Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit Wiskunde & Informatica

Dictaat en vraagstukken bij

Tensorrekening en Differentiaalmeetkunde

2F800

Wintertrimester 2004

Colleges J. de GRAAF

Deze syllabus is in 1995 samengesteld door W.A. van den Broek die toen wiskundestudent aan de TUE was.
In de 2e druk is hoofdstuk 1 volledig herzien. Het begrip 'duale ruimte' krijgt nu de prominente plaats die het verdient. Voorts zijn enkele typografische verbeteringen aangebracht. Er zijn vijf nieuwe appendices met toepassingen toegevoegd.
Ten behoeve van de 3e druk is dankbaar gebruik gemaakt van uitvoerig commentaar van Ir. W.J.Lambo op de 2e druk: Een echte fout in (4.5) en voorts een lange rij type-fouten zijn nu geëlimineerd ....JdG

http://www.win.tue.nl/ degraaf/2F800/

Inleidende opmerkingen

Het VWO wiskunde onderwijs begint met algebra, d.w.z. met een uiteenzetting van rekenregels, voor $a + b$, ab, a^b, $(a + b)c$, enz. Vervolgens komt de analyse waarin gerekend wordt met functies. Behalve 'puntsgewijze' algebraïsche operaties, zoals bijvoorbeeld $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ en $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, spelen daarbij limieten, zoals bijvoorbeeld $\frac{df(x)}{dx}$ en $\int_a^b g(x)dx$, een rol. De Leibniz regels zijn combinaties van analytische en algebraïsche processen.
Het 1^e jaars universitaire onderwijs geeft een uitbreiding van de algebra, de lineaire algebra. Van fundamenteel belang bij de lineaire algebra zijn optelling $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, scalaire vermenigvuldiging $\alpha\mathbf{a}$ en lineaire afbeeldingen $\mathbf{a} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{a}$. De analyse wordt verder uitgebreid tot differentiëren van functies van meerdere variabelen en vectoranalyse. Naast de 'puntsgewijze' lineaire algebraïsche operaties op vectorvelden, denk aan $\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x})$ en $\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, heb je in de vectoranalyse ook differentiatie operaties als $\mathrm{grad}\ \alpha(\mathbf{x})$, $\mathrm{div}\ \mathbf{v}(\mathbf{x})$ en $\mathrm{rot}\ \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Combinaties van vectoranalyse en lineaire algebra leiden ook hier tot Leibniz regels, zoals bijvoorbeeld $\mathrm{div}\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathrm{rot}\ \mathbf{v}) - (\mathbf{v}, \mathrm{rot}\ \mathbf{w})$ en de divergentiestelling van Gauss. Het belang van de operaties grad , div en rot bestaat erin dat ze ongevoelig zijn voor coördinatentransformaties. Het zijn de enige 1^e orde differentiatie operaties met deze eigenschap. Andere dan zulke coördinaatongevoelige rekenprocessen zijn niet zinvol omdat in de natuur geen coördinaatsystemen worden aangetroffen. Om (fysische) berekeningen uit te kunnen voeren moeten coördinaten gekozen worden, het resultaat mag echter niet van de gekozen coördinaten afhangen.
In dit college wordt hetzelfde spelletje voor de derde keer gespeeld. In hoofdstuk 1 wordt de algebra verder uitgebouwd tot multilineaire algebra (tensoren). In hoofdstuk 2 komen differentiatie operaties op tensorvelden (Lie afgeleide, covariante afgeleide, uitwendige afgeleide) aan de orde. De grap van deze operaties is dat ze alleen uitgevoerd kunnen worden na een keuze van een (kromlijning) coördinaatsysteem maar dat het eindresultaat niet van deze keuze afhangt (covariantie en invariantie zijn de gebruikte kreten). In de hoofdstukken 3 en 4 laten we zien dat de tensorcalculus een wezenlijke rol speelt bij de theorie van oppervlakken (manifolds), juist omdat er hierbij niet zoiets is als een voorkeurscoördinatisering.
Na keuze van (kromlijnige) coördinaten op een n-dimensionale vectorruimte worden q-tensoren (tensorvelden) beschreven door q-dimensionale getallenblokken (blokken van functies). Voor $q = 1$ worden dit vectoren (vectorvelden) ter lengte n. Voor $q = 2$ worden dit $n \times n$-matrices (matrices van functies). Voor $q \geq 3$ worden dit q-dimensionale getallen schema's (functie schema's). Deze worden met indices beschreven. Dus respectievelijk, vectoren: $[x_i]$, 2-tensorvelden: $\left[A_i^j(x^k)\right]$, 3-tensoren: $[T_{ijk}]$, 3-tensorvelden: $\left[S_{ij}^k(x^l)\right]$. In de appendices zijn een reeks van toepassingen opgenomen.
We zullen veelal de Einstein sommatie-conventie gebruiken. Dit houdt het volgende in:
Symbolen (getallen of functies) kunnen zowel boven- als onderindices dragen; Een index mag in een sommand hoogstens twee keer voorkomen; Als een index zowel boven als onder voorkomt, moet over deze index 'automatisch' gesommeerd worden.
Dus $\sum_{i=1}^n A_i^j x^i$ wordt geschreven als $A_i^j x^i$ en $\sum_{j=1}^n T_{ij}^j$ als T_{ij}^j. Voorts betekent x_i^i een som van n getallen.

• • • • • Dit college is bedoeld voor studenten van alle faculteiten.• • • • •

Inhoudsopgave

1 Multilineaire algebra **8**

1.1 Vectorruimten en bases . . . 8

1.2 De duale ruimte. Het begrip duale basis . . . 10

1.3 De Kroneckertensor . . . 13

1.4 Lineaire afbeeldingen. Indexgymnastiek . . . 14

1.5 Inproduct . . . 17

1.6 Reciproke basis . . . 19

1.7 Speciale bases en transformatiegroepen . . . 21

1.8 Tensoren . . . 24

1.8.1 Algemene definitie . . . 24

1.8.2 $\binom{0}{0}$-tensor = scalar = getal . . . 24

1.8.3 $\binom{1}{0}$-tensor = contravariante 1-tensor = vector . . . 25

1.8.4 $\binom{0}{1}$-tensor = covariante 1-tensor = covector . . . 25

1.8.5 $\binom{0}{2}$-tensor = covariante 2-tensor = lineaire afbeelding: $V \to V^*$ . . . 25

1.8.6 $\binom{2}{0}$-tensor = contravariante 2-tensor = lineaire afbeelding: $V^* \to V$ . . . 28

1.8.7 $\binom{1}{1}$-tensor = gemengde 2-tensor = lin afb: $V \to V$ en $V^* \to V^*$ . . . 30

1.8.8 $\binom{0}{3}$-tensor = covariante 3-tensor = lin afb: $V \to (V^* \otimes V^*)$ en $(V \otimes V) \to V^*$ 32

1.8.9 $\binom{2}{2}$-tensor = gemengde 4-tensor = lin afb: $\big(V \to V\big) \to \big(V \to V\big) = \cdots$ 34

1.8.10 Vervolg algemene beschouwingen over $\binom{r}{s}$-tensoren. Contractie en $\otimes$. 35

1.8.11 Tensoren op Vectorruimten die uitgerust zijn met een inwendig product 37

1.9 Een wiskundige interpretatie van het 'ingenieurs tensor begrip' . . . 38

1.10 (Covariante) symmetrische en antisymmetrische tensoren . . . 44

1.11 Vectorruimten met een georiënteerd volume . . . 51

1.12 De Hodge afbeelding 53
1.13 Opgaven 56

2 Tensorvelden op $\mathbb{R}^n$ **58**
2.1 Kromlijnige coördinaten en raakruimten 58
2.2 Definitie van tensorvelden op $\mathbb{R}^n$ 61
2.3 Alternatieve definitie 63
2.4 Voorbeelden van tensorvelden 64
2.4.1 Het Kronecker tensorveld 64
2.4.2 Fundamentaaltensorvelden 64
2.4.3 Volumevormen en dichtheden 65
2.5 Voorbeelden van kromlijnige coördinaten 66
2.5.1 Poolcoördinaten op $\mathbb{R}^2$ 66
2.5.2 Cylindercoördinaten op $\mathbb{R}^3$ 67
2.5.3 Bolcoördinaten op $\mathbb{R}^3$ 67
2.6 Differentiatie operaties op tensorvelden 68
2.6.1 De gradiënt 68
2.6.2 De Lie afgeleide 69
2.6.3 Christoffelsymbolen op $\mathbb{R}^n$ 70
2.6.4 De covariante afgeleide op $\mathbb{R}^n$ 71
2.6.5 De uitwendige afgeleide 73
2.7 Combinaties van de uitwendige afgeleide en de Hodge afbeelding 77
2.7.1 Combinaties van d en $*$ in $\mathbb{R}^2$ 78
2.7.2 Combinaties van d en $*$ in $\mathbb{R}^3$ 78
2.7.3 Combinaties van d en $*$ in $\mathbb{R}^n$ 79
2.8 De klassieke vectoroperaties in $\mathbb{R}^3$ 79
2.8.1 De gradiënt 80
2.8.2 De rotatie 80
2.8.3 De divergentie 81
2.8.4 De Laplace operator 81
2.9 Opgaven 83

3 Differentiaalmeetkunde **88**
3.1 Differentiaalmeetkunde van krommen in $\mathbb{R}^3$ 88
3.1.1 Ruimtekrommen 88
3.1.2 De formules van Frenet 90
3.2 Differentiaalmeetkunde van oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ 95
3.2.1 Oppervlakken 95
3.2.2 Het eerste fundamentaaltensorveld 96
3.2.3 Het tweede fundamentaaltensorveld 97
3.2.4 Krommen op een oppervlak 99
3.2.5 Covariant differentiëren op oppervlakken 102
3.3 Opgaven 107

4 Manifolds **110**
4.1 Differentieerbare functies 110
4.2 Manifolds 111
4.3 Riemannse variëteiten 114
4.4 Covariante afgeleiden 115
4.5 De kromtetensor 118
4.6 Opgaven 120

Appendices **123**

A Het algemene tensorbegrip **123**

B De Stokes vergelijkingen in (orthogonale) kromlijnige coördinaten **127**
B.1 Inleiding 127
B.2 De spanningstensor en Stokesvgl'n in Cartesische coördinaten 127
B.3 De spanningstensor en Stokesvgl'n in willekeurige coördinaten 128
B.4 De uitgebreide divergentie en gradiënt in orthogonale kromlijnige coördinaten 129
B.4.1 De uitgebreide gradiënt 130
B.4.2 De uitgebreide divergentie 132

C Speciale relativiteitstheorie volgens Einstein en Minkowski **134**

D Beknopte schets van de algemene relativiteitstheorie 141

E Kristalroosters en Reciproke Bases. Piëzo-electriciteit. 147

F Enkele tensoren uit de Continuumsmechanica 151

G Thermodynamica en Differentiaalvormen 155

H Electromagnetisme en Differentiaalvormen 164

Hoofdstuk 1

Multilineaire algebra

1.1 Vectorruimten en bases

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$.

OPMERKING:

- Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V en voor iedere vector $\mathbf{x} \in V$ bestaat er een unieke, geordende collectie reële getallen $\{x^i\}$ zodanig dat $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

Definitie 1.1.1 *De getallen x^i heten de contravariante componenten van de vector $\mathbf{x}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.*

AFSPRAKEN:

- Contravariante componenten bergen we op in $n \times 1$-matrices, die ook wel kolomvectoren heten. De bij de contravariante componenten x^i behorende kolomvector wordt genoteerd als X, dus

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \cdots, x^n)^T.$$

- De vectorruimte der reële kolomvectoren ter lengte n noteren we met $I\!R^n$.

Definitie 1.1.2 *Het n-tal kolomvectoren E_i, gedefinieerd door*

$$E_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T,$$

waarbij de 1 op de i-de positie staat, vormen een basis van $I\!R^n$. Deze basis heet standaardbasis van $I\!R^n$.

<u>MERK OP:</u>

- $X = x^i E_i$.
- Bij iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V kan een bijectieve lineaire afbeelding $\mathcal{E} : V \to I\!R^n$ gedefinieerd worden door $\mathcal{E}\mathbf{x} = X$. In het bijzonder geldt dan $\mathcal{E}\mathbf{e}_i = E_i$. Een bijectieve lineaire afbeelding heet ook wel een isomorfisme . Door een basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V te kiezen en bijbehorend isomorfisme $\mathcal{E}$ te definiëren wordt de vectorruimte V 'in kaart' gebracht. Met behulp van $I\!R^n$ wordt V dan voorzien van een 'coördinatennet'.

<u>OPMERKING:</u>

- Voor ieder tweetal bases $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ van V bestaan er twee unieke, geordende collecties reële getallen $A^i_{i'}$ en $A^{i'}_i$ zodanig dat $\mathbf{e}_i = A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}$ en $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$.

<u>AFSPRAKEN:</u>

- De getallen $A^i_{i'}$ bergen we op in een $n \times n$-matrix, die genoteerd wordt met $A_,$. Dus $A_, = [A^i_{i'}]$, waarbij i de rijindex en i' de kolomindex aangeeft. De matrix $A_,$ is de overgangsmatrix van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$ naar de basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$.
- De getallen $A^{i'}_i$ bergen we op in een $n \times n$-matrix, die genoteerd wordt met A'. Dus $A' = [A^{i'}_i]$, waarbij i' de rijindex en i de kolomindex aangeeft. De matrix A' is de overgangsmatrix van de basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ naar de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.
- De contravariante componenten van de vector $\mathbf{x}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ worden genoteerd met $x^{i'}$ en de bijbehorende kolomvector met X'.

<u>MERK OP:</u>

- Er geldt enerzijds $\mathbf{e}_i = A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'} = A^{i'}_i A^j_{i'} \mathbf{e}_j$ en anderzijds $\mathbf{e}_i = \delta^j_i \mathbf{e}_j$, waaruit volgt dat $A^{i'}_i A^j_{i'} = \delta^j_i$. Op dezelfde manier is af te leiden dat $A^i_{i'} A^{j'}_i = \delta^{j'}_{i'}$. Hierbij zijn δ^j_i en $\delta^{j'}_{i'}$ Kronecker delta's. Vorm hiermee de eenheidsmatrices $I = [\delta^j_i]$ en $I_, = [\delta^{j'}_{i'}]$, dan geldt $A' A_, = I_,$ en $A_, A' = I$. Blijkbaar is $(A_,)^{-1} = A'$ en $(A')^{-1} = A_,$.
- Bij het omzetten van een uitdrukking in indexnotatie naar matrixnotatie dient enige voorzichtigheid in acht genomen te worden. Bij een uitdrukking in indexnotatie speelt de volgorde geen rol, terwijl de volgorde bij een matrixnotatie juist een wezenlijke rol speelt.
- Voor een vector $\mathbf{x} \in V$ geldt enerzijds $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}$ en anderzijds $\mathbf{x} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}$, waaruit volgt dat $x^{i'} = x^i A^{i'}_i$. Dit drukt het verband uit tussen de contravariante componenten van een vector $\mathbf{x}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$ en de contravariante componenten ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$. Analoog is in te zien dat $x^i = x^{i'} A^i_{i'}$. In matrixnotatie zijn deze verbanden te schrijven als $X = A_, X'$ en $X' = A' X$.

- Als we de uitdrukkingen $x^{i'} = A^{i'}_i x^i$ en $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$ naast elkaar zetten, dan zien we dat bij basiswisseling de coórdinaten x^i 'transformeren' met de inverse $A^{i'}_i$ van de overgangsmatrix $A^i_{i'}$. Vandaar de (wat rare 19e eeuwse) benaming *contravariante* componenten.
- Uit de relatie $x^{i'} = A^{i'}_i x^i$ volgt $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = A^{i'}_i$.

NOTATIE:

- De basisvector $\mathbf{e}_i$ wordt ook wel genoteerd als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en de basisvector $\mathbf{e}_{i'}$ als $\frac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Deze notaties zijn in dit stadium zuiver formeel en we hechten er vooralsnog geen bijzondere betekenis aan. Let echter op de formele analogie met de kettingregel. Voor een voldoend vaak differentieerbare functie f geldt immers

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = A^{i'}_i \frac{\partial f}{\partial x^{i'}},$$

  ofwel $\frac{\partial}{\partial x^i} = A^{i'}_i \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$, hetgeen keurig correspondeert met $\mathbf{e}_i = A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}$.

1.2 De duale ruimte. Het begrip duale basis

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.

Definitie 1.2.1 *Een lineaire functie $\hat{\mathbf{f}}$ op V is een afbeelding van V naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan de eigenschap $\hat{\mathbf{f}}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \beta\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$ voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ en alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Definitie 1.2.2 *De duale ruimte V^* behorende bij de vectorruimte V is de verzameling van alle lineaire functies op V, uitgerust met optelling en scalaire vermenigvuldiging op de volgende manier: Voor elk tweetal lineaire functies $\hat{\mathbf{f}}$ en $\hat{\mathbf{g}}$ op V definiëren we de lineaire functie $\hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{g}}$ door $(\hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{g}})(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$. Voor elke lineaire functie $\hat{\mathbf{f}}$ en elk reëel getal α definiëren we de lineaire functie $\alpha\hat{\mathbf{f}}$ door $(\alpha\hat{\mathbf{f}})(\mathbf{x}) = \alpha\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$. Het is eenvoudig na te gaan dat V^* een vectorruimte is. De lineaire functies $\hat{\mathbf{f}} \in V^*$ worden ook wel covectoren of covariante 1-tensoren genoemd.*

Definitie 1.2.3

Bij iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V en voor iedere covector $\hat{\mathbf{f}} \in V^*$ definiëren we de geordende collectie reële getallen f_i door $f_i = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{e}_i)$. Deze getallen f_i heten de covariante componenten van de covector $\hat{\mathbf{f}}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.

AFSPRAKEN:

- De covariante componenten van een covector bergen we op in een $1 \times n$-matrix. Zo'n matrix heet ook wel rijvector. De bij de covariante componenten f_i behorende rijvector wordt genoteerd als $\hat{F}$, dus

$$\hat{F} = \left(f_1,\ f_2,\ \ldots f_n\right)$$

- De vectorruimte der reële rijvectoren ter lengte n noteren we met $\mathbb{R}_n$.

Definitie 1.2.4 *Het n-tal rijvectoren $\hat{E}^i$, gedefinieerd door*

$$\hat{E}^i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),$$

waarbij de 1 op de i-de positie staat, vormen een basis van $\mathbb{R}_n$. Deze basis heet standaardbasis van $\mathbb{R}_n$.

MERK OP:

- $\hat{X} = x_i \hat{E}^i$.
- $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{F} X$, waarbij $\hat{F}$ de rijvector is die de covariante componenten van de covector $\hat{\mathbf{f}}$ representeert.
- Bij iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V horen n stuks lineaire functies $\hat{\mathbf{e}}^k$, gedefinieerd door $\hat{\mathbf{e}}^k(\mathbf{x}) = x^k = (\hat{E}^k)^T \mathcal{E}\mathbf{x}$. Let op! Elk der $\hat{\mathbf{e}}^k$ wordt in het algemeen bepaald door de basis $\{\mathbf{e}_i\}$ in haar geheel!

Lemma 1.2.5 *De (geordende) collectie $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ vormt een basis van V^*.*

Bewijs:
Laat $\hat{\mathbf{g}} \in V^*$. Voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{g}}(x^i \mathbf{e}_i) = x^i \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{e}_i) = g_i x^i = g_i(\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x})) = (g_i \hat{\mathbf{e}}^i)(\mathbf{x})$. Dus $\hat{\mathbf{g}} = g_i \hat{\mathbf{e}}^i$. De duale ruimte V^* wordt dus opgespannen door de verzameling $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$. Rest nog te bewijzen dat $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Laat α_i een collectie getallen zijn zodanig dat $\alpha_i \hat{\mathbf{e}}^i = 0$. Dan geldt voor alle j,

$$\alpha_i \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j = 0.$$

Hiermee is bewezen dat $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ een basis van V^* is.

□

GEVOLG:

- De duale ruimte V^* van V is, net als V zelf, n-dimensionaal.

Definitie 1.2.6 *De basis $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ heet de bij $\{\mathbf{e}_i\}$ behorende duale basis van V^*.*

MERK OP:

- We hebben gezien dat bij iedere basiskeuze $\{\mathbf{e}_i\}$ in V een bijectie $\mathcal{E} : V \to I\!R^n$ hoort. Een basiskeuze in V leidt tot een duale basis in V^*. Definieer nu de lineaire afbeelding $\mathcal{E}^*$ van $I\!R_n$ naar V^* door $\mathcal{E}^* \hat{E}^i = \hat{\mathbf{e}}^i$. Deze lineaire afbeelding is bijectief. Er geldt $\mathcal{E}^* \hat{F} = \hat{\mathbf{f}}$. En ook: $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (\mathcal{E}^* \hat{F})(\mathbf{x}) = \hat{F}(\mathcal{E}\mathbf{x}) = \hat{F}X$.

Lemma 1.2.7 *Laat $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ bases van V zijn en beschouw hun bijbehorende duale bases $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ en $\{\hat{\mathbf{e}}^{i'}\}$.*
• De overgang tussen basis $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ en de basis $\{\hat{\mathbf{e}}^{i'}\}$ wordt gegeven door de (oude bekende) matrices A' en A, op de volgende manier: $\hat{\mathbf{e}}^i = A^i_{i'}\,\hat{\mathbf{e}}^{i'}$ en $\hat{\mathbf{e}}^{i'} = A^{i'}_i\,\hat{\mathbf{e}}^i$.
• Als $\hat{\mathbf{g}} = g_i \hat{\mathbf{e}}^i = g_{i'} \hat{\mathbf{e}}^{i'}$ dan geldt $g_{i'} = A^i_{i'} g_i$ en $g_i = A^{i'}_i g_{i'}$.

Bewijs:
Noteer de overgangsmatrices tussen de bases $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$ en $\{\hat{\mathbf{e}}^{i'}\}$ met $[B^{i'}_i]$ en $[B^i_{i'}]$. Enerzijds geldt $\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$ en anderzijds $\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = (B^i_{i'}\hat{\mathbf{e}}^{i'})(A^{j'}_j\,\mathbf{e}_{j'}) = B^i_{i'}A^{j'}_j\delta^{i'}_{j'} = B^i_{i'}A^{i'}_j$, waaruit volgt dat $B^i_{i'}A^{i'}_j = \delta^i_j$. Blijkbaar is $B^i_{i'} = A^i_{i'}$. □

MERK OP:

- De transformatie van de componenten van $\hat{\mathbf{y}}$ bij basiswisseling volgt uit

$$\hat{\mathbf{y}} = y_{i'}\,\hat{\mathbf{e}}^{i'} = y_{i'}\,A^{i'}_i\,\hat{\mathbf{e}}^i = (A^{i'}_i\,y_{i'})\hat{\mathbf{e}}^i = y_i\,\hat{\mathbf{e}}^i = y_i\,A^i_{j'}\,\hat{\mathbf{e}}^{j'} = y_i\,A^i_{i'}\,\hat{\mathbf{e}}^{i'}.$$

  In matrixnotatie

$$\hat{Y}_, = \hat{Y}A_, \qquad\qquad \hat{Y} = \hat{Y}_,A' \qquad \left(= \hat{Y}_,(A_,)^{-1}\right)$$

- Als we de uitdrukkingen $y_{i'} = A^i_{i'}y_i$ en $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$ naast elkaar zetten, dan zien we dat bij basiswisseling de coórdinaten y_i 'transformeren net als de basisvectoren'. Vandaar de (wat rare 19e eeuwse) benaming *covariante* componenten.

NOTATIE:

- De duale basisvector $\hat{\mathbf{e}}^i$ wordt ook wel genoteerd als $\mathrm{d}x^i$ en de duale basisvector $\hat{\mathbf{e}}^{i'}$ als $\mathrm{d}x^{i'}$. Deze notaties zijn in dit stadium zuiver formeel en we hechten er vooralsnog geen bijzondere betekenis aan. Merk echter op dat volgens de gangbare folklore rondom 'infinitesimale aangroeïngen' geldt

$$\mathrm{d}x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = A^{i'}_i\,\mathrm{d}x^i.$$

  Dit correspondeert keurig met $\hat{\mathbf{e}}^{i'} = A^{i'}_i\hat{\mathbf{e}}^i$.

1.3 De Kroneckertensor

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$ en haar duale ruimte V^*.

NOTATIES:

- De covector $\hat{\mathbf{f}} : \mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ zullen we in het vervolg schrijven als $\hat{\mathbf{f}} : \mathbf{x} \mapsto < \hat{\mathbf{f}} \,, \mathbf{x} >$.
- We schrijven soms $\hat{\mathbf{f}} = < \hat{\mathbf{f}}, \cdot >$. Dan laten we het 'argument' $\mathbf{x}$ 'oningevuld'.

Definitie 1.3.1 *De functie van 2 vectorvariabelen $< \cdot, \cdot >$: $V^* \times V \rightarrow I\!R$ wordt wel Kroneckertensor genoemd.*

OPMERKINGEN:

- In de eerste ingang van $< \cdot, \cdot >$ kunnen alleen covectoren, dus elementen uit V^*, worden ingevuld. In de tweede ingang van $< \cdot, \cdot >$ kunnen alleen vectoren, dus elementen uit V, worden ingevuld. De Kroneckertensor is dus geen 'inwendig product'. En wel omdat iedere ingang alleen zijn eigen type vector mag ontvangen.
- De Kroneckertensor is een lineaire functie in elke variabele afzonderlijk.
  Dat wil zeggen:
  $\forall_{\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}} \in V^*} \forall_{\mathbf{z} \in V} \forall_{\alpha,\beta \in I\!R}: \quad < \alpha \hat{\mathbf{u}} + \beta \hat{\mathbf{v}} \,, \mathbf{z} > = \alpha < \hat{\mathbf{u}} \,, \mathbf{z} > + \beta < \hat{\mathbf{v}} \,, \mathbf{z} >$, en
  $\forall_{\hat{\mathbf{u}} \in V^*} \forall_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in V} \forall_{\gamma,\delta \in I\!R}: \quad < \hat{\mathbf{u}} \,, \gamma \mathbf{x} + \delta \mathbf{y} > = \gamma < \hat{\mathbf{u}} \,, \mathbf{x} > + \delta < \hat{\mathbf{u}} \,, \mathbf{y} >$.
- De paring tussen basisvectoren en duale basisvectoren levert:

$$< \hat{\mathbf{e}}^i \,, \mathbf{e}_j > = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad i = j, \\ 0 & \text{als} \quad i \neq j. \end{cases} ,$$

  de befaamde 'Kroneckerdelta' .
- Bij iedere vast gekozen $\mathbf{a} \in V$ kunnen we, op V^* (!!), de lineaire functie $\hat{\mathbf{u}} \mapsto < \hat{\mathbf{u}} \,, \mathbf{a} >$ beschouwen. Deze lineaire functie behoort tot de duale van de duale van V, notatie: $(V^*)^* = V^{**}$. Een co-covector zogezegd. Het volgende lemma toont aan dat, in het eindig dimensionale geval, V^{**} met V geïdentificeerd kan worden zonder 'extra structuren in te voeren'. Het bewijs vergt enige vaardigheid met abstracte lineaire algebra.

Lemma 1.3.2 (Biduale Ruimte)
Laat $\hat{\hat{\mathbf{f}}}: V^* \rightarrow I\!R$ een lineaire functie zijn. Dan bestaat er precies één vector, zeg $\mathbf{a} \in V$, zodat voor alle $\hat{\mathbf{u}} \in V^*$ geldt: $\hat{\hat{\mathbf{f}}}(\hat{\mathbf{u}}) = < \hat{\mathbf{u}} \,, \mathbf{a} >$.
(We kunnen, zonder risico, stellen dat $V^{**} = V$.)

Bewijs:
Kies een $\mathbf{a} \in V$. Definieer de 'evaluatiefunctie' $\hat{\hat{\delta}}_{\mathbf{a}} : V^* \to I\!R$, door $\hat{\hat{\delta}}_{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{u}}) =< \hat{\mathbf{u}}\,, \mathbf{a} >$. Beschouw nu de lineaire afbeelding $J : V \to V^{**}$, gedefinieerd door $J\mathbf{x} = \hat{\hat{\delta}}_{\mathbf{x}}$. De lineaire afbeelding J is injectief. Immers, indien $(J\mathbf{x})(\hat{\mathbf{u}}) =< \hat{\mathbf{u}}\,, \mathbf{x} >= 0$, voor alle $\hat{\mathbf{u}} \in V^*$, dan moet $\mathbf{x}$ wel $\mathbf{0}$ zijn. Neem voor $\hat{\mathbf{u}}$ maar succesievelijk de elementen van een 'duale basis'. Omdat voorts $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n < \infty$, moet J ook surjectief zijn. Dit op grond van de dimensiestelling. De bijectie $J : V \to V^{**}$ 'identificeert' dus V^{**} en V zonder dat je extra veronderstellingen hoeft te doen. $\square$

<u>OPMERKINGEN:</u>

- Als we de vector $\mathbf{x} \in V$ bedoelen als lineaire functie op V^*, dan schrijven we $\mathbf{x} =< \cdot\,, \mathbf{x} >$. Een vector opgevat als lineaire functie heet in dit verband ook wel <u>contravariante 1-tensor</u>.
- Als we extra willen benadrukken dat de covector $\hat{\mathbf{y}}$ een lineaire functie is schrijven we $\hat{\mathbf{y}} =< \hat{\mathbf{y}}, \cdot >$. We noemen die covector dan <u>covariante 1-tensor</u>.
- De vraag dient zich aan of we ook V en V^* kunnen identificeren. Ze hebben immers dezelfde dimensie. Het antwoord zal luiden dat dit NIET zonder verdere aannamen kan. Later zal blijken dat door de keuze van een inwendig product bepaald wordt hoe V en V^* aan elkaar gerelateerd worden.

1.4 Lineaire afbeeldingen. Indexgymnastiek

<u>UITGANGSPUNTEN:</u>

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$ en haar duale ruimte V^*.
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{R}$ van V naar V.
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{P}$ van V^* naar V^*.
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{G}$ van V naar V^*.
- Een lineaire afbeelding $\mathcal{H}$ van V^* naar V.

<u>NOTATIES:</u>

- Laat $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ bases van V zijn, dan schrijven we

$$\mathcal{R}\mathbf{e}_i = R^j_i \mathbf{e}_j, \tag{1.1}$$
$$\mathcal{R}\mathbf{e}_{i'} = R^{j'}_{i'} \mathbf{e}_{j'}. \tag{1.2}$$

Dit betekent dat de contravariante componenten van de vector $\mathcal{R}\mathbf{e}_i$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_j\}$ genoteerd worden met R^j_i, terwijl de contravariante componenten van de vector $\mathcal{R}\mathbf{e}_{i'}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_{j'}\}$ genoteerd worden met $R^{j'}_{i'}$.

- De twee unieke, gelabelde collecties getallen R^j_i en $R^{j'}_{i'}$ bergen we op in $n \times n$-matrices, die respectievelijk genoteerd worden met R en $R^{\text{'}}_{\text{,}}$. Dus $R = [R^j_i]$ en $R^{\text{'}}_{\text{,}} = [R^{j'}_{i'}]$. Hierbij zijn j en j' rijindices en i en i' kolomindices.

MERK OP:

- Het verband tussen R en $R^{\text{'}}_{\text{,}}$ kan gelegd worden met behulp van de overgangsmatrices $A_{\text{,}}$ en $A^{\text{'}}$. Er geldt namelijk

  $$\mathcal{R}\mathbf{e}_{i'} = \mathcal{R}\left(A^i_{i'}\mathbf{e}_i\right) = A^i_{i'}\mathcal{R}\mathbf{e}_i = A^i_{i'}R^j_i\mathbf{e}_j = A^i_{i'}R^j_iA^{j'}_j\mathbf{e}_{j'}.$$

  Vergelijk deze relatie met (1.2), dan is in te zien dat $R^{j'}_{i'} = A^i_{i'}R^j_iA^{j'}_j$. In matrixnotatie is deze relatie te schrijven als $R^{\text{'}}_{\text{,}} = A^{\text{'}}RA_{\text{,}}$. Ook is af te leiden dat $R^j_i = A^{i'}_iR^{j'}_{i'}A^j_{j'}$, hetgeen in matrixnotatie te schrijven is als $R = A_{\text{,}}R^{\text{'}}_{\text{,}}A^{\text{'}}$.

- De relaties tussen de matrices die de lineaire afbeelding $\mathcal{R}$ ten opzichte van de bases $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ representeren volgen nu eenvoudig. Er geldt namelijk

  $$R^{\text{'}}_{\text{,}} = (A_{\text{,}})^{-1}RA,\ \text{en}\ R = (A^{\text{'}})^{-1}R^{\text{'}}_{\text{,}}A^{\text{'}}.$$

De overige drie typen lineaire afbeeldingen kunnen we net zo behandelen. We verzamelen de resultaten in een tabel.

OPMERKINGEN BIJ DE TABEL

- $\forall_{\mathbf{x}\in V}\forall_{\hat{\mathbf{y}}\in V^*}: \ < \hat{\mathbf{y}}, \mathcal{R}\mathbf{x} > = < \mathcal{P}\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x} >$, geldt precies dan als $P = R$, dus precies dan als $P^i_j = R^i_j$.

- $\forall_{\mathbf{x}\in V}\forall_{\mathbf{z}\in V}: \ < \mathcal{G}\mathbf{x}, \mathbf{z} > = < \mathcal{G}\mathbf{z}, \mathbf{x} >$, geldt precies dan als $G^T = G$, dus precies dan als $g_{ji} = g_{ij}$. In zo'n geval heet de lineaire afbeelding $\mathcal{G}\colon V \to V^*$ symmetrisch

- De lineaire afbeeldingen in de tabel kunnen met sommige andere samengesteld worden. Als $\mathcal{R} = \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$ dan is blijkbaar $R^k_jx^j\mathbf{e}_k = \mathcal{R}\mathbf{x} = (\mathcal{H} \circ \mathcal{G})\mathbf{x} = h^{k\ell}g_{j\ell}x^j\mathbf{e}_k$. In matrixtaal: $RX = H(X^TG)^T = HG^TX$.

- Als $\mathcal{P} = \mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ dan is blijkbaar $P^k_jy_k\hat{\mathbf{e}}^j = \mathcal{P}\mathbf{y} = \mathcal{G} \circ \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} = h^{k\ell}g_{\ell j}y_k\hat{\mathbf{e}}^j$. In matrixtaal: $\hat{Y}P = (H\hat{Y}^T)^TG = \hat{Y}H^TG$.

INDEXGYMNASTIEK

Coördinaatvrije Notatie	**Indexnotatie = Componentnotatie**	**Matrixnotatie**
Gebruikt geen basis Volgorde ligt vast	Basisafhankelijk Volgorde van geen belang	Basisafhankelijk Volgorde ligt vast
$\mathbf{x} \in V$	$x^i \quad x^{i'} \quad x^{i''}$, met $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}$, etc $x^i =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} > \quad x^{i'} =< \hat{\mathbf{e}}^{i'}, \mathbf{x} >$ $x^{i'} = A^{i'}_i x^i \quad x^{i''} = A^{i''}_i x^i$, etc	$X \quad X' \quad X''$ $X' = A' X$ etc
$\hat{\mathbf{y}} \in V^*$	$y_i \quad y_{i'} \quad y_{i''}$, met $\hat{\mathbf{y}} = y_i \hat{\mathbf{e}}^i = y_{i'} \hat{\mathbf{e}}^{i'}$, etc $y_i =< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_i > \quad y_{i'} =< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_{i'} >$ $y_{i'} = A^i_{i'} y_i \quad y_{i''} = A^i_{i''} y_i$, etc	$\hat{Y} \quad \hat{Y},$ $\hat{Y} = \hat{Y}, A'$ etc
$< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x} > \in I\!R$	$y_i x^i = y_{i'} x^{j'} \in I\!R$	$\hat{Y} X = \hat{Y}, X' \in I\!R$
$\mathcal{R}: \quad V \to V$	$\mathcal{R}\mathbf{e}_j = R^i_j \mathbf{e}_i \quad \mathcal{R}\mathbf{e}_{j'} = R^{i'}_{j'} \mathbf{e}_{i'}$ $R^i_j =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathcal{R}\mathbf{e}_j >$ $R^{i'}_{j'} =< \hat{\mathbf{e}}^{i'}, \mathcal{R}\mathbf{e}_{j'} >= A^{i'}_i A^j_{j'} R^i_j$	$R = [R^i_j]$, j is kolomindex $R = A, R', A'$
$\mathcal{R}\mathbf{x} \in V$	$R^i_j x^j =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathcal{R}\mathbf{x} >$ $R^{i'}_{j'} x^{j'} =< \hat{\mathbf{e}}^{i'}, \mathcal{R}\mathbf{x} >= A^{i'}_i R^i_j x^j$	kolom$(R^i_j x^j) = RX$ kolom$(R^{i'}_{j'} x^{j'}) = R', X'$
$< \hat{\mathbf{y}}, \mathcal{R}\mathbf{x} > \in I\!R$	$y_i R^i_j x^j = R^{i'}_{j'} x^{j'} y_{i'} \in I\!R$	$\hat{Y} R X = \hat{Y}, R', X' \in I\!R$
$\mathcal{P}: \quad V^* \to V^*$	$\mathcal{P}\hat{\mathbf{e}}^i = P^i_j \hat{\mathbf{e}}^j \quad \mathcal{P}\hat{\mathbf{e}}^{i'} = P^{i'}_{j'} \hat{\mathbf{e}}^{j'}$ $P^i_j =< \mathcal{P}\hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{e}_j >$ $P^{i'}_{j'} =< \mathcal{P}\hat{\mathbf{e}}^{i'}, \mathbf{e}_{j'} >= A^{i'}_i A^j_{j'} P^i_j$	$P = [P^i_j]$, j is kolomindex $P', = A' P A,$
$\mathcal{P}\hat{\mathbf{y}} \in V^*$	$P^j_i y_j =< \mathcal{P}\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{e}}_i >$ $P^{j'}_{i'} y_{j'} =< \mathcal{P}\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{e}}_{i'} >= A^i_{i'} P^j_i y_j$	rij$(P^j_i y_j) = \hat{Y} P$ rij$(P^{j'}_{i'} y_{j'}) = \hat{Y}, P', = \hat{Y} P A,$
$< \mathcal{P}\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x} > \in I\!R$	$y_j P^j_i x^i = P^{j'}_{i'} y_{j'} x^{i'} \in I\!R$	$\hat{Y} P X = \hat{Y}, P', X' \in I\!R$
$\mathcal{G}: \quad V \to V^*$	$\mathcal{G}\mathbf{e}_i = g_{ij} \hat{\mathbf{e}}^j \quad \mathcal{G}\mathbf{e}_{i'} = g_{i'j'} \hat{\mathbf{e}}^{j'}$ $g_{ij} =< \mathcal{G}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >$ $g_{i'j'} =< \mathcal{G}\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'} >= A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}$	$G = [g_{ij}]$, j is kolomindex $G,, = [g_{i'j'}] = (A,)^T G A,$
$\mathcal{G}\mathbf{x} \in V^*$	$g_{ij} x^i =< \mathcal{G}\mathbf{x}, \mathbf{e}_j >$ $g_{i'j'} x^{i'} =< \mathcal{G}\mathbf{x}, \mathbf{e}_{j'} >= A^j_{j'} g_{ij} x^i$	rij$(g_{ij} x^i) = X^T G$ rij$(g_{i'j'} x^{i'}) = (X')^T G,, =$ $= (X')^T (A,)^T G A, = X^T G A,$
$< \mathcal{G}\mathbf{x}, \mathbf{z} > \in I\!R$	$g_{ij} x^i z^j = g_{i'j'} x^{i'} z^{j'} \in I\!R$	$X^T G Z = (X')^T G,, Z' \in I\!R$
$\mathcal{H}: \quad V^* \to V$	$\mathcal{H}\hat{\mathbf{e}}^k = h^{k\ell} \mathbf{e}_\ell \quad \mathcal{H}\hat{\mathbf{e}}^{k'} = h^{k'\ell'} \mathbf{e}_{\ell'}$ $h^{k\ell} =< \hat{\mathbf{e}}^k, \mathcal{H}\hat{\mathbf{e}}^\ell >$ $h^{k'\ell'} =< \hat{\mathbf{e}}^{k'}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{e}}^{\ell'} >= A^{k'}_k A^{\ell'}_\ell h^{kl}$	$H = [h^{kl}]$, ℓ is kolomindex $H'' = [h^{k'\ell'}] = A' H (A')^T$
$\mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} \in V$	$h^{k\ell} y_\ell =< \hat{\mathbf{e}}^k, \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} >$ $h^{k'\ell'} y_{\ell'} =< \hat{\mathbf{e}}^{k'}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} >= A^{k'}_k h^{kl} y_\ell$	kolom$(h^{kl} y_\ell) = H \hat{Y}^T$ kolom$(h^{k'\ell'} y_{\ell'}) = H'' (\hat{Y},)^T =$ $= A' H (\hat{Y}, A')^T$
$< \hat{\mathbf{u}}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} > \in I\!R$	$h^{kl} u_k y_\ell = h^{k'\ell'} u_{k'} y_{\ell'} \in I\!R$	$\hat{U} H \hat{Y}^T = \hat{U}, H'' (\hat{Y},)^T \in I\!R$

1.5 Inproduct

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$ en haar duale ruimte V^*.
- Bases $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ in V.
- De bijbehorende duale bases $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$, $\{\hat{\mathbf{e}}^{i'}\}$ in V^*.

Definitie 1.5.1 *Een Euclidisch inproduct op V, notatie $(\cdot,\cdot)$, is een afbeelding van $V \times V$ naar $I\!R$ die voldoet aan*

(i) $\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in V}: \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$

(ii) $\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V}\forall_{\alpha,\beta\in I\!R}: \ (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y},\mathbf{z})$

(iii) $\forall_{\mathbf{x}\in V}: \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$

OPMERKING:

- In de wiskunde en in de physica treffen we vaak inproducten aan die verschillen van het Euclidische inproduct. Het betreft dan variaties van eigenschappen (i) en (iii). Andere mogelijkheden zijn

  (i)′ $\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in V}: \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = -(\mathbf{y},\mathbf{x})$

  (iii)′ $\forall_{\mathbf{x}\in V,\mathbf{x}\neq 0}\exists_{\mathbf{y}\in V}: \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0$

TOELICHTINGEN:

- Eigenschap (iii) impliceert eigenschap (iii)′. Eigenschap (iii)′ is dus zwakker dan (iii).
- Het Lorentz inproduct dat een rol speelt in de relativiteitstheorie heeft de eigenschappen (i), (ii) en (iii)′.
- De combinatie (i)′, (ii) en (iii)′ definieert een inproduct dat een rol speelt in de Hamiltonse mechanica. De vectorruimte V heet in dit geval ook wel een symplectische vectorruimte . Er geldt dan $\dim V =$ even. ('Faseruimte')
- Indien het inproduct aan eigenschap (i) voldoet, dan heet het inproduct symmetrisch, terwijl het inproduct antisymmetrisch heet indien aan eigenschap (i)′ voldaan is.

Definitie 1.5.2 *Bij iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V definiëren we de getallen g_{ij} door $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. De matrix $G = [g_{ij}]$, waarbij i de rijindex en j de kolomindex aangeeft, heet de bij de basis $\{\mathbf{e}_i\}$ behorende Grammatrix .*

NOTATIE:

- Als de inverse G^{-1} van de Grammatix G bestaat dan noteren we $G^{-1} = [g^{kl}]$, met k de rijindex en l de kolomindex. Merk op dat $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ en $g^{li}g_{ik} = \delta_k^l$.

