geef de theorie voor machtrekken met complexe coëfficiënten, maar met kleine wijzigingen gaat het ook in ringen.

Je moet je een machtrek voorstellen als een polynoom van mogelijk oneindig hoge graad. Als je het mooi wilt doen, dan is de rij die bij de machtrek hoort in feite zelf de machtrek: een machtrek in die opvatting is in feite niets anders dan een afbeelding

$$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad n \mapsto a_n.$$

Optellen geschiedt op de gebruikelijke manier:  
Laat

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ B(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

dan is

$$(A+B)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots$$

De vermenigvuldiging wordt gegeven door het zogeheten Cauchy product

$$(AB)(x) := (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

De coëfficiënt van  $x^n$  is  $\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ .

Als  $b_0 \neq 0$ , dan is ook  $\frac{A(x)}{B(x)}$  gedefinieerd.

Als  $b_0 = 0$ , dan is ook  $A(Bx)$  gedefinieerd, en we kunnen zelfs een  $C(x)$  bepalen zodanig dat

$$C(B(x)) = x.$$

Machtreeksen kunnen we formeel differentiëren.

Met machtreeksen kunnen we onder bepaalde omstandigheden oneindige reeksen en producten vormen.

- ◆ Het idee is bij elke (mogelijk oneindige) bewerking is, dat zo'n bewerking is toegestaan als ter berekening van elke coëfficiënt in de eind-uitkomst maar een eindig aantal niet-triviale bewerkingen nodig is.
- Een triviale bewerking is:
- 0 optellen.
  - met 0 vermenigvuldigen.
  - met 1 vermenigvuldigen.

Noot 5



Bij voorbeeld,

$$A(Bx) = a_0 + a_1 B(x) + a_2 (B(x))^2 + a_3 (B(x))^3 + \dots$$

Als  $b_0 \neq 0$ , dan zou elke term  $a_n (B(x))^n$  een 0-de orde term opleveren, en bij het vergaren van termen zou de nulde orde term van  $A(Bx)$  worden:

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots$$

en deze bewerking staan we niet toe.

Als bijvoorbeeld  $A_k(x)$  voor elke  $k \in \mathbb{N}_0$  een machtsreeks voorstelt die begint met  $a_k x^k + \dots$ , dan kunnen we  $\sum_{k \geq 0} A_k(x)$  definiëren: voor de  $k$ -de term

hoeven we ten hoogste maar  $k+1$  termen te sommeren.

### Nog een voorbeeld.

Veronderstel we moeten aan mevr. Geerts een groot bedrag betalen, bijvoorbeeld 67 ct. (Typisch een voorbeeld uit de oude doos, met die losse centen).

We kunnen alleen maar betalen met muntstukken van 1, 5, 10, 25 cent. Van elk van deze muntstukken hebben we ergens (zeg oneindig).

We vragen ons af op hoeveel manieren dat kan.

We komen als vlieg tot de ontdekking dat we moeten weten wat een manier is. Doet de volgorde er toe? Leggen we de munten in een cirkel - of in een vierkant? Al snel worden we het met onszelf eens dat voorbeelden van manieren zijn:

①	⑤	⑩	②⑤
2	2	3	1
7	2	0	2
7	0	1	2

met andere woorden, een manier wordt volledig gekarakteriseerd door zijn frequentie functie

$$f: \{ \textcircled{1}, \textcircled{5}, \textcircled{10}, \textcircled{25} \} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

① is "de cent", ⑤ is "de stuiver" etc.

en onze vraag is de vraag naar het aantal frequentie functies met totale waarde 67.

Onder de totale waarde van een frequentie functie

f verstaan we

$$1. f(1) + 5 \cdot f(5) + 10 \cdot f(10) + 25 \cdot f(25).$$

Oplissing. We gaan nog niet systematisch te werk.  
Het gevraagde aantal is de coëfficiënt van  $x^{67}$  in

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \times \\ & (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots) \times \\ & (1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \dots) \times \\ & (1 + x^{25} + x^{50} + \dots) \end{aligned}$$

namelijk 87.

"De coëfficiënt van  $E$ " korten we af tot  $C_E$ ,  
dus ons antwoord zou kunnen luiden

$$C_{x^{67}} \frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})}$$

Op deze manier kunnen we de andere coëfficiënten vinden of we kunnen de asymptotiek bepalen voor  $C_{x^n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

De formule van de oplossing kunnen we wel begrijpen, want de coëfficiënt van  $x^{67}$  in het product vinden we door uitvermenigvuldigen en bij elkaar rapen.

Voor het bijelkaar rapen heb je heel veel termen, allemaal met coëfficiënt 1.

Elke term correspondeert dan met een keus van een term op de eerste regel, een term op de tweede regel, een op de derde regel en een op de vierde regel. Zo is er bijvoorbeeld een term  $x^2 x^{10} x^{30} x^{25}$ . Dit correspondeert juist met de eerste betalingswijze uit het voorbeeld van de vorige pagina. Elke term ~~correspondeert~~ in het product correspondeert zo met een betalingswijze.

Tweede les. maandag 7 september 1981, 9<sup>e</sup> uur.

De volgende notaties zijn waarschijnlijk al bekend:

$|S|$  is het aantal elementen van  $S$ .

Voor  $R$  en  $D$  verzamelingen, ~~actueel~~ en  $|D| \neq 0$ ,  
noteren we de collectie van alle afbeeldingen  $D \rightarrow R$   
met  $R^D$ .

De formule  $|R^D| = |R|^{|D|}$  is een leuk  
erelsbruggetje om de structuur van de formule  $R^D$   
te onthouden.

Stelling. Laat  $K$  een commutatieve ring zijn,  
en  $D$  en  $R$  verzamelingen en  $\varphi: D \times R \rightarrow K$  een afbeelding.  
Dan geldt

$$\sum_{f \in R^D} \prod_{d \in D} \varphi(d, f(d)) = \prod_{d \in D} \sum_{r \in R} \varphi(d, r)$$

Bewijs. Je ziet het zo als je er even naar kijkt, maar we  
zullen het proberen te doen alsof we het bewijzen:

$n := |D|$ . We nummeren de elementen van  $D$ :  $d_1, \dots, d_n$ .

Het product  $\prod_{d \in D} \varphi(d, f(d))$  is nu

$$(*) \quad \varphi(d_1, f(d_1)) \varphi(d_2, f(d_2)) \dots \varphi(d_n, f(d_n))$$

Voor elk  $n$ -tupel  $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$  is er precies één  
 $f \in R^D$  met  $f(d_1) = r_1, f(d_2) = r_2, \dots, f(d_n) = r_n$ .

Voor deze  $f$  wordt  $(*)$ :

$$(**) \quad \varphi(d_1, r_1) \dots \varphi(d_n, r_n)$$

In plaats van over  $R^D$  te sommeren, sommeren we  
over  $R^n$ , en doen dit in een herhaalde sommatie:

$$\begin{aligned}
& \sum_{f \in R^D} \prod_{d \in D} \varphi(d, f(d)) = \\
& = \sum_{r_1 \in R} \dots \sum_{r_n \in R} \prod_{i=1}^n \varphi(d_i, r_i) = \\
& = \sum_{r_1 \in R} \varphi(d_1, r_1) \sum_{r_2 \in R} \dots \sum_{r_n \in R} \prod_{i=2}^n \varphi(d_i, r_i) = \\
& \dots \dots \dots \\
& = \sum_{r_1 \in R} \varphi(d_1, r_1) \sum_{r_2 \in R} \varphi(d_2, r_2) \dots \sum_{r_n \in R} \varphi(d_n, r_n).
\end{aligned}$$

De  $r_1, \dots, r_n$  in bovenstaande formules zijn gebonden variabelen, we kunnen dus net zo goed schrijven:

$$\begin{aligned}
& = \sum_{r \in R} \varphi(d_1, r) \sum_{r \in R} \varphi(d_2, r) \dots \sum_{r \in R} \varphi(d_n, r) = \\
& \prod_{i=1}^n \sum_{r \in R} \varphi(d_i, r) = \prod_{d \in D} \sum_{r \in R} \varphi(d, r).
\end{aligned}$$

[Toepassing: Neem  $K =$  de ring van formale machtreeksen over  $\mathbb{Z}$ ,  $D = \{1, 5, 10, 25\}$  en  $R = \mathbb{N}_0$ ,  $\varphi(d, r) = x^{dr}$ ;  $\prod_{d \in D} \varphi(d, f(d))$  is dan  $x^{\text{totale waarde van } f}$ .

We bekijken nu een speciaal geval: mevrouw Geerts accepteert voor betaling alleen schijven in even aantallen, om de een of andere reden. Algemeener: bij elke muntsoort is een verzameling  $S_d$  van toegestane aantallen.

We definiëren nu:

$$\varphi(d, r) = x^{c_d r}, \quad \psi(r \in S_d),$$

waarin  $c_d$  het "gewicht" van  $d$  is, en  $\psi$  (uitspraak) gelijk is aan 0 voor een onware, en 1 voor een ware uitspraak

We definiëren verder

$$C = \{ f \in R^D \mid \forall_{d \in D} (f(d) \in S_d) \}.$$

Dan geldt

Stelling

$$\sum_{f \in C} x^{\sum_{d \in D} c_d f(d)} = \prod_{d \in D} \sum_{r \in S_d} x^{c_d r}$$

We kunnen dit inzien door op te merken dat

$$\sum_{f \in C} x^{\sum_{d \in D} c_d f(d)} =$$

$$\sum_{f \in C} \prod_{d \in D} x^{c_d f(d)} = \sum_{f \in R^D} \prod_{d \in D} x^{c_d f(d)} \mathbb{1}_{\{f(d) \in S_d\}} =$$

$$\sum_{f \in R^D} \prod_{d \in D} \varphi(d, f(d)) = \prod_{d \in D} \sum_{r \in R} \varphi(d, r)$$

$$= \prod_{d \in D} \sum_{r \in R} x^{c_d r} \mathbb{1}_{\{r \in S_d\}} = \prod_{d \in D} \sum_{r \in S_d} x^{c_d r}$$

en het aantal manieren waarop mevr. Geerts nu betaald kan worden is

$$C_{67} = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{cent}} \times \underbrace{(1+x^{10}+x^{20}+\dots)}_{\text{dubbele stuivers}} \times \underbrace{(1+x^{10}+\dots)}_{\text{dubbeltjes}} \times \underbrace{(1+x^{25}+x^{50}+\dots)}_{\text{kwartjes}} = 47$$

Voorbeeld. We hebben munten van  
1, 2, 4, 8 en 16 cent.

Betalingen mogen van elke munt er maar één gebruiken. Dus

$D = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ,  $c_1=1$ ,  $c_2=2$  etc, en  $S_d = \{0, 1\}$  voor alle  $d$ .

De vraag luidt nu: wat is  $C_{x^k} (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{16})$ .

Uitwerken levert:

$$C_{x^k} (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{31}) ,$$

dus: elke som gelds ter waarde van 31 cent of minder kan op precies ~~een~~ manier betaald worden, en ~~niet~~ meer kan in het geheel niet betaald worden.

Berekening van  $(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{16})$ :

$$= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1-x^{32}}{1-x^{16}} = \dots = \frac{1-x^{32}}{1-x} .$$

Als we nu van alle machten van 2 precies één munt hebben, dan krijgen we

$$(1+x)(1+x^2)\dots = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdot \dots = \frac{1}{1-x} ,$$

m.a.w. Elk bedrag kan dan betaald worden op precies een manier. Het verband met het tweetalig talstelsel is duidelijk.

Analoog kunnen we werken met munten van 1, 10, 100, 1000, .... etc, en  $S_d = \{0, 1, \dots, q\}$  nemen in alle gevallen.

Er komt dan

$$(1+x+\dots+x^q)(1+x^{10}+\dots+x^{90})(1+x^{100}+\dots) =$$

$$\frac{1-x^{10}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{100}}{1-x^{10}} \cdot \dots = \frac{1}{1-x} \text{ en het is weer}$$

op precies één wijze mogelijk voor elk bedrag: elk getal is op precies een manier te schrijven in het decimale stelsel.



Voorbeeld.  $n \in \mathbb{N}_0$ .

We vragen ons af op hoeveel manieren je  $n$  kunt schrijven als som

$$(*) \quad n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k,$$

$k$  willekeurig en  $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$  voor alle  $i$ .

Eerst moet je weer bedenken wat je bedoelt met een splitsing. De volgorde telt nu wel.

$$3 = \begin{array}{l} 1+1+1 \\ 1+2 \\ 2+1 \end{array}$$

$$4 = \begin{array}{l} 1+1+1+1 \\ 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \\ 2+2 \end{array}$$

We kunnen dit niet in eens doen, we moeten eerst berekenen op hoeveel manieren het kan met precies  $k$  summanden.

Je vindt nu dat voor  $k$  summanden de voortbrengende functie is:

$$(x+x^2)(x+x^2) \dots (x+x^2) \quad (k \text{ factoren})$$

en dus is voor het oorspronkelijke probleem de voortbrengende functie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x+x^2)^k = \frac{1}{1-x-x^2}$$

en het antwoord is dus  $C_{x^n} \frac{1}{1-x-x^2}$ .

Maar dit is onze oude vriend het  $n^e$  Fibonacci-getal! Kunnen we dit begrijpen? Daar toe moeten we proberen een recursieve relatie te vinden voor  $M_n$ , het aantal manieren om  $n$  te splitsen als  $(*)$  hierboven.

$$M_1 = 1 \quad \text{want} \quad 1 = 1 \quad (\text{een "splitting"})$$

$$M_2 = 2 \quad \text{want} \quad 2 = \frac{1+1}{2} \quad (\text{twee "splittings"})$$

Verder, een splitting van  $n$  begint met een 1 of een 2, dus voor  $n$  zijn er

$$M_{n-1} \text{ splittings van de vorm } 1 + \text{splitting van } (n-1)$$

$$M_{n-2} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2 + \text{splitting van } (n-2).$$

Dus  $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$  voor  $n \geq 3$  en dit is juist de recursierelatie van de Fibonacci ~~reeks~~ rij.

### Opmerking.

Voor oneindige  $D$  is de stelling met enige modificaties ook waar.

Neem  $D = \mathbb{N}_0$ :

Voor elke  $f \in C$  moet  $\sum_{d \in D} c_d f(d)$  (in de exponent van het linkerlid) een in essentie eindige som zijn:

$f(d) = 0$  voor  $d$  groot genoeg.

Dus voor  $d$  groot genoeg  $0 \in S_d$ . Verder, voor elke  $d_*$  (groot genoeg) geldt

$$\sum_{r \in S_d} x^{c_d r} = (1 + x^{k_d} \cdot f_{r,d}(x))$$

Het oneindige product ~~over  $d \in D$~~  in het rechterlid is gedefinieerd als  $\lim_{d \rightarrow \infty} k_d = \infty$ .

Dit zijn de twee voorwaarden waar - in geval  $\mathbb{N}_0 = D$  - aan voldaan moet zijn ~~omdat~~ opdat de stelling waar is.

derde les

maandag 14 september, 3<sup>e</sup> uur.

Recapitulatie.

Vorige week hebben we een belangrijke stelling gezien:

$$\text{Laat } C = \{ f \in \mathbb{N}_0^D \mid \forall d \in D [f(d) \in S_d] \}$$

Laat  $c : D \rightarrow \mathbb{Z}$  (of een andere ring).

Dan geldt

$$\sum_{f \in C} x^{\sum_{d \in D} c_d f(d)} = \prod_{d \in D} \sum_{r \in S_d} x^{c_d r}$$

Het bewijs bestond eruit dat je de factoren van het rechterlid onder elkaar opschrijft. Elke "manier" om ~~een~~ een term uit het product te vormen correspondeert met een summand uit het rechterlid. We behandelen nu nog wat voorbeelden:

Voorbeeld. Multisets.

Laat  $D = \{a, b, c, d, e\}$  (enigszins verwarrend, omdat  $a, b, c$  etc. meestal namen van variabelen zijn, en niet de elementen van de verzamelingen zelf, zoals hier).

Een afbeelding  $D \rightarrow \mathbb{N}_0$  kunnen we beschouwen als een zogeheten multiset: een multiset is, intuïtief gesproken, een verzameling waarin elk element nog een multipliciteit heeft. Voor  $\delta \in D$ , en een multiset  $f : D \rightarrow \mathbb{N}_0$  noemen we  $f(\delta)$  de multipliciteit of frequentie van  $\delta$  in  $f$ . De som van alle frequenties heet gewicht.

Opmerking: De onderwetse terminologie voor zo iets is "keerkombinatie". De onderwetse terminologie voor een verzameling is "combinatie".

Voorbeeld  $(aaa b b d)$  vatten we op als de multiset met frequenties resp. 3 2 0 1 0. Het totale gewicht is 6.

Vraag: wat is het aantal multisets met gewicht  $n$ ?

We passen de formule toe:

$$D = \{a, b, c, d, e\}, \quad S_\delta = \mathbb{N}_0 \text{ voor alle } \delta \in D, \quad c_\delta = 1 \text{ voor } \delta \in D.$$

Nu is  $\sum_{\delta \in D} c_\delta f(\delta)$  het gewicht van multiset  $f$ .

De keuze van  $\delta$  i.p.v.  $d$  in deze formule is uitgegeven door de wens tot het vermijden van conflicten tussen namen.

Het gevraagde aantal is  $C_{x^n} (1+x+x^2+\dots)^5$ .

In geval de oorspronkelijke verzameling  $k$  elementen heeft, is het antwoord:

$$C_{x^n} (1+x+x^2+\dots)^k = C_{x^n} (1-x)^{-k} = \binom{-k}{n} (-1)^n = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1},$$

een resultaat dat al op Euler teruggaat. Kunnen we dat ook eenvoudiger inzien?

Daartoe codeer je bijv. de multiset in het voorbeeld boven als volgt:

$a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e$

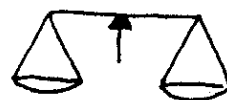
Omdat de volgorde van de letters vast ligt kun je de letters net zo goed door puntjes vervangen:

$\cdot \parallel \cdot \parallel \cdot \parallel \cdot \parallel \cdot$

Op het eerste puntje na staan hier 10 posities ( $n+k-1$ ) die voor een multiset van 6 elementen ( $n$  elten) kunnen worden gevuld met 6 streepjes en de rest puntjes. De posities kunnen willekeurig worden ingevuld.

Nog een voorbeeld: Het gewichten probleem.

Gegeven een weegschaal, met twee pannen.



Hoe kan je de bijbehorende gewichten door het beste indelen?

Een klassieke manier is: gewichten van 1, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50 etc

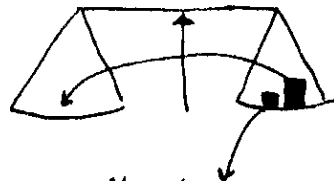
eenheden. Zwitsers geld is nog steeds zo georganiseerd!

Noot 6 De beste manier is volgens Bachet met gewichten die machten van 3 zijn.

Neem bijvoorbeeld een gewichtendoos met gewichten van 1, 3, 9 en 27 eenheden.

Leg alle gewichten op de rechter ~~aanrecht~~ <sup>pan</sup>. Een gewicht van  $G$  eenheden kan nu van de weegschaal worden afgehaald of van de ~~aanrecht~~ ~~aanrecht~~ rechterpan naar linkerpan verplaatst.

Het verschil linkerpan min rechterpan neemt daardoor toe met resp  $G$  of  $2G$ .



De totale toename is de som van alle toenames die met de individuele bewerkingen corresponderen.

We hebben nu  $D = \{0, 1, 2, 3\}$

Opn:  $S_d = \{0, 1, 2\}$  voor alle  $d \in D$

$c_d = 3^d$  voor alle  $d$

geeft hetzelfde antwoord, maar nu is  $c_d$  een echt "gewicht".

(Dank aan F.W.de Pijñ)

$S_d = \{3^d, 2 \cdot 3^d\}$  voor  $d \in D$

$c_d = 1$  voor alle  $d$

Voor een toegelaten ~~ef~~ is dus  $\sum_{d \in D} c_d f(d)$  juist de totale toename:

Onze formule geeft nu dat het aantal mogelijkheden om een toename  $n$  te realiseren is:

$$C_n (1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9+x^{18})(1+x^{27}+x^{54}) =$$

$$C_n \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^{27}}{1-x^9} \cdot \frac{1-x^{81}}{1-x^{27}} = C_n \frac{1-x^{81}}{1-x} = C_n (1+x+x^2+\dots+x^{80})$$

m.a.w. elke toename van 0 tot 80 kan op precies één manier worden gerealiseerd.

Een andere manier om hetzelfde resultaat te vinden is de gewichten links of rechts plaatsen en beginnen met ~~aanrecht~~ lege pannen. Men krijgt dan  $(x^{-1}+1+x)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27}) = \dots$

$$= x^{-40} + x^{-39} + \dots + 1 + x + \dots + x^{39} + x^{40}.$$

Het nadeel is dan dat we eigenlijk ons begeven buiten de theorie van de formele machtrekken en in de theorie van de formele Laurent-reeksen (eindig veel negatieve machten van  $x$  toegestaan).

Als je het idee van de machtrekken in dit soort van tel problemen begrijpt is ~~misschien~~ dit niet zo erg.

Voorbeeld. Partities.

Opgelet! Elders is partitie geïntroduceerd als "partitie van een verzameling". Een partitie van  $S$  is een  $a \in \mathcal{P}(S)$  met 1)  $\forall x \in a [x \neq \emptyset]$  2)  $\forall x \in a \forall y \in a [x=y \vee x \cap y = \emptyset]$   
3)  $S = \bigcup_{x \in a} x$ .

Wij zullen een enigszins analoog idee bespreken, namelijk dat van partitie van een getal.

Een partitie van een getal  $n > 0$  is een manier om  $n$  te schrijven als som van getallen  $\neq 0$ .

Voorbeeld van de partities van 5:

5  
1+4  
2+3  
1+1+3  
1+2+2  
1+1+1+2  
1+1+1+1+1

geordend naar grootste <sup>summand</sup> ~~composant~~ van de partitie.

De volgorde doet er niet toe

Dit lijkt een beetje op multisets: gevraagd multisets over  $\mathbb{N}_1$ , ~~met gewicht~~ maar met een andere "gewicht".

In onze fundamentele formule is nu  $D = \mathbb{N}_1$   
 $S_d = R = \mathbb{N}_0$  voor alle  $d$   
 $c_d = d$  voor alle  $d$ .

Een partitie ~~van~~ van  $n$  is een  $f: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ , met

$$n = \sum_{d=1}^{\infty} d f(d)$$

We vinden nu  $p(n)$ , het aantal partities van  $n$  is

$$C_{x^n} (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)(1+\dots)(\dots)$$

$$= C_{x^n} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \dots \text{ etc.}$$

Bijvoorbeeld, de partitie  $5 = 1 + 1 + 3$  correspondeert met een term  $x^5$  ontstaan uit vermenigvuldiging van  $x^2$  uit de eerste factor, 1 uit de tweede factor,  $x^3$  uit de derde factor, en de rest allemaal 1.

### Variaties op dit thema.

We interesseren ons voor partities in oneven delen.

Bijv. 7 kan gepartitioneerd worden in:

$$\begin{array}{l} 7 \\ 1+1+5 \\ 1+1+1+1+3 \\ 1+3+3 \\ 1+1+1+1+1+1+1 \end{array}$$

als alleen oneven delen gebruikt mogen worden.

We vinden dan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \dots \text{ etc.}$$

We zijn geïnteresseerd in  $r(n)$ , het aantal partities in verschillende delen (partities zonder herhaling)

Nu geldt  $S_d = \{0, 1\}$  voor alle  $d$ , en de rest als tevoren, en dan komt er

$$\sum_{n=0}^{\infty} r(n) x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots =$$

$$\frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \dots$$

Alle factoren in teller en noemer van de vorm  $1-x^{2k}$  vallen tegen elkaar weg, en we vinden tot onze verrassing:

$$r(n) = q(n)$$

Bijvoorbeeld 7 heeft ook 5 partities zonder herhaling:

$$7 ; 6+1 ; 5+2 ; 3+4 ; 1+2+4$$

Een combinatorische uitleg van dit fenomeen is de volgende: splits elk van de summanden  $2^m k$ , met oneven  $k$ , in een partitie zonder herhalingen in  $2^m$  summanden met oneven  $k$ . In het geval van de partities van 7 levert erdan:

$$7 ; (3+3)+1 ; 5+(1+1) ; 3+(1+1+1) ; 1+(1+1)+(1+1+1)$$

Deze correspondentie is evident een bijectie. Hoe ga je terug?

Meer voorbeelden in Pólya & Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Erster Abschnitt, Kapitel 1, § 1 (Aufg 1-31)

Partities met volgorde:

$$3 = 3 ; 2+1 ; 1+2 ; 1+1+1 \quad 4 = 4 ; 3+1 ; 1+3 ; 2+2 ; 2+1+1 ; 1+2+1 ; 1+1+2 ; 1+1+1+1$$

Om dit te behandelen bekijken we eerst de voortbrengende functie van het aantal partities met volgorde in  $k$  delen. Dit is

$$(x + x^2 + x^3 + \dots)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

Sommatie over  $k$ , en uitwerken geeft  $\frac{x}{1-2x} = x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots$  maar het aantal partities-met-volgorde van  $n$  is  $2^{n-1}$ . Met voll. inductie duidelijk, en combinatorisch: Hier zijn de getallen van 1 tot en met  $n$ :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & \dots & \dots & n \end{array} \quad \text{er zijn } n-1 \text{ tussenruimtes}$$

Een partitie-met-volgorde correspondeert met het zetten van schotjes tussen de getallen. Bij voorbeeld de schotjes in de illustratie hierboven corresponderen met een partitie van  $n$  als volgt  $n = 3+4+\dots+2+1$



Elke partitie - met <sup>volgorde</sup> ~~volgorde~~ correspondeert met een deelverzameling van de collectie der tussenruimtes, namelijk de deelverzameling van de tussenruimtes waar schotjes staan.

Op deze wijze kunnen we combinatorische identiteiten begrijpen. Er zijn heel veel combinatorische identiteiten, zie bijvoorbeeld het boek van Riordan.

Een manier om combinatorische identiteiten af te leiden is door substitutie.

Zij  $f$  een voortbrengende functie die een polynoom is. Dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{xk} f(x) = f(1)$$

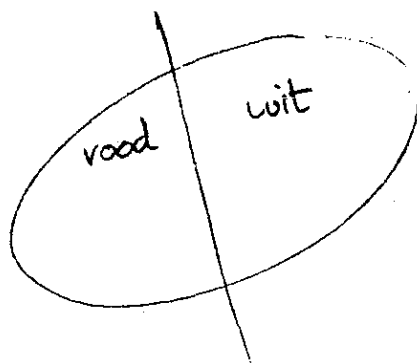
Bijvoorbeeld  $f(x) = (1+x)^n$ , de voortbrengende functie voor het aantal mogelijkheden om uit  $n$  elementen er een gegeven aantal te kiezen. Dit geeft

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Een andere manier is door combinatorische interpretatie:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

kan worden begrepen als: uit een verzameling van  $n$  rode en  $m$  witte knikkers worden  $k$  knikkers gekozen.



Het aantal mogelijkheden om die keuze te doen is het aantal mogelijkheden er  $j$  witte te kiezen en de rest rode, gesommeerd over  $j$ .

Noten

Noot 1. Titel van het artikel: M.G. de Bruijn, Exact finite models for minimal propositional calculus over a finite alphabet, T.H. Report 75 wsk 02, 1975

Het aantal was: 623 662 965 552 330 equivalentklassen van formules met de letters  $a, b, c \Rightarrow \Rightarrow \wedge \cdot$

Titel van het andere artikel:

On the free relatively pseudocomplemented semi lattice with three generators, Piotr S. KRYSZEK, REP. on Math Logic 4 (1977) 31-38

Noot 2 Pierre Simon Laplace 1749-1827, auteur van

Traité de mécanique céleste (1749-1825) en Théorie analytique des probabilités (1812) en vele andere publicaties. De voortbrengende functies staan in de Théorie.

Laplace's ~~meest bekende~~ meest bekende opmerkingen waren: "Il est aisé à voir" - op punten waar hij kortheidshalve een lang bewijs achterwege liet, zijn laatste woorden: "Wat we weten is natuurlijk, wat we niet weten ontraggelijk", en zijn opmerking ~~op~~ tot Napoleon: "Sire, ik had die hypothese niet nodig".

Noot 3 Fibonacci (Leonardo van Pisa, ca 1180-ca 1250) geeft in zijn Liber Abaci (1202) onder andere het probleem van de totale konijnenpopulatie. Als je begint met één paartje, dat om de twee maanden 2 jongen werpt, maar dat pas na 4 maanden daarmee begint, net als de jongen zelf 4 maanden na geboorte weer jongen werpen, dan vormt het aantal paartjes op opeenvolgende tijdstippen met 2 maanden tussenpoos juist een Fibonacci-rij.

Noot 4 W.T. Tutte, On Elementary Calculus and the Good Formula, Journal of Combinatorial Theory (B) 18, 97-137 (1975)

Noot 5 Ook oppassen met associativiteit! net zo als

$0 = (1+(-1)) + (1+(-1)) + (1+(-1)) + \dots \neq 1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1$   
moet je bij oneindige bewerkingen <sup>met formele rekenen</sup> oppassen met "haakjes" uitwerken.

Noot 6 Claude Gaspard Bachet de Méziriac 1581-1638.

1621: Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres.

De 4-kwadratestelling van Lagrange werd door hem voor het eerst vermoed.

→ Noot 3A De term Fibonacci-rij is van Lucas (eind 19<sup>e</sup>-eeuw). Lucas zelf bestudeerde 1, 3, 4, 7, etc.

Vierde les, maandag 14 september, 4<sup>e</sup> uur

Het <sup>schaapherders</sup> ~~schapeherders~~-principe (shepherd's principle).

Om schapen te tellen, tel je de poten en je deelt door 4.

[Opm. van F.W. de Bruijn: dit geldt alleen als er geen schapen met 5 poten bij zijn.]

Stelling. Laat  $W$  en  $V$  twee verzamelingen zijn en  $k \in \mathbb{N}_1$ . Laat  $f$  een surjectie  $W \rightarrow V$  zijn met de eigenschap

$$\forall v \in V \quad |f^{-1}\{v\}| = k.$$

Dan  $|W| = k|V|$ .

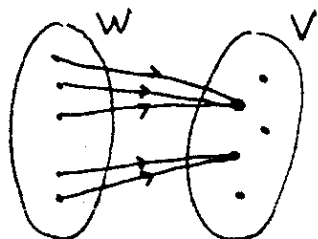
( $W$  = verzameling poten,  $V$  = verzameling schapen)

Stelling Laat  $W$  en  $V$  twee verzamelingen zijn en  $f: W \rightarrow V$ .

$$\text{Dan } |f(W)| = \sum_{w \in W} \frac{1}{|f^{-1}(f(w))|}$$

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } \sum_{w \in W} \frac{1}{|f^{-1}(f(w))|} &= \sum_{v \in f(W)} \sum_{w \in f^{-1}(v)} \frac{1}{|f^{-1}(f(w))|} = \\ &= \sum_{v \in f(W)} \sum_{w \in f^{-1}(v)} \frac{1}{|f^{-1}(v)|} = \sum_{v \in f(W)} 1 = |f(W)| \end{aligned}$$

Voorbeeld: neem een  $f$  zoals hieronder afgebeeld:



De bovenste drie punten krijgen nu gewicht  $\frac{1}{3}$   
de onderste twee punten krijgen nu gewicht  $\frac{1}{2}$ .  
De som van alle gewichten in  $W$  is nu 2, nl het aantal elementen van  $f(W)$ .

Opmerking. De gebruikelijke manier om het aantal deelverzamelingen van  $k$  elementen uit een verzameling van  $n$  elementen te ~~vermenigvuldigen~~ tellen berust ook op het schaapherders principe: eerst goordende deelverzamelingen tellen, en dan door  $k!$  delen.

Permutaties.

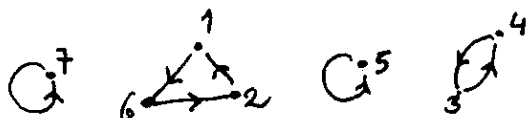
Voorbeeld.  $S = \{1, 2, \dots, 7\}$ . We noemen een bijectieve afbeelding  $\pi: S \rightarrow S$  een permutatie (van  $S$ ).

We noteren een permutatie door de originele boven en de beelden onder te schrijven:

$$\pi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \text{ dus } \pi(1) = 6.$$

Opmerking: vroeger werd het "beeld", nl het zeventupel  $(6, 1, 4, 3, 5, 2, 7)$  ook wel permutatie genoemd, maar tegenwoordig vatten we een permutatie op als afbeelding. (Voor het antieke beeldachtige permutatie begrip kan je "anagram" als naam kiezen).

Bovenstaande permutatie kan je ook diagrammatisch voorstellen:



Een notatie in cykel vorm is:  $(1, 6, 2)(3, 4)(5)(7)$ .

We hebben de vrijheid de volgorde van deze disjuncte cycli te veranderen en het maakt ook niets uit waar we beginnen  $(1, 6, 2) = (6, 2, 1) = (2, 1, 6)$ .

Met een permutatie  $\pi$  associëren we ~~de~~ voor elke  $k \in \mathbb{N}$ , het aantal cycli ter lengte  $k$ : notatie  $b_k(\pi)$ .

Het type van  $\pi$  is de rij  $(b_k(\pi))_{k \in \mathbb{N}}$ . Bijvoorbeeld het type van de permutatie boven is

$$(2, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

Het type geeft aan hoe de permutatie in een haakjespatroon geschreven kan worden. met deze permutatie correspondeert een haakjespatroon  $(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ .

$\sum k \cdot b_k(\pi)$  is het aantal gepermuteerde objecten, ook wel graad van  $\pi$  genoemd.

We introduceren tussen permutaties een equivalentie-relatie als volgt:

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \Leftrightarrow \exists \pi [\pi \sigma_1 \pi^{-1} = \sigma_2].$$

Equivalentie permutaties hebben hetzelfde type (dezelfde  $b$ -vector). We kunnen dit het beste inzien door een voorbeeld te bekijken.

Laat  $\sigma := (1, 3) (2, 4, 5) (6) (7)$ , en laat  $\rho$  een willekeurige permutatie van  $\{1, 2, \dots, 7\}$  zijn. Dan kunnen we inzien dat  $\sigma$  equivalent is met

$$\tau := (\rho_1, \rho_3) (\rho_2, \rho_4, \rho_5) (\rho_6) (\rho_7).$$

Waarom? nou, kijk maar,  $\tau(\rho_4) = \rho_5$  ~~en~~ en  $\rho \sigma \rho^{-1}(\rho_4) =$

$$\rho \sigma (4) = \rho(5), \text{ (etc)}$$

dus inderdaad,

$$\rho \sigma \rho^{-1} = \tau$$

We kunnen ook zien dat  $\sigma$  equivalent is met de oorspronkelijke  $\pi$ : neem  $\rho$  maar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Op dezelfde wijze kun je bij elk tweetal permutaties met hetzelfde cykel-patroon een  $\rho$  vinden waardoor ze equivalent blijven.

Stelling  $\sigma_1 \sim \sigma_2 \Leftrightarrow$  het type van  $\sigma_1 =$  het type van  $\sigma_2$ .

Vraag: wat is het aantal permutaties van  
gegeven type (van  $n$  objecten)

Voor de beantwoording gebruiken we het schaapherders-  
principe.

Het type vatten we op als een patroon van haakjes  
en posities. Laat het type  $(b_1, b_2, \dots)$  zijn (eën-schaap).  
De poten van elk schaap (elke permutatie van het  
gegeven type) bestaan uit alle manieren om zo'n permutatie  
volgens het haakjes-patroon te schrijven.

De collectie van alle poten bestaat uit  $n!$  elementen.

Elk schaap heeft

$$b_1! \cdot 1^{b_1} \cdot b_2! \cdot 2^{b_2} \cdot b_3! \cdot 3^{b_3} \cdot \dots$$

poten.

Immers, de  $b_k$   $k$ -cyclen komen in elke mogelijke  
volgorde voor, boven dien zijn er  $k$  mogelijkheden  
(in elk der  $b_k$   $k$ -cyclen) voor het beginpunt.

Conclusie: er zijn  $\frac{n!}{\prod_{k=1}^{\infty} b_k! k^{b_k}}$  permutaties van type  $(b_1, b_2, \dots)$

Bijvoorbeeld, van type  $(2, 1, 1, 0, 0, \dots)$  zijn er  $\frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3!}$  permutaties.

Alle permutaties tezamen zijn er  $n!$ , en dit  
betekent  $n! x^n = \sum_{\text{permut.}} x^n = \sum_{b_1, b_2, \dots} \sum_{\text{permutaties type } b} x^{\sum k b_k}$  en dus

$$x^n = \sum_{\substack{\text{bissam type} \\ \text{van graad } n}} \frac{x^{b_1 + 2b_2 + \dots}}{b_1! \cdot 1^{b_1} \cdot b_2! \cdot 2^{b_2} \cdot \dots}$$

en dus 
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{b_1, b_2, \dots} \frac{1}{b_1!} \left(\frac{x}{1}\right)^{b_1} \cdot \frac{1}{b_2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{b_2} \cdot \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{b_1=0}^{\infty} \frac{1}{b_1!} \left(\frac{x}{1}\right)^{b_1} \sum_{b_2=0}^{\infty} \frac{1}{b_2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{b_2} \sum_{b_3=0}^{\infty} \dots \\ &= e^x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \dots = e^{-\ln(1-x)} \end{aligned}$$

en dit wisten we al, maar nu hebben we het voor formele  
machtrekken bewezen.

Dit kan nu wel flauw lijken, maar later is deze ingewikkelde methode de eenvoudigste

(trouwens: hoe laat je zien dat de reeks

$$1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \quad \text{met daar in gesubstitueerd } y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

oplevert  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$  ? Dat is ook niet zo eenvoudig.)

Een permutatie noemen we even, <sup>of oneven</sup> al naar gelang

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \quad \text{even of oneven is.}$$

We tellen het aantal even permutaties — het aantal oneven permutaties van graad  $n$ . Noem dit aantal  $d(n)$ . Dan geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(n)}{n!} x^n = \sum_{b \in \text{types}} (-1)^{b_1 + b_3 + b_5 + \dots} \frac{x^{b_1 + 2b_2 + \dots}}{b_1! 1^{b_1} \cdot b_2! 2^{b_2} \dots}$$

$$= \text{analoge berekening} =$$

$$= e^{\ln(1+x)} = 1+x$$

Met andere woorden  $d(0) = 1$  (wat dat ook moog betekenen)  
 $d(1) = 1$   
 $d(n) = 0$  voor  $n > 1$

Opm. over  $d(0)$  etc. In bedekte termen hebben we het type  $(0, 0, 0, \dots)$  meegenomen en daar mee ook de permutatie van 0 objecten. We hebben impliciet aangenomen dat er één zo'n permutatie is, maar of deze aanname juist is, hangt af van de definitie van afbeelding (is  $\emptyset \rightarrow \emptyset$  ook een afbeelding) die we hanteren.

vijfde les, maandag 21 september, 3<sup>e</sup> uur.

Op analoge wijze vinden we voor  $Q_k(n) :=$  het aantal permutaties van  $\{1, \dots, n\}$  met  $k$  cycli de volgende formule:

$$\sum_{k, n \in \mathbb{N}_0} \frac{Q_k(n)}{n!} x^n y^k = \sum_{b \in \text{types}} \frac{x^{b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots} y^{b_1 + b_2 + \dots}}{b_1! 1^{b_1} b_2! 2^{b_2} b_3! 3^{b_3} \dots} =$$

$$\sum_{b \in \text{types}} \prod_j \frac{1}{b_j!} \left[ \frac{x^j y}{j} \right]^{b_j} =$$

$$\sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \sum_{b_3=0}^{\infty} \dots \prod_j \frac{1}{b_j!} \left( \frac{x^j y}{j} \right)^{b_j} =$$

$$\prod_{j \geq 1} \sum_{b_j=0}^{\infty} \frac{1}{b_j!} \left( \frac{x^j y}{j} \right)^{b_j} = \prod_{j \geq 1} e^{\frac{x^j y}{j}} =$$

$$e^{xy + \frac{x^2 y}{2} + \dots} = e^{-y \ln(1-x)} = (1-x)^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-y}{n} (-x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y(y+1)(y+2)\dots(y+n-1)}{n!} x^n$$

We definiëren nu  $S(n, k) := Q_k(n) (-1)^{n+k} / n!$ ,

de  $S(n, k)$  heten Stirling getallen van de eerste soort, ofwel:  $S(n, k)$  is de coëfficiënt van  $y^k$  in  $\binom{y}{n}$ .

Zie ook het boek van Comtet (hoofdstukken 5 en 6) en het boek van Riordan.

We kunnen nu ook berekenen het gemiddeld



aantal cyclen bij gegeven  $n$ . We vinden dit eenvoudigweg door

$$\sum_{k, n \in \mathbb{N}_0} \frac{k Q_k(n) x^n y^k}{n!}$$

te berekenen voor  $y = 1$ , dit is hetzelfde als

$$\left[ \sum_{\substack{k, n \in \mathbb{N}_0 \\ k \geq 1}} \frac{1}{n!} k Q_k(n) x^n y^{k-1} \right]_{y=1} =$$

$$\left[ \frac{d}{dy} (1-x)^{-y} \right]_{y=1} =$$

$$\left[ -1 \cdot \ln(1-x) (1-x)^{-y} \right]_{y=1} = \frac{\ln(1-x)}{1-x} =$$

$$\left( x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \right) (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

De coëfficiënt van  $x^n$  in deze reeks is  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

We gaan nu iets algemeners doen, waarvan de zin later pas zal blijken.

Met een permutatie van type  $(b_1, b_2, \dots)$  associeren we een gewicht, zijnde het monoom

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots$$

in de variabelen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (n.b.  $x_i^0 = 1$  voor alle  $i$ )

We sommeren nu alle gewichten van alle permutaties, eerst voor vaste  $n$ , en dan komt er

$$\sum_{b_1=0}^n \sum_{b_2=0}^n \dots \frac{n!}{b_1! 1^{b_1} b_2! 2^{b_2}} \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots, \text{ waarbij}$$

alleen gesommeerd wordt over alle typen  $b$  met  $b_1 + 2b_2 + \dots = n$ .

We kunnen dit ook schrijven als

$$C_{x^n} = n! \sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \sum_{b_3=0}^{\infty} \dots \frac{x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots}{b_1! 1^{b_1} \cdot b_2! 2^{b_2} \cdot b_3! 3^{b_3} \dots} x^{b_1 + 2b_2 + \dots}$$

en de beperkende conditie kan weg:

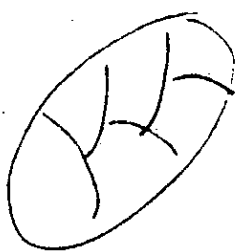
Dit zootje kunnen we nu uitrekenen, er komt dan:

$$C_{x^n} = n! \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \frac{x_j^{b_j} x^{j b_j}}{b_j! j^{b_j}} =$$

$$C_{x^n} = n! \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \frac{1}{b_j!} \left( \frac{x_j x^j}{j} \right)^{b_j} =$$

$$C_{x^n} = n! e^{\frac{x_1 x}{1} + \frac{x_2 x^2}{2} + \frac{x_3 x^3}{3} + \dots}$$

We gaan nu spreken over partities van verzamelingen. Opgepast, dit zijn niet de partities van getallen zoals we die hierboven hebben behandeld. Zo dadelijk komen er ook nog gemummerde partities, dat is weer wat anders.



verzameling  $S$

wordt opgedeeld in stukken.

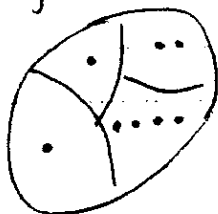
Als  $S$  eindig is, dan verstaan we onder het type van een partitie de rij

$$(b_1, b_2, b_3, \dots)$$

waarin

$b_i :=$  het aantal stukken met grootte  $i$ .

Bijvoorbeeld, het type van de hier geïllustreerde partitie



is  $(2, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$

We willen nu partities gaan tellen, en we tellen ze per type:

Veronderstel we willen weten hoeveel partities er zijn van een verzameling van 11 elementen en type  $(2, 3, 1, 0, 0, 0, \dots)$ .

We schrijven weer een haakjes patroon op:

$(\cdot)(\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)$

We verdelen hierover de elf elementen, dit kan op  $11!$  manieren (poten).

Het aantal manieren waarop je een gegeven partitie kunt representeren in dit haakjes patroon is

$$2! \cdot 3! (2!)^3 \cdot 1! (3!)^1 \quad (\text{aantal poten per schaaap}).$$

↑ manieren om de koksjes met één punt om te schikken

↑ totaal aantal mogelijkheden om in elk der 3 koksjes met twee punten de elementen om te schikken.

Het totaal aantal partities van 11 elementen volgens het gegeven patroon  $(2, 3, 1, 0, 0, \dots)$  is dus

$$\frac{11!}{2! (1!)^3 \cdot 3! (2!)^3 \cdot 1! (3!)^3} \quad (= 1925)$$

In het algemeen, met  $n$  elementen en type  $(b_1, b_2, \dots)$  wordt het aantal

$$\frac{n!}{b_1! (1!)^{b_1} \cdot b_2! (2!)^{b_2} \cdot b_3! (3!)^{b_3} \cdot \dots}$$

Merkt het verschil op met permutaties.

We noteren  $P(n) :=$  het aantal partities van een verzameling met  $n$  elementen.

We werken  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$  uit als boven (d.w.z. p. 26, ook bij borden hoef je "boven" niet zo letterlijk te nemen).

Dan komt er:

$$e^{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots} = e^{x-1}$$

Natuurlijk komt er weer de gebruikelijke moeilijkheid bij  $n=0$ : hoeveel partities zijn er bij een verzameling met 0 elementen. Hier maken we ons niet druk over.

Dit zelfde resultaat kunnen we ook op andere manier uitrekenen, met recurrente betrekkingen:



$n > 0$ . Kies een punt  $a \in S$ . Dit ligt in een stuk met  $j$  andere elementen,  $j \geq 0$ .

Dit stuk kunnen we op  $\binom{n-1}{j}$  manieren kiezen, en dan blijkt

$$P(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} P(n-1-j) \quad \left( \begin{array}{l} \text{we moeten in} \\ \text{het geval } j=n-1 \\ \text{kenmerkende } P(0) := 1 \\ \text{nemen} \end{array} \right)$$

Dus

$$\frac{P(n+1)x^n}{n!} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P(n-j) \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangle \text{ anders } \sum_{n \geq 0} P(n+1) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{P(n-j)}{(n-j)!} \frac{x^n}{j!} \\ &= e^x \sum_{n \geq 0} P(n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$\blacktriangle$  Als we nu stellen

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} P(n) \frac{x^n}{n!}$$

dan vinden we

$$\bar{F}'(x) = e^x \bar{F}(x),$$

$$\text{dus } \bar{F}(x) = C e^{e^x}$$

- en we bepalen  $C$  door  $x=0$  te substitueren, er komt dan  $P(0) = C e^{e^0} = C e$ ; in verband met onze definitie van  $P(0)$ , betekent dat  $\bar{F}(x) = e^{e^x - 1}$ .

### Rangsdrukkingen van een multiset.

We weten wat een multiset is: Laat  $S$  een verzameling zijn, dan is een afbeelding  $f: S \rightarrow \mathbb{N}_0$  een multiset, en we noemen  $f$  ook wel de frequentie-functie van de multiset.

Nu willen we op de een of andere manier formuleren dat de volgorde er toe doet (herhulingscombinatie)

Voorbeeld.  $S = \{a, b, c\}$

(N.B. letters die elementen van een verzameling zijn zijn vervelend; om dit te omzeilen neem je aan  $a \neq b$ ,  $b \neq c$ ,  $a \neq c$ , en dan kunnen  $a, b, c$  naar believen variabelen of elementen voorstellen).

Een frequentie functie is bijvoorbeeld

a	b	c
↓	↓	↓
2	3	1

Een woord waarin de letters met deze frequentie voorkomt is bijvoorbeeld

a b a c b b.

Hoeveel woorden die bij deze frequentiefunctie passen zijn

zijn er? We gebruiken weer de schrapen telstelling:

6 dingen (bijv.  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1$ )

laten zich op  $6!$  manieren rangschikken in een woord. Als we dan de indices wegpoetsen krijgen we telkens  $2! 3! 1!$  dezelfde woorden, en dus zijn er

$$\frac{6!}{1! 2! 3!} (= 60)$$

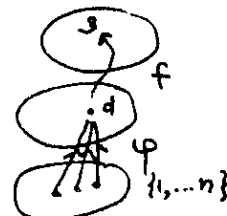
woorden die bij de gegeven frequentie functie passen. Nu is ook de algemene oplossing duidelijk:

Zij  $D$  een alfabet en  $n \in \mathbb{N}_1$ .

Een woord over  $D$  is een afbeelding  $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow D$ .

Het type van een woord, of wel de frequentie functie is  $f: D \rightarrow \mathbb{N}_0$  gedefinieerd door

$$\forall d \in D \quad f(d) := |\varphi^{-1}\{d\}|$$



We hebben nu de volgende stelling, die op zichzelf niet zo belangrijk is, maar wel leuk omdat hij dezelfde vorm heeft als onze stelling van p. 11.

$C =$  verzameling  $f: D \rightarrow \mathbb{N}_0$ , met  $\forall d \in D [f(d) \in S_d]$

$A(n) :=$  het aantal  $n$ -letter woorden met  $f \in C$ , dan geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} x^n = \prod_{d \in D} \left( \sum_{r \in S_d} \frac{x^r}{r!} \right)$$

Om de juistheid van deze stelling in te zien, moet je inzien dat als  $d_1, d_2$  en  $d_3$  termen  $\frac{x^{r_1}}{r_1!}, \frac{x^{r_2}}{r_2!}, \frac{x^{r_3}}{r_3!}$  resp in de som tussen haakjes hebben staan, dan

correspondeert de term  $\frac{x^{r_1}}{r_1!} \frac{x^{r_2}}{r_2!} \frac{x^{r_3}}{r_3!}$  in de ontwikkeling van het product

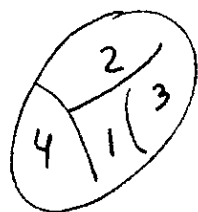
met een woord van  $r_1 + r_2 + r_3$  letters, namelijk  $r_1$   $d_1$ 's,  $r_2$   $d_2$ 's en  $r_3$   $d_3$ 's.

Zesde les. maandag 21 september 1981, 4<sup>e</sup> uur.

We geven nog een voorbeeld:

Genummerde partities.

Dit is een beetje een quarsongen voorbeeld: we bekijken niet gewone partities, maar partities waar elk der stukken een nummer heeft.



We veronderstellen dat we alleen naar partities in  $k$  stukken kijken, en dat de nummers lopen van 1 tot  $k$ .

We nemen verder aan dat het gaat om een verzameling van  $n$  elementen.

We vatten deze  $n$  elementen op als een rij plaatsen in een woord, en we vullen dat woord met de letters  $1, \dots, k$ , bijvoorbeeld

2 1 2 1 3 2 4 3 4 4  
 . . . . . . . . . .

De "letter" geeft telkens aan in welk stuk het betrokken element terecht komt.

$D = \{1, \dots, k\}$ ,  $S_D = \mathcal{N}_1$  en we vinden dus (ganzewat  $R, f \in C$  is in de formule van p. 11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_k(n)}{n!} x^n = \left( \sum_{r \in \mathcal{N}_1} \frac{x^r}{r!} \right)^k = (e^x - 1)^k$$

en dus is het totaal aantal <sup>genummerde</sup> partities van  $\{1, \dots, n\}$  juist wat we krijgen als we dit sommeren over  $k$ :

namely

36

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} (e^x - 1)^k = \frac{1}{2 - e^x} - 1$$

( $A(0)$  je  $A(0) = 0$  neemt,  
anders, als  $A(0) = 1$ , dan  
de term  $-1$  weg)

Je kan dit ook op heel veel andere manieren afleiden.

Laat het stuk met het hoogste nummer  $j$  elementen hebben ( $j \geq 1$ )

Er zijn  $\binom{n}{j}$  manieren om dit stuk te kiezen, en

$A(n-j)$  manieren om de rest in gesummerde partities te verdelen:

Dus, (sommeren over  $j$ , conventie  $A(0) = 1$ ):

$$\sum_{j=0}^n A(n-j) \binom{n}{j} = A(n)$$

en dus

$$\sum_{j=0}^n \frac{A(n-j)}{(n-j)!} \frac{1}{j!} = \frac{2A(n)}{n!} \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{A(n-j)}{(n-j)!} x^{n-j} \frac{x^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A(n)}{n!} x^n - 1$$

(term  $n=0$  loopt nu ook:  
 $\frac{A(0)}{0!} x^0 \cdot \frac{x^0}{0!} = 2A(0)x^0 - 1$ )

Als we nemen  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} x^n$ , dan komt er

$$F(x) e^x = 2F(x) - 1$$

Dus

$$F(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

en we vinden weer dezelfde formule.

Hiermee sluiten we dit onderwerp af.



## Pólya-theorie

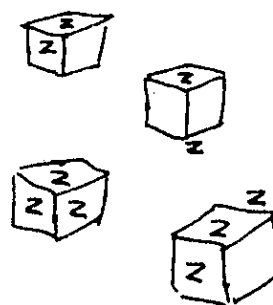
De stelling van Pólya gaat over het aantal manieren waarop een combinatorische structuur gekleurd kan worden.

De oorspronkelijke interesse van Pólya was voor het tellen van moleculen en chemische structuren.

Een eenvoudig voorbeeld is het aantal manieren waarop een kubus gekleurd kan worden (tegenwoordig, als je een kind op straat vraagt wat een kubus is, zal het je vertellen dat een kubus uit 27 blokjes bestaat in zes kleuren, maar wij doen het eenvoudiger).

Uiteraard, als de kubus vastgeprikt zit, dan zijn er met twee kleuren voor de 6 zijvlakken  $2^6 = 64$  mogelijkheden, maar een kubus kan gerooteerd worden, als we hem laten vallen weet je niet meer hoe die stond: we willen kleuringen equivalent rekenen als ze door rotaties in elkaar zijn over te voeren. Wat zijn dan de equivalentieklassen, bijv bij een kubus met twee kleuren?

- 1) helemaal wit
- 2) een zwart vlak
- 3) twee zwarte vlakken, aangrenzend
- 4) " " " " , tegenover elkaar
- 5) drie zwarte vlakken, in een hoekpunt samen komend
- 6) drie zwarte vlakken, in L-vorm:
- 7) twee witte vlakken, tegenover elkaar
- 8) twee witte vlakken, aangrenzend
- 9) een wit vlak
- 10) helemaal zwart.

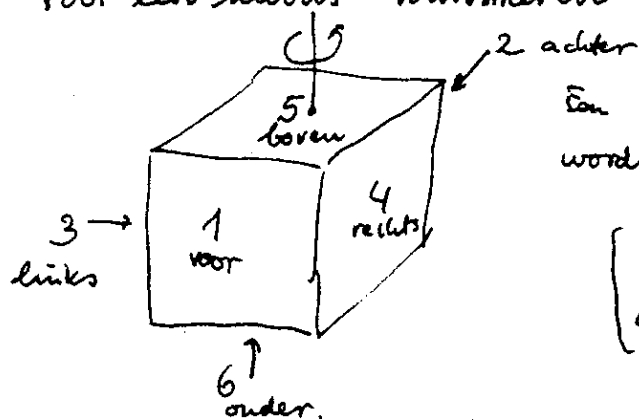


Er zijn tien equivalentieklassen.

Voor we verder gaan, een advies over notatie voor symmetriën van ruimtelijke figuren.

In de mechanica hebben materiële punten meestal namen, en wanneer het object bewogen is, gaan de namen mee. In de meetkunde is dit onverstandig: punten krijgen namen, en een beweging wordt beschreven door bij elk punt (naam v.e. punt) de naam van zijn beeld punt te geven. De namen bewegen niet mee.

Voor een kubus nummeren we de zijvlakken als volgt



Een rotatie om de verticale as wordt bijv. weergegeven door:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In het algemeen gaan we bij deze theorie uit van een groep  $G$  (bijv. de groep van de kubus, d.w.z. alle draaiingen die de kubus op zichzelf afbeelden). De groep is niet zomaar abstract maar werkt op een verzameling  $D$  (bijv. de hoekpunten-, ribben- of zijvlakkenverzameling van de kubus), dat wil zeggen we hebben een homomorfie

$$\pi : G \rightarrow S_D \quad (\text{d.w.z. } \forall g_1, g_2 \in G \quad \pi(g_1 g_2^{-1}) = \pi g_1 (\pi g_2^{-1}))$$

Eventueel kan je ook zeggen dat  $\pi : G \rightarrow D^D$  met

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \pi(g_1 g_2) = \pi g_1 \pi g_2$$

$$\pi(e) = \text{Id}_D$$

Dat komt op het zelfde neer. Meestal nemen we  $\pi$  injectief.

De cycle index van  $G$  en  $\pi$  is het polynoom

$$P_{G,\pi}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1(\pi(g))} x_2^{b_2(\pi(g))} \dots$$

en daarin is  $(b_1(\pi(g)), b_2(\pi(g)), \dots)$  zoals gebruikelijk het type van  $\pi(g)$ .

We zullen later zien dat het aantal manieren om de kubus te kleuren juist is:  $P_{G,\pi}(3, 3, \dots)$ .

Er gelden een rijtje flauwe formules, zoals bijvoorbeeld

$$P_{G,\pi}(x, x^2, \dots) = x^{|D|}$$

(en met  $x=1$ , hieruit volgt:  $P_{G,\pi}(1, 1, \dots) = 1$ )

We rekenen eerst bij wijze van voorbeeld uit de cycle-index van de kubusgroep werkende op de zijvlakken collectie:

		aantal
alle rotaties over $90^\circ$ liggen op elkaar, nida	$(2, 0, 0, 1, 0, \dots)$	6
rotaties $180^\circ$ , as door middens zijden	$(2, 2, 0, \dots)$	3
rotaties $120^\circ$ , as door hoofd diagonaal	$(0, 0, 2, \dots)$	8
rotaties $180^\circ$ , as door ribben middens	$(0, 3, 0, \dots)$	6
identieke afb.	$(6, 0, 0, \dots)$	1
Hiermee zijn alle 24 elts van de kubus groep "gerekend".		24

De cycle index polynoom is dus

$$\frac{1}{24} (6x_1^2x_4^1 + 3x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2^3 + x_1^6)$$

Op analoge wijze berekenen we het cycle index polynoom  $P_{S_3, id}$ :

$$\frac{1}{6} (x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1x_2)$$

$\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
 1    identiteit    2    3-cykels    3    2-cykels

Zevende les, maandag 28 September 1981, 3<sup>e</sup> uur.

We gaan eerst een hulpstelling afleiden. Deze hulpstelling heeft vroeger naar Burnside, die hem in 1910 in een boek opschreef. Later ontdekte men dat deze ook al bij Cauchy en Frobenius stond.

Deze hulpstelling gaat over een groep die op iets werkt. We maken het onderscheid tussen de groep  $G$  en het effect van zijn elementen op een verzameling  $D$ , namelijk door

$$\pi : G \rightarrow S_D, \text{ met } \forall g_1, g_2 \in G \quad [\pi(g_1 g_2^{-1}) = (\pi(g_1) \chi(\pi(g_2))^{-1})]$$

te definiëren.  $\pi$  is de "werking" van  $G$ , en  $\pi(g)$  de "werking" van  $g \in G$  op  $D$ . Op  $D$  definiëren we een equivalentie  $\sim$  door

$$d_1 \sim d_2 \iff \exists g \in G \quad \pi(g) d_1 = d_2$$

De klassen  $\blacklozenge$  bunen, orbits  $\blacklozenge$  vormen een partitie van  $D$ . Het aantal klassen bedraagt nu volgens het

Lemma van Cauchy-Frobenius :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g),$$

waarin  $\psi(g) = |\{d \in D \mid \pi(g) d = d\}| = \text{het aantal cykels van } \pi(g) \text{ van lengte } 1.$

$$= \frac{d}{dx} P_{G, \pi}(x, 1, \dots) \Big|_{x=1}$$

Bewijs. Voor  $d \in D$  definiëren we de sta-ondergroep  $H_d$  van  $G$  als volgt

$$\{g \in G \mid \pi(g) d = d\}.$$

$\blacklozenge$  Er is een 1-1 correspondentie tussen de elementen van  $K_d$  en de linkernevenklassen  $g H_d$  van  $H_d$ , namelijk

Laat  $d' \in K_d$  (de klasse van  $d$ )

Dan  $d' = \pi(g)d$  voor de een of andere  $g$ .

Laat  $g_1$  zodanig zijn dat  
 $d' = \pi(g_1)d$

dan  $\pi(g_2)d = \pi(g_1)d$

$$\pi(g_2^{-1}g_1)d = d$$

$$\therefore g_2^{-1}g_1 \in H_d$$

$$\therefore g_1 \in g_2 H_d$$

Dus  $\{g \in G \mid d' = \pi(g)d\} \subset g_2 H_d$ .

Vice versa, voor  $g_1 \in g_2 H_d$  ziet men eenvoudig in dat  $\pi(g_1)d = d'$ , dus

$$\{g \in G \mid d' = \pi(g)d\} = g_2 H_d.$$

$$\{g \in G \mid \pi(g)d = \pi(g)d\} = g_2 H_d.$$

Op deze wijze associeren we met elke punt van de klasse van  $d$  precies één nevenklasse van  $H_d$ .

Gevolg :  $|K_d| = \frac{|G|}{|H_d|}$ , of wel  $|K_d| |H_d| = |G|$ .

Als we nu de schapeitelstelling toepassen op de afbeelding

$$f : D \rightarrow \text{verzameling der klassen}, \\ d \mapsto K_d$$

dan vinden we  $\diamond$  (nagier voorlopig even het sterretje  $\star$ )

$$\text{aantal klassen} = \sum_{d \in D} \frac{1^\star}{|K_d|} = \frac{1}{|G|} \sum_{d \in D} |H_d| \cdot 1^\star$$

We vatten  $|H_d|$  op als  $\sum_{g \in G} \chi(\pi(g)d = d)$  en we krijgen:

$$\text{aantal klassen} = \frac{1}{|G|} \sum_{d \in D} \sum_{g \in G} \chi(\pi(g)d = d) \cdot 1^\star$$

zoals bekend <sup>moet je</sup> in de combinatoriek en elders altijd sommatie volgorde verwisselen tenzij je dit niet gedaan hebt en dan krijg je:

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{d \in D} \psi(\pi(g)d = d) 1^*$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g)$$

We leiden op soortgelijke wijze een Cauchy-Frobenius formule met gewichten af.

Daartoe gebruiken we een commutatieve algebra  $K$  over  $\mathbb{Q}$  (een ring waarin vermenigvuldiging met scalaren uit  $\mathbb{Q}$  mogelijk is, zodanig dat

- ①  $K$  met de ring-optelling & scalaire vermenigvuldiging een lineaire ruimte over  $\mathbb{Q}$  vormt
- ② voor  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $k, m \in K$ ,  $q(km) = (qk)m$

Voorbeelden van zulke algebra's: polynoomringen met rationale coëfficiënten, of idealen in zulke ringen.

Een gewichtsfunctie is een afbeelding  $w: D \rightarrow K$ , en we eisen nog van de gewichtsfunctie dat deze constant is op klassen, en dat we hem dus ook kunnen opvatten als een afbeelding van de verzameling der klassen naar  $K$ .

Dan geldt de volgende versie van Cauchy-Frobenius:

Som van de gewichten van de klassen =

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g),$$

$$\text{waar } \Psi(g) = \sum_{d \in D} w(d) \cdot \psi(\pi(g)d = d),$$

met andere woorden, de  $d$ 's die vast blijven onder  $\pi(g)$  worden gewogen geteld (in plaats van allemaal 1)

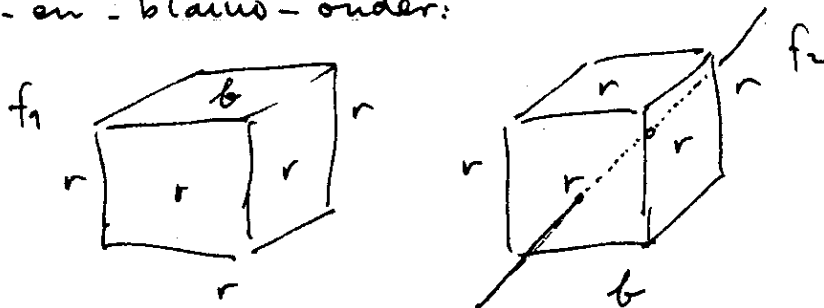
Het bewijs verloopt volstrekt analoog, namelijk door  $1^*$  in het vorige bewijs overal door  $w(d)$  te vervangen.

We gaan deze stelling gebruiken voor het tellen van kleureringen van objecten met symmetrie, bijvoorbeeld de kubus.

We onderscheiden daartoe de vastgeprikte kubus, met zijvlakken-verzameling  $D$ , en kleuren collectie  $R$  (bijvoorbeeld  $= \{r(ood), w(it), b(lauw)\}$ ).

De vastgeprikte kubus heeft  $|R|^{|D|}$  kleureringen, elk der kleureringen correspondeert namelijk met een element van  $R^D$ .

Als deze vaste kubus wordt losgemaakt, also een dobbelsteen op de tafel gegooid, dan verdwijnt bijvoorbeeld het onderscheid tussen alles-rood-en-blaauw-boven en alles-rood-en-blaauw-onder:



$f_1$  en  $f_2$  zijn equivalent, omdat er een  $g \in G$  (de groep der ruimtelijke draaiingen van de kubus) bestaat met  $f_1 \circ \pi(g) = f_2$ , bijvoorbeeld een halve slag om de getekende as.

Door op deze manier eerst wat voorbeelden te doen zie je hoe je je meerkleurige intuïtie kunt formaliseren:

Een kleur <sup>patroon</sup> is een klasse onder bovengenoemde equivalentie-relatie, dus:

een kleuring is bijvoorbeeld: boven blauw, rest rood.

een kleurpatroon is bijvoorbeeld: één blauw, rest rood.

achtste les, maandag 28 september, 4<sup>e</sup> uur  
Besluit de toevoeging

44

$$\prod_{f \in R^D} f \circ \pi(g) \in S_{R^D}$$

Deze toevoeging is bijna (maar niet helemaal) een representatie, de volgorde komt namelijk verkeerd uit: Om het goed te maken gebruiken we een klein trucje (volgorde verkeerd, neem inversen):

$$\sigma(g) := \prod_f f \circ \pi(g^{-1}) \in S_{R^D}$$

Nagaan dat het klopt:

$$\begin{aligned} \sigma(g_1 g_2) f &= f \circ \pi((g_1 g_2)^{-1}) = \\ &= f \circ \pi(g_2^{-1} g_1^{-1}) = \\ &= f \circ \pi(g_2^{-1}) \circ \pi(g_1^{-1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(g_1) (f \circ \pi(g_2^{-1})) &= \\ (\sigma(g_1) \sigma(g_2)) f \end{aligned}$$

Opziet:  $\pi$  permutert  $D$   
 $\sigma$  permutert  $R^D$

De klassen indeling van  $D$  met  $G$  en  $\pi$  is flauw (er is maar één baan) maar van  $R^D$  met  $\sigma$  is wat ingewikkelder. Het aantal kleur patronen is nu het aantal equivalentie klassen, te bepalen met de stelling van Cauchy-Frobenius.

Ik geef nu vast het antwoord, het is

$$P_{G, \pi}(|R|, |R|, |R|, \dots)$$

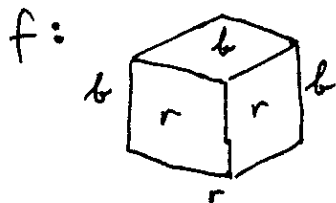
Hoe bewijs je dat?



We geven de kleuren gewichten, namelijk  $r, w$  en  $b$ .  
 (Dit wil zeggen elementen van  $\mathbb{Q}[r, w, b]$ )  
 Het gewicht van een kleuring is nu:

$$W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

Bijvoorbeeld voor de volgende kleuring.



is het gewicht  $r^3 b^3$ .  
 je zoekt dus voor elk zijvlak  
 uit wat de kleur is, en je vermenig-  
 vuldt alles.

Als je in plaats van  $f$  naar  $f \circ \pi(g)$  kijkt worden  
 alleen de factoren gepermuteerd, en daarom is voor  
 elke klasse  $F$  (elk kleur patroon) het gewicht het-  
 zelfde, we schrijven dus maar ook

$$W(F) := W(f) \text{ voor alle } f \in F$$

Bourbaki zou spreken over abus de language.

Nu geldt: de som van de gewichten van de kleur patronen  
 is:

$$P_{G, \pi} \left( \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \sum_{r \in R} (w(r))^3, \dots \right)$$

Dit is de stelling van Pólya, die we nu gaan bewijzen.

$$W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g) \text{ waar } \Psi(g) = \sum_{f \in R^D} W(f) \cdot \chi(\sigma(g)f = f)$$

$$\Psi(g) = \sum_{\substack{f \in R^D \\ f \circ \pi(g) = f}} W(f).$$

We proberen deze formule nog eens te begrijpen, bij  
 wijze van vingeroefening:

$$\sum_{f \in R^D} w(f) = \left( \sum_{r \in R} w(r) \right)^{|D|}, \text{ omdat}$$

met  $f: D \rightarrow R$ , bijv.

$$\begin{array}{l} d_1 \rightarrow r_1 \\ d_2 \rightarrow r_2 \\ d_3 \rightarrow r_3 \quad \text{etc} \end{array}$$

correspondeert in het product

$$\begin{aligned} & (w(r_1) + \underbrace{w(r_2)} + \dots) \\ \times & (\underbrace{w(r_1)} + w(r_2) + \dots) \\ \times & (w(r_1) + w(r_2) + \underbrace{w(r_3)} + \dots) \\ & \vdots \end{aligned}$$

juist het product van de oncircelde termen.

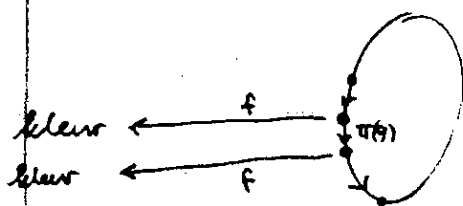
We gaan nu de eis van invariantie bekijken:

Laat  $g$  een groeps element zijn van  $G$ .

$D$  valt uiteen in cyclen  $D_1, D_2, D_3, \dots$  onder de actie van  $\pi(g)$ .

Elke  $D_i$  wordt cyclisch permuteerd.

De eis dat  $f \circ \pi(g) = f$  betekent dat  $D_1, D_2, \dots$  etc effen worden gekleurd:



alleen  $f$ , of: eerst  $\pi(g)$  dan  $f$  geeft hetzelfde resultaat, dus buizen hebben gelijke kleuren. De hele cykel is dus egaal gekleurd.

$$\text{Dus } \psi(g) = \sum_{\substack{f \in R^D \\ \pi(g)f = f}} w(f) = \sum_{r \in R} \underbrace{w(r)^{|D_1|}}_{\substack{\uparrow \\ \text{alle termen corresponderende met } d \in D_1 \text{ moeten dezelfde factoren leveren.}}} \cdot \sum_{r \in R} w(r)^{|D_2|} \cdot \sum_{r \in R} w(r)^{|D_3|} \cdot \dots$$

Als we gelijksoortige factoren bijeenrapen krijgen we

$$= \left( \sum_{r \in R} w(r) \right)^{\text{aantal 1-cykels in } \pi(g)} \cdot \left( \sum_{r \in R} w(r)^2 \right)^{\text{aantal 2-cykels in } \pi(g)} \cdot \dots$$

$$\text{dus } W(f) = \prod_{G, \pi} \left( \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots \right)$$

Een voorbeeld, om het verschil tussen kleuring en kleurpatroon te verduidelijken.

$D = \mathbb{Z}$  (de te kleuren verzameling is nu oneindig)

$G = \mathbb{Z}$  (optel groep).

Voor kleuren-verzameling nemen we  $\mathbb{R}$  (b.v.)

$$\pi(g) = \prod_{z \in \mathbb{Z}} (z+g).$$

Een kleuring is een afbeelding  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Een kleurpatroon is een klasse van kleuringen

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
kleuring ....	12	10	8	6	4	1	3	5	7	9	11	13.....
kleuring ....	20	18	16	14	12	10	8	6	4	1	3	5.....

Dit zijn verschillende kleuringen, die behoren tot het zelfde kleurpatroon.

In het algemeen zijn alleen constante kleuringen invariant onder alle  $\pi(g)$ .

Sommige kleuringen zijn invariant onder sommige permutaties, bijvoorbeeld

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
.....		3	4	2	1	3	4	2	1	3	4	2.....

is invariant onder  $\pi(4)$ .

Geen enkele kleuring is invariant onder kleur-permutaties, maar dat is wel het geval met kleurpatronen: bovenstaande patroon verandert niet als de kleuren worden veranderd volgens

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Voorbeeld: De hoekpunten van de kubus.

Dit correspondeert met  $\pi_3$ , de representatie van de kubusgroep op de hoekpunten, met cykel-ideaal polynoom:

$$\frac{1}{24} (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2)$$

Als kleuren nemen we "ja" en "nee", daarmee geven we in feite een deelverzameling van de hoekpunten aan.