Stelling 1.5.3 *Beschouw een inproduct $(\cdot,\cdot)$ op V dat voldoet aan de eisen: (i) of (i)′, (ii) en (iii)′.*
(a) *Er bestaat een bijectieve lineaire afbeelding $\mathcal{G} : V \to V^*$ zodanig dat*

$$\forall_{\mathbf{x},\,\mathbf{y}\in V}: \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \mathcal{G}\mathbf{x},\mathbf{y} > \text{ en } \forall_{\hat{\mathbf{z}},\in V^*}\forall_{\mathbf{y}\in V}: \quad < \hat{\mathbf{z}},\mathbf{y} >= (\mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{z}},\mathbf{y}).$$

(b) *De Grammatrix is inverteerbaar.*

(c) *Er geldt $\mathcal{G}\mathbf{e}_i = g_{ik}\hat{\mathbf{e}}^k$. Als $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, dan is $\mathcal{G}\mathbf{x} = x^i g_{ik}\hat{\mathbf{e}}^k$.*

(d) *Er geldt $\mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{e}}^\ell = g^{\ell i}\mathbf{e}_i$. Als $\hat{\mathbf{y}} = y_\ell\hat{\mathbf{e}}^\ell$, dan is $\mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{y}} = y_\ell g^{\ell i}\mathbf{e}_i$.*

Bewijs
(a) Bij vaste $\mathbf{u} \in V$ definieren we de lineaire functie $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{u},\mathbf{x})$. Er is dan een $\hat{\mathbf{u}} \in V^*$ beschikbaar zodat voor alle $\mathbf{x} \in V$ geldt: $< \hat{\mathbf{u}},\mathbf{x} >= (\mathbf{u},\mathbf{x})$. De toevoeging $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ blijkt een lineaire afbeelding te zijn. Die noemen we $\mathcal{G} : V \to V^*$. Dus $\hat{\mathbf{u}} = \mathcal{G}\mathbf{u}$.
Omdat $\dim V = \dim V^* < \infty$ volstaat het aan te tonen dat $\mathcal{G}$ injectief is. Stel er is een $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zodat $\mathcal{G}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ Dan zou voor alle $\mathbf{x} \in V$ gelden $0 =< \mathcal{G}\mathbf{v},\mathbf{x} >= (\mathbf{v},\mathbf{x}) = 0$. Dit is strijdig met eigenschap (iii)′ van het inproduct.
(b) G is inverteerbaar dan en slechts dan als G^T inverteerbaar is. Stel dat er een kolom $X \in I\!R^n$, $X \neq O$ is, zodat $G^T X = O$ Dan is ook de rijvector $X^T G = O$. Dan zou, met $\mathbf{x} = \mathcal{E}^{-1}X \neq \mathbf{0}$, de covector $\mathcal{E}^*(X^T G) = \mathcal{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dit is in strijd met de zojuist aangetoonde bijectiviteit van $\mathcal{G}$.
(c) We berekenen de componenten van $\mathcal{G}\mathbf{e}_i$ via $< \mathcal{G}\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k >= (\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k) = g_{ik}$. Dan volgt $\mathcal{G}\mathbf{e}_i = g_{ik}\hat{\mathbf{e}}^k$. Ook $\mathcal{G}\mathbf{x} = \mathcal{G}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i g_{ik}\hat{\mathbf{e}}^k$.
(d) Omdat $\mathcal{G}(g^{\ell i}\mathbf{e}_i) = g^{\ell i}\mathcal{G}\mathbf{e}_i = g^{\ell i}g_{ik}\hat{\mathbf{e}}^k = \delta_k^\ell\hat{\mathbf{e}}^k = \hat{\mathbf{e}}^\ell$, volgt $\mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{e}}^\ell = g^{\ell i}\mathbf{e}_i$. Tenslotte $\mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{y}} = \mathcal{G}^{-1}(y_\ell\hat{\mathbf{e}}^\ell) = y_\ell g^{\ell i}\mathbf{e}_i$ □

OPMERKINGEN:

- Het tweede deel van Stelling 1.5.3**(a)** schenkt ons de Representatiestelling van Riesz: Voor iedere lineaire functie $\hat{\mathbf{g}} \in V^*$ bestaat er precies één vector $\mathbf{g} \in V$, namelijk $\mathbf{g} = \mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{g}}$, zodanig dat $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g},\mathbf{x})$ voor iedere $\mathbf{x} \in V$.

- Indien het inproduct aan eigenschap (i) voldoet, dan is de Grammatrix symmetrisch, d.w.z. $G^T = G$. Indien het inproduct aan eigenschap (i)′ voldoet, dan is de Grammatrix antisymmetrisch, d.w.z. $G^T = -G$.

- Voor iedere $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ geldt $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x^i\mathbf{e}_i, y^j\mathbf{e}_j) = x^i y^j g_{ij} = X^T G Y$. Merk op dat in het symmetrische geval, $g_{ij} = g_{ji}$, zodat dan ook $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Y^T G X$.

- Indien in V een tweetal bases, $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, worden aangewezen, dan geldt

  $$g_{i'j'} = (\mathbf{e}_{i'},\mathbf{e}_{j'}) = (A^i_{i'}\mathbf{e}_i, A^j_{j'}\mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}.$$

  We bergen de getallen $g_{i'j'}$ op in een matrix, $G_{,,}$, genaamd, dus $G_{,,} = [g_{i'j'}]$. Met j' als kolomindex kan dit in matrixtaal geschreven worden als $G_{,,} = (A_{,})^T G A_{,}$.

UITGANGSPUNT BETREFFENDE HET INPRODUCT:

- In het vervolg, dus ook in de volgende paragrafen, wordt verondersteld dat het inproduct aan de eigenschappen (i), (ii) en (iii)′ voldoet, tenzij anders vermeld. De Grammatrix zal dus steeds symmetrisch zijn.

Definitie 1.5.4 *In het geval van een Euclidisch inproduct, definiëren we de lengte van een vector* $\mathbf{x}$*, notatie* $|\mathbf{x}|$*, door*

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Lemma 1.5.5 (Ongelijkheid van Cauchy Schwarz) *In het geval van een Euclidisch inproduct geldt voor ieder tweetal vectoren* $\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}$*,*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}|\; |\mathbf{y}|.$$

Deze ongelijkheid heet de ongelijkheid van Cauchy Schwarz.

Definitie 1.5.6 *In het geval van een Euclidisch inproduct kunnen we de hoek* φ *tussen twee vectoren* $\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}$*, beide ongelijk aan de nulvector, definiëren door*

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\; |\mathbf{y}|}\right).$$

1.6 Reciproke basis

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$.
- Een inproduct $(\cdot, \cdot)$ op V.
- Bases $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ in V.
- De bijbehorende duale bases $\{\hat{\mathbf{e}}^i\}$, $\{\hat{\mathbf{e}}^{i'}\}$ in V^*.

Definitie 1.6.1 *Bij de basis* $\{\mathbf{e}_i\}$ *in* V *definiëren we een tweede basis* $\{\mathbf{e}^i\}$ *in* V *door* $\mathbf{e}^i = \mathcal{G}^{-1}\hat{\mathbf{e}}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$*. Deze tweede basis heet de bij de eerste basis behorende reciproke basis.*

OPMERKINGEN:

- Uit $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ volgt $g_{ki}\mathbf{e}^i = g_{ki}g^{ij}\mathbf{e}_j = \delta^j_k\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k$. Deze relaties drukken het verband uit tussen een basis en bijbehorende reciproke basis. We benadrukken nogmaals dat een reciproke basis afhankelijk is van het gekozen inproduct op V. Indien op V een ander inproduct was gekozen dan had bij dezelfde basis een andere reciproke basis gehoord.

- De bij de reciproke basis behorende Grammatrix laat zich eenvoudig berekenen,

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ik} g^{jl} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = g^{ik} g^{jl} g_{kl} = \delta^i_l g^{jl} = g^{ji}.$$

- We hebben $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = g^{il}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) = g^{il} g_{lj} = \delta^i_j$. In zo'n geval zeggen we dat de vectoren $\mathbf{e}^i$ en $\mathbf{e}_j$ voor iedere $i \neq j$ loodrecht op elkaar staan.

Lemma 1.6.2 *Laat $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ bases van V zijn en beschouw hun bijbehorende reciproke bases $\{\mathbf{e}^i\}$ en $\{\mathbf{e}^{i'}\}$. De overgangsmatrix van de basis $\{\mathbf{e}^i\}$ naar de basis $\{\mathbf{e}^{i'}\}$ wordt gegeven door A' en de overgangsmatrix in omgekeerde richting door A,. Dus $\mathbf{e}^i = A^i_{i'} \mathbf{e}^{i'}$ en $\mathbf{e}^{i'} = A^{i'}_i \mathbf{e}^i$*

Bewijs:
Volgt meteen uit de overgangen tussen duale bases. Zie Lemma 1.2.7. Het bewijs aldaar kan ook overgedaan worden zonder 'duaal gedoe': Noteer de overgangsmatrices tussen de bases $\{\mathbf{e}^i\}$ en $\{\mathbf{e}^{i'}\}$ met $B, = [B^{i'}_i]$ en $B' = [B^i_{i'}]$, dus $\mathbf{e}^i = B^i_{i'} \mathbf{e}^{i'}$ en $\mathbf{e}^{i'} = B^{i'}_i \mathbf{e}^i$. Er geldt enerzijds $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta^i_j$ en anderzijds $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = (B^i_{i'} \mathbf{e}^{i'}, A^{j'}_j \mathbf{e}_{j'}) = B^i_{i'} A^{j'}_j \delta^{i'}_{j'} = B^i_{i'} A^{i'}_j$, waaruit volgt dat $B^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j$. Blijkbaar zijn B, en A' elkaars inverse. Daar de inverse van A' gegeven wordt door A, volgt $B, = A$,. Geheel analoog is af te leiden dat $B' = A'$. □

Definitie 1.6.3 *De getallen (ontbindingscoëfficiënten) x_i in de voorstelling $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i$ heten de <u>covariante componenten</u> van de vector $\mathbf{x}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.*

<u>OPMERKINGEN:</u>

- Voor de covariante componenten geldt $x_i = x_j \delta^j_i = x_j (\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i) = (x_j \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$.

- Voor de contravariante componenten geldt $x^i = x^j \delta^i_j = x^j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}^i, x^j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}^i, \mathbf{x})$.

- Ten opzichte van een tweede basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ geldt $x_{i'} = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i'}) = (\mathbf{x}, A^i_{i'} \mathbf{e}_i) = A^i_{i'} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = A^i_{i'} x_i$.

- De covariante componenten transformeren op dezelfde manier als de basisvectoren. Dit in tegenstelling tot de contravariante componenten. Dit verklaart de woorden co- en contravariant. Zie nog onderstaand schema ter verduidelijking.

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^{i'} = A^{i'}_i x^i \\[2em] x_{i'} = A^i_{i'} x_i \end{cases}$$

- Het onderlinge verband tussen de co- en contravariante componenten laat zich beschrijven met behulp van de elementen van de Grammatrix en zijn inverse. Er geldt namelijk $x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x^j (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji} x^j$ en in omgekeerde richting geldt $x^i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}^i) = x_j (\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i) = g^{ji} x_j$. Met behulp van de elementen van de Grammatrix en zijn inverse kunnen indices 'op en neer' gehaald worden.

- Het inproduct tussen twee vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ kan op verschillende manieren geschreven worden,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} x^i y^j g_{ij} = x^i y_i \\ \\ x_i y_j g^{ij} = x_i y^i. \end{cases}$$

SAMENGEVAT:

$$\begin{array}{lll}
x_{i'} = x_i A^i_{i'} & \Leftrightarrow & \hat{X}, = \hat{X}A, \\
x_i = g_{ij} x^j & \Leftrightarrow & \hat{X} = (GX)^T \\
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_i y^i & \Leftrightarrow & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{X}Y \\
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_{i'} y^{i'} & \Leftrightarrow & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{X}, Y\text{'} \\
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij} x^i y^j & \Leftrightarrow & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T G Y \\
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{i'j'} x^{i'} y^{j'} & \Leftrightarrow & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (X\text{'})^T G_{,,} Y\text{'}
\end{array}$$

BELANGRIJKE CONCLUSIE:

BIJ EEN VAST GEKOZEN INPRODUCT $(\cdot, \cdot)$ KAN HET BEGRIP 'DUALE RUIMTE' STRAFFELOOS GENEGEERD WORDEN. ALLE VOORAFGAANDE FORMULES WAARIN DE PARINGSHAAK $< \cdot, \cdot >$ FIGUREERT LEIDEN TOT CORRECTE UITDRUKKINGEN ALS JE DE HOEKIGE HAKEN $< \cdot, \cdot >$ VERVANGT DOOR RONDE HAKEN $(\cdot, \cdot)$ EN TEVENS DE HOEDJES $\hat{}$ WEGLAAT. JE MAG ER VERVOLGENS MEE REKENEN ZOALS BIJ INPRODUCTEN GEBRUIKELIJK IS!

1.7 Speciale bases en transformatiegroepen

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.
- Een inproduct $(\cdot, \cdot)$ op V.

Lemma 1.7.1 *Voor iedere inverteerbare, symmetrische $n \times n$-matrix Q bestaat er een geheel getal $p \in \{0, \cdots, n\}$ en een inverteerbare $n \times n$-matrix A zodanig dat $A^T Q A = \Delta$, waarbij $\Delta = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$. In de matrix Δ staat p keer een 1 en $n-p$ keer een -1. Schrijf $A = [A^j_i]$, $Q = [Q_{ij}]$ en $\Delta = [\Delta_{ij}]$, dan geldt $A^k_i Q_{kl} A^l_j = \Delta_{ij}$ in indexnotatie.*

Bewijs:
Daar Q symmetrisch is bestaat er een orthogonale matrix F zodanig dat

$$F^T Q F = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

Hierbij zijn λ_i de eigenwaarden van Q die zodanig geordend zijn dat $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Omdat Q inverteerbaar is zijn alle λ_i ongelijk aan 0. Definieer de matrix

$$|\Lambda|^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(|\lambda_1|^{-\frac{1}{2}}, \cdots, |\lambda_n|^{-\frac{1}{2}})$$

en vervolgens de matrix $A = F|\Lambda|^{-\frac{1}{2}}$, dan geldt

$$A^T Q A = \left(F|\Lambda|^{-\frac{1}{2}}\right)^T Q F|\Lambda|^{-\frac{1}{2}} = |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} F^T Q F |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} = |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \Lambda |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} = \Delta,$$

waarbij Δ de gezochte diagonaalmatrix is. Merk op dat p juist het aantal positieve eigenwaarden van Q is.

□

Stelling 1.7.2 (Signatuur van een inproduct) *Er bestaat een geheel getal $p \in \{0, \cdots, n\}$ en een basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V zodanig dat*

$$\begin{aligned} (\underline{e}_i, \underline{e}_j) &= \delta_{ij}, \qquad \textit{voor } 1 \leq i \leq p \leq n \textit{ en } 1 \leq j \leq n, \\ (\underline{e}_i, \underline{e}_j) &= -\delta_{ij}, \qquad \textit{voor } p < i \leq n \textit{ en } 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

met $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{als} \quad i = j \\ 0 & \textit{als} \quad i \neq j \end{cases}$.

Bewijs:
Zij $\{\mathbf{c}_i\}$ een basis van V. Laat Q de bij deze basis behorende Grammatrix zijn, dus $Q_{ij} = (\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$. Deze matrix is symmetrisch en inverteerbaar. Op grond van lemma (1.7.1) bestaat er een inverteerbare matrix A zodanig dat $A^T Q A = \Delta = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$. Schrijf $A = [A^i_{i'}]$ en definieer de verzameling $\{\mathbf{c}_{i'}\}$ door $\mathbf{c}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{c}_i$. Omdat A inverteerbaar is, is $\{\mathbf{c}_{i'}\}$ een basis van V en er geldt

$$(c_{i'}, c_{j'}) = A^i_{i'} A^j_{j'} (\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = A^i_{i'} Q_{ij} A^j_{j'} = \Delta_{i'j'}.$$

Definieer nog $\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_{i'}$, dan is de gezochte basis gevonden.

□

OPMERKING:

- Uit voorafgaand bewijs blijkt dat p bepaald wordt door het aantal positieve eigenwaarden van de Grammatrix van een willekeurige basis. Dit aantal is voor iedere basis hetzelfde, zodat p uniek gekoppeld is aan het gekozen inproduct op V. Het getal p heet de signatuur van het inproduct. Indien bijvoorbeeld $p = 1$, dan geeft men deze signatuur ook wel aan met $(+, -, \cdots, -)$.

Definitie 1.7.3 *De bij stelling* 1.7.2 behorende basis $\{\mathbf{e}_i\}$ heet een orthonormale basis van de vectorruimte V.

MERK OP:

- De Grammatrix die bij een orthonormale basis hoort is een diagonaalmatrix, met op de eerste p diagonaalelementen een 1 en op de overige diagonaalelementen een -1. Hierdoor geldt het volgende verband tussen de reciproke basis van een orthonormale basis en de orthonormale basis zelf,

  $$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i \text{ voor } 1 \leq i \leq p \text{ en } \mathbf{e}^i = -\mathbf{e}_i \text{ voor } p < i \leq n.$$

Definitie 1.7.4 *De verzameling overgangsmatrices die overgang tussen orthonormale bases bewerkstelligen heet transformatiegroep. Voor iedere $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$ en $q = n - p$ wordt deze transformatiegroep gedefinieerd door*

$$\mathcal{O}(p,q) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \middle| \, A^T \Delta A = \Delta \right\}.$$

Een speciale ondergroep hiervan is

$$\mathcal{SO}(p,q) = \{ A \in \mathcal{O}(p,q) | \det A = 1 \}.$$

VOORBEELDEN:

- Laat het inproduct op V de signatuur $p = n$ hebben, dan is de groep $\mathcal{O}(p,q)$ precies de verzameling der orthogonale matrices. Deze groep heet orthogonale groep en wordt ook wel aangegeven met $\mathcal{O}(n)$. Een element uit de ondergroep $\mathcal{SO}(n)$ transformeert een orthonormale basis naar een orthonormale basis met dezelfde 'oriëntatie'. Bedenk hierbij dat orthogonale matrices met determinant gelijk aan 1 draaiingen om de oorsprong beschrijven.

- Laat de dimensie van V gelijk aan 4 zijn en het inproduct op V de signatuur $p = 1$ hebben. Een dergelijke inproductruimte heet Minkowski ruimte. De bijbehorende groep $\mathcal{O}(1,3)$ heet de Lorentz groep en elementen uit deze groep heten Lorentz transformaties. Voorbeelden van Lorentz transformaties zijn

  $$A_1 = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  waarbij φ een willekeurig reëel getal is en

  $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

  waarbij T een willekeurig element uit de orthogonale groep $\mathcal{O}(3)$ is.

1.8 Tensoren

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.
- Een inproduct $(\cdot, \cdot)$ op V.

1.8.1 Algemene definitie

Definitie 1.8.1 *Een $\binom{r}{s}$-tensor bij V, $r = 0, 1, 2, \cdots$, $s = 0, 1, 2, \cdots$, is een functie*

$$T\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ keer}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ keer}} \to \mathbb{R},$$

$$\underbrace{(\hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{v}}; \ldots; \hat{\mathbf{z}};}_{r \text{ stuks uit } V^*} \underbrace{\mathbf{v}; \mathbf{w}; \ldots; \mathbf{y})}_{s \text{ stuks uit } V} \mapsto T(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}) \in \mathbb{R},$$

die lineair is in ieder van haar argumenten. Dit betekent dat voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\beta \in \mathbb{R}$ en elke 'gleuf' geldt, bij wijze van voorbeeld,

$$T(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \alpha\hat{\mathbf{z}}_1 + \beta\hat{\mathbf{z}}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}) = \alpha T(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \hat{\mathbf{z}}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}) + \beta T(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \hat{\mathbf{z}}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}).$$

Ter nadere specificatie zeggen we wel dat T contravariant van orde r en covariant van orde s is. Als $p = r + s$ gesteld wordt, spreken we ook wel, kortweg en wat vager, van een p-tensor.

OPMERKING:

- De volgorde waarin de covectoren $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \hat{\mathbf{z}}$ en de vectoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}$ staan is van belang: Twee covectoren of twee vectoren omwisselen geeft een andere functiewaarde van T, in het algemeen. Een vector en een covector verwisselen leidt tot een zinloze uitdrukking.
- Soms wordt een notatie gebruikt waarbij vectoren en covectoren niet in twee afzonderlijke groepjes zijn gesplitst maar wel op vast afgesproken posities staan. De volgorde blijft cruciaal! De voorafgaande opmerking is ook hier van toepassing.

We bespreken nu eerst een aantal tensoren van 'lage orde' als aanloop tot de algemene beschouwingen in paragraaf 1.8.10.

1.8.2 $\binom{0}{0}$-tensor = scalar = getal

Als $p = 0$ vallen er geen vectoren of covectoren in te vullen. De volgende definitie is daarom pure conventie.

Definitie 1.8.2 *Een $\binom{0}{0}$-tensor is een alternatieve benaming voor een reëel getal. Een $\binom{0}{0}$-tensor wordt ook wel scalar genoemd.*

1.8.3 $\binom{1}{0}$-tensor = contravariante 1-tensor = vector

Definitie 1.8.3 *Een $\binom{1}{0}$-tensor is een lineaire afbeelding van V^* naar $\mathbb{R}$.*

MERK OP:

- Schrijf de tensor als $\hat{\mathbf{y}} \mapsto T(\hat{\mathbf{y}})$. Volgens Lemma (1.3.2) is er dan een vector $\mathbf{a} \in V$ zodat $T(\hat{\mathbf{y}}) =< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{a} >$, voor alle $\hat{\mathbf{y}} \in V^*$. De verzameling der $\binom{1}{0}$-tensoren is dus precies gelijk aan de vectorruimte V waar we vanuit gegaan zijn.
- Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V kan een $\binom{1}{0}$-tensor T geschreven worden als $T = T(\hat{\mathbf{e}}^i)\mathbf{e}_i = T^i\mathbf{e}_i$. Hier is $T^i\mathbf{e}_i = a^i\mathbf{e}_i = \mathbf{a}$. Voor iedere $\hat{\mathbf{y}} \in V^*$ geldt immers

$$T(\hat{\mathbf{y}}) = T(y_i\hat{\mathbf{e}}^i) = y_iT(\hat{\mathbf{e}}^i) = T(\hat{\mathbf{e}}^i) < \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_i >=< \hat{\mathbf{y}}, a^i\mathbf{e}_i >=< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{a} > .$$

Definitie 1.8.4 *De getallen $T^i = T(\hat{\mathbf{e}}^i)$ heten de (contravariante) componenten van de tensor T ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$. Dit verklaart ook de benaming 'contravariante 1-tensor'.*

1.8.4 $\binom{0}{1}$-tensor = covariante 1-tensor = covector

Definitie 1.8.5 *Een $\binom{0}{1}$-tensor is een lineaire afbeelding van V naar $\mathbb{R}$.*

MERK OP:

- Schrijf de tensor als $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x})$. Volgens Definitie (1.2.1) is F een lineaire functie op V en kan geschreven worden als $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) =< \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{x} >$, voor zekere $\hat{\mathbf{f}} \in V^*$. De verzameling der $\binom{0}{1}$-tensoren is dus precies gelijk aan de duale ruimte V^* van de ruimte V waar we vanuit gegaan zijn.
- Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V kan een $\binom{0}{1}$-tensor F geschreven worden als $F = F(\mathbf{e}_i)\hat{\mathbf{e}}^i = F_i\hat{\mathbf{e}}^i$. Hier is $F_i\hat{\mathbf{e}}^i = f_i\hat{\mathbf{e}}^i = \hat{\mathbf{f}}$. Voor iedere $\mathbf{x} \in V$ geldt immers

$$F(\mathbf{x}) = F(x^i\mathbf{e}_i) = x^iF(\mathbf{e}_i) = F(\mathbf{e}_i) < \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} >=< f_i\hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} >=< \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{x} > .$$

Definitie 1.8.6 *De getallen $F_i = F(\mathbf{e}_i) = f_i$ heten de (covariante) componenten van de tensor F ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$. Dit verklaart ook de benaming 'covariante 1-tensor'.*

1.8.5 $\binom{0}{2}$-tensor = covariante 2-tensor = lineaire afbeelding: $V \to V^*$

Definitie 1.8.7 *Een $\binom{0}{2}$-tensor is een afbeelding van $V \times V$ naar $\mathbb{R}$, die lineair is in beide argumenten. Een $\binom{0}{2}$-tensor heet ook wel een bilineaire functie op $V \times V$.*

TOELICHTING:

- Voor een $\binom{0}{2}$-tensor φ geldt: $\varphi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ en $\varphi(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ en voor alle $\alpha, \beta \in I\!R$.

Definitie 1.8.8 *Voor ieder tweetal $\binom{0}{2}$-tensoren φ en ψ wordt de $\binom{0}{2}$-tensor $\varphi + \psi$ gedefinieerd door $(\varphi + \psi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en voor iedere $\alpha \in I\!R$ wordt de $\binom{0}{2}$-tensor $\alpha\varphi$ gedefinieerd door $(\alpha\varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.*

OPMERKING:

- De verzameling der $\binom{0}{2}$-tensoren is een vectorruimte over $I\!R$ die genoteerd wordt met $V^* \otimes V^*$ en ook wel met $\mathbf{T}^0_2(V)$.

VOORBEELD:

- Ieder type inproduct op V, zoals beschouwd in sectie(1.5), is een $\binom{0}{2}$-tensor. Indien op een vectorruimte een vaste keuze voor een inproduct gemaakt wordt, dan heet zo'n inproduct, op z'n 19e eeuws, de fundamentaaltensor .

Definitie 1.8.9 *Voor iedere $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}} \in V^*$ wordt de $\binom{0}{2}$-tensor $\hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}}$ op V gedefinieerd door*

$$(\hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}})\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = <\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{x}><\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{y}> .$$

MERK OP: $\hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}} \neq \hat{\mathbf{q}} \otimes \hat{\mathbf{p}}$, als het stelsel $\{\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}\}$ een onafhankelijk stelsel is.

Definitie 1.8.10 *Met een lineaire afbeelding $\mathcal{K} : V \to V^*$ associëren we op twee manieren een $\binom{0}{2}$-tensor :*

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = <\mathcal{K}\mathbf{x}, \mathbf{y}>,$$

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = <\mathcal{K}\mathbf{y}, \mathbf{x}>,$$

Met goeie afspraken blijkt er een 1 op 1 correspondentie te bestaan tussen $\binom{0}{2}$-tensoren en lineaire afbeeldingen van V naar V^*.

Stelling 1.8.11
Gegeven: Een $\binom{0}{2}$-tensor K.
• Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{K} : V \to V^*$ zodat

$$\forall \mathbf{x} \in V\, \forall \mathbf{y} \in V: \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = <\mathcal{K}\mathbf{x}, \mathbf{y}> .$$

Expliciet: $\mathcal{K} = K(\cdot, \mathbf{e}_i)\hat{\mathbf{e}}^i$, dus $\mathcal{K}\mathbf{u} = K(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)\hat{\mathbf{e}}^i$.
• Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{K}^* : V \to V^*$ zodat

$$\forall \mathbf{x} \in V\, \forall \mathbf{y} \in V: \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = <\mathcal{K}^*\mathbf{y}, \mathbf{x}> .$$

Expliciet: $\mathcal{K}^* = K(\mathbf{e}_i, \cdot)\hat{\mathbf{e}}^i$, dus $\mathcal{K}^*\mathbf{w} = K(\mathbf{e}_i, \mathbf{w})\hat{\mathbf{e}}^i$.

Bewijs
• Kies een vaste $\mathbf{a} \in V$. We beschouwen de $\binom{0}{1}$-tensor $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Door nu $\mathbf{a}$ toch als variabel op te vatten wordt een lineaire afbeelding $\mathcal{K} : V \to V^*$ gedefinieerd door $\mathbf{a} \mapsto K(\mathbf{a}, \cdot) =< \mathcal{K}\mathbf{a}, \cdot >$. Dan $K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =< \mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} >$. De expliciete voorstelling laat zich nu raden. Blijkbaar geldt bij basiswisseling $\mathcal{K}\mathbf{u} = \kappa(\mathbf{u}, \mathbf{e}_{i'})\hat{\mathbf{e}}^{i'}$.

• Kies een vaste $\mathbf{b} \in V$. Beschouw nu de $\binom{0}{1}$-tensor $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. Definiëer de lineaire afbeelding $\mathcal{K}^* : V \to V^*$ door $\mathbf{b} \mapsto K(\cdot, \mathbf{b}) =< \mathcal{K}^*\mathbf{b}, \cdot >$. Dan $K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =< \mathcal{K}^*\mathbf{v}, \mathbf{u} >$. De expliciete voorstelling na basiswisseling is in dit geval $\mathcal{K}^*\mathbf{u} = \kappa(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{u})\hat{\mathbf{e}}^{i'}$. □

<u>MERK OP:</u>
• Als $\forall \mathbf{x} \in V \, \forall \mathbf{y} \in V : \; K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ dan geldt $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$.
• Als $\forall \mathbf{x} \in V \, \forall \mathbf{y} \in V : \; K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -K(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ dan geldt $\mathcal{K} = -\mathcal{K}^*$. Bij toepassingen wordt vaak gesuggereerd dat een 2-tensor *hetzelfde* is als een matrix. Daar valt een heleboel tegen in te brengen. Na basiskeuze kun je een 2-tensor *voorstellen* door een matrix, net zoals dat bij lineaire afbeeldingen gebruikelijk is.

Definitie 1.8.12 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V en φ een $\binom{0}{2}$-tensor op V. De getallen φ_{ij}, gedefinieerd door $\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, heten de <u>(covariante) componenten</u> van de tensor φ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.*

<u>MERK OP:</u>

- De toevoeging 'covariant' bij (covariante) componenten doet hier eigenlijk niet terzake. Er zijn geen andere componenten dan covariante omdat alleen vectoren ingevuld mogen worden. Zie echter ook paragraaf 1.8.11.
- Voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i y^j \varphi_{ij}$.
- De actie van een $\binom{0}{2}$-tensor op twee vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ kan geschreven worden als $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij} x^i x^j$.
- Zij $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ een tweede basis van V, dan geldt $\varphi_{i'j'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \varphi(A^i_{i'}\mathbf{e}_i, A^j_{j'}\mathbf{e}_j) = A^i_{i'} A^j_{j'} \varphi_{ij}$, waarmee het verband tussen de covariante componenten van een tensor tussen twee willekeurige bases is aangegeven. Vergelijk met sectie(1.4).

Definitie 1.8.13 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V. Bij elk paar indices i en j wordt de $\binom{0}{2}$-tensor $\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$ gedefinieerd door*

$$\left(\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x})\hat{\mathbf{e}}^j(\mathbf{y}) =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{e}}^j, \mathbf{y} > .$$

Lemma 1.8.14
• *De verzameling $\left\{\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right\}$ vormt een basis van $\mathbf{T}^0_2(V)$. Er geldt: $\varphi = \varphi_{ij}\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$*
• *Als $\dim V = n$ dan is $\dim \mathbf{T}^0_2(V) = n^2$.*

Bewijs:
Laat $\varphi \in \mathbf{T}^0_2(V)$, dan geldt voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(x^i\mathbf{e}_i, y^j\mathbf{e}_j) = \varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ij} < \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{e}}^j, \mathbf{y} >= \varphi_{ij}\left(\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

ofwel

$$\varphi = \varphi_{ij}\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j.$$

De vectorruimte $\mathbf{T}^0_2(V)$ wordt dus opgespannen door de verzameling $\{\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\}$. Rest te bewijzen dat de verzameling $\{\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Laat daartoe α_{ij} een n^2-tal getallen zijn zodanig dat $\alpha_{ij}\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j = 0$. Dan geldt voor iedere k en l,

$$0 = \alpha_{ij}\left(\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \alpha_{ij}\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_k)\hat{\mathbf{e}}^j(\mathbf{e}_l) = \alpha_{ij}\delta^i_k\delta^j_l = \alpha_{kl}.$$

□

<u>OPMERKING:</u> Zoals eerder vermeld is een inproduct een $\binom{0}{2}$-tensor. De hierbij te beschouwen lineaire afbeelding van V naar V^* wordt gegeven door $\mathbf{a} \mapsto (\mathbf{a}, \cdot)$. Dit is precies de bijectieve lineaire afbeelding $\mathcal{G}$ uit Stelling 1.5.3.

1.8.6 $\binom{2}{0}$-tensor = contravariante 2-tensor = lineaire afbeelding: $V^* \to V$

Definitie 1.8.15 *Een <u>$\binom{2}{0}$-tensor</u> is een afbeelding van $V^* \times V^*$ naar $\mathbb{R}$, die lineair is in beide argumenten. Een $\binom{2}{0}$-tensor heet ook wel een <u>bilineaire functie</u> op $V^* \times V^*$.*

<u>TOELICHTING:</u>

- Voor een $\binom{0}{2}$-tensor H geldt $H(\alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}) = \alpha H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) + \beta H(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ en $H(\hat{\mathbf{x}}, \alpha\hat{\mathbf{y}} + \beta\hat{\mathbf{z}}) = \alpha H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) + \beta H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, voor alle $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \in V^*$ en voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definitie 1.8.16 *Voor ieder tweetal $\binom{0}{2}$-tensoren H en h wordt de $\binom{2}{0}$-tensor $H + h$ gedefinieerd door $(H + h)(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) + h(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ en voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$ wordt de $\binom{2}{0}$-tensor αH gedefinieerd door $(\alpha H)(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \alpha H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$.*

<u>OPMERKING:</u>

- De verzameling der $\binom{2}{0}$-tensoren is een vectorruimte over $\mathbb{R}$ die genoteerd wordt met $V \otimes V$ en ook wel met $\mathbf{T}^2_0(V)$.

Definitie 1.8.17 *Voor ieder stel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ wordt de $\binom{2}{0}$-tensor $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ gedefinieerd door*

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = < \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{y} > .$$

<u>MERK OP:</u> $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$, als het stelsel $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ een onafhankelijk stelsel is.

Definitie 1.8.18 *Met een lineaire afbeelding $\mathcal{H} : V^* \to V$ associëren we op twee manieren een $\binom{2}{0}$-tensor :*

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = < \hat{\mathbf{x}}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} >,$$

$$h(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = < \hat{\mathbf{y}}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{x}} >,$$

Met goeie afspraken blijkt er een 1 op 1 correspondentie te bestaan tussen $\binom{2}{0}$-tensoren en lineaire afbeeldingen van V^* naar V.

Stelling 1.8.19
Gegeven: Een $\binom{2}{0}$-tensor H.
• *Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{H} : V^* \to V$ zodat*

$$\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^*\ \forall\, \hat{\mathbf{y}} \in V^*: \quad H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) =< \hat{\mathbf{x}}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{y}} > .$$

Expliciet: $\mathcal{H} = H(\hat{\mathbf{e}}^i, \cdot)\mathbf{e}_i$, dus $\mathcal{H}\mathbf{v} = H(\hat{\mathbf{e}}^i, \hat{\mathbf{v}})\mathbf{e}_i$.
• *Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{H}^* : V^* \to V$ zodat*

$$\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^*\ \forall\, \hat{\mathbf{y}} \in V^*: \quad H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) =< \hat{\mathbf{y}}, \mathcal{H}^*\hat{\mathbf{x}} > .$$

Expliciet: $\mathcal{H}^* = H(\cdot, \hat{\mathbf{e}}^i)\mathbf{e}_i$, dus $\mathcal{H}^*\hat{\mathbf{v}} = H(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{e}}^i)\mathbf{e}_i$.

Bewijs
• Kies een vaste $\hat{\mathbf{b}} \in V^*$. We beschouwen de $\binom{1}{0}$-tensor $\hat{\mathbf{x}} \mapsto H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{b}})$. Door nu $\hat{\mathbf{b}}$ toch als variabel op te vatten wordt een lineaire afbeelding $\mathcal{H} : V^* \to V$ gedefinieerd door $\hat{\mathbf{b}} \mapsto H(\cdot, \hat{\mathbf{b}}) =< \cdot, \mathcal{H}\hat{\mathbf{b}} >$. Dan $H(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) =< \hat{\mathbf{u}}, \mathcal{H}\hat{\mathbf{v}} >$. De expliciete voorstelling laat zich nu raden. Blijkbaar geldt na basiswisseling $\mathcal{H}\hat{\mathbf{u}} = H(\hat{\mathbf{e}}^{i'}, \hat{\mathbf{u}})\mathbf{e}_{i'}$.

• Kies een vaste $\hat{\mathbf{a}} \in V^*$.Beschouw nu de $\binom{1}{0}$-tensor $\hat{\mathbf{x}} \mapsto H(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{x}})$. Door nu $\hat{\mathbf{a}}$ toch als variabel op te vatten wordt een lineaire afbeelding $\mathcal{H}^* : V^* \to V$ gedefinieerd door
$\hat{\mathbf{a}} \mapsto H(\hat{\mathbf{a}}, \cdot) =< \cdot, \mathcal{H}^*\hat{\mathbf{a}} >$. Dan $H(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) =< \hat{\mathbf{v}}, \mathcal{H}^*\hat{\mathbf{u}} >$. De expliciete voorstelling laat zich nu raden. Blijkbaar geldt na basiswisseling $\mathcal{H}^*\hat{\mathbf{u}} = H(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{e}}^{i'})\mathbf{e}_{i'}$. Vergelijk met sectie(1.4). □

<u>MERK OP:</u>
• Als $\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^*\ \forall\, \hat{\mathbf{y}} \in V^* :\ H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = H(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})$ dan geldt $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$.
• Als $\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^*\ \forall\, \hat{\mathbf{y}} \in V^* :\ H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = -H(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})$ dan geldt $\mathcal{H} = -\mathcal{H}^*$.

Definitie 1.8.20 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V en H een $\binom{2}{0}$-tensor op V. De getallen H^{ij}, gedefinieerd door $H^{ij} = H(\hat{\mathbf{e}}^i, \hat{\mathbf{e}}^j)$, heten de <u>(contravariante) componenten</u> van de tensor H ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.*

<u>MERK OP:</u>

- De toevoeging 'contravariant' bij (contravariante) componenten is ook hier redundant. Zie echter ook paragraaf 1.8.11.
- Voor $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in V^*$ geldt $H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = x_i y_j H^{ij}$.
- De actie van een $\binom{2}{0}$-tensor H op twee covectoren $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ kan geschreven worden als $H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = H^{ij} x_i x_j$.
- Zij $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ een tweede basis van V, dan geldt $H^{i'j'} = H(\hat{\mathbf{e}}^{i'}, \hat{\mathbf{e}}^{j'}) = H(A^{i'}_i \hat{\mathbf{e}}^i, A^{j'}_j \hat{\mathbf{e}}^j) = A^{i'}_i A^{j'}_j H^{ij}$, waarmee het verband tussen de (contra)variante componenten van een $\binom{2}{0}$-tensor voor twee willekeurige bases is aangegeven.

Definitie 1.8.21 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V. Bij elk paar indices i en j wordt de $\binom{2}{0}$-tensor $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ gedefinieerd door*

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\,(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) =< \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_i >< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_j > .$$

Lemma 1.8.22
- *De verzameling $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ vormt een basis van $\mathbf{T}^2_0(V)$. Er geldt: $H = H^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$*
- *Als* $\dim V = n$ *dan is* $\dim \mathbf{T}^2_0(V) = n^2$.

Bewijs:
Laat $\theta \in \mathbf{T}^2_0(V)$, dan geldt voor alle $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in V^*$

$$\theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \theta(x_i\hat{\mathbf{e}}^i, y_j\hat{\mathbf{e}}^j) = \theta^{ij}x_iy_j = \theta^{ij} < \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_i >< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_j >= \theta^{ij}\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\,(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}),$$

ofwel

$$\theta = \theta^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

De vectorruimte $\mathbf{T}^2_0(V)$ wordt dus opgespannen door de verzameling $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$. Rest te bewijzen dat de verzameling $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Ook dit gaat net zo als in het bewijs van Lemma(1.8.14) □

1.8.7 $\binom{1}{1}$-tensor = gemengde 2-tensor = lin afb: $V \to V$ en $V^* \to V^*$

Definitie 1.8.23 *Een $\binom{1}{1}$-tensor is een afbeelding van $V^* \times V$ naar $\mathbb{R}$, die lineair is in beide argumenten. Een $\binom{1}{1}$-tensor heet ook wel een bilineaire functie op $V^* \times V$.*

TOELICHTING:

- Voor een $\binom{1}{1}$-tensor R geldt $R(\alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) = \alpha R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + \beta R(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$ en $R(\hat{\mathbf{x}}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \beta R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$, voor alle $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in V^*$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ en voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definitie 1.8.24 *Voor ieder tweetal $\binom{1}{1}$-tensoren R en r wordt de $\binom{1}{1}$-tensor $R + r$ gedefinieerd door $(R + r)(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + h(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ en voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$ wordt de $\binom{1}{1}$-tensor αR gedefinieerd door $(\alpha R)(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \alpha R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$.*

OPMERKING:

- De verzameling der $\binom{1}{1}$-tensoren is een vectorruimte over $\mathbb{R}$ die genoteerd wordt met $V \otimes V^*$ en ook wel met $\mathbf{T}^1_1(V)$.

Definitie 1.8.25 *Voor ieder stel $\mathbf{x} \in V$, $\hat{\mathbf{y}} \in V^*$ wordt de $\binom{1}{1}$-tensor $\mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{y}}$ gedefinieerd door*

$$(\mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{y}})\,(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) =< \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v} > .$$

Definitie 1.8.26
• *Met een lineaire afbeelding $\mathcal{R} : V \to V$ associëren we een $\binom{1}{1}$-tensor :*

$$R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) =< \hat{\mathbf{x}}, \mathcal{R}\mathbf{y} >,$$

• *Met een lineaire afbeelding $\mathcal{P} : V^* \to V^*$ associëren we een $\binom{1}{1}$-tensor :*

$$P(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) =< \mathcal{P}\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} >,$$

Er blijkt er een 1 op 1 correspondentie te bestaan tussen $\binom{1}{1}$-tensoren en lineaire afbeeldingen van V naar V. Er blijkt ook een 1 op 1 correspondentie te bestaan tussen $\binom{1}{1}$-tensoren en lineaire afbeeldingen van V^* naar V^*.

Stelling 1.8.27
Gegeven: Een $\binom{1}{1}$-tensor R.
• *Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{R} : V \to V$ zodat*

$$\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^* \;\forall\, \mathbf{y} \in V : \quad R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) =< \hat{\mathbf{x}}, \mathcal{R}\mathbf{y} > .$$

Expliciet: $\mathcal{R} = R(\hat{\mathbf{e}}^i, \cdot)\mathbf{e}_i$, dus $\mathcal{R}\mathbf{v} = R(\hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{v})\mathbf{e}_i$.
• *Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{R}^* : V^* \to V^*$ zodat*

$$\forall\, \hat{\mathbf{x}} \in V^* \;\forall\, \mathbf{y} \in V : \quad R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) =< \mathcal{R}^*\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y} > .$$

Expliciet: $\mathcal{R}^* = R(\cdot, \mathbf{e}_j)\hat{\mathbf{e}}^j$, dus $\mathcal{R}^*\hat{\mathbf{u}} = R(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_j)\hat{\mathbf{e}}^j$.

Bewijs
• Laat R gegeven zijn. Bij iedere vaste $\mathbf{a} \in V$ hoort de $\binom{1}{0}$-tensor $\hat{\mathbf{x}} \mapsto R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{a})$, een element van V dus. De lineaire afbeelding $\mathcal{R} : V \to V$ wordt nu gedefinieerd door
$\mathbf{a} \mapsto R(\cdot, \mathbf{a}) =< \cdot, \mathcal{R}\mathbf{a} >= \mathcal{R}\mathbf{a}$. Blijkbaar geldt na basiswisseling $\mathcal{R}\mathbf{u} = R(\hat{\mathbf{e}}^{i'}, \hat{\mathbf{u}})\mathbf{e}_{i'}$, zodat de voorstelling ongevoelig is voor basiswisseling.

• Bij iedere vaste vaste $\hat{\mathbf{b}} \in V^*$ hoort de $\binom{0}{1}$-tensor $\mathbf{y} \mapsto R(\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{y})$, een element van V^* dus. De lineaire afbeelding $\mathcal{R}^* : V^* \to V$ wordt nu gedefinieerd door $\hat{\mathbf{b}} \mapsto R(\hat{\mathbf{b}}, \cdot) =< \mathcal{R}^*\hat{\mathbf{b}}, \cdot >$. Dan $R(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) =< \mathcal{R}^*\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u} >$. De expliciete voorstelling laat zich nu raden. De expliciete voorstelling is ongevoelig voor basiswisseling: $\mathcal{R}^*\hat{\mathbf{u}} = R(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{e}}_{j'})\hat{\mathbf{e}}^{j'}$. Vergelijk met sectie(1.4). □

MERK OP:
• Verwisselen van $\hat{\mathbf{x}}$ en $\mathbf{y}$ in $R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ leidt tot een zinloze uitdrukking.

Definitie 1.8.28 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V en R een $\binom{1}{1}$-tensor bij V. De getallen R^i_j , gedefinieerd door $R^i_j = R(\hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{e}_j)$, heten de (gemengde) componenten van de tensor R ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$.*

MERK OP:

• Voor $\hat{\mathbf{x}} \in V^*$, $\mathbf{y} \in V$ geldt $R(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = x_i y^j R^i_j$.

- Zij $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ een tweede basis van V, dan geldt $R^{i'}_{j'} = R(\hat{\mathbf{e}}^{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = R(A^{i'}_i \hat{\mathbf{e}}^i, A^j_{j'} \mathbf{e}_j) = A^{i'}_i A^j_{j'} R^i_j$, waarmee het verband tussen de (gemengde) componenten van een $\binom{1}{1}$-tensor voor twee willekeurige bases is aangegeven.

MERK OP:
• De toevoeging 'gemengde' bij (gemengde) componenten doet ook hier eigenlijk niet terzake. Je kunt niets anders. Zie echter ook paragraaf 1.8.11.

Definitie 1.8.29 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V. Bij elk paar indices i en j wordt de $\binom{1}{1}$-tensor $\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$ gedefinieerd door*

$$\left(\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) =< \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_i >< \hat{\mathbf{e}}^j, \mathbf{y} > .$$

Lemma 1.8.30
• *De verzameling $\left\{\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right\}$ vormt een basis van $\mathbf{T}^1_1(V)$. Er geldt: $R = R^i_j \mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$*
• *Als* $\dim V = n$ *dan is* $\dim \mathbf{T}^1_1(V) = n^2$.

Bewijs:
Laat $\psi \in \mathbf{T}^1_1(V)$, dan geldt voor alle $\hat{\mathbf{x}} \in V^*$, $\mathbf{y} \in V$

$$\psi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \psi(x_i \hat{\mathbf{e}}^i, y^j \mathbf{e}_j) = \psi^i_j x_i y^j = \psi^i_j < \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_i >< \hat{\mathbf{e}}^j, \mathbf{y} >= \psi^i_j \left(\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right)(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}),$$

ofwel

$$\psi = \psi^i_j \mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j.$$

De vectorruimte $\mathbf{T}^1_1(V)$ wordt dus opgespannen door de verzameling $\left\{\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right\}$. Rest te bewijzen dat de verzameling $\left\{\mathbf{e}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Dit gaat weer net zo als in het bewijs van Lemma(1.8.14) □

1.8.8 $\binom{0}{3}$-tensor = covariante 3-tensor = lin afb: $V \to (V^* \otimes V^*)$ en $(V \otimes V) \to V^*$

Definitie 1.8.31 *Een $\binom{0}{3}$-tensor is een afbeelding van $V \times V \times V$ naar $I\!R$, die lineair is in ieder van haar drie vector argumenten.*

De betekenis hiervan is de voor de hand liggende uitbreiding van de toelichtingen na Definities 1.8.7,1.8.15 en 1.8.23. Zie ook de algemene Definitie(1.8.1)

Definitie 1.8.32 *Voor ieder tweetal $\binom{0}{3}$-tensoren Ψ en σ wordt de $\binom{0}{3}$-tensor $\Psi + \sigma$ gedefinieerd door $(\Psi + \sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ en voor iedere $\alpha \in I\!R$ wordt de $\binom{0}{3}$-tensor $\alpha\Psi$ gedefinieerd door $(\alpha\Psi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.*

OPMERKING:

- De verzameling der $\binom{0}{3}$-tensoren vormt een vectorruimte over $I\!R$ die genoteerd wordt met $V^* \otimes V^* \otimes V^*$ en ook wel met $\mathbf{T}^0_3(V)$.

Definitie 1.8.33 *Voor iedere $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}} \in V^*$ wordt de $\binom{0}{3}$-tensor $\hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{w}}$ gedefinieerd door*

$$(\hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{w}})\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) =< \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{y} >< \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z} > .$$

OPMERKING: Ook hier is de volgorde in het tensorproduct weer van wezenlijk belang.

Definitie 1.8.34 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V en Ψ een $\binom{0}{3}$-tensor op V. De getallen Ψ_{hij}, gedefinieerd door $\Psi_{hij} = \Psi(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, heten de (covariante) componenten van de tensor Ψ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$. De collectie covariante componenten van een $\binom{0}{3}$-tensor, opgeborgen in een 3-dimensionale kubische matrix, wordt genoteerd met $[\Psi_{hij}]$.*

Lemma 1.8.35
- *De verzameling $\left\{\hat{\mathbf{e}}^h \otimes \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j\right\}$ vormt een basis van $\mathbf{T}^0_3(V)$. Er geldt: $\Psi = \Psi_{hij}\hat{\mathbf{e}}^h \otimes \hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$.*
- *Als $\dim V = n$ dan is $\dim \mathbf{T}^0_3(V) = n^3$.*

OPMERKINGEN:

- Een $\binom{0}{3}$-tensor Ψ kan (op 3 verschillende manieren!) worden opgevat als een lineaire afbeelding van V naar $\mathbf{T}^0_2(V) = V^* \otimes V^*$. Dus op 6 verschillende manieren als een lineaire afbeelding van V naar de 'vectorruimte van lineaire afbeeldingen $V \to V^*$'. Simpel gezegd, als je in een gleuf van Ψ een vector $\mathbf{a}$ uit V invult, dan hou je een $\binom{0}{2}$-tensor over, bijvoorbeeld $\Psi(\cdot, \mathbf{a}, \cdot)$. In indexnotatie $\Psi_{hij}a^i$.

- Een $\binom{0}{3}$-tensor Ψ kan op 6 verschillende manieren worden opgevat als een lineaire afbeelding van 'vectorruimte van lineaire afbeeldingen $V^* \to V$' naar V^*. Laat $\mathcal{H} = H^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Dan definieert, bijvoorbeeld,

  $$\Psi(\mathbf{e}_i\,, \mathbf{e}_j\,, \cdot\,)H^{ij} = \Psi(\mathbf{e}_i\,, \mathbf{e}_j\,, \mathbf{e}_k)H^{ij}\hat{\mathbf{e}}^k = \Psi(\mathbf{e}_i\,, \mathbf{e}_j\,, \mathbf{e}_k)H^{ij} < \hat{\mathbf{e}}^k, \,\cdot\, >,$$

  een covector. Die overigens niet van de basiskeuze afhangt. In indexnotatie $\Psi_{ijk}H^{ij}$.

- Een belangrijk speciaal geval is de spanningstensor die een 'spanningstoestand' in een oneindig uitgestrekt lineair medium beschrijft. Een spanningstensor heeft de eigenschap $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V : \quad \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$. Beschouw een georiënteerd parallellogram, opgespannen door vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dan stelt de covector $\hat{\mathbf{f}} = \Psi(\,\cdot\,, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ de kracht voor die op het parallellogram werkt. Inderdaad, als je $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ omwisselt, dan verandert de kracht $\hat{\mathbf{f}}$ van teken (actie=-reactie). Met gebruik van een inwendig product én een uitwendig product kun je, minder algemeen en minder elegant, een lineaire spanningstoestand ook met een 2-tensor beschrijven. Dat is wat je in de meeste leerboeken aantreft. Zie ook de appendix hierover.

1.8.9 $\binom{2}{2}$-tensor = gemengde 4-tensor = lin afb: $\big(V \to V\big) \to \big(V \to V\big)$ = $\cdots$

Definitie 1.8.36 *Een $\binom{2}{2}$-tensor is een afbeelding van $V^* \times V^* \times V \times V$ naar $I\!R$, die lineair is in ieder van haar vier argumenten.*

Voor nadere uitleg hiervan, kijk naar de algemene Definitie(1.8.1).

Definitie 1.8.37 *Voor ieder tweetal $\binom{2}{2}$-tensoren Θ en Ξ wordt de $\binom{2}{2}$-tensor $\Theta + \Xi$ gedefinieerd door $(\Theta + \Xi)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Xi(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Voor $\alpha \in I\!R$ wordt de $\binom{2}{2}$-tensor $\alpha\Theta$ gedefinieerd door $(\alpha\Theta)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha\Theta(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$.*

OPMERKING:

- De verzameling der $\binom{2}{2}$-tensoren vormt een vectorruimte over $I\!R$ die genoteerd wordt met $V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*$ en ook wel met $\mathbf{T}^2_2(V)$.

Definitie 1.8.38 *Voor iedere set $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \in V^*$ wordt de $\binom{2}{2}$-tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{c}} \otimes \hat{\mathbf{d}}$ gedefinieerd door*

$$\left(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{c}} \otimes \hat{\mathbf{d}}\right)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) =< \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{a} >< \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{b} >< \hat{\mathbf{c}}, \mathbf{x} >< \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{y} > .$$

OPMERKING: Ook hier is weer, bijvoorbeeld, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{c}} \otimes \hat{\mathbf{d}} \neq \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{d}} \otimes \hat{\mathbf{c}}$, als het stelsel $\{\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}}\}$ een onafhankelijk stelsel is.

Definitie 1.8.39 *Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ een basis van V en Θ een $\binom{2}{2}$-tensor bij V. De getallen Θ^{jk}_{hi}, gedefinieerd door $\Theta^{jk}_{hi} = \Theta(\hat{\mathbf{e}}^j, \hat{\mathbf{e}}^k, \mathbf{e}_h, \mathbf{e}_i)$, heten de (gemengde) componenten van de tensor Θ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{e}_i\}$. De collectie gemengde componenten van een $\binom{2}{2}$-tensor, opgeborgen in een 4-dimensionale kubische matrix, wordt genoteerd met $[\Theta^{jk}_{hi}]$.*

Lemma 1.8.40
- *De verzameling $\left\{\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}^h \otimes \hat{\mathbf{e}}^i\right\}$ vormt een basis van $\mathbf{T}^2_2(V)$.*
Er geldt: $\Theta = \Theta^{jk}_{hi}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}^h \otimes \hat{\mathbf{e}}^i$.
- *Als $\dim V = n$, dan is $\dim \mathbf{T}^2_2(V) = n^4$.*

OPMERKINGEN:

Een $\binom{2}{2}$-tensor Θ kan op diverse manieren worden opgevat als een lineaire afbeelding van een 'ruimte van lineaire afbeeldingen' naar een 'ruimte van lineaire afbeeldingen'.

- Geval $(V \to V) \to (V \to V)$ en $(V \to V) \to (V^* \to V^*)$.

Laat $\mathcal{R} : V \to V$ een lineaire afbeelding zijn. Schrijf $\mathcal{R} = R^\ell_m \mathbf{e}_\ell \otimes \hat{\mathbf{e}}^m$. Vorm de $\binom{1}{1}$-tensor $R^\ell_m \Theta(\cdot, \hat{\mathbf{e}}^m, \mathbf{e}_\ell, \cdot)$. Deze kan, naar behoefte, als een lineaire afbeelding $V \to V$, dan wel

$V^* \to V^*$ worden opgevat. We beschrijven de acties van deze 'beeld-afbeeldingen' op V respectievelijk V^*:

$$\begin{array}{rclcl} (\Theta\mathcal{R}) : V \to V & : & \mathbf{x} \mapsto (\Theta\mathcal{R})\mathbf{x} & = & R^\ell_m \Theta(\hat{\mathbf{e}}^j, \hat{\mathbf{e}}^m, \mathbf{e}_\ell\,, \mathbf{x}\,)\mathbf{e}_j = \\ & & & = & R^{\ell'}_{m'} \Theta(\hat{\mathbf{e}}^{j'}, \hat{\mathbf{e}}^{m'}, \mathbf{e}_{\ell'}\,, \mathbf{x}\,)\mathbf{e}_{j'}\,, \\ (\Theta\mathcal{R})^* : V^* \to V^* & : & \hat{\mathbf{x}} \mapsto (\Theta\mathcal{R})\hat{\mathbf{x}} & = & R^\ell_m \Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{e}}^m, \mathbf{e}_\ell\,, \mathbf{e}_j\,)\hat{\mathbf{e}}^j = \\ & & & = & R^{\ell'}_{m'} \Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{e}}^{m'}, \mathbf{e}_{\ell'}\,, \mathbf{e}_{j'}\,)\hat{\mathbf{e}}^{j'}. \end{array}$$

In indexnotatie staat hier

$$[R^k_h] \mapsto [(\Theta R)^k_h] = [\Theta^{jk}_{hi} R^i_j], \quad [x^k] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} R^i_j x^h], \quad [x_h] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} R^i_j x_k].$$

Dit spelletje kan ook gespeeld worden door sommaties over andere indices uit te voeren.

• Geval $(V \to V^*) \to (V \to V^*)$ en $(V^* \to V) \to (V^* \to V)$.
Laat $\mathcal{K} : V \to V^*$ een lineaire afbeelding zijn. Schrijf $\mathcal{K} = K_{ij}\hat{\mathbf{e}}^i \otimes \hat{\mathbf{e}}^j$. Dit geval werken we alleen uit met indexnotatie.

$$[K_{hi}] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} K_{jk}], \quad [x^h] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} K_{jk} x^h], \text{ andere keuze: } [x^i] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} K_{jk} x^i]$$

Met $\mathcal{H} : V^* \to V$ en $\mathcal{H} = H^{jk}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$,

$$[H^{jk}] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} H^{hi}], \quad [x_j] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} H^{hi} x_j], \text{ andere keuze: } [x_k] \mapsto [\Theta^{jk}_{hi} H^{hi} x_k].$$

Enzovoort.

Een belangrijk voorbeeld van een 4-tensor is de Hooke-tensor in de lineaire elasticiteitstheorie. Deze beeldt een 'deformatietoestand', beschreven door een lineaire afbeelding, lineair af op een 'spanningstoestand', eveneens beschreven door een lineaire afbeelding. Zie Appendix.

1.8.10 Vervolg algemene beschouwingen over $\binom{r}{s}$-tensoren. Contractie en $\otimes$.

We gaan uit van de algemene definitie in paragraaf 1.8.1.

Definitie 1.8.41
Gegeven: Een geordend stel van r stuks vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d} \in V$. Een geordend stel van s stuks covectoren $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}, \ldots, \hat{\mathbf{u}} \in V^*$.
We definiëren: De $\binom{r}{s}$-tensor $\underbrace{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}}_{r \text{ stuks}} \otimes \underbrace{\hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}} \otimes \ldots \otimes \hat{\mathbf{u}}}_{s \text{ stuks}}$ door

$$\Big(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \cdots \otimes \mathbf{d} \otimes \hat{\mathbf{p}} \otimes \hat{\mathbf{q}} \otimes \ldots \otimes \hat{\mathbf{u}}\Big)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \ldots, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{y}) =$$
$$= < \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{a} > \cdots < \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{d} > < \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{v} > \cdots < \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y} >.$$

Bij iedere keuze van (co)vectoren staat in het rechterlid een product van $r + s$ stuks reële getallen!

Definitie 1.8.42 *Voor ieder tweetal* $\binom{r}{s}$*-tensoren* T *en* t *wordt de* $\binom{r}{s}$*-tensor* $T+t$ *gedefinieerd door* $\big(T+t\big)(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\ldots,\hat{\mathbf{z}},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots,\mathbf{y}) = T(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\ldots,\hat{\mathbf{z}},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots,\mathbf{y}) + t(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\ldots,\hat{\mathbf{z}},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots,\mathbf{y})$ *en voor iedere* $\alpha \in I\!R$ *wordt de* $\binom{r}{s}$*-tensor* αT *gedefinieerd door* $\big(\alpha T\big)(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\ldots,\hat{\mathbf{z}},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots,\mathbf{y}) = \alpha T(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{v}},\ldots,\hat{\mathbf{z}},\mathbf{v},\mathbf{w},\ldots,\mathbf{y})$.

Het bewijs van de volgende stelling verloopt net als bij de voorafgaande lage orde voorbeelden.

Stelling 1.8.43

- *De verzameling der* $\binom{r}{s}$*-tensoren vormt een vectorruimte over* $I\!R$ *die genoteerd wordt met* $\mathbf{T}^r_s(V)$.
- *Als* $\{\mathbf{e}_j\}$ *een basis is van* V *en* $\dim V = n$*, dan wordt een basis van* $\mathbf{T}^r_s$ *gegeven door*

$$\big\{\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_r}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_s}\big\},\quad \textit{met}\left\{\begin{array}{l} 1\le i_1\le n,\ \cdots,1\le i_r\le n,\\ 1\le j_1\le n,\ \cdots,1\le j_s\le n.\end{array}\right.$$

Dus $\dim \mathbf{T}^r_s = n^{r+s}$.

- *In de ontbinding*

$$T = T^{i_1 i_2\ldots i_r}_{j_1 j_2\ldots j_s}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_r}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_1}\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\hat{\mathbf{e}}^{j_s},$$

worden de componenten gegeven door

$$T^{i_1 i_2\ldots i_r}_{j_1 j_2\ldots j_s} = T(\hat{\mathbf{e}}^{i_1},\hat{\mathbf{e}}^{i_2},\ldots\hat{\mathbf{e}}^{i_r},\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\ldots,\mathbf{e}_{j_s}).$$

- *Bij basiswisseling geldt de transformatieregel*

$$T^{i'_1 i'_2\ldots i'_r}_{j'_1 j'_2\ldots j'_s} = A^{i'_1}_{i_1}A^{i'_2}_{i_2}A^{i'_r}_{i_r}\cdots A^{j_1}_{j'_1}A^{j_2}_{j'_2}\cdots A^{j_s}_{j'_s}\,T^{i_1 i_2\ldots i_r}_{j_1 j_1\ldots j_s}.$$

In de volgende definitie laten we zien hoe je orde van een tensor met 2 punten kunt verlagen. De definitie maakt gebruik van een basis voor V. Echter, de definitie is niet afhankelijk van *welke* basiskeuze je maakt.

Definitie 1.8.44 (Contractie van tensoren)
Zij $\{\mathbf{e}_i\}$ *een basis van* V. *Zij* $T \in \mathbf{T}^r_s(V)$*, met* $r \ge 1$ *en* $s \ge 1$. *Beschouw de som*

$$T(\cdots,\hat{\mathbf{e}}^i,\cdots,\mathbf{e}_i,\cdots) = T(\cdots,\hat{\mathbf{e}}^{i'},\cdots,\mathbf{e}_{i'},\cdots),$$

De duale basisvectoren staan op een vast gekozen 'covectorplek'. De basisvectoren staan op een vast gekozen 'vectorplek'. Genoemde som definieert een $\binom{r-1}{s-1}$*-tensor. De hiermeen corresponderende lineaire afbeelding van* $\mathbf{T}^r_s(V)$ *naar* $\mathbf{T}^{r-1}_{s-1}(V)$ *heet* contractie.

VOORBEELDEN:

- De contractie van een $\binom{1}{1}$-tensor R is een scalar. In indexnotatie: $R^i_i = R^{i'}_{i'}$. Dit is het 'spoor van de matrix'. In het bijzondere geval van een $\binom{1}{1}$-tensor van de vorm $\mathbf{a}\otimes\hat{\mathbf{b}}$ is, komt er $b^i a_i = b^{i'}a_{i'} =< \hat{\mathbf{b}},\mathbf{a} >$.

- Beschouw een gemengde 5-tensor φ, in indexnotatie

$$\varphi^{i}_{\cdot jklm} = g^{hi}\varphi_{hjklm}.$$

Door contractie over de eerste twee indices ontstaat een 3-tensor ψ, waarvan de (covariante) componenten gegeven worden door

$$\psi_{klm} = \varphi^{i\cdot}_{\cdot iklm} = g^{hi}\varphi_{hiklm} = \varphi^{\cdot i}_{i\cdot klm}.$$

In een aantal speciale gevallen zijn we een 'tensorproduct' tegengekomen, genoteerd met $\otimes$. Als, heel algemeen, $S \in \mathbf{T}^{r_1}_{s_1}(V)$ en $T \in \mathbf{T}^{r_2}_{s_2}(V)$ gegeven zijn, dan kunnen we daaruit een producttensor $S \otimes T \in \mathbf{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ bouwen. Om de boekhouding niet uit de hand te laten lopen geven we de definitie alleen voor een representatief speciaal geval.

Definitie 1.8.45 (Algemeen Tensorproduct, specimen)
Gegeven: $R \in \mathbf{T}^2_1(V)$ *en* $S \in \mathbf{T}^1_3(V)$.
Dan: $R \otimes S \in \mathbf{T}^3_4(V)$ *wordt gedefiniëerd door*

$$\big(R \otimes S\big)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z},) = R(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{r})S(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Let op de volgorde van 'invullen van de (co)vectoren' !

OPMERKINGEN:
• Terwille van de duidelijkheid

$$\big(S \otimes R\big)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z},) = S(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y})R(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{z}).$$

• Bij een gegeven basis vinden we voor de componenten van de genoemde producttensoren $\big(R \otimes S\big)^{ijk}_{\ell mnr} = R^{ij}_{\ell} S^{k}_{mnr}$, respectievelijk $\big(S \otimes R\big)^{ijk}_{\ell mnr} = S^{i}_{\ell mn} R^{jk}_{r}$
• Het tensorproduct is niet commutatief. Dat wil zeggen: In het algemeen $R \otimes S \neq S \otimes R$.
• Het tensorproduct is associatief. Dat wil zeggen: $\big(R \otimes S\big) \otimes T = R \otimes \big(S \otimes T\big)$. Practisch betekent dit dat de schrijfwijze $R \otimes S \otimes T$ zinvol is.

1.8.11 Tensoren op Vectorruimten die uitgerust zijn met een inwendig product

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.
- Een inproduct $(\cdot, \cdot)$ op V.

Uit de paragrafen 1.5 en 1.6 weten we dat 'kiezen voor een inproduct op V' betekent dat 'V en V^* geïdentificeerd worden'. Er is dan een vast gegeven bijectieve lineaire afbeelding $\mathcal{G} : V \to V^*$ met inverse $\mathcal{G}^{-1} : V^* \to V$. Bovendien hebben we dan bij iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ in V de beschikking over de bijbehorende 'reciproke' basis $\{\mathbf{e}^i\}$ in V, zodat $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta^i_j$.

Een en ander betekent dat we kunnen volstaan met alleen $\binom{0}{p}$-tensoren, dus covariante tensoren, te beschouwen. Stel we hebben een gemengde $\binom{r}{s}$-tensor. Een gleuf waar alleen covectoren in mogen kunnen we voor vectoren ontvankelijk maken door op zo'n vector eerst $\mathcal{G}$ toe te passen. In omgekeerde richting kan ook: Een gleuf waar alleen vectoren in mogen kunnen we voor covectoren ontvankelijk maken door op zo'n covector eerst $\mathcal{G}^{-1}$ toe te passen. Samengevat: Als we een inwendig product afgesproken hebben volstaat het dus om over p-tensoren te spreken. Hieruit kunnen we dan elk type $\binom{r}{s}$-tensor vervaardigen, met $r + s = p$.

BELANGRIJKE CONCLUSIE:

BIJ EEN VAST GEKOZEN INPRODUCT $(\cdot,\cdot)$ OP V LEIDT
• HET VERVANGEN VAN ALLE HOEKIGE HAKEN $< \cdot,\cdot >$ DOOR RONDE HAKEN $(\cdot,\cdot)$ EN REKENEN ZOALS BIJ INPRODUCTEN GEBRUIKELIJK IS,
• EN HET TEVENS WEGLATEN VAN DE HOEDJES $\hat{}$,
IN ALLE FORMULES VAN PARAGRAFEN 1.8.1-1.8.10, TOT CORRECTE UITDRUKKINGEN.

We lichten dit nog toe aan wat voorbeelden.

VOORBEELDEN:

• Een 1-tensor is van de vorm $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{x})$. De covariante componenten van $\mathbf{a}$ zijn $a_j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)$. De contravariante componenten zijn $a^i = (\mathbf{e}^i, \mathbf{a})$.

• Een 2-tensor R heeft de voorstelling $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{R}\mathbf{y}) = (\mathcal{R}^*\mathbf{x}, \mathbf{y})$, voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Hier is $\mathcal{R} : V \to V$ een lineaire afbeelding en $\mathcal{R}^*$ is de geadjungeerde afbeelding van $\mathcal{R}$. Er zijn covariante componenten $R_{ij} = R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, contravariante componenten $R^{ij} = R(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)$, en twee typen gemengde componenten $R_{i\cdot}^{\cdot k} = R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j)$ en $R_{\cdot j}^{\ell\cdot} = R(\mathbf{e}^\ell, \mathbf{e}_j)$. Er geldt $R_{i\cdot}^{\cdot k} = g^{kj} R_{ij} = g_{i\ell} R^{\ell k}$, enzovoort. De covariante componenten van het beeld van $\mathcal{R}\mathbf{x}$ worden gegeven door $R_{ij} x^j$, enzovoort.

• De 4-tensor Θ uit paragraaf 1.8.9 heeft covariante componenten $\Theta_{hijk} = \Theta(\mathcal{G}\mathbf{e}_h, \mathcal{G}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = g_{h\ell} g_{im} \Theta^{\ell m \cdot\cdot}_{\cdot\cdot jk}$. Met de componenten van $\mathcal{G}$ kunnen indices 'op-en-neer gehaald worden', dus van co- naar contravariant gaan en viceversa.

1.9 Een wiskundige interpretatie van het 'ingenieurs tensor begrip'

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.

OPMERKING:

- Uit de lineaire algebra zijn 1-dimensionale getallenblokken (rijen en kolommen) en 2-dimensionale getallenblokken (matrices) welbekend. In dit college is bij het gebruik hiervan inmiddels al onderscheid gemaakt tussen onder- en bovenindices. We willen nu q-dimensionale getallenblokken met boven, onder of gemengde indices gaan beschouwen. Deze soort 'supermatrices' worden ook wel holors genoemd. Bijvoorbeeld, de covariante componenten van een 4-tensor geven aanleiding tot een 4-dimensionaal getallenblok met onderindices.

NOTATIES:

- $\mathbf{T}^0_0(\mathbb{R}^n)$ is een omslachtige notatie voor $\mathbb{R}$.
- $\mathbf{T}^1_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ is de vectorruimte van alle kolommen ter lengte n.
- $\mathbf{T}^0_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_n$ is de vectorruimte van alle rijen ter lengte n.
- $\mathbf{T}^2_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n\times n}$ is de vectorruimte van alle $n \times n$-matrices met bovenindices.
- $\mathbf{T}^1_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n_n$ is de vectorruimte van alle $n \times n$- matrices met gemengde indices.
- $\mathbf{T}^0_2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_{n\times n}$ is de vectorruimte van alle $n \times n$-matrices met benedenindices.
- $\mathbf{T}^1_2(\mathbb{R}^n)$ is de vectorruimte van alle 3-dimensionale kubische matrices met één bovenindex en twee onderindices.
- $\mathbf{T}^r_s(\mathbb{R}^n)$, met $r, s \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ vast, is de vectorruimte van alle $(r + s)$-dimensionale holors met s onderindices en r bovenindices.

OPMERKING:

- De vectorruimte $\mathbf{T}^r_s(\mathbb{R}^n)$ over $\mathbb{R}$ heeft dimensie n^{r+s} en is isomorf met $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$. Door bijvoorbeeld de indices lexicografisch te ordenen kan een identificatie met $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$ bewerkstelligd worden.

NOTATIE:

- De verzameling van alle bases van V noteren we met $\mathrm{Bas}(V)$.

OPMERKING:

- In de volgende definities worden alternatieve definities gegeven van tensoren. Een tensor zal gedefinieerd worden als een afbeelding van $\mathrm{Bas}(V)$ naar $\mathbf{T}^r_s(\mathbb{R}^n)$, voor zekere r en s. Deze afbeelding zal zo zijn dat indien de actie van de afbeelding op één basis bekend is, dat dan de actie op iedere andere basis berekend kan worden met behulp van overgangsmatrices. Met andere woorden, indien de holor behorende bij een zekere basis bekend is, dan zijn holors ten opzichte van andere bases te berekenen.

Definitie 1.9.1 *Een 0-tensor, $\binom{0}{0}$-tensor of scalar is een afbeelding van* $\mathrm{Bas}(V)$ *naar* $\mathbf{T}^0_0(\mathbb{R}^n)$ *die aan iedere basis één en hetzelfde getal toevoegt.*

NOTATIE:

- De notatie $\mathbf{T}^0_0(V)$ wordt ook wel gebruikt voor $\mathbb{R}$.

Definitie 1.9.2 *Een covariante 1-tensor, $\binom{0}{1}$-tensor of covector is een afbeelding $\mathcal{F} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^0_1(I\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & [x_j] \\ \mathcal{F}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & [x_{j'}] \end{array}\right\} \Rightarrow x_{j'} = A^j_{j'} x_j.$$

OPMERKING:

- Met iedere covariante 1-tensor correspondeert een lineaire functie $\hat{\mathbf{x}} = x_i \hat{\mathbf{e}}^i = x_{i'} \hat{\mathbf{e}}^{i'}$ die niet van de basiskeuze afhangt.

NOTATIE:

- De notatie $\mathbf{T}^0_1(V)$ wordt ook wel gebruikt voor V^*.

Definitie 1.9.3 *Een contravariante 1-tensor, $\binom{1}{0}$-tensor of vector is een afbeelding $\mathcal{F} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^1_0(I\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[x^j\right] \\ \mathcal{F}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[x^{j'}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow x^{j'} = A^{j'}_j x^j.$$

OPMERKING:

- Met iedere contravariante 1-tensor correspondeert een vector $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ die niet van de basiskeuze afhangt.

NOTATIE:

- De notatie $\mathbf{T}^1_0(V)$ wordt ook wel gebruikt voor V.

Definitie 1.9.4 *Een covariante 2-tensor of $\binom{0}{2}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^0_2(I\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & [T_{kl}] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & [T_{k'l'}] \end{array}\right\} \Rightarrow T_{k'l'} = A^k_{k'} A^l_{l'} T_{kl}.$$

OPMERKING:

- Met iedere covariante 2-tensor correspondeert een bilineaire functie $S = T_{kl} \hat{\mathbf{e}}^k \otimes \hat{\mathbf{e}}^l = T_{k'l'} \hat{\mathbf{e}}^{k'} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{l'}$ die niet van de basiskeuze afhangt.

Definitie 1.9.5 *Een contravariante 2-tensor of $\binom{2}{0}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^2_0(I\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[T^{kl}\right] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[T^{k'l'}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow T^{k'l'} = A^{k'}_k A^{l'}_l T^{kl}.$$

OPMERKING:

- Na een keuze van een inproduct is een correspondentie aan te brengen tussen een contravariante 2-tensor en een bilineaire functie. De bij $\mathcal{S}$ behorende bilineaire functie wordt dan gegeven door $S = T^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = T^{k'l'}\mathbf{e}_{k'} \otimes \mathbf{e}_{l'}$ en is onafhankelijk van de basiskeuze.

Definitie 1.9.6 *Een gemengde 2-tensor of $\binom{1}{1}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^1_1(I\!\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[T^k_l\right] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[T^{k'}_{l'}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow T^{k'}_{l'} = A^{k'}_k A^l_{l'} T^k_l .$$

OPMERKINGEN:

- Na een keuze van een inproduct is een correspondentie aan te brengen tussen een gemengde 2-tensor en een bilineaire functie. De bij $\mathcal{S}$ behorende bilineaire functie wordt dan gegeven door $S = T^k_l \mathbf{e}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}^l = T^{k'}_{l'} \mathbf{e}_{k'} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{l'}$ en is onafhankelijk van de basiskeuze.
- Iedere gemengde 2-tensor correspondeert met een lineaire afbeelding $\mathcal{T}$ van V naar V, gedefinieerd door $\mathcal{T}\mathbf{x} = T^k_l < \hat{\mathbf{e}}^l, \mathbf{x} > \mathbf{e}_k$, die niet van de basiskeuze afhangt. Voor deze correspondentie is geen inproduct nodig.

Definitie 1.9.7 *Een covariante p-tensor of $\binom{0}{p}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^0_p(I\!\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[T_{i_1\cdots i_p}\right] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[T_{i'_1\cdots i'_p}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow T_{i'_1\cdots i'_p} = A^{i_1}_{i'_1} \cdots A^{i_p}_{i'_p} T_{i_1\cdots i_p} .$$

Definitie 1.9.8 *Een contravariante q-tensor of $\binom{q}{0}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^q_0(I\!\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[T^{i_1\cdots i_p}\right] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[T^{i'_1\cdots i'_p}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow T^{i'_1\cdots i'_p} = A^{i'_1}_{i_1} \cdots A^{i'_p}_{i_p} T^{i_1\cdots i_p} .$$

Definitie 1.9.9 *Een gemengde $(r+s)$-tensor, contravariant van de orde r en covariant van de orde s, of $\binom{r}{s}$-tensor is een afbeelding $\mathcal{S} : \mathrm{Bas}(V) \to \mathbf{T}^r_s(I\!\!R^n)$ met de eigenschap*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_i\}) & = & \left[T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\right] \\ \mathcal{S}(\{\mathbf{e}_{i'}\}) & = & \left[T^{k'_1\cdots k'_r}_{l'_1\cdots l'_s}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow T^{k'_1\cdots k'_r}_{l'_1\cdots l'_s} = A^{k'_1}_{k_1} \cdots A^{k'_r}_{k_r} A^{l_1}_{l'_1} \cdots A^{l_s}_{l'_s} T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} .$$

<u>OPMERKINGEN:</u>

- Een $\binom{r}{s}$-tensor noemen we contravariant van de orde r en covariant van de orde s.
- De in de voorafgaande behandelde rekenoperaties optellen, scalair vermenigvuldigen, vermenigvuldigen en contraheren van tensoren zijn alle rekenoperaties die leiden tot, ongeacht de basis ten opzichte waarvan ze worden uitgevoerd, dezelfde nieuwe tensor. Met andere woorden, genoemde rekenoperaties zijn ten opzichte van een willekeurige basis uitvoerbaar. Een dergelijke rekenoperatie heet <u>tensorieel</u>.
- Om een tensor te beschrijven is het voldoende om de holor te geven die bij een zekere basis hoort. Met de definities van deze paragraaf kunnen dan de holors die bij iedere willekeurige basis berekend worden.

<u>VOORBEELDEN:</u>

- Beschouw de afbeelding F_1 die aan iedere basis van V de matrix $\left[\delta^k_m\right]$ toevoegt. We vragen ons af of F_1 een gemengde 2-tensor is. Om dit in te zien kiezen we twee bases $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ van V en stellen $F_1(\{\mathbf{e}_i\}) = \left[\delta^k_m\right]$ en $F_1(\{\mathbf{e}_{i'}\}) = \left[\delta^{k'}_{m'}\right]$, dan geldt

  $$\delta^{k'}_{m'} = A^{k'}_k A^k_{m'} = A^{k'}_k A^m_{m'} \delta^k_m,$$

  waaruit volgt dat F_1 een gemengde 2-tensor is. Dit kan ook ingezien worden in matrixtaal. Het argument is dan:
  Er geldt I, $= A$’ IA, voor iedere inverteerbare $n \times n$-matrix A,.
  We noemen deze tensor de <u>Kronecker tensor</u> .

- Beschouw de afbeelding F_2 die aan iedere basis van V de matrix $[\delta_{km}]$ toevoegt. We vragen ons af of F_2 een covariante 2-tensor is. Dit komt neer op de vraag:
  Geldt I,, $= (A,)^T IA$, voor iedere inverteerbare $n \times n$-matrix A,? Omdat het antwoord hierop nee is, is F_2 geen covariante 2-tensor. Net zo is in te zien dat de afbeelding F_3 die aan iedere basis de matrix $\left[\delta^{km}\right]$ toevoegt geen contravariante 2-tensor is. Indien we ons echter zouden beperken tot orthogonale overgangsmatrices, dan zijn zowel F_2 als F_3 2-tensoren.
  De bij de gemengde 2-tensor F_1 behorende lineaire afbeelding van V naar V wordt gegeven door $\mathbf{x} \mapsto < \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x} > \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}$, de identieke afbeelding op V.

- Beschouw de afbeelding F die aan iedere basis van V de matrix $\mathrm{diag}(2,1,1)$ toevoegt. We vragen ons af of F een covariante, contravariante of gemengde 2-tensor is. Het is eenvoudig om een inverteerbare matrix A te verzinnen zodanig dat $\mathrm{diag}(2,1,1) \neq A^{-1}\mathrm{diag}(2,1,1)A$, waaruit onmiddellijk volgt dat F geen der drie typen 2-tensoren is.

- Beschouw een gemengde 2-tensor φ. Schrijf

  $$\varphi(\{\mathbf{e}_i\}) = \left[q^k_l\right] = Q.$$

  We vragen ons af of de afbeelding α van $\mathrm{Bas}(V)$ naar $I\!R$, gedefinieerd door

  $$\alpha(\{\mathbf{e}_i\}) = q^l_l = \mathrm{tr}(Q) \;\; (= \mathrm{spoor}(Q) \;),$$

een scalar is. Om dit in te zien kiezen we twee bases $\{\mathbf{e}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ van V en stellen $\varphi(\{\mathbf{e}_i\}) = q^k_l$ en $\varphi(\{\mathbf{e}_{i'}\}) = q^{k'}_{l'}$, dan geldt

$$q^{k'}_{l'} = A^l_{l'} A^{k'}_k q^k_l,$$

zodat

$$q^{l'}_{l'} = A^l_{l'} A^{l'}_k q^k_l = \delta^l_k q^k_l = q^l_l,$$

ofwel $\alpha(\{\mathbf{e}_i\}) = \alpha(\{\mathbf{e}_{i'}\})$. Blijkbaar is α een scalar. In matrixtaal is het argument:
Er geldt $\mathrm{tr}\,\big((A,)^{-1} Q A,\big) = \mathrm{tr}\,(Q',)$ voor iedere inverteerbare $n \times n$-matrix $A,$.

- Beschouw een covariante 2-tensor ψ. Schrijf

  $$\psi(\{\mathbf{e}_i\}) = [q_{kl}] = Q.$$

  We vragen ons af of de afbeelding β van $\mathrm{Bas}(V)$ naar $I\!R$, gedefinieerd door

  $$\beta(\{\mathbf{e}_i\}) = \sum_{l=1}^{n} q_{ll} = \mathrm{tr}(Q),$$

  een scalar is. Dit komt neer op de vraag:
  Geldt $\mathrm{tr}\,\big((A,)^T Q A,\big) = \mathrm{tr}(Q,,)$ voor iedere inverteerbare $n \times n$-matrix $A,$? Omdat het antwoord hierop nee is, is β geen scalar.

- Gegeven zijn de tensoren q_{ij}, q^{ij} en q^i_j. We vragen ons af of het verwisselen van indices een tensoriële operatie is, ofwel 'is het transponeren van een matrix tensorieel?'. Het antwoord is dat dit voor matrices met gemengde indices niet het geval is, terwijl dit bij matrices met boven- of onderindices wel het geval is. We zullen dit verklaren in matrixtaal.
  <u>Gemengde indices:</u> Noteer $Q = [q^i_j]$ en $Q', = [q^{i'}_{j'}]$. Dan geldt $Q', = (A,)^{-1} Q A,$. Hieruit volgt $(Q',)^T = (A,)^T Q^T (A,)^{-T}$. Blijkbaar is het transponeren van een matrix met gemengde indices niet tensorieel. Er zou dan namelijk $(Q',)^T = (A,)^{-1} Q^T A,$ moeten volgen.
  <u>Onderindices:</u> Noteer $Q = [q_{ij}]$ en $Q,, = [q_{i'j'}]$. Dan geldt $Q,, = A,^T Q A,$. Hieruit volgt direct $Q,,^T = A,^T Q^T A,$. Dit is dus wel tensorieel!
  <u>Bovenindices:</u> Analoog als bij onderindices.

- Gegeven zijn de tensoren q_{ij}, q^{ij} en q^i_j. We vragen ons af of het berekenen van de determinant van een matrix tensorieel is. Het antwoord is dat dit bij matrices met gemengde indices wel het geval is, terwijl dit bij matrices met boven- of onderindices niet het geval is. Dit betekent het berekenen van de determinant van matrices met gemengde indices een scalar definieert. Immers $\det(Q',) = \det((A,)^{-1} Q A,) = \det Q$, maar $\det(Q,,) \neq \det(A,^T Q A,)$ in het algemeen.

- Laat $n = 3$. Gegeven zijn de contravariante 1-tensoren x^i en y^j. Bereken het uitwendig vectorproduct $z^1 = x^2 y^3 - x^3 y^2$, $z^2 = x^3 y^1 - x^1 y^3$ en $z^3 = x^1 y^2 - x^2 y^1$. Dit is geen tensoriële operatie, dus z^k is geen contravariante 1-tensor. Anders gezegd: z^k is geen vector. Om dit in te zien maken we gebruik van de rekenregel

$$\forall_{U,V \in \mathbb{R}^3} \forall_{S \in \mathbb{R}^3_3, S \text{ inverteerbaar}} \; SU \times SV = \det(S) S^{-T}(U \times V). \tag{1.3}$$

Indien $Z' = A'Z$, dan is z^k een vector. Ofwel, indien $A'X \times A'Y = A'(X \times Y)$. Op grond van (1.3) geldt echter $(A'X) \times (A'Y) = \det(A')(A')^{-T}(X \times Y)$. Inderdaad is het uitwendig vectorproduct geen tensoriële operatie. Indien we ons echter zouden beperken tot orthogonale matrices met determinant gelijk aan 1, dan is het uitwendig vectorproduct wel tensorieel. Als we echter een transformatie met behulp van een orthogonale matrix met determinant gelijk aan -1 uitvoeren, dan verschijnt na de basistransformatie een minteken. Dit verschijnsel noopt natuurkundigen het uitproduct de mysterieuze betiteling 'axiale vector' te geven.

- Laat x^i en y^j contravariante 1-tensoren zijn. De rekenkundige constructies $x^i y^j$ en $x^i y^j - y^j x^i$ leveren contravariante 2- tensoren op.

- Als x^i, y_j, q_{ij}, q_i^j en q^{ij} tensoren zijn, dan zijn ook $x^i q_{ij}$, $q_i^j y_j$, $q_{ij} q_k^j$, etc, tensoren. Meetkundig zijn deze operaties te interpreteren als het toepassen van een lineaire afbeelding op een (co)vector of de compositie van 2 lineaire afbeeldingen nemen.

1.10 (Covariante) symmetrische en antisymmetrische tensoren

UITGANGSPUNT:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.

Definitie 1.10.1 *Een permutatie σ van orde k, $k \in \mathbb{N}$, is een bijectieve afbeelding van $\{1, \cdots, k\}$ naar $\{1, \cdots, k\}$. Een permutatie σ heet (on)even als σ met een (on)even aantal paarsgewijze verwisselingen gerealiseerd kan worden. Indien een permutatie σ even is, dan schrijven we $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Indien een permutatie σ oneven is, dan schrijven we $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. De verzameling der permutaties van orde k wordt genoteerd met S_k.*

OPMERKING:

- Het aantal elementen van S_k is gelijk aan $k!$.

Definitie 1.10.2 *Zij $\varphi \in T_k(V)$. De tensor φ heet symmetrisch indien voor ieder k-tal vectoren $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \in V$ en voor alle $\sigma \in S_k$ geldt $\varphi(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \varphi(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$. De tensor φ heet antisymmetrisch indien voor ieder k-tal vectoren $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \in V$ en voor alle $\sigma \in S_k$ geldt $\varphi(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$.*

OPMERKINGEN:

- Indien $k > n$, dan is iedere antisymmetrische tensor gelijk aan de tensor die 0 toevoegt aan ieder element van zijn domein.
- Het verwisselen van een willekeurig paar 'input'-vectoren heeft geen invloed bij een symmetrische tensor, terwijl dit bij een antisymmetrische tensor een factor -1 tot gevolg heeft.
- De verzamelingen der symmetrische en antisymmetrische k-tensoren zijn deelruimten van $T_k(V)$.

NOTATIES:

- De vectorruimte der symmetrische k-tensoren wordt genoteerd met $\bigvee^k(V)$.
- De vectorruimte der antisymmetrische k-tensoren wordt genoteerd met $\bigwedge^k(V)$.
- We spreken af dat $\bigwedge^0(V) = \bigvee^0(V) = I\!R$ en $\bigwedge^1(V) = \bigvee^1(V) = V^*$.