De kleurpatronen worden nu gegeven door het polynoom

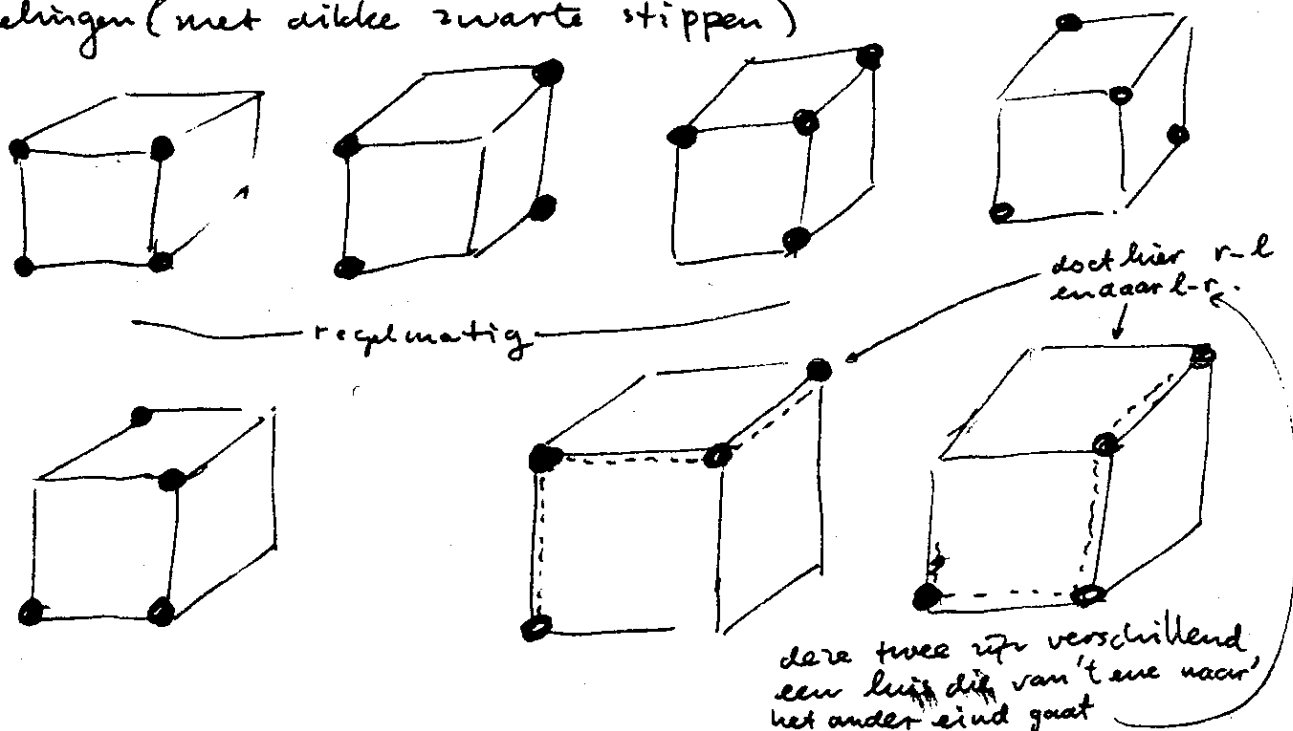
$$\frac{1}{24} (j+n)^8 + 9(j^2+n^2)^4 + 6(j^4+n^4)^2 + 8(j+n)^2(j^3+n^3)^2$$

De coëfficiënt van  $j^4 n^4$  geeft het aantal deelverzamelings-equivalentie klassen

$$= \frac{1}{24} \left( \binom{8}{4} + 9 \binom{4}{2} + 6 \binom{2}{1} + 8 \cdot \binom{2}{1} \binom{2}{1} \right) =$$

$$\frac{1}{24} (70 + 54 + 12 + 32) = \frac{1}{24} (168) = 7$$

en inderdaad er zijn de volgende zeven deelverzamelingen (met dikke zwarte stippen)



Nog een voorbeeld.

We vragen naar de patronen van deelverzamelingen van zijvlakken van de kubus, en wel patronen van deelverzamelingen met drie leden.

Heel veel manieren om een deelverzameling van 3 leden uit 6 (totaal 15) te kiezen zijn equivalent.

$D$  = verzameling zijvlakken

$K = \{ja, nee\}$

gewicht van "ja" is  $1 \cdot j \in \mathbb{Q}[j, n]$   
 " " " " "nee" is  $1 \cdot n \in \mathbb{Q}[j, n]$ .

$G$  is de kubus groep.

$\pi: G \rightarrow S_D$  is de repr. als permutaties van zijvlakken

Het antwoord is

$$C_{j, n^3} P_{G, \pi} (\sum w(r), \sum w^2(r), \sum w^3(r), \dots)$$

In ons geval is het het polynoom  $P_{G, \pi}$  wat we hebben berekend op p. 39.

$\sum w(r)$  (som vd gewichten van de kleuren)

$$= j+n$$

$$\sum w^2(r) = j^2 + n^2$$

Er komt dus

$$C_{j, n^3} \cdot \left( \frac{1}{24} \left( \underbrace{(j+n)^6}_A + 3 \underbrace{(j+n)^2(j^2+n^2)^2}_B + \underbrace{6(j+n)^2(j^4+n^4)}_C + \underbrace{6(j^2+n^2)^3}_D + \underbrace{8(j^3+n^3)^2}_E \right) \right)$$

termen C en D geven resp alleen termen met 4<sup>e</sup> machten of hoger en alleen even machten; die geven dus geen bijdragen. Er komt dus

$$\frac{1}{24} \left( \underbrace{\binom{6}{3}}_A + \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 2}_{\substack{\text{alleen } j^2 n^2 \\ \text{"dus niet uit tweede factor van B"}}} + 8 \cdot 2 \right) = 2$$

Dit kunnen we natuurlijk ook direct inzien: de drie zijvlakken bevatten geen tegenover elkaar staande, ze komen dan allemaal samen in één punt, ofwel er zijn twee tegenoverstaande, en dan staan ze in U-vorm.

Zie ook discussie p.37.

We gaan 't nu wat moeilijker doen:

We hebben weer  $G$  (groep)  $D$  (verzamelij)  
 $\pi: G \rightarrow S_D$  (homomorfisme)

en

$$d_1 \sim d_2 \text{ deels als } \exists_g [\pi(g)d_1 = d_2]$$

We hebben voorts weer een afbeelding  $w: D \rightarrow K$ ,  
 ( $K$  een comm. ring),

en er komt nu nog een afbeelding  $p: D \rightarrow D$   
 bij, waarvan we aannemen dat 't een permutatie  
 is (dat is niet essentieel trouwens)

We hebben nu  $d_1 \sim d_2 \Rightarrow w(d_1) = w(d_2)$   
 als tevoren ( $w$  is constant op banen van  $G$  in  $D$ )  
 en bovendien nog extra

$$d_1 \sim d_2 \Rightarrow p(d_1) \sim p(d_2)$$

$p$  beeldt banen in banen af.

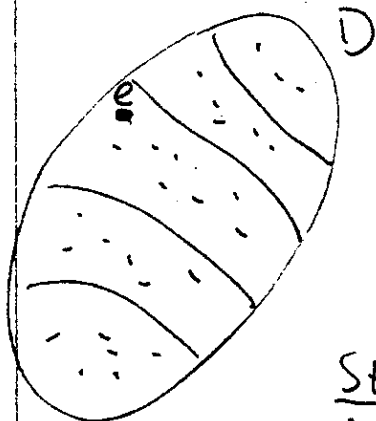
De som van de gewichten van de klassen (banen)  
 die invariant onder  $p$  zijn is

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{d \in D} w(d) \chi(p(\pi(g)d) = d)$$

In het geval dat  $p = \text{Id}_D$ , krijgen we de oude  
 formule terug.

Bewijs.

Opmerking over het bewijs: ik probeer geen inzichtelijk bewijs te geven. Lees het maar na, met het vingertje erbij. Zelf kan je het dan misschien handiger doen, maar dat is dan eigenlijk bedrog: het is gewoon gecompliceerd.



Stap 1. We rekenen eerst een andere som uit, namelijk

$$\sum_{g \in G} \sum_{d \in D} w(d) \cdot \underbrace{\chi(\rho(\pi(g)d)=d)}_{\text{sommatie over } d} \chi(d \sim e) \\ = \sum_{d \in D, d \sim e} \sum_{g \in G} w(d) \cdot \chi(\rho(\pi(g)d)=d)$$

Stap 2. (Lijkt een beetje op wat je met de Hongaarse kubus doet: zijvlak opzij draaien, dan iets doen en dan weer terug, in plaats van opzij draaien verwisselen we de sommatie)

In de binnenste som is  $d$  vast, en daar  $d \sim e$ ,  $d = \pi(k)e$  voor geschikte  $k$ .

$$\sum_{\substack{d \in D \\ d \sim e}} \sum_{g \in G} w(d) \cdot \chi(\rho(\pi(g)\pi(k)e)=d)$$

$$\sum_{\substack{d \in D \\ d \sim e}} \sum_{g \in kG} w(d) \cdot \chi(\rho(\pi(gk)e)=d)$$

we sommatievariabele  $g$  veranderen in  $gk (= h)$

$$= \sum_{\substack{d \in D \\ d \sim e}} \sum_{h \in G} w(d) \cdot \chi(\rho(\pi(h)e)=d)$$

want  $kG = G$

Nu merken we op dat

$w(d) = w(e)$  wegens  $d \sim e$ . (dit had ook al eerder gekund)

$$= \sum_{\substack{d \in D \\ d \sim e}} \sum_{h \in G} w(e) \cdot \chi(\rho(\pi(h)e)=d)$$

Nu terug wisselen:

$$= \sum_{h \in G} \sum_{\substack{d \in D \\ d \sim e}} w(e) \cdot \chi(p(\pi(h)e) = d)$$

In deze som (binnenste) is er precies één term ongelijk nul of alle termen zijn nul.

er is één term ongelijk nul wanneer

$$p(\pi(h)e) \sim e$$

en anders zijn alle termen gelijk nul.

De uitkomst is dus

$$w(e) |G| \quad \text{als} \quad p(\pi(h)e) \sim e$$

0

anders.

Maar de conditie  $p(\pi(h)e) \sim e$  betekent juist dat de klasse van  $e$  invariant onder  $p$  is:  $\pi(h)e$  doorloopt een komplette klasse; als  $e$  in een  $p$ -invariante klasse zit, dan is  $p(\pi(h)e) \sim e$ .

We kiezen nu in elke klasse  $K$  een representant  $e_K$  en sommeren over de verzameling der klassen. (Klaar).

We gaan dit nu toepassen op kleureringen en kleur patronen.

We hebben weer de situatie van

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{een verzameling } R \text{ van kleuren} \\ \text{een verzameling } D, \\ \text{(kleureringen } f: D \rightarrow R) \text{ en gewicht } R \rightarrow K \\ \pi: G \rightarrow S_D \\ \theta \in S_R \text{ deze is er nu bijgekomen} \end{array} \right.$$

In plaats van de verzameling  $D$  van de stelling van zoëven hebben we nu de verzameling kleureringen  $R^D$ .



Onder het gewicht van een kleuring  $f: D \rightarrow R$  verstaan we de uitdrukking

$$W(f) := \prod_{d \in D} w(f(d))$$

Kleuringen heten equivalent :  $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists g [f_1 \circ \pi(g) = f_2]$

Equivalente kleuringen hebben het zelfde gewicht, immers in  $W(f)$  en  $W(f \circ \pi(g))$  zijn de factoren alleen maar ten opzichte van elkaar gepermuteerd. We noteren  $f \circ \pi(g)$  met  $\theta(g)f$

We introduceren nu in de verzameling  $R^D$  een ~~opzichtsysteem~~ afbeelding  $\rho: R^D \rightarrow R^D$  door

$$\rho(f) = \theta \circ f$$

Omdat  $\rho$  een na-compositie<sup>is</sup> en  $\pi(g)$ -equivalentie op een voor-compositie berust, geldt

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow \rho f_1 \sim \rho f_2$$

Laat immers  $f_1$  en  $f_2$  kleuringen zijn en  $f_1 \sim f_2$ .

dan  $f_1 = f_2 \circ \pi(g)$  voor geschikte  $g$ , dus ook

$$\theta \circ f_1 = \theta \circ f_2 \circ \pi(g), \text{ dus } \rho(f_1) = (\rho(f_2)) \circ \pi(g)$$

$$\text{dus } \rho f_1 \sim \rho f_2$$

Een bewijs als dit is eigenlijk een heel geprijs met haakjes, dat komt omdat onze functie notatie eigenlijk niet goed is. Aan de andere kant ook niet slecht genoeg, want zo zie je 't toch wel dus als je 't anders zou doen zouden er weer bezwaren komen. Je kunt de mensen 't nooit naar de zin maken!

We gaan nu de som van de gewichten van  $\theta$ -invariante kleuringen bepalen. Maar eerst, om ~~deze te illustreren~~ aan de hand van iets concreets te illustreren wat er aan de hand is.

een voorbeeld: We hebben — nu voor de ribben van de kubus — twee kleuren: wit en zwart (nee en ja). We willen weten wat het aantal patronen is dat in zich zelf over gaat door verwisseling van wit met zwart. Uiteraard betekent dat, dat er 6 poten (ribben) wit zijn en 6 zwart.



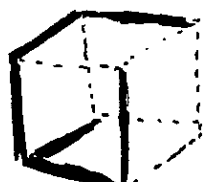
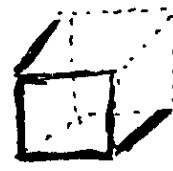
spiegelbeeldige patronen



twee U's, tegenover elkaar



tafels met twee poten, resp naast en tegenover elkaar

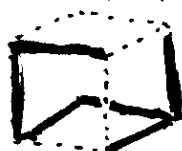


dere twee lijken op elkaar, maar de zijtak zit op een andere plaats.



dere is weer een spiegelbeeld van die

er schijnt te ontbreken het spiegelbeeld van de tweede van onder:



maar dat is juist de vierde van onder, dit is dus spiegelbeeld van de tweede.

Om de som van de gewichten van de  $\theta$ -invariante kleuringen te bepalen passen we lemma 3 toe: deze som is

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in R^D} W(f) \psi(f \circ \sigma(g) f)$$

en hier moeten we mee leven leven.

N.B. de onderste rij laat zich het gemakkelijkst samen vatten als: één van de gestippelde dingen evenwijdig verplaatst.



, met

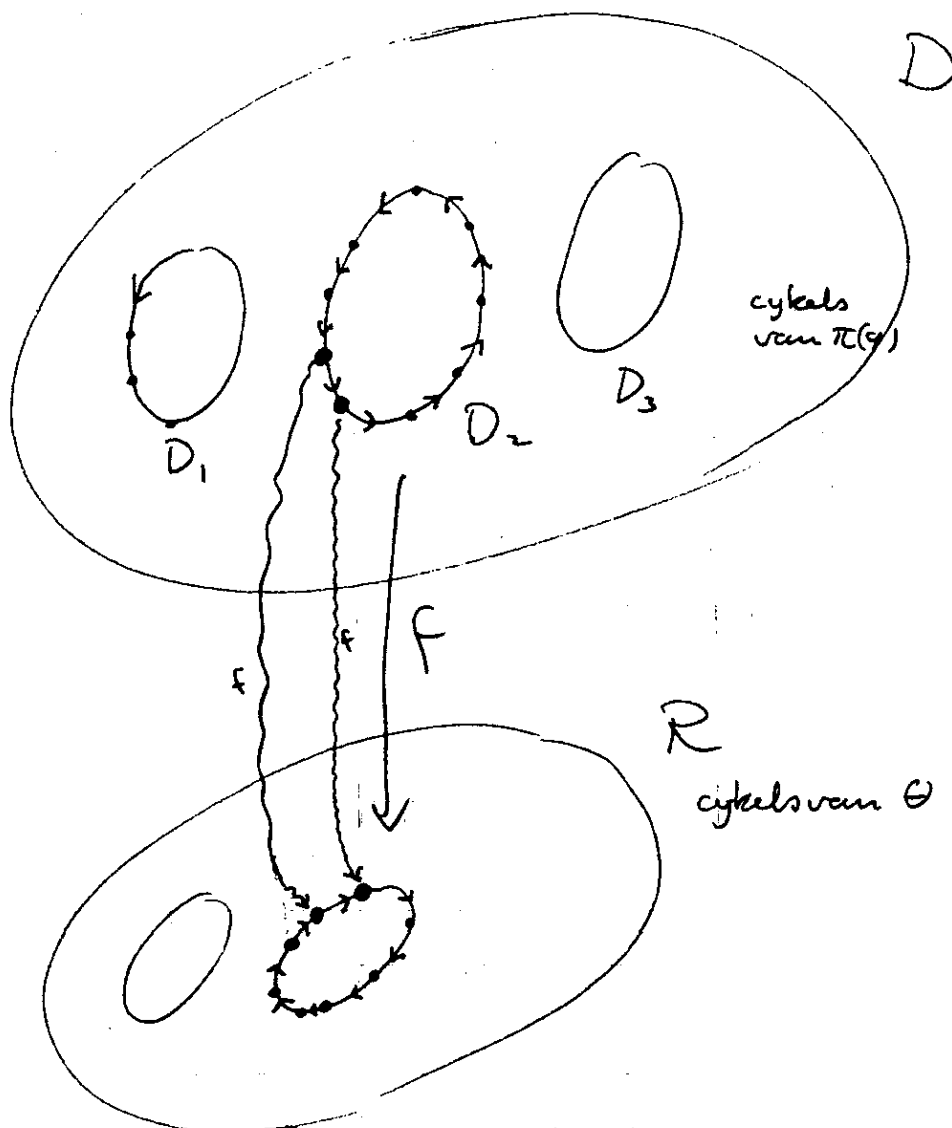
$p \circ \sigma(g) f$  is een andere manier van schrijven van  $\theta \circ f \circ \pi(g^{-1})$

Nu, deze som is betrekkelijk gemakkelijk te overzien: bij

tiende les, op maandag 5 oktober 1981, 4<sup>e</sup> uur.

55

vaste  $g$  tekenen we de cyclen van  $\pi(g)$ :



$$f = g \circ \pi(g) \text{ betekent } f \circ \pi(g) = \theta \circ f$$

met andere woorden: eerst "naar beneden met"  $f$  en dan "een stapje met"  $\theta$  dient het zelfde effect te geven als eerst "een stapje met"  $\pi(g)$  en dan  $f$ : eerlijk is eerlijk allemaal een stapje heen (of terug).

Kies een  $d_1 \in D_1$ , een  $d_2 \in D_2$  etc, dan is  $f$  bepaald door  $fd_1, fd_2$ , enzovoorts, maar het werkt alleen als de cykel waar je terecht komt met  $f$  compatibel is met de cykel waar je vandaan komt: als ik ~~beneden~~<sup>boven</sup> rond ben, moet je beneden een geheel aantal keren rond zijn geweest.

$$\text{Dus } \theta^{|D_i|} f(d_i) = fd_i$$

of, wanneer we  $fd_1$  noteren als  $r_1$  etc:

$$\Theta^{|D_1|} r_1 = r_1.$$

De som van de gewichten etc =

$$\sum_{\substack{r_1, \dots, r_h \\ \Theta^{|D_1|} r_1 = r_1 \\ d_1 \in D_1 \\ r_1 = fd_1}} \sum_{\substack{r_2, \dots, r_h \\ d_2 \in D_2 \\ r_2 = fd_2}} \dots \sum_{\substack{r_h \\ d_h \in D_h \\ r_h = fd_h}} \underbrace{w(f(d_1)) w(\Theta(f d_1)) \dots w(\Theta^{|D_{l-1}|}(f d_l))}_{\text{deze term heeft betrekking op lening } D_1} \dots$$

↑  
hier het  
welke  
termen  
met  $D_2$  etc.

In deze som korten we de factor

$$\sum_{\substack{r \in R \\ \Theta^{|D_1|} r = r}} w(r) w(\Theta r) \dots w(\Theta^{|D_{l-1}|} r)$$

af met  $\lambda_{|D_1|}$

en we zien dat de som in feite is

$$\lambda_{|D_1|} \dots \lambda_{|D_h|}$$

(voor elke  $D_i$  wordt een summand gepakt uit  $\lambda_{|D_i|}$ , door  $f$ , en alle  $f$ -en pakken alle termen = het product.)

Voor een vaste  $g$  krijgen we dus

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots$$

$b_1 \pi(g) \quad b_2 \pi(g)$

en het antwoord wordt dus

$$P_{G, \pi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots), \text{ waarin } \lambda_k = \sum_{\substack{r \in R \\ \Theta^k r = r}} (w(r) w(\Theta r) \dots w(\Theta^{k-1} r))$$

In het speciaal geval dat alle gewichten 1 zijn, geldt  $\lambda_k = \text{aantal kleuren invariant bij } \theta^k$ .

laet kleur  $x$  nu eens voorkomen in een cyclus van lengte  $j$ . Dan blijft  $x$  invariant <sup>onder  $\theta^k$</sup>  alleen als  $j|k$ , met andere woorden,

$$\lambda_k = \sum_{j|k} j c_j,$$

waarin  $c_1, c_2, \dots$  etc het type is van  $\theta$ .

Als er twee kleuren zijn, die door  $\theta$  verwisseld worden, dan wordt het:

$$\lambda_k = \begin{cases} 2 & \text{als } k \text{ even} \\ 0 & \text{als } k \text{ oneven,} \end{cases}$$

en dan is dus het antwoord

$$D_{5, \pi} (0, 2, 0, 2, \dots),$$

in het geval van de ribben van een kubus dus

$$\frac{1}{24} (0 + \frac{3 \cdot 2^6}{192} + \frac{6 \cdot 2^3}{48} + 0 + 0) =$$

10

juist het aantal dat geïllustreerd is, een paar pagina's terug.

We gaan nu super patronen behandelen, daartoe eerst een lemma's.

We hebben weer een situatie met een verzameling  $D$ , een verzameling  $R$ , en nu één enkele permutatie

zowel van  $D$  als van  $R$ .

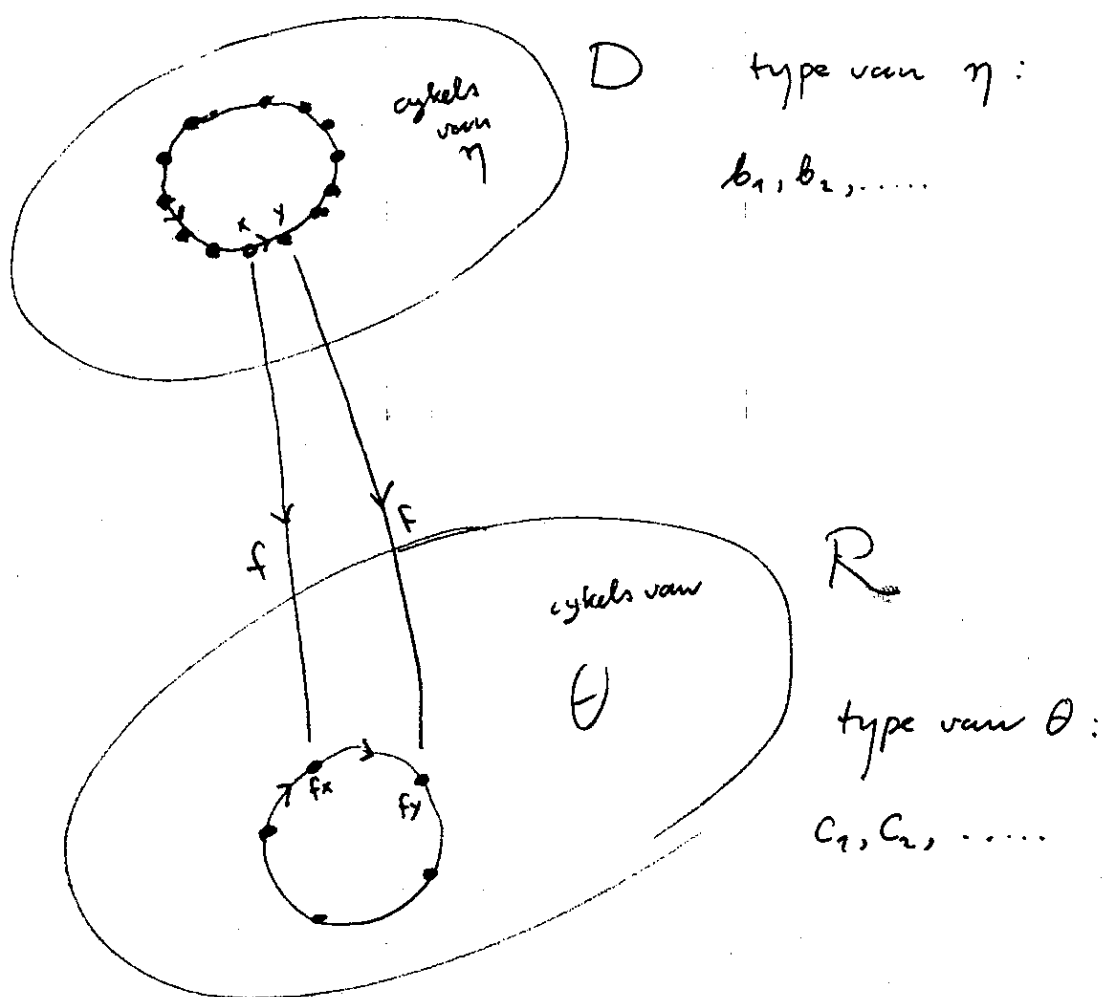
De permutatie van  $D$  noemen we  $\eta$   
die van  $R$  noemen we  $\theta$ .

We vragen nu naar het aantal afbeeldingen

$$f \in R^D$$

met

$$\theta f = f \eta.$$



De conditie leidt kennelijk dat het beeld van  $D_i$  bevat is in een cyclus met lengte deelbaar op  $|D_i|$ . Preciezer, als we in elke  $D_i$  een element kiezen,  $(d_i)$  moet  $f(d_i)$  terecht komen in een cyclus met lengte deelbaar op  $|D_i|$ . Dan ligt ook het hele beeld van  $D_i$  mekaar vast.

Het aantal mogelijkheden om zo'n vaste representant  $d_i$  van  $D_i$  af te beelden is: 59

$$\sum_{d|k} d c_d \quad (\text{voor elke "goede" } \theta\text{-cykel zijn er } d \text{ mogelijkheden}).$$

waarin  $k = |D_i|$ .

Er komt dus:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{d|k} d c_d \right)^{b_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( e^{x_1 + x_2 + x_3 + \dots} \right)^{c_k} //$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{b_k} \left[ \exp \left( c_1(x_1 + x_2 + \dots) + 2c_2(x_2 + x_4 + \dots) + 3c_3(x_3 + x_6 + \dots) \right) \right]$$

geëvalueerd op  $(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$ .

Als we def- en ook nog injectief willen hebben, dan zijn echte delers niet toegestaan, en we krijgen dan niet alleen voor het aantal mogelijkheden om  $d_i$  af te beelden:

$$k c_k \quad \text{met } k = |D_i|,$$

maar we moeten ook telkens in andere cycli terecht komen.

We doen het in twee stappen: injecteer de cycli van lengte  $k$  uit  $\eta$  in de cycli van lengte  $k$  uit  $\theta$ : dit kan op

$$\frac{c_k!}{(c_k - b_k)!}$$

manieren; voor elk zo'n injectie zijn er nog  $k^{b_k}$  mogelijkheden om het beeld van de representant te kiezen.

Samenvattend, 4 kan dus op

$$\prod_{k=1}^{\infty} k^{b_k} \frac{(c_k)!}{(c_k - b_k)!}$$

manieren, als tenminste  $\forall_k [c_k \geq b_k]$ .

De term  $k^{b_k} \frac{(c_k)!}{(c_k - b_k)!}$  is op te vatten als de

waarde van

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{b_k} (1 + k x_k)^{c_k} \text{ ter plekke } x_k = 0$$

We vinden dus dat het aantal injecties gelijk is aan

$$\left( \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{b_k} (1 + k x_k)^{c_k} \right) \Big|_{(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots)}$$

als we injecties  $f$  tellen met  $\Theta f = f \eta$  en  
type  $\Theta = (c_1, c_2, \dots)$  en type  $\eta = (b_1, b_2, \dots)$



Ik breng even in herinnering wat een patroon is: we hebben een verzameling "kleuren":  $R$ , een verzameling "dingen",  $D$ , daarbij horende een collectie afbeeldingen ("kleuringen")  $f: D \rightarrow R$ .

In die collectie kleuringen hebben we een equivalentie relatie, gedefinieerd met behulp van een groep  $G$  en een homomorfisme (representatie)  $\pi: G \rightarrow S_D$ :

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 \circ \pi(g) = f_2.$$

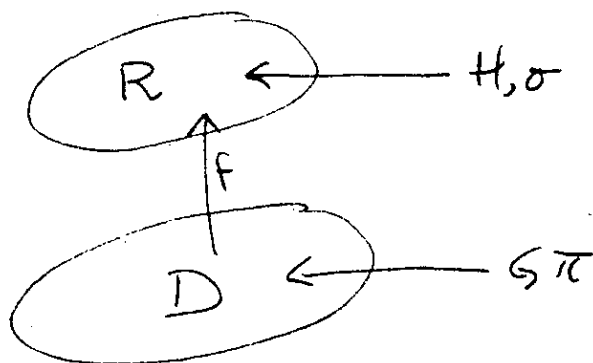
Equivalentieklassen heten kleurpatronen.

In de verzameling kleuren ~~hadde~~ <sup>hadde</sup> we ook een permutatie; kleuringen zijn niet invariant onder een permutatie (tenzij de permutatie alle gebruikte kleuren vast laat), maar kleur patronen wel.

We gaan 't nu wat ingewikkelder doen, in plaats van één enkele permutatie = de kleuren nemen we nu een groep  $H$  van permutaties  $\bar{a}$  de kleuren, en we nemen een nieuwe equivalentie relatie:  $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow$

We hebben dus nu:

$$\exists_{h,g} [ (h) f_1 = f_2 \circ \pi(g) ]$$



Zo krijgen we superpatronen.

(kleurpatronen waar de kleur er ook niet zoveel toe doet, kleurenschema's)

Voorbeeld: weer de kubus met z'n zes zijvlakken,

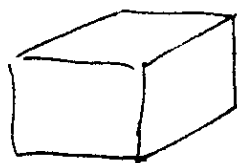
$R$  = de verzameling {paars, violet}

$H$  = groep van permutaties van  $R$

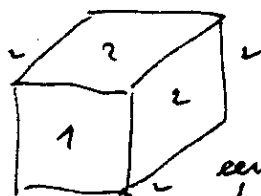
(veel mensen kunnen wel zien dat deze kleuren verschillend zijn, maar welke welke is weten ze niet)

$G$  = groep van ~~permutaties~~ rotaties van de kubus,  $\pi$ -werkende op de vlakken.

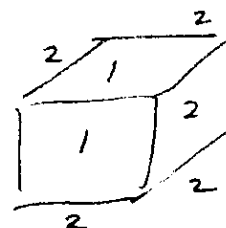
Wat zijn nu de superpatronen?



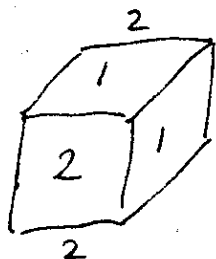
egaal gekleurd



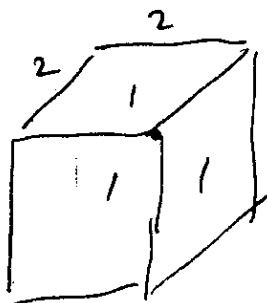
een vlak  
afwijkend  
gekleurd  
 $\{1,2\} = \{\text{vld, paar}\}$



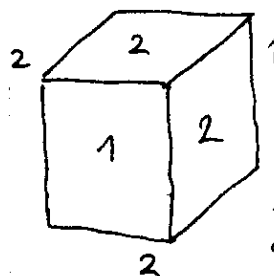
twee aan-  
liggende  
vlakken  
gelijk gekleurd.



U-patroon



←-patroon



twee overstaande  
gelijk-  
gekleurd.

We gaan het nu heel sjiek doen:

Laat  $G$  en  $H$  groepen zijn met representaties  
 $\pi$  en  $\sigma$ , resp,  $\sigma: H \rightarrow S_D$ ,  $\pi: G \rightarrow S_R$

dan definiëren we  $\tau: G \times H \rightarrow S_{RD}$  als volgt

$$(\tau(g, h)) f = \sigma(h) \circ f \circ \pi(g^{-1}) \text{ voor alle } f.$$

$$(\text{of ook: } \tau(g, h) := \bigvee_{f \in R^D} \sigma(h) \circ f \circ \pi(g^{-1}).$$

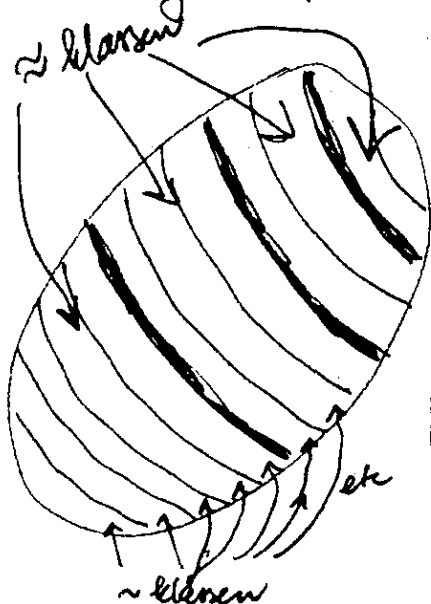
Een super patroon is nu een equivalentieklasse  
in  $R^D$  bij de equivalentie relatie  $\approx$ , gedefinieerd door

$$f_1 \approx f_2 \Leftrightarrow \exists (g, h) \in G \times H [f_1 = \tau(g, h) f_2]$$

Om het aantal superpatronen te bepalen zijn er twee methoden:

- ① Cauchy-Frobenius op  $R^D, G \times H, \tau$
- ② een superpatroon opvatten als eq. klasse van patronen

Tucliditng bij het laatste:



$R^D$  wordt door  $\sim$  in fijne klassen verdeeld: als  $f_1 \sim f_2$  dan is dat een bijzonder geval van  $f_1 \approx f_2$  (de  $h$  kan je gelijk nemen aan het eenheidselement van  $H$ )

Telkens een aantal  $\sim$ -klassen geven één  $\approx$ -klasse; de  $\approx$ -partitie is grover.

We definiëren in de collectie der patronen:

$$R^D / (G, \pi)$$

( $R^D$ , met daarin  $G, \pi$ -equivalente dingen geïdentificeerd)

nu een permutatie  $\rho(h)$  voor elke  $h$ .

$$\rho(h) \underbrace{\{ f \circ \pi(g') \mid g' \in G \}}_{\text{een klasse}} = \{ \sigma(h) \circ f \circ \pi(g') \mid g' \in G \}$$

We moeten formeel laten zien dat ① het rechterlid weer één klasse voorstelt (def. is onafh. keuze representant)  
 ② Laten zien dat  $\rho$  een representatie is.

Vervolgens passen we Cauchy - Frobenius toe op

$$\mathbb{R}^D / (G, \pi), \quad H, \quad \rho.$$

We doen het toch met de eerste methode - voorlopig.