Definitie 1.10.3 *Voor iedere $\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}} \in V^*$ wordt de 2-tensor $\hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{g}}$ op V gedefinieerd door*

$$\left(\hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{g}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} < \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{x} > & < \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{y} > \\ < \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{x} > & < \hat{\mathbf{g}}, \mathbf{y} > \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.10.4 *De 2-tensor $\hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{g}}$ is antisymmetrisch.*

MERK OP:

- $\hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{g}} = -\hat{\mathbf{g}} \wedge \hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{f}} = 0$ en $\left(\hat{\mathbf{f}} + \lambda \hat{\mathbf{g}}\right) \wedge \hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{f}} \wedge \hat{\mathbf{g}}$ voor alle $\lambda \in I\!R$.
- Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V is de verzameling $\left\{\hat{\mathbf{e}}^i \wedge \hat{\mathbf{e}}^j \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq n\right\}$ lineair onafhankelijk.

Definitie 1.10.5 *Voor iedere $\hat{\mathbf{f}}_1, \cdots, \hat{\mathbf{f}}_k \in V^*$ wordt de k-tensor $\hat{\mathbf{f}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{f}}_k$ op V gedefinieerd door*

$$\left(\hat{\mathbf{f}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{f}}_k\right)(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) = \det \begin{pmatrix} < \hat{\mathbf{f}}_1, \mathbf{x}_1 > & \cdots & < \hat{\mathbf{f}}_1, \mathbf{x}_k > \\ \vdots & & \vdots \\ < \hat{\mathbf{f}}_k, \mathbf{x}_1 > & \cdots & < \hat{\mathbf{f}}_k, \mathbf{x}_k > \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.10.6 *De k-tensor $\hat{\mathbf{f}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{f}}_k$ is antisymmetrisch.*

MERK OP:

- $\hat{\mathbf{f}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{f}}_k = 0$ dan en slechts dan als de verzameling $\left\{\hat{\mathbf{f}}_1, \cdots, \hat{\mathbf{f}}_k\right\}$ lineair afhankelijk is.

Lemma 1.10.7 *Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V is de verzameling*

$$\left\{\hat{\mathbf{e}}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{j_k} \,\middle|\, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n\right\}$$

een basis van $\bigwedge^k(V)$.

<u>TOELICHTING:</u>

- Iedere antisymmetrische k-tensor t op V kan geschreven worden als

$$t = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} t_{i_1 \cdots i_k} \hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_k}, \tag{1.4}$$

  waarbij $t_{i_1 \cdots i_k} = t(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$.

<u>GEVOLG:</u>

- De dimensie van $\bigwedge^k(V)$ is gelijk aan $\binom{n}{k}$.

Definitie 1.10.8 *Voor iedere $\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}} \in V^*$ wordt de 2-tensor $\hat{\mathbf{f}} \vee \hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}}$ op V gedefinieerd door*

$$\left(\hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{perm}\begin{pmatrix} <\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{x}> & <\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{y}> \\ <\hat{\mathbf{g}}, \mathbf{x}> & <\hat{\mathbf{g}}, \mathbf{y}> \end{pmatrix}.$$

<u>OPMERKING:</u>

- De in deze definitie voorkomende operator perm heet permanent en voegt aan een matrix een getal toe. De berekening gaat net als bij de berekening van een determinant met het verschil dat voor iedere term een plusteken staat in plaats van afwisselend plus- en mintekens.

Lemma 1.10.9 *De 2-tensor $\hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}}$ is symmetrisch.*

<u>MERK OP:</u>

- $\hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{f}}$.
- $\hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}} = 0 \Leftrightarrow \left(\hat{\mathbf{f}} = 0 \text{ en/of } \hat{\mathbf{g}} = 0\right)$.
- $\left(\hat{\mathbf{f}} + \lambda\hat{\mathbf{g}}\right) \vee \hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{f}} \vee \hat{\mathbf{g}} + \lambda\hat{\mathbf{g}} \vee \hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{g}} + \lambda\hat{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}}$ voor iedere $\lambda \in I\!R$.
- Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V is de verzameling $\left\{\hat{\mathbf{e}}^i\hat{\mathbf{e}}^j \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \leq n\right\}$ lineair onafhankelijk.

Definitie 1.10.10 *Voor iedere $\hat{\mathbf{f}}_1, \cdots, \hat{\mathbf{f}}_k \in V^*$ wordt de k-tensor $\hat{\mathbf{f}}_1 \cdots \hat{\mathbf{f}}_k$ op V gedefinieerd door*

$$\left(\hat{\mathbf{f}}_1 \cdots \hat{\mathbf{f}}_k\right)(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) = \operatorname{perm}\begin{pmatrix} < \hat{\mathbf{f}}_1, \mathbf{x}_1 > & \cdots & < \hat{\mathbf{f}}_1, \mathbf{x}_k > \\ \vdots & & \vdots \\ < \hat{\mathbf{f}}_k, \mathbf{x}_1 > & \cdots & < \hat{\mathbf{f}}_k, \mathbf{x}_k > \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.10.11 *De k-tensor $\hat{\mathbf{f}}_1 \cdots \hat{\mathbf{f}}_k$ is symmetrisch.*

MERK OP:

- De volgorde in $\hat{\mathbf{f}}_1 \cdots \hat{\mathbf{f}}_k$ doet er niet toe, een andere volgorde levert dezelfde symmetrische k-tensor op.
- $\hat{\mathbf{f}}_1 \cdots \hat{\mathbf{f}}_k = 0$ dan en slechts dan als er een index j bestaat zodat $\hat{\mathbf{f}}_j = 0$.

Lemma 1.10.12 *Voor iedere basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V is de verzameling*

$$\left\{\hat{\mathbf{e}}^{j_1} \cdots \hat{\mathbf{e}}^{j_k} \,\middle|\, 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n\right\}$$

een basis van $\bigvee^k(V)$.

TOELICHTING:

- Iedere symmetrische k-tensor τ op V kan geschreven worden als

$$\tau = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \tau_{i_1 \cdots i_k} \frac{\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \cdots \hat{\mathbf{e}}^{i_k}}{\mu_{i_1 \cdots i_k}},$$

  waarbij $\tau_{i_1 \cdots i_k} = \tau(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$ en $\mu_{i_1 \cdots i_k} = \left(\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \cdots \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right)(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$. In deze laatste uitdrukking is de Einstein sommatie conventie niet van toepassing!

GEVOLG:

- De dimensie van $\bigvee^k(V)$ is gelijk aan $\binom{n+k-1}{k-1}$.

VOORBEELD:

- De m-de afgeleide van een voldoend vaak differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is een symmetrische covariante m-tensor op $\mathbb{R}^n$. Deze tensor wordt genoteerd met $\mathcal{D}^m f$ en heeft componenten

$$\frac{\partial^m f(0)}{\partial(x^1)^{i_1} \cdots \partial(x^n)^{i_m}},$$

  met $i_1 + \cdots + i_m = m$, ten opzichte van de basis $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$.

Definitie 1.10.13 *De afbeelding $\mathcal{S} : T_k(V) \to T_k(V)$, gedefinieerd door*

$$(\mathcal{S}\varphi)(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varphi(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

heet symmetrizeringsafbeelding en de afbeelding $\mathcal{A} : T_k(V) \to T_k(V)$, gedefinieerd door

$$(\mathcal{A}\varphi)(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

heet anti-symmetrizeringsafbeelding.

MERK OP:

- De afbeeldingen $\mathcal{S}$ en $\mathcal{A}$ zijn lineair en voldoen bovendien aan $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$ en $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Deze relaties drukken uit dat $\mathcal{S}$ en $\mathcal{A}$ projecties zijn. De beeldruimten worden gegeven door

  $$\mathcal{S}(T_k(V)) = \bigvee^k(V) \text{ en } \mathcal{A}(T_k(V)) = \bigwedge^k(V).$$

- $\mathcal{A}\left(\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right) = \frac{1}{k!}\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_k}$.
- $\mathcal{S}\left(\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right) = \frac{1}{k!}\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \cdots \hat{\mathbf{e}}^{i_k}$.
- Een 2-tensor kan altijd geschreven worden als de som van een symmetrische en een antisymmetrische 2-tensor. Beschouw maar de covariante componenten van een 2-tensor φ op V, $\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}) + \frac{1}{2}(\varphi_{ij} - \varphi_{ji})$.
- Voor $k > 2$ geldt $\binom{n}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} < n^k$, zodat de deelruimten $\bigvee^k(V)$ en $\bigwedge^k(V)$ niet samen de vectorruimte $T_k(V)$ opspannen.

Definitie 1.10.14 *Zij $\eta \in \bigwedge^k(V)$ en $\zeta \in \bigwedge^l(V)$. De tensor $\eta \wedge \zeta \in \bigwedge^{k+l}(V)$ wordt gedefinieerd door*

$$\eta \wedge \zeta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!}\mathcal{A}(\eta \otimes \zeta).$$

OPMERKINGEN:

- Indien $k = l = 1$, dan geldt $\eta \wedge \zeta = \eta \otimes \zeta - \zeta \otimes \eta$, conform definitie (1.10.3).
- Indien α een scalar is, dan geldt $\alpha \wedge \eta = \alpha\eta$.

Stelling 1.10.15 *Voor $\eta \in \bigwedge^k(V)$, $\zeta \in \bigwedge^l(V)$, $\theta \in \bigwedge^m(V)$ en $\omega \in \bigwedge^m(V)$ geldt $\eta \wedge \zeta = (-1)^{kl}\zeta \wedge \eta$, $\eta \wedge (\zeta \wedge \theta) = (\eta \wedge \zeta) \wedge \theta$ en $(\eta + \omega) \wedge \zeta = \eta \wedge \zeta + \omega \wedge \zeta$.*

TOELICHTINGEN:

- Het bewijs van deze stelling wordt achterwege gelaten. Het bewijs is een niet geringe, boekhoudkundige en combinatorische kwestie en kan gevonden worden in [AMR], blz. 326.
- Het praktisch rekenen met het wigproduct $\wedge$ verloopt volgens voor de hand liggende regels. Indien bijvoorbeeld $k = 2$, $l = 1$ en $\eta = \alpha\hat{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{w}} + \beta\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}$, $\zeta = \gamma\hat{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{z}}$, dan geldt $\eta \wedge \zeta = \alpha\gamma\hat{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{w}} \wedge \hat{\mathbf{x}} + \alpha\delta\hat{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{w}} \wedge \hat{\mathbf{z}} + \beta\delta\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{z}}$.

VOORBEELDEN:

- Beschouw $\mathbb{R}^2$ met basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, gegeven door $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$ en $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$. De bijbehorende duale basis wordt gegeven door $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2\}$. We bezigen hier de notaties $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ en $\hat{\mathbf{e}}^1 = \mathrm{d}x$, $\hat{\mathbf{e}}^2 = \mathrm{d}y$.
  De vectorruimte $\bigwedge^1(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2)^*$ is 2-dimensionaal en een basis ervan wordt gegeven door $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$. Laat $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$ en ontwikkel deze covectoren naar hun covariante componenten ten opzichte van de basis $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$. Dus $\hat{\alpha} = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y$, met $\alpha_1 = \hat{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ en $\alpha_2 = \hat{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Op dezelfde manier is $\hat{\beta} = \beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y$. Er geldt

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta} &= (\alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y) \wedge (\beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y) = \alpha_1\beta_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \alpha_2\beta_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

  Laat $\mathbf{a} = \binom{a^1}{a^2}, \mathbf{b} = \binom{b^1}{b^2} \in \mathbb{R}^2$. De getallen a^1, a^2, b^1 en b^2 zijn de contravariante componenten van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ ten opzichte van de basis $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$. Er geldt

$$(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = <\mathrm{d}x, \mathbf{a}><\mathrm{d}y, \mathbf{b}> - <\mathrm{d}x, \mathbf{b}><\mathrm{d}y, \mathbf{a}> = a^1b^2 - b^1a^2.$$

  Dit getal is de georiënteerde oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
  De vectorruimte $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$ is 1-dimensionaal en een basis ervan wordt gegeven door $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\}$.
- Beschouw $\mathbb{R}^3$ met basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, gegeven door $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0)^T$ en $\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z} = (0,0,1)^T$. De bijbehorende duale basis noteren we met $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$.
  De 3-dimensionale vectorruimte $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$ heeft basis $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$. De 3-dimensionale vectorruimte $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ heeft basis $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$, terwijl de 1-dimensionale vectorruimte $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ basis $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$ heeft.
  Laat $\alpha, \beta \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$ en schrijf $\alpha = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z$, $\beta = \beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y + \beta_3\,\mathrm{d}z$. Dan is $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ en er geldt

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

  Laat $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)^T, \mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)^T, \mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3)^T \in \mathbb{R}^3$, dan geldt

$$(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^2b^3 - b^2a^3.$$

Dit getal is de georiënteerde oppervlakte van de projectie op het y, z-vlak van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Voorts geldt

$$\begin{aligned}
(\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= (\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + \\
&+ (\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) + \\
&- (\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}y)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \\
&= a^1b^2c^3 + b^1c^2a^3 + c^1a^2b^3 - b^1a^2c^3 - a^1c^2b^3 - c^1b^2a^3.
\end{aligned}$$

Dit getal is de georiënteerde inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.

- Beschouw $I\!R^4$ met basis $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, gegeven door $\mathbf{e}_0 = \frac{\partial}{\partial t} = (1,0,0,0)^T$, $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x} = (0,1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial y} = (0,0,1,0)^T$ en $\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z} = (0,0,0,1)^T$. De bijbehorende duale basis noteren we met $\{\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z\}$.
De vectorruimte $\bigwedge^1(I\!R^4)$ is 4-dimensionaal en heeft als basis $\{\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z\}$. De vectorruimte $\bigwedge^2(I\!R^4)$ is 6-dimensionaal en heeft als basis $\{\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$. De vectorruimte $\bigwedge^3(I\!R^4)$ is 4-dimensionaal en heeft als basis $\{\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$. De vectorruimte $\bigwedge^4(I\!R^4)$ is 1-dimensionaal en heeft als basis $\{\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$.
Laat $\alpha = \alpha_{01}\,\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}x + \alpha_{12}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y + \alpha_{13}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}z \in \bigwedge^2(I\!R^4)$ en $\beta = \beta_0\,\mathrm{d}t + \beta_2\,\mathrm{d}y \in \bigwedge^1(I\!R^4)$, dan is $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^3(I\!R^4)$ en er geldt

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_{01}\beta_2 + \alpha_{12}\beta_0)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \alpha_{13}\beta_0\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - \alpha_{13}\beta_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Laat $\gamma = \gamma_{23}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \bigwedge^2(I\!R^4)$, dan is $\alpha \wedge \gamma \in \bigwedge^4(I\!R^4)$ en er geldt

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha_{01}\gamma_{23}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Zij $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d} \in I\!R^4$ en ontwikkel deze vectoren met behulp van hun contravariante componenten ten opzichte van de basis $\left\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$. Er geldt

$$(\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a^0b^3 - b^0a^3.$$

Dit getal is de georiënteerde oppervlakte van de projectie op het t, z-vlak van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

$$(\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a^0 & b^0 & c^0 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$

is de georiënteerde 3-dimensionale inhoud van de projectie op het t, y, z- hypervlak van het parallellepipedum opgespannen door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$. Verder is

$$(\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)(\mathbf{a},\mathbf{b}\,\mathbf{c},\mathbf{d}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$$

de 4-dimensionale inhoud van het hyperparallellepipedum opgespannen door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ en $\mathbf{d}$.

OPMERKING:

- Door de keuze van een $\mu \in \bigwedge^n(V)$ wordt een georiënteerd volumebegrip op V ingevoerd. Het getal $\mu(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ geeft dan de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$. Omdat de vectorruimte $\bigwedge^n(V)$ dimensie 1 heeft, verschillen iedere twee keuzen voor μ een multiplicatieve constante. Indien een inproduct op V gedefinieerd is, is het gebruikelijk om μ zodanig te kiezen dat voor orthonormale bases $\{\mathbf{e}_i\}$ van V geldt $\mu(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = \pm 1$. Een basis met het plusteken (minteken) heet dan positief (negatief) georiënteerd.

1.11 Vectorruimten met een georiënteerd volume

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.
- Een georiënteerd volume μ op V.

Definitie 1.11.1 *Zij $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ en $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-k} \in V$, dan wordt $\mu \lrcorner \mathbf{a}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{a}_{n-k} \in \bigwedge^k(V)$ gedefinieerd door*

$$(\mu \lrcorner \mathbf{a}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{a}_{n-k})(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) = \mu(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-k}, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k).$$

OPMERKING:

- Indien voor een basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V geldt $\mu(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$, dan geldt op grond van representatie (1.4),

$$(\mu \lrcorner \mathbf{a}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{a}_{n-k})(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{n-k}^1 & x_1^1 & \cdots & x_k^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{n-k}^n & x_1^n & \cdots & x_k^n \end{pmatrix},$$

waarbij $a_j^i =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{a}_j >$, voor $i = 1, \cdots, n$ en $j = 1, \cdots, n-k$, en $x_j^i =< \hat{\mathbf{e}}^i, \mathbf{x}_j >$, voor $i = 1, \cdots, n$ en $j = 1, \cdots, k$. Ontwikkel deze determinant naar de eerste $n-k$ kolommen, dan blijkt dat $(\mu \lrcorner \mathbf{a}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{a}_{n-k})(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k)$ te schrijven is als een lineaire combinatie van de $\binom{n}{k}$ $k \times k$- determinanten

$$\det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{i_k} & \cdots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}, \text{ met } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

Dit betekent dat de antisymmetrische k-tensor $\mu \lrcorner \mathbf{a}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{a}_{n-k}$ een lineaire combinatie is van de $\binom{n}{k}$ k-tensoren $\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_k}$. Dit resultaat was uiteraard te verwachten daar $\left\{\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right\}$ een basis is voor $\bigwedge^k(V)$.

VOORBEELD:

- Beschouw $I\!R^3$ met basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, gegeven door $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$ en $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$. Definieer het georiënteerde volume μ op V door $\mu = \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3$. Dan geldt $\mu(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$.
  Laat $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, dan is $\mu \lrcorner \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} \in \bigwedge^1(I\!R^3)$ en er geldt

$$
\begin{aligned}
(\mu \lrcorner \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b})(\mathbf{x}) &= \det \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & x^1 \\ a^2 & b^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{pmatrix} = \\
&= (a^2b^3 - a^3b^2)x^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)x^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)x^3,
\end{aligned}
$$

  ofwel

$$\mu \lrcorner \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\hat{\mathbf{e}}^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\hat{\mathbf{e}}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\hat{\mathbf{e}}^3.$$

  Voorts is $\mu \lrcorner \mathbf{a} \in \bigwedge^2(I\!R^3)$ en er geldt

$$
\begin{aligned}
(\mu \lrcorner \mathbf{a})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \det \begin{pmatrix} a^1 & x^1 & y^1 \\ a^2 & x^2 & y^2 \\ a^3 & x^3 & y^3 \end{pmatrix} = \\
&= a^1 \det \begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{pmatrix} + a^2 \det \begin{pmatrix} x^3 & y^3 \\ x^1 & y^1 \end{pmatrix} + a^3 \det \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

  ofwel

$$\mu \lrcorner \mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{e}}^2 \wedge \hat{\mathbf{e}}^3 + a^2 \hat{\mathbf{e}}^3 \wedge \hat{\mathbf{e}}^1 + a^3 \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2.$$

MERK OP:

- Indien voor de basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V geldt $\mu(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$, dan geldt $\mu = \hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^n$. Bovendien geldt dan voor iedere $k \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\mu \lrcorner \mathbf{e}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{e}}^{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^n.$$

  Voorts geldt

$$\mu \lrcorner \mathbf{e}_{i_1} \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{e}_{i_k} = (-1)^\nu \hat{\mathbf{e}}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{j_{n-k}}.$$

  Hierbij zijn $j_1, \cdots, j_{n-k}$ de overgebleven indices en is ν het aantal verwisselingen dat nodig is om de indices $i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k}$ in de natuurlijke volgorde $1, 2, \cdots, n$ te krijgen.

1.12 De Hodge afbeelding

UITGANGSPUNTEN:

- Een n-dimensionale vectorruimte V over $\mathbb{R}$.
- Een inproduct $(\cdot, \cdot)$ op V.
- Een georiënteerd volume μ op V zodanig dat voor orthonormale bases $\{\mathbf{c}_i\}$ van V geldt $\mu(\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n) = \pm 1$.
- Een positief georiënteerde basis $\{\mathbf{e}_i\}$.

TOELICHTING:

- Ter herinnering vermelden we dat het uitgangspunt betreffende het inproduct onder meer betekent dat het inproduct symmetrisch is (zie paragraaf (1.5)). Dit zal in deze paragraaf een rol spelen.

OPMERKINGEN:

- Met behulp van het inproduct kunnen we een bijectie aanbrengen van V naar V^*. Deze bijectie wordt genoteerd met $\mathcal{G}$ (zie Stelling (1.5.3). Voor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ geldt dan

$$(\mathcal{G}\mathbf{a} \wedge \mathcal{G}\mathbf{b})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{a}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

en voor $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k \in V$ geldt

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}\mathbf{a}_k)(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) &= (\hat{\mathbf{a}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{a}}_k)(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) = \\ &= \det \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{x}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_k, \mathbf{x}_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Omdat $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ geldt $\dim\left(\bigwedge^k(V)\right) = \dim\left(\bigwedge^{n-k}(V)\right)$. Door de keuze van het inproduct en het volume blijkt een bijpassend isomorfisme van $\bigwedge^k(V)$ naar $\bigwedge^{n-k}(V)$ definieerbaar.

Definitie 1.12.1 *Zij $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in V$. De Hodge afbeelding $* : \bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{n-k}(V)$ wordt gedefinieerd door*

$$\begin{cases} k = 0: & *1 = \mu, & \textit{gevolgd door lineaire uitbreiding,} \\ 0 < k \leq n: & *(\hat{\mathbf{a}}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{a}}_k) = \mu \,\lrcorner\, \mathbf{a}_1 \,\lrcorner\, \cdots \,\lrcorner\, \mathbf{a}_k, & \textit{gevolgd door lineaire uitbreiding.} \end{cases}$$

VOORBEELDEN:

- Beschouw $I\!R = \bigwedge^0(V)$ en laat $\alpha \in I\!R$, dan is $*\alpha = \alpha\mu \in \bigwedge^n(V)$.
- Beschouw $I\!R^3$ met het gewone inproduct en volume, dan geldt

$$* \left(\hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \hat{\mathbf{e}}^2\right) = \mu \lrcorner \mathbf{e}_1 \lrcorner \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{e}}^3.$$

MERK OP:

- Beschouw de orthonormale basis $\{\mathbf{e}_i\}$ van V waarvoor geldt dat $\mu(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$. Ter herinnering vermelden we dat de bijbehorende Grammatrix een diagonaalmatrix is, waarbij de eerste p diagonaalelementen een 1 en de overige een -1 zijn. Hierbij is p de signatuur van het inproduct. Er geldt

$$\begin{aligned} * \left(\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right) &= (-1)^r * (\hat{\mathbf{e}}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}_{i_k}) = (-1)^r \mu \lrcorner \mathbf{e}_{i_1} \lrcorner \cdots \lrcorner \mathbf{e}_{i_k} = \\ &= (-1)^{r+\nu} \hat{\mathbf{e}}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^{j_{n-k}}, \end{aligned}$$

waarbij r het aantal negatieve waarden in $\{(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1}), \cdots, (\mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{i_k})\}$ is en ν het aantal verwisselingen dat nodig is om $i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k}$ in de natuurlijke volgorde $1, \cdots, n$ te krijgen.

VOORBEELDEN:

- Beschouw $I\!R^2$. Definieer het inproduct op $I\!R^2$ door

$$(X, Y) = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

Zij $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ de standaardbasis van $I\!R^2$ en noteer de bijbehorende duale basis met $\{\, \mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y\}$. Merk op dat de standaardbasis orthonormaal is. Definieer het georiënteerde volume μ op V door $\mu = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ en merk op dat $\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 1$. Het isomorfisme $\mathcal{G}$ wordt gegeven door

$$\mathcal{G} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y.$$

Laat $\alpha \in \bigwedge^0(I\!R^2)$, dan geldt

$$*\alpha = \alpha * 1 = \alpha\mu = \alpha\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \bigwedge^2(I\!R^2).$$

Laat $\alpha \in \bigwedge^1(I\!R^2)$, dan geldt

$$*\alpha = *(\alpha_1\, \mathrm{d}x + \alpha_2\, \mathrm{d}y) = \alpha_1 * \mathrm{d}x + \alpha_2 * \mathrm{d}y = \alpha_1\, \mathrm{d}y - \alpha_2\, \mathrm{d}x \in \bigwedge^1(I\!R^2).$$

Blijkbaar geldt $* * \alpha = -\alpha$ en bovendien $\alpha \perp * \alpha$.
Laat $\alpha \in \bigwedge^2(I\!R^2)$, dan geldt

$$*\alpha = *(\alpha_{12}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \alpha_{12} * (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \alpha_{12} \in \bigwedge^0(I\!R^2).$$

- Beschouw $\mathbb{R}^3$. De notaties zijn als in het vorige $\mathbb{R}^3$-voorbeeld. Definieer het inproduct door

  $$\mathcal{G} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$$

  en het georiënteerde volume door $\mu = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Er geldt

  $$*1 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \quad \begin{array}{l} *\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ *\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\ *\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{array} \quad \begin{array}{l} *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}z \\ *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) = -\mathrm{d}y \\ *(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \end{array} \quad *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 1$$

  Blijkbaar geldt $** = I$, een eigenschap van de Euclidische $\mathbb{R}^3$.
  Zij $\alpha = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z$ en $\beta = \beta_1\,\mathrm{d}x + \beta_2\,\mathrm{d}y + \beta_3\,\mathrm{d}z$, dan geldt

  $$*(\alpha \wedge \beta) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathrm{d}x + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,\mathrm{d}y + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathrm{d}z.$$

- Beschouw $\mathbb{R}^4$. De duale basis, behorende bij de standaardbasis, noteren we met $\{\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$. Definieer het inproduct door

  $$\mathcal{G} = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y - \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$$

  (het Minkowski inproduct) en het georiënteerde volume door

  $$\mu = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

  dan geldt

  $$*1 = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \quad \begin{array}{l} *\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ *\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ *\mathrm{d}y = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\ *\mathrm{d}z = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{array} \quad \begin{array}{l} *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\ *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z) = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z \\ *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \\ *(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \end{array}$$

  $$\begin{array}{l} *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}z \\ *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) = -\mathrm{d}y \\ *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \\ *(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \mathrm{d}t \end{array} \quad *(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 1$$

1.13 Opgaven

1. Beschouw een n-dimensionale vectorruimte V over $I\!R$ met drie bases $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ en $\{\mathbf{e}_{i''}\}$. Toon aan dat

   $$A_j^{j'} A_{j'}^{j''} = A_j^{j''}.$$

2. Laat V een symplectische vectorruimte zijn. Bewijs dat de dimensie van V even is en dat aan axioma (iii) van het inproduct onmogelijk voldaan kan zijn.

3. Bewijs de ongelijkheid van Cauchy Schwartz (lemma 1.5.5).

4. Bewijs de uniciteit van de signatuur van het inproduct.

5. Bewijs dat V en V^{**} identificeerbaar zijn. Aanwijzing: definieer een geschikte lineaire afbeelding van V naar V^{**} en bewijs dat dit een isomorfisme is.

6. Zij V een n-dimensionale vectorruimte over $I\!R$ met inproduct $(\cdot,\cdot)$ en φ een 2-tensor op V. Definieer de afbeelding $\mathcal{R}$ op V door $\mathcal{R}\mathbf{a} = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{a},\mathbf{x}))$. Hierbij is $\mathcal{G}$ het isomorfisme uit Stelling 1.5.3. Bewijs dat $\mathcal{R}$ lineair is.

7. Zij V een n-dimensionale vectorruimte over $I\!R$. Toon aan dat een 4-tensor op V correspondeert met een lineaire afbeelding van $\mathcal{L}(V)$ naar $\mathcal{L}(V)$.

8. Bewijs dat het inverteren van matrices met gemengde componenten tensorieel is en dat het inverteren van matrices met boven- of onderindices niet tensorieel is.

9. Bewijs dat iedere antisymmetrische k-tensor op en vectorruimte V met dimensie $n < k$ gelijk is aan de tensor die 0 toevoegt aan ieder element van zijn domein.

10. Bewijs met behulp van de formule

    $$\det\left([A_i^j]\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A^1_{\sigma(1)} \cdots A^n_{\sigma(n)}$$

    dat $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{e}}^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{e}}^k) = \frac{1}{k!}\hat{\mathbf{e}}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathbf{e}}^k$.

11. Bewijs lemma 1.10.7.

12. Zij V een n-dimensionale vectorruimte over $I\!R$ en τ een symmetrische k-tensor op V. Definieer de getallen $\mu_{i_1\cdots i_k} = \left(\hat{\mathbf{e}}^{i_1} \cdots \hat{\mathbf{e}}^{i_k}\right)(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$ voor $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$. Laat zien dat $\mu_{i_1\cdots i_k} = 1$ als $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Druk vervolgens $\mu_{i_1\cdots i_k}$ voor $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ uit in 'faculteiten van multipliciteiten'. Beschouw daartoe eerst de gevallen $n = 2, 3, 4$.

13. Beschouw $I\!R^4$ met inproduct

    $$\mathcal{G} = \,\mathrm{d}x_1 \otimes \,\mathrm{d}x_1 + \,\mathrm{d}x_2 \otimes \,\mathrm{d}x_2 + \,\mathrm{d}x_3 \otimes \,\mathrm{d}x_3 + \,\mathrm{d}x_4 \otimes \,\mathrm{d}x_4$$

    en georiënteerd volume $\mu = \,\mathrm{d}x_1 \wedge \,\mathrm{d}x_2 \wedge \,\mathrm{d}x_3 \wedge \,\mathrm{d}x_4$. Hierbij is $\{\,\mathrm{d}x_1, \,\mathrm{d}x_2, \,\mathrm{d}x_3, \,\mathrm{d}x_4\}$ de duale basis behorende bij de standaardbasis van $I\!R^4$. Ga na dat het inproduct correspondeert met

    $$(X, Y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4.$$

Geef bases van de ruimten $\bigwedge^k(\mathbb{R}^4)$ voor iedere $k = 0, 1, 2, 3, 4$ en bereken vervolgens het Hodge beeld van ieder basiselement.

Hoofdstuk 2

Tensorvelden op $I\!R^n$

2.1 Kromlijnige coördinaten en raakruimten

In dit hoofdstuk zullen we scalarvelden, vectorvelden en meer algemeen tensorvelden beschouwen op open deelverzamelingen van $I\!R^n$. In het vorige hoofdstuk hebben we de vectorruimte $I\!R^n$ ingevoerd als de verzameling van alle reële kolommen ter lengte n met de gebruikelijke definities van optelling en scalaire vermenigvuldiging. Elementen, die we ook wel punten noemen, van $I\!R^n$ noteren we met X en de standaardbasis van $I\!R^n$ met $\{E_i\}$, waarbij

$$E_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T,$$

met de 1 op de i-de positie. Iedere $X \in I\!R^n$ kan geschreven worden als $X = x^i E_i$.

Definitie 2.1.1 *Laat Ω een open deelverzameling van $I\!R^n$ zijn. Een stelsel van n reëelwaardige functies $\{f^i(X)\}$, gedefinieerd op Ω, heet een (kromlijnig) coördinaten systeem voor Ω indien het volgende geldt:*

- *De afbeelding $\mathbf{f} = \left(f^1, \cdots, f^n\right)^T$ van Ω naar $I\!R^n$ is injectief. We noteren $u^i = f^i(X) = f^i(x^j E_j)$. Merk op dat de functies f^i functies van de variabelen x^j zijn.*
- *De verzameling $U = \mathbf{f}(\Omega)$ is een open deelverzameling van $I\!R^n$.*
- *De afbeelding $\mathbf{f}$ is differentieerbaar in ieder punt $X \in \Omega$ en bovendien geldt $\det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(X)\right] \neq 0$ voor iedere $X \in \Omega$.*

De afbeelding $\mathbf{f}$ heet ook wel kaartafbeelding. De inverse afbeelding $\mathbf{f}^{\leftarrow} : U \to \Omega$ heet een parametrizering van Ω. De variabelen x^j zijn functies van de variabelen u^i. Indien we noteren $\mathbf{f}^{\leftarrow} = \left(g^1, \cdots, g^n\right)$, dan geldt $x^j = g^j(u^i)$. Vaak zijn niet én de kaartafbeelding én de parametrizering door eenvoudige functies voor stellen. Uit de inverse functiestelling volgt dat $\mathbf{f}^{\leftarrow}$ differentieerbaar is in ieder punt van U en bovendien dat

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial g^j}{\partial u^k}(u^1, \cdots, u^n) = \delta^i_k,$$

waarbij $u^l = f^l(x^1, \cdots, x^n)$. In corresponderende punten zijn de matrices $\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right]$ en $\left[\frac{\partial g^l}{\partial u^k}\right]$ dus elkaars inverse. De krommen die beschreven worden door de vergelijkingen $f^i(x^1, \cdots, x^k) = C$, met C een constante, heten de bij de kromlijnige coördinaten behorende coördinaatkrommen.

VOORBEELDEN:

- Zij $\Omega = \mathbb{R}^n$. Cartesische coördinaten worden gedefinieerd door $u^i = x^i$. Er geldt $\det\left[\frac{\partial u^i}{\partial x^j}(X)\right] = \det\left[\delta^i_j\right] = 1$.
- Zij $\Omega = \mathbb{R}^n$. Laat $B = [b^i] \in \mathbb{R}^n$ en $L = [L^i_j] \in \mathbb{R}^n_n$, met $\det L \neq 0$. Algemene affiene coördinaten worden gedefinieerd door $u^i = b^i + L^i_j x^j$. Er geldt $\det\left[\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right] = \det L \neq 0$. De parametrizering wordt gegeven door

  $$x^j = (L^{-1})^j_k u^k - (L^{-1})^j_k b^k.$$
- Zij $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \in [0,\infty)\}$ en $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^2$. Poolcoördinaten worden gedefinieerd door de parametrizering

  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \text{met } x = x^1,\ y = x^2,\ r = u^1 \text{ en } \varphi = u^2.$$

  De bijbehorende kaartafbeelding is hier nog met enige moeite te berekenen. Er geldt

  $$\begin{aligned} r(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi(x,y) &= \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0,\ x \neq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \leq 0,\ x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

  Ga na dat we ook $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \in (-\infty, 0]\}$ en $U = (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ hadden kunnen kiezen.

Het onderwerp van studie van dit hoofdstuk is tensorvelden op $\mathbb{R}^n$. Intuïtief betekent dit dat we aan ieder punt X van $\mathbb{R}^n$ (of een zekere open deelverzameling hiervan) een tensor uit een tensorruimte, die hoort bij dat punt X, hechten. De 'uitgangsvectorruimte' die we aan ieder punt X hechten is een copie van $\mathbb{R}^n$. Om al deze copieën uit elkaar te houden, noteren we de copie van $\mathbb{R}^n$ die bij het punt X hoort met $T_X(\mathbb{R}^n)$. We noemen deze copie de raakruimte in X.
Laat Ω een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ zijn. We kunnen alle raakruimten, behorende bij de punten $X \in \Omega$, 'bundelen' tot de zogenaamde raakbundel over Ω.

$$T(\Omega) = \bigcup_{X \in \Omega} T_X(\mathbb{R}^n) = \Omega \times \mathbb{R}^n = \{(X, \mathbf{x}) | X \in \Omega,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

De oorsprongen van alle raakruimten $T_X(\mathbb{R}^n)$, met $X \in \Omega$, vormen, bij elkaar genomen, weer de open deelverzameling Ω.
Laat $x^k = g^k(u^1, \cdots, u^n)$ een parametrizering van Ω zijn. De in X aan de coördinaatkrommen rakende vectoren $\mathbf{c}_i = \frac{\partial X}{\partial u^i}$ vormen, op een natuurlijke manier, een met de (kromlijnige)

coördinaten x^k corresponderende basis van $T_X(I\!\!R^n)$. Merk op dat als x^k cartesische coördinaten zijn, dat dan $\mathbf{c}_i = E_i$. Dit is als het ware een naar X 'evenwijdig verplaatste copie' van de standaardbasis van $I\!\!R^n$.

Net als in het vorige hoofdstuk, zullen we ook in dit hoofdstuk gebruik maken van de kern-index notatie. Dit is de notatie met behulp van accenten. In plaats van $u^i = u^i(x^1, \cdots, x^n)$ schrijven we $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \cdots, x^n) = x^{i'}(x^i)$ en analoog $x^i = x^i(x^{i'})$.

De matrix $\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^k)\right]$ is inverteerbaar in ieder punt X, daar zijn determinant ongelijk aan nul is verondersteld. Zoals reeds eerder opgemerkt wordt zijn inverse in het punt X gegeven door $\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x^{k'})\right]$, waarbij $x^{k'} = x^{k'}(x^k)$. Differentiatie van $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ naar $x^{j'}$ leidt immers tot

$$\delta^{i'}_{j'}(x^k) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^k)\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}(x^{k'}(x^k)).$$

De basis van $T_X(I\!\!R^n)$, geassocieerd met de coördinaten x^i, noteren we met $\{\frac{\partial X}{\partial x^i}\}$, of, nog korter, met $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Bij overgang op andere coördinaten $x^{i'}$ geldt

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

zodat de overgangsmatrix van de basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ naar de basis $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}$ gegeven wordt door $\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right]$. Bijgevolg wordt overgang van de basis $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}$ naar de basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ beschreven door de matrix $\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right]$.

In ieder punt $X \in I\!\!R^n$ laten we nu $T_X(I\!\!R^n)$ de rol spelen van de algemene vectorruimte V uit het vorige hoofdstuk. Aan ieder punt $X \in I\!\!R^n$ hechten we dus behalve de raakruimte $T_X(I\!\!R^n)$ ook de <u>co-raakruimte</u> $T^*_X(I\!\!R^n) = (T_X(I\!\!R^n))^*$ en meer algemeen de vectorruimte ${T_X}^r_s(I\!\!R^n)$ van tensoren die covariant van orde s en contravariant van orde r zijn. Uiteraard kunnen ook deelruimten zoals bijvoorbeeld de ruimten van symmetrische en antisymmetrische tensoren, die we noteren met respectievelijk $\bigvee_X(I\!\!R^n)$ en $\bigwedge_X(I\!\!R^n)$, gehecht worden aan X.

Bij iedere basis van $T_X(I\!\!R^n)$ hoort een duale basis van $T^*_X(I\!\!R^n)$. Deze duale basis, geassocieerd met de coördinaten x^i, noteren we met $\{\,\mathrm{d}x^i\}$. De duale basis $\{\,\mathrm{d}x^{i'}\}$, behorende bij de coördinaten $x^{i'}$, kan gevonden worden met behulp van de matrix $\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right]$. Er geldt namelijk

$$\mathrm{d}x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i,$$

hetgeen volgt uit lemma 1.6.2 (bedenk hierbij dat reciproke en duale basis overeenkomen na keuze van een inproduct). Merk op dat dit resultaat wonderwel klopt met de folklore van de infinitesimaalrekening!

2.2 Definitie van tensorvelden op $\mathbb{R}^n$

Definitie 2.2.1 *Een scalarveld , of $\binom{0}{0}$-tensorveld φ op $\mathbb{R}^n$ is een afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$. Dus, aan ieder punt $X \in \mathbb{R}^n$ wordt door φ het getal $\varphi(X)$ toegevoegd.*

Definitie 2.2.2 *Een vectorveld, contravariant vectorveld of $\binom{1}{0}$-tensorveld $\mathbf{a}$ op $\mathbb{R}^n$ is een afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\bigcup_{X\in\mathbb{R}^n} T_X(\mathbb{R}^n)$. Aan ieder punt $X \in \mathbb{R}^n$ wordt een vector $\mathbf{a}(X)$ gehecht die in de bij X behorende raakruimte $T_X(\mathbb{R}^n)$ ligt.*

Bij een vectorveld $\mathbf{a}$ op $\mathbb{R}^n$ horen n functies a^i op $\mathbb{R}^n$ zodanig dat $\mathbf{a}(X) = a^i(x^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$. In andere (kromlijnige) coördinaten $x^{i'}$ schrijven we $\mathbf{a}(x^k(x^{k'})) = a^{i'}(x^{k'})\frac{\partial}{\partial x^{i'}}$, dan geldt

$$a^{i'}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^k(x^{k'}))a^i(x^k(x^{k'})),$$

hetgeen we kortweg schrijven als $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}a^i$.

Definitie 2.2.3 *Een covectorveld , covariant vectorveld of $\binom{0}{1}$-tensorveld α op $\mathbb{R}^n$ is een afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\bigcup_{X\in\mathbb{R}^n} T^*_X(\mathbb{R}^n)$. Aan ieder punt $X \in \mathbb{R}^n$ wordt een element (covector) $\alpha(X)$ uit de duale ruimte $T^*_X(\mathbb{R}^n)$ van $T_X(\mathbb{R}^n)$ gehecht.*

Bij een covectorveld α op $\mathbb{R}^n$ horen n functies α_i op $\mathbb{R}^n$ zodanig dat $\alpha(X) = \alpha_i(x^k)\,\mathrm{d}x^i$. In andere (kromlijnige) coördinaten $x^{i'}$ schrijven we $\alpha(x^k(x^{k'})) = \alpha_{i'}(x^{k'})\,\mathrm{d}x^{i'}$, dan geldt

$$\alpha_{i'}(x^{k'}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x^{k'})\alpha_i(x^k(x^{k'})),$$

hetgeen we kortweg schrijven als $\alpha_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\alpha_i$.

Definitie 2.2.4 *Een $\binom{r}{s}$-tensorveld op $\mathbb{R}^n$ is een afbeelding Φ van $\mathbb{R}^n$ naar $\bigcup_{X\in\mathbb{R}^n} T_X{}^r_s(\mathbb{R}^n)$. Aan ieder punt $X \in \mathbb{R}^n$ wordt een $\binom{r}{s}$- tensor $\Phi(X)$ uit $T_X{}^r_s(\mathbb{R}^n)$ gehecht.*

Bij een $\binom{r}{s}$-tensorveld Φ op $\mathbb{R}^n$ horen n^{r+s} functies $\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ op $\mathbb{R}^n$ zodanig dat

$$\Phi(X) = \Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x^k)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

In andere (kromlijnige) coördinaten $x^{i'}$ schrijven we

$$\Phi(x^k((x^{k'})) = \Phi^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s}(x^{k'})\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j'_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j'_s},$$

dan geldt

$$\Phi^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}(x^k(x^{k'}))\cdots\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}}(x^k(x^{k'}))\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}(x^{k'})\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}(x^{k'})\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x^k(x^{k'})),$$

hetgeen we kortweg schrijven als

$$\Phi^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.$$

Definitie 2.2.5 *Een differentiaalvorm van de orde k of k-vorm θ op $I\!R^n$ is een afbeelding van $I\!R^n$ naar $\bigcup_{X \in I\!R^n} \bigwedge_X^k(I\!R^n)$. Aan ieder punt $X \in I\!R^n$ wordt een antisymmetrische k-tensor $\theta(X)$ uit $\bigwedge_X^k(I\!R^n)$ gehecht.*

Een 0-vorm is een scalarveld en een 1-vorm is een covectorveld. In feite is een iedere k-vorm een $\binom{0}{k}$-tensorveld (zie definitie 2.2.4). Omdat deze klasse van tensorvelden zo belangrijk is schenken we er apart aandacht aan.
Bij een k-vorm θ op $I\!R^n$ horen $\binom{n}{k}$ functies $\theta_{i_1 \cdots i_k}$, voor $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, op $I\!R^n$ zodanig dat

$$\theta(X) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \theta_{i_1 \cdots i_k}(x^l)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \tag{2.1}$$

(Vergelijk dit met representatie (1.4), paragraaf 1.10).

Lemma 2.2.6 *Indien we in andere (kromlijnige) coördinaten $x^{i'}$ schrijven*

$$\theta(x^l(x^{l'})) = \sum_{1 \leq i'_1 < \cdots < i'_k \leq n} \theta_{i'_1 \cdots i'_k}(x^{l'})\, \mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k}, \tag{2.2}$$

dan geldt

$$\theta_{i'_1 \cdots i'_k}(x^{l'}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathcal{J}^{i_1 \cdots i_k}_{i'_1 \cdots i'_k}(x^{l'}) \theta_{i_1 \cdots i_k}(x^l(x^{l'})), \tag{2.3}$$

waarbij $\mathcal{J}^{i_1 \cdots i_k}_{i'_1 \cdots i'_k} = \frac{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})}{\partial(x^{i'_1}, \cdots, x^{i'_k})}$.