We gebruiken de stelling van vorige week (zie p. 50 en verder) (we doen het nu maar zonder gewichten, deze keer):

het aantal superpatronen =

$$\frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g, h) \in G \times H} \text{het aantal } f \in \mathbb{R}^D \text{ met } \tau(g, h) f = f$$

(N.B. het aantal  $f \in \mathbb{R}^D$  met .... kan je natuurlijk ook noteren als  $\#_{f \in \mathbb{R}^D}(\dots)$ )

$$\#_{f \in \mathbb{R}^D} (\tau(g, h) f = f) = \#_{f \in \mathbb{R}^D} (\sigma(h) f = f \pi(g)) ,$$

$$\text{en} = \#_{f \in \mathbb{R}^D} (\theta f = f \eta) , \text{ met type } \theta = (c_1, c_2, \dots) \\ \text{type } \eta = (b_1, b_2, \dots)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \dots \underbrace{\left( e^{x_1 + x_2 + \dots} \right)^{c_1} \left( e^{2(x_2 + x_4 + \dots)} \right)^{c_2} \left( e^{3(x_3 + x_6 + \dots)} \right)^{c_3} \dots}$$

sommen over alle  $h \in H$  geeft

$$P_{H, \sigma} \left( e^{x_1 + x_2 + \dots}, e^{2(x_2 + x_4 + \dots)}, e^{3(x_3 + x_6 + \dots)} \right)$$

nu middelen over  $g$ , dit geeft

$$P_{G, \pi} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right) P_{H, \sigma} \left( e^{x_1 + x_2 + \dots}, e^{2(x_2 + x_4 + \dots)}, e^{3(x_3 + x_6 + \dots)}, \dots \right) \\ \text{geëvalueerd bij } (x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$$

Een andere manier om tot dit resultaat te komen is:

Het aantal superpatronen is:

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \text{het aantal } f \in \mathbb{R}^D \text{ met } \sigma(h)f = f \circ \pi(g) \right) =$$

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{d|1} d c_d \right)^{b_1} \left( \sum_{d|2} d c_d \right)^{b_2} \left( \sum_{d|3} d c_d \right)^{b_3} \dots \right),$$

$$\text{waarin } c_d = b_d(\sigma(h))$$

$$\text{en } b_i = b_i(\pi(g))$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} P_{G, \pi} \left( \sum_{d|1} d b_d(\sigma(h)), \sum_{d|2} d b_d(\sigma(h)), \dots \right)$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \left[ P_{G, \pi} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right) e^{1 \cdot b_1(\sigma(h))(x_1 + x_2 + \dots) + 2 \cdot b_2(\sigma(h))(x_2 + x_4 + \dots) + \dots} \right]$$

geëvalueerd bij  $(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$

= (voor gaande resultaat)

Het aardige is dat je nu meteen iets krijgt voor de injectieve superpatronen: "injectief" is een eigenschap die invariant is onder  $\sigma(h)$  en onder  $\pi(g)$ , dus onder  $\tau(g, h)$ : als je de formule op p. 59 vergelijkt met die op pag 60, zie je dat je in bovenstaande formule

$\frac{k}{e}(x_k + x_{2k} + x_{3k} + \dots)$  moet vervangen door  $1 + k x_k$

en je krijgt dan

$$P_{G, \pi} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right) P_{H, \sigma} \left( 1 + x_1, 1 + 2x_2, 1 + 3x_3, \dots \right) \Big|_{x=0}$$

twaaalfde les, maandag 12 oktober, 4<sup>e</sup> uur.

66

Als toepassing nemen we  $H$  een groep van twee elementen, namelijk de permutaties van  $\{\text{wit}, \text{zwart}\}$ .

$$\text{Dan } P_{H,\sigma}(v_1, v_2, v_3, \dots) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2).$$

We vinden dan voor het aantal superpatronen met twee kleuren:

$$P_{H,\sigma}(e^{x_1+x_2+\dots}, e^{2(x_2+x_4+\dots)}, \dots) = \frac{1}{2} (e^{2x_1+2x_2+\dots} + e^{2x_2+2x_4+\dots}) =$$

$$\text{Als we } P_{G,\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots\right) \Big|_{x_1=0, x_2=0, x_3=0, \dots}$$

hierop toepassen vinden we

$$\frac{1}{2} \left( \underbrace{P_{G,\pi}(2, 2, 2, \dots)}_A + \underbrace{P_{G,\pi}(0, 2, 0, 2, \dots)}_B \right)$$

Kunnen we dit resultaat ook anders inzien?

$B$  = het aantal patronen dat invariant is

$A$  = het totaal aantal patronen.

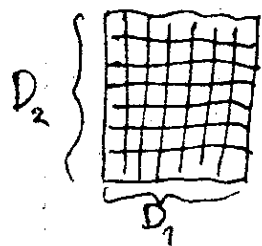
Dus  $A - B$  = het aantal niet-invariante patronen.

Door op superpatronen over te stappen worden de niet-invariante twee aan twee geïdentificeerd, maar de invariante patronen vertegenwoordigen elk een eigen superpatroon. Dus aantal superpatronen is  $\frac{1}{2}(A - B) + B = \frac{1}{2}(A + B)$ , idemdaad.

We kunnen nog wel veel meer doen, maar we beperken ons nu tot het kransproduct of ook wel wreath product (Pólya: KRANZ).

Om de discussie eenvoudiger te houden, beschouwen we  $D_1 \times D_2$ ,  $D_1$  een  $m$ -tal objecten, en  $|D_2| = n$ .  $G$  is nu een groep van permutaties van  $D_1$  en  $H$  is nu een groep van permutaties van  $D_2$ . (we schrijven  $P_g$  ipv  $P_{g\pi}$  en  $P_h$  ipv  $P_{h\sigma}$ ).

Met behulp van  $G$  en  $H$  geven we  $D_1 \times D_2$  permuteren: permuteer in elke kolom volgens een  $h$  (elke kolom een eigen  $h$ ) en vervolgens de kolommen volgens  $g$ . De groep van permutaties die zo ontstaat noemen we  $G[H]$ .



Algemeen, laat  $H, \sigma, D_2$  gegeven zijn en  $G, \pi, D_1$ . Dan rusten we  $G \times H^{D_1}$  toe met de volgende operatie:

$$(g, f)(g', f') =$$

$$(gg', f \circ \pi(g') \circ f')$$

waarbij  $\circ$  staat voor coördinaatsgewijze vermenigvuldiging. Verder "werkt"  $(g, f)$  op  $D_1 \times D_2$  als volgt

$$(\tau(g, f))(d_1, d_2) = (\pi(g)(d_1), \sigma(f(d_1))d_2)$$

Merk op:  $\tau(g, f) \circ \tau(g', f') =$

$$(\tau(g, f))(\pi(g')(d_1), \sigma(f'(d_1))d_2) =$$

$$((\pi(g)\pi(g'))(d_1), \sigma(f(\pi(g')d_1))\sigma(f'(d_1))d_2) =$$

$$(\pi(gg')d_1, \sigma(f(\pi(g')d_1) \cdot f'(d_1))d_2) =$$

$$(\pi(gg')d_1, \sigma((f \circ \pi(g') \circ f')(d_1))d_2) =$$

$$\tau(gg', f \circ \pi(g') \circ f')(d_1, d_2)$$

Als  $G$  en  $H$  niet bestaan uit permutaties,

dan is de permutatie die  $(g, h_1, h_2, \dots, h_m)$

teweeg brengt de afbeelding

$$(st) \mapsto (gs, h_s t)$$



De stelling van Pólya luidt:

$$P_{G[H]}(x_1, x_2, \dots) = P_G(P_H(x_1, x_2, \dots), P_H(x_2, x_4, \dots), P_H(x_1, x_6, \dots))$$

Het idee van Pólya is om dit te bewijzen door middel van kleuringen met gewichten:

een superkleur = het kleurpatroon van een kolom (= kleurpatroon op  $D_2$  met groep  $H$ )

Een kleurpatroon op  $D_1 \times D_2$  met groep  $G[H]$  "is" een

"superkleur"-patroon op  $D_1$  met groep  $G$ .

De som van de  $k$ -de machten van de gewichten van de superkleuren =

$$P_H(\sum w_r, \sum w_r^2, \sum w_r^3, \dots)$$

als  $k=1$ , en in het algemeen:

$$P_H(\sum w_r^k, \sum w_r^{2k}, \sum w_r^{3k}, \dots),$$

$$P_{G[H]}(\sum w_r, \sum w_r^2, \dots) = P_G(P_H(\sum w_r, \sum w_r^2, \dots), P_H(\sum w_r^2, \sum w_r^4, \dots), \dots)$$

en als je nu opmerkt dat  $\sum w_r, \sum w_r^2, \sum w_r^3, \dots$  etc algebraïsch onafhankelijk zijn, dan volgt de stelling van Pólya.



Opmerking. Het gewicht van een kleurpatroon is het product van de gewichten van de gebruikte kleuren (over de collectie van items. (zie pag. 45))

De theorie van Pólya kan op nog veel meer manieren worden uitgebreid, maar we bescheiden er nu verder geen aandacht <sup>aan</sup> meer. (Het bovenstaande bewijs wordt toch nog tamelijk gecompliceerd als je het helemaal uitschrijft. Voor een ander bewijs zie Bijv.:

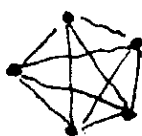
N.G. de Bruijn, Literatuur opgave 2 A

We komen nu aan het tweede deel toe. Ook dit deel reflecteert mijn voorliefde voor tellen. Dito is mijn persoonlijke voorkeur, want je ziet veel duidelijker wat de dingen zijn als je gedwongen bent ze te tellen. Wat we nu gaan doen is grafen-theorie.

Een graaf (andere spelling ook wel graph) is niet iemand met een kroontje op, maar het volgende is wel een graaf:



dit is een onvolledige graaf, maar niet omdat hij een arm mist: bij een volledige graaf zijn alle verbindingen er:



volledige 5-graaf

Oorspronkelijk was een graaf iemand die kon schrijven, een loze ambleraar dus (tegenwoordig nemen ze daar doctorandus voor) die op een kaarteel woonde.

Het woord graaf in graaf / fotograaf is dus etymologisch gelijk, en er is geen reden om het niet ook voor zo'n wiskundig object te gebruiken.

Alle gekheid op een stokje nu,

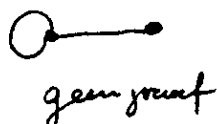
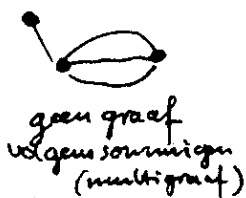
Laat  $G$  een verzameling zijn, en laat  $P_2(G)$  de collectie van alle deelverzamelingen van  $G$  met 2 elementen zijn. Dan is een graaf op  $G$  een paar

$$(G, \Gamma)$$

met  $G \neq \emptyset$  en  $\Gamma \subset P_2(G)$ .

$\Gamma$  geeft aan welke punten in het plaatje verbonden zijn.

Voorbeelden van wat wel en geen graaf is volgens deze definitie:



geen graaf

...  
wel graaf.

De elementen van  $G$  heten punten, points, nodes, vertexes, de elementen van  $\Gamma$  heten verbindingen, lijnen, edges (naar analogie van meetkundige complexen)

Even nog een belangrijk begrip: equivalentie, of beter isomorfie:

$G_1, \Gamma_1$  is isomorf met  $(G_2, \Gamma_2)$   
als er een bijectie

bestaat zodanig dat  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$   
bestaat zodanig dat  $\varphi \Gamma_1 = \Gamma_2$   
(dus  $\{g, h\} \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \{\varphi g, \varphi h\} \in \Gamma_2$ )

Natuurlijk is dit abus de language zoals Bourbaki: dat

zo mooi zegt in het Frans; de bedoeling is dat

$$\Gamma_2 = \{ \{ \varphi P, \varphi Q \} \mid \{P, Q\} \in \Gamma_1 \text{ en } P, Q \in G_1 \}.$$

$$\blacklozenge \text{ of ook } \Gamma_2 = \{ A \in \mathcal{P}(G_2) \mid \exists_{P \in G_1} \exists_{Q \in G_1} [A = \{ \varphi P, \varphi Q \}] \} \blacklozenge$$

Sommige mensen noemen zo'n klasse voor de equivalenterelatie ook een graaf, maar je moet altijd opletten: soms wil je equivalenteniet en soms wel identificeren.

de tiende les, maandag 19 oktober 1981, 3<sup>e</sup> uur.

72

De grafentheorie is een vak met veel namen en afspraken. Veel van die terminologie kunt u vinden in het boek van C. Berge,

Ik zeg er meestal bij wat ik precies bedoel.

We noemen nog het begrip geöriënteerde-graaf.  
(dit is geen graaf).

Een geöriënteerde graaf is een paar

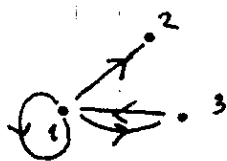
$(G, \Delta)$ , waarin  $G$  een verzameling is,  
en  $\Delta \subset G \times G$ .

$\Delta$  bestaat dus uit paren, met een eerste en een tweede element.

Voorbeeld:


$(\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 1)\})$

in plaatje:



Bij geöriënteerde-grafen spreken we van de kop en staart van een verbinding.

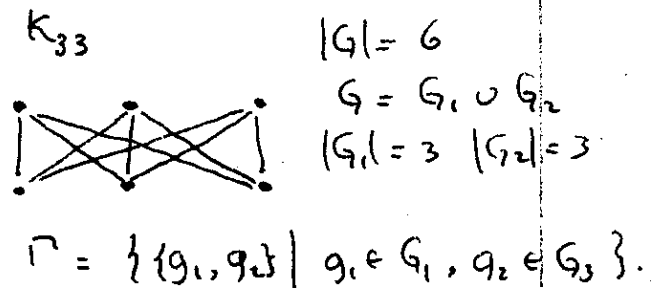
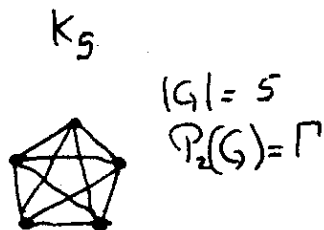
Planaire grafen zijn wel grafen, en wel grafen die in het platte vlak kunnen worden ingebed, (met punten en continue krommen).

Bijv.  is planair, maar niet elke ~~planaire~~ <sup>eindige</sup> graaf is planair, zie verderop

Elke eindige graaf kan met een kunstje worden ingebed in  $\mathbb{R}^3$ : Kies  $|G|$  punten op een bol, zodanig dat geen vier punten in een vlak liggen. Dit kan,

Want in elke stap van de constructie zijn er dan eindig veel vlakken "verboden"; er zijn dan nog genoeg punten op de bol over. Deze punten verzoemen we  $G$ . De volledige graaf op  $G$  heeft dan een realisatie. Als twee rechte verbindingen tussen punten elkaar zouden snijden, dan zouden de vier uiteinden wel in een vlak liggen.

Er zijn twee beroemde isomorfieklassen van niet-planaire grafen:



Een belangrijke stelling van Kuratowski zegt dat dit eigenlijk de enige twee kwadrate pieren zijn:

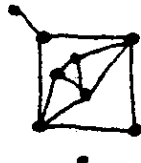
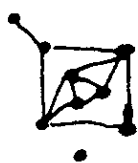
Elke niet-planaire graaf heeft een deelgraaf die een vertraagde  $K_5$  of een vertraagde  $K_{3,3}$  bevat.

Het begrip vertraagde graaf illustreren we aan een voorbeeld:



vertraagde  $K_4$ .

Sommige grafen kunnen op twee wezenlijk verschillende manieren worden ingebed.



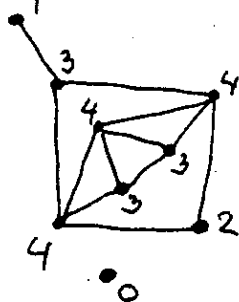
isomorf, maar inbeddingen topologisch niet equivalent.

Graad:

Laat  $G, \Gamma$  een graaf zijn, en  $P \in G$ .

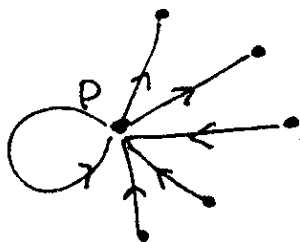
De graad van  $P =$  het aantal  $Q \in G$  met  $\{Q, P\} \in \Gamma$ .

In de linkerse figuur van zonet schrijven we de graden van de hoekpunten erbij:



Een top van  $G$  is een punt van  $G$  met graad 1.

In een georiënteerde-graaf spreken we van ingraad en uitgraad, bijv. de ingraad van  $P$  en de uitgraad van  $P$  in onderstaande georiënteerde-graaf zijn resp. 4 en 3. Opgelet! een verbinding  $P$  naar  $P$  telt voor in- en uitgraad mee.



We komen nu toe aan een aantal begrippen die nogal eens verwarring opleveren:

ketting, kring, cycle, circuit.

Laat  $n \in \mathbb{N}$ .

Een ketting van lengte  $n$  is een rij punten

$P_0, P_1, \dots, P_n$  met

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} [P_i \in G]$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} [P_{i-1}, P_i \in \Gamma]$$

We stellen soms neven-eisen aan een ketting:

ketting zonder puntherhaling:  $i \neq j \Rightarrow P_i \neq P_j$

ketting zonder lijnherhaling:  $i \neq j \text{ en } i > 0 \text{ en } j > 0$ :

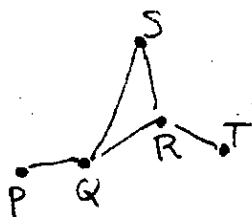
voorbeelden

met lijnherhaling

P Q R S Q R T

P Q S R Q R T

$\{P_{i-1}, P_i\} \neq \{P_{j-1}, P_j\}$



het zelfde lijnstuk kan inderzelfde "richting" worden doorlopen of in tegengestelde richting.

Een gesloten ketting is een ketting  $P_0 \dots P_n$  met  $P_0 = P_n$ .

Een lering is een gesloten ketting zonder lijnherhaling.

Voor leringen zijn er een aantal identificatie mogelijkheden:  $j$  kan een ander punt als beginpunt aanwijzen

(  $P_0 P_1 \dots P_n$  wordt  $P_j P_{j+1} \dots P_0 P_n \dots P_{j-1}$  )

of de looprichting omkeren:

(  $P_0 \dots P_n$  wordt  $P_n P_{n-1} \dots P_0$  )

We werken hier verder niet mee.

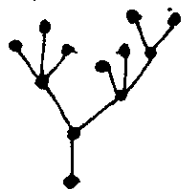
Een graaf  $G$  is samenhangend als er voor elke  $P$  en  $Q$  met  $P \neq Q$  een  $n \in \mathbb{N}$  is en een ketting  $P_0 \dots P_n$  met  $P_0 = P$  en  $Q = P_n$ .

Kettingverbindbaarheid en/of identiteit is een equivalentiebegrip, de klassen heten componenten (wat de verbindingen erbij)

## Bomen.

Er zijn een heleboel manieren om bomen te definiëren.  
Wij doen het als volgt:

Een boom is een samenhangende graaf zonder ringen.

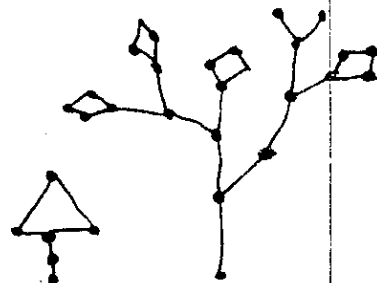


boom (8 toppen)



ook een boom. (8 toppen)

samen geen boom.



geen boom

geen boom

Stelling. Een eindige boom bestaat of uit slechts één punt, ( $|G|=1$ ,  $P=\emptyset$ ) of heeft ten minste twee toppen.

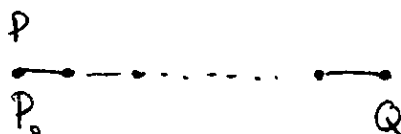
Bewijs. Als  $(G, \Gamma)$  samenhangend is, dan definiëren we voor alle  $P, Q \in G$ :

$$d(P, Q) = \begin{cases} \text{length } n \text{ van de kortste ketting die} \\ P \text{ en } Q \text{ verbindt, als } P \neq Q \\ 0 \text{ als } P = Q. \end{cases}$$

( $d(P, Q)$ ) telt de schakels, van een ketting, niet de punten.

Voor  $|G| \geq 1$

$\delta = \max \{d(P, Q) \mid (Q, P) \in G \times G\}$  wordt in een tweetal punten bereikt, zeg  $P$  en  $Q$ . Bewering:  $P$  en  $Q$  zijn toppen.



Stel nu eens  $P$  is geen top, dan is er nog een verbinding  $\{P_0, P'_1\}$ , met  $P'_1 \neq P_1$ .

$P'_1$  is met  $Q$  verbonden, de afstand is  $\leq \delta$ , keten  $P'_1 = P'_0, P'_1, \dots, P'_k = Q$  laat  $m > 0$  het eerste element in de rij



zijn dat ook in de rij  $P_0 \dots Q$  voorkomt.

(N.B. in  $P_0 \dots P_\delta = Q$  komen geen punt-herhalingen voor, want anders zou  $P_0 \dots P_\delta$  geen minimale lengte van  $P$  naar  $Q$  hebben.  $\frac{2}{3}$  Evenzo komen in  $P' = P'_0 \dots P'_k = Q$  geen puntherhalingen voor).

Na is  $P'_0 \dots P'_m (= P'_\ell) P_{\ell-1} \dots P_0 P'_0$  een gesloten ketting.

Als  $\ell > 0$ , dan komen in deze ketting geen lijnherhalingen voor (niet in  $P'_0 \dots P'_m$ , niet in  $P_{\ell-1} \dots P_0$ , en een lijn in  $P'_0 \dots P'_{m-1}$  komt niet in  $P_\ell \dots P'_0$  voor.  $\{P'_m, P'_\ell\}$  kan alleen maar in  $P_\ell \dots P_0 P'_0$  voorkomen als't  $P'_0 P_\ell$  is, maar dan  $\ell = 0$ .

Aangenomen in een boom geen kringen voorkomen geldt dus  $\ell = 0$ , m.a.w. de eerste volinding  $P' Q$  loopt via  $P$  en dus  $k = d(P', Q) = \delta + 1$ .

Dus  $\delta + 1 = k \leq \delta$ , Tegenpraak, dus  $P$  is een top. Evenzo is  $Q$  een top.

Veertiende les, maandag 19 oktober 1981, 4 uur.

Intermezzo over ordenen van multisets.

Zij  $S$  een lineair geordende verzameling, door voor elk twee-tal <sup>verschillende</sup> elementen van  $S$  is een de grootste en een de kleinste. (Voorbeeld:  $S = \mathbb{N}_1$ , of  $S = \mathbb{N}_n$ ).

We ordenen nu de verzameling multisets over  $S$  lexicografisch als volgt:

Laat  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{N}_0$  en  $\psi: S \rightarrow \mathbb{N}_0$  twee zulke multisets zijn, dan  $\varphi < \psi$  betekent

$$\exists k \in S [\varphi(k) < \psi(k) \wedge \forall \ell \in S [\ell < k \Rightarrow \varphi(\ell) = \psi(\ell)]]$$

De verzameling multisets wordt zo lineair geordend,

en als  $S$  eindig is, dan heeft elke niet-lege verzameling  $\Phi$  van multisets een kleinste element.

Bewijs. Laat  $\Phi \neq \emptyset$ . Neem aan  $S = \mathbb{N}_n$ .

$\{\varphi(1) \mid \varphi \in \Phi\}$  heeft een kleinste element.

Noem dit  $k_1$ .

$$\Phi_1 = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi(1) = k_1\} \quad \text{etc, enz}$$

Definieer nu recursief  $(\Phi_0 = \Phi)$ , en voor  $i \geq 1$

$$k_i = \text{kleinste element van } \{\varphi(i) \mid \varphi \in \Phi_{i-1}\}$$

$$\Phi_i = \{\varphi \in \Phi_{i-1} \mid \varphi(i) = k_i\}.$$

tot en met  $k_n$  en  $\Phi_n$ .

Geen der  $\Phi_i$  is leeg, en  $\Phi_n$  bevat één element, dit is het kleinste element van  $\Phi$ .

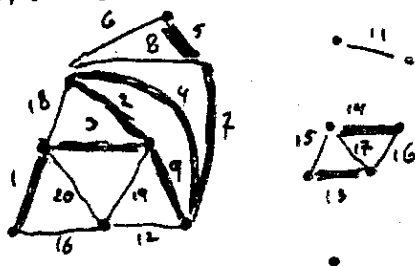
Als  $S = \mathbb{N}$ , dan krijg je zo een grootste ondergrens  $i \mapsto k_i$  die al dan niet in de verzameling zit.

We gaan dit nu toepassen op grafen:

Laat  $G, \Gamma$  een <sup>eindige</sup> graaf zijn. Nummer de elementen van  $\Gamma$  met de getallen  $1, 2, \dots, |\Gamma|$ , dat doet er niet toe hoe.

Kleur nu een lijn van  $\Gamma$  rood als hij kringkampioen is, d.w.z. er is een kring waarin die lijn het laagste nummer heeft.

Voorbeeld van nummering en voor-kleurung:



De overige lijnen kleuren we blauw. Bewering: we krijgen dan blauwe bomen en de rode lijnen verbinden punten binnen een boom. De punte van één boom + verbinding vormt <sup>een</sup> component.

zo verkrijgt je zogeheten opspannende bomen, tezamen een opspannend bos.

We gaan nu bewijzen dat dit inderdaad het geval is.

St: als  $P$  en  $Q$  door een ketting verbonden zijn, dan door een blauwe ketting.

Bew. Neem een ketting van  $P$  naar  $Q$ :

$$P = P_0, P_1, \dots, P_n = Q.$$

Elk zo'n ketting correspondeert met een multifunctie  $\varphi$  op  $P$ , namelijk  $\varphi: i \mapsto$  het aantal malen dat lijn  $i$  in de ketting voorkomt.

Neem nu de ketting met de laagste  $\varphi$  (die bestaat, zie intermezzo).

Als er een rode lijn in zou voorkomen, dan was die rode lijn koninkkampioen en dus kon je die rode lijn vervangen door een ketting waarin alleen hogere nummers voorkomen. De resulterende ketting heeft dan een lagere  $\varphi$ . (Als het nummer van de rode lijn  $a$  is, dan is  $\varphi(a)$  verlaagd,  $\varphi(x)$  met  $x < a$  gelijk gebleven). T.S.

klaar.

Gevolg. Stelling: als  $G, P$  een eindige graf is, en  $P$  van de een of andere lineaire ordening voorzien, dan

$$\# \text{ comp} + \# \text{ blauwe lijnen} = \# \text{ punten}.$$

Stelling.  $\# \text{ comp} + \# \text{ lijnen} = \# \text{ punten} =$   
 $0$  als er geen kringen zijn  
 $> 0$  ( $= \# \text{ rode lijnen}$ ) als er kringen zijn.

◆ voor een andere versie :

$$\# \text{ kringen}^{①} - \# \text{ lijnen} + \# \text{ punten} = \# \text{ componenten} \\ (= \# \text{ rode lijnen})$$

Hetgeen een soort van Euler formule is voor grafen.



Stelling. Laat  $(G, \Gamma)$  een eindige graaf zijn, dan zijn de volgende equivalent:

- 1)  $(G, \Gamma)$  is een boom
- 2)  $\# \text{ componenten} = 1$  en  $\# \text{ kringen} = 0$ .
- 3)  $|G| \leq |\Gamma| + 1$  en geen kringen
- 4)  $|G| \geq |\Gamma| + 1$  en samenhangend.
- 5) Geen kring en elke lijn toevoeging (tussen bestaande punten) zou een kring geven
- 6) Samenhangend en elke lijnvermindering zou samenhang verbreken.
- 7) Elk punten paar  $(P, Q)$ ,  $P \neq Q$  is door precies één ketting zonder punt herhaling verbonden.

N.B. Het bewijs op pag. 76 berust op het volgende lemma (o.a.)

Laat  $A$  en  $B$  punten zijn in een graaf en  $A \neq B$ ; verp.  $A$  en  $B$  zijn verbonden door een ketting. Dan zijn  $A$  en  $B$  verbonden door een ketting zonder puntherhaling.

Bewijs. Neem ~~een~~ <sup>een</sup> kortste ketting, enz.

---

① voor  $\#$  kringen lees: grootste aantal onafhankelijke kringen

vijftiende les, maandag 26 oktober 1981 3<sup>e</sup> uur.

81

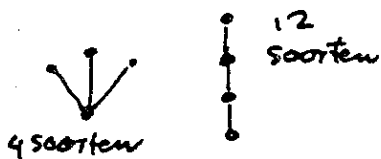
We bespreken nu de Prüfer codering van bomen. Een gevolg van de Prüfer-codering is dat er  $n^{n-2}$  bomen zijn op  $n$  gegeven punten, d.w.z. ( $n \geq 2$ )

Als  $G$  een verz. is met  $n$  punten, dan bevat

$$\{ \Gamma \subset P_2(G) \mid (G, \Gamma) \text{ is een boom} \}$$

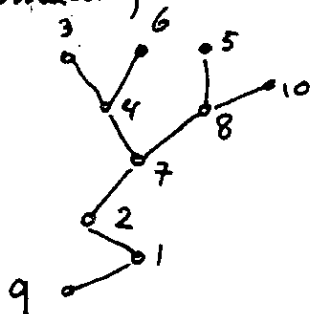
precies  $n^{n-2}$  elementen. (Cayley).

Voorbeeld:  $n=4$



$n=3$   drie mogelijkheden.

Bij wijze van voorbeeld nummeren we <sup>de punten van</sup> een boom (zomaar)



We maken nu een rij van  $n-2$  getallen als volgt: (als  $n > 2$ )

① neem de top met het laagste nummer.

② noteer het andere eindpunt van de tak aan die top.

③ Swap die tak.

herhaal ①-③ totdat er maar twee punten over zijn

De laagste toppen zijn voor deze boom (met deze nummering) worden dan achtereenvolgens:

3	5	6	4	9	1	2	7
4	8	4	7	1	2	7	8

De code is de rij die er onder staat.

De code die zo ontstaat is uniek, en bovendien correspondeert elk rijtje van  $n-2$  getallen uit  $\{1, \dots, n\}$  op die manier met een boom. Dit bewijst men het eenvoudigst door het inverse algoritme te geven:

Noteer de code hieronder. De afwerzigen zijn Vervang ... door ....

(4) 8 4 7 1 2 7 8	3 5 6 9 10	(daarom) 4	3
3 (8) 4 7 1 2 7 8	5 6 9 10	8	5
3 5 (4) 7 1 2 7 8	6 9 10	4	6
3 5 6 (7) 1 2 7 8	4 9 10	7	4
3 5 6 4 (1) 2 7 8	7 10	1	9
3 5 6 4 9 (2) 7 8	1 10	2	1
3 5 6 4 9 1 (7) 8	2 10	7	2
3 5 6 4 9 1 2 (8)	7 10	8	7
3 5 6 4 9 1 2 (7)	(8 10)		

De omcirkelde paren, inclusief de laatste in de afwerzigen, lijst zijn juist de  $n-1$  takken van de boom.

Hoe bewijst je nu dat dit het inverse algoritme is?

Natuurlijk door te laten zien dat elke van deze stappen de inverse is van een stap in het coderings algoritme.

De code hield bovenaan bij de stippellijn veronderstellen we per inductie dat deze al een boom oplevert (zeg  $b_0$ ).

De oorspronkelijke code begon met een 4 dus de oorspronkelijke boom had een tak  $\{ \dots, 4 \}$ . De toppen van de oorspronkelijke boom komen niet in het lijstje van de code voor, alle andere wel. De laagste onder de afwerzigen 3 is dus de weggeworpen top.

Door het weggeworpen van een top <sup>met tak</sup> verandert de code in het inverse algoritme in

(nr weggeworpen top) (code resterende boom).

Vanzelfsprekend is de laagst-niet aanwezige in het hele rijtje niet het eerste item, dus evenzo laagst-niet aanwezige in de resterende code. Je moet nu nog laten zien dat

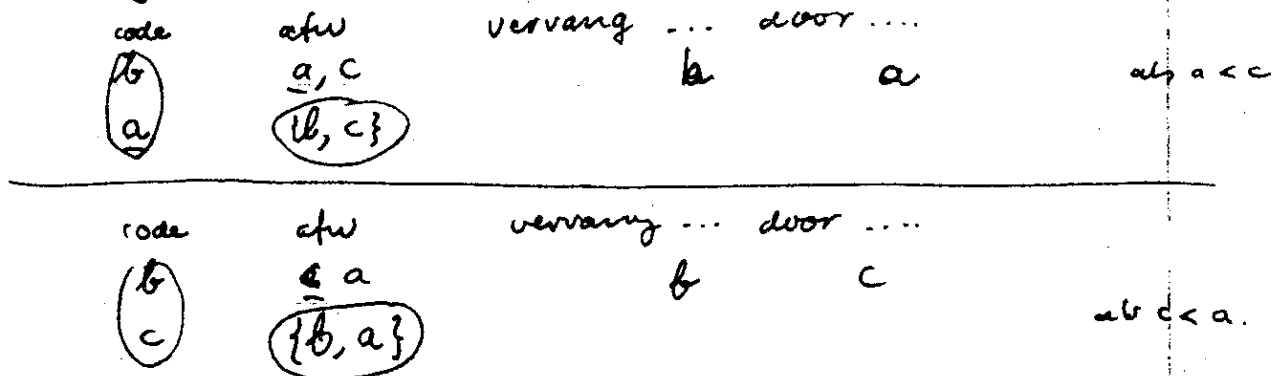
het klopt voor lage  $n$  ( $n=3$ ).



Als  $a < c$  dan wordt (voor nummering  $\{a, b, c\}$ )  
 of  $c > a$

de code :  $b$

de teruggeconstrueerde boom wordt



(de volgorde in de laatste horizontale ellips doet er niet toe).

Als je dit alles automatisch doet is het bijhouden natuurlijk erg eenvoudig: in de gewijzigde "code" op elke regel hoef je alleen maar telkens één item te wijzigen; in het lijstje van afwezigen hoef je ook maar één item te wijzigen.

Opmerkelijk is dat de Prüfer codering al van 1918 dateert, maar het inverse algoritme pas van 1953 (Neville).

We gaan nu bomen tellen, dwz we willen weten hoeveel verskillende bomen er zijn.

We moeten ons eerst precies realiseren wat we met "verskillend" bedoelen.

- 1) Gewone equivalentieklassen deze noemen we topologische bomen (als topologische ruimte gelijk, ingebed in  $\mathbb{R}^3$  homotoop)

## 2) Planaire bomen.

Dere zijn

homotopieklassen in  $\mathbb{R}^2$ :zijn niet gelijk, opgevat als  
planaire boom.

Combinatorisch wil dit zoveel zeggen als dat we de takken die in een punt samenkomen van een cyclische volgorde voorzien, d.w.z. van een afbeelding, of beter een klasse bijecties

$$\varphi: \Gamma_P \mapsto N_{\text{graad}(P)}$$

|  
collectie takken die in P  
samenkomen

die bijecties zijn equivalent die in elkaar overgaan door cyclische permutaties van de doelwuite  
(voortgebracht door de cykel  $(1, \dots, k)$ , waar  $k = \text{graad}(P)$ ).

Zestiende les, maandag 26 oktober 1981, 4<sup>e</sup> uur.

We bespreken nu de

## 3) wortelbomen.

Een wortelboom is een triplet  $(G, \Gamma, w)$ , met  $(G, \Gamma)$  een boom, en  $w \in G$ , anders gezegd: een boom met een uitgelezen knoop, de wortel.

Bij wortelbomen hebben we weer topologische wortelbomen en planaire wortelbomen.

Niet zo als bij 2) het geval is, eisen we voor een equivalentie

$$\varphi: (G, \Gamma, w) \rightarrow (G', \Gamma', w')$$

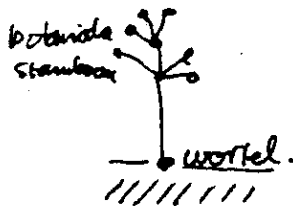
dat de cyclische volgorde  $\gamma$  (en ook de wortels) met elkaar corresponderen onder  $\varphi$ .



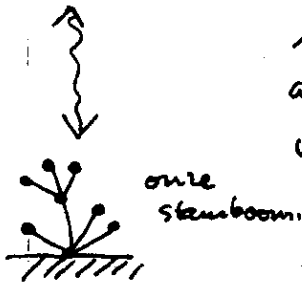
## 4) Planaire stamboom:

Dit is een wortelboom die planair is, maar met dit verschil: bij de wortel is een volgorde gegeven in plaats een cyclische volgorde. (loksgewijs)

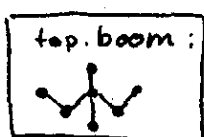
De wiskunde is anders dan de plantkunde: een stamboom is in de plantkunde iets met een stam.



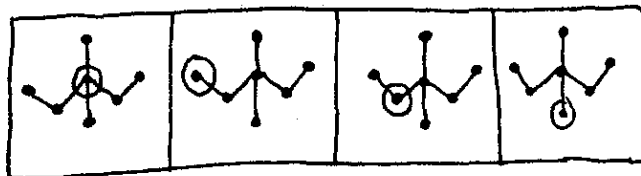
(de wortel is een top), maar als de wortel toch een top is, dan wordt aan het andere eind de cyclische volgorde "opgemaakt". Daardoor plant de keuze van een volgorde i.p.v. een cyclische volgorde zich door de takken voort.



We tekenen nu voor een enkele topologische boom de klassen van top. wortelbomen en planaire bomen en planaire wortelbomen.

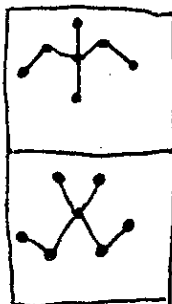


topologische wortelbomen:

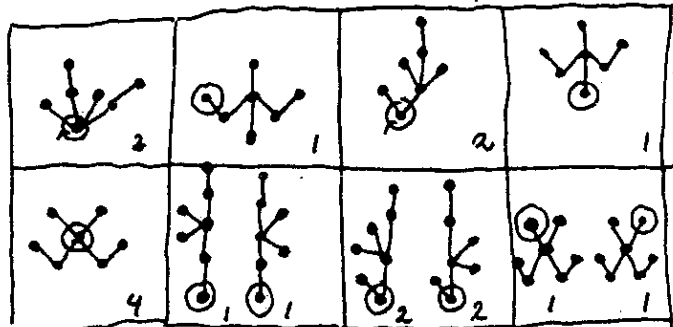


twee klassen planaire bomen:

voor elke top. wortelboom, hier de klassen van planaire wortelbomen:



bijbehorende plan. wortelboom klassen



de vijfde is in de kolommen van de planaire wortelboom klassen geven aan in hoeveel klassen van planaire stambomen de betrokken klassen uiteen vallen.

Dit cijfer geeft aan op hoeveel manieren de cyclische volgorde bij de wortel kan worden opgebroken (d.w.z. de graad van de wortel)

Het volgende is een lijstje van de eenvoudigste bomen:

# punten	top boom	planaire boom	wortelboom	plan wortelboom	plan stabiel boom
1					
2					
3					
4					

zo kan je nog wel doorgaan, voor  $n=6$  is een van de mogelijkheden het diagram van de vorige pagina.

Voor het tellen van bomen merken we op dat een topologische wortelboom bestaat uit een punt of een punt met iets eraan vast. Dat iets is een multiset van wortelbomen.

laet  $\mathcal{B}$  de verzameling van topologische wortelbomen zijn, voor  $b \in \mathcal{B}$  definiëren we  $v(b) = \# \text{punten van } b$ . Om een <sup>tw.</sup>boom te maken van  $n$  punten schrijven we een  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$  voor zodanig dat

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} v(b) \varphi(b) = n-1$$

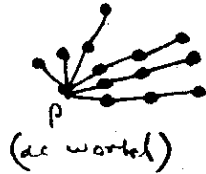
Bijvoorbeeld, voor

$$\mathcal{B} = \cdot \quad \downarrow \quad \vee \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots$$

definieren we een  $\gamma$  door de onderstaande tabel

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \text{ (etc 0)} \end{array}$$

Dere  $\gamma$  correspondeert dan met de volgende <sup>wortel</sup>boom:



(nl dit is een topologische wortelboom, dus de volgorde der takken bij  $P$  doet er niet toe).

Nu doen we een tellerij die al van de vorige eeuw dateert:

$$F(x) := \sum_{b \in \mathcal{B}} x^{\gamma(b)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

waarin  $C_n = \#$  <sup>tw.</sup> bomen met  $n$  punten.

$$\text{Dus } F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \dots$$

en geldt de volgende functionaal verg. voor  $F$

$$F(x) = (\text{volgens de vorige pag.})$$

$$= x \prod_{b \in \mathcal{B}} (1 + x^{\gamma(b)} + x^{2\gamma(b)} + \dots)$$

$$= x \prod_{b \in \mathcal{B}} \frac{1}{1 - x^{\gamma(b)}} =$$

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - x^n} \right)^{C_n}$$

maar ook

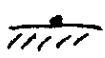
$$= x \exp \left( \sum_{b \in \mathcal{B}} \log \frac{1}{1 - x^{\gamma(b)}} \right)$$

$$= x \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{b \in \mathcal{B}} \frac{x^{k\gamma(b)}}{k} \right)$$

$$= x \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F(x^k)$$



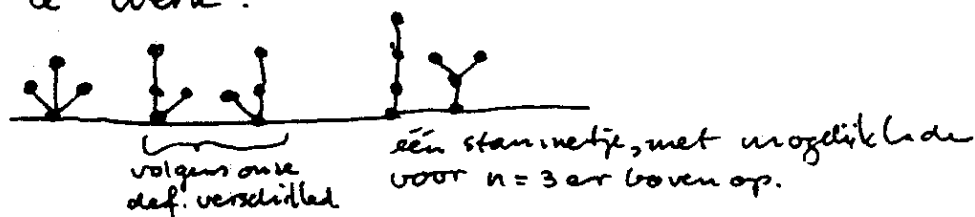
We gaan door op het tellen van bomen, we gaan nu stambomen tellen: we ordenen ze naar aantal punten ( $n$ )

Voor  $n=1$  :  een puntje dat nog maar net uit de grond komt.

$n=2$   alleen maar dit jongescheutje

$n=3$   nu <sup>twee</sup> ~~een~~ mogelijkheden.

$n=4$  we gaan nog steeds enige zins onsystematische te werk:



de voortbrengende functie  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\text{\#eq. kl. van plan. stamb. met } n \text{ pten}) x^n$

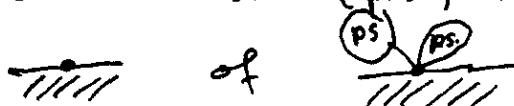
$$= x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \dots$$

De coëfficiënten zijn de zogeheten Catalan-getallen:

$$C_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \text{ bijv. } C_3 = \frac{6!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5$$

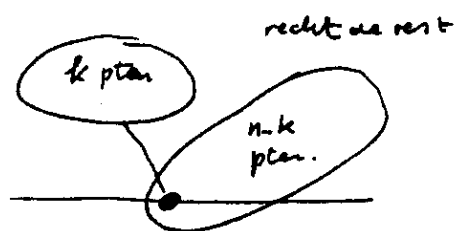
We gaan nu het tellen van bomen wat informeel doen. Als je het precies wilt doen moet het met de theorie van de grammatica's. Dat is een ander college, waar het ook al niet zo precies wordt gedaan, dus ik moet nu maar niet kvaalijk nemen dat het niet op de allernetste Bourbaki-manier wordt gedaan.

Een planaire stamboom (p.s.) ziet er zo uit:



Als de p.s.  $n$  punten heeft, ziet het er zo uit:

meest linker tak:



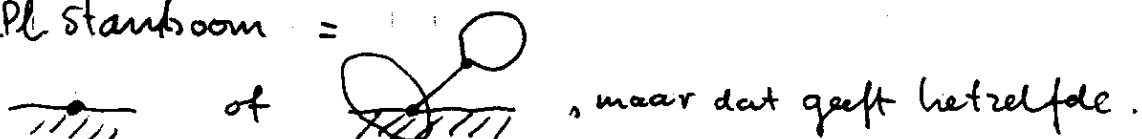
Dus:  $f(x) = x + f(x)f(x)$ . (\*)

dit geeft  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ ,

met  $t_n = C_{n-1}$ , zoals eenvoudig volgt door ~~ontwikkeling van~~ ontwikkeling van  $\sqrt{1-4x}$ .

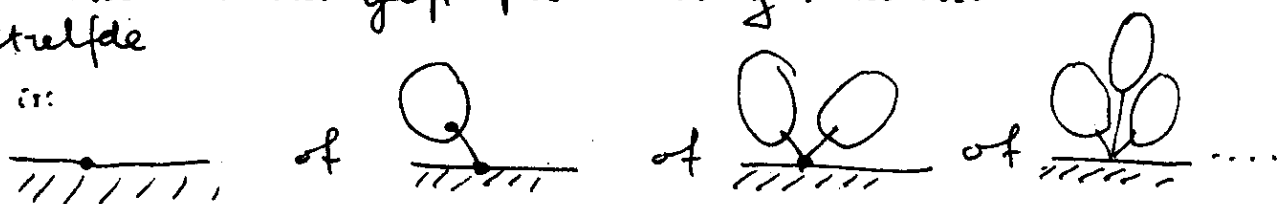
Op een andere manier vind je hetzelfde resultaat:

Pl. stamboom =



Een derde manier geeft pas na enig rekenwerk hetzelfde

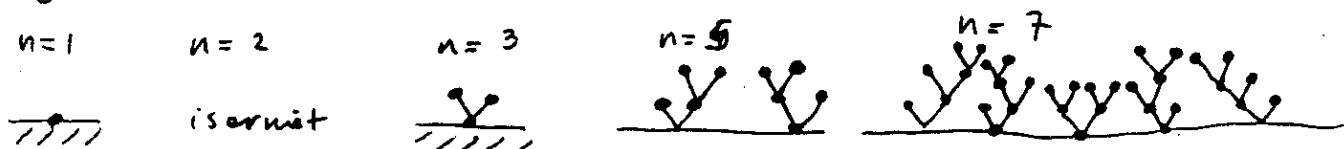
p.s. is:



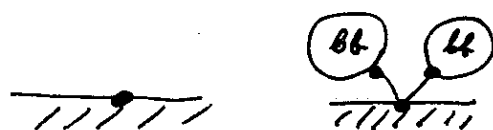
dwz  
 $f(x) = x + x f(x) + x (f(x))^2 + x (f(x))^3 + \dots$

met andere woorden,  $f(x) = \frac{x}{1 - f(x)}$ , waaruit weer relatie (\*) volgt.

We bekijken nu eens een overeenkomstig sommetje met binaire planaire stambomen (kortweg: binaire bomen, b.b.): in elk punt 0 of 2 opgaande takken.



De voortbrengende functie  $g(x) = x + x^3 + 2x^5 + 5x^7$   
Zo'n binaire boom kan je als volgt "maken":



$$g(x) = x + x(g(x))^2 \quad (**)$$

Hiervan volgt  $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$  etc.,  
maar als we in de vergelijking voor  $f$  stellen:

$$h(x) = \frac{f(x^2)}{x}$$

dan kunnen voor  $h$  vinden uit de vergelijking voor  $f$ :

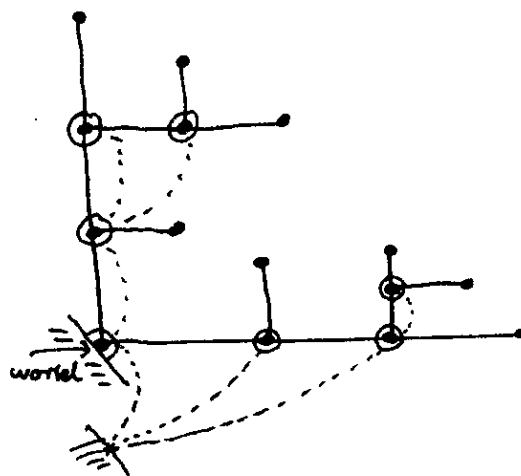
$$h(x) = \frac{f(x^2)}{x} = \frac{1}{x} (x^2 + f(x^2)f(x^2)) =$$

$$\frac{1}{x} (x^2 + x^2 h(x)^2) = x(1 + (h(x))^2)$$

Dus de oplossing van  $(**)$  is  $\frac{f(x^2)}{x}$ .

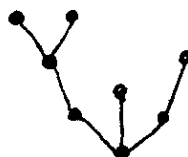
Dit kan je ook als volgt inzien: we gaan een 1-1 correspondentie maken tussen b.b.'en en p.s.'en.  
We tekenen een boom (b.b.) met takken die of in pos. x-richting of 2 pos. y-richtig verlopen.

Bijvoorbeeld (getrokken lijnen) een binaire boom:



Vanuit (\*) recht onder de "wortel" trekken we verbindingen naar de non-end punten  $\odot$  van de boom op de horizontale tak er recht boven (gestippeld). Vanuit de zo bereikte punten herhalen we het procédé, totdat we niets meer te doen hebben.

Zo ontstaat uit de gestippelde verbindingen de volgende boom (p.s.)

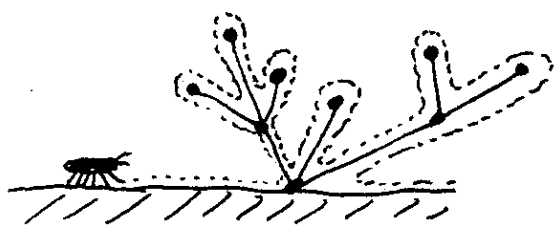


Het bewijs dat hier door ~~aangetoond~~ 1-1 correspondentie tot stand is gebracht tussen de verzameling planaire stambomen en de verzameling binaire bomen is niet zo eenvoudig. Formeel gaat 't allemaal iets makkelijker als je eerst de bomen netjes codeert.

We bespreken nu de UD-code (up-down) voor planaire stambomen.



We doen 't aan de hand van een voorbeeld:



Dere boom staat op de grond in een twee-dimensionaal universum, en wordt nu geparseerd

door een insect (een bladluis) dat dan, om aan de andere kant te komen het gestippelde pad moet doorlopen. Dit bladluizen pad coderen we nu door de bladluis bij elke tak te laten roepen of hij/zij dere passeert in opgaande richting of in neer gaande richting.

De geïllustreerde boom levert op:

U U D U D U D D U D U D U D D

Niet alle UD-woorden kunnen zo ontstaan. Welke dan wel?

We maken even een grafiek van het UD woord: elke U correspondeert met een stukje ↗ en elke D met ↘

Onze grafiek wordt nu:



De ~~woorden~~ goede woorden worden zo omgezet in een grafiek met eigenschap: allemaal  $\geq 0$ , laatste en laatste = 0.

Speciaal de laatste nul is belangrijk: het beest moet weer met de potjes op de grond komen, anders blijft ons arme luisje in de lucht hangen.

Je kan nu op een aantal manieren aangeven aan welke condities een UD-code moet voldoen:

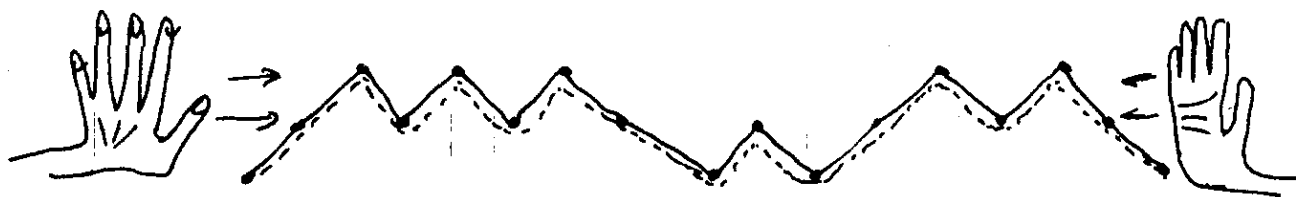
Methode 1. gebruikmaken van de BNF-vorm:

$$\langle \text{UD-code} \rangle ::= | U \langle \text{UD-code} \rangle D \langle \text{UD-code} \rangle$$

(dit correspondeert met de eerste manier om een planaire-stamboom-genererende-functie te bepalen)  
of

$$\langle \text{UD-code} \rangle ::= | U \langle \text{UD-code} \rangle D | U \langle \text{UD-code} \rangle D U \langle \text{UD-code} \rangle D | \dots$$

Hoe krijg je overigens zo'n boom weer terug? Dat is heel eenvoudig. Neem de grafiek van de UD-code:



Je trekt lijn (----) aan de onderkant, en daarna laat je 4 even drogen (anders plakt het niet goed) en dan doe je 4 dicht. Dan krijg je de boom weer terug.

### Methode 2

Als je met di aangeeft het aantal U's vlak voor de  $i$ -de D en na de  $i$ -de D, dan krijg je een rij gehele getallen  $\geq 0$ ; deze voldoen aan:

$$d_1 \geq 1; d_1 + d_2 \geq 2; d_1 + d_2 + d_3 \geq 3; \dots; d_1 + d_2 + \dots + d_8 = 8$$

(als er 8 d's zijn).

In ons voorbeeld:

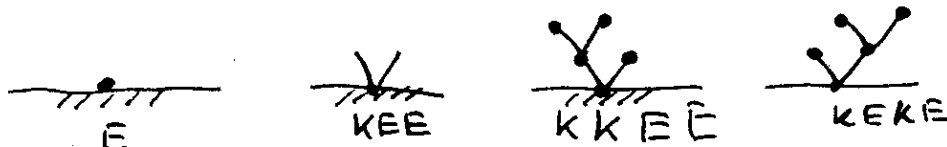
$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$
2	1	1	0	1	2	1	0

In grafiek gebradit betekent dit dat de grafiek van de partiële sommen er zo uit ziet:



We gaan nu binaire bomen coderen, weer met een lus. We doen dat met de KE (knot-end of knoop-eind) code.

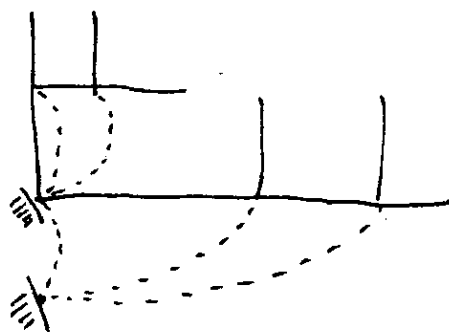
De lus - die over een binaire boom loopt - noteert alleen "knoop" of "eindpunt"; verder, de lus noteert alleen nieuwe knopen:



Bij de derde boom ziet de lus twee knopen achter elkaar, hij/zij denkt: gut wie zou al die knopen verloren hebben.

Merk verder op dat de KE-code eindigt op E. De "afgeknotte KE-code" is juist de KE-code zonder de laatste E:  $\langle aKE \rangle$

Er zijn nu evenveel K's als E's, en 't leuke is dat de "aKE-code" van een binaire boom correspondeert met de UD-code van de corresponderende stamboom; voorbeeld:



De stippe lijst stamboom heeft code UUDUDDUUDU

De binaire boom heeft <sup>aKE</sup>code KKEKEEKEKE

We kijken of we de KE-code netjes kunnen genereren:

$\langle KE\text{-code} \rangle ::= E \mid K \langle KE\text{-code} \rangle \langle KE\text{-code} \rangle$ .

— QQ

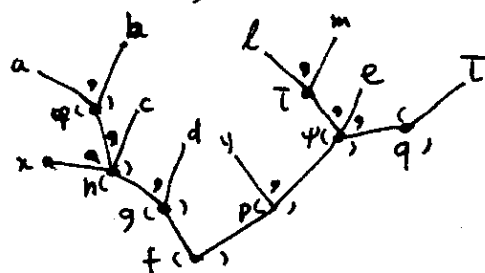
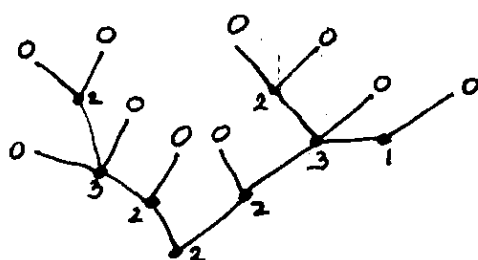
we geven een afgekorte KE-code aan met  $\langle aKE \rangle$  :

$$\langle aKE \rangle ::= - \mid K \langle KE\text{-code} \rangle \langle aKE \rangle \dots$$

$$::= - \mid K \langle aKE \rangle E \langle aKE \rangle$$

en we zien dat de grammatica voor  $aKE$  dezelfde is als die voor  $UD$  is.

De  $KE$ -code hangt samen met een manier om algebraïsche uitdrukkingen = (reversed) Polish te schrijven; voorbeeld (eerst links, links, rechts komt zo)



(Een boomkundig ziet zo wat voor boom dit is, aan de manier waarop hij opgegroeid is.) Bij elke knoop schrijven we nu het aantal takken dat uitgaat (naar boven). Voor een binaire boom staan er dan alleen nullen en tweeën.

De leus roept nu in plaats van  $K$  of  $E$  het nummer af:

2 2 3 0 2 0 0 0 2 0 3 2 0 0 0 1 0

Vergelijk dit met een expressie

$$f(g(h(x, \varphi(a, b), c), d), p(y, \psi(\tau(l, m), r, q(t))))$$

deze expressie hangt samen met de boom als volgt :

de variabelen zetten we bij de knopen, in de oksels van de boom zetten we haakjes of komma's (komma's : de binnenoksel).

Als de leus nu de symbolen afroept als ie er langs komt, produceert hij de formule.

Al die flauwe lui van komma's en haakjes  
kun je nu weglaten als je elk symbool (letter)  
vooraf doet gaan door het nummer dat de lui  
afroept, dus (in ons voorbeeld) :

$\frac{1}{2} f \frac{1}{2} g \ 3 \ h \ 0 \ x \ 2 \ p \ 0 \ a \ 0 \ b \ 0 \ c \ \text{etc.}$

De grammatika van dit soort woorden  
is :

$$\langle \text{code} \rangle ::= 0 \mid 1 \langle \text{code} \rangle \mid 2 \langle \text{code} \rangle \langle \text{code} \rangle \mid 3 \langle \text{code} \rangle \langle \text{code} \rangle \langle \text{code} \rangle$$

etetera. (als je je beperkt tot alleen 0 en 2  
krijg je de grammatika voor de K.E. code.

Als je de  $i$ -de partiële som van het rijtje vermindert  
met  $i$  krijg je een rij die de successievelijke  
stapelhoogten aan geeft (dus het aantal nog te  
leren expressies). Beginnen met 1 voor  $i=0$ .

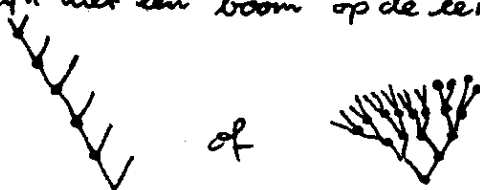
Uit de rij van het voorbeeld ontstaat zo :

$i =$

2	2	3	0	2	0	0	0	2	0	3	2	0	0	0	1	0	
1	2	3	5	4	5	4	3	2	1	2	1	3	4	3	2	1	0

↑ klaar!

Dit is het punt waarop we de Russell-paradox in boomvorm kunnen  
formuleren: sommige bomen zijn isomorf met een subboom op de  
eerste etage en andere (bijv. alle eindige) niet. Zulke bomen  
die isomorf zijn met een boom op de eerste etage noemen we bijzonder:  
voorbeelden:



We maken nu een boom die bestaat uit de collectie van alle  
niet bijzondere bomen op de eerste etage, verbonden met een

enkele wortel. Noem deze boom B.

B is bijzonder

1) desd. als hij niet op de eerste etage voorkomt

2) (def bijzonder) desd als hij wel op de eerste etage voorkomt.

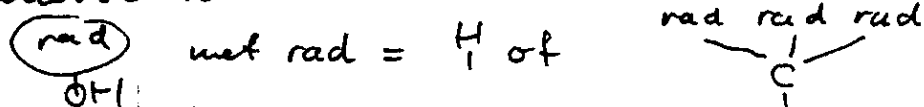
Hier is een tegenspraak.

We gaan nu een bijzonder soort bomen tellerij doen, we gaan alcoholen tellen (meer van dit soort spul in het grote artikel van Pólya uit 1937).

Eigenlijke alcohol-radicalen: een keten koolstofatomen die aan een OH groep vast zit, de rest van de valenties opgevuld met H-atomen.

De eenvoudigste alcohol is dus:  $\begin{array}{c} \text{H} \\ | \\ \text{OH} \end{array}$  (een tamelijk symboloos spul)

De algemene alcohol is:



De voortbrengende functie is dus  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ,  $c_n$  het aantal "planaire" alcoholen, en we vinden

$$\tilde{F}(x) = 1 + x (\tilde{F}(x))^3$$

Maar eigenlijk doet het er niet toe welk radicaal waaraan vast zit, preciezer:

een alcohol radicaal  $\equiv \text{H} \mid \text{patroon van afbeeldingen } \{1,2,3\} \rightarrow \text{verz. alcohol radicalen}$

Met een patroon bedoelen we hier een equivalentie klasse onder de actie van  $S_3$ . Als je hier even over nadenkt, volgt:

$$D(x) = 1 + x P_{S_3} (D(x), D(x^2), \dots)$$

voor de voortbrengende functie D van de topologische alcoholen. Dus

$$D(x) = 1 + \frac{x}{6} ((D(x))^3 + 2 D(x^3) + 3 D(x) D(x^2))$$

Echter, als we door een polarisatiekijker  
 kijken naar chemische stoffen zien we optische  
 activiteit (soms), als je dit in rekening brengt  
 dan moet je alleen cyclische permutaties  
 in rekening brengen, dwz alleen de alternerende  
 groep  $A_3$  ipv  $S_3$  en er komt dan

$$E(x) = 1 + \frac{x}{3} ((Ex)^3 + 2E(x^3))$$

voor de voortbrengende functie van gewone alcoholen-met-  
 stereoisomerie.



Negentiende les, maandag 9 november 1981, 3<sup>e</sup> uur. 101

Een boom is een speciaal soort graaf, dat moeten we goed blijven voor ogen houden.

Een boom kunnen we van een orientatie voorzien, bijv. inductief als volgt.

Kies een "wortel"  $P_1$ . Neem dan een top  $\neq P_1$ , er is een kortste weg van  $P$  naar  $P_1$ , zet een pijl van  $P$  langs de tak naar  $P_1$ ; snij  $P$  en pijl uit de boom, en herhaal dit procédé.

We krijgen zo een geörienteerde (wortel)boom, met orientatie op  $P_1$  gericht.

Ik maak nog een opmerking:

- Een eindige geörienteerde graaf zodanig dat
- 1) uit alle knooppunt  $\neq P_1$  gaat precies één pijl, behalve uit  $P_1$  waar geen pijl uitgaat en
  - 2) zodanig dat er geen geörienteerde kringen zijn,

is een boom.

Bewijs (I) Neem  $P \neq P_1$ . Wandel vanuit  $P$  (tot je niet verder kunt of) tot je een punt tegenkomt dat je al gehad hebt. Omdat er geen geörienteerde kringen zijn is dat punt  $P_1$ . Desoriënteer (de graaf is nl. samenhangend)

Hier zitten nog een paar vuiligheden in:



kan niet voorkomen, want dat zou een geörienteerde lering zijn.

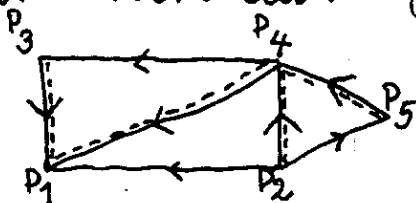


Inconsistent geörienteerde kringen kunnen ook niet voorkomen: er zouden dan punten zijn met twee uitgaande pijlen.

Manier (II): De voorgaande methode geeft:  
samenhang + :  $\# \text{ pten} = \# \text{ lijnen} + 1$

We beginnen nu met een stukje theorie, afkomstig van Kirchhof and Maxwell (ca 1850).

Begin met een geörienteerde graaf  $(G, \Delta)$ , eindig.  
Een opspannende boom voor  $(G, \Delta)$  is een  $(G, E)$  met  $E \subset \Delta$  en  $(G, E)$  geörienteerde boom.  
Voorbeeld: (even niet kijken naar de stippelijntjes).



We vragen ons af hoeveel opspannende bomen er zijn met wortel 1 in de gegeven graaf?  
Voorbeeld van zo'n opspannende boom wordt door de stippeltjes gegeven.

(Het stuk van  $P_3$  naar  $P_1$ , van  $P_5$  naar  $P_4$  moet er in zitten  
vanuit  $P_4$  is er keus uit  $P_4 \rightarrow P_1$  en  $P_4 \rightarrow P_3$   
" 2 " " " "  $P_2 \rightarrow P_1$  en  $P_2 \rightarrow P_4$  en  $P_2 \rightarrow P_5$ .  
Alle combinaties zijn mogelijk, dus 6 bomen in totaal.)

Op deze manier krijg je een algoritme om alle bomen snel te vinden. Nu gaan we echter het aantal mogelijkheden tellen. We associëren daartoe met de graaf een matrix, afmetingen  $|G| \times |G|$ :

Op rij  $i$  schrijven we in de  $j$ -de kolom:  
 $\begin{cases} \text{als } i \neq j & - (\text{aantal pijlen van } P_i \text{ naar } P_j) \\ \text{als } i = j & \text{totale uit-grad van } P_i. \end{cases}$

De rij-som is dus 0.

Bijvoorbeeld, bovenstaande graaf krijgt matrix

$$\begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Het matrix Tree Theorem zegt :

het aantal opspannende bomen met wortel  $P_k$  is de onderdeterminant van het  $k$ - $k$ -element. In dit geval krijgen we de determinant van

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

en die is inderdaad 6.

Merkt op dat de lusjes in een <sup>geör.</sup> graaf in het geheel niet mee doen : ze verschijnen niet in de matrix en voor de bomen zijn ze ook niet belangrijk : je kunt ze net zo goed weglaten.

Nu het bewijs.

Veronderstel  $k=1$  (dit kunnen we bewerkstelligen door verwisseling van kolommen en rijen)

Laat nu de pijlen niet  $P_1$  gewoon weg.

(die doen toch niet mee voor de boom naar  $P_1$ ).

geval I : uit elk punt  $\neq P_1$  vertrekt precies één pijl

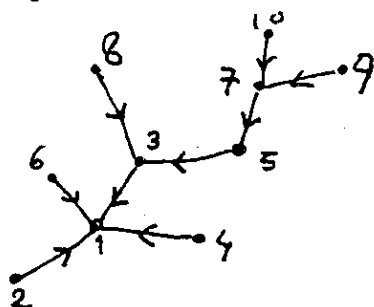
Ia er is geen geöriënteerde kring

Ib er is wel een geöriënteerde kring.

Ia: Nu zijn we klaar want de graaf is al een boom. Het nummer de punten zo, dat ze van hoog naar laag gaan, dwz zodanig dat alle pijlen  $(k, l)$  zijn met  $l < k$ .

Neem daarna een top  $\neq P_1$  geef die nummer  $n$  laat die top met bijbehorende tak weg, en ga zo door.

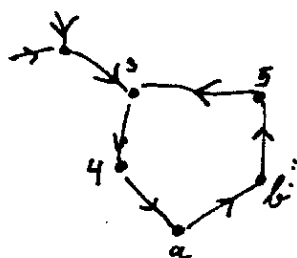
Voorbeeld bijgaande boom kan zo genummerd worden:



In dit geval is de matrix een  $\Delta$ -matrix, met op de diagonaal allemaal enen, nl. de totale uitgraad in elk punt.

Geval Ib: Nu bevat de graaf geen boom, want als je die kring in komt, kom je er niet meer uit.

De rijen opgeteld die bij een enkele cykel horen leveren nul: er is voor elk cykel-lid



een kolom element  $-1$  (in die rijen) en een kolom element  $+1$

(rij 3 bevat in kolom 4 een  $-1$ )

rij 4 bevat in kolom 4 een  $+1$

verder in kolom 4 nullen, tenminste in rijen 3, 4, 5, 6, ..., 5. De onderdeterminant is dus nul, want de rijen zijn afhankelijk.

Geval II. Uit een punt, zeg  $P_2$  ontspruit meer dan een pijl.

Hoe je die uit-pijlen nu ook in twee groepen splitst (niet-leeg), laten we zeggen in rode en blauwe, je kan altijd de te vinden bomen onderscheiden in twee soorten:

bomen met de  $P_2$ -uit pijl rood

" " " "  $P_2$ -uit pijl blauw.

Zij nu  $\Delta_1 = \Delta \setminus \{\text{rode pijlen}\}$

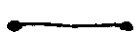
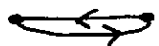
$\Delta_2 = \Delta \setminus \{\text{blauwe pijlen}\}$

Dan is het totaal aantal bomen in  $(G, \Delta)$

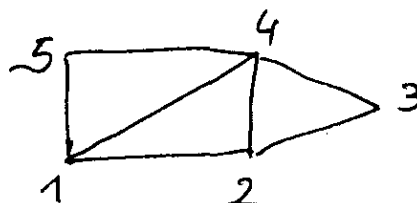
gelijk aan  $\# \text{ in } (G, \Delta_1) + \# \text{ in } (G, \Delta_2)$ .

Evenwel, de matrixen bij  $(G, \Delta_1)$  en  $(G, \Delta_2)$  verschillen daarin dat de 2-de rij in de oorspronkelijke matrix som is van de tweede rijen in de matrixen die bij  $(G, \Delta_1)$  en  $(G, \Delta_2)$  horen, respectievelijk

Twintigste les, maandag 9 nov 1981 4<sup>e</sup> uur

Voor een niet-georiënteerde graaf kun je het nu ook uitrekenen: maak van elke tak  eerst twee takken  en pas daarna de vorige stelling toe.

Onze oorspronkelijke graaf



geeft dan

3	-1	0	-1	-1
-1	3	-1	-1	0
0	-1	2	-1	0
-1	-1	-1	4	-1
-1	0	0	-1	2

en voor het aantal bomen met wortel 1 krijgen we dus

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$3 \cdot 12 + 1 \cdot (-9) - 2 \cdot (3) = 36 - 15 = 21$$

Je maakt dus van elke straat tweerichtingsverkeersstraat

Een bijzondere toepassing is dat je nog eens op een andere manier kunt berekenen hoeveel bomen met  $n$  knopen er zijn:

Das het voorgaande nl. toe op de volledige  $n$ -graaf:  
De matrix wordt dan eenvoudig (door de te berekenen onderzet)

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & n-1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-1 \text{ rijen en} \\ \text{kolommen} \end{array}$$

Dit is een symmetrische matrix. De eigenwaarden zijn we met het blote oog zitten:

$$\lambda = n \quad (\text{rang}(A - nI) = 1, \text{ dus mult. is } n-2)$$

$$\lambda = 1 \quad (\text{rang}(A - I) = n-2 \text{ (moet wel) dus mult. is } 1)$$

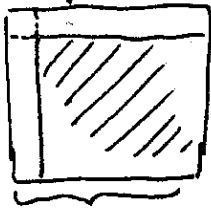
Prod. eigenwaarden is  $n^{n-2}$  dus dit is ook de determinant.

Zo komt de stelling van Cayley weer voor de dag.  
N.B. Er zijn nog wel meer manieren om de determinant uit te rekenen.

Een speciaal geval is dat van een <sup>georiënteerd</sup> eengraaf waar voor geldt dat de ingraad = uitgraad voor elk punt.

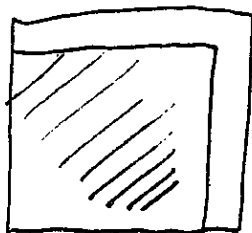
Dit maakt dat de kolommen som ook gelijk is aan nul, voor elke kolom. Het aantal bomen is nu de geparceerde onderdeterminant.

is ond  
det

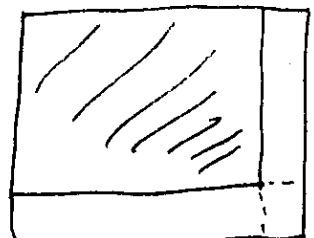


alle kolommen optellen bij de meest rechtse kolom geeft rechts een kolom die samen met de witte kolom nul op levert.

Cyclische verwisseling én tekenverandering geeft de volgende (links) onderdeterminant maal  $(-1)^{n+1}$



Maar de onderdeterminant van het  $n, n$ -element (zie rechts) kan op precies zo'n manier worden getransformeerd in de linkerse.



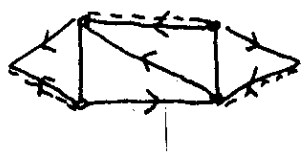
Dus het aantal ~~bomen~~ wortelbomen op 1 is het aantal wortelbomen op  $n$ , en dus staan er evenveel wortelbomen op alle punten.

De matrix die bij een gewone graaf hoort is symmetrisch, en ook is per constructie ingraad = uitgraad voor elk punt in de corresponderende graaf. Het aantal bomen hangt voor een gewone graaf niet af van de wortel die je kiest, en dat komt ook uit de berekening leuk naar voren.

Analoog probleem: belegging van een graaf met hallets (dimeren), bijv.: dit gaat door het  $ij$ -matrix element  $a_{ij}$  te definiëren als volgt:

$$a_{ij} = +1 \text{ als } (i,j) \in \Delta$$

$$= -1 \text{ als } (j,i) \in \Delta$$

$$= 0 \text{ anders}$$


Op deze manier ontstaat een scheesymmetrische matrix, en (zonder bewijs): het aantal manieren is juist  $\sqrt{\det(A)}$ .

We beginnen nu met Euler kringen: een Eulerkring is een kring die alle lijnen uit  $\Gamma$  precies één keer gebruikt. Dit heet zo naar het Königsberger bruggenprobleem.

Een Eulers kringenstel is een stel disjuncte kringen die samen alle lijnen een maal opgebruiken.

N.B. Een Hamilton-kring is een kring die elk punt precies één maal aan doet.

We gaan nu Eulers beroemde stelling bespreken.

### Stelling

Laat  $(G, \Gamma)$  een graaf zijn. Dan zijn alle graden even dan en slechts dan als er een Eulers kringen-stel bestaat.