Bewijs:
Beschouw representatie (2.1) en merk op dat

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{j'_k}}\, \mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_k}. \tag{2.4}$$

De termen in de som in het rechterlid van (2.4) zijn alleen ongelijk aan nul indien de indices j'_p, voor $p = 1, \cdots, k$, alle verschillend zijn. Kies een vaste, geordende collectie indices $i'_1, \cdots, i'_k$ met $1 \leq i'_1 < \cdots < i'_k \leq n$. Beschouw nu die termen in de som in het rechterlid van (2.4) waarvoor de ongeordende collectie $j'_1, \cdots, j'_k$ precies de collectie $i'_1, \cdots, i'_k$ is. Merk op dat dit er $k!$ zijn. Bij iedere ongeordende collectie $j'_1, \cdots, j'_k$ hoort precies één $\sigma \in S_k$ zodat $j'_p = i'_{\sigma(p)}$, voor $p = 1, \cdots, k$. Uit dit alles volgt

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_{1 \leq i'_1 < \cdots < i'_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_{\sigma(k)}}}\, \mathrm{d}x^{i'_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_{\sigma(k)}}.$$

Het in de volgorde zetten van $\mathrm{d}x^{i'_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_{\sigma(k)}}$ in $\mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k}$ moet betaald worden met een factor $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Dus

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{1 \leq i'_1 < \cdots < i'_k \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_{\sigma(k)}}} \right) \mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k}.$$

Hierin herkennen we de term tussen haken als de determinant $\mathcal{J}^{i_1\cdots i_k}_{i'_1\cdots i'_k}$. Blijkbaar geldt

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_{1\le i'_1<\cdots<i'_k\le n} \mathcal{J}^{i_1\cdots i_k}_{i'_1\cdots i'_k}\,\mathrm{d}x^{i'_1}\cdots\,\mathrm{d}x^{i'_k}.$$

Hieruit volgt dat representatie (2.1) geschreven kan worden als

$$\begin{aligned}\theta(X) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \theta_{i_1\cdots i_k}(x^l) \sum_{1\le i'_1<\cdots<i'_k\le n} \mathcal{J}^{i_1\cdots i_k}_{i'_1\cdots i'_k}(x^{l'})\,\mathrm{d}x^{i'_1}\cdots\,\mathrm{d}x^{i'_k}\\ &= \sum_{1\le i'_1<\cdots<i'_k\le n}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \mathcal{J}^{i_1\cdots i_k}_{i'_1\cdots i'_k}(x^{l'})\theta_{i_1\cdots i_k}(X)\right)\mathrm{d}x^{i'_1}\cdots\,\mathrm{d}x^{i'_k}.\end{aligned}$$

Vergelijk dit met (2.2), dan volgt onmiddellijk relatie (2.3).

□

Al de in deze paragraaf gegeven definities van tensorvelden zijn zodanig dat tensorvelden gedefinieerd zijn als afbeeldingen op $I\!R^n$. Vaak zijn tensorvelden echter niet op de hele $I\!R^n$ gedefinieerd maar slechts op een open deelverzameling daarvan. Dezelfde rekenregels blijven uiteraard geldig.

2.3 Alternatieve definitie

Zij $\Omega \subset I\!R^n$ open. Zij $\mathcal{K}(\Omega)$ de verzameling van alle coördinaten systemen op Ω. Zij voorts

$$\mathcal{F}^r_s = \{F : U \to T^r_s(I\!R^n) |\, U = \mathbf{f}(\Omega),\ \mathbf{f} \in \mathcal{K}(\Omega)\}\,.$$

We veronderstellen de elementen van $\mathcal{F}^r_s$ voldoende glad. De componenten van een $F \in \mathcal{F}^r_s$ noteren we met $F^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$, $1 \le i_k \le n$, $1 \le j_l \le n$, $1 \le k \le r$ en $1 \le l \le s$. Voor coördinaten systemen gebruiken we hier zowel de notatie $\mathbf{f}$ als $\{x^i\}$.

Definitie 2.3.1 *Een $\binom{r}{s}$-tensorveld $\mathcal{T}$ op Ω is een afbeelding van $\mathcal{K}(\Omega)$ naar $\mathcal{F}^r_s$ zodanig dat, indien $\mathcal{T} : \{x^i\} \mapsto F$ en $\mathcal{T} : \{x^{i'}\} \mapsto G$ er voldaan is aan*

$$G^{i'_1\cdots i'_r}_{j'_1\cdots j'_s}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}(x^k(x^{k'}))\cdots\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}}(x^k(x^{k'}))\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}(x^{k'})\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}(x^{k'})F^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x^k(x^{k'})).$$

Indien dus voor een zeker kromlijnig coördinaten systeem op Ω een n^{r+s}-tal functies op $\mathbf{f}(\Omega)$ gegeven zijn, dan hoort bij dit stel functies precies één $\binom{r}{s}$-tensorveld op Ω.
Het moge duidelijk zijn dat de componenten van een tensorveld uit definitie 2.2.4 overeenkomen met de componenten van een tensorveld uit definitie 2.3.1, beide ten opzichte van hetzelfde kromlijnige coördinaten systeem.

De alternatieve definitie is van belang omdat men met de componenten van een gegeven tensorveld algebraïsche en analytische bewerkingen, zoals bijvoorbeeld differentiëren, wil uitvoeren zonder zich aan een vast gekozen coördinaten systeem te verbinden. Als na dergelijke rekenoperaties een stel functies is verkregen dan is het de vraag of deze functies weer componenten van een tensorveld zijn. Dit is zo indien aan de transformatieregels is voldaan. Soms is men al tevreden als aan de transformatieregels is voldaan binnen een vast gekozen klasse (een voorkeursklasse) van kromlijnige coördinaten systemen. Een voorbeeld van een voorkeursklasse is de klasse der affiene coördinaattransformaties. Deze klasse wordt beschreven door

$$x^{i'} = b^{i'} + L_i^{i'} x^i, \tag{2.5}$$

waarbij $\left[b^{i'}\right] \in I\!R^n$ en $\left[L_i^{i'}\right] \in I\!R^n_n$ inverteerbaar. Coördinaten die volgens (2.5) samenhangen met cartesische coördinaten heten affiene coördinaten . Nog belangrijker zijn zekere ondergroepen hiervan:

(i) $[L_i^{i'}]$ orthogonaal: Euclidische invariantie, 'Principe van Objectiviteit' in de continuumsmechanica.

(ii) $[L_i^{i'}]$ Lorentz: Lorentz invariantie in de speciale relativiteitstheorie.

(iii) $[L_i^{i'}]$ symplectisch: Lineaire canonieke transformaties in de klassieke mechanica.

Als binnen de voorkeursklasse de transformatieregels gelden, dan liggen natuurlijk de componenten van het verkregen tensorveld ook vast buiten de voorkeursklasse. Een expliciete formule is echter veelal niet of moeilijk te geven.
Al de in het vorige hoofdstuk behandelde bewerkingen met tensoren kunnen ook met tensorvelden uitgevoerd worden. Ze kunnen puntsgewijs voor iedere X op de ruimten $T_X{}^r_s(I\!R^n)$ worden uitgevoerd.

2.4 Voorbeelden van tensorvelden

2.4.1 Het Kronecker tensorveld

In paragraaf 1.9 hebben we de Kronecker tensor ingevoerd. Dit is de tensor die aan iedere basis de eenheidsmatrix met gemengde indices toevoegt. We definiëren nu het Kronecker tensorveld als het $\binom{1}{1}$- tensorveld dat aan iedere $X \in I\!R^n$ de Kronecker tensor in $T_X{}^1_1(I\!R^n)$ toevoegt. Omdat

$$\delta^{i'}_{j'}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}(x^k(x^{k'}))\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}}(x^{k'}) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}(x^k(x^{k'}))\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}(x^{k'})\delta^i_j(x^k(x^{k'}))$$

is hierdoor inderdaad een $\binom{1}{1}$-tensorveld gedefinieerd.

2.4.2 Fundamentaaltensorvelden

Zij $(\cdot,\cdot)$ een symmetrisch inproduct op $I\!R^n$. Laat $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_X(I\!R^n)$ en definieer het inproduct $(\cdot,\cdot)_X$ door

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_X = \delta_{ij} v^i w^j.$$

Hierbij zijn v^i en w^j de componenten ten opzichte van de standaardbasis in $T_X(I\!R^n)$. Deze wordt op natuurlijke wijze gevonden met behulp van cartesische coördinaten. Laat $\mathcal{G}_X$ het bij het inproduct $(\cdot,\cdot)_X$ behorende isomorfisme van $T_X(I\!R^n)$ naar $T^*_X(I\!R^n)$ zijn. Dit isomorfisme is in paragraaf 1.8.3 ingevoerd en aldaar gedefinieerd als

$$\mathcal{G}_X : \mathbf{v} \mapsto \hat{\mathbf{v}}, \text{ met } < \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{y} >_X = (\mathbf{v}, \mathbf{y})_X.$$

Definitie 2.4.1 *Het fundamentaaltensorveld g is het $\binom{0}{2}$-tensorveld op $I\!R^n$ gedefinieerd door*

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_X.$$

Lemma 2.4.2 *Voor ieder kromlijnig coördinaten systeem $\{x^i\}$ op $I\!R^n$ geldt*

$$g = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \text{ met } g_{ij}(x^k) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)_X.$$

Bewijs:
Er geldt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)_X = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{kl}(\,\mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{kl}\delta^k_i \delta^l_j = g_{ij}.$$

□

Een kromlijnig coördinaten systeem $\{x^i\}$ waarvoor $[g_{ij}(x^k)]$ in ieder punt X een diagonaalmatrix is, heet een orthogonaal kromlijnig coördinaten systeem. Deze diagonaalmatrix is puntsgewijs over te voeren in een diagonaalmatrix met uitsluitend getallen ± 1 op de diagonaal. In het algemeen is dit niet mogelijk voor alle punten tegelijk, daar dit teveel eisen aan de kromlijnige coördinaten zou opleggen. Indien het gekozen inproduct positief is, dan kunnen we functies h_i invoeren zodanig dat $g_{ij} = \delta_{ij} h_i^2$. Deze functies heten schaalfactoren.

Merk op dat de lengte van de vectoren $\frac{1}{h^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$ en $h_i\,\mathrm{d}x^i$ (niet sommeren) gelijk is aan 1, immers

$$\left|\frac{1}{h^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{h^i}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{1}{h^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathbf{x}}} = \sqrt{\frac{1}{h_i^2} g_{ii}} = 1 \text{ (niet sommeren)}$$

en

$$\left|h_i\,\mathrm{d}x^i\right| = \sqrt{(h_i\,\mathrm{d}x^i, h_i\,\mathrm{d}x^i)_{\mathbf{x}}} = \sqrt{h_i^2 g^{ii}} = 1. \text{ (niet sommeren)}$$

De bases $\left\{\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ en $\left\{h_i\,\mathrm{d}x^i\right\}$ zijn dus orthonormale bases van de overeenkomstige raakruimte en haar duale.

2.4.3 Volumevormen en dichtheden

Laat $\{x^i\}$ de cartesische coördinaten op $I\!R^n$ zijn en beschouw de differentiaalvorm (n-vorm) $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Zij $X \in I\!R^n$ vast en laat $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in T_X(I\!R^n)$. Het getal

$$(\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n)(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$$

is dan de georiënteerde inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$. Bij overgang op kromlijnige coördinaten $\{x^{i'}\}$ transformeert de n-vorm $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ volgens

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(x^{1'}, \cdots, x^{n'})} \mathrm{d}x^{1'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n'}$$

zodat $(\mathrm{d}x^{1'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n'})(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ in het algemeen een andere inhoud oplevert dan $(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n)(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$. Indien we ons echter beperken tot affiene coördinatentransformaties $x^{i'} = b^{i'} + L_i^{i'} x^i$, met $\det L = 1$, dan geldt $\frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(x^{1'}, \cdots, x^{n'})} = 1$. In zo'n geval noemen we de inhoud 'invariant' onder een coördinatentransformatie.
Een dichtheid is een antisymmetrisch tensorveld van de vorm $\varphi'(x^{k'})\, \mathrm{d}x^{1'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n'}$, waarbij φ' een functie is, die voldoet aan

$$\varphi'(x^{k'})\, \mathrm{d}x^{1'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n'} = \varphi''(x^{k''})\, \mathrm{d}x^{1''} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n''}.$$

Dus

$$\varphi'(x^{k'}) = \varphi''(x^{k''}(x^{k'})) \frac{\partial \left(x^{1''}, \cdots, x^{n''}\right)}{\partial \left(x^{1'}, \cdots, x^{n'}\right)}.$$

2.5 Voorbeelden van kromlijnige coördinaten

2.5.1 Poolcoördinaten op $I\!R^2$

Noteer de cartesische coördinaten op $I\!R^2$ met x en y, dan hangen de poolcoördinaten r en φ met de cartesische coördinaten samen volgens $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$. Er geldt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix},$$

waaruit eenvoudig volgt dat

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Met behulp van deze overgangsmatrices vinden we de volgende relaties tussen bases en duale bases:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\varphi\, \mathrm{d}r - r\sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \sin\varphi\, \mathrm{d}r + r\cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

Met behulp van deze relaties zijn tensorvelden die in cartesische coördinaten gegeven zijn eenvoudig om te schrijven naar bijvoorbeeld poolcoördinaten. Zo wordt het vectorveld

$$\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

in poolcoördinaten gegeven door $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, de 2-vorm $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$ door $r^3 r\,\mathrm{d}r\wedge\,\mathrm{d}\varphi$ en de volumevorm $\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$ door $r\,\mathrm{d}r\wedge\,\mathrm{d}\varphi$. Het fundamentaaltensorveld behorende bij het gewone inproduct op $\mathbb{R}^2$ kan in poolcoördinaten geschreven worden als

$$\mathrm{d}x\otimes\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y\otimes\,\mathrm{d}y=\,\mathrm{d}r\otimes\,\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\varphi\otimes\,\mathrm{d}\varphi. \tag{2.6}$$

2.5.2 Cylindercoördinaten op $\mathbb{R}^3$

Noteer de cartesische coördinaten op $\mathbb{R}^3$ met x, y en z, dan hangen de cylindercoördinaten r, φ en z op $\mathbb{R}^3$ met de cartesische coördinaten samen volgens $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ en $z=z$. De relaties tussen bases en duale bases zijn dezelfde als bij poolcoördinaten, aangevuld met $\mathrm{d}z=\,\mathrm{d}z$ en $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}$.
De spanningstoestand van een buis onder inwendige druk p, terwijl de axiale verplaatsingen verhinderd zijn, wordt gegeven door het contravariante 2-tensorveld

$$T=\frac{a^2p}{b^2-a^2}\left(\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\otimes\frac{\partial}{\partial r}+\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\otimes\frac{\partial}{\partial\varphi}+2\nu\frac{\partial}{\partial z}\otimes\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

waarbij a en b, met $a<b$, de stralen van respectievelijk de binnen- en buitenwand van de buis zijn. Verder is ν een materiaalconstante.

2.5.3 Bolcoördinaten op $\mathbb{R}^3$

Noteer de cartesische coördinaten op $\mathbb{R}^3$ weer met x, y en z, dan hangen de bolcoördinaten ρ, θ en φ op $\mathbb{R}^3$ met de cartesische coördinaten samen volgens $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$ en $z=\rho\cos\theta$. Er geldt

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} & x\\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\sqrt{x^2+y^2} & 0\end{pmatrix}.$$

Na enig rekenwerk volgt hieruit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} & \frac{\partial\rho}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} & \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho} & -\frac{\sin\theta}{\rho} \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Met behulp van deze twee overgangsmatrices zijn relaties tussen bases en duale bases aan te geven. Hiermee kunnen dan tensorvelden uitgedrukt worden in bolcoördinaten uitgedrukt worden. Zo wordt de volumevorm $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ in bolcoördinaten gegeven door $\rho^2 \sin\theta d\rho \wedge d\theta \wedge d\varphi$. Het elektrische veld als gevolg van een puntlading in de oorsprong wordt, op een physische constante na, in cartesische coördinaten gegeven door

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

en in bolcoördinaten door de eenvoudige formule $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}$. Voorts transformeert het fundamentaaltensorveld, behorende bij het gewone inproduct op $I\!R^3$, volgens

$$\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z = \mathrm{d}\rho \otimes \mathrm{d}\rho + \rho^2\,\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \rho^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

De spanningstoestand van een holle bol onder inwendige druk p wordt gegeven door het contravariante 2-tensorveld

$$T = \frac{a^3 p}{b^3 - a^3} \left(\left(1 - \frac{b^3}{\rho^3}\right) \frac{\partial}{\partial\rho} \otimes \frac{\partial}{\partial\rho} + \left(1 + \frac{b^3}{2\rho^3}\right) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{b^3}{2\rho^2}\right) \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \otimes \frac{\partial}{\partial\varphi} \right),$$

waarbij a en b, met $a < b$, de stralen van respectievelijk de binnen- en buitenwand van de bol zijn.

2.6 Differentiatie operaties op tensorvelden

2.6.1 De gradiënt

Zij f een scalarveld op $I\!R^n$ en $\{x^i\}$ een kromlijnig coördinaten systeem op $I\!R^n$. Zij voorts $\{x^{i'}\}$ een ander kromlijnig coördinaten systeem op $I\!R^n$. Omdat

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

vormen de functies $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ de componenten van een covariant tensorveld.

Definitie 2.6.1 *Het covariante tensorveld* $\mathrm{d}f = \partial_i f\,\mathrm{d}x^i$ *heet het* <u>*gradiëntveld*</u> *van het scalarveld* f.

Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld. Laat a^i de componenten van dit vectorveld ten opzichte van de kromlijnige coördinaten x^i zijn. De functies $a^i\partial_j f$ vormen dan de componenten van een $\binom{1}{1}$-tensorveld.

Definitie 2.6.2 *De contractie* $a^i\partial_i f$ *heet de* <u>*richtingsafgeleide*</u> *van* f *in de richting* $\mathbf{a}$, *notatie*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} f = < \mathrm{d}f, \mathbf{a} > = a^i\partial_i f.$$

Indien op $I\!\!R^n$ een inproduct gedefinieerd is, dan kan uit het gradiëntveld het contravariante vectorveld

$$\mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d}f = g^{ki}\partial_i f\frac{\partial}{\partial x^k}$$

gevormd worden. Verwarrend genoeg wordt vaak $\mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d}f$ de 'gradiënt van f' genoemd. Als $\{x^i\}$ een orthogonaal kromlijnig coördinaten systeem is, dan kunnen we schrijven

$$\mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d}f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \frac{1}{h_n}\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{1}{h_n}\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

2.6.2 De Lie afgeleide

Laat $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ contravariante vectorvelden op $I\!\!R^n$ zijn.

Definitie 2.6.3 *Ten opzichte van kromlijnige coördinaten* x^i *definiëren we*

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^j = w^i\partial_i v^j - v^i\partial_i w^j.$$

Zij $\{x^{i'}\}$ een ander kromlijnig coördinaten systeem, dan geldt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^{j'} &= w^{i'}\partial_{i'}v^{j'} - v^{i'}\partial_{i'}w^{j'} = \\
&= A^{i'}_i w^i A^k_{i'}\partial_k(A^{j'}_j v^j) - A^{i'}_i v^i A^k_{i'}\partial_k(A^{j'}_j w^j) = \\
&= w^k\partial_k(A^{j'}_j v^j) - v^k\partial_k(A^{j'}_j w^j) = \\
&= w^k\left(v^j\partial_k A^{j'}_j + A^{j'}_j\partial_k v^j\right) - v^k\left(w^j\partial_k A^{j'}_j + A^{j'}_j\partial_k w^j\right) = \\
&= A^{j'}_j\left(w^k\partial_k v^j - v^k\partial_k w^j\right) + \left(w^k v^j - v^k w^j\right)\partial_k A^{j'}_j = \\
&= A^{j'}_j(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^j + w^j v^k\left(\partial_j A^{j'}_k - \partial_k A^{j'}_j\right) \\
&= A^{j'}_j(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^j.
\end{aligned}$$

Blijkbaar vormen de functies $(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^j$ de componenten van een contravariant vectorveld. Het vectorveld $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ heet het <u>Lieproduct</u> van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$. Met dit product vormt de ruimte van vectorvelden een Lie-algebra. Voor een fraaie meetkundige interpretatie van het Lieproduct verwijzen we naar [AMR] of [MTW].

2.6.3 Christoffelsymbolen op $\mathbb{R}^n$

Zij $\{x^i\}$ een kromlijnig coördinaten systeem op $\mathbb{R}^n$.

Definitie 2.6.4 *De n^3 functies $\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\}$, gedefinieerd door*

$$\partial_j \partial_k X = \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \partial_i X,$$

heten Christoffelsymbolen.

Merk op dat $\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ k\ j \end{matrix} \right\}$ en dat $\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} =< \mathrm{d}x^i, \partial_j \partial_k X >$.
Zij $\{x^{i'}\}$ een ander kromlijnig coördinaten systeem op $\mathbb{R}^n$, dan geldt

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} i' \\ j'\ k' \end{matrix} \right\} &= < \mathrm{d}x^{i'}, \partial_{j'} \partial_{k'} X >= \\
&= < A^{i'}_i \,\mathrm{d}x^i, A^j_{j'} \partial_j \left(A^k_{k'} \partial_k X \right) >= \\
&= A^{i'}_i < \mathrm{d}x^i, A^j_{j'} A^k_{k'} \partial_j \partial_k X + A^j_{j'} \left(\partial_j A^k_{k'} \right) \partial_k X >= \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} < \mathrm{d}x^i, \partial_j \partial_k X > + A^{i'}_i A^j_{j'} \left(\partial_j A^k_{k'} \right) < \mathrm{d}x^i, \partial_k X >= \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} + A^{i'}_i A^j_{j'} \left(\partial_j A^k_{k'} \right) \delta^i_k = \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} + A^{i'}_i \partial_{j'} A^i_{k'}.
\end{aligned}$$

Omdat de term $A^{i'}_i \partial_{j'} A^i_{k'}$ in het algemeen ongelijk aan nul is, vormen de Christoffelsymbolen niet de componenten van een $\binom{1}{2}$-tensorveld.
Bij de definitie van de Christoffelsymbolen is op geen enkele manier gebruik gemaakt van een inproduct op $\mathbb{R}^n$. Indien er echter een symmetrisch inproduct op $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd is, dan laten de Christoffelsymbolen zich eenvoudig berekenen via het fundamentaaltensorveld. De Christoffelsymbolen zijn dan uit te drukken in de componenten van het fundamentaaltensorveld g_{ij} en zijn inverse g^{kl}. Er geldt namelijk

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} &= (\partial_i \partial_j X, \partial_k X) + (\partial_j X, \partial_i \partial_k X) + (\partial_j \partial_k X, \partial_i X) + \\
&\quad + (\partial_k X, \partial_j \partial_i X) - (\partial_k \partial_i X, \partial_j X) - (\partial_i X, \partial_k \partial_j X) = \\
&= 2(\partial_k X, \partial_i \partial_j X).
\end{aligned}$$

Bedenk dat de index k naar boven gebracht kan worden, waarna het inproduct te schrijven is als de actie van een covector op een vector. Dus

$$(\partial_k X, \partial_i \partial_j X) = g_{kl} < \mathrm{d}x^l, \partial_i \partial_j X >= g_{kl} \left\{ \begin{matrix} l \\ i\ j \end{matrix} \right\},$$

waaruit de identiteit

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2 g_{kl} \left\{ \begin{array}{c} l \\ i\,j \end{array} \right\}$$

volgt. Vermenigvuldig deze identiteit met $\frac{1}{2} g^{mk}$, dan blijkt

$$\left\{ \begin{array}{c} m \\ i\,j \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \right). \tag{2.7}$$

Voor affiene coördinaten, die met cartesische coördinaten samenhangen volgens (2.5), zijn alle Christoffelsymbolen gelijk aan nul. Kies maar het gewone inproduct op $I\!R^n$, dan is $G = I$ zodat $G_{,,} = L^T L$. Omdat L een constante matrix is, zijn alle componenten van het fundamentaaltensorveld behorende bij het gewone inproduct ten opzichte van willekeurige affiene coördinaten constant. Uit (2.7) volgt direct dat dan alle Christoffelsymbolen gelijk aan nul zijn.
Voor poolcoördinaten geldt

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

hetgeen volgt uit (2.6). Hiermee vinden we

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\,2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2\,1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{1}{r} \text{ en}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\,2 \end{array} \right\} = -r.$$

De overige Christoffelsymbolen, behorende bij poolcoördinaten, zijn alle gelijk aan nul.

2.6.4 De covariante afgeleide op $I\!R^n$

Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld op $I\!R^n$, $\{x^i\}$ een kromlijnig coördinaten systeem op $I\!R^n$ en schrijf $\mathbf{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Laat voorts $\{x^{i'}\}$ een tweede kromlijnig coördinaten systeem op $I\!R^n$ zijn, dan geldt

$$\partial_{j'} a^{i'} = A^j_{j'} \partial_j \left(A^{i'}_i a^i \right) = A^j_{j'} A^{i'}_i \partial_j a^i + a^i \partial_{j'} A^{i'}_i. \tag{2.8}$$

Omdat de tweede term in (2.8) in het algemeen ongelijk aan nul is, vormen de functies $\partial_j a^i$ niet de componenten van een $\binom{1}{1}$- tensorveld.

Definitie 2.6.5 *We definiëren n^2 functies $\nabla_j a^i$ door*

$$\nabla_j a^i = \partial_j a^i + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\,k \end{array} \right\} a^k. \tag{2.9}$$

Lemma 2.6.6 *De functies $\nabla_j a^i$ vormen de componenten van een $\binom{1}{1}$- tensorveld.*

Bewijs:
Op grond van de transformatieregel voor Christoffelsymbolen uit de vorige paragraaf en (2.8) geldt

$$\begin{aligned}
\nabla_{j'} a^{i'} &= \partial_{j'} a^{i'} + \left\{ \begin{matrix} i' \\ j'\ k' \end{matrix} \right\} a^{k'} = \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} \partial_j a^i + A^{i'}_i A^k_{k'} A^j_{j'} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} A^{k'}_l a^l + \left(\partial_{j'} A^{i'}_i \right) a^i + A^{i'}_i \left(\partial_{j'} A^i_{k'} \right) A^{k'}_k a^k = \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} \left(\partial_j a^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} a^k \right) + \left(\partial_{j'} A^{i'}_i \right) a^i + A^{i'}_i A^{k'}_k \left(\partial_{j'} A^i_{k'} \right) a^k.
\end{aligned}$$

Bedenk dat

$$0 = \partial_{j'} \delta^i_k = \partial_{j'} \left(A^i_{k'} A^{k'}_k \right) = A^i_{k'} \left(\partial_{j'} A^{k'}_k \right) + A^{k'}_k \left(\partial_{j'} A^i_{k'} \right),$$

zodat

$$\begin{aligned}
\nabla_{j'} a^{i'} &= A^{i'}_i A^j_{j'} \nabla_j a^i + \left(\partial_{j'} A^{i'}_i \right) a^i - A^{i'}_i A^i_{k'} \left(\partial_{j'} A^{k'}_k \right) a^k = \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} \nabla_j a^i + \left(\partial_{j'} A^{i'}_i \right) a^i - \delta^{i'}_{k'} \left(\partial_{j'} A^{k'}_k \right) a^k = \\
&= A^{i'}_i A^j_{j'} \nabla_j a^i.
\end{aligned}$$

□

Definitie 2.6.7 *De covariante afgeleide van een vectorveld* $\mathbf{a}$*, notatie* $\nabla \mathbf{a}$*, wordt gegeven door het* $\binom{1}{1}$*-tensorveld* $\nabla \mathbf{a} = \nabla_j a^i \, \mathrm{d}x^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$*, waarbij de componenten* $\nabla_j a^i$ *gegeven worden door* (2.9).

Zij α een covectorveld op $\mathbb{R}^n$. Het is eenvoudig in te zien dat de functies $\partial_j \alpha_i$ niet de componenten zijn van een $\binom{0}{2}$-tensorveld. We zullen daarom ook voor covectorvelden een covariante afgeleide invoeren.

Lemma 2.6.8 *De functies* $\nabla_j \alpha_i$*, gedefinieerd door*

$$\nabla_j \alpha_i = \partial_j \alpha_i - \left\{ \begin{matrix} k \\ j\ i \end{matrix} \right\} \alpha_k, \tag{2.10}$$

vormen de componenten van een $\binom{0}{2}$*-tensorveld.*

Definitie 2.6.9 *De covariante afgeleide van een covectorveld* α*, notatie* $\nabla \alpha$*, wordt gegeven door het* $\binom{0}{2}$*-tensorveld* $\nabla \alpha = \nabla_j \alpha_i \, \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i$*, waarbij de componenten* $\nabla_j \alpha_i$ *gegeven worden door* (2.10).

Met behulp van de covariante afgeleide van een vectorveld kunnen we een definitie geven van de divergentie van vectorveld.

Definitie 2.6.10 *De divergentie van een vectorveld* $\mathbf{a}$ *wordt gegeven door het scalarveld* $\nabla_i a^i$*, waarbij de functies* a^i *de componenten van* $\mathbf{a}$ *ten opzichte van een willekeurig kromlijnig coördinaten systeem voorstellen.*

Merk op dat juist omdat het covariant differentiëren een tensoriële differentiatie operatie is, het er niet toe doet ten opzichte van welk coördinaten systeem men de functies a^i berekent om vervolgens de divergentie van $\mathbf{a}$ uit te rekenen. Er geldt immers $\nabla_{i'} a^{i'} = \nabla_i a^i$.
Met behulp van de covariante afgeleide, het gradiëntveld en het fundamentaaltensorveld kunnen we een definitie geven van de Laplace operator.

Definitie 2.6.11 *Zij* φ *een scalarveld, dan wordt de Laplace operator, notatie* Δ*, gedefiniëerd door* $\Delta\varphi = \nabla\mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d}\varphi = \nabla_i g^{ij}\partial_j\varphi$.

Weer merken we op dat vanwege het tensoriële gedrag van de diverse operaties die een rol spelen bij de berekening van de Laplace van een scalarveld, het er niet toe doet welk coördinaten systeem men kiest om de berekeningen uit te voeren.
We zullen later nog terug komen op de klassieke vectoroperaties grad, div, rot en Δ. Ze worden dan vanuit een ander standpunt bekeken.

2.6.5 De uitwendige afgeleide

Een differentiaalvorm van orde k is een tensorveld dat aan ieder punt $X \in I\!R^n$ een antisymmetrische covariante k-tensor in $\bigwedge^k_X(I\!R^n)$ toevoegt. Een differentiaalvorm van orde k heet ook wel een k-vorm of een antisymmetrisch k-tensorveld (zie definitie 2.2.5). Er zijn $n+1$ typen van niet triviale k-vormen. Dit zijn 0-vormen (scalarvelden), 1- vormen (covectorvelden), $\cdots$, n-vormen. Zoals in paragraaf 1.10 reeds opgemerkt is, zijn antisymmetrische k-tensoren, met $k > n$, geen interessante typen, daar zij 0 toevoegen aan ieder punt.
Bij een willekeurig kromlijnig coördinaten systeem $\{x^i\}$ en een k-vorm ϑ horen $\binom{n}{k}$ functies $\vartheta_{i_1\cdots i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, zodanig dat voor iedere $X \in I\!R^n$ geldt

$$\vartheta(X) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \vartheta_{i_1\cdots i_k}(X)\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x^{i_k}. \tag{2.11}$$

Hierbij stelt $\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x^{i_k}$ een basisvector voor van $\bigwedge^k_X(I\!R^n)$. In lemma 2.2.6 is beschreven hoe de functies $\vartheta_{i_1\cdots i_k}$ transformeren bij overgang op andere kromlijnige coördinaten.
In deze paragraaf definiëren we een differentiatie operator d, waarmee k-vormen overgaan in $(k+1)$-vormen, terwijl n-vormen overgaan in nul.

Lemma 2.6.12 *Laat* $f_1, \cdots, f_r$ *functies van* $r+1$ *variabelen zijn, notatie*

$$f_i = f_i\left(x^1, \cdots, x^{r+1}\right),\ \textit{voor}\ i = 1, \cdots, r,$$

dan geldt

$$\sum_{l=1}^{r+1}(-1)^l\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial(f_1,\cdots,f_r)}{\partial\left(x^1,\cdots,x^{l-1},x^{l+1},\cdots,x^{r+1}\right)}\right) = 0. \tag{2.12}$$

Bewijs:
We geven slechts een schets van het bewijs. Noem $F = (f_1, \cdots, f_r)^T$. De l-de sommand van de som in het linkerlid van (2.12) is dan, op een factor -1 na, te schrijven als

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \det\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{l-1}}, \frac{\partial F}{\partial x^{l+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{r+1}}\right) =$$

$$= \left|\frac{\partial F}{\partial x^1 \partial x^l}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{l-1}}, \frac{\partial F}{\partial x^{l+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{r+1}}\right| + \cdots$$

$$\cdots + \left|\frac{\partial F}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{l-1} \partial x^l}, \frac{\partial F}{\partial x^{l+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{r+1}}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{l-1}}, \frac{\partial F}{\partial x^l \partial x^{l+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{r+1}}\right| + \cdots$$

$$\cdots + \left|\frac{\partial F}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{l-1}}, \frac{\partial F}{\partial x^{l+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^l \partial x^{r+1}}\right|.$$

Op deze manier gaat (2.12) over in een som van $r(r+1)$ (dit is voor iedere r een even aantal!) termen van de vorm

$$\pm \det\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^k \partial x^l}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x^{r+1}}\right),$$

die paarsgewijs tegen elkaar wegvallen.

□

Definitie 2.6.13 *Zij $\{x^i\}$ een kromlijnig coördinaten systeem op $\mathbb{R}^n$ en ϑ een k-vorm. Schrijf ϑ als in* (2.11). *De uitwendige afgeleide van ϑ, notatie $\mathrm{d}\vartheta$, wordt gedefinieerd door*

$$\mathrm{d}\vartheta = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \frac{\partial \vartheta_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^r} \, \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \right). \tag{2.13}$$

Merk op dat een sommand, waarvoor r gelijk is aan één der i_j's, gelijk is aan nul. De som gevormd door die termen waarvoor r ongelijk is aan één der i_j's is blijkbaar te schrijven als

$$\mathrm{d}\vartheta = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{k+1} \le n} (\mathrm{d}\vartheta)_{j_1 \cdots j_{k+1}} \, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{k+1}}. \tag{2.14}$$

Merk op dat n-vormen inderdaad overgaan in nul. De vraag of $\mathrm{d}'\vartheta$, dit is de uitwendige afgeleide van ϑ met betrekking tot coördinaten $x^{i'}$, op hetzelfde neerkomt is nu nog open.

VOORBEELDEN:

- Beschouw $\mathbb{R}^2$ met cartesische coördinaten x en y. Zij φ een scalarveld, dan is

  $$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

  een 1-vorm. Zij α een covectorveld en schrijf $\alpha = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y$, dan is

  $$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

  een 2-vorm. Zij γ een 2-vorm en schrijf $\gamma = \gamma_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, dan geldt $\mathrm{d}\gamma = 0$.
  Merk op dat in alle gevallen twee maal d toepassen nul oplevert.

- Beschouw $I\!R^3$ met cartesische coördinaten x, y en z. Zij φ een scalarveld, dan is

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

een 1-vorm. Zij α een covectorveld en schrijf $\alpha = \alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z$, dan is

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\alpha_1}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\alpha_2}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y + \\ &\quad + \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\alpha_3}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\alpha_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z = \\ &= \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \end{aligned}$$

een 2-vorm. Zij ω een 2-vorm en schrijf $\omega = \omega_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \omega_{13}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \omega_{23}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, dan is

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \frac{\partial\omega_{12}}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial\omega_{13}}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial\omega_{23}}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \\ &= \left(\frac{\partial\omega_{23}}{\partial x} - \frac{\partial\omega_{13}}{\partial y} + \frac{\partial\omega_{12}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \end{aligned}$$

een 3-vorm. Zij γ een 3-vorm en schrijf $\gamma = \gamma_{123}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, dan is $\mathrm{d}\gamma = 0$.
Merk wederom op dat in alle gevallen twee maal d toepassen nul oplevert.

Stelling 2.6.14 *De definitie van de uitwendige afgeleide* d *is onafhankelijk van de keuze van het coördinaten systeem.*

Bewijs:
Laat $\{x^i\}$ en $\{x^{i'}\}$ twee coördinaat systemen zijn. We bewijzen de bewering voor de differentiaalvorm

$$w = a\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

waarbij a een willekeurige functie van de variabelen x^i voorstelt. Het bewijs voor een differentiaalvorm van de vorm $a\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ gaat analoog. Vervolgens volgt de stelling door lineair combineren.
De uitwendige afgeleide van w met betrekking tot de coördinaten x^i wordt gegeven door

$$\mathrm{d}w = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^r}\,\mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Op grond van lemma 2.2.6 is w ten opzichte van de coördinaten $x^{i'}$ te schrijven als

$$w = \sum_{1 \le i'_1 < \cdots < i'_k \le n} a \frac{\partial\left(x^1, \cdots, x^k\right)}{\partial\left(x^{i'_1}, \cdots, x^{i'_k}\right)}\,\mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k}.$$

De uitwendige afgeleide van w met betrekking tot de coördinaten $x^{i'}$, die we noteren als $d'w$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \mathrm{d}'w &= \sum_{r'=1}^{n} \left(\sum_{1 \le i'_1 < \cdots < i'_k \le n} \frac{\partial a}{\partial x^{r'}} \frac{\partial\left(x^1, \cdots, x^k\right)}{\partial\left(x^{i'_1}, \cdots, x^{i'_k}\right)} \mathrm{d}x^{r'} \wedge \mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k} \right) + \\ &+ a \sum_{r'=1}^{n} \left(\sum_{1 \le i'_1 < \cdots < i'_k \le n} \frac{\partial}{\partial x^{r'}} \left(\frac{\partial\left(x^1, \cdots, x^k\right)}{\partial\left(x^{i'_1}, \cdots, x^{i'_k}\right)} \right) \mathrm{d}x^{r'} \wedge \mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k} \right) \qquad (2.15) \end{aligned}$$

De eerste som hierin is te schrijven als (met gebruik van index-notatie)

$$\frac{\partial a}{\partial x^{r'}} \mathrm{d}x^{r'} \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^l} \frac{\partial a}{\partial x^r} \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{\partial a}{\partial x^r} \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

hetgeen we herkennen als dw. De tweede som in (2.15) is te schrijven als

$$a \sum_{1 \le j'_1 < \cdots < j'_{k+1} \le n} \left(\sum_{\{r', i'_1 < \cdots < i'_k\} = \{j'_1, \cdots, j'_{k+1}\}} \frac{\partial}{\partial x^{r'}} \left(\frac{\partial\left(x^1, \cdots, x^k\right)}{\partial\left(x^{i'_1}, \cdots, x^{i'_k}\right)} \right) \mathrm{d}x^{r'} \wedge \mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i'_k} \right), \qquad (2.16)$$

waarbij in de binnenste som gesommeerd wordt over alle mogelijke combinaties $r', i'_1 < \cdots < i'_k$ die als collectie van $(k+1)$ natuurlijke getallen samenvalt met de collectie $j'_1, \cdots, j'_{k+1}$. De binnenste som van (2.16) kan vervolgens geschreven worden als

$$\sum_{l=1}^{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{j'_l}} \left(\frac{\partial\left(x^1, \cdots, x^k\right)}{\partial\left(x^{j'_1}, \cdots, x^{j'_{l-1}}, x^{j'_{l+1}}, \cdots, x^{j'_{k+1}}\right)} \right) \mathrm{d}x^{j'_l} \wedge \mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_{l-1}} \wedge \mathrm{d}x^{j'_{l+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_{k+1}}.$$

Zet hierin de $k+1$-vorm $\mathrm{d}x^{j'_l} \wedge \mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_{l-1}} \wedge \mathrm{d}x^{j'_{l+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_{k+1}}$ in de volgorde $\mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_{k+1}}$. Dit kost een factor $(-1)^{l+1}$. Op grond van lemma 2.6.12 volgt dan dat de tweede som in (2.15) gelijk is aan nul.

□

Stelling 2.6.15 *Twee maal* d *toepassen op een* k*-vorm levert nul, ofwel* $\mathrm{d} \wedge \mathrm{d} = 0$.

Bewijs:
Op grond van de vorige stelling, hoeven we dit slechts te bewijzen voor één coördinaten systeem $\{x^i\}$. Net als in het bewijs van de vorige stelling is het voldoende om de bewering aan te tonen voor de k-vorm

$$w = a\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

waarbij a een willekeurige functie is van de variabelen x^i. Er geldt

$$\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}w = \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^r} \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

In deze som, bestaande uit het even aantal van $2n$ termen, vallen de termen paarsgewijs tegen elkaar weg, vanwege

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^r} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^r \partial x^l} \text{ en } \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^l = -\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^r.$$

□

Stelling 2.6.15 is de generalisatie tot $\mathbb{R}^n$ van de klassieke resultaten $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$ en $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

Stelling 2.6.16 *Zij α een l-vorm en β een m-vorm, dan is* $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta)$ *een (l+m+1)-vorm en er geldt*

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Bewijs:
We bewijzen deze stelling voor het bijzondere geval dat $\alpha = a\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^l$ en $\beta = b\,\mathrm{d}x^{l+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l+m}$, waarbij x^i willekeurige (kromlijnige) coördinaten voorstellen en a en b functies van de variabelen x^i zijn. Er geldt

$$\alpha \wedge \beta = ab\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l+m},$$

zodat

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \sum_{p=1}^{n} \left(b\frac{\partial a}{\partial x^p} + a\frac{\partial b}{\partial x^p} \right) \mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l+m}.$$

Voorts geldt

$$\mathrm{d}\alpha \wedge \beta = \sum_{p=1}^{n} b\frac{\partial a}{\partial x^p}\,\mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l+m}$$

en

$$\alpha \wedge \mathrm{d}\beta = \sum_{p=1}^{n} a\frac{\partial b}{\partial x^p}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^{l+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l+m}.$$

In deze laatste uitdrukking kost het een factor $(-1)^l$ om $\mathrm{d}x^p$ vooraan te schrijven. Hiermee is de stelling bewezen voor dit bijzondere geval.

□

2.7 Combinaties van de uitwendige afgeleide en de Hodge afbeelding

Als op $\mathbb{R}^n$ een symmetrisch inproduct en een georiënteerd volume gekozen zijn, dan kunnen deze overgedragen worden op iedere raakruimte (zie de paragrafen 2.4.2 en 2.4.3). In ieder punt X kan vervolgens het Hodge beeld $*\vartheta(X)$ beschouwd worden. Dit Hodge beeld is dan een antisymmetrische $(n-k)$-tensor (zie paragraaf 1.12). We gaan in deze paragraaf combinaties beschouwen van de algebraïsche operator $*$ en de differentiatie operator d op differentiaalvormen.

2.7.1 Combinaties van d en $*$ in $I\!R^2$

Laat x en y cartesische coördinaten op $I\!R^2$ zijn en neem het gewone inproduct. Zij $\alpha = \alpha_1 \, \mathrm{d}x + \alpha_2 \, \mathrm{d}y$, dan geldt

$$
\begin{aligned}
*\alpha &= -\alpha_2 \, \mathrm{d}x + \alpha_1 \, \mathrm{d}y, \\
\mathrm{d} * \alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
* \, \mathrm{d} * \alpha &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Zij f een scalarveld, dan geldt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y, \\
* \, \mathrm{d}f &= -\frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}y, \\
\mathrm{d} * \mathrm{d}f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
* \, \mathrm{d} * \mathrm{d}f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

Dit laatste resultaat is de Laplace operator met betrekking tot het gewone inproduct en volume vorm op $I\!R^2$.

2.7.2 Combinaties van d en $*$ in $I\!R^3$

Beschouw $I\!R^3$ met cartesische coördinaten x, y en z en het gewone inproduct. Zij $\alpha = \alpha_1 \, \mathrm{d}x + \alpha_2 \, \mathrm{d}y + \alpha_3 \, \mathrm{d}z$, dan geldt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \\
* \, \mathrm{d}\alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \right) \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}z, \\
* \, \alpha &= \alpha_1 \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \alpha_2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \alpha_3 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
\mathrm{d} * \alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \\
* \, d * \alpha &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Zij f een scalarveld, dan geldt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z,\\
*\,df &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\\
\mathrm{d} * \mathrm{d}f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\\
* \,\mathrm{d} * \mathrm{d}f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Ook in $\mathbb{R}^3$ blijkt de operator $*\,\mathrm{d} *\, \mathrm{d}$ de Laplace operator voor scalarvelden te zijn.

Merk op dat alle combinaties van d en $*$ coördinaatvrij zijn en in elk gewenst coördinaten systeem uitgeschreven kunnen worden.

2.7.3 Combinaties van d en $*$ in $\mathbb{R}^n$

Laat op $\mathbb{R}^n$ een symmetrisch inproduct en een bijpassende volumevorm gekozen zijn. Zij ω een k-vorm.

Definitie 2.7.1 *De Laplace operator Δ voor ω wordt gedefinieerd door*

$$\Delta\omega = (-1)^{nk}\left(*\,\mathrm{d} *\, \mathrm{d}\omega + (-1)^n\,\mathrm{d} *\, \mathrm{d} * \omega\right).$$

Merk op dat k-vormen overgaan in k-vormen. In $\mathbb{R}^3$ geldt

$$\Delta(\alpha_1\,\mathrm{d}x + \alpha_2\,\mathrm{d}y + \alpha_3\,\mathrm{d}z) = (\Delta\alpha_1)\,\mathrm{d}x + (\Delta\alpha_2)\,\mathrm{d}y + (\Delta\alpha_3)\,\mathrm{d}z.$$

Ga dit na. Ga voorts na dat in $\mathbb{R}^4$ met het Lorentz inproduct, voor scalarvelden φ, $\Delta\varphi$ overeenkomt met $\Box\varphi$, waarbij $\Box$ de d'Alembertiaan voorstelt.

2.8 De klassieke vectoroperaties in $\mathbb{R}^3$

Deze klassieke vectoroperaties zijn grad , div , rot en Δ en hebben uitsluitend betrekking op scalarvelden en vectorvelden. In deze paragraaf geven we coördinaatvrije definities van deze operaties. Hierbij zal, behalve de operatoren d en $*$, ook het isomorfisme $\mathcal{G}_X : T_X(\mathbb{R}^n) \to T_X^*(\mathbb{R}^n)$ een rol spelen. Deze wordt bepaald door het gekozen inproduct (zie paragraaf 2.4.2). We beschouwen hier het gewone inproduct op $\mathbb{R}^3$ en orthogonale coördinaten x^i. Voorst maken we nog gebruik van de schaalfactoren h_i. Hiermee zijn de componenten van het fundamentaaltensorveld g_{ij} te schrijven als $g_{ij} = \delta_{ij} h_i^2$. Bovendien zijn de bases $\left\{\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ en $\left\{h_i\,\mathrm{d}x^i\right\}$ orthonormaal in iedere raakruimte $T_X(\mathbb{R}^n)$ en zijn duale. Verder geldt nog $\mathcal{G}_X\left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = h_i\,\mathrm{d}x^i$, waarin niet gesommeerd dient te worden over i.

2.8.1 De gradiënt

Zij φ een scalarveld.

Definitie 2.8.1 *De gradiënt van φ is het vectorveld* $\operatorname{grad}\varphi$, *gedefinieerd door* $\operatorname{grad}\varphi = \mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d}\varphi$.

De componenten van $\operatorname{grad}\varphi$, behorende bij de coördinaten x^i, worden gegeven door $(\operatorname{grad}\varphi)^i = g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$. In de klassieke literatuur is het, bij gebruik van orthogonale kromlijnige coördinaten, de gewoonte om de componenten van vectorvelden te geven ten opzichte van orthonormale bases. Omdat $g^{ij} = h_i^{-2}\delta_{ij}$ is de gradiënt van φ ten opzichte van de orthonormale basis $\left\{\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ te schrijven als

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Blijkbaar worden de componenten ten opzichte van deze basis gegeven door $\frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$.

2.8.2 De rotatie

Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld.

Definitie 2.8.2 *De rotatie van* $\mathbf{a}$ *is het vectorveld* $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, *gedefinieerd door* $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathcal{G}^{-1} * \mathrm{d}\mathcal{G}\mathbf{a}$.

We werken de rotatie van $\mathbf{a}$ uit voor de orthogonale coördinaten x^i. Schrijf

$$\mathbf{a} = A^1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1} + A^2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2} + A^3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3},$$

dan geldt

$$\mathcal{G}\mathbf{a} = A^1 h_1\,\mathrm{d}x^1 + A^2 h_2\,\mathrm{d}x^2 + A^3 h_3\,\mathrm{d}x^3,$$

zodat

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{G}\mathbf{a} &= \left(\frac{\partial A^2 h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1 h_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial A^3 h_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1 h_1}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial A^3 h_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2 h_2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3.\end{aligned}$$

Om het Hodge beeld hiervan te berekenen, willen we dat de basisvectoren orthonormaal zijn. Daarom schrijven we $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{h_1h_2}\left(h_1\,\mathrm{d}x^1\wedge h_2\,\mathrm{d}x^2\right)$, dan geldt $*\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 = \frac{h_3}{h_1h_2}\,\mathrm{d}x^3$. Met een analoge schrijfwijze voor $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3$ en $\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ volgt

$$\begin{aligned}*\,\mathrm{d}\mathcal{G}\mathbf{a} &= \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial A^3 h_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2 h_2}{\partial x^3}\right)h_1\,\mathrm{d}x^1 + \frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial A^1 h_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3 h_3}{\partial x^1}\right)h_2\,\mathrm{d}x^2 + \\ &+ \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial A^2 h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1 h_1}{\partial x^2}\right)h_3\,\mathrm{d}x^3,\end{aligned}$$

waarmee we tenslotte vinden dat

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial A^3h_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A^2h_2}{\partial x^3}\right)\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial A^1h_1}{\partial x^3}-\frac{\partial A^3h_3}{\partial x^1}\right)\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}+\\ &\quad+\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial A^2h_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A^1h_1}{\partial x^2}\right)\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}.\end{aligned}$$

2.8.3 De divergentie

Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld.

Definitie 2.8.3 *De divergentie van* $\mathbf{a}$ *is het scalarveld* $\operatorname{div}\mathbf{a}$, *gedefinieerd door* $\operatorname{div}\mathbf{a} = *\,\mathrm{d}*\mathcal{G}\mathbf{a}$.

We schrijven weer

$$\mathbf{a} = A^1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}+A^2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}+A^3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3},$$

dan geldt

$$*\mathcal{G}\mathbf{a} = A^1h_2h_3\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 - A^2h_1h_3\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3 + A^3h_1h_2\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2,$$

zodat

$$d*\mathcal{G}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial A^1h_2h_3}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2h_1h_3}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3h_1h_2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$$

en dus

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial A^1h_2h_3}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2h_1h_3}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3h_1h_2}{\partial x^3}\right).$$

Dit is een wel bekende formule, die men uiteraard ook vindt wanneer men de divergentie van $\mathbf{a}$ uitschrijft volgens definitie 2.6.10.

2.8.4 De Laplace operator

Deze differentiatie operatie definiëren we hier voor zowel scalarvelden als voor vectorvelden.

Definitie 2.8.4 *Zij* φ *een scalarveld, dan wordt de Laplace operator voor* φ, *notatie* $\Delta\varphi$, *gedefinieerd door*

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = *\,\mathrm{d}*\,\mathrm{d}\varphi.$$

Merk op dat volgens definitie 2.7.1 geldt $\Delta\varphi = (*\,\mathrm{d}*\,\mathrm{d} - \mathrm{d}*\,\mathrm{d}*)\varphi$. De tweede term levert echter nul op, zodat bovenstaande definitie conform is aan definitie 2.7.1.

Definitie 2.8.5 *Zij* $\mathbf{a}$ *een vectorveld, dan wordt de Laplace operator voor* $\mathbf{a}$*, notatie* $\Delta\mathbf{a}$*, gedefinieerd door*

$$\Delta\mathbf{a} = -\mathcal{G}^{-1}(*\,\mathrm{d} *\, \mathrm{d} -\, \mathrm{d} *\, \mathrm{d}*)\mathcal{G}\mathbf{a}.$$

Merk op dat $\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a} = \mathcal{G}^{-1}\,\mathrm{d} *\, \mathrm{d} * \mathcal{G}\mathbf{a}$ en $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} = \mathcal{G}^{-1} *\, \mathrm{d} *\, \mathrm{d}\mathcal{G}\mathbf{a}$, waaruit volgt dat bovenstaande definitie conform is aan de klassieke formule

$$\Delta\mathbf{a} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a} - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}.$$

Alle formules uit de klassieke vectoranalyse kunnen op een dergelijke manier bewezen worden. Zie [AMR], blz 379 Exercise 6.4B.

2.9 Opgaven

1. Bereken de Christoffelsymbolen behorende bij cylinder- en bolcoördinaten op $\mathbb{R}^3$.

2. Bewijs lemma 2.6.8.

3. Zij $\mathbf{a}$ een constant vectorveld en $\{x^i\}$ een kromlijnig coördinaten systeem. Bewijs dat $\nabla_j a^i = 0$, waarbij de functies a^i de componenten van $\mathbf{a}$ ten opzichte van $\{x^i\}$ voorstellen.

4. Bereken de divergentie van een vectorveld in een orthogonaal kromlijnig coördinaten systeem. Bereken ook de Laplace van een scalarveld in een orthogonaal kromlijnig coördinaten systeem.

5. Op een 3-dimensionale Riemannruimte R met coördinaten $u^1 = u$, $u^2 = v$, $u^3 = w$ beschouwen we een covariant 2-tensorveld

$$\Phi = \Phi_{ij} du^i \otimes du^j \ .$$

   a) Geef de uitdrukking voor de componenten van de covariante afgeleide $\nabla\Phi$ van Φ. Van wat voor soort tensorveld zijn dit de componenten? Geef ook de uitdrukking voor het tensorveld $\nabla\Phi$ als geheel. Hierin moeten voorkomen: du^k, $\left\{ \begin{array}{c} l \\ mn \end{array} \right\}$ en $\partial_k \Phi_{ij}$.

   b) Aan welke speciale voorwaarde moet Φ voldoen opdat ook de uitwendige afgeleide $d\Phi$ kan worden berekend?
   Geef de uitdrukking voor $d\Phi$.
   Wat voor soort tensorveld is $d\Phi$?

   c) Kan het gebeuren dat $\nabla\Phi$ en $d\Phi$ tensorveld opleveren? Motiveer uw antwoord.

6. In $\mathbb{R}^3$, uitgerust met Cartesische coördinaten, beschouwen we een vectorveld $\underline{V}(\underline{x}) = V^i(\underline{x})\underline{e}_i$.
   Op $\underline{V}$ passen we de Laplace operator toe, d.w.z. in Cartesische coördinaten definiëren we $\underline{W} = \Delta\underline{V} = (\Delta V^i)\underline{e}_i$, met

$$\Delta V^i = \sum_{k=1}^{3} \partial_k \partial_k V^i = \partial_l \delta^{lk} \partial_k V^i$$

   a) Geef een uitdrukking voor de componenten van $\Delta\underline{V}$ in willekeurige kromlijnige coördinaten. Hierin komen de synmbolen ∇_l en g^{lk} voor.

   b) Schrijf de onder 1) gevonden uitdrukking uit onder gebruikmaking van partiële afgeleiden ∂_j en Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot\cdot \end{array} \right\}$.

7. Laat u^i) en $(u^{i'})$ willekeurige (kromlijnige) coördinaten op $I\!R^n$ zijn. Noteer de overgangsmatrices met

$$A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\ , etc.$$

Herinner U dat voor de Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\}$ op $I\!R^n$ geldt

$$\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial u^j \partial u^k} = \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^i}\ .$$

a) Druk de Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{array}{c} i' \\ j'k' \end{array} \right\}$ t.o.v. de coördinaten $(u^{i'})$ uit in $\left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\}$ en de overgangsmatrices.

b) Worden door de Christoffelsymbolen componenten van een $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$-tensor gedefinieerd? Verklaar U nader!

c) Zij $\underline{v} = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ een vectorveld. T.o.v. willekeurige (kromlijnige) coördinaten definiëren we de covariante afgeleide $\nabla \underline{v}$ met componenten $\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} v^k$. Van welk type is het tensorveld $\nabla \underline{v}$?

d) Op de componentfuncties $\nabla_j v^i$ passen we nogmaals de covariante differentiatie–operator ∇_l toe.
Schrijf $\nabla_l \nabla_j v^i$ uit in afgeleiden van v^i en (afgeleiden van) Christoffelsymbolen.

e) Vorm nu de contractie $\nabla_i \nabla_j v^i$. Van wat voor tensorveld zijn dit de componenten?

f) Neem voor (u^i) gewone Cartesische coördinaten op $I\!R^3$ en druk het tensorveld $\nabla_i \nabla_j v^i$ uit in klassieke vectoroperaties grad en/of div en/of rot.

8. Ten opzichte van willekeurige kromlijnige coördinaten (u^i) op $I\!R^n$ wordt de Lie–afgeleide van een vectorveld $\underline{w}$ m.b.t. een vectorveld $\underline{v}$ gedefinieerd door

$$(L_{\underline{v}} \underline{w})^j = w^i \partial_i v^j - v^i \partial_i w^j\ .$$

a) Laat zien dat $(L_{\underline{v}} \underline{w})^j$ de componenten van een vectorveld vormen.

b) Ga na wat er gebeurt als de afgeleide ∂_i wordt vervangen door de covariante afgeleide ∇_i.

9. Op $I\!R^3$ zijn, met betrekking tot willekeurige kromlijnige coördinaten (u^i), gegeven het vectorveld

$$\underline{a} = a^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

en het co–vectorveld

$$\underline{\hat{a}} = \alpha_i du^i\ .$$

a) De componenten van de Lie–afgeleide $L_{\underline{a}}\hat{\underline{a}}$ worden gegeven door $a^k(\partial_k\alpha_i)+\alpha_k(\partial_i a^k)$. Laat zien dat dit componenten van een tensorveldd ω zijn.
Wat is het type van dit tensorveld?

b) Zijn ook $a^k(\nabla_k\alpha_i) + \alpha_k(\nabla_i a^k)$ de componenten van een tensor?
Wat is het verband met a)?

c) Bereken de uitwendige afgeleide $d\omega$ van ω?

10. Op $I\!R^3$ worden parabolische cylindercoördinaten u, v, z ingevoerd volgens

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \\ z = z\ . \end{cases}$$

a) Laat zien dat deze kromlijnige coördinaten orthogonaal zijn.

b) Druk de reciproke basisvectoren dx, dy, dz uit in de reciproke basisvectoren du, dv, dz.

c) Bereken de Christoffelsymbolen op $I\!R^3$ zowel in Cartesische coördinaten x, y, z als in parabolische coördinaten u, v, z.

d) Vormen de Christoffelsymbolen de componenten van een $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$-tensorveld?

e) Beschouw een vectorveld $\underline{v}$ op $I\!R^3$.
Druk div $\underline{v} = \nabla_i v^i$ uit in parabolische cylindercoördinaten onder gebruikmaking van de Christoffelsymbolen.

11. In $I\!R^3$ voeren we helicoïdale coördinaten in volgens

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = \varphi + \zeta, met 0 < r < \infty, -\infty < \varphi < \infty, 0 < \zeta < 2\pi\ .$$

a) Bereken de bij deze kromlijnige coördinaten behorende basisvectoren in elk punt waar ze gedefinieerd zijn.

b) Druk de duale basisvectoren dx, dy, dz uit in de duale basisvectoren $dr, d\varphi, d\zeta$.

c) Bereken de Christoffelsymbolen bij helicoïdale coördinaten zonder gebruk te maken van een inproduct op $I\!R^3$. Voor uw comfort mag u, desgewenst, de notaties $x = x', y = x^2, z = x^3, r = x^{1'}, \varphi = x^{2'}, \zeta = x^{3'}$ bezigen.

d) Waarom hebben de Christoffelsymbolen op $I\!R^3$ niks te maken met een eventueel inproduct op $I\!R^3$?

e) Bereken div$(\mathbf{e_{1'}} + \mathbf{e_{2'}} + \mathbf{e_{3'}})$ in helicoïdale coördinaten.

f) Geef aan wat, volgens u, het gebruikelijke inproduct en het daarbij behorende volumebegrip op $I\!R^3$ is. Bereken vervolgens hiermee het Hodgebeeld $*(dr \wedge d\varphi)$ van $dr \wedge d\varphi$ in helicoïdale coördinaten.

12. a) Beschouw $I\!R^2$ met coördinaten $x = x^1$, $y = x^2$ en voorzien van het gebruikelijke inproduct. Noteer de componenten van het fundamentaal tensorveld g met g_{ij}. Zij $\det g_{ij}$ de determinant van de matrix g_{ij}.

Zij tenslotte $x^{1'}, x^{2'}$ een willekeurig kromlijnig coördinatenstelsel op $I\!R^2$. Toon aan dat

$$\sqrt{\det g_{ij}}dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{\det g_{i'j'}}dx^{1'} \wedge dx^{2'} \; .$$

b) Wat is de uitwendige afgeleide van de onder a) genoemde differentiaalvorm?

13. In $I\!R^3$, uitgerust met Cartesische coördinaten, beschouwen we een vectorveld $\underline{V}(\underline{x}) = V^i(\underline{x})\underline{e}_i$.
Op $\underline{V}$ passen we de Laplace–operator toe, d.w.z. in Cartesische coördinaten definiëren we $\underline{W} = \Delta\underline{V} = (\Delta V^i)\underline{e}_i$, met

$$\Delta V^i = \sum_{k=1}^{3} \partial_k \partial_k V^i = \partial_l \delta^{lk} \partial_k V^i$$

a) Geef een uitdrukking voor de componenten van $\Delta\underline{V}$ in willekeurige kromlijnige coördinaten.
Hierin komen de symbolen ∇_l en g^{lk} voor.

b) Schrijf de onder 1) gevonden uitdrukking uit onder gebruikmaking van partiële afgeleiden ∂_j en Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot\cdot \end{smallmatrix} \right\}$.

14. Zij $\underline{w}(\underline{x})$ een vectorveld op $I\!R^3$.
Beschouw nu het vectorveld $\underline{u}(\underline{x}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{w}(\underline{x})$. Druk, ten opzichte van een willekeurig kromlijnig coördinatenstelsel, de componenten van $\underline{u}$ uit in die van $\underline{w}$. In uw antwoord moeten de metrische tensor en Christoffelsymbolen voorkomen.

15. In $I\!R^3$ beschouwen we het veld van een puntbron in $\underline{0}$, gegeven door

$$\underline{v}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} \; .$$

a) Representeer, in Cartesische coördinaten, $\underline{v}$ als een co–vectorveld (d.w.z. als 1-vorm) en pas vervolgens de Hodge–afbeelding toe.

b) Schrijf de onder a) verkregen 1-vorm en 2-vorm uit in bolcoördinaten: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$.

c) Bereken van beide, in b) verkregen differentiaalvormen, de uitwendige afgeleide.

16. Op $I\!R^3$ met de gewone Cartesische coördinaten x, y, z beschouwen we de 2-vorm

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + (x^2 + y^2)dx \wedge dz + (x^2 + y^2)dy \wedge dz \; .$$

a) ω is een antisymmetrisch covariant 2-tensorveld op $I\!R^3$. Leg kort uit wat dit betekent.

b) Bereken de uitwendige afgeleide $d\omega$ in de coördinaten x, y en z. Wat voor soort tensorveld is dit?

c) Druk ω uit in cylindercoördinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$.

d) Bereken $d\omega$ met behulp van cylindercoördinaten.

e) Vergelijk de antwoorden van b) en d). Wat valt u op?

17. Zij φ een scalarveld op $\mathbb{R}^3$. De Laplace–operator Δ wordt, in Cartesische coördinaten gedefinieerd door

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi\,.$$

a) Schrijf $\Delta\varphi$ op ten opzichte van een willekeurig kromlijnig coördinatenstelsel. In uw antwoord moeten de metrische tensor en Christoffelsymbolen voorkomen.

b) Geef een coördinaatvrije definitie van $\Delta\varphi$ met behulp van de uitwendige differentiatie d en de Hodge–afbeelding $*$.

Hoofdstuk 3

Differentiaalmeetkunde

3.1 Differentiaalmeetkunde van krommen in $\mathbb{R}^3$

3.1.1 Ruimtekrommen

Ten opzichte van de standaardbasis $\{E_i\}$ is ieder punt $X \in \mathbb{R}^3$ te schrijven als $X = x^i E_i$. Laat nu x^i reële functies zijn van een reële parameter t, waarbij t een zeker interval I doorloopt. We veronderstellen dat de functies x^i voldoend vaak differentieerbaar zijn, zodat in het vervolg geen moeilijkheden ten aanzien van differentiatie optreden. Voorts veronderstellen we dat de afgeleiden $\frac{dx^i}{dt}$ voor geen enkele waarde van $t \in I$ alle gelijk aan nul zijn.

Definitie 3.1.1 *Een ruimtekromme K is de verzameling van de punten $X = X(t) = x^i(t)E_i$. Hierbij doorloopt t het interval I. De afbeelding t $\mapsto X(t)$ is injectief en voldoende glad.*

We noemen de voorstelling $x^i(t)$ van een ruimtekromme K een parametervoorstelling. De vector $\frac{dx^i}{dt}E_i$ is de raakvector aan de ruimtekromme in het punt X, die we ook zullen schrijven als $\frac{dX}{dt}$. Een andere parametervoorstelling van K kan men verkrijgen door t te vervangen door $f(u)$. Hierbij is f een monotone functie, zodanig dat $f(u)$ het interval I doorloopt als de parameter u een ander interval J doorloopt. Ook de functie f veronderstellen we voldoend vaak differentieerbaar en bovendien dat zijn eerste afgeleide voor geen enkele u gelijk aan nul is. We noemen de overgang op een andere parametervoorstelling, via $t = f(u)$, een parametertransformatie. Merk op dat er oneindig veel parametervoorstellingen zijn van eenzelfde ruimtekromme K.

Voorbeeld 3.1.2 *Een cirkelschroeflijn laat zich beschrijven door de parametervoorstelling*

$$x^1(t) = a\cos t,\ \ x^2(t) = a\sin t,\ \ x^3(t) = ht,$$

waarbij a en h constanten voorstellen en t in principe $\mathbb{R}$ doorloopt.

De booglengte van een (eindige) kromme K (een eindige kromme heet ook wel boog), beschreven door de parametervoorstelling $x^i(\tau)$, met $t_0 \leq \tau \leq t$, wordt gegeven door

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\, \mathrm{d}\tau. \tag{3.1}$$

De aldus geïntroduceerde functie s willen we gaan gebruiken als parameter voor ruimtekrommen. De parameter is dan s en heet booglengte. Omdat de integraal in (3.1) vaak lastig of helemaal niet te berekenen is, gebruiken we de booglengte parametervoorstelling van een ruimtekromme alleen voor theoretische doeleinden.

In het vervolg beschouwen we het Euclidische inproduct op $I\!\!R^3$. Uit de hoofdstelling van de integraalrekening volgt dan dat

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right). \tag{3.2}$$

De afgeleide van s naar t is dus de lengte van de raakvector. Als we s als parameter van K kiezen, dan geldt

$$\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1, \tag{3.3}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van (3.2). Eigenschap (3.3) maakt de booglengte parametervoorstelling juist zo bijzonder. Voor de vector $\frac{dX}{ds}$ hanteren we in het vervolg dan ook een aparte notatie, namelijk $\dot{X}$.

Voorbeeld 3.1.3 *Beschouw de cirkelschroeflijn, zoals ingevoerd in voorbeeld* 3.1.2, *met als startwaarde $t = 0$. Er geldt $s(t) = t\sqrt{a^2 + h^2}$. Merk op dat inderdaad $(\dot{X}, \dot{X}) = 1$.*

De raakvector $\dot{X}$ is die raakvector aan K, die altijd lengte 1 heeft.

Definitie 3.1.4 *De raaklijn aan een kromme K in een punt X is de rechte die gegeven wordt door de parametervoorstelling*

$$Y = X + \lambda \dot{X}.$$

.

De parameter λ in deze definitie is zodanig dat $|\lambda|$ de afstand aanduidt vanaf het raakpunt X langs de raaklijn. Een raaklijn is een rechte die in het punt X zo nauw mogelijk aansluit bij de kromme. We willen nu ook een vlak door X dat zo nauw mogelijk aansluit bij de kromme.

Definitie 3.1.5 *Het osculatievlak aan een kromme K in een punt X is het vlak dat gegeven wordt door de parametervoorstelling*

$$Y = X + \lambda \dot{X} + \mu \ddot{X}.$$

De in deze definitie gegeven parametervoorstelling is equivalent aan de vergelijking

$$\det(Y - X, \dot{X}, \ddot{X}) = 0.$$

We hebben hierbij verondersteld dat $\dot{X}$ en $\ddot{X}$ onafhankelijke vectoren zijn, dus in het bijzonder dat $\ddot{X} \neq 0$. Meetkundig betekent dit dat X geen buigpunt is. Ook in buigpunten zijn echter osculatievlakken te definiëren. Een vergelijking van het osculatievlak in een buigpunt X wordt gegeven door

$$\det(Y - X, \dot{X}, \, \mathrm{d}^3X/\,\mathrm{d}s^3) = 0.$$

Voor een willekeurige parametervoorstelling van een ruimtekromme K, met parameter t worden parametervoorstellingen van raaklijn en osculatievlak in X, met $\ddot{X} \neq 0$, gegeven door respectievelijk

$$Y = X + \lambda \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$$

en

$$Y = X + \lambda \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \mu \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}.$$

Voorbeeld 3.1.6 *Beschouw weer de cirkelschroeflijn, zoals ingevoerd in voorbeeld* 3.1.2. *Een vergelijking van het osculatievlak in het punt X wordt gegeven door*

$$hx^1 \sin t - hx^2 \cos t + ax^3 - aht = 0.$$

Merk op dat dit vlak gaat door het punt $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ en $x^3 = ht$.

3.1.2 De formules van Frenet

Zij K een ruimtekromme, beschreven door de booglengte s. Beschouw een vast punt X op K dat geen buigpunt is. De raakvector $\dot{X}$ is eenheidsvector, waarvoor we in het vervolg de notatie $\boldsymbol{\iota}$ gebruiken, dus $\dot{X} = \boldsymbol{\iota}$. Een rechte door het punt X, loodrecht op de raaklijn in X, heet <u>normaal</u>. De normalen in X vormen een vlak, het <u>normalenvlak</u> in X. De normaal in X, die in het osculatievlak is gelegen heet <u>hoofdnormaal</u>. De normaal die loodrecht staat op de hoofdnormaal heet <u>binormaal</u>. Het vlak door raaklijn en binormaal heet <u>rectificerend vlak</u>. Omdat een eenheidsvector niet van lengte verandert, geldt $(\dot{X}, \ddot{X}) = 0$, ofwel $\ddot{X}$ staat loodrecht op $\boldsymbol{\iota}$, maar hoeft uiteraard niet lengte 1 te hebben. De vector $\dot{\boldsymbol{\iota}}$ heet wel <u>kromtevector</u>. We voeren nu vectoren $\mathbf{n}$ en $\mathbf{b}$ in als zijnde eenheidsvectoren op de respectievelijke rechten hoofdnormaal en binormaal. We spreken af dat $\mathbf{n}$ in de richting van $\ddot{X}$ wijst en $\mathbf{b}$ in de richting $\dot{X} \times \ddot{X}$. De vectoren $\boldsymbol{\iota}$, $\mathbf{n}$ en $\mathbf{b}$ zijn dan zodanig georiënteerd dat

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\iota} \times \mathbf{n}, \;\; \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\iota}, \;\; \boldsymbol{\iota} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}.$$

Zij Y een naburig punt van X op de ruimtekromme K. Laat $\Delta\varphi$ de de hoek tussen de raaklijnen in X en Y zijn en $\Delta\psi$ de hoek tussen de binormalen in X en Y. Merk op dat $\Delta\psi$ ook de hoek is tussen de osculatievlakken in X en Y.

Definitie 3.1.7 *De kromming ρ en de torsie τ van de ruimtekromme K in het punt X worden gedefinieerd door*

$$\rho^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)^2, \tag{3.4}$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right)^2. \tag{3.5}$$

We spreken af dat $\rho > 0$. Het teken van τ zullen we later vastleggen.

Lemma 3.1.8 *Er geldt $\rho^2 = (\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\imath})$ en $\tau^2 = \left(\dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{b}}\right)$.*

Bewijs:
Voeg in een omgeving van X aan ieder punt van de kromme een eenheidsvector $\mathbf{a}$ toe zodanig dat de afbeelding $s \mapsto \mathbf{a}(s)$ voldoend vaak differentieerbaar is. Omdat $\mathbf{a}$ lengte 1 heeft, geldt $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$. Hieruit volgt $(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = 0$. Differentiatie van deze laatste gelijkheid naar s levert $(\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) + (\mathbf{a}, \ddot{\mathbf{a}}) = 0$. Zij $\Delta\alpha$ de hoek tussen $\mathbf{a}(s)$ en $\mathbf{a}(s + \Delta s)$, waarbij $X(s + \Delta s)$ een naburig punt van $X(s)$ voorstelt. Er geldt

$$\cos\Delta\alpha = (\mathbf{a}(s), \mathbf{a}(s + \Delta s)).$$

Een eenvoudige goniometrische formule en Taylorontwikkeling levert vervolgens

$$1 - \sin^2\frac{1}{2}\Delta\alpha = (\mathbf{a}(s), \mathbf{a}(s) + \Delta s\dot{\mathbf{a}}(s) + \frac{1}{2}\Delta s^2\ddot{\mathbf{a}}(s) + \mathcal{O}(\Delta s^3)), \quad \Delta s \to 0,$$

ofwel

$$\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\Delta\alpha}{\Delta s^2} = -(\mathbf{a}(s), \ddot{\mathbf{a}}(s)) + \mathcal{O}(\Delta s), \quad \Delta s \to 0.$$

Merk op dat $\sin x/x \to 1$, voor $x \to 0$, zodat

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right)^2 = (\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}).$$

Door nu voor $\mathbf{a}$ achtereenvolgens $\boldsymbol{\imath}$ en $\mathbf{b}$ te kiezen, volgt het gestelde.

□

De kromming van een kromme is een maat voor de richtingsverandering van de raaklijn. Men noemt $R = \frac{1}{\rho}$ de kromtestraal. We hebben ons tot nu toe beperkt tot punten op K die geen buigpunten zijn. Toch is het eenvoudig om in een buigpunt de kromming te definiëren. Omdat in een buigpunt $\ddot{X} = 0$, volgt uit voorafgaand lemma dat in dat punt $\rho = 0$. Het omgekeerde is ook waar, de kromming in een punt is gelijk aan nul dan en slechts dan als dat punt een buigpunt is. Voor de torsie hebben we een soortgelijke meetkundige karakterisatie. De torsie is gelijk aan nul dan en slechts dan als de kromme een vlakke kromme is.
De drie vectoren $\boldsymbol{\imath}$, $\mathbf{n}$ en $\mathbf{b}$ vormen in ieder punt een orthonormale basis. Dientengevolge is de afgeleide van ieder dezer vectoren een lineaire combinatie van de twee overige. Deze relaties beschrijven we in de volgende stelling. Ze heten de formules van Frenet.

Stelling 3.1.9 *De formules van Frenet luiden*

$$\dot{\boldsymbol{\imath}} = \rho\mathbf{n}, \tag{3.6}$$
$$\dot{\mathbf{n}} = -\rho\boldsymbol{\imath} + \tau\mathbf{b}, \tag{3.7}$$
$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}. \tag{3.8}$$

Hiermee is tevens het teken van τ vastgelegd. We definiëren het teken van τ zodanig dat aan (3.8) *voldaan is.*

Bewijs:
De vector $\dot{\boldsymbol{\imath}}$ is per definitie een veelvoud van $\mathbf{n}$, terwijl uit lemma 3.1.8 volgt dat de lengte van $\dot{\boldsymbol{\imath}}$ gelijk is aan ρ. Hieruit volgt direct (3.6).
We concluderen hieruit dat $(\dot{\boldsymbol{\imath}}, \mathbf{b}) = 0$. Omdat ook $(\mathbf{b}, \boldsymbol{\imath}) = 0$ geldt aldus $(\dot{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\imath}) = -(\mathbf{b}, \dot{\boldsymbol{\imath}}) = 0$. Blijkbaar is $\dot{\mathbf{b}}$ een veelvoud van $\mathbf{n}$. Uit lemma 3.1.8 volgt dat $|\tau|$ de lengte van $\dot{\mathbf{b}}$ is. Vanwege de afspraak van het teken van τ hebben we dus (3.8).
Omdat $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\imath}) = 0$ geldt $(\dot{\mathbf{n}}, \boldsymbol{\imath}) = -(\mathbf{n}, \dot{\boldsymbol{\imath}}) = -\rho$ en omdat $(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0$ geldt $(\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{b}}) = \tau$, zodat

$$\dot{\mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{n}}, \boldsymbol{\imath})\boldsymbol{\imath} + (\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b})\mathbf{b} = -\rho\boldsymbol{\imath} + \tau\mathbf{b},$$

waarmee (3.7) bewezen is.

□

Men noemt de positief georiënteerde basis $\{\boldsymbol{\imath}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ de Frenet-driepoot. Vorm vervolgens, met de 'Frenet-poten' als kolommen, de, van de booglengte s afhankelijke, matrix

$$F = (\boldsymbol{\imath}\;\mathbf{n}\;\mathbf{b}),$$

dan geldt $F^T F = I$ en $\det F = 1$, ofwel de matrix F is direct orthogonaal. De formules van Frenet kunnen nu geschreven worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F = FR, \text{ met } R = \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Stelling 3.1.10 *Een ruimtekromme K wordt, afgezien van translaties en starre rotaties, eenduidig bepaald door zijn kromming en torsie als functies van de booglengte. Men noemt de vergelijkingen $\rho = \rho(s)$ en $\tau = \tau(s)$ de natuurlijke vergelijkingen van de ruimtekromme K.*

Bewijs:
Laat ρ en τ gegeven continue functies van $s \in [0, a)$ zijn, met a een willekeurige positieve constante. Te bewijzen is dan dat er een kromme K bestaat waarvan de kromming en torsie door respectievelijk ρ en τ gegeven worden. Bovendien is te bewijzen dat deze kromme eenduidig is op translatie en starre rotatie na. De vergelijkingen (3.9) zijn te interpreteren als een lineair gekoppeld stelsel van 9 gewone differentiaalvergelijkingen. Uit het existentie- en eenduidigheidsresultaat uit de theorie van gewone differentiaalvergelijkingen volgt dat er precies één continu differentieerbare oplossing $F(s)$ bestaat van (3.9), bij

gegeven begin conditie $F(0)$. Deze matrix $F(0)$ is uiteraard een direct orthogonale matrix. Het is nu de vraag of ook $F(s)$, voor alle $s \in [0, a)$, een direct orthogonale matrix is. Uit $\dot{F} = FR$ volgt $\dot{F}^T = R^T F^T = -RF^T$. Blijkbaar geldt $\dot{F}F^T = FRF^T$ en $F\dot{F}^T = -FRF^T$, zodat $\frac{d}{ds}\left(FF^T\right) = 0$. De matrix $F(s)F^T(s)$ is dus constant en moet daarom gelijk zijn aan $F(0)F^T(0) = I$. Voorts volgt uit de continuïteit van $F(s)$ dat $\det F(s) = \det F(0) = 1$. De matrix $F(s)$ is inderdaad voor iedere $s \in [0, a)$ een direct orthogonale matrix. De matrix $F(s)$ levert nu de vectoren $\boldsymbol{\iota}$, $\mathbf{n}$ en $\mathbf{b}$, waaruit de gezochte kromme volgt. De booglengte parametrizering hiervan wordt gegeven door

$$X(s) = \mathbf{a} + \int_0^s \boldsymbol{\iota}\,\mathrm{d}s,$$

waarbij $\mathbf{a}$ een willekeurig te kiezen vector is. Hieruit volgt direct de translatievrijheid van de kromme. Laat nu $\widetilde{F}(0)$ een andere beginwaarde zijn en $\widetilde{F}(s)$ de bijbehorende oplossing. Omdat de kolommen van $\widetilde{F}(0)$ een positief georiënteerde basis vormen, is $\widetilde{F}(0)$ via een starre rotatie over te voeren in $F(0)$. Er bestaat dus een constante, direct orthogonale matrix S, zodanig dat $\widetilde{F}(0) = SF(0)$. De bijbehorende oplossing wordt gegeven door $\widetilde{F}(s) = SF(s)$, immers

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}SF(s) = S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) = SF(s)R.$$

Op grond van de eenduidigheid concluderen we dat $\widetilde{F}(s)$ via een starre rotatie gevonden kan worden uit de oplossing $F(s)$.

$\square$

Een ruimtekromme wordt aldus, afgezien van haar plaats in de ruimte, volledig bepaald door de functies $\rho(s)$ en $\tau(s)$. Ze karakteriseren de ruimtekromme. Dit betekent dat alle eigenschappen van de kromme, voor zover ze onafhankelijk zijn van de positionering in de ruimte, uitgedrukt kunnen worden door relaties in ρ en τ. We zullen dan ook enkele karakteriseringen geven van krommen met behulp van de kromming en de torsie. Merk eerst op dat uit de vergelijkingen van Frenet volgt

$$\rho\dot{\mathbf{b}} + \tau\dot{\boldsymbol{\iota}} = 0. \tag{3.10}$$

We behandelen de volgende gevallen:

1. $\tau = 0$.
   Uit (3.8) volgt $\dot{\mathbf{b}} = 0$, zodat

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(X(s), \mathbf{b}) = (\dot{X}, \mathbf{b}) + (X, \dot{\mathbf{b}}) = (\boldsymbol{\iota}, \mathbf{b}) = 0.$$

   Blijkbaar is $(X(s), \mathbf{b})$ een constante, zeg α. Dan geldt dat $X(s) - \alpha\mathbf{b}$ voor iedere s in een vlak loodrecht op $\mathbf{b}$ ligt. De ruimtekromme stelt dus een vlakke kromme voor.

2. $\rho = 0$.
   Uit (3.6) volgt $\dot{\boldsymbol{\iota}} = 0$, zodat $X(s) = \mathbf{a} + s\boldsymbol{\iota}(0)$. De kromme stelt dus een rechte voor.

3. ρ =constant en ongelijk aan nul, $\tau = 0$.
   We weten al dat de kromme een vlakke kromme voorstelt. Er geldt

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}X = \ddot{\boldsymbol{\iota}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\rho\mathbf{n} = \rho\dot{\mathbf{n}} = -\rho^2\boldsymbol{\iota},$$

   ofwel

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}X + \dot{X} = 0,$$

   zodat $\rho^{-2}\ddot{X} + X = \mathbf{m}$, met $\mathbf{m}$ een constante vector. Hieruit volgt

$$|X - \mathbf{m}| = \frac{1}{\rho^2}|\ddot{X}| = \frac{1}{\rho}|\mathbf{n}| = \frac{1}{\rho}.$$

   De ruimtekromme stelt dus een cirkel met middelpunt $\mathbf{m}$ en straal ρ^{-1} voor.

4. $\frac{\tau}{\rho}$ =constant, τ en ρ beide ongelijk aan nul.
   Uit (3.10) volgt dat $\mathbf{b} + \frac{\tau}{\rho}\boldsymbol{\iota}$ constant is en gelijk is aan $\mathbf{u}$, zeg. Merk op dat $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 + \frac{\tau^2}{\rho^2}$ en $(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = 1$ zodat uit

$$\dot{X} - \frac{\tau}{\rho}\mathbf{u} = -\frac{\tau}{\rho}\mathbf{b}$$

   volgt dat

$$\left(\dot{X} - \frac{\tau}{\rho}\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) = -\frac{\tau}{\rho} = -\frac{\tau}{\rho}\left(1 + \frac{\tau^2}{\rho^2}\right)^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

   ofwel

$$\left(\dot{X} - \frac{\rho\tau}{\rho^2 + \tau^2}\mathbf{u}, \mathbf{u}\right) = 0.$$

   Blijkbaar is $\left(X - \frac{\rho\tau}{\rho^2+\tau^2}s\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)$ constant en gelijk aan $(X(0), \mathbf{u})$. De vector $X - \frac{\rho\tau}{\rho^2+\tau^2}s\mathbf{u}$ ligt dus voor iedere s in een vlak loodrecht op $\mathbf{u}$ en door $X(0)$. We concluderen dat de kromme een schroeflijn voorstelt, die een baan op een cylinder doorloopt.

5. ρ =constant en ongelijk aan nul, τ =constant en ongelijk aan nul.
   We weten al dat de kromme een schroeflijn voorstelt. Er geldt

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3}X = \ddot{\boldsymbol{\iota}} = -\rho^2\boldsymbol{\iota} + \rho\tau\mathbf{b} = -\rho^2\boldsymbol{\iota} + \rho\tau\mathbf{u} - \tau^2\boldsymbol{\iota},$$

   waarbij $\mathbf{u}$ dezelfde constante vector als in het vorige voorbeeld voorstelt. Er volgt

$$\frac{1}{\rho^2 + \tau^2}\frac{d^3}{ds^3}X + \dot{X} - \frac{\rho\tau}{\rho^2 + \tau^2}\mathbf{u} = 0.$$

   Blijkbaar is de vector $\frac{1}{\rho^2+\tau^2}\ddot{X} + X - \frac{\rho\tau}{\rho^2+\tau^2}s\mathbf{u}$ constant en gelijk aan $\mathbf{m}$, met $\mathbf{m} = \frac{\rho}{\rho^2+\tau^2}\mathbf{n}(0) + X(0)$. We concluderen dat

$$X(s) - \frac{\rho\tau}{\rho^2 + \tau^2}s\mathbf{u} - \mathbf{m} = -\frac{\rho}{\rho^2 + \tau^2}\mathbf{n}(s),$$

zodat

$$\left| X(s) - \frac{\rho\tau}{\rho^2+\tau^2} s\mathbf{u} - \mathbf{m} \right| = \frac{\rho}{\rho^2+\tau^2}.$$

De kromme stelt dus een schroeflijn voor, die een baan op een cirkelcylinder doorloopt.

3.2 Differentiaalmeetkunde van oppervlakken in $I\!R^3$

3.2.1 Oppervlakken

We beschouwen weer de standaardbasis $\{E_i\}$ van $I\!R^3$, waarmee ieder punt $X \in I\!R^3$ te schrijven is als $X = x^i E_i$. Laat nu x^i reële functies zijn van twee reële parameters u^1 en u^2, waarbij u^1 en u^2, waarbij $(u^1, u^2) \in \Omega \subset I\!R^2$, met Ω open. We veronderstellen dat de functies x^i voldoend vaak differentieerbaar zijn naar beide variabelen, zodat in het vervolg geen moeilijkheden ten aanzien van differentiatie optreden. Voorts veronderstellen we dat matrix, gevormd door de partiële afgeleiden $\frac{\partial x^i}{\partial u^j}$, de rang twee heeft. Hierdoor zijn de vectoren $\partial_1 X$ en $\partial_2 X$ lineair onafhankelijk in ieder punt X (We hanteren in dit hoofdstuk de notatie ∂_j voor $\frac{\partial}{\partial u^j}$).

Definitie 3.2.1 *Een oppervlak S in $I\!R^3$ is de verzameling punten $X = X(u^1, u^2) = x^i(u^1, u^2)E_i$, waarbij $(u^1, u^2) \in \Omega$.*

We noemen de functies $x^i = x^i(u^j)$ een parametervoorstelling van een oppervlak S. De parameters u^j zijn coördinaten op het oppervlak. Door één dezer coördinaten constant te houden wordt een kromme op het oppervlak beschreven. Een dergelijke kromme heet een bij de parametervoorstelling behorende parameterkromme. De voorwaarde dat de rang van de matrix $\left[\partial_j x^i\right]$ gelijk aan twee is drukt uit dat twee parameterkrommen u_1 =constant en u_2 =constant niet kunnen samenvallen. Net als bij krommen in $I\!R^3$ zijn er oneindig veel mogelijkheden om eenzelfde oppervlak S te beschrijven met behulp van een parametervoorstelling. Door de substitutie $u^1 = u^1(u^{1'}, u^{2'})$, $u^2 = u^2(u^{1'}, u^{2'})$, waarbij we veronderstellen dat de determinant van de matrix $\left[\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right]$ ongelijk aan nul is, wordt een nieuwe parametrizering van het oppervlak S, in de coördinaten $u^{i'}$, verkregen. Door de veronderstelling $\det[\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}] \neq 0$ is wederom gegarandeerd dat de rang van de matrix $\left[\partial_{j'} x^i\right]$ gelijk aan twee is. In het vervolg noteren we de partiële afgeleiden $\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$ als $A^i_{i'}$.