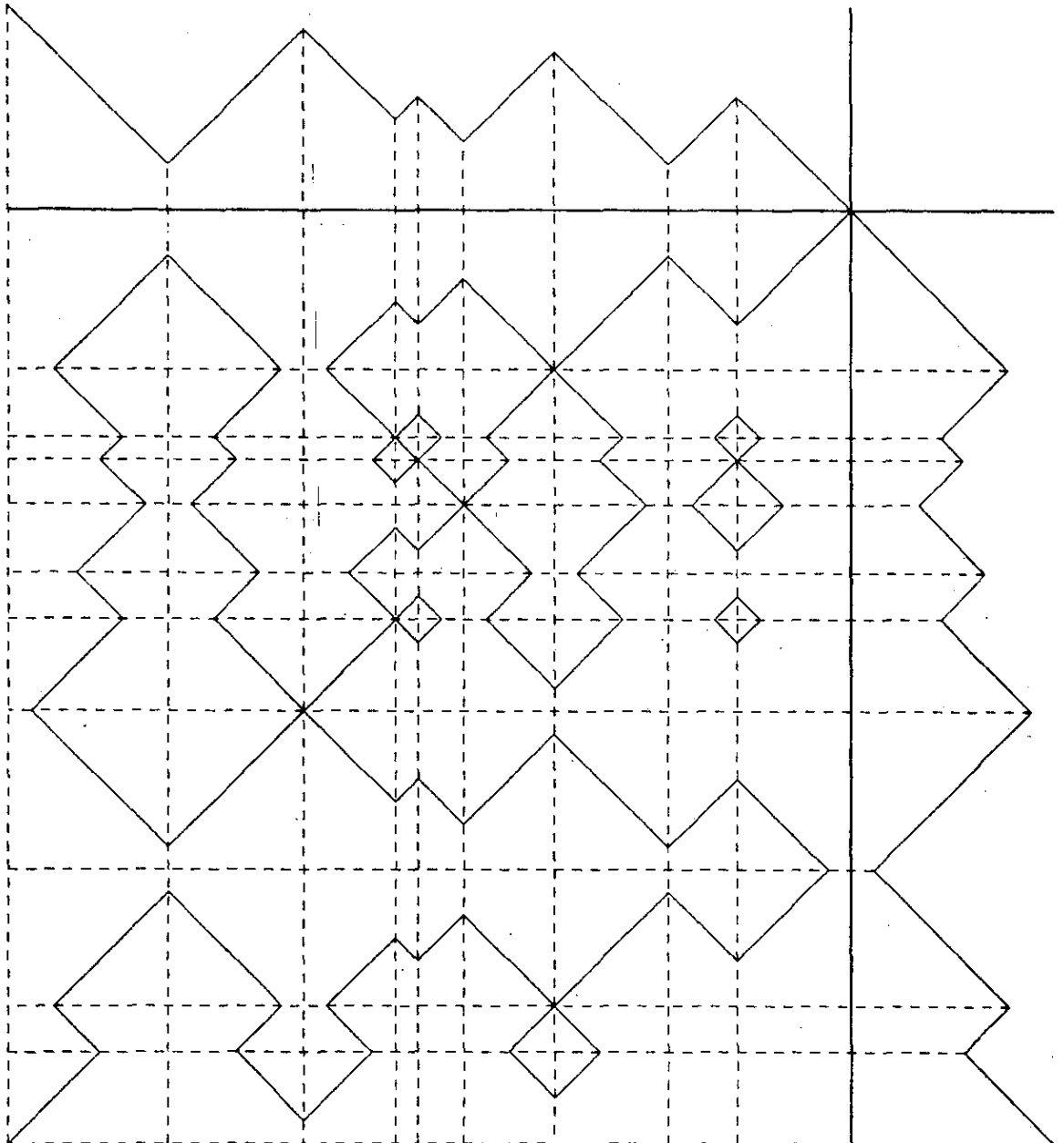
Verder, er bestaat een Eulerse kring dan en slechts dan als de graaf samenhangend is en alle graden even zijn.

Bewijs. 1) Vers.  $P_i$  heeft graad 0. Splits  $P_i$  af.

2) Vers  $P_i$  heeft graad  $\neq 0$ . Ga dan lopen door de graaf. Wegens even zijn van alle graden, als je ergens (behalve  $P_i$ ) aan-komt kan je ook weer weg. Vroeger of later ~~zij je dan terugkomt, dan heb je dan  $P_i$  weer~~ kom je dan  $P_i$  weer tegen.

107A

61267 - 12



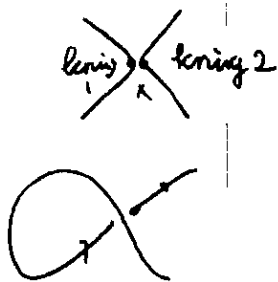
Figuur behorende bij het vierlesjesprobleem. Besproken op  
het college Combinatoriek van Prof. dr. N.G. de Bruijn, nov. 1971.



Splits de kring dan af. (Dwz begin ergens anders)

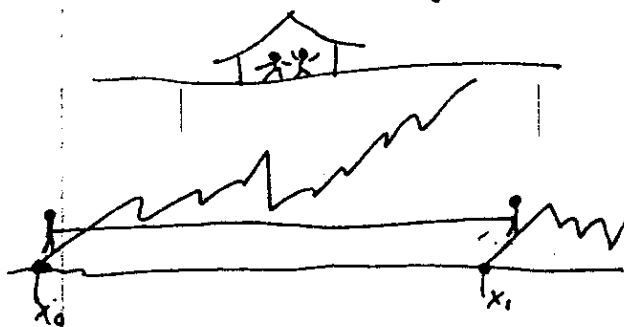
Nu met de samenhang erbij: Vero we hebben een minimaal Eulers kringenset (minimaal = met kleinste mogelijke aantal elementen).

Bewering: die zijn punt disjunct, minners veronderstel niet punt disjunct, versmelt dan de 2 kringen als volgt



kring 2 (beginnend bij  $x$ ) gevolgd door kring 1 (beginnend bij  $x$ ). Dit komt weer uit op  $x$ .

Een leuke toepassing is het bier flesjes probleem:



langs een fadaise-kant lopen twee paadjes omhoog. Twee feestvierders willen een partij bier omhoog brengen naar een feestje, op de

volgende manier: ze nemen een lange plank tussen zich in waarop al het bier staat en ze lopen gelijk op. Maar de plank moet wel horizontaal blijven, anders glijdt de hele boel naar links of naar rechts.

Hoe dit probleem op te lossen?

Laat het ene pad hoogte functie  
" .. andere ..

$$h(x) = H_1(x-x_0) \text{ en } H_2(x-x_1)$$

hebben.

(construeer nu, met beschrijvende meetkunde o.i.d. de verzameling  $V = \{(s, t) \mid H_1(s) = H_2(t)\}$ ).

Als het pad uit rechte stukken bestaat, dan is  $V$  een "graaf" met punten van orde 4, 2 en begin en eind van orde 1. Verbind begin en eind, en merk op dat nu begin en eind in dezelfde component zitten: in die component is een Euler kring. zie bijgaande illustratie.



gefabricceerd.

Inspectie van het bewijs toont trouwens dat — voor een Eulergraaf, d.w.z. een graaf (georiënteerd) waarvoor geldt:  $\text{ingraad}(P) = \text{uitgraad}(P)$  voor alle  $P$ , als die samenhangend is, dan is die ook direct samenhangend.

Bewijs. Eenvoudig. Begin maar ergens in een Eulergraaf, zeg bij  $P_0$ . Verlang de keten stap voor stap. In elk punt waar je aankomt is ook een uitgang, behalve bij  $P_0$ , waar de uitgang al is opgebruikt. Vroeger of later kan je niet meer verder ( $\Delta$  is eindig) dus dan ben je weer in  $P_0$  terug, en zo ga je door.

Als kringen punten gemeenschappelijk hebben kunnen ze gefuseerd worden als in het ongeoriënteerde geval.



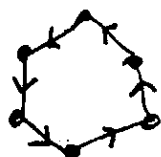
etc. (Eindigheid is essentieel)

Laat  $\sigma \in \mathbb{N}_0$ . We noemen een Eulergraaf  $(G, \Delta)$  van type  $\sigma$  dan en slechts dan als voor alle  $P \in G$ :

$$\text{ingraad}(P) = \sigma = \text{uitgraad}(P).$$

Voorbeeld. Zij  $G$  een verzameling, dan is  $(G, \emptyset)$  een georiënteerde Eulergraaf van type 0.

Nog een voorbeeld.



type 1.

We introduceren nu de lijngraaf  $L(G, \Delta)$  van een georiënteerde graaf:

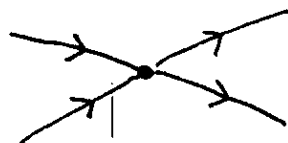
$L(G, \Delta) = (G_1, \Delta_1)$  waarin

$G_1 = G$  en  $\Delta_1$  bestaat uit alle lijnenparen die in kop-staart verbinding aan elkaar zitten.

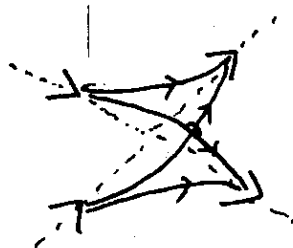
Formeel:  $\Delta_1 = \{((P, Q), (R, S)) \in \Delta \times \Delta \mid Q = R\}$ .

Nog populairder: De pijltjes zijn nu de punten en de knopen fungeren als verbindingen tussen de lijnen!

het stukje

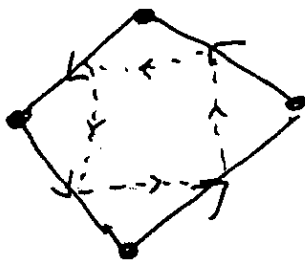


gaat in de lijnen graaf over in:



(getippeld: oude graaf)

Voorbeeld: met graaf en lijnen graaf = één:



lijnen graaf getippeld

Als  $(G, \Delta)$  een Eulergraaf is van type  $\sigma$ , dan is  $L(G, \Delta)$  weer een Eulergraaf van type  $\sigma$ .

◆ nogal logisch: de uitgraad bij  $v$  van een lijn in  $\Delta$  is het aantal uitgaande lijnen van de kop van  $d$ , etc.



Definitie  $P_w(G, \Delta)$  is het aantal opspannende georiënteerde wortelbomen met gegeven vaste wortel in een Euler graaf  $(G, \Delta)$

Opmerking. Het maakt niets uit waar je die wortel kiest

Definitie.  $P_E(G, \Delta)$  is het aantal Eulerkingen in een georiënteerde graaf  $(G, \Delta)$

Stelling. Zij  $(G, \Delta)$  een Eulergraaf van type  $\sigma, \sigma > 0$ .  
Dan

$$P_E(L(G, \Delta)) = P_E(G, \Delta) \frac{1}{\sigma} (\sigma!)^{G/(\sigma-1)}$$

Stelling. Zij  $(G, \Delta)$  een Eulergraaf.

Dan

$$P_E(G, \Delta) = P_w(G, \Delta) \prod_{p \in G} (\sigma_p - 1)!$$

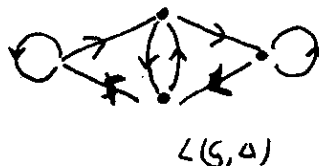
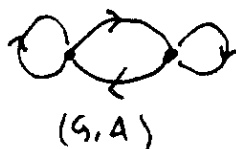
waarin  $\sigma_p = \text{ingraad bij } p (= \text{uitgraad bij } p)$ .

Voorbeeld:  $\sigma = 1$



Nu geldt  $P_E(L(G, \Delta)) = P_E(G, \Delta) = 1$   
 $L(G, \Delta) \approx (G, \Delta)$

$\sigma = 2$  (heel eenvoudig)

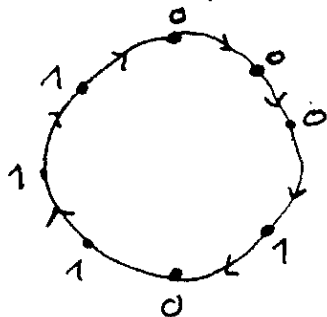


2 Eulerpaden.



Een voorbeeld van het gebruik van grafen en hun lijnigrafen ~~is~~ is het volgende.

Bekijk de volgende graaf:



Drie op een volgende punten op deze graaf zijn genummerd:  
alle punten één opschrijven  
etc.

000  
001  
010  
011  
111  
110  
100

Op deze wijze ontstaan alle drie-letter woorden.

Hoe construeer je nou zo iets voor willekeurige woordlengte? Een cyclische volgorde van 0 en 1 zoals boven heet shift register sequence.

Vroeger was dit een interessant probleem voor telex, tegenwoordig gaat het allemaal heel anders.

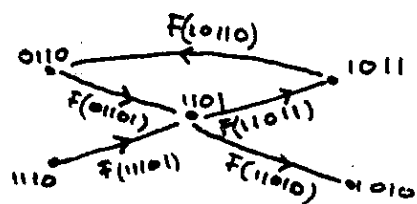
We definiëren  $(G_n, \Delta_n)$  als volgt:

$G_n$  = de verzamelingen van alle  $n-1$  letterwoorden.

$\Delta_n$  bestaat uit  $F(G_{n+1})$ :

Laat  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  een element zijn van  $G_{n+1}$ , dan is  $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in G_n \times G_n$ , en wel het element  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ .

Bijvoorbeeld, hier is een stukje van  $(G_5, \Delta_5)$



Vanuit elk punt gaan twee pijlen, de ene breidt het woord aan de kop uit met een nul, en

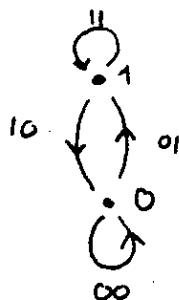
~~aan de kop~~ het andere met een een, beide kappen een letter van de staart af.

Een shift register sequence voor 5 letters is nu een Euler kring in  $G_5 \Delta_5$ .

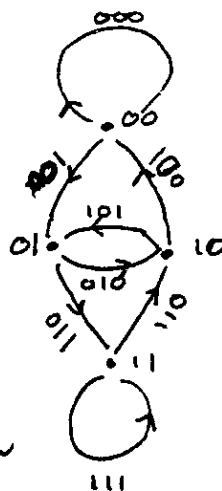
Voorbeelden:

114

$(G_2, \Delta_2)$  (keetje flauw)



staart  
verword.  
abcde  
kop van een  
woord altijd  
aan kant  
waarde pijl heen  
wijst



$(G_3, \Delta_3)$



Het circuit dat we zonet ontwierpen vinden we hier terug  
als het nieuwsgeschiedte pad.

We zien hier tevens aan: lijn graaf van  $(G_n, \Delta_n)$   
is juist  $(G_{n+1}, \Delta_{n+1})$ .

Dat  $G_{n+1}$  optevatten is als  $\Delta_n$  zagen we al,  
wanneer zijn twee ~~punten~~ nu verbonden in  $L(G_n, \Delta_n)$ ?



stukje van  $L(G_n, \Delta_n)$

punt A van  $L(G_n, \Delta_n)$  is verbonden  
met B als de kop van A staart is  
van B.

Dit wil zeggen:  $A = \varepsilon_1 a$  en  $B$  is  $a \varepsilon_2$ , met andere  
woorden, A en B zijn voorstuk (n letters) resp achterstuk  
(ook n letters) van het woord  $\varepsilon_1 a \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ ).

Aantallen in een lijstje:

woord lengte (n)	2	3	4	5	6
# punten op de cirkel = # woorden	4	8	16	32	64
# pten in de graaf	2	4	8	16	32
# Eulerkringen	1	2	16	2048	6710864
$\log_2$ # Eulerkringen	0	1	4	11	26

Grooten 1945 ontdekte een ingenieur die hieraan aan het rekenen was dit tabelletje, en bij de stippellijn aangekomen concludeerde hij dat op de onderste rij  $2^{n-1} - n$  stond. Ik heb de laatste kolom nog berekend.

Daarna ontdekte ik dat een Fransman, Flye St Marie in 1894 dit zelfde ook al had gedaan, en als je weet hoe  $\ell$  moet is diens artikel best wel te begrijpen.

De formule is duidelijk: op grond van ons algemeen resultaat wordt bij elke overgang van  $(G, \Delta)$  op  $(G', \Delta')$ , d.w.z. van  $(G_n, \Delta_n)$  ~~gekomen~~ op  $(G_{n+1}, \Delta_{n+1})$  het aantal Eulerkringen vermenigvuldigd met

$$\frac{1}{\sigma} \binom{|G_n| - 1}{\sigma - 1} \quad \text{d.w.z. , aangezien } \sigma \text{ gelijk is aan } 2, \text{ met}$$

$\frac{|G_n| - 1}{2}$ , dat wil zeggen, de  $\log_2$  wordt vermeerderd met

$|G_n| - 1$ , d.w.z. met  $2^{n-1} - 1$   
( $G_n$  bestaat uit woorden ter lengte  $n-1$ , daar zijn er  $2^{n-1}$  van.)

① K. Posthumus. ② Zie TH-Report 75-06 wsk, met een literatuur overzicht.

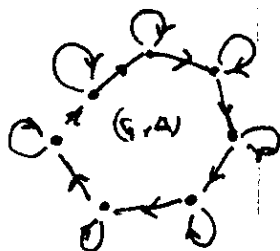


We gaan nu de stelling bewijzen voor het geval  $\sigma = 2$

Voor algemenere bewijzen, zie commentaar bij het eind van de stelling.

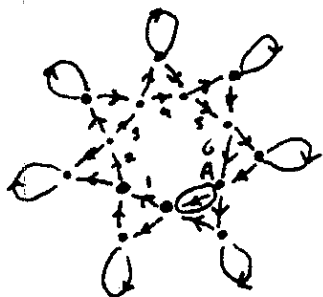
◆ Eerst een eenvoudig geval:

De Eulergraaf  $G$  is een cykel met prikken:



Voor het Eulercircuit geldt: elk pad dat knoop  $x$  passeert, passeert meteen ook de bijbehorende lus.  
Er is één Eulercircuit.

De lijngraaf van deze graaf ziet er zo uit



Een Eulercircuit kan bij elke knoop "over de punt - met bijbehorende lus" passeren of niet: binnendoor. Als we bij het omcirkelde lijntje beginnen zijn we na  $n-1$  stappen weer terug bij A. (in dit geval  $n=7$ ).

Elk van die stappen heeft een keuze uit 2. Na eenmaal rond is er niets meer te kiezen. Alle paden die de eerste keer niet bewandeld zijn, worden de tweede keer genomen.

Er zijn dus

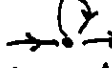
$$2^{n-1}$$

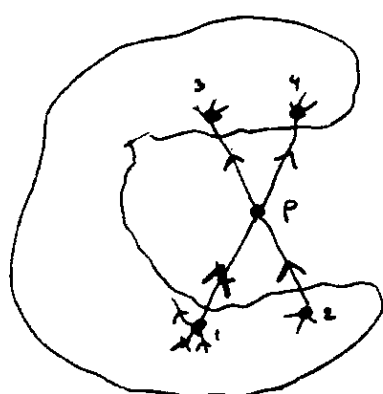
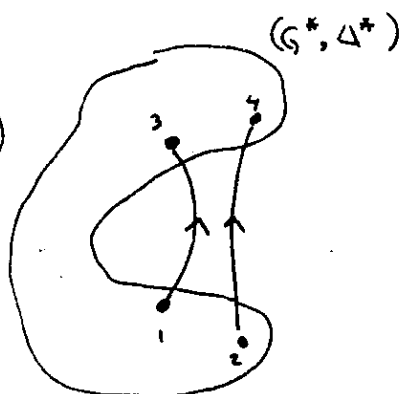
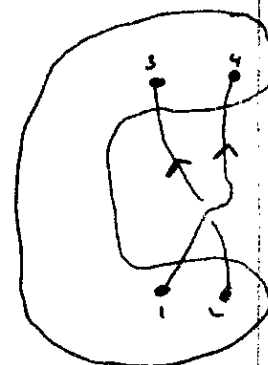
Eulerpaden in  $L(G, A)$ :

een bijzonder geval van de algemene formule die we willen bewijzen.



We gaan nu het algemene geval bekijken.

- ◆ Neem aan dat er een punt in  $G$  is dat er niet zo uitziet . Als dat niet het geval is, dan zijn we in het reeds besproken geval. Anders kiezen we een punt zonder lus ◆◆

 $(G, \Delta)$  $(G^*, \Delta^*)$  $(G^*, \Delta^{**})$ 

we tekenen alleen maar  $p$ ,  
de rest van  $G$  zit in het  
"monster"

we laten  $G \setminus \{p\}$   
het zelfde, maar in de  
beke veranderen we  
wat

Als je dit formeel doet, ben je een hele tijd bezig, maar zo  
snap je 't ook wel.

$$\text{Bewering: } P_E(L(G, \Delta)) = 2 P_E(L(G^*, \Delta^*)) + 2 P_E(L(G^*, \Delta^{**}))$$

Dit is precies wat we nodig hebben voor een inductie van  
onze eerste stelling op pag 112 :

$$P_E(L(G, \Delta)) = 2^{|G|-1} \cdot P_E(G, \Delta)$$

Immers  $G^*$  en  $G^{**}$  hebben een punt minder,  
en  $P_E(G, \Delta) = P_E(G^*, \Delta^*) + P_E(G^*, \Delta^{**})$ .

Volgens inductie geldt dan

$$P_E(L(G, \Delta)) = 2 \cdot 2^{|G^*|-1} + 2 \cdot 2^{|G^*|-1} = 2^{|G^*|+1}$$

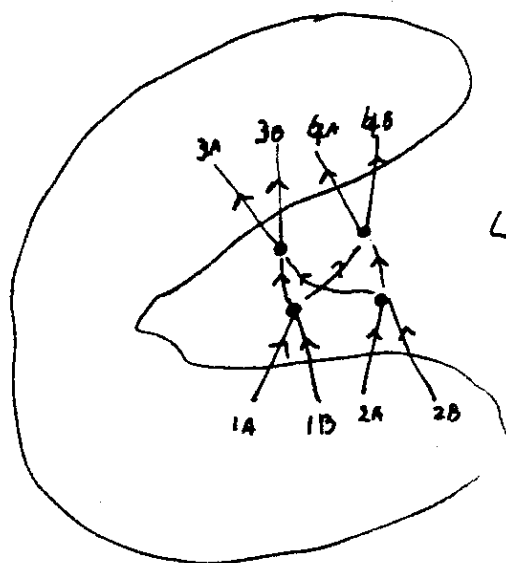
$$P_E(L(G, \Delta)) = 2 \cdot 2^{|G^*|-1} P_E(G^*, \Delta^*) + 2 \cdot 2^{|G^*|-1} P_E(G^*, \Delta^{**}) = 2^{|G^*|+1} P_E(G^*, \Delta) = 2^{|G|-1} P_E(G, \Delta)$$

Nu gaan we de lijngraaf maken bij deze graaf.

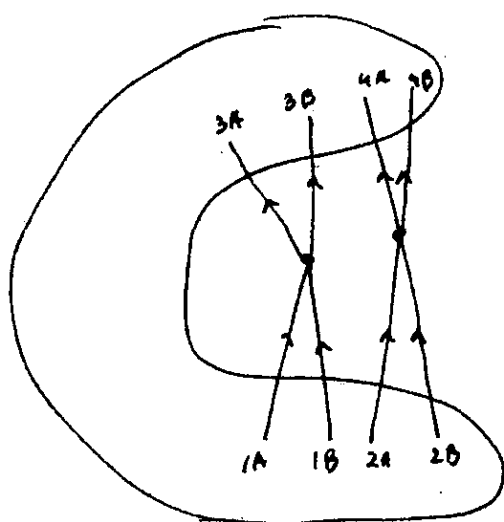
Daarvoor moeten we even de ogen uitwrijven, maar een  
loop verdwijnt in het monster, en daar interessen  
we ons niet voor.

De lineaire graaf van  $(G, \Delta)$  wordt

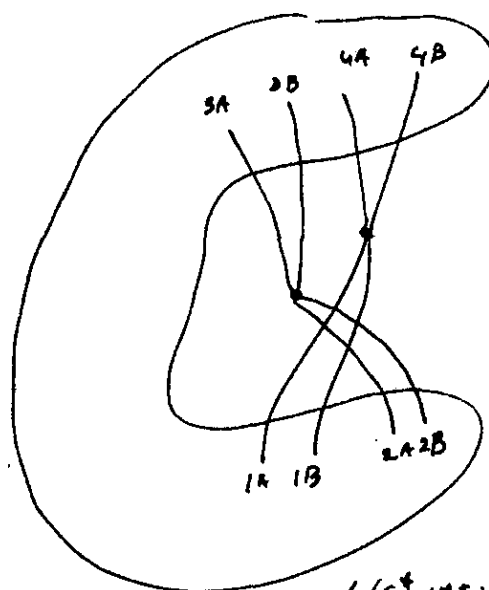
(A en B : dit printje slaan op de  
van 1, 2, 3, 4 uitgaande of  
inkomende pijlen)



$L(G, \Delta)$



$L(G^*, \Delta^*)$



$L(G^*, \Delta^{**})$

We gaan nu bij gegeven interne verbindingen  
(in de ingewanden van het monster) na hoeveel Eulerpaden er zijn  
in  $L(G, \Delta)$ ,  $L(G^*, \Delta^*)$  en  $L(G^*, \Delta^{**})$ .

Er zijn twee soorten verbindingen

1A 1B 2A 2B

2A 1B 2A 2B

3A 3B 4A 4B

3A 4A 4B 3B

geval 1

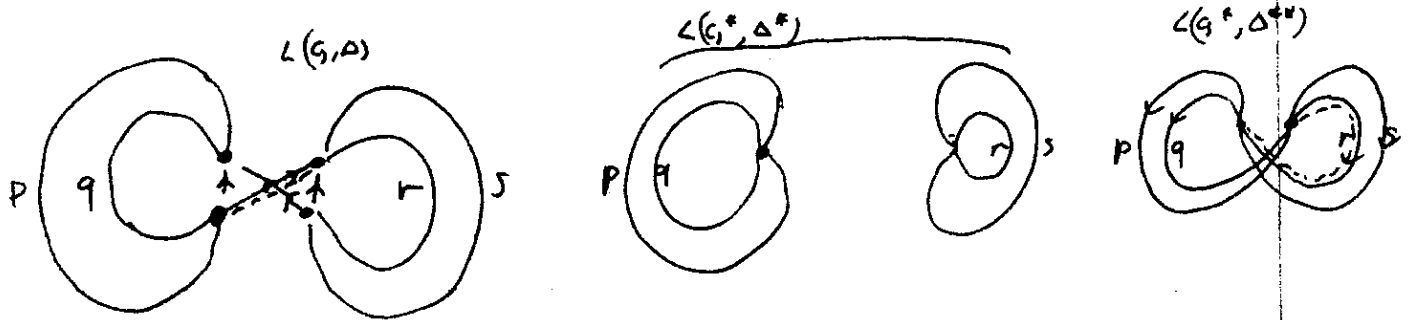
geval 2

(twee groepen gescheiden)

(twee groepen overlappend)

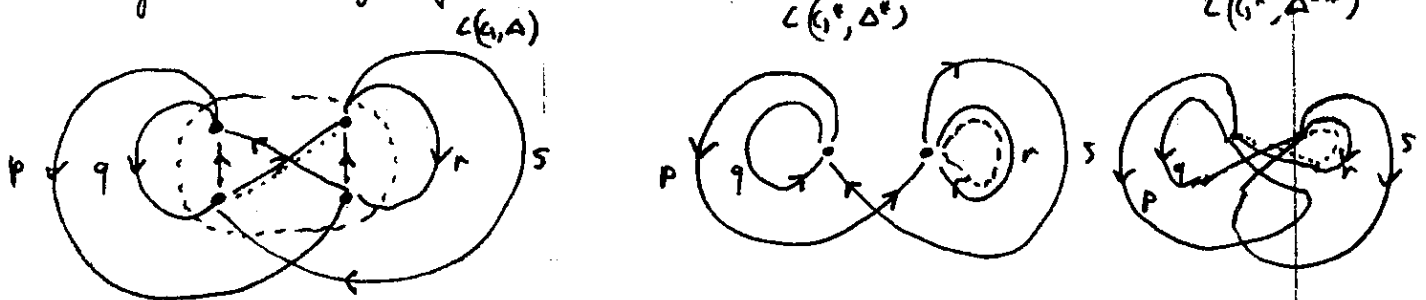
Gescheiden groepen:

119



Als we beginnen met het gestippelde lijntje ~~door~~ in  $L(G, \Delta)$  doorlopen: we eerst  $r$ , dan  $s$  of andersom (eerst  $r, s$  samen want als je links bent kan je niet meer terug tenzij over het afgebakende stippellijntje). Links lees uit eerst  $p$  dan  $q$  of andersom. Drie 4 mogelijkheden voor  $L(G, \Delta)$ . In  $L(G^*, \Delta^*)$  geen mogelijkheden, en bij  $L(G^*, \Delta^{**})$  2:  $rqs p$  of  $rps q$ .

Gevlochten groepen:



mogelijkheden

4 mogelijkheden

- $\left\{ \begin{array}{l} r s p q \\ r q p s \\ r p s q \\ s p r q \end{array} \right.$

1 mogelijkheid:

$r s q p$

1 mogelijkheid

$r p q s$

eigenlijk hetzelfde soort figuur:



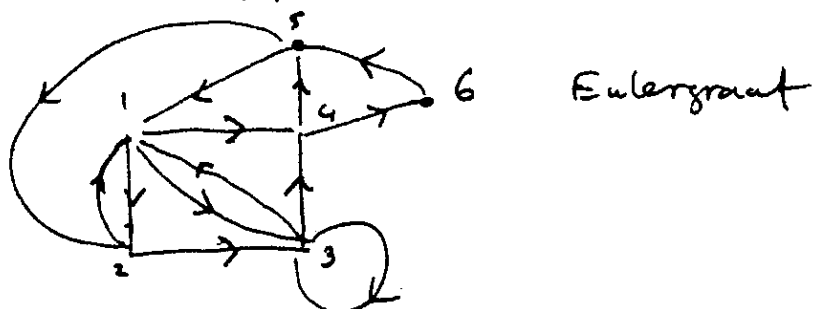
In elke geval zien we dat 4 Eulerkingen in  $L(G, \Delta)$  corresponderen met 2 Eulerkingen in  $L(G^*, \Delta^*)$  en  $L(G^*, \Delta^{**})$  samen.

♦ Zie voor het algemene geval:

T. van Ardennen - Ehrenfest en N.G. de Bruijn, Circuits and trees in

♦ oriented linear graphs, Simon Stevin (c951)

Voorbeeld opspannende bomen.



We geven één van de punten nummer 1, een uitgang is  $(1, 2)$ . Neem een Eulerkring die met deze uitgang begint, bijv

1 2 3 3 4 5 1 4 6 5 2 1 3 1

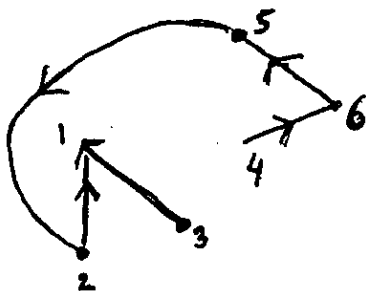
Nummer de secties van deze Eulerkring.

Neem nu bij elk punt  $\neq 1$  de laatste uitgang.

Bewering: deze vormen tezamen een boom.

- 1) Het aantal punten is één <sup>meer</sup> minder dan het aantal lijnen.
- 2) De uitgaande lijn van elke knoop heeft een hoger nummer dan de inkomende lijnen, dus geen lussen.

In dit geval:



Dit voorbeeld illustreert het bewijs van de tweede stelling op pag 112, dat we nu gaan behandelen.

Stelling. Laat  $(G, \Delta)$  een Eulergraaf zijn, met een eindig aantal punten [dat wil zeggen dat  $(G, \Delta)$  een georiënteerde graaf is, met voor elke  $P \in G$  :  $\text{ingraad}(P) = \text{uitgraad}(P)$ ].  
Laat  $G = \{P_1, \dots, P_n\}$ , waar  $n = |G|$ . Laat  $\sigma_i := \text{ingraad}(P_i)$  voor  $i = 1, \dots, n$ .

Dan geldt

$$P_E(G, \Delta) = P_w(G, \Delta, P_1) \prod_{i=1}^n (\sigma_i - 1)!$$

waar  $P_w(G, \Delta, P_1)$  het aantal bomen met wortel  $P_1$  en georiënteerd op  $P_1$  is

Bewijs. Elke gegeven boom met wortel  $P_1$  en georiënteerd op  $P_1$  komt bij precies  $\prod (\sigma_i - 1)!$  Eulerkringen als laatste-uitgangen boom voor de dag.

- ◆ De laatste-uitgangen-boom wordt als volgt geconstrueerd:  
bij een Eulerkring: kleur (1,2) rood.  
Bij elk punt kleur je de laatste uitgang blauw.  
Zo ontstaat een blauwe boom. Elk punt (behalve 1) heeft dan een uitgang

die een later rangnummer in het Eulercircuit heeft, dus er zijn geen leringen en precies

- ◆ één punt maar als lijnen, dus zo ontstaat een boom.  
Vice versa, laat een opspannende boom voor  $(G, \Delta)$  gegeven zijn. Kleur de takken blauw. Elk punt heeft dan een uitgaande blauwe lijn, behalve 1. Geef 1 ook een gekleurde uitgaande lijn (zeg (1,2)).

Bij elk punt geven we nu een volgorde van uitgaande lijnen, zodanig dat de gekleurde lijn de laatste is.  
Dat leun op  $\prod (\sigma_i - 1)!$  manieren.

Ga nu maar lopen (ik zeg het maar plat) over de rode lijn en kies telkens bij elk eindpunt de volgende in de lokale volgorde, kun je dat een rode is. De gekleurde pijl komt dan altijd het laatste.

Is het resultaat een Eulerkring?

Onderstel dat je nog ergens een onbelopen pad hebt als je stopt in 1, laten we zeggen een uitgang in  $Q$  is ongebruikt, met  $Q \neq P_1$ . Dan is de blauwe uitgang in  $Q$  ongebruikt.

Volg nu het blauwe spoor vanuit  $Q$  terug:

De uitgang in  $Q = Q_0$  leidt namelijk naar, zeg,  $Q_1$ .

In  $Q_1$  is een blauwe ingang ongebruikt, er is dus ook een uitgang, dus een blauwe uitgang ongebruikt, deze leidt naar  $Q_2$ , etc. Dit proces eindigt bij  $P_1$ . Daar vinden we een tegenspraak: een blauwe ingang van  $P_1$  is ongebruikt, dus de uitgangen van  $P_1$  zijn nog niet allemaal op.

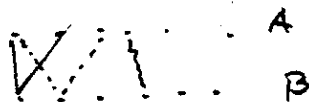
Dit bewijs is beter te begrijpen, als de blauwe subgraaf geen boom is, maar iets met een kring: dan zie je dat je

- a) meer dan één blauwe uitgang hebt
- of b) blauwe lijnen van een "losse" kring ongebruikt laat.

We gaan nu een heel andere zaak bekijken, namelijk Bipartitie-grafen (Bipartite graphs).

Een bipartitiegraaf is een graaf waarvan de puntenverzameling in twee delen is gepartitioneerd,  $A$  en  $B$ , en de verbindingen lopen alleen van  $A$  naar  $B$ :

$(G, \Gamma)$  heet een bipartite graaf als  $G = A \cup B$  met  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$  en  $\Gamma \subset \{ \{a, b\} \in E(G) \mid a \in A, b \in B \}$ .



problemen kunnen soms verschillend lijken, alleen maar omdat A en B in verschillende rollen optreden.

Met een bipartite graaf associëren we een matrix:

A = verzameling rij indices

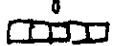
B = .. .. kolom indices

$(a, b) \in T \Leftrightarrow$  (element in rij a en kolom b is 1)

$(a, b) \notin T \Leftrightarrow$  ( .. .. .. .. .. is 0)

Een probleem dat als bipartite-graaf probleem is te interpreteren is het bekende pentomino-spel.

Een pentomino is een samenhangend geheel van 5 vierkantjes. Er zijn 12 van die pentomino's (spiegelingen en rotaties toegestaan):



"I" balk



"L" etc.



"W"

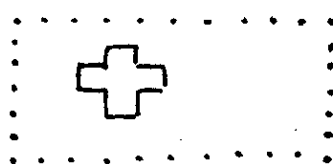
Tesamen 60 vierkantjes.

De opgave is nu deze 12 stukjes te gebruiken om een doosje van  $6 \times 10$  vierkantjes precies te vullen.

We maken hiervan een bipartitie probleem:

A = verzameling der 60 vierkantjes.

B = verzameling van alle deelverz. van A die de vorm van een pentomino stukje hebben



hier is een element van B, maar er zijn nog  $8 \times 4 = 32$  "kenissen".

In ieder punt van B tekenen we 5 lijnen naar punten van A, namelijk naar de punten van A die "bedekt" worden door het element van B.





Het probleem is nu een aantal elementen van  $B$  te kiezen zodat

- 1) alle bijbehorende stukjes verschillend zijn en
- 2) tezamen  $A$  precies bedekt wordt

Voorwaarde 1) kunnen we ook in het graaf-probleem inbedden met een trucje: we breiden  $A$  uit met een "magazijn" van 12 elementen, getiteld "balk", "w", "L", "kruis", etc.

Bij elk element van  $B$  doen we er nog één lijn bij, namelijk naar het magazijnelement met de corresponderende naam. Op deze wijze kunnen we het algemene bedekkingsprobleem als een bipartite-graaf probleem formuleren:

Gegeven een bipartite-graaf  $(G, P, A, B)$ , te vinden een  $B' \subset B$  zodanig dat

$$\{ \{a \in A \mid (a, b) \in P\} \mid b \in B' \}$$

een partitie van  $A$  vormt.

Duale ~~formulerings~~ probleem.

Gegeven een verzameling  $T$ , met deelverzamelingen  $T_1, \dots, T_n$ , te vinden  $t_1, \dots, t_\ell$  zodanig dat voor alle  $i, 1 \leq i \leq n$ , er precies één  $j$  is ( $1 \leq j \leq \ell$ ) met  $t_j \in T_i$ .

Dit probleem doet zich voor wanneer diverse groepen vertegenwoordigd moeten worden, evt met nevencondities.

(Bijvoorbeeld: in de onderafdelingsraad moeten zijn vertegenwoordigd groepen zoals: stochastici, studenten, medewerkers, feministen etc., maar elke vertegenwoordiger mag maar één pet op hebben - of dat hoeft juist niet, maar elke groep nog maar door één persoon te zijn vertegenwoordigd).

◀ NB De  $T$  bestaat hier uit petten en  $1, \dots, n$  zijn de leden van de onderafdeling, als er maar één persoon mag vertegenwoordigen per groep ▶

Voorbeeld:  $T =$  pak speelkaarten

$|T| = 52$  (minimale als 't niet te vaak gebruikt is)

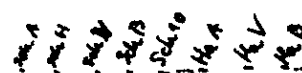
$T_1$  bestaat uit alle boeren

$T_2$  .. .. . schoppen

$T_3$  .. .. . rode zessen

$T_4$  .. .. . ruiten  $< 8$

$T_5$  " .. . klaver aas.

$B = T$ :  ..

.B .S .RoG .RuG .Kla

$A = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$

Gevraagd wordt nu een aantal kaarten in  $B$  aan te geven zodanig dat iedere  $T_i$  een kaart bevat.

Hier is een oplossing:  $\{\text{Sch B, Kla A, Rui 6}\}$

Hier is nog een oplossing:

$\{\text{Kla B, Sch 2, Rui 4, Har 6, Kla A}\}$ .

Waar zit het anale hier nu in?

Niet in het probleem in de bipartitie-graaf formulering, maar in de relatie van het probleem met de graaf-formulering:

In het overdekkings probleem wordt een lijn van  $a$  naar  $b$  getrokken als  $a \in b$ , ( $B \subset \mathcal{P}(A)$ )  
in het representanten probleem als  $b \in a$  ( $A \subset \mathcal{P}(B)$ )

- ◆ Je kan 't ook zo opvatten: Als  $B \subset \mathcal{P}(A)$ , dan spreek je van overdekkingsprobleem als  $A$  gepartitioneerd moet worden, en van representanten probleem als  $B$  gepartitioneerd moet worden.

◆

We komen nu aan de klassieke Theorie van König en Hall, ontwikkeld in 1932-1936 door hen en anderen

P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10 (1935) p. 26-30

D. König, Über Graphen und ihre Anwendungen, Math. Annalen 77 (1916)

Het klassieke resultaat van König en Hall betreft het commissieprobleem met de restrictie dat geen "commissie"-lid meer dan een pet op mag hebben.

(De Schoppen boer en de Ruiten 6 in ons voorbeeld zo even hadden elk 2 petten op, maar in het tweede voorbeeld had elke kaart één pet op).

In termen van afbeeldingen geformuleerd: gevraagd een afbeelding  $A \rightarrow B$ , namelijk

een injectie  $f: A \rightarrow B$ , zodanig dat  $\forall a \in A [(a, f(a)) \in \Gamma]$ .

Voorbeeld:  $B$  is verzameling voetballers van een bepaalde vereniging  
 $A$  is verzameling 11 functies  
 (niet wat wij functies noemen!):

$A = \{ \text{keeper, links back, etc t/m rechtsbuiten} \}$

N.B. Deze termen zijn wat ouderwets, maar hebben het voordeel dat ik ze goed ken.

Nu kan met elke voetballer rechts spelen, bijvoorbeeld omdat zijn linkerbeen aan de verkeerde kant zit, of zo, anderen kunnen met keeper. We geven nu in  $A \cup B$  de toegestane verbindingen aan.

In de commissie-terminologie: voetballers zijn lid van één of meer clubs (de keeper-club, linksback club etc)

◆ In de overdekkings terminologie: elke voetballer heeft een bepaalde capaciteiten-verzameling;

als je de club van een bepaalde functie  $a$   $C_a$  noemt en de capaciteiten verzameling van een voetballer  $b$   $C'_b$

dan kan je  $(a, f(a)) \in \Gamma$  vertalen met

$$a \in C'_b \text{ en met } f(a) \in C_a$$



Het is duidelijk dat je niet zonder meer uit  $B$  een team kan samenstellen: als er niemand kan keeper dan gaat 't niet, maar het gaat evenmin als er voor  $\{ \text{linksback, rechtsback, linksbuiten} \}$  maar

twee kandidaten zijn, dan zal  $t$  niet lukken.

Een versie is het huwelijks probleem:

$A$  = verzameling vrouwen,  $B$  = verzameling mannen.

Sommige mannen en vrouwen vinden elkaar aardig of juist niet. Het is nu de bedoeling paren te vormen (van een man en een vrouw, je weet, typisch een onderwets probleem) waarvan de leden elkaar aardig vinden.

Zelfs als  $|A| = |B|$  en iedere man vindt wel een vrouw aardig, dan hoeft dat nog niet te gaan: als er een vrouw is, die alle mannen aardig vinden (en geen andere), dan kan het niet (tenminste vroeger niet).

Nu gaan we weer op de formele toer: het soort condities zoals boven, die een dergelijke functie onmogelijk maken, zijn ook de enige die dat doen:

Laat  $G = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  en  $\Gamma \subset \{ \{a, b\} \mid a \in A, b \in B \}$  dan zijn de volgende twee voorwaarden equivalent:

$$(I) \quad \forall_{\substack{K \in \mathcal{P}(A), \\ K \neq \emptyset}} [ |\{b \in B \mid \exists_{a \in K} \{a, b\} \in \Gamma\}| \geq |K| ]$$

$$(II) \quad \exists f: A \rightarrow B [ f \text{ injectief} \wedge \forall_{a \in A} [\{a, fa\} \in \Gamma] ]$$

Bewijs Inleiding. Het is triviaal dat  $II \Rightarrow I$ .

Om te bewijzen  $(I) \Rightarrow (II)$  produceren we een algoritme dat ofwel een  $K$  levert die een tegenbeeld levert voor  $I$  ofwel een  $f$  die aan  $(II)$  voldoet (we bewijzen dus  $\neg(I) \vee (II)$ ).

Het bewijs verloopt ruwweg als volgt: probeer maar wat, als je vast loopt, ga dan uitwisselen; is dat niet kan, heb je je  $(I)$ -tegenbeeld gevonden.

Neem aan, er zijn er  $k$  geplaatst, van die voetballers, probeer voor de  $k+1$ -ste functie iemand te vinden

- ◆ Laat  $k < |A|$  en veronderstel er is een injectie  $f: A' \rightarrow B$ , met  $|A'| \neq k$ , en  $\forall a \in A', f(a) \in \Gamma$ .

$$A' = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

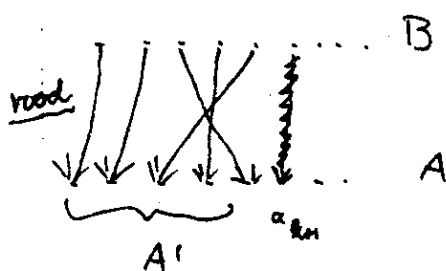
Kies een element  $a_{k+1} \in A \setminus A'$



De verbindingen  $\{a, f(a)\}$  kleuren we rood (omlaag) verder kleuren we alle verbindingen  $\{a, b\}$  met  $a \in A' \cup \{a_{k+1}\}$  blauw (omhoog). We noemen de punten van uit  $a_{k+1}$

bereikbaar als je er kunt komen door omhoog via de graaf (~~omlaag~~) en omlaag door lijnen die rood zijn.

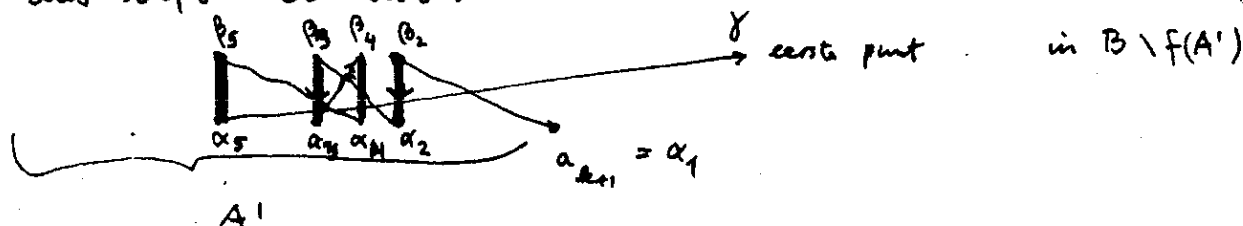
$a_{k+1}$  is ook bereikbaar van uit  $a_{k+1}$ .



Geval I. Het aantal bereikbare punten van B is <sup>of gelijk</sup> groter dan het aantal bereikbare punten van A.

Geval II idem kleiner.

In het eerste geval nemen we een pad langs de van uit  $a_{k+1}$  bereikbare punten. Afwisselend bevat dit pad een punt uit A en een punt uit B. Er zijn niet alleen punten uit  $f(A') \cup A \cup \{a_{k+1}\}$  in dit pad, want voor elk punt in  $f(A')$  is er een punt in  $A'$ , via een rode lijn te bereiken, ~~omdat~~ het pad niet er dus bijv. zo uit:



We veranderen nu  $f$  door de beelden van

$\alpha_1, \dots, \alpha_5$  cyclisch te verwisselen:

$\alpha_i \rightarrow$  opvolger van  $\alpha_i$  in het pad

$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5$   
 $\beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \gamma$

en we hebben "de" injectie weer een stapje verder gedrukt.

Geval II : Neem  $K$  gelijk aan de vanuit  $a_{k+1}$  bereikbare punten van  $A$ , dan is kennelijk

$$|\{b \in B \mid \exists a \in K [\{a, b\} \in \Gamma]\}| < |K|$$

en we hebben ons tegenvoorbeeld gevonden

Dit is een mooi algoritme. & Werkt ook in de praktijk, want als 't niet werkt krijg je ook een antwoord waarom niet. Klanten zijn niet tevreden met een antwoord: de computer komt er niet uit, dus 't zal wel niet kunnen.

Iets algemener is de stelling van König en Egerváry

♦ (zie E. Egerváry, On combinatorial properties of matrices, translated by H.W. Kohn, ONR Logistics Proj. Rep., Dept. of Math., Princeton U.)

♦ Inleiding.

~~Stelling~~. Laat  $A$  en  $B$  twee verzamelingen zijn en  $m$  een  $|A| \times |B|$  matrix (d.w.z. laat  $V$  een karakteristieke functie zijn op  $A \times B$ )

We zeggen dan dat  $m$  een  $q$ -diagonaal heeft, dan en slechts dan als er in  $m$  een diagonaal met  $\overset{q}{\text{één}}$  verschijnt na geschikte verwisseling van rijen en kolommen.

♦ wanneer er  $A' \subset A$  en  $B' \subset B$  zijn en een bijectie  $f: A' \rightarrow B'$  met

♦  $\forall a \in A' [(a, f(a)) \in V]$  en  $|A'| \geq q$ .

Als bij geschikte verwisseling van rijen en kolommen een blok van nullen van  $k \times l$  in  $m$  verschijnt, dan heet dit een  $q$ -blok voor elke  $q > |A| + |B| - k - l$ .

Grote blokken van nullen (met kleine  $q$ ,  $q$  is het "defect" van het blok) hinderen de vorming van een  $q$ -diagonaal.

25<sup>ste</sup> les, maandag 30 november 1981, 3<sup>e</sup> uur. 130

Een speciaal geval van de stelling van König en Hall is dat alle punten dezelfde graad hebben ( $> 0$ ).  
(endat dus  $|A| = |B|$ )

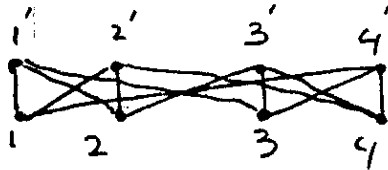
Evident is dan aan de conditie voldaan:

Vanuit elk punt gaan  $g$  punten weg ( $g =$  graad in elk punt) dus in totaal  $k \cdot g$  lijnen vanuit een deelverzameling  $A'$  met  $|A'| = k$ , deze kunnen niet uitmonden in minder dan  $k$  punten van  $B$ .

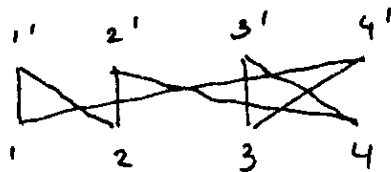
Conclusie er is een bijectie van  $A$  naar  $B$  die alleen lijnen van de graaf gebruikt.

De volgende conclusie is dat de graaf superpositie van bijectiegrafen is.

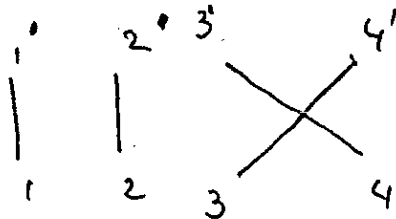
Voorbeeld:



laat de deelgraaf komende bij de bijectie  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  weg, je houdt dan over



laat nog eens een bijectie weg, bijv.  $\begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}$   
er blijft dan over



het geen de bijectie gaat van  $\begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{matrix}$

◀ Als  $A$  en  $B$  deelverzamelingen  $A'$  en  $B'$  hebben zodanig dat  $(A' \times B') \cap V = \emptyset$  dan is  $A' \times B'$  een  $q$ -blok voor elke  $q > |A| - |A'| + |B| - |B'|$ .

Bij gegeven  $A, B$  en  $V$  is er een grootste  $q$  waarvoor er een  $q$ -diagonaal is en een kleinste  $q$  waarvoor er een  $q$ -blok is.



Stelling. Bij elke  $q$  is er of een  $q$ -diagonaal of een  $q$ -blok (König-Egervary)

Voor  $q=1$  betekent dit: er is een 1-diagonaal (een matrixelt  $\neq 0$ ) of een 1-blok (een  $A'$  en een  $B'$  met  $|A| - |A'| + |B| - |B'| = 0$  dus een  $A \times B$  blok van nullen dus  $V = \emptyset$ ).

Als  $|A| \leq |B|$  en  $|q| = A$  dan komt er: er is een injectie  $f: A \rightarrow B$  (een  $q$ -diagonaal) of er is een blok van  $k \times l$  nullen in de matrix met  $k+l > |B|$ , oftewel  $k > |B| - l$ .

Dit is een toepassing van de stelling van König en Hall:

Een deelverzameling  $K$  waarvoor de "verbondenen" in  $B$  te weinig elementen tellen betekent (met notatie  $|K| = k$ )

dat voor de verzameling  $L$  van "onverbondenen" in  $B$  geldt  $l = |L| \leq |B| - |VK|$ , met  $VK =$  de verbondenen verzameling.  $|VK| \leq k$  dus  $|L| > |B| - k$  oftewel  $l + k > |B|$ .

Met andere woorden, zo'n "onderverbonden" collectie in  $A$  correspondeert 1-1 met een  $q$ -blok.

We kunnen nu wel inzien dat het vorige bewijs (König-Hall) hier ook werkt.



Mooier geformuleerd:  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \dots \cup \Gamma_g$ .

met  $(A \cup B, \Gamma_i)$  allemaal bipartiete grafen van graad 1.

Een andere toepassing is: Laat  $G$  een eindige groep zijn en  $H$  een ondergroep;  $k := \frac{|G|}{|H|}$ , de index van  $H$ .  
Voor elk element van  $G$  verbinden we  $xH$  met  $Hx$ :  
 $A =$  verz. linker nevenklassen en  $B =$  verz. rechter nevenklassen.

Een analoge stelling voor multigrafen (gezamenlijke multipliciteit van de verbondenen moet niet minder zijn dan de gezamenlijke multipliciteit van oorspr. verzameling) constant eert ook een bijectie-langs-de-graaf: gemeenschappelijk representanten systeem voor linker en rechter nevenklassen.

Voor dit feit waren algebraïsche bewijzen bekend (lang voordat Vander Waerden opmerkte dat dit eigenlijk een combinatorische aangelegenheid was).

• B.L. Vander Waerden, Ein Satz über Klasseneinteilungen von Endlichen Mengen, Hamb. Abh. 2 (1927) 185-187

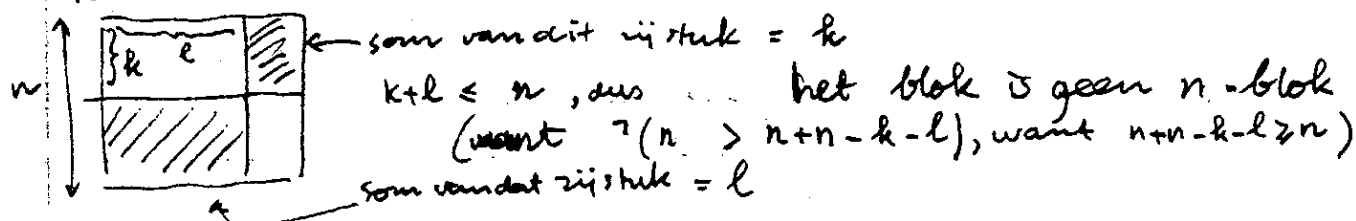
Andere toepassing: dubbelstochastische matrices  
Een matrix noemen we dubbelstochastisch als voor de coëfficiënten  $a_{ij}$  geldt

$$\sum_i a_{ij} = 1 \quad \text{en} \quad \sum_j a_{ij} = 1 \quad \text{en} \quad \forall_{ij} (a_{ij} \geq 0)$$

Stelling: de permanent van een dubbelstochastische matrix  $> 0$ .

(Oppenblakking gesproken: permanent is determinant zonder min-tekens)

Bew. Veronderstel er zit een  $k \times l$  blok nullen in



Conclusie: er is een  $n$ -diagonaal, dus de permutatie bevat een term  $\neq 0$ .

### Toepassing - Latijnse vierkanten.

Een latijns vierkant is een  $n \times n$  vierkant gevuld met  $n$  elementen, op elke kolom en elke rij elk element (getal bijv) precies 1x.

			voorbeeld
1	2	3	$n=3$
1	2	3	
2	3	1	
3	1	2	

Als we een  $7 \times 7$  latijns vierkant construeren kunnen we makkelijk genoeg beginnen:

7	3	2	5	6	1	4
4	1	3	6	5	7	2
5	2	4	1	7	6	3

Je kan 't ook altijd voortzetten:  
Maak een bipartitie graaf:

getallen } en verbind plaatsnr's met nog  
 plaatsnr } beschikbare getallen.

vanuit elk plaatsnr zijn er nog  $7-3 (=4)$  getallen beschikbaar, anderzijds komt elk getal al 3 maal voor (in 3 kolommen) en dus zijn er ook vier plaatsen:

Bovenstaande laat zien dat je nu deze graaf kunt splitsen als een vereniging van 4 bijectie grafen: de vier extra rijen,

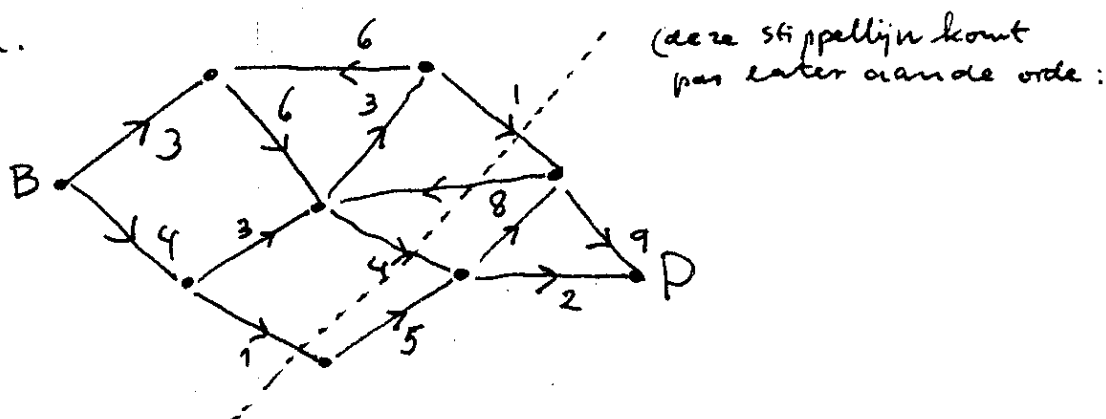
We komen nu aan de stelling van Ford-Fulkerson (1952)

♦ L.R. Ford and D.R. Fulkerson, Flows in networks, Princeton Un. Press, Princeton, 1962 ♦

Dit betreft een stroomingsprobleem in een gerichte graaf  $(G, A)$ .

Laat  $(G, A)$  een <sup>georiënteerde</sup> graaf zijn,  $B$  (de Bron) en  $P$  (de Put) twee punten in  $G$ , en laat  $v: A \rightarrow \mathbb{R}^+$  een functie zijn. In plaats van  $v(l)$  schrijven we  $v_l$ .

Voorbeeld.



$v_l$  is de capaciteit van de lijn.

Gevraagd wordt nu een functie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^+$  met de eigenschappen:

$$\forall l \quad [f(l) \leq v_l]$$

$$\forall x \in G \setminus \{B, P\} \quad \left[ \sum_{l \text{ naar } x} f(l) = \sum_{l \text{ uit } x} f(l) \right]$$

$f$  is een stroom door het netwerk (als je twee richtingsverkeerswegen wilt modelleren, dan moet je er maar twee lijnen van maken, het verkeer gaat toch op gescheiden rijstroken.) De conditie betekent dat er niets wordt weggemoffeld op knooppunten, en dat er ook niets bijkomt op knooppunten.

Er geldt nu voor zo'n  $f$ :

$$\text{uitstroom}(B) + \text{uitstroom}(P) + \sum_{\substack{x \neq B \\ x \neq P}} \text{uitstroom}(x) =$$

$$\text{in stroom}(P) + \text{in stroom}(B) + \sum_{\substack{x \neq B \\ x \neq P}} \text{in stroom}(x)$$

Omdat voor de punten  $x \in G \setminus \{P, B\}$   
 totale uitstroom  $(= \sum f(e))$  gelijk is aan totale  
 instroom vinden <sup>uit x</sup> we

$$\text{uitstroom}(B) - \text{instroom}(B) = \text{instroom}(P) - \text{uitstroom}(P).$$

ofwel

$$\text{netto uitstroom}(B) = \text{netto instroom}(P).$$

We beperken ons nu tot het geval dat er geen  
 pijlen in B komen, en geen pijlen uit P, dan  
 wordt bovenstaande identiteit

$$\text{uit}(B) = \text{in}(P).$$

Dit getal noemen we totale stroom van  $f$ :  $v(f)$ .

Het probleem is nu  $v(f)$  te maximaliseren  
 over alle  $f$ .

Naar ons voorbeeld lijkende zien we dat er geen  
 stromen zijn met  $v(f) > 6$ , want door de stippellijn  
 kan maar een stroom van grootte 6.

We definiëren nu ~~ook~~ algemeen een sneede van  
 $G$ : dat is een partitie van  $G$  in twee verzamelingen  
 $S_1$  en  $S_2$  (dus  $S_1 \cup S_2 = G$  en  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ) met  
 $B \in S_1$  en  $P \in S_2$ ;  $S = \{S_1, S_2\}$

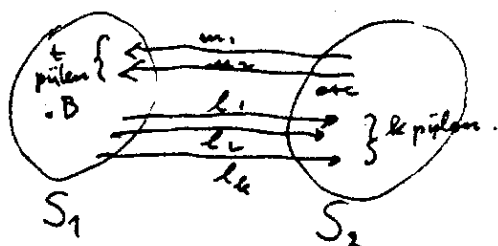
De lijnen die van een punt van  $S_1$  naar een punt  
 van  $S_2$  lopen noteren we met  $l_1, \dots, l_k$ ; de capaciteit  
 van de sneede is dan

$$c(S) := v(l_1) + v(l_2) + \dots + v(l_k)$$

Het is duidelijk dat geldt:

$$\bigvee_{f: \text{stroom}} \bigvee_{S: \text{sneede}} [v(f) \leq c(S)].$$

Kijk, dat zit zo: ik zal die  $S$  even tekenen



$$v(f) = f(l_1) + \dots + f(l_k) - (f(m_1) + \dots + f(m_t))$$

Sommeer de netto uitstroom in elk punt van  $S_1$ :  
 enerzijds is dit de uitstroom uit  $B$ , omdat de  
 netto stroom in alle andere punten van  $S_1$  0 is,  
 anderzijds kun je over de pijlen sommeren  
 die aan een punt van  $S_1$  vast zitten:  
 pijlen van  $S_1$  naar  $S_2$  geven dan netto bijdrage 0,  
 over blijven pijlen met maar één eind in  $S_1$ .

Hier geldt natuurlijk ook

$$v(f) \leq f(l_1) + \dots + f(l_k) \leq c(S).$$

De stelling van Ford-Fulkerson zegt nu:

Er bestaat een snede  $S$  met  $v(f) = c(S)$ , voor een  
 maximale stroom.

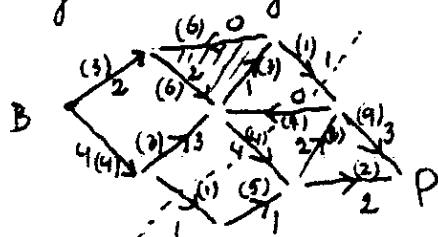
In formuletaal

$$\max_{f: \text{stroom}} v(f) = \min_{S: \text{snede}} c(S).$$

In slogan-vorm:

$$\text{max flow} = \text{min cut}$$

In het getekende zal krijgen we (capaciteiten tussen  
 knooppunten)



- merk op dat op de snede de capaciteit ten volle is benut
- merk op dat je om de maximale waarde overal nog 1 kunt optellen.

## Bewijs van de stelling van Ford-Fulkerson.

We associëren met een georiënteerde graaf  $(G, \Delta)$ , een capaciteitenfunctie  $v$  daarop en een met  $v$  compatibele stroom  $f$  een nieuwe georiënteerde graaf  $(G, \Theta)$ .

We nemen een vondigheidshalve aan dat de waarden van  $v$  en van  $f$  geheel zijn.

$$\blacklozenge (x, y) \in \Theta \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} (x, y) \in \Delta \wedge f(x, y) < v(x, y) \\ \vee \\ (y, x) \in \Delta \wedge f(y, x) > 0 \end{array} \right)$$

met andere woorden: de trajecten <sup>uit  $\Delta$</sup>  waarop  $f$  vergroot kan worden compatibel met  $v$  (afgerien van de stroomconditie) zitten in  $\Theta$  met hun eigen oriëntatie, bovendien worden alle omgekeerden van de trajecten waarop  $f$  verkleind kan worden (afgerien van de stroomconditie) ook aan  $\Theta$  toegevoegd.

Trajecten waarop  $0 < f(x, y) < v(x, y)$  zitten dus dubbel vertegenwoordigd in  $\Theta$ : een maal heen en een maal terug



Zij nu  $S_1$  de verzameling punten van  $G$  die via  $\Theta$  uit  $B$  bereikbaar zijn, en laat  $S_2 = G \setminus S_1$ .

Neem aan  $P \in S_1$ .

Dan is er een pad van  $B$  naar  $P$  geheel door  $S_1$ , in  $\Theta$ .

We verhogen  $f$  met 1 op de lijnen van het pad die met  $\Delta$  gelijkgericht zijn en we verlagen  $f$  met 1 op de lijnen van het pad die ~~aan~~  $\Delta$  juist tegengesteld zijn gericht.

De nieuwe  $f$  vervult dan de condities

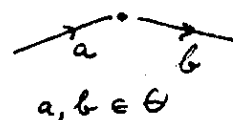
$$0 \leq f(l) \leq v(l),$$

dit volgt uit de ~~constructie~~ constructie van  $\Theta$ .

De toevoeging vervult weer de stroom conditie:

De algebraïsche toevoeging van de netto instroom bij een punt  $\neq P, \neq B$  is:

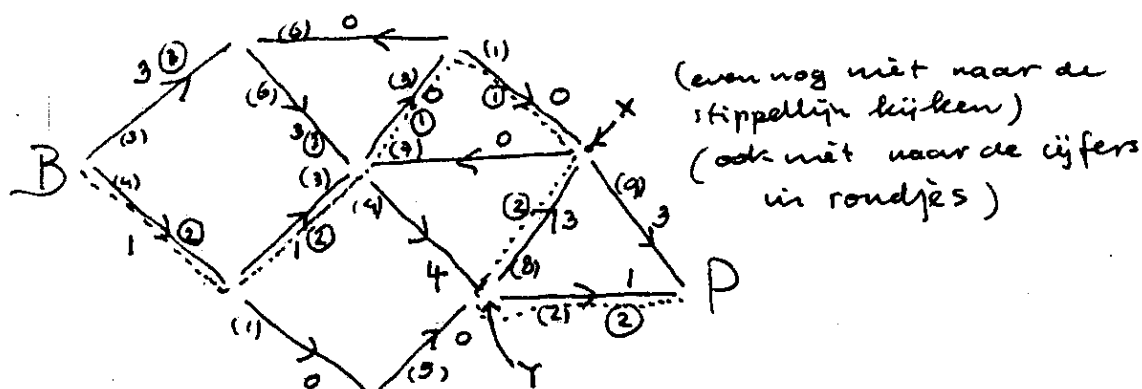
$$1 \cdot \text{comp}(a)^2 - 1 \cdot \text{comp}(b)^2 = 0,$$



( $\text{comp}(a) = 1$  als  $a$  met  $\Delta$  "meeloopt", anders  $-1$ )

omdat bij overgang van  $\Theta$  op  $\Delta$  een tekenwisseling plaats vindt, maar omdat vermeerdering of vermindering ook van  $\text{comp}(a)$  afhangt.

Voorbeeld: stel we hebben in ons oorspronkelijke diagram een stroom als volgt (tussen haakjes meer de capaciteiten):



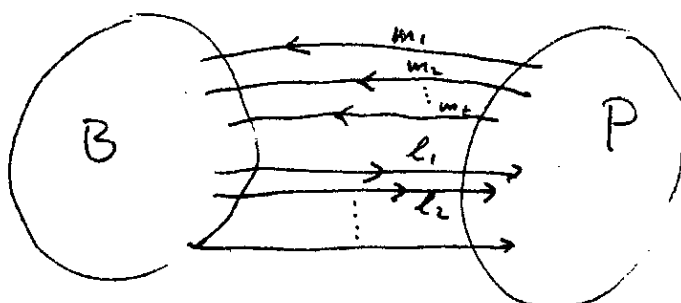
Dan is er in  $(G, \Theta)$  een pad aangegeven door de stippellijn. Over het algemeen loopt het pad met  $\Delta$  mee, maar op het stuk met capaciteit 8 er tegen in: daar kan  $f$  verlaagd worden. Het pad dat vanuit het midden in de 1-uit richting vertrekt kan niet verlaagd worden, dat segment is dus enkel vouchtig in  $\Theta$ . De lijn (3) die uit B vertrekt kan alleen verlaagd worden, die zit dus alleen tegen draads in  $\Theta$ .

De  $f$  kan vergroot worden tot de versie in rondjes.

We zien, bij X is één instroom verhoogd, maar een andere verlaagd, terwijl bij Y juist één uitstroom verhoogd is en één uitstroom verlaagd.

Zo ga je door, en omdat alles met gehele coëfficiënten is, lukt het op een gegeven stadium niet meer.

We krijgen dan <sup>①</sup> dat  $P_i \in S_2$  met andere woorden, voor de snede  $\{S_1, S_2\}$  in  $(G, \Delta)$  geldt nu



de "heen" stromen zitten niet in  $\Theta$ , dus ze zijn vol beret (kunnen alleen verkleind worden, dus komen alleen in omgekeerde vorm in  $(G, \Theta)$  voor); de "terug" stromen komen niet in omgekeerde versie in  $(G, \Theta)$  voor, dus daar kan  $f$  niet verkleind worden, met andere woorden,  $f(m_1) = f(m_2) = \dots = f(m_t) = 0$ .

Hiermee hebben we onze snede gevonden: de capaciteit van deze snede is juist de totale stroom van  $f$ .

Zo kunnen we voor elke rationale set capaciteiten ook een oplossing vinden, en dan met een compactheids argument voor reële capaciteiten

(Vere van elegant, maar zelfs als je met reële coëfficiënten de stroom telkens zo ver mogelijk verhoogt is het lastig om te bewijzen dat het proces convergeert).

① met maximale  $f$  en de bijbehorende  $S_1$  en  $S_2$



We gaan nu ter ere van Siiterklaas nog wat spelletjes doen, wiskundige 2 persoons-spelen.

(Alleen 2-persoonsspelen zijn democratisch, in meer-persoonsspelen zijn er wegens coalitie-vorming etc zelden democratische toestanden. Het knuvelijk is dus een democratisch spel: beslissingen worden altijd met meerderheid van stemmen genomen dan en slechts dan als ze unaniem worden genomen).

$(G, A)$  is weer een georiënteerde graaf, niet noodzakelijk eindig, die voldoet aan:

- (1) er zijn geen georiënteerde kringen,
- (2) elk punt heeft eindige uitgraad,
- (3)  $\forall p \in G \exists c > 0$  [elke van  $p$  uitgaande ketting heeft lengte  $< c$ ].

Voorbeeld:  $(N_0, A)$  met

$$A = \{(n+1, n) \mid n \in N_0\} \cup \{(n+2, n) \mid n \in N_0\}.$$

Een doodpunt is een punt met uitgraad 0, in ons voorbeeld 0.

Het spel wordt nu gespeeld door personen A en B (niet noodzakelijk mannen of vrouwen) en een fiche. Het fiche staat in het begin van het spel ergens op een punt van de graaf.

Een "zet" is een verduivring van de fiche langs de pijl van de graaf. Spelers doen om de beurt een zet.

Er is nog een uitkeringsfunctie  $w$ , die aan elk dood punt een reëel getal toevoegt.

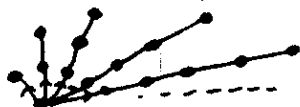
Wie niet zetten kan krijgt de uitkering (zoals dat in een modern georganiseerd sociaal bestel hoort), namelijk de  $w$  van dat dode punt.

In het bovenstaande spelletje win je als je voor je tegenstander een 3-voud kunt achterlaten. Na elke zet van je tegenstander kan je dan weer een drievoud achterlaten.

We definiëren nog de uitloop van  $P$ , <sup>(van de lengte 3)</sup> het supremum van de uit  $P$  vertrekkende paden (kan  $\infty$  zijn) (lijnherhaling mag). Dit begrip is ook gedefinieerd voor willekeurige geörienteerde grafen; we hebben het oneindigheidslemma van König:

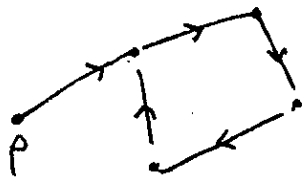
Lemma. Als elk punt eindige uitgraad heeft en  $P \in G$  heeft een oneindige uitloop, dan is er vanuit  $P$  een oneindig pad.

N.B. De eindige uitgraad conditie is natuurlijk essentieel zoals het volgende voorbeeld aantoont:



(uitloop is  $\infty$ , maar uitgraad ook; vanzelfsprekend is dit geen tegenvoorbeeld tegen de stelling, want die is waar).

Beroep lemma: De uitloop vanuit  $P$  is oneindig, dan moet ten minste een van de punten aan het andere eind van een pijl vanuit  $P$  een oneindige uitloop hebben. Dus je kan je pad bij  $P$  beginnen en telkens naar een punt met oneindige uitloop toe gaan.



punt met oneindige uitloop.

## Vervolg speltheorie met grafen.

De meeste spelletjes hebben een negatieve uitkering, <sup>(in een dood punt)</sup> en het spel bestaat er in de uitkering te maximaliseren (d.w.z. de negatieve uitkering te vermijden).

Sommige spelen kun je met een graaf simuleren.

Schaak. Hier zijn complicaties: wit mag niet met zwart spelen en vice versa.

Van elke bord-stand zijn twee representanten in de spelgraaf: een met "wit begint" ofwel "wit speelt" en een andere met "zwart speelt".

Na een "wit speelt" punt komt altijd een "zwart speelt" punt.

Er zijn nog meer complicaties bij schak: sommige zetten zijn toegestaan <sup>(wit)</sup> op grond van de prehistorie: rocheren, en passant slaan.

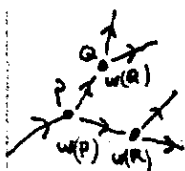
Er zijn twee soort van dode punten: waarbij de koning onder schot staat en waarbij dat niet zo is; deze hebben verschillende uitkering.