Zij S een oppervlak in $I\!R^3$ met coördinaten u^i. We kunnen een kromme K op het oppervlak S beschrijven door $u^i = u^i(t)$, waarbij t een parameter voor K voorstelt. De raakvector in een punt X op deze kromme wordt gegeven door

$$\frac{dX}{dt} = \frac{du^i}{dt} \partial_i X,$$

welke aldus een lineaire combinatie vormt van de vectoren $\partial_1 X$ en $\partial_2 X$. De raaklijnen in X aan alle krommen door X op het oppervlak liggen in een vlak. Dit vlak is het raakvlak in

X aan S, notatie $T_X(S)$. Dit raakvlak is een 2-dimensionale deelruimte van de raakruimte $T_X(\mathbb{R}^3)$. De vectoren $\partial_1 X$ en $\partial_2 X$ vormen op natuurlijke wijze een basis voor deze deelruimte. Bij overgang op andere coördinaten $u^{i'}$ geldt $\partial_{i'} X = A^i_{i'} \partial_i X$, hetgeen in het raakvlak neerkomt op overgang op een andere basis.

Voorbeeld 3.2.2 *Een bol met straal R laat zich beschrijven door de parametervoorstelling*

$$x^1(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3(\theta,\varphi) = R\cos\theta,$$

met $0 < \theta < \pi$ en $0 < \varphi < 2\pi$. Merk op dat de rang van de matrix gevormd door de kolommen $\partial_\theta X$ en $\partial_\varphi X$ ongelijk aan nul is, indien $\vartheta \neq 0$ en $\vartheta \neq \pi$.

3.2.2 Het eerste fundamentaaltensorveld

Zij S een oppervlak, geparametrizeerd met coördinaten u^1 en u^2. In ieder punt $X \in S$ noteren we het raakvlak in X aan S met $T_X(S)$. Deze ruimte is een twee-dimensionale deelruimte van de raakruimte $T_X(\mathbb{R}^3)$ in X en heeft als basis $\{\partial_i X\}$, welke bepaald wordt door de parametrizering $X = X(u^i)$. Laat $(\cdot,\cdot)$ het Euclidisch inproduct op $\mathbb{R}^3$ zijn. Dit inproduct kan op natuurlijke wijze overgebracht worden naar de raakruimte $T_X(\mathbb{R}^3)$. Het zo verkregen inproduct op $T_X(\mathbb{R}^3)$ noteren we met $(\cdot,\cdot)_X$ (zie ook paragraaf 2.4.2). Dit inproduct is uiteraard ook een inproduct op de deelruimte $T_X(S)$.

Definitie 3.2.3 *Het eerste fundamentaaltensorveld is het fundamentaaltensorveld dat aan X het inproduct op $T_X(S)$ toevoegt. Gemakshalve noteren we het eerste fundamentaaltensorveld ook met g.*

De componenten van het eerste fundamentaaltensorveld, behorende bij de coördinaten u^i, worden gegeven door

$$g_{ij} = (\partial_i X, \partial_j X)_X\,,$$

waardoor g te schrijven is als $g = g_{ij}\,du^i \otimes du^j$. Hierbij stelt $\{du^1, du^2\}$ in elk punt X de bij de basis $\{\partial_1 X, \partial_2 X\}$ behorende reciproke basis voor.

De vectoren $\partial_1 X$ en $\partial_2 X$ zijn raakvectoren aan respectievelijke parameterkrommen $u^2 = C$ en $u^1 = C$. Indien de parameterkrommen elkaar onder een hoek α snijden, dan geldt

$$\cos\alpha = \frac{(\partial_1 X, \partial_2 X)_X}{|\partial_1 X|\ |\partial_2 X|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Blijkbaar snijden parameterkrommen elkaar loodrecht, indien $g_{12} = 0$. We noemen daarom een parametrizering u^i van een oppervlak S orthogonaal indien $g_{12} = 0$.

Voorbeeld 3.2.4 *De in voorbeeld 3.2.2 gegeven parametrizering van een bol met straal R is orthogonaal. Er geldt immers $g_{11} = R^2$, $g_{22} = R^2\sin^2\theta$ en $g_{12} = g_{21} = 0$.*

3.2.3 Het tweede fundamentaaltensorveld

Zij S een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met parametrizering $x^i = x^i(u^j)$. In een punt X zijn de vectoren $\partial_j X$ raakvectoren aan de parameterkrommen door X. Ze vormen een basis van het raakvlak $T_X(S)$. Zij $\mathbf{N}_X$ de vector die in X loodrecht staat op $T_X(S)$, lengte 1 heeft en wijst in de richting van $\partial_1 X \times \partial_2 X$. Een basis van $T_X(\mathbb{R}^3)$ wordt nu gevormd door $\partial_1 X$, $\partial_2 X$ en $\mathbf{N}_X$. De afgeleiden $\partial_i \partial_j X$ zijn lineaire combinaties van de vectoren $\partial_1 X$, $\partial_2 X$ en $\mathbf{N}_X$. We noteren dit als volgt:

$$\partial_i \partial_j X = \left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} \partial_k X + h_{ij} \mathbf{N}_X. \tag{3.11}$$

De notatie $\left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\}$ duidt op een analogie met de in paragraaf 2.6.3 ingevoerde Christoffel-symbolen. Later zal dit duidelijk worden.

Uit voorstelling (3.11) volgt

$$(\partial_i \partial_j X, \partial_l X) = \left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} g_{kl} + h_{ij} \left(\mathbf{N}_X, \partial_l X \right) = \left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} g_{kl},$$

zodat

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} = g^{kl} \left(\partial_i \partial_j X, \partial_l X \right).$$

Voorts is het duidelijk dat $h_{ij} = (\partial_i \partial_j X, \mathbf{N}_X)$.

Lemma 3.2.5 *De Christoffelsymbolen vormen niet de componenten van een $\binom{1}{2}$- tensorveld, de functies h_{ij} vormen wel de componenten van een covariant 2-tensorveld.*

Bewijs:
Laat $x^i(u^{j'})$ een tweede parametervoorstelling zijn van het oppervlak S. Er geldt

$$\left\{ \begin{matrix} k' \\ i'\, j' \end{matrix} \right\} = g^{k'l'} \left(\partial_{i'} \partial_{j'} X, \partial_{l'} X \right) = A^{k'}_{k} A^{j}_{j'} A^{i}_{i'} \left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} + A^{k'}_{k} \left(\partial_{i'} A^{k}_{j'} \right).$$

Omdat de tweede term hierin in het algemeen ongelijk aan nul is, vormen de Christoffel-symbolen niet de componenten van een tensorveld. Voorts geldt

$$\begin{aligned} h_{i'j'} &= \left(\partial_{i'} \partial_{j'} X, \mathbf{N}_X \right) = \left(\partial_{i'} \left(A^{j}_{j'} \partial_j X \right), \mathbf{N}_X \right) = \left(\left(\partial_{i'} A^{j'}_{j} \right) \partial_j X + A^{j}_{j'} \left(\partial_{i'} \partial_j X \right), \mathbf{N}_X \right) = \\ &= A^{j}_{j'} \left(\partial_{i'} \partial_j X, \mathbf{N}_X \right) = A^{j}_{j'} A^{i}_{i'} \left(\partial_i \partial_j X, \mathbf{N}_X \right) = A^{j}_{j'} A^{i}_{i'} h_{ij}, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat de functies h_{ij} de componenten van een tensorveld vormen.

□

Definitie 3.2.6 *Het tweede fundamentaaltensorveld h is het covariante 2-tensorveld, waarvan de componenten ten opzichte van de coördinaten u^k gegeven worden door h_{ij}, dus $h = h_{ij} du^i \otimes du^j$.*

Lemma 3.2.7 *De Christoffelsymbolen laten zich volledig beschrijven met behulp van de componenten van het eerste fundamentaaltensorveld. Er geldt namelijk*

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ i\ j \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right). \tag{3.12}$$

Bewijs:
Er geldt

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jl} &= \partial_i \left(\partial_j X, \partial_l X \right) = \left(\partial_i \partial_j X, \partial_l X \right) + \left(\partial_j X, \partial_i \partial_l X \right), \\ \partial_j g_{li} &= \partial_j \left(\partial_l X, \partial_i X \right) = \left(\partial_j \partial_l X, \partial_i X \right) + \left(\partial_l X, \partial_j \partial_i X \right), \\ \partial_l g_{ij} &= \partial_l \left(\partial_i X, \partial_j X \right) = \left(\partial_l \partial_i X, \partial_j X \right) + \left(\partial_i X, \partial_l \partial_j X \right), \end{aligned}$$

zodat

$$\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} = 2 \left(\partial_i \partial_j X, \partial_l X \right) = 2 g_{kl} \left\{ \begin{array}{c} k \\ i\ j \end{array} \right\},$$

waaruit (3.12) eenvoudig volgt.

□

Merk op dat (3.12) correspondeert met (2.7).

Stelling 3.2.8 *De doorsnijding van een oppervlak S met een plat vlak, dat 'dichtbij' een punt X op S ligt en evenwijdig is aan $T_X(S)$, is in eerste benadering een hyperbool, ellips of een paar evenwijdige rechten en wordt volledig bepaald door de tweede fundamentaaltensor.*

Bewijs:
We nemen cartesische coördinaten x, y en z in $I\!R^3$ zodanig dat de oorsprong in X ligt en het raakvlak $T_X(S)$ samenvalt met het vlak $z = 0$. In een voldoend kleine omgeving van de oorsprong laat S zich dan beschrijven door een vergelijking van de vorm $z = f(x, y)$, terwijl een parametervoorstelling van S gegeven wordt door $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z = f(x, y)$. We veronderstellen de functie f voldoend vaak differentieerbaar, zodat in een omgeving van de oorsprong de vergelijking van S te schrijven is als

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left(rx^2 + 2sxy + ty^2 \right) + \text{h.o.t} = \\ &= \frac{1}{2}\left(rx^2 + 2sxy + ty^2 \right) + \text{h.o.t}, \end{aligned}$$

met

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ en } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

De afkorting h.o.t. staat voor hogere orde termen. Een vlak dat dichtbij X ligt en evenwijdig is aan het raakvlak aan S in X laat zich beschrijven door $z = \varepsilon$, met ε voldoende klein. De doorsnijding van dit vlak met S wordt in eerste benadering gegeven door de vergelijking

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2\varepsilon.$$

De raakvectoren aan de parameterkrommen, behorende bij de coördinaten x en y, in de oorsprong, worden gegeven door

$$\partial_x X = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)^T$$

en

$$\partial_y X = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T,$$

zodat in de oorsprong geldt

$$\partial_x \partial_x X = (0,0,r)^T,\ \ \partial_x \partial_y X = (0,0,s)^T \text{ en } \partial_y \partial_y X = (0,0,t)^T.$$

Bovendien volgt dat in de oorsprong, $X = 0$, geldt dat $\mathbf{N}_X = (0,0,1)^T$. Blijkbaar geldt $h_{11} = r$, $h_{12} = h_{21} = s$ en $h_{22} = t$, zodat een vergelijking van de doorsnijding wordt gegeven door

$$h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = 2\varepsilon.$$

We concluderen hieruit dat de doorsnijding volledig bepaald wordt door de getallen h_{ij} en dat de doorsnijding een ellips is indien $\det[h_{ij}] > 0$, een hyperbool is indien $\det[h_{ij}] < 0$ en een paar evenwijdige rechten is indien $\det[h_{ij}] = 0$.

□

Als afsluiting van deze paragraaf leiden we nog een handige formule af ter berekening van de componenten van het tweede fundamentaaltensorveld. Merk op dat $\partial_1 X \times \partial_2 X = \lambda \mathbf{N}_X$, met $\lambda = |\partial_1 X \times \partial_2 X|$. Deze λ laat zich beschrijven met de componenten van het eerste fundamentaaltensorveld. Er geldt namelijk

$$\lambda = |\partial_1 X|\ |\partial_2 X| \sin\vartheta,$$

met ϑ de hoek tussen $\partial_1 X$ en $\partial_2 X$ zodanig dat $0 < \vartheta < \pi$. Hieruit volgt

$$\lambda = \sqrt{g_{11}g_{22}(1-\cos^2\vartheta)} = \sqrt{g_{11}g_{22}\left(1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}\right)} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det\,[g_{ij}]}.$$

Voorts is

$$h_{ij} = (\partial_i\partial_j X, \mathbf{N}_X) = \frac{1}{\lambda}\left(\partial_1 X \times \partial_2 X, \partial_i \partial_j X\right) = \frac{1}{\sqrt{\det\,[g_{ij}]}} \det\left(\partial_1 X, \partial_2 X, \partial_i\partial_j X\right).$$

3.2.4 Krommen op een oppervlak

Zij S een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met parametrizering $x^i = x^i(u^j)$. Zij voorts K een kromme op S, geparametrizeerd met zijn booglengte s, dus $u^j = u^j(s)$, zodat $x^i = x^i(u^j(s))$. We noteren differentiatie van u^j naar s, net als eerder, met $\dot{u}^j$. De eenheidsraakvector aan K in een punt X is de vector $\boldsymbol{\iota}$, die in het raakvlak $T_X(S)$ ligt. Er geldt

$$\boldsymbol{\iota} = \dot{X} = \dot{u}^j \partial_j X.$$

De kromtevector $\ddot{X}$ valt langs de hoofdnormaal van de kromme K en voldoet aan

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \boldsymbol{\imath} = \ddot{u}^j \partial_j X + \dot{u}^j \dot{u}^k \partial_k \partial_j X = \ddot{u}^j \partial_j X + \dot{u}^j \dot{u}^k \left(\left\{ \begin{array}{c} l \\ k\ j \end{array} \right\} \partial_l X + h_{kj} \mathbf{N}_X \right) = \\ &= \left(\ddot{u}^l + \dot{u}^j \dot{u}^k \left\{ \begin{array}{c} l \\ j\ k \end{array} \right\} \right) \partial_l X + \dot{u}^j \dot{u}^k h_{jk} \mathbf{N}_X. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De lengte van de kromtevector wordt gegeven door de kromming ρ in X (zie lemma 3.1.8).

Definitie 3.2.9 *De geodetische kromming van K in het punt X is de lengte van de projectie van $\ddot{X}$ op het raakvlak $T_X(S)$.*

Het is met behulp van (3.13) eenvoudig in te zien dat de geodetische kromming te berekenen is met behulp van de formule

$$\sqrt{\left(\ddot{u}^i + \left\{ \begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array} \right\} \dot{u}^l \dot{u}^k \right) \left(\ddot{u}^j + \left\{ \begin{array}{c} j \\ p\ q \end{array} \right\} \dot{u}^p \dot{u}^q \right) g_{ij}} \tag{3.14}$$

Merk op dat de geodetische kromming alleen afhankelijk is van de componenten van het eerste fundamentaaltensorveld.

Definitie 3.2.10 *De normale kromming van K in het punt X is de lengte van de projectie van $\ddot{X}$ op $\mathbf{N}_X$.*

Uit (3.13) volgt dat de normale kromming gegeven wordt door $h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$. Merk op dat de normale kromming slechts afhankelijk is van de componenten van het tweede fundamentaaltensorveld en van de waarden $\dot{u}^i$. Deze laatste zijn bepalend voor de richting van $\boldsymbol{\iota}$. Blijkbaar hebben verschillende krommen op het oppervlak S met dezelfde raakvector in een punt X op S gelijke normale kromming. Dit resultaat staat bekend als de stelling van Meusnier.

Definitie 3.2.11 *Een geodetische lijn of geodeet van het oppervlak S is een kromme op S, waarvan de hoofdnormaal in elk punt samenvalt met de normaal op het oppervlak.*

Uit (3.13) volgt dat een geodeet wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\ddot{u}^i + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0. \tag{3.15}$$

Dit is een niet-lineair inhomogeen gekoppeld stelsel van twee gewone differentiaalvergelijkingen van tweede orde in u^1 en u^2. Men kan zich voorstellen dat een analytische oplossing hiervan vaak lastig, of helemaal niet, te bepalen is. Uit de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen volgt echter dat er precies één geodetische lijn gaat door een gegeven punt en een gegeven richting.

Indien een kromme op S niet geparametrizeerd is met zijn booglengte, maar met een andere parameter, zeg t, dan wordt de booglengte gegeven door (3.1). Deze formule is nu uit te drukken in de coördinaten u^j en de componenten van het eerste fundamentaaltensorveld. Het is eenvoudig in te zien dat de booglengte s van een kromme K op S, met parameter t, tussen de punten $t = t_0$ en $t = t_1$ gegeven wordt door

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}} \, \mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

We gebruiken deze formule om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 3.2.12 *Laat X_0 en X_1 gegeven punten zijn op S en K een kromme op S door X_0 en X_1. Als de kromme K minimale lengte heeft, dan is K een geodeet.*

Bewijs:
Laat K minimale lengte hebben en parametrizeer K met zijn booglengte s, met $s_0 \le s \le s_1$. Dus $X_0 = x^i(u^j(s_0))E_i$ en $X_1 = x^i(u^j(s_1))E_i$. Definieer de functie T door

$$T(u^k, \dot{u}^k) = \sqrt{g_{ij}(u^k)\dot{u}^i\dot{u}^j}.$$

Merk op dat T in elk punt van K de waarde 1 aanneemt. We variëren nu K op differentieerbare wijze over S, waarbij we de punten X_0 en X_1 vasthouden. Aldus wordt een nieuwe kromme $\widetilde{K}$ verkregen. Deze kromme $\widetilde{K}$ laat zich beschreven door $u^j(s) + \varepsilon\eta^j(s)$, met η^j differentieerbaar en $\eta^j(s_0) = \eta^j(s_1) = 0$. De parameter s is <u>niet</u> noodzakelijk de booglengte parameter voor $\widetilde{K}$. Dientengevolge wordt de lengte van $\widetilde{K}$ gegeven door

$$\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij}(u^k + \varepsilon\eta^k) \frac{\mathrm{d}(u^i + \varepsilon\eta^i)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}(u^j + \varepsilon\eta^j)}{\mathrm{d}s}} \, \mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} T(u^k + \varepsilon\eta^k, \dot{u}^k + \varepsilon\dot{\eta}^k) \, \mathrm{d}s.$$

Omdat de lengte van K minimaal is, neemt bovenstaande uitdrukking haar minimum aan voor $\varepsilon = 0$, ofwel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \left(\int_{s_0}^{s_1} T(u^k + \varepsilon\eta^k, \dot{u}^k + \varepsilon\dot{\eta}^k) \, \mathrm{d}s \right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

Hieruit volgt

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\eta^k \frac{\partial T}{\partial u^k} + \dot{\eta}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}^k} \right) \mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} \eta^k \left(\frac{\partial T}{\partial u^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}^k} \right) \mathrm{d}s = 0, \tag{3.17}$$

waarbij 1 keer partiëel is geïntegreerd en gebruik is gemaakt van $\eta^k(s_0) = \eta^k(s_1) = 0$. Omdat (3.17) dient te gelden voor elke functie η^k, vinden we

$$\frac{\partial T}{\partial u^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}^k} = 0. \tag{3.18}$$

Omdat T in elk punt van K de waarde 1 aanneemt mogen we in (3.18) T vervangen door T^2, waarmee deze vergelijkingen over gaan in

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{u}^k}\left(g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right)\right) = 0,$$

ofwel

$$\dot{u}^i\dot{u}^j\partial_k g_{ij} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ki}\dot{u}^i + g_{kj}\dot{u}^j\right) = 0,$$

ofwel

$$\dot{u}^i\dot{u}^j\partial_k g_{ij} - 2\ddot{u}^i g_{ki} - \left(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j = 0,$$

ofwel

$$2g_{ki}\ddot{u}^i + \left(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j = 0,$$

ofwel

$$\ddot{u}^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} \dot{u}^i\dot{u}^j = 0.$$

Dit zijn precies de vergelijkingen voor geodetische lijnen. Daar K hieraan voldoet is K een geodeet door X_0 en X_1.

□

3.2.5 Covariant differentiëren op oppervlakken

Zij S een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met parametrizering $x^i = x^i(u^j)$ en K een kromme op S met parametrizering $u^j = u^j(t)$. Laat voorts $\mathbf{v}(t)$ voor iedere t een vector in $T_{X(t)}(S)$ zijn. Een dergelijk vectorveld $\mathbf{v}$ noemen we een raakvectorveld aan S, gedefinieerd op punten van de kromme K. We kunnen $\mathbf{v}$ schrijven als

$$\mathbf{v} = v^i\partial_i X = v^i(t)\partial_i X(u^j(t)).$$

Voorbeeld 3.2.13 *Het vectorveld gevormd door de raakvectoren aan K is een raakvectorveld zowel aan S als aan K. Dit raakvectorveld heeft contravariante componenten $\dfrac{\mathrm{d}u^i(t)}{\mathrm{d}t}$. Er geldt immers*

$$\frac{\mathrm{d}X(u^j(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u^j(t)}{\mathrm{d}t}\partial_j X(t).$$

Voorbeeld 3.2.14 *Het vectorveld gevormd door basisvectoren $\partial_i X(t)$, met i vast, is een raakvectorveld en heeft contravariante componenten δ_i^j.*

Voorbeeld 3.2.15 *Het vectorveld gevormd door reciproke basisvectoren $\mathrm{d}u^i$, met i vast, is een raakvectorveld en heeft covariante componenten δ_j^i en contravariante componenten g^{ij}.*

Laat $\mathbf{v}$ een raakvectorveld zijn. In het algemeen zal de afgeleide $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t}$ niet een element zijn van het raakvlak $T_{X(t)}(S)$. In de nu volgende definitie geven we een definitie van een afgeleide die deze eigenschap wel bezit.

Definitie 3.2.16 *De covariante afgeleide van* $\mathbf{v}$ *langs* K*, notatie* $\frac{\nabla\mathbf{v}}{dt}$*, wordt gedefinieerd door*

$$\frac{\nabla\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_X \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.19}$$

waarbij $\mathcal{P}_X$ *de projectie op het raakvlak* $T_X(S)$ *voorstelt.*

De covariante differentiatie in een punt X op S is een lineaire operatie die een vectorveld van vectoren, aangrijpend in punten van de kromme K in een omgeving van X en rakend aan het oppervlak S, afbeeldt op $T_X(S)$. Voor ieder scalarveld $f(t)$ op K geldt

$$\frac{\nabla(f\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_X \frac{\mathrm{d}(f\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_X \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + f\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + f\frac{\nabla\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.20}$$

Merk op dat voor iedere $\mathbf{w} \in T_{X(t)}(S)$ geldt

$$\left(\mathbf{w}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\mathbf{w}, \frac{\nabla\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right),$$

daar $\mathbf{w}$ loodrecht staat op $\mathbf{N}_X$. Voor twee raakvectorvelden $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ langs dezelfde kromme van het oppervlak volgt hieruit

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v},\mathbf{w})}{\mathrm{d}t} = \left(\mathbf{v}, \frac{\nabla\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\nabla\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{w}\right). \tag{3.21}$$

Deze formule is een regel van Leibniz.

Voorbeeld 3.2.17 *Beschouw het raakvectorveld uit voorbeeld* 3.2.13. *Noem dit raakvectorveld* $\mathbf{w}$. *De covariante afgeleide van dit raakvectorveld langs de kromme* K *kan geschreven worden met behulp van de Christoffelsymbolen. Er geldt*

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{P}_X \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_X \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \partial_j X \right) \right) = \mathcal{P}_X \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^j}{\mathrm{d}t^2} \partial_j X + \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_j X \right) = \\
&= \mathcal{P}_X \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^j}{\mathrm{d}t^2} \partial_j X + \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} \partial_k \partial_j X \right) = \frac{\mathrm{d}^2 u^j}{\mathrm{d}t^2} \partial_j X + \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} \left\{ \begin{matrix} l \\ k\ j \end{matrix} \right\} \partial_l X = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^j}{\mathrm{d}t^2} + \left\{ \begin{matrix} j \\ k\ l \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^l}{\mathrm{d}t} \right) \partial_j X,
\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van (3.11).

Voorbeeld 3.2.18 *Beschouw het raakvectorveld uit voorbeeld* 3.2.14. *Ook de covariante afgeleide van dit raakvectorveld is uit te drukken in Christoffelsymbolen.*

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\partial_i X &= \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\left(\delta_i^j \partial_j X\right) = \mathcal{P}_X \left(\left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\delta_i^j \right) \partial_j X + \delta_i^j \frac{d}{\mathrm{d}t}\partial_j X \right) = \delta_i^j \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} \left\{ \begin{matrix} l \\ k\ j \end{matrix} \right\} \partial_l X = \\
&= \left\{ \begin{matrix} j \\ i\ k \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} \partial_j X.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.2.19 *Beschouw het raakvectorveld uit voorbeeld* 3.2.15. *Er geldt*

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta^i_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}u^i, \partial_j X\right) = \left(\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}u^i, \partial_j X\right) + \left(\mathrm{d}u^i, \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\partial_j X\right),$$

volgens de regel van Leibniz. Hieruit volgt

$$\left(\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}u^i, \partial_j X\right) = -\left(\mathrm{d}u^i, \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\partial_j X\right) = -\left(\mathrm{d}u^i, \left\{\begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\partial_l X\right) = -\left\{\begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t},$$

zodat

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}u^i = -\left\{\begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}u^j.$$

In het bijzonder kunnen we covariante differentiatie uitvoeren langs parameterkrommen. Deze worden verkregen door één der coördinaten u^i vast te houden en de ander als parameter van de kromme te nemen. Zo volgt uit 3.2.18 voor de covariante afgeleide van basisvectoren langs parameterkrommen dat

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\partial_i X = \left\{\begin{matrix} j \\ i\,l \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}u^l}{\mathrm{d}u^k}\partial_j X = \left\{\begin{matrix} j \\ i\,k \end{matrix}\right\}\partial_j X. \tag{3.22}$$

Evenzo volgt uit voorbeeld 3.2.19 dat de covariante afgeleide van reciproke basisvectoren langs parameterkrommen gegeven wordt door

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^l}\,\mathrm{d}u^i = -\left\{\begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}u^l}\,\mathrm{d}u^j = -\left\{\begin{matrix} i \\ j\,l \end{matrix}\right\}\mathrm{d}u^j. \tag{3.23}$$

In het algemeen wordt de covariante afgeleide van een raakvectorveld $\mathbf{v}$ langs een parameterkromme gegeven door

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\mathbf{v} = \frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\left(v^j\partial_j X\right) = \partial_k v^j\partial_j X + v^j\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\partial_j X = \left(\partial_k v^j + v^l\left\{\begin{matrix} j \\ k\,l \end{matrix}\right\}\right)\partial_j X, \tag{3.24}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van formule (3.20). De covariante afgeleide van een raakvectorveld $\mathbf{v}$ laat zich ook eenvoudig schrijven ten opzichte van reciproke basisvectoren,

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\mathbf{v} = \frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\left(v_j\,\mathrm{d}u^j\right) = \partial_k v^j\,\mathrm{d}u^j + v_j\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\,\mathrm{d}u^j = \left(\partial_k v_j - v_l\left\{\begin{matrix} l \\ k\,j \end{matrix}\right\}\right)\mathrm{d}u^j. \tag{3.25}$$

Definitie 3.2.20 *Zij* $\mathbf{v} = v^j\partial_j X$ *een raakvectorveld, gedefinieerd op heel het oppervlak* S, *dan definiëren we*

$$\nabla_k v^j = \partial_k v^j + v^l\left\{\begin{matrix} j \\ k\,l \end{matrix}\right\} \tag{3.26}$$

Lemma 3.2.21 *De functies* $\nabla_k v^j$, *gegeven door* (3.26) *vormen de componenten van een* $\binom{1}{1}$*-tensorveld op* S. *Dit tensorveld heet de* <u>*covariante afgeleide*</u> *van* $\mathbf{v}$ *op* S.

Ga dit zelf na. Ook de functies $\nabla_k v_j$, gedefinieerd door

$$\nabla_k v_j = \partial_k v_j - v_l \left\{ \begin{array}{c} l \\ k\ j \end{array} \right\},$$

zie (3.25), vormen de componenten van een $\binom{0}{2}$-tensorveld.

Evenzo definiëren we covariante differentiatie op S van 2-tensorvelden.

Definitie 3.2.22 *Zij φ_{ij}, φ^{ij} en φ_i^j de componenten van respectievelijk een $\binom{0}{2}$-tensorveld, $\binom{2}{0}$-tensorveld en een $\binom{1}{1}$- tensorveld. Dan definiëren we de functies $\nabla_k \varphi_{ij}$, $\nabla_k v^{ij}$ en $\nabla \varphi_i^j$ door respectievelijk*

$$\begin{aligned} \nabla_k \varphi_{ij} &= \partial_k \varphi_{ij} - \left\{ \begin{array}{c} l \\ k\ i \end{array} \right\} \varphi_{lj} - \left\{ \begin{array}{c} l \\ k\ j \end{array} \right\} \varphi_{il}, && (3.27) \\ \nabla_k \varphi^{ij} &= \partial_k \varphi^{ij} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ k\ l \end{array} \right\} \varphi^{lj} + \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\ l \end{array} \right\} \varphi^{il}, && (3.28) \\ \nabla_k \varphi_i^j &= \partial_k \varphi_i^j + \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\ l \end{array} \right\} \varphi_i^l - \left\{ \begin{array}{c} l \\ k\ i \end{array} \right\} \varphi_l^j. && (3.29) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.23 (lemma van Ricci) *De componenten van het eerste fundamentaaltensorveld gedragen zich bij covariante differentiatie als constanten, ofwel $\nabla_k g^{ij} = 0$ en $\nabla_k g_{ij} = 0$.*

Bewijs:
Uit (3.21) volgt

$$\partial_k g^{ij} = \partial_k(\,\mathrm{d}u^i, \mathrm{d}u^j) = \left(\mathrm{d}u^i, \frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\,\mathrm{d}u^j \right) + \left(\frac{\nabla}{\mathrm{d}u^k}\,\mathrm{d}u^i, \mathrm{d}u^j \right),$$

zodat

$$\partial_k g^{ij} = - \left\{ \begin{array}{c} j \\ l\ k \end{array} \right\} g^{il} - \left\{ \begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array} \right\} g^{lj},$$

waarbij gebruik is gemaakt van (3.23). Met behulp van definitie (3.28) volgt vervolgens $\nabla_k g^{ij} = 0$. Op analoge manier is in te zien dat $\nabla_k g_{ij} = 0$.

□.

Definitie 3.2.24 *Zij $\mathbf{v}$ een raakvectorveld aan K op S en schrijf $\mathbf{v} = v^i \partial_i X$. Dit raakvectorveld heet parallel (verplaatst) langs K indien*

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} v^i \partial_i X = \left(\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{array}{c} j \\ i\ k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} v^k \right) \partial_j X = 0. \qquad (3.30)$$

Merk op het raakvectorveld gevormd door raakvectoren van een geodeet parallel verplaatst is langs K. Indien K een geodeet is, dan staat er

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i X\right) = 0.$$

<u>BELANGRIJKE OPMERKING:</u>

Uitgeschreven luidt het stelsel differentiaalvergelijkingen voor paralleltransport in 2 dimensies

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \ell\, 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\mathrm{d}u^\ell}{\mathrm{d}t} & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \ell\, 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\mathrm{d}u^\ell}{\mathrm{d}t} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ \ell\, 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\mathrm{d}u^\ell}{\mathrm{d}t} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ \ell\, 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\mathrm{d}u^\ell}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dit is een, meestal niet autonoom, gekoppeld stelsel gewone lineaire differentiaalvergelijkingen van de gedaante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + A_{11}(t)v^1 + A_{12}(t)v^2 & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + A_{21}(t)v^1 + A_{22}(t)v^2 & = & 0. \end{array} \right.$$

3.3 Opgaven

1. In $I\!R^3$ beschouwen we het boloppervlak S, d.w.z. het oppervlak geparametrizeerd door $\underline{x}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ met

$$0 < u < \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi \; .$$

   a) Zij $T_{\underline{x}}(S)$ het raakvlak (= raakruimte) aan S in een willekeurig punt $\underline{x}$ op S.
   Bereken de bij de coördinaten u, v behorende basis $\partial_u \underline{x}, \partial_v \underline{x}$ van $T_{\underline{x}}(S)$.

   b) Bereken het fundamentaaltensorveld g_{ij} van S.

   c) Bereken een normaalvectorveld $\underline{N}$ op S.

   d) Bereken het tweede fundamentaaltensorveld h_{ij} van S.

   e) Bereken de duale (= reciproke) basis du, dv bij $\partial_u \underline{x}, \partial_v \underline{x}$.
   (Opmerking: Via g_{ij} wordt $T_{ux}(S)$ met zijn duale $T^*_{\underline{x}}(S)$ geïdentificeerd).

   f) Bereken de Christoffelsymbolen van S.

   g) Hoe luiden de vergelijkingen voor de geodeten op S?
   Beargumenteer dat de parameterkrommen "v = constant" geodeten zijn.

   h) Beschouw de kromme K

$$u = \frac{\pi}{4}, \quad v = t, \quad 0 \le t \le 2\pi \; .$$

   Deze kromme begint en eindigt in het punt

$$\underline{a} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \; .$$

   Transporteer de vector $(0,1,0)$ uit $T_{\underline{a}}(S)$ parallel langs de kromme K.
   Is K een geodeet?

2. In $I\!R^3$ beschouwen we de pseudosfeer S, d.w.z. het oppervlak geparametrizeerd door $\underline{x}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan \frac{u}{2})$ met

$$0 < u < \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi \; .$$

   a) Zij $T_{\underline{x}}(S)$ het raakvlak (= raakruimte) aan S in een willekeurig punt $\underline{x}$ op S.
   Bereken de bij de coördinaten u, v behorende basis $\partial_u \underline{x}, \partial_v \underline{x}$ van $T_{ux}(S)$.

   b) Bereken het fundamentaaltensorveld g_{ij} van S.

   c) Bereken een normaalvectorveld $\underline{N}$ op S.

   d) Bereken het tweede fundamentaaltensorveld h_{ij} van S.

   e) Bereken de duale (= reciproke) basis du, dv bij $\partial_u \underline{x}, \partial_v \underline{x}$.
   (Opmerking: Via g_{ij} wordt $T_{\underline{x}}(S)$ met zijn duale $T^*_{\underline{x}}(S)$ geïdentificeerd).

f) Bereken de Christoffelsymbolen van S.
Opmerking: $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \ \ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \ \ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \ \ 2 \end{array} \right\} = 0.$

g) Hoe luiden de vergelijkingen voor de geodeten op S?
Beargumenteer dat de parameterkrommen "$v =$ constant" geodeten zijn.

h) Beschouw de kromme K

$$u = \frac{\pi}{4}, \quad v = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ .$$

Deze kromme begint en eindigt in het punt

$$\underline{a} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2} + \ell n(\sqrt{2} - 1) \right) \ .$$

Transporteer de vector $(0,1,0)$ uit $T_{\underline{a}}(S)$ parallel langs de kromme K.
Is K een geodeet?

3. a) Schrijf de definitie op van het begrip "Symmetrisch Covariant 2-tensorveld T op $\mathbb{R}^2$".

b) Geef van dit begrip ook de alternatieve definitie. (Ook wel fysische definitie genoemd.)

c) Leg uit (heel kort) waarom de definities a) en b) op hetzelfde neerkomen.

d) Beschouw nu $T = T_{ij}(x^k)dx^i \otimes dx^j$ met Cartesische coördinaten $x^i, x^1 = x, x^2 = y$.
Zij ∇T de covariante afgeleide van T. Geef aan van welk type het tensorveld ∇T is en geef de componenten van ∇T in Cartesische coördinaten.

e) Geef de componenten van T en ∇T in poolcoördinaten $x^{i'}, x^{1'} = r, r^{2'} = \varphi, x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

f) Beschouw nu, concreet, het tensorveld T met Cartesische componenten

$$T_{ij} = 1, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2 \ .$$

Bereken van dit speciale tensorveld de componenten in poolcoördinaten. Bereken ook in beide coördinatensystemen de componenten van de covariante afgeleide.

4. Een 'grote cirkel' op een bol met straal R is, per definitie, de snijkromme van de bol met een plat vlak door het middelpunt van de bol. Dat is dus een cirkel met straal R.

a) Bewijs dat iedere grote cirkel op een bol een geodeet op die bol is.

Laat nu $\underline{x}(s)$ de booglengte parametrizering zijn van een willekeurig geodeet op de bol $(\underline{x}, \underline{x}) = R^2$ in $\mathbb{R}^3$ zijn.

b) Laat zien dat $\ddot{\underline{x}}(s) = -\frac{1}{R^2}\underline{x}$.

c) Bewijs dat $\underline{x}(s)$ een vlakke kromme voorstelt, dus een grote cirkel weergeeft.
Gebruik hiertoe de formules van Frenet

$$\iota = \rho\underline{n}, \quad \dot{\underline{n}} = -\rho\iota + r\underline{b}, \quad \dot{\underline{b}} = -r\underline{n} \ .$$

5. a) Geef de definitie van het begrip "anti–symmetrische covariante 2-tensor op een vectorruimte V."

   b) Zij $S \subset I\!R^3$ een 2-dimensionaal oppervlak met parametrizering u^1, u^2. Noteer met g_{ij} de componenten van het gebrukelijke fundamentaal tensorveld g op S. Zij det g_{ij} de determinant van de 2×2-matrix $[g_{ij}]$. Laat tenslotte $u^{1'}, u^{2'}$ een tweede parametrizering van S zijn.
   Toon aan dat in elk punt van het oppervlak

$$\sqrt{\mathrm{det} g_{ij}(u^1, u^2)} du^1 \wedge du^2 = \sqrt{\mathrm{det} g_{i'j'}(u^{1'}, u^{2'})} du^{1'} \wedge du^{2'} \; .$$

   c) Bereken de uitwendige afgeleide van de onder 2) genoemde, differentiaalvorm.

Hoofdstuk 4

Manifolds

4.1 Differentieerbare functies

Laat U en V open deelverzamelingen zijn van respectievelijk $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Zij $\mathbf{f}$ een functie van U naar V en $\mathbf{a} \in U$.

Definitie 4.1.1 *De functie* $\mathbf{f}$ *heet* <u>*differentieerbaar*</u> *in* $\mathbf{a}$ *indien er een lineaire afbeelding* $\mathcal{A}$ *van* $\mathbb{R}^n$ *naar* $\mathbb{R}^m$ *bestaat zodanig dat voor* <u>*alle*</u> $\mathbf{h}$ <u>*in een vol*</u>*doend kleine omgeving van* $\mathbf{a}$ *geldt*

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

met

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0} |\mathbf{r}(\mathbf{h})| = 0.$$

Beschouw cartesische coördinaten op $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Zij f^k de k-de componentsfunctie van $\mathbf{f}$ en schrijf $\mathbf{a} = [a^k]$. Zij $A = [A^j_i]$ de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaardbases in $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Beschouw in het bijzonder de componentfunctie f^i en $\mathbf{h} = h\delta^j_i E_j$, dan geldt

$$f^i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f^i(a^1, \cdots, a^{j-1}, a^j + h, a^{j+1}, \cdots, a^n) = f^i(\mathbf{a}) + A^i_j h + o(h),\ h \to 0.$$

Hieruit volgt dat

$$A^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{a}).$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ heet de <u>afgeleide</u> van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$ en de matrix A heet <u>functionaal</u> <u>matrix</u>. Voor $\mathcal{A}$ gebruiken we ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}X}(\mathbf{a})$. Indien $m = n$, dan kan de determinant van A bepaald worden. Deze determinant is dan juist $\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}(\mathbf{a})$, de <u>Jacobi</u> <u>determinant</u> van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$.

Zij K een kromme in U met parameter $t \in (-\alpha, \alpha)$, voor zekere $\alpha > 0$. Dus $K : t \mapsto X(t)$. Laat $\mathbf{a} = X(0)$. De raakvector aan K in het punt $\mathbf{a}$ wordt gegeven door $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)$. Zij L de

beeldkromme in V van K onder $\mathbf{f}$. Dus $L : t \mapsto Y(t) = \mathbf{f}(X(t))$. Noem $\mathbf{b} = Y(0) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. De raakvector aan L in het punt $\mathbf{b}$ wordt gegeven door $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}X}(\mathbf{a})\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0)$.
Indien twee krommen K_1 en K_2 door $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a}$ dezelfde raakvector hebben, dan volgt dat de beeldkrommen L_1 en L_2 van respectievelijk K_1 en K_2 onder $\mathbf{f}$ ook dezelfde raakvector hebben.
Laat drie krommen K_1, K_2 en K_3 door $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a}$ raakvectoren hebben die een optelparallellogram vormen. Er geldt dan dat de raakvectoren van de beeldkrommen L_1, L_2 en L_3 in $\mathbf{a}$ ook een optelparallellogram vormen.

4.2 Manifolds

Zij $\mathcal{M}$ een verzameling.

Definitie 4.2.1 *Een deelverzameling U van $\mathcal{M}$ heet een kaartomgeving van $\mathcal{M}$ indien er een open deelverzameling $\widetilde{U}$ van $\mathbb{R}^n$ bestaat zodanig dat er een afbeelding φ bestaat die U bijectief afbeeldt op $\widetilde{U}$. De open deelverzameling $\widetilde{U}$ van $\mathbb{R}^n$ heet kaart en de afbeelding φ heet kaartafbeelding.*

Definitie 4.2.2 *Laat $\varphi : U \to \widetilde{U}$ en $\psi : V \to \widetilde{V}$ kaartafbeeldingen van $\mathcal{M}$ zijn, waarbij $U \cap V \neq \emptyset$. De afbeeldingen $\varphi \circ \psi^{\leftarrow}$ en $\psi \circ \varphi^{\leftarrow}$ heten verkaartingsafbeeldingen. .*

Merk op dat verkaartingsafbeeldingen alleen betrekking hebben op punten die op meerdere kaarten voorkomen en dat zij open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ afbeelden op open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$.

Definitie 4.2.3 *Een collectie van kaartomgevingen en bijbehorende kaartafbeeldingen $\{U_i, \varphi_i\}$ van $\mathcal{M}$ heet een atlas van $\mathcal{M}$ indien $\mathcal{M} = \bigcup_i U_i$ en indien alle verkaartingsafbeeldingen differentieerbaar zijn in die punten waarin zij gedefinieerd zijn.*

Definitie 4.2.4 *De verzameling $\mathcal{M}$ heet een manifold of variëteit van dimensie n indien $\mathcal{M}$ voorzien is van een atlas waarvan alle kaarten deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$.*

Strict genomen dient aan definitie 4.2.4 het volgende te worden toegevoegd. $\mathcal{M}$ is een topologische Hausdorffruimte die locaal homeomorf is met $\mathbb{R}^n$.

Zij in het vervolg $\mathcal{M}$ een manifold. Laat U en U' kaartomgevingen van $\mathcal{M}$ zijn waarvoor $U \cap U' \neq \emptyset$. Zij voorts $\widetilde{U}$ en $\widetilde{U'}$ de bijbehorende kaarten met kaartafbeeldingen $\varphi : U \to \widetilde{U}$ en $\varphi' : U' \to \widetilde{U}'$. Laat $\widetilde{U}$ en $\widetilde{U'}$ voorzien zijn van de respectievelijke coördinaten u^i en $u^{i'}$ en schrijf voor $X \in U \cap U'$,

$$\varphi(X) = (u^1, \cdots, u^n) \text{ en } \varphi'(X) = (u^{1'}, \cdots, u^{n'}).$$

Er geldt

$$\left(\varphi \circ \varphi'^{\leftarrow}\right)(u^{1'}, \cdots, u^{n'}) = (u^1, \cdots, u^n) \text{ en } \left(\varphi' \circ \varphi^{\leftarrow}\right)(u^1, \cdots, u^n) = (u^{1'}, \cdots, u^{n'}),$$

hetgeen we kortweg schrijven als $u^i = u^i(u^{i'})$ en $u^{i'} = u^{i'}(u^i)$. Daar de verkaartingsafbeeldingen differentieerbaar zijn, kunnen we overgangsmatrices invoeren door

$$A^{i'}_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \text{ en } A^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

Kaartafbeeldingen zijn bijectief en er geldt $\det[A^i_{i'}] \neq 0$ en $\det[A^{i'}_i] \neq 0$. De doorsnede $U \cap U'$ van $\mathcal{M}$ wordt blijkbaar door (minstens) twee kromlijnige coördinaatsystemen geparametriseerd.