Verder zijn er nog de 40-zetten regel en de regel dat je remise mag claimen als voor de derde maal dezelfde configuratie op het bord komt. Bovendien mag elk der beide spelers op een willekeurig ogenblik opgeven.

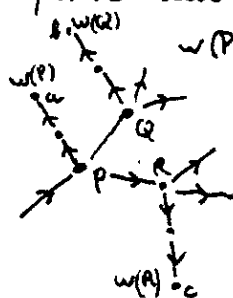
Dit correspondeert met een spelsoort waarbij aan elk punt  $P$  een  $w(P)$  is gehecht; een zet bestaat dan uit

ofwel ophouden en de  $w(P)$  incasseren ofwel doorschuiven in de graaf. Deze spelsoort kunnen we met een "gewone" spelgraaf simuleren door aan elk punt een staartje van lengte 2 vast te maken en de

$w(P)$  te hechten aan het eind van het staartje.



veranderen in



Op deze manier kunnen we schaak wel door een graaf simuleren, maar de situatie dat een der spelers remise aanbiedt en de andere speler dan met een rood hoofd opgeeft hebben we dan nog niet gesimuleerd.

Terug naar de grafen:

We splitsen  $G$  disjunct als  $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k \cup \dots$  met

$G_k =$  de verzameling punten met uitloop  $k$ .

Als de ~~graaf~~<sup>uitloop</sup> oneindig is kun je ook nog  $G_\infty$  toelaten.

Stelling. Laat  $(G, \Delta)$  een georiënteerde graaf zijn, elk punt met eindige uitloop en eindige uitgraad, en  $w: G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dan is er precies één functie  $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}$  met de eigenschap:

(1)  $\psi|_{G_0} = w$

(2) voor  $P \in G \setminus G_0$ ,  $\psi(P) = \max_{Q \in \Gamma(P)} (-\psi(Q))$ .

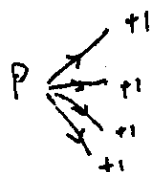
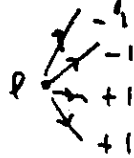
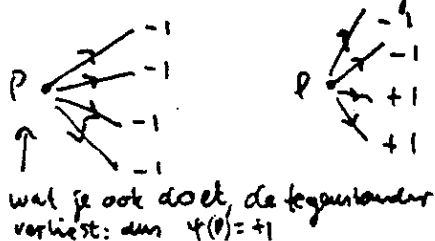
waarin  $\Gamma(P)$  de verzameling vanuit  $P$  in één zet bereikbare punten is:  $\Gamma(P) = \{Q \in G \mid (P, Q) \in \Delta\}$ .

Bewijs Evident.  $\psi$  kan recursief gedefinieerd worden:

Op  $G_0$  ligt  $\psi$  vast. Veronderstel dat  $\psi$  op  $G_0 \cup \dots \cup G_k$  vast ligt. Laat  $P \in G_{k+1}$ . Dan ligt  $\Gamma(P)$  in  $G_0 \cup \dots \cup G_k$ . Dan ligt  $\psi(P)$  vast door (2).

De spelstrategie is nu: schrijf de fiche naar een punt met zo klein mogelijk  $\psi$ .

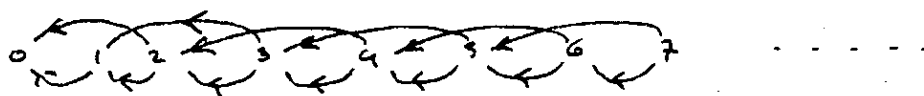
Neem eens aan dat in  $P$  de volgende toestanden zijn (alle mogelijkheden zijn hier mee geschetst (alle  $w(P) = -1$ , dan  $\psi(P) = \pm 1$ )



wat je ook doet, de tegenstander wint:  $\psi(P) = -1$

Middelste geval: in  $P$  kan je verkeerd zetten, maar je wint door naar  $-1$  te schrijven:  $\psi(P) = +1$

\* Spelletje van 1 of 2 teruglopen is hiermee nu "bewezen"



$\psi: -1 \quad +1 \quad +1$

etc, na twee  $+1$  in een rij komt telkens een  $-1$  (elke zet gaat dan naar  $+1$ , is dus verlozend); na een  $-1$  komen 2 items met een  $+1$ , (want je kan een zet doen die je tegenstander doet verliezen).

We bespreken nu Nim, dit is een bekend spelletje, maar 't is verrassend hoe telkens weer mensen hier nog nooit van gehoord hebben.

Dit wordt gespeeld met hoopjes lucifers: er <sup>is</sup> ~~een~~ aantal hoopjes (zeg  $k$ ), en een zet bestaat uit het wegnemen van een of meer lucifers uit een hoopje. Wie niet kan zetten verliest (wie de laatste lucifer wegneemt heeft gewonnen).

Wat zijn de verliesposities?

Om dat te analyseren nemen we de min-som: schrijf de aantallen  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$  binair uit, tel ze modulo 2 op en interpreteer dat als binair geschreven getal.

Voorbeeld:

3	11
5	101
8	1000
<hr/>	
14	= 1110

we noteren  $3 \dot{+} 5 \dot{+} 8 = 14$ ; evenzo  $3 \dot{+} 3 \dot{+} 3 \dot{+} 3 = 3$ .

Het resultaat is nu: positie  $n_1, \dots, n_k$  is een verliespositie dan en slechts dan als  $n_1 \dot{+} n_2 \dot{+} n_3 \dot{+} \dots \dot{+} n_k = 0$ .

We bewijzen dat door het volgende aan te Fomen

We definiëren  $\tilde{\Psi}(n_1, \dots, n_k) := -1$  als  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 0$   
 $:= +1$  anders

en we bewijzen dat  $\tilde{\Psi}$  de gevraagde eigenschappen heeft.

Bewijs. In de 0-positie klopt het:  $\Psi(0, 0, \dots, 0) = -1$

Nog te bewijzen

$$\Psi(n_1, \dots, n_k) = \max_{Q \in P(n_1, \dots, n_k)} (-\Psi(Q))$$

Als de Nim-som  $\neq 0$  is, bijv

$$\begin{array}{r} 45 \quad 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ 54 \quad 1 \cdot \textcircled{1} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ 13 \quad \cdot \cdot \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ \hline 22 \quad 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \end{array}$$

dan kunnen we in één zet Nim-som = 0 bereiken:  
 neem de voorste kolom met uitkomst 1. In die kolom staat een 1. Pas nu het getal dat op die rij staat (54 in ons geval) aan: verlaag de gevonden 1 tot nul en zorg dat in de overige kolommen een even aantal eenen komt. De middelste rij in ons voorbeeld wordt dan:

$$32 \quad 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$$

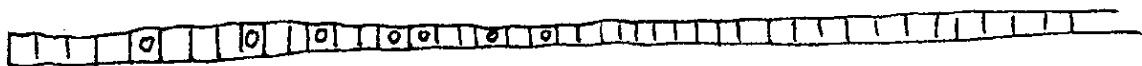
dat wil zeggen, door 22 uit het middelste hoopje te halen maak je de Nim-som = 0.

Vice-versa, als de Nim-som = 0, dan verkleint elke zet de Nim-som.

Feitelijk werkt dit procédé ook met toevoegen, maar dan moet je natuurlijk een andere stopregel hebben, en andere spelregels, want anders loopt het niet af.

Een spelletje dat op NIM lijkt is het volgende.

Begin met een oneindige rij vakjes waar je dekketjes in legt  
 bij voorbeeld



Het spel bestaat nu uit om de beurt een dubbelte naar links

schuiven, maar niet over een ander dubbelkje heen.  
Wie niet meer schuiven kan heeft verloren.

◆ 4 kan trouwens ook met pepernoten ◆

Met dit spelletje heb ik een vreemde ervaring gehad, ik had het lang geleden bedacht en <sup>in</sup> een obscuur tijdschrift gepubliceerd, maar later ontdekte ik dat het in een boek van R. Sprague stond, en toen heb ik het later het spel van Sprague genoemd. Maar toen ik op een goeie dag de eerste druk van dat boek van Sprague in handen kreeg zag ik daar staan dat hij het van mij beweerde te hebben.

In de pauze moet je maar eens de oplossing van het dubbeljjes-spel bedenken.

◆ (De oplossing staat aan het eind, achter de laatste les) ◆

28<sup>ste</sup> en laatste les, 7 december 1981, 4<sup>e</sup> uur.

(Voor je achterin kijkt, probeer de volgende hint: de gaten tussen de dubbeljjes vervullen zo ongeveer de rol van de hoopjes lucifers, maar er is nog een handigheidje nodig om te voorkomen dat één zet twee "hoopjes" tegelijk verandert).

Wie partners heeft die al bekend zijn met NIM, kan een boompjes-versie van nim gebruiken om zijn vriendjes en vriendinnetjes te foppen:

Teken een aantal bomen met wortel, leenis de wortels allemaal aan, of leg er een fiche op. Een zet is nu: de fiche door de boom naar boven schuiven.



In feite heb je alleen te maken met de "nim" stand bestaande uit de collectie uitlopen

die er vanaf het fische zijn (eigenlijk een multiset). Het oorspronkelijke minspel correspondeert met een multiset van bomen zonder zijtakken.

We komen nu aan een wat algemenere theorie, die van Grundy (1939)

Laat  $(G, A)$  een georiënteerde graaf zijn, met in elk punt eindige uitgraad en eindige uitloop, en  $w: G_0 \rightarrow \mathbb{R}$  constant  $-1$ .

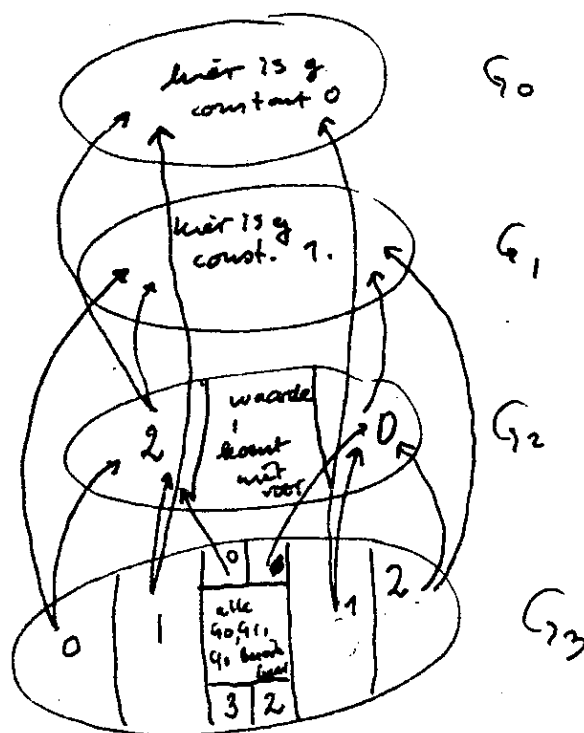
We definiëren nu  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  als volgt:

$$g|_{G_0} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} g(P) = 0 \text{ als de uitloop van} \\ P \text{ nul is} \end{array} \right)$$

anders,  $g(P) :=$  kleinste getal in  $\mathbb{N}_0$  dat niet voorkomt als  $g$  waarde van een in één stap bereikbaar punt.

Het is betrekkelijk gemakkelijk in te zien dat  $w(P) = -1$  als  $g(P) \neq 0$ .

Overzicht



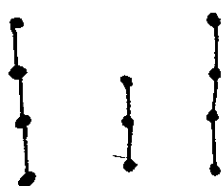


We gaan nu de som van spelen nemen:  
Eerst doen we dat in het geval van een  
Nim-spel met één boom.



grundy-functie is gelijk aan de uitloop  
van een punt.

Hebben we meerdere spellen, bijvoorbeeld



$$(G^{(1)}, \Delta_1),$$

$$(G^{(2)}, \Delta_2),$$

$$(G^{(3)}, \Delta_3), \dots$$

Dan definiëren we het product (som-) spel  
als volgt: kies een  $i$  en doe een zet in  
 $(G^{(i)}, \Delta_i)$

◆ Product: vorm  $G = G^{(1)} \times G^{(2)} \times \dots \times G^{(k)}$   
als  $(g_1, g_2, \dots, g_k) \in G$ ,  $1 \leq m \leq k$   
en  $(g_m, h) \in \Delta_m$  dan  
 $((g_1, \dots, g_k), (g_1, g_2, \dots, g_m, h, \dots, g_k)) \in \Delta$



De stelling van Grundy luidt nu  
De Grundy-functie van het product spel is de  
nim-som van de Grundy functies van de oorspronke-  
lijke spellen in de volgende zin.

$$g(P_1, \dots, P_k) = g_1(P_1) \dot{+} \dots \dot{+} g_k(P_k)$$

Het bewijs is wat pennerwerk, opgave!

Merkt op dat als de Grundy-functie  $\neq 0$ , dan behoort  $\neq 0$  bij de uitgangen, d.w.z. een verliespositie behoort tot de uitgangen.

Als de Grundyfunctie  $= 0$ , dan behoort geen van de uitgangen tot de posities met Grundyfunctie  $= 0$ , met andere woorden:

- ① Grundyfunctie  $= 0 \Leftrightarrow$  verliespositie.
- ② Grundyfunctie  $\neq 0 \Leftrightarrow$  winstpositie.

Hieruit volgt al de klassificatie van de winst- en verliesposities van het Nim-spel.

Een kleine variatie op Nim is het spel van Wijnthoff.

Er zijn twee hoopjes lucifers. Je mag van een van beide wat afpakken, maar ook van beide, maar dan evenveel.

Dus  $\{5, 9\} \rightarrow \begin{cases} \{2, 9\} \\ \{5, 2\} \\ \{3, 7\} \end{cases}$  zijn allemaal toegestane zetten.

Wie niet meer kan zetten heeft verloren.

De verliesposities zijn:

verschil	0	1	2	3	4
kleinste van de twee hoopjes	0	1	3	4	6
andere van de twee hoopjes	0	2	5	7	10

Het getal in de middelste rij is telkens het kleinste dat nog niet geweest is:

Als je in zo'n situatie overgaat op een met een andere kleinste kan je te genaster door ofwel door gelijk afnemen (als je het verschil verkleint) ofwel door van een van beide wat afnemen je in een erkende verliespositie manoeuvreren.

Bijv.  $\{6, 10\} \rightarrow \{5, 9\}$  kan de tegenstander in  $\{5, 3\}$  overvoeren: de clou is dat alle paren met een 5 erin tot een van de

onderstippelde posities terug te voeren.

verliezende positie:

$\left\{ \begin{array}{cc} \text{grootste} & \text{kleinste} \end{array} \right\} \rightarrow \{a', b\}$  met  $b \leq a' < a$   
 $\quad \quad \quad a \quad \quad \quad b$

$b$  is de kleinste  
 die nog niet voorkomt  
 bij alle verliezende  
 posities met kleiner  
 verschil

kan beantwoord worden met  
 gelijke afname tot de verliezende  
 positie met verschil  $a' - b$

$\rightarrow \{a', b^{\#}\}$  met  $a' < b$   
 wordt beantwoord met  
 vermindering tot de verliezende  
 positie bij  $a'$ : daar hoort zeker  
 een getal  $< b$  als compagnon bij  
 door constructie van  $b$ .

$\rightarrow \{a' b'\}$  met  $a' = a - k$   
 $b' = b - k$

wordt beantwoord met verkleinen  
 van  $a'$  tot verlies gevende waarde -  
 combinatie (en dus kleiner verschil  
 dan  $a - b$ ).

Welke getallen zijn dit eigenlijk?

Antwoord: dit zijn juist:

voor de kleinste  $[k\tau]$

voor de grootste  $[k\tau^2]$

waar  $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$  en dus  $\tau^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

(dus inderdaad,  $k\tau$  en  $k\tau^2$  schelen precies  $k$ ,  
 en dus hun gehele delen eveneens.)

Dit berust op het feit dat voor twee <sup>positieve</sup> getallen  
 $\alpha$  en  $\beta$  die

(1) irrationaal zijn, en zodanig dat

(2)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

geldt dat de rij  $[\alpha], [\beta], [2\alpha], [2\beta], \dots$  de natuurlijke

getallen allemaal precies één keer bevat.

◆ Bewijs. Er zijn geen dubbelten, want

$$\text{vero} \quad m < k\alpha < m+1 \\ m < l\beta < m+1$$

$$\text{dan} \quad m\beta < k\alpha\beta < (m+1)\beta \\ m\alpha < l\alpha\beta < (m+1)\alpha \\ \hline m(\alpha+\beta) < (k+l)(\alpha+\beta) < (m+1)(\alpha+\beta)$$

$$\alpha+\beta = \alpha\beta \text{ dus } m < k+l < m+1. \quad \text{T.S.}$$

Verder, komt van  $\frac{1}{\alpha}$  en  $\frac{1}{\beta}$   $\frac{1}{\alpha}$  degen zijn met  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < 1$   
dan  $1 < \alpha < 2$ , en dus vallen er in de rij

$[x], [2x], \dots$  telkens maar "gaten" ter lengte 1,  
we laten nu zien dat die juist door de veelvouden van  $\beta$  worden opgevuld:

$$\text{veronderstel} \quad m < k\alpha < m+1 \quad (1)$$

$$\text{en} \quad m+2 < (k+1)\alpha < m+3 \quad (2)$$

dan

$$(m+2)\beta < (k+1)\alpha\beta = (k+1)(\alpha+\beta) \quad (\text{uit 2})$$

$$(m+1-k)\beta < (k+1)\alpha < m+3$$

$$\text{verder} \quad k\alpha\beta < (m+1)\beta$$

$$k(\alpha+\beta) < (m+1)\beta$$

$$\therefore m < k\alpha < (m+1-k)\beta$$

dus  $[(m+1-k)\beta] \in [m, m+2]$ , maar  $m$  en  $m+2$   
zijn al bezet door  $[k\alpha]$  en  $[(k+1)\alpha]$ , dus:

$$[(m+1-k)\beta] = m+1.$$

Alle elementen van  $\mathbb{N}$  komen aan de beurt.



Het volgende spel heeft bewijsbaar een winststrategie, maar niemand weet welke: schrijf een aantal nummers op van 1 t/m  $n$ . Het doet er niet toe:  $n=7$  of 8 nog wel te analyseren, maar bij  $n=100$  of 200 zeker niet meer.

Een zet bestaat uit het doorschrijven van een getal en zijn ongeschrifte delers.

Andere methode (korter):

Er zijn  $\left[\frac{n}{\alpha}\right]$  veelvouden van  $\alpha$  onder de  $n$ , en  $\left[\frac{n}{\beta}\right]$  veelvouden van  $\beta$  onder de  $n$ .

Tevens

$$n-2 = \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} - 2 <$$

$$\left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right] < \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = n$$

$$\text{dus } \left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right] = n-1$$

Bijvoorbeeld, met  $n=10$  kan je achtereen volgens de volgende spelsituaties krijgen:

$\cancel{1} \ 2 \ 3 \ 4 \ \cancel{5} \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10$       // primair weggestreep  
 $\cancel{1} \ \cancel{2} \ 3 \ 4 \ \cancel{5} \ \cancel{6} \ 7 \ 8 \ 9 \ 10$   
 $\cancel{1} \ \cancel{2} \ \cancel{3} \ \cancel{4} \ \cancel{5} \ \cancel{6} \ 7 \ \cancel{8} \ 9 \ 10$

en de rest bestaat uit om de beurt een weg strepen, dus dit is een verliespositie voor wie aan zet is: die is de klos.

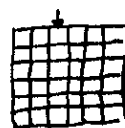
De beginpositie is een winst positie:

Neem namelijk aan dat  $\cancel{1} \ 2 \dots$  een verliespositie is: dan is dit de winnende eerste zet.

Neem aan dat deze positie winst positie is, dan is er een winnende zet: maar daar kan je ook mee beginnen. Analog aan Tempo probleem in schaak: de zet  $\cancel{1} \ 2 \ 3 \ 4 \dots$  is een tempo dat je naar believen kunt gebruiken of niet.

Een ander spel is het volgende. Je speelt het op een dambord, een schaakbord of een  $6 \times 6$  bord.

Je begint ergens op een ribbe een pijl te tekenen, bijvoorbeeld aan de rand.



De spelers mogen om de beurt de pijl door trekken door een leeg hokje

zo  $\begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array}$  of  $\begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array}$  of  $\begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array}$ . (Alternatieve versie: hokje bedekken, zet is telkens aangrenzend hokje bedekken.)

wie vastloopt wint. Vast lopen = er is geen leeg hokje meer.

Strategie eenvoudig: Bedek het bord met domino stenen (in gedachten en loop altijd naar de middenlijn van zo'n domino steen. De tegenstander heeft dan altijd een vrij hokje en voert dan de pijl naar een nieuwe domino steen: wie begint wint. In de alternatieve versie: wie begint verliest, <sup>als</sup> je de verliesregel wijzigt in: niet meer kunnen zetten.

Zie verder: v.g. de Buijn, Spelen op een graaf, Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 63 (1976) p. 201-206.

Daar staat ook de oplossing van het "spel van Sprague": Neem als nim getallen om het andere gat, van achteraf te beginnen.

Literatuur bij het college Combinatoriek van  
 Prof. N.G. de Bruijn. plaatnummers zonder verder aanduiding  
 staan in de wiskunde - studie bibliotheek

### Boeken.

1. Aigner, M. Kombinatorik, Springer, 1976 (2dln)  
 CHD 75AIG
2. Beckenbach, E.F. (ed). Applied Combinatorial Mathematics,  
 Wiley 1964 CHD 64 APP (leesant 2x)  
 CHE 64 APP (rc 1x  
 wsk 1x)
- 2A. Dit boek bevat een hoofdstuk: N.G. de Bruijn, Pólya's  
 Theory of Counting, p. 144-184.
3. Berge, C. The theory of Graphs and its  
 Application, Wiley 1964 CHK 58 BER (magetijn 1x  
 (Frank) wsk 1x)  
 CHK 62 BER (electro)
4. Bondy, J.A. and Murty, M.S.R. Graph Theory with  
 Applications, McMillan 1976 CHK 76 BON
5. Brualdi, R.A. Introductory Combinatorics,  
 North Holland 1977 CHD 77 BRU (rc 1x  
 wsk 1x)
6. Comtet, L. Analyse Combinatoire,  
 Presses Universitaires de France, 1970 (2 vols)  
 CHD
- 6A. Comtet, L., Advanced Combinatorics,  
 Reidel 1974 CHD 74 COM  
 vertaling & verbetering van 6.
7. Ford, L.R. and D.R. Fulkerson, Flows in networks,  
 Princeton Un. Press, 1962 CHK 62 FOR (3cop)

8. Hall, M., Combinatorial Theory, CHD67HAL (electro 1K  
Blaisdell 1967 (wisk 1K)

9. Riordan, J., Combinatorial Identities  
Wiley 1968 CHD79RIO

10. Ryser, H.J. Combinatorial Mathematics,  
Wiley 1963 CHD63RYS  
CHD63RYS (leas2aal 2K)

### Artikelen.

11. N.G. de Bruijn, Generalization of Pólya's Fundamental Theorem in Enumerative Combinatorial Analysis.  
Ned. Ak. Wet. Proc. Ser A 62 = Ind. Math. 21 (1959) 59-69
12. idem Enumerative combinatorial problems concerning structures, Nieuw Arch Wisk. 11 (1963) 142-161
13. idem Color patterns that are invariant under a given permutation of the colors,  
J. Comb. Th. 2 (1967) 418-421
14. idem Enumeration of tree shaped molecules, in: Recent Progress in Combinatorics, W.T. Tutte (ed), Academic Press 1969, p 59-68
15. idem Enumeration of mapping patterns  
Journal of Comb. Th. 12 (1972) 14-20
16. idem A generalisation of Burnside's lemma  
Notitie 55 (1970) Internal Report, Dept of Math. THE
17. idem Generalization of S.G. Williamson's generalization of Burnside's lemma and Pólya's theorem.  
Notitie 56 (1968-'69) Internal Report, Dept of Math, THE.

18. Idem A survey of generalizations of Pólya's enumeration theorem, *Nieuw Arch. Wisk* 9 (1971) 89-112
19. Idem The exterior cycle index of a permutation group, in: *Studies in pure mathematics*", L. Mirsky (ed), Academic Press, 1971, p. 31-37 CAD 71 ~~STU~~
20. Idem Pólya's Abzähltheorie, in: *Selecta Mathematica III, Muster für Graphen und Chemische Verbindungen*, p. 1-26, Springer, CAD 71 SEL
21. Idem Recent developments in enumeration theory, *Actes Congres Intern. Math (Nice)* 1970, ~~vol~~ 3, p. 193-199.
22. Idem On the number of partition patterns of a set, *Proc. Ned. Ak. Wet. Ser A* 82 = *Ind. Math* 41. (1979) 229-233
23. Idem and D.A. Klarner, Enumeration of generalized graphs, *Proc. Ned. Ak. Wet. Ser A* 72 = *Ind. Math.* 31 (1969), p. 1-9
24. Idem and Idem Pattern enumeration
25. Idem and B.J.M. Morrell A note on plane trees. *Journal of Comb. Theory* 2 (1967) 27-34
26. Idem Acknowledgment of priority to C. Flye Ste Marie on the counting of circular arrangements of  $2^n$  zeros and ones that show each  $n$ -letter word exactly once TR Rep 75-WSK-06, 1975



27. Harary, F., and F. Palmer, The enumeration method of Redfield  
Am. J. Math. 89 (1967) 373-384
  28. Neumann, P.M. A lemma that is not Burnside's  
The Mathematical Scientist 4 (1979) 133-141
  29. Pólya, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für  
Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. 68 (1937) 145-254
  30. Redfield, J.H. The theory of group-reduced distributions,  
Am. J. Math. 49 (1927) 433-455
  31. Robinson, R.W., Enumeration of Colored Graphs,  
J. Comb. Theory 4 (1968), 181-190.
- 
32. Ford, L.R. jr. and D.R. Fulkerson,  
Network flow and systems of  
representatives  
Can. Journ. of Math. 10 (1957) p. 78-84
  33. N.G. de Bruijn, Lecture notes (handwritten) CIT, April-May 1979  
Enumerative Combinatorics
- 

en overige, in de tekst genoemde referenties.

Nawoord bij de vierde druk.

U hebt nu in handen een ongekande versie van de collegeaantekeningen van het College Combinatoriek van N.G. de Bruijn.

Het is makkelijk de imperfecties<sup>①</sup> aan te wijzen: doorhalingen, vergeten literatuurverwijzingen, foute paginanummers en ongetwijfeld ook verschrjvingen in formules en bewijzen.

Ik dank diegenen die veel tijd en energie hebben gestoken in het opsporen van de ergste fouten. Voorlopig zij gebrek aan middelen (tijd, personeel) een excuus voor deze feilen.

Een tweede excuus, en tevens *raison d'être* is dat het college misschien niet meer zo vaak in deze omvang of in deze vorm gegeven zal worden. Daarom heb ik het opgeschreven. Dit is ook de reden voor de grappen die door de tekst verspreid staan: ze staan er vrijwel precies zo als ze verteld zijn. Omdat zulke menselijke details belangrijke steunpunten voor de oningewijde vormen, heb ik ze onverkort bewaard.

Een derde excuus is dat ik niet van tevoren wist dat er zoveel belangstelling zou zijn voor deze aantekeningen (tot nu toe ca 100 exemplaren).

Een aspect van een hoorcollege dat men zelden in schriftelijke weergave vindt is dynamisch bordgebruik. De docent kan met de vingers naardelen van formules wijzen, termen tegen elkaar wegschrappen, en in een graaf gekleurde opspannende bomen bijtekenen, etc. Ik heb iets van deze activiteiten geprobeerd te representeren, maar op papier zie je nu eenmaal moeilijk iets voor je ogen ontstaan.

Ik wens de lezer een plezierige studie toe. J. Nienhuys.

① Hieronder staan foutieve spellingen. Van een aantal woorden volgt hier de enige echte werkwoordspelling: algebraïsch, associëren, bedekkingsprobleem, b.v., Catalan-getallen, coëfficiënt, cyclus, draaiing, d.w.z., Euler-graaf, Euler-kning, equivalentieklasse, fibonaccirij, frequentiefunctie, functie notatie, georiënteerd, gewichtenprobleem, gepartitioneerd, Hamilton-kning, Hamilton-pad, intuïtie, kleurpatroon, Prüfer-codering, Russell-paradox, schoppenboer, stereoisomeren, Stirling-getallen, superpatroon.

## COMBINATORIEK/INDEX

DATE &amp; TIME PRINTED: TUESDAY, DECEMBER 15, 1981 @ 22:45:44.

100	aantal binaire bomen 91
200	aantal bomen 105
300	aantal cykels, gemiddeld 29
400	aantal elementen 9
500	aantal eulerkringen 112
600	aantal logica's 1
700	aantal opspannende bomen 102, 112
800	aantal partities van verzameling 32
900	aantal permutaties van gegeven type 24
1000	aantal stambomen 89
1100	aantal topologische wortelbomen 87
1200	alcohol-radicalen 99
1300	alcoholen, planaire 99
1400	alfabet 34
1500	algebra, commutatieve 42
1600	anagram 24
1700	backet 17, 22
1800	backtracking 95
1900	bedekkingsprobleem 124
2000	berge 72
2100	bierflesjesprobleem 108
2200	binaire boom 91
2300	binaire boom, ke-codering 94
2400	binaire representatie 11, 12
2500	bi-partitie groot 122
2600	bladluizenpad 93
2700	bomenversie nimspeel 145
2800	boom 76
2900	boom, binaire 91
3000	boom, karakterisering van 80
3100	boom, opspannende 79
3200	boom, planaire 84
3300	boom, prüfer codering van 81
3400	bos, opspannend 79
3500	hourboks 3, 70, 89
3600	hoven, betekenis op bord 32
3700	hurnside 40
3800	capaciteit van snede 134
3900	catalan getallen 89, 95
4000	cauchy product 5, 6
4100	cauchy-frobenius lemma 40, 42, 44
4200	cauchy-frobenius lemma 63, 64
4300	coyley, functionaalvergelijking van 88
4400	coyley, stelling van 104
4500	cent, de 7
4600	centraal punt 88
4700	centrale tak 88
4800	codering van boom, prüfer 81
4900	combinatie 15
5000	commissieprobleem 126
5100	commutatieve algebra 42
5200	comtet 28
5300	cykelindex 39
5400	cykelnotatie 24
5500	cykels, gemiddeld aantal 29
5600	decimale representatie 13
5700	delerspeel 151
5800	dimeren 107

Bruijn, F.W. de , 23

5900	doodpunt in spel 139
6000	duale probleem 124, 125
6100	dubbelstochastische matrix 131
6200	dubbeltjespel 144
6300	egervory 129, 130
6400	equivalente permutaties
6500	euler 16, 107
6600	eulergraaf 110
6700	eulergraaf, type van 110
6800	eulerkring 107
6900	eulerkringen, aantal 112
7000	eulers kringenstel 107
7100	even permutaties 28
7200	fibonacci rij 13, 22
7300	fibonacci 22
7400	ford 133
7500	ford-fulkerson stelling 135
7600	frequentie 15
7700	frequentiefunctie 7
7800	fulkerson 133
7900	functienotatie 53
8000	geerts, mevr. 7, 10
8100	gemiddeld aantal cykels 29
8200	georiënteerde graaf 72
8300	getallen van catalan 89
8400	gewicht van permutatie 29
8500	gewicht 15
8600	gewichtprobleem van hochet 16
8700	gewichtsfunctie 42
8800	goed 22
8900	graad van een punt 74
9000	graad van permutatie 25
9100	graaf 69
9200	graaf, bipartitie 122
9300	graaf, georiënteerde 72
9400	graaf, isomorfie van 70
9500	graaf, lijnen van een 70
9600	graaf, onvolledige 69
9700	graaf, planaire 72
9800	graaf, punten van een 70
9900	graaf, samenhangend 75
10000	graaf, top van 74
10100	graaf, vertraagde 73
10200	graaf, volledige 69
10300	grammatica's voor codes 94-98
10400	grammatika's, theorie van 85
10500	groep van de kubus 38
10600	groep, cykelindex van
10700	grundy theorie 146
10800	grundyfunctie 147
10900	hall 125, 126, 130
11000	hamiltonkring 107
11100	hamiltonpad 109
11200	herhalingscombinatie 15
11300	hoekpunten van de kubus 48
11400	huwelijksprobleem 127
11500	ingraad 74
11600	isomorfie van grafen 70
11700	jordan 38
11800	ke-code voor binaire boom 96
11900	ketting 74
12000	kirchhoff 107

haakjespatroon : 24, 26, 31

12100	kleuring 43, 47, 61
12200	kleuringen, theta-invariant 53
12300	kleurpatroon 43, 47, 61
12400	konig oneindigheidslemma 140
12500	konig 125, 126, 129, 130
12600	koningsherger bruggenprobleem 107
12700	kransproduct 66
12800	kring 75
12900	kringkampioen 78
13000	krystek 22
13100	kubus 37
13200	kubus, hoekpunten van 48
13300	kubus, ribben van 54
13400	kubus, zijvlakken 49
13500	kuratowski 73
13600	lagrange 22
13700	laplace 2, 22
13800	latijnse vierkanten
13900	leonardo van pisa 22
14000	letters als elementen 33
14100	liber abaci 22
14200	lijngraaf van een georiënteerde graaf 110
14300	logica's 1
14400	lucas 22
14500	machtreeksen, formale 5
14600	marie, flye sainte 115
14700	matrix tree theorem 103
14800	maxflow is mincut 135
14900	maxwell 102
15000	mechanica 38
15100	meerpersoonsspelen 139
15200	meetkunde 38
15300	multigrafen 131
15400	multiplaciteit 15
15500	multiset, rangschikkingen van 33
15600	multisets 15
15700	multisets, ordening van 77
15800	muntsoort 10
15900	napoleon 22
16000	natuurlijke getallen 3
16100	neville 83
16200	nimsom 143
16300	nimspel 143
16400	nimspel, homenversie van 145
16500	nodes van een graaf 70
16600	oneindigheidslemma van konig 140
16700	oneven delen, partities in
16800	ongelijke delen, partities in
16900	onvolledige graaf 49
17000	opspannend bos 79
17100	opspannende boom 79, 102
17200	opspannende boom, aantal 102
17300	opspannende bomen, aantal 102, 112, 121
17400	ordening van multisets 77
17500	otter 88
17600	overdekkingsprobleem 125
17700	partitie van getal 18
17800	partitie van verzameling 18, 30, 124
17900	partitie, type van 30
18000	partities, genummerde 30, 35
18100	peannspel 151
18200	pentamino spel 123

- 18300 permanent 131  
 18400 permutatie, even 27  
 18500 permutatie, gewicht van 29  
 18600 permutatie, groot van 24  
 18700 permutatie, type van  
 18800 permutaties 24  
 18900 permutaties, aantal van gegeven type 26  
 19000 permutaties, equivalente  
 19100 piso, leonardo van 22  
 19200 planaire alcoholen 99  
 19300 planaire boom 84  
 19400 planaire graaf 72  
 19500 planaire stambomen, ud-codering 92  
 19600 planaire stamboom 85  
 19700 planaire wortelboom 84  
 19800 polish notation 97  
 19900 poly en otter 88  
 20000 poly 20, 99  
 20100 polyo-theorie 37  
 20200 polyo, stelling van 68  
 20300 posthumus 115  
 20400 probleem, bedekking 124, 125  
 20500 probleem, commissie 126  
 20600 probleem, duale 124, 125  
 20700 probleem, huwelijk 127  
 20800 probleem, overdekking 124, 125  
 20900 probleem, representanten 124, 125  
 21000 probleem, stroming 133  
 21100 preter codering van boom 81  
 21200 punten van een graaf 70  
 21300 rangschikkingen van multisat 33  
 21400 representanten probleem 124, 125  
 21500 representanten, gemeenschappelijke 131  
 21600 ribben van de kubus 54  
 21700 riordan 21, 28  
 21800 russell paradox met bomen 98  
 21900 sainte marie, flye sainte 115  
 22000 samenhangende graaf 75  
 22100 schookspel 141  
 22200 schoonherdersprincipe 23 schaap met vijf poten 23  
 22300 shiftregister 113  
 22400 sinterklaas 139  
 22500 snede in stromingsnetwerk 134  
 22600 snede, capaciteit van 134 speelkaarten 125  
 22700 spel met dubbeltees 144  
 22800 spel van delerschrappen 151  
 22900 spel van sprague 145  
 23000 spel van wijthoff 148  
 23100 spel, doelpunt in 139  
 23200 spel, meerpersoons 139  
 23300 spel, nim 143  
 23400 spel, noona 151  
 23500 spel, schak 141  
 23600 spel, tweepersoons 139  
 23700 spel, zet in 139  
 23800 splitsing in oneindig veel summanden 14  
 23900 spoor van punt in boom 95  
 24000 sprague spel 145  
 24100 stambomen, aantal 89  
 24200 stamboom, planair 85  
 24300 stapelhout 98  
 24400 stirling getallen van de eerste soort 28