In het vervolg zijn U en U' kaartomgevingen van $\mathcal{M}$ met een niet-lege doorsnede $U \cap U'$. De bijbehorende kaarten en kaartafbeeldingen noteren we respectievelijk met $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}'$ en φ, φ'. De open deelverzamelingen $\widetilde{U}$ en $\widetilde{U}'$ zijn voorzien van de coördinaten u^i en $u^{i'}$.

Definitie 4.2.5 *Een* <u>*kromme*</u> *K op $\mathcal{M}$ is een continue injectieve afbeelding van een open interval I naar $\mathcal{M}$.*

Zij K een kromme op $\mathcal{M}$ zodanig dat een deel van de kromme op $U \cap U'$ ligt. Dit gedeelte is een kromme dat zowel op de kaart $\widetilde{U}$ als op de kaart $\widetilde{U}'$ voorkomt als kromme in $\mathbb{R}^n$. Een punt $X(t_0) \in U \cap U'$, voor zekere $t_0 \in I$, is terug te vinden op de beide kaarten $\widetilde{U}$ en $\widetilde{U}'$. Op deze kaarten worden de raakvectoren aan K in $X(t_0)$ gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ X)}{\mathrm{d}t}(t_0) \text{ en } \frac{\mathrm{d}(\varphi' \circ X)}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Laat $K_1 : t \mapsto X(t)$, $t \in I_1$ en $K_2 : \tau \mapsto Y(\tau)$, $\tau \in I_2$ krommen op $\mathcal{M}$ zijn die een punt P gemeenschappelijk hebben in $U \cap U'$, zeg $P = X(t_0) = Y(\tau_0)$, voor zekere $t_0 \in I_1$ en $\tau_0 \in I_2$. Veronderstel dat de raakvectoren aan K_1 en K_2 in P op de kaart $\widetilde{U}$ samenvallen. De raakvectoren aan K_1 en K_2 in P vallen dan ook samen op de kaart $\widetilde{U}'$, omdat bij kaartwisseling deze raakvectoren transformeren met de overgangsmatrix $A^{i'}_i$.

Definitie 4.2.6 *Twee krommen K_1 en K_2 op $\mathcal{M}$ die beide door het punt P gaan heten* <u>*equivalent*</u> *in P, indien de raakvectoren aan K_1 en K_2 in P op een kaart U samenvallen. Uit bovenstaande volgt dat deze definitie kaartonafhankelijk is.*

Definitie 4.2.7 *Zij $P \in \mathcal{M}$. Een klasse van equivalente krommen in P heet een* <u>*raakvector*</u> *in P aan $\mathcal{M}$. De verzameling van alle raakvectoren in P aan $\mathcal{M}$ heet de* <u>*raakruimte*</u> *in P.*

Merk op dat deze raakruimte een vectorruimte van dimensie n is. We noteren raakvectoren door hun beschrijving op de kaarten. Een basis van de raakruimte wordt gevormd door de raakvectoren $\frac{\partial}{\partial u^i}$ in P van de bij de kaart U behorende parameterkrommen. Het verband met de raakvectoren $\frac{\partial}{\partial u^{i'}}$ van de bij de kaart U' behorende parameterkrommen wordt gegeven door

$$\frac{\partial}{\partial u^{i'}} = A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Definitie 4.2.8 *Een functie f op $\mathcal{M}$ is een afbeelding van een deel van $\mathcal{M}$ in de reële getallen.*

Op de kaart U wordt een functie f beschreven door $f\varphi^{\leftarrow} : \varphi(U) \to I\!R$. We noteren ook functies door hun beschrijving op de kaarten.

Definitie 4.2.9 *Twee functies f en g op $\mathcal{M}$ heten equivalent in een punt P als voor hun beschrijvingen $f(u^i)$ en $g(u^i)$ op U geldt*

$$\partial_j f(u_0^i) = \partial_j g(u_0^i),$$

waarbij $\varphi(P) = (u_0^1, \cdots, u_0^n)$.

Bovenstaande definitie is kaartonafhankelijk wegens

$$u^{i'} = u^{i'}(u^i), \;\; \partial_{j'} f = A^j_{j'} \partial_j f.$$

Definitie 4.2.10 *Een covector in P aan het manifold $\mathcal{M}$ is een klasse van in P equivalente functies. De coraakruimte in P is de verzameling der covectoren in P aan $\mathcal{M}$.*

De coraakruimte is een vectorruimte van dimensie n. De covectoren $\mathrm{d}u^i$ in P van de bij de kaart U behorende parameterfuncties u^i vormen een basis voor de coraakruimte. Voor twee kaarten geldt

$$\mathrm{d}u^{i'} = A^{i'}_i \,\mathrm{d}u^i.$$

Voor een functie f en een kromme K in een punt P van $\mathcal{M}$ is $f \circ K$ een afbeelding van een open interval I naar $I\!R$ en er geldt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ K) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(u^i(t)) = \partial_i f \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}.$$

Deze uitdrukking, die kaartonafhankelijk is, heet de richtingsafgeleide in P van de functie f ten opzichte van de kromme K en is conform aan definitie 2.6.2, paragraaf 2.6.1. In de richtingsafgeleide in P herkennen we covectoren als lineaire functies op de raakruimte en de raakvectoren als lineaire functies op de coraakruimte. Raakruimte en coraakruimte in P kunnen daarom als elkaars duale worden beschouwd.

We kunnen raakvectoren in een punt P aan het manifold $\mathcal{M}$ ook als volgt definiëren:

Definitie 4.2.11 *Een raakvector in P is een lineaire afbeelding $\mathcal{D}$ van de verzameling der functies op $\mathcal{M}$, die in P gedefinieerd zijn, in $I\!R$, die voldoet aan*

$$\mathcal{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{D} f + \beta \mathcal{D} g, \;\; \mathcal{D}(fg) = f\mathcal{D}g + g\mathcal{D}f, \tag{4.1}$$

Een raakvector volgens definitie 4.2.7 is inderdaad als zo'n lineaire afbeelding op te vatten. Zij K een kromme en definieer

$$\mathcal{D}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ K,$$

dan voldoet $\mathcal{D}$ aan (4.1), daar voor constante α en β geldt

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i f + \beta \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i g, \quad \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i(fg) = f\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i g + g\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\partial_i f.$$

4.3 Riemannse variëteiten

Zij $\mathcal{M}$ een manifold.

Definitie 4.3.1 *Een tensorveld op $\mathcal{M}$ is een afbeelding die aan elk punt van $\mathcal{M}$ een tensor van de bij dat punt behorende raakruimte toevoegt.*

In elke raakruimte kan een inwendig product ingevoerd worden waarmee tensoralgebra kan worden bedreven. Anders dan bij oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ beschikken we echter in het algemeen niet over een a priori gegeven inwendig product, dat voor alle raakruimten tegelijk kan worden gebruikt. Deze missende 'samenhang' tussen de verschillende raakruimten van een manifold wordt aangevuld in de volgende definitie.

Definitie 4.3.2 *Een Riemannse variëteit is een manifold voorzien van een glad, symmetrisch en positief definiet 2-tensorveld.*

Zij nu $\mathcal{M}$ een Riemannse variëteit. Bij ieder punt $P \in \mathcal{M}$ en ieder tweetal $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P(\mathcal{M})$ hoort een functie $\gamma_P : (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \gamma(P; \mathbf{v}, \mathbf{w})$ zodanig dat γ_P lineair is in $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$, symmetrisch is in $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ en bovendien voldoet aan $\gamma(P; \mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ indien $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Zij U een kaart van $\mathcal{M}$ met bijbehorende kaartafbeelding φ en coördinaten $\{u^i\}$. Laat v^i en w^i de componenten van respectievelijk $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ ten opzichte van deze u^i zijn en schrijf

$$\gamma(P; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j,$$

met $g_{ij} = g_{ji}$ en $[g_{ij}]$ positief definiet. In de raakruimte $T_P(\mathcal{M})$ fungeert γ als fundamentaaltensor. Daarom noemen we het 2-tensorveld dat hoort bij $\mathcal{M}$ het fundamentaaltensorveld.

Bij een gegeven fundamentaaltensorveld kunnen Christoffelsymbolen ingevoerd worden volgens

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}.$$

We noemen krommen die voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\ddot{u}^k + \left\{ \begin{array}{c} k \\ i\ j \end{array} \right\} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

geodetische krommen van de Riemannse variëteit. Net als in het vorige hoofdstuk kan bewezen worden dat de kortste krommen in een Riemannse variëteit geodetische krommen zijn.

Voorbeeld 4.3.3 *Beschouw een mechanisch systeem met n vrijheidsgraden, met gegeneraliseerde coördinaten $q^1, \cdots, q^n$, waarvoor de kinetische energie een positieve definiete kwadratische norm in $\dot{q}^i$ is met van q^i afhangende coëfficiënten*

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

De differentiaalvergelijkingen van de beweging van het systeem zijn de vergelijkingen van Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} = K_k,$$

waarbij $K_k(q^j, t)$ de gegeneraliseerde uitwendige krachten zijn.
De configuratie van het systeem vormen een Riemannse variëteit van dimensie n, waarvoor T als fundamentaaltensor optreedt. De vergelijkingen van Lagrange zijn te schrijven als

$$\ddot{q}^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} \dot{q}^i\dot{q}^j = K^k.$$

Wanneer er geen uitwendige krachten optreden dan doorloopt het systeem een baan, die een geodetische kromme op de Riemannse variëteit is.

Opmerking 4.3.4 *Volgens de definitie van Riemannse variëteiten wordt elke raakruimte voorzien van een positief definiete fundamentaaltensor. Met geringe moeite kunnen resultaten van deze en de volgende paragrafen, met enige correcties, geldig worden gemaakt voor Riemannse variëteiten met een indefiniete fundamentaaltensor. Hierin is elke raakruimte een Minkowskiruimte. Deze opmerking wordt gemaakt in verband met de verderop te geven schets van de algemene relativiteitstheorie.*

4.4 Covariante afgeleiden

Beschouw een Riemannse variëteit $\mathcal{M}$ gevormd door een open deel van $\mathbb{R}^n$ en een kromlijnig coördinaten systeem $\{u^i\}$ op $\mathcal{M}$ als een kaart. Zij $\mathbf{a}$ een constant vectorveld op $\mathcal{M}$. Terwijl $\mathbf{a}$ constant is ten opzichte van de coördinaten u^i van de kaart hangen de componenten a^i van $\mathbf{a}$, ten opzichte van de basis $\partial_i X$ van de betreffende raakruimte, wel af van u^i, omdat de basis $\partial_i X$ afhankelijk is van de u^i. We differentiëren dit constante vectorveld $\mathbf{a}$ langs een kromme K, beschreven door $X(t) = X(u^i(t))$. Schrijf $\mathbf{a} = v^i(t)\partial_i X(t)$ in iedere punt van K. Dan geldt

$$\mathbf{0} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^i\partial_i X\right) = \left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} v^k\right)\partial_i X.$$

Dit brengt ons op het idee om de covariante afgeleide van een vectorveld $\mathbf{w} = w^i\partial_i X$ langs een kromme K te definiëren door

$$\left(\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} w^i\right)\partial_i X = \left(\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} w^k\right)\partial_i X. \tag{4.2}$$

Hier staat een vectorveld langs de kromme K. Dit vectorveld hangt niet af van de coördinaatkeuze, immers

$$\frac{dw^{i'}}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{array}{c} i' \\ j'\,k' \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^{j'}}{\mathrm{d}t} w^{k'} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A^{i'}_i w^i\right) + \left(A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\,k \end{array} \right\} + A^{i'}_s \partial_{j'}\left(A^s_{k'}\right)\right) A^{j'}_p \frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}t} A^{k'}_q w^q =$$

$$= A^{i'}_i \left(\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\,k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} w^k\right) + \partial_h\left(A^{i'}_i\right) \frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}t} w^i + A^{i'}_s \partial_p\left(A^s_{k'}\right) A^{k'}_q \frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}t} w^q.$$

De laatste term hierin is gelijk aan

$$-A^{i'}_s A^s_{k'} \partial_p\left(A^{k'}_q\right) \frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}t} w^q = -\partial_p\left(A^{i'}_q\right) \frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}t} w^q,$$

zodat

$$\frac{\mathrm{d}w^{i'}}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{array}{c} i' \\ j'\,k' \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^{j'}}{\mathrm{d}t} w^{k'} = A^{i'}_i \left(\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\,k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} w^k\right).$$

Zij nu $\mathcal{M}$ een Riemannse variëteit en $\{U, \varphi\}$ een kaart van $\mathcal{M}$ met coördinaten u^i en Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{array}{c} k \\ l\,m \end{array} \right\}$. Zij voorts K een geparametrizeerde kromme op de kaart U en T een $\binom{r}{s}$-tensorveld, dat tenminste in iedere punt van K gedefinieerd is. We willen nu een differentiatie operatie $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}$ langs K invoeren zodanig dat $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}T$ een, op K gedefinieerd, $\binom{r}{s}$-tensorveld is. $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}$ heet de covariante afgeleide langs K.

We beschouwen eerst het geval $r = 1$, $s = 0$. De covariante afgeleide van een raakvectorveld van $\mathcal{M}$ langs K definiëren we door (4.2). Als $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oplevert noemen we $\mathbf{a}$ pseudoparallel langs de kromme K. Uit de theorie der gewone lineaire differentiaalvergelijkingen volgt dat een gegeven raakvector $\mathbf{a}_0$ aan $\mathcal{M}$ aan het begin van de kromme K tot een pseudoparallel vectorveld kan worden voortgezet. Anders gezegd, $\mathbf{a}_0$ kan parallel verplaatst worden langs de kromme K.
Merk op dat geodetische krommen precies die krommen zijn waarvan, met gebruik van de booglengteparametrizering, de raakvectoren pseudoparallel met betrekking tot de kromme zijn. Er geldt

$$\frac{\nabla \dot{u}^k}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\dot{u}^k}{\mathrm{d}s} + \left\{ \begin{array}{c} k \\ i\,j \end{array} \right\} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0.$$

We beschouwen nu het geval $r = 0$, $s = 1$, de covariante afgeleide van een covectorveld (of van de covariante componenten van een vectorveld) langs een kromme K. Zij $\theta_r du^r$ een gegeven covectorveld dat tenminste overal op K gedefinieerd is en $a^r \partial_r X$ een pseudoparallel vectorveld langs K. Dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^r \theta_r\right) &= \frac{\mathrm{d}a^r}{\mathrm{d}t}\theta_r + a^r \frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t} = -\left\{ \begin{array}{c} r \\ j\,k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} a^k \theta_r + a^r \frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t} + \theta_r \frac{\nabla}{\mathrm{d}t} a^r = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}t} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ j\,k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t} \theta_r\right) a^k. \end{aligned}$$

Als we willen dat bij covariant differentiëren de Leibnizregel geldt, dan moeten we definiëren

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\theta_k = \frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}t} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\theta_r, \text{ langs K.} \tag{4.3}$$

Er kan rechtstreeks aangetoond worden dat bij kaartwisseling geldt

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\theta_{k'} = A^k_{k'}\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\theta_k.$$

Op analoge wijze wordt een willekeurig 2-tensorveld φ behandeld. Neem bijvoorbeeld $r = 0$, $s = 2$ en noteer de componenten van φ met φ_{ij}. Kies twee willekeurige pseudoparallelle vectorvelden $\mathbf{a} = a^i\partial_i X$ en $\mathbf{b} = b^j\partial_j X$, langs K en eis weer dat Leibniz geldt, dan

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi_{ij}a^i b^j\right) &= \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t}\varphi_{ij}b^j + \frac{\mathrm{d}b^j}{\mathrm{d}t}\varphi_{ij}a^i + a^i b^j\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}}{\mathrm{d}t} = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_{kl}}{\mathrm{d}t} - \left\{ \begin{array}{c} j \\ m\ k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^m}{\mathrm{d}t}\varphi_{jl} - \left\{ \begin{array}{c} i \\ m\ l \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^m}{\mathrm{d}t}\varphi_{ki}\right) a^k b^l. \end{aligned}$$

We moeten dus definiëren

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\varphi_{kl} = \frac{\mathrm{d}\varphi_{kl}}{\mathrm{d}t} - \left\{ \begin{array}{c} m \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\varphi_{ml} - \left\{ \begin{array}{c} n \\ j\ l \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\varphi_{kn}. \tag{4.4}$$

Bij kaartwisseling blijkt weer te gelden

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\varphi_{k'l'} = A^k_{k'}A^l_{l'}\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\varphi_{kl}.$$

Simili modo wordt het geval $r = 1$, $s = 1$ aangepakt door te contraheren met een pseudoparallel vectorveld en een dito covectorveld. Dit levert

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\varphi^k_l = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^k_l + \left\{ \begin{array}{c} k \\ j\ p \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\varphi^p_l - \left\{ \begin{array}{c} r \\ j\ l \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\varphi^k_r. \tag{4.5}$$

Bij hogere orde tensoren gaat het net zo, covariant differentiëren langs een geparametrizeerde kromme betekent eerst 'gewoon' differentiëren en daarna voor elke index een Christoffelcorrectie toevoegen.

Voor de kromme K kiezen we nu een speciale kromme, namelijk de h-de parameterkromme. Dus $u^j = K^j + \delta^{jh}t$, met K^j constanten. Blijkbaar geldt $t = u^h - K^h$. Met $\frac{\nabla}{dt} = \frac{\nabla}{\partial u^h} = \nabla_h$ vinden we

$$\begin{aligned} \nabla_h w^i &= \partial_h w^i + \left\{ \begin{array}{c} i \\ h\ k \end{array} \right\} w^k, \\ \nabla_h \theta_k &= \partial_h \theta_k - \left\{ \begin{array}{c} r \\ h\ k \end{array} \right\} \theta_r, \\ \nabla_h \varphi_{kl} &= \partial_h \varphi_{kl} - \left\{ \begin{array}{c} r \\ h\ k \end{array} \right\} \varphi_{rl} - \left\{ \begin{array}{c} s \\ h\ l \end{array} \right\} \varphi_{ks}, \\ \nabla_h \varphi^{jk}_i &= \partial_h \varphi^{jk}_i - \left\{ \begin{array}{c} m \\ h\ i \end{array} \right\} \varphi^{jk}_m + \left\{ \begin{array}{c} j \\ h\ m \end{array} \right\} \varphi^{mk}_i + \left\{ \begin{array}{c} k \\ h\ m \end{array} \right\} \varphi^{jm}_i, \\ \nabla_h g_{ij} &= 0, \quad \text{enz, enz.} \end{aligned}$$

Bij kaartwisseling blijkt (ga na!) bijvoorbeeld

$$\nabla_{h'}\varphi_{i'}^{j'k'} = A_{h'}^{h} A_{i'}^{i} A_{j}^{j'} A_{k}^{k'} \nabla_h \varphi_i^{jk}.$$

Covariant differentiëren langs alle parameterkrommen maakt dus van een $\binom{r}{s}$-tensorveld een $\binom{r}{s+1}$-tensorveld op $\mathcal{M}$. Covariant differentiëren wordt meestal in deze laatste betekenis opgevat.

4.5 De kromtetensor

Voor een voldoend gladde functie f van twee variabelen x en y geldt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

De tweede covariante afgeleide van een vectorveld is echter niet symmetrisch. Er geldt

$$\begin{aligned}
\nabla_h \nabla_i v^k &= \partial_h \left(\nabla_i v^k \right) - \left\{ \begin{matrix} m \\ h\,i \end{matrix} \right\} \nabla_m v^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,m \end{matrix} \right\} \nabla_i v^m = \\
&= \partial_h \partial_i v^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\} \partial_h v^j + v^j \partial_h \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ h\,i \end{matrix} \right\} \nabla_m v^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,m \end{matrix} \right\} \partial_i v^m + \\
&\quad + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ i\,j \end{matrix} \right\} v^j.
\end{aligned}$$

Verwissel hierin de rol van h en i en vorm het verschil, dan volgt

$$\nabla_h \nabla_i v^k - \nabla_i \nabla_h v^k = \left(\partial_h \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\} - \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ i\,j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ h\,j \end{matrix} \right\} \right) v^j.$$

Het linkerlid hierin is het verschil van twee $\binom{1}{2}$-tensorvelden en is dus een $\binom{1}{2}$-tensorveld. Omdat v^j de componenten van een vectorveld zijn, vormt de uitdrukking tussen haken in het rechterlid de componenten van een $\binom{1}{3}$-tensorveld.

Definitie 4.5.1 *De kromtetensor van Riemann-Christoffel is een $\binom{1}{3}$-tensorveld, waarvan de componenten gegeven worden door*

$$K_{hij}^{k} = \partial_h \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\} - \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\,m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ i\,j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i\,m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ h\,j \end{matrix} \right\}. \tag{4.6}$$

Er gelden de volgende relaties:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h \right) v^k &= K_{hij}^{k} v^j, \\
\left(\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h \right) w_j &= -K_{hij}^{k} w_k, \\
\left(\nabla_h \nabla_i - \nabla_i \nabla_h \right) \varphi_j^k &= K_{him}^{k} \varphi_j^m - K_{hij}^{m} \varphi_m^k.
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan men dergelijke relaties afleiden voor andere type tensorvelden.

MERK OP: Zij $\mathcal{M}$ een Riemannse variëteit gevormd door een open deel van $I\!R^n$ en beschouw een kromlijnig coördinaten systeem $\{u^i\}$ op $\mathcal{M}$ als kaart. Indien de $\{u^i\}$ cartesische coördinaten zijn, dan zijn alle Christoffelsymbolen gelijk aan nul. Dit betekent dat de componenten van de kromtetensor ook nul zijn. Vanwege het tensoriële gedrag van de kromtetensor volgt direct dat dan ook voor willekeurige cartesische coördinaten de componenten van de kromtetensor gelijk aan nul zijn. Dit zijn juist de compatibiliteitsvergelijkingen uit de elasticiteitstheorie.

TEN SLOTTE: De covariante componenten van de kromtetensor (Riemann-tensor) worden gegeven door

$$K_{kjhi} = g_{km} K^m_{jhi}, \text{ voor } h, i, j, k = 1, 2.$$

Deze componenten voldoen aan de symmetrie eigenschappen

$$K_{kjhi} = -K_{jkhi} = -K_{kjih} = K_{jkih}.$$

Voor een N-dimensionaal oppervlak in $I\!R^{N+1}$ blijkt verband met het 2e fundamentaaltensorveld: $K_{kjhi} = h_{kh} h_{ji} - h_{ki} h_{jh}$.
Als $N = 2$, dan ligt de Riemanntensor blijkbaar vast door één getal. Er geldt dan

$$K_{1212} = -K_{2112} = K_{2121} = -K_{1221} = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = \det[g_{ik}] \det[h^k_i].$$

De laatste determinantfactor in deze uitdrukking heet de Gauss-kromming van het oppervlak. De Gauss-kromming is een product van 2 krommingen en hangt blijkbaar alleen van de $[g_{ij}]$ af en is dus invariant bij isometrische verbuiging van het oppervlak. De Gauss-kromming is nul indien het oppervlak isometrisch is met een vlak. De Gauss-kromming van een cirkelcylinder is dus,blijkbaar, 0.

Door contractie over de componenten i en k van de kromtetensor van Riemann-Christoffel ontstaat een symmetrisch $\binom{0}{2}$-tensorveld, waarvan de componenten gegeven worden door

$$K_{jh} = K^i_{jhi}.$$

Hieruit kan vervolgens een scalar worden afgeleid, gegeven door

$$K = K_{jh} g^{jh}.$$

Met behulp van deze scalar vormen we het Einstein tensorveld,

$$G_{hi} = K_{hi} - \frac{1}{2} K g_{hi}.$$

Dit tensorveld hangt slechts af van de componenten van het fundamentaaltensorveld en speelt een belangrijke rol in de algemene relativiteitstheorie. Het voldoet voorts aan de eigenschappen

$$G_{hi} = G_{ih} \text{ en } \nabla_i G^{hi} = 0.$$

4.6 Opgaven

1. Laat zien dat een pseudoparallel vectorveld langs een geodeet K een constante lengte heeft.

2. Laat zien dat 2 pseudoparallelle vectorvelden $\mathbf{w}_1$ en $\mathbf{w}_2$ langs een geodeet K een constante hoek met elkaar maken.

3. Ga na dat de volgende regel van Leibniz geldt.

$$\nabla_h \left(\varphi^{ij}\psi_{jkl}\right) = \varphi^{ij}\nabla_h\psi_{jkl} + \psi_{jkl}\nabla_h\varphi^{ij}.$$

4. Bereken de covariante afgeleiden van de basisvectoren $\partial_i X$ en duale basisvectoren du^i langs de h-de parameterkromme.

5. Laat zien dat de componenten van de kromtetensor voldoen aan

$$K^k_{hij} + K^k_{jhi} + K^k_{ijh} = 0.$$

6. Laat V een n-dimensionale reële vectorruimte zijn. Laat voorts $\underline{a} \in V$ en $(\underline{c}_1, ..., \underline{c}_n) \subset V$ een basis.
Maak een parametrizering $I\!R^n \to V$ door $\underline{v} = \underline{a} + x^i\underline{c}_i$.

   a) Geef een uitdrukking voor de bijbehorende kaartafbeelding $\varphi : V \to I\!R^n$.

   b) Beschouw een tweede parametrizering van hetzelfde type

   $$\underline{v} = \underline{b} + x^i\underline{d}_i$$

   en noem de bijbehorende kaartafbeelding $\psi : V \to I\!R^n$.

   Geef een uitdrukking voor de verkaartingsafbeeldingen $\varphi \circ \psi^{\leftarrow} : I\!R^n \to I\!R^n$ en $\psi \circ \varphi^{\leftarrow} : I\!R^n \to I\!R^n$.

7. In $I\!R^4$ met coördinaten $\underline{x} = (x, y, \xi, \eta)$, beschouwen we het 2-dimensionale oppervlak S beschreven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \xi^2 + \eta^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dit oppervlak is een torus en een voor de hand liggende parametrizering is

$$\underline{x} = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

met

$$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi\,.$$

   a) Zij $T_{\underline{x}}(S)$ het raakvlak (= raakruimte) aan S in een willekeurig punt $\underline{x}$ op S.
   Bereken de bij de coördinaten u, v, behorende basis $\partial_u\underline{x}, \partial_v\underline{x}$, van $T_{\underline{x}}(S)$.

b) Bereken het fundamentaaltensorveld g_{ij} van $\mathcal{S}$.

c) Bereken de duale (= reciproke) basis du, dv, bij $\partial_u \underline{x}, \partial_v \underline{x}$.
(Opmerking: Via g_{ij} wordt $T_{\underline{x}}(S)$ met zijn duale $T^*_{\underline{x}}(S)$ geïdentificeerd).

d) Bereken de Christoffelsymbolen van S.

e) Hoe luiden de vergelijkingen voor de geodeten op S? Los deze vergelijkingen op.

f) Beschouw de kromme $K : u = t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, v = \frac{\pi}{2}$.
Transporteer de raakvector $(0, -1, 1, 0)$, op $t = 0$, langs de kromme K.

g) Bereken de kromtetensor van $\mathcal{S}$.

h) Wat vindt u verbazingswekkend aan $\mathcal{S}$.

8. In het open bovenhalfvlak $S : -\infty < x < \infty, \;\; y > 0,$ introduceren we het fundamentaaltensorveld

$$\frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) \; .$$

a) Zij $T_{\underline{x}}(S)$ het raakvlak (= raakruimte) aan S in een willekeurig punt $\underline{x} \in S$.
Bereken de lengte van de basisvectoren $\frac{\partial}{\partial x} = \underline{e}_1, \frac{\partial}{\partial y} = \underline{e}_2$ van $T_{\underline{x}}(S)$.
Bereken eveneens de lengte van de duale basisvectoren $dx = \underline{e}^1, \;\; dy = \underline{e}^2$.

b) Bereken de lengte van de kromme $K : x = 0, \;\; y = t, \;\; 0 < a \leq t \leq 1$.
Bereken de Christoffelsymbolen $\left\{ \begin{matrix} & i & \\ j & & k \end{matrix} \right\}$ van S.
(Aanwijzing: als antwoorden komen uitsluitend voor 0 en $\pm \frac{1}{y}$).

c) Geef de vergelijkingen voor de geodeten op S.
Geef voorbeelden van geodeten op S. Daartoe hoeft u de vergelijkingen niet persé op te lossen. U mag uw antwoord ook beredeneren.

d) Beschouw in S de lijn $\ell : x = t, y = 1, 0 \leq t < \infty$.
Transporteer de raakvector $(1, 0)$ op $t = 0$ parallel langs ℓ.

e) Is ℓ een geodeet?

f) Zij $\underline{v}(x, y) = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y}$ een vectorveld op S.
Bereken $\nabla_i v^i$ (= de divergentie) op S.
Opmerking: S is het zogenaamde Poincaréhalfvlak.

Appendix A

Het algemene tensorbegrip

Op de hier veelgehoorde vraag: "Wat is een tensor nou *eigenlijk*?" is een voldoende vaag en tevens voldoende algemeen antwoord het volgende: "Een tensor is een functie T van een aantal vector variabelen die lineair is in elk dezer variabelen afzonderlijk. Voorts hoeft deze functie niet persé reëelwaardig te zijn, ze mag waarden aannemen in een vectorruimte.

Notatie. Gegeven

- k stuks vectorruimten $E_1, E_2, ..., E_k$.
- Een vectorruimte F.

Dan noteren we met

$$L^k(E_1, ..., E_k; F)$$

de verzameling van alle multilineaire functies

$$t : E_1 \times E_2 \times ... \times E_k \to F$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_k) \mapsto t(\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_k) \in F\ .$$

Opmerking. Multilineair betekent dat voor elke ingang, de j-de bijvoorbeeld, geldt

$$t(\underline{u}_1, ..., \alpha\underline{u}_j + \beta\underline{v}_j, ..., \underline{u}_k) = \alpha t(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_j, ..., \underline{u}_k) + \beta t(\underline{u}_1, ..., \underline{v}_j, ..., \underline{u}_k)\ ,$$

voor alle $\underline{u}_j \in E_j$, alle $\underline{v}_j \in E_j$ en alle $\alpha, \beta \in I\!R$.

Opmerking. De vectorruimten E_j, $1 \leq j \leq k$, mogen allemaal verschillend zijn en hoeven niet dezelfde dimensie te hebben.

Opmerking. $L^k(E_1, ..., E_k; F)$ kan op haar beurt tot een vectorruimte gemaakt worden door invoering van optelling en scalaire vermenigvuldiging volgens

$$(\alpha t + \beta\tau)(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k) = \alpha t(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k) + \beta\tau(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k)$$

Hierin zijn $t, \tau \in L^k(E_1, ..., E_k; F)$ en $\alpha, \beta \in I\!R$.

Opgave. Als $\dim\ E_j = n_j$ en $\dim\ F = m$, bereken dan $\dim\ L^k(E_1, ..., E_k; F)$.

Opmerking.

- $L^1(E;F) = L(E;F)$ noteert de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van E naar F.
- $L(E;\mathbb{R}) = E^*$, de duale vectorruimte van E, d.i. de vectorruimte van lineaire functies op E.
- Als $\dim\ E < \infty$ dan $L(E^*;\mathbb{R}) = E^{**} = E$.

Opgave. Laat zien dat $L^k(E_1, \cdots, E_k; F)$, met $\dim\ F < \infty$, 'eigenlijk' hetzelfde is als $L^{k+1}(E_1, \cdots, E_k, F^*; \mathbb{R})$.

Stelling. Er is een natuurlijk isomorfisme

$$L(E_k, L^{k-1}(E_1, ..., E_{k-1}; F)) \simeq L^k(E_1, ..., E_k; F)$$

Bewijs. Neem $\varphi \in L(E_k, L^{k-1}(E_1, ..., E_{k-1}; F))$ en definieer $\widetilde{\varphi} \in L^k(E_1, ..., E_k; F)$ door

$$\widetilde{\varphi}(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_{k-1}, \underline{u}_k) = (\varphi(u_k))(\underline{u}_1, ..., \underline{u}_{k-1}) .$$

De toevoeging $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ is een isomorfisme, d.w.z. een bijectieve lineaire afbeelding. (Je vult, plat gezegd, in $\tilde{\varphi}$ een 'vaste' vector $\underline{u}_k \in E$ in op de k-de positie en je houdt dan een multilineaire functie met $(k-1)$ ingangen over).

Notatie. Als we voor de $E_1, \cdots, E_k$, respectievelijk r copieën van E^* en s copieën van E nemen, $r + s = k$, en bovendien $F = \mathbb{R}$ stellen, dan schrijven we $T^r_s(E)$ in plaats van $L^{r+s}(\overbrace{E^*, \cdots, E^*}^{r \text{ stuks}}, \overbrace{E, \cdots, E}^{s \text{ stuks}}; \mathbb{R})$. De elementen van deze vectorruimte $T^r_s(E)$ heten (gemengde) $(r+s)$-tensoren op E, ze heten contravariant van orde r en covariant van orde s.

Definitie. (Tensorproduct).
Gegeven: $t_1 \in T^{r_1}_{s_1}(E)$, $t_2 \in T^{r_2}_{s_2}(E)$.
Dan wordt het tensorproduct $t_1 \otimes t_2 \in T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(E)$ gedefinieerd door

$$(t_1 \otimes t_2)(\underline{\hat{p}}_1, \cdots, \underline{\hat{p}}_{r_1}, \underline{\hat{q}}_1, \cdots, \underline{\hat{q}}_{r_2}, \underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_{s_1}, \underline{y}_1, \cdots, \underline{y}_{s_2}) =$$

$$t_1(\underline{\hat{p}}_1, \cdots, \underline{\hat{p}}_{r_1}, \underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_{s_1}) \cdot t_2(\underline{\hat{q}}_1, \cdots, \underline{\hat{q}}_{r_2}, \underline{y}_1, \cdots, \underline{y}_{s_2}) ,$$

met $\underline{\hat{p}}_j, \underline{\hat{q}}_j \in E^*$ en $\underline{x}_j, \underline{y}_j \in E$ willekeurig te kiezen.

Opmerking. De productoperatie $\otimes$ is niet–commutatief, associatief en bilineair.

Opmerking. Wegens de eerder genoemde identificaties hebben we

$$T^1_0(E) \simeq E\ , \quad T^0_1(E) = E^*\ ,$$

$$T^0_2(E) \simeq L(E;E^*)\ , \quad T^1_1(E) \simeq L(E;E)\ .$$

Stelling. Als $\dim E = n$ dan heeft $T^r_s(E)$ de structuur van een n^{r+s}-dimensionale reële vectorruimte. Het stelsel

$$\{\underline{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{e}_{i_r} \otimes \underline{\hat{e}}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\hat{e}}^{j_s} \mid 1 \leq i_k \leq n,\ 1 \leq j_k \leq n\}\ ,$$

geassocieerd met een basis $\{\underline{e}_j\} \subset E$, vormt een basis voor $T^r_s(E)$.

Bewijs. We moeten laten zien dat genoemd stelsel lineair onafhankelijk is in $T^r_s(E)$ en tevens $T^r_s(E)$ opspant.
Veronderstel eens dat

$$\alpha^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\,\underline{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\underline{e}_{i_r}\otimes\underline{\hat{e}}^{j_1}\times\cdots\otimes\underline{\hat{e}}^{j_s}=0$$

vul in deze $(r+s)$-tensor respectievelijk alle stelsels $(\underline{\hat{e}}^{k_1},\cdots,\underline{\hat{e}}^{k_r},\underline{e}_{\ell_1},\cdots,\underline{e}_{\ell_s})$, met $1\le k_j\le n$, $1\le\ell_s\le n$, in, dan volgt met $\langle\underline{\hat{e}}^p,\underline{e}_q\rangle=\delta^p_q$ dat alle getallen $\alpha^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ gelijk aan nul moeten zijn. Tenslotte, wat het opspannen betreft, iedere tensor $t\in T^r_s(E)$ kan blijkbaar geschreven worden als

$$t=t(\underline{\hat{e}}^{i_1},\cdots,\underline{\hat{e}}^{i_r},\underline{e}_{j_1},\cdots,\underline{e}_{j_s})\underline{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\underline{e}_{i_r}\otimes\underline{\hat{e}}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\underline{\hat{e}}^{j_s}\ .$$

Opmerking. De getallen $t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(\underline{\hat{e}}^{i_1},\cdots\underline{\hat{e}}^{i_r},\underline{e}_{j_1},\cdots,\underline{e}_{j_s})$ heten de componenten van de tensor t m.b.t. de basis $\{\underline{e}_j\}$. Deze getallen liggen blijkbaar eenduidig vast.

Voorbeeld. De Kronecker–delta is de tensor $\delta\in T^1_1(E)$ die bij de identieke afbeelding $\mathcal{J}\in L(E;E)$ hoort onder het canonieke isomorfisme $T^1_1(E)\simeq L(E;E)$.
D.w.z. $\forall\underline{x}\in E\,\forall\underline{\hat{p}}\in E^*\ \delta(\underline{\hat{p}},\underline{x})=\langle\underline{\hat{p}},\underline{x}\rangle$.
De componenten zijn δ^i_j t.o.v. iedere basis.

Voorbeeld. Een inproduct op E kan opgevat worden als een afbeelding
$i(\underline{x}):T^1_1(E)\to T^1_0(E)$ volgens $(i(\underline{x})t)(\underline{\hat{p}})=t(\underline{\hat{p}},\underline{x})$.

Tenslotte bespreken we nog hoe lineaire afbeeldingen van een vectorruimte E naar een vectorruimte F kunnen worden 'uitgebreid' naar lineaire afbeeldingen tussen de vectorruimten $T^r_s(E)$ en $T^r_s(F)$.

Als $\mathcal{P}\in L(E;F)$ dan ook, puur notationeel, $\mathcal{P}\in L(T^1_0(E),T^1_0(F))$. De 'terugtrekafbeelding' of 'pull–back' $\mathcal{P}_*\in L(F^*,E^*)=L(T^0_1(F),T^0_1(E))$ wordt gedefinieerd door

$$\langle\mathcal{P}_*\underline{\hat{f}},\underline{x}\rangle=\langle\underline{\hat{f}},\mathcal{P}\underline{x}\rangle$$

met $\underline{\hat{f}}\in F^*$ en $\underline{x}\in E$.
Soms is het 'onhandig' dat $\mathcal{P}_*$ de verkeerde kant uitwerkt maar daar kan wat aan gedaan worden als $\mathcal{P}$ een isomorfisme is, dus als $\mathcal{P}^{-1}:F\to E$, bestaat.

Definitie. Laat $\mathcal{P}:E\to F$ een isomorfisme zijn. Dan wordt $\mathcal{P}^r_s:T^r_s(E)\to T^r_s(F)$ gedefinieerd door

$$(\mathcal{P}^r_s(t)(\underline{\hat{q}}_1,\cdots\underline{\hat{q}}_r,\underline{y}_1,\cdots\underline{y}_s)=$$

$$t=(\mathcal{P}_*\underline{\hat{q}}_1,\cdots,\mathcal{P}_*\hat{q}_r,\mathcal{P}^{-1}\underline{y}_1,\cdots,\mathcal{P}^{-1}\underline{y}_s)$$

Opmerking. $\mathcal{P}^0_1=(\mathcal{P}^{-1})_*$ is een 'push–forward', werkt dus dezelfde kant uit als $\mathcal{P}$.

De volgende stelling zegt dat 'het optillen van het isomorfisme $\mathcal{P}$ naar tensorruimten' alle gewenste eigenschappen heeft die je er 'natuurlijk' van verwacht. Chiquer uitgedrukt:
De toevoeging $\mathcal{P}\to\mathcal{P}^r_s$ is een covariante functor.

Stelling. Gegeven: $\mathcal{P}:E\to F$, $Q:F\to G$ zijn isomorfismen.
Dan geldt:

i) $(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})^r_s = \mathcal{P}^r_s \circ \mathcal{Q}^r_s$.

ii) Als $J : E \to E$ de identitieke afbeelding is, dan is $J^r_s : T^r_s(E) \to T^r_s(E)$ eveneens de identieke afbeelding.

iii) $\mathcal{P}^r_s : T^r_s(E) \to T^r_s(F)$ is een isomorfisme en $(\mathcal{P}^r_s)^{-1} = (\mathcal{P}^{-1})^r_s$.

Bewijs. Recht toe recht aan.
Tenslotte, voor indexfetisjisten:

Stelling. Gegeven

- Vectorruimte E met basis $\{\underline{e}_i\}$.
- Vectorruimte F met basis $\{\underline{f}_j\}$.
- Isomorfisme $\mathcal{P} : E \to F$.

Noteer $\mathcal{P}\underline{e}_i = P^j_i \underline{b}_j$ en $(\mathcal{P}^{-1})_* \hat{\underline{e}}^k = Q^k_\ell \hat{\underline{f}}^\ell$. Dan geldt:

- $P^j_i Q^i_k = Q^j_i P^i_k = \delta^j_k$.
- Voor $t \in T^r_s(E)$ met componenten $t^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ m.b.t. $\{\underline{e}_i\}$ geldt:

De componenten van $\mathcal{P}^r_s t \in T^r_s(F)$, m.b.t. $\{\underline{f}_j\}$ worden gegeven door

$$(\mathcal{P}^r_s t)^{k_1 \cdots k_r}_{\ell \cdots \ell_s} = P^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot P^{k_r}_{i_r} \cdot Q^{j_1}_{\ell_1} \cdot \ldots \cdot Q^{j_s}_{\ell_s} \cdot t^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

Opmerking. Ook geldt $\mathcal{P}^{-1} \underline{f}_j = Q^k_j \underline{e}_k$.

Appendix B

De Stokes vergelijkingen in (orthogonale) kromlijnige coördinaten

B.1 Inleiding

In de theorie van incompressibele visceuze Newtonse vloeistof mechanica spelen de Stokes vergelijkingen een belangrijke rol. Deze Stokes vergelijkingen zijn te schrijven als één vectorwaardige tweede orde partiële differentiaalvergelijking,

$$\operatorname{grad} p = \eta \Delta \mathbf{u}, \tag{B.1}$$

met p de druk, $\mathbf{u}$ het snelheidsveld en η de dynamische viscositeit. De Stokes vergelijkingen drukken divergentievrijheid van de spanningstensor uit. Deze spanningstensor, zeg $\mathcal{S}$, is een $\binom{2}{0}$-tensorveld, die vaak geschreven wordt als

$$\mathcal{S} = -p\mathcal{I} + \eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right). \tag{B.2}$$

Het hierin voorkomende $\binom{2}{0}$-tensorveld $\nabla \mathbf{u}$ (vooralsnog niet te verwarren met de covariante afgeleide van $\mathbf{u}$) wordt snelheidsgradiëntveld genoemd. Maar, wat is nu eigenlijk de gradiënt van een vectorveld, en evenzo, wat is de divergentie van een $\binom{2}{0}$-tensorveld ? In de literatuur wordt vaak nogal slordig omgesprongen met deze differentiatie operaties. In deze appendix gaan we de puntjes op de i zetten.

B.2 De spanningstensor en Stokesvgl'n in Cartesische coördinaten

We beschouwen (B.1) en (B.2) op een gebied $\Omega \in I\!R^3$. Laat $\{x^i\}$ Cartesische coördinaten op Ω zijn. Noteer de componenten van $\mathbf{u}$ ten opzichte x^i met u^i. De Stokes vergelijkingen (B.1) worden in de coördinaten x^i gegeven door

$$\delta^{ij} \partial_j p = \eta \partial_j \delta^{kj} \partial_k u^i \tag{B.3}$$

De componenten van de spanningstensor $\mathcal{S}$ ten opzichte van x^i, zeg s^{ij}, worden gegeven door

$$s^{ij} = -p\delta^{ij} + \eta \left(\delta^{ik} \partial_k u^j + \delta^{jk} \partial_k u^i \right). \tag{B.4}$$

In het vervolg beschouwen we het tweede deel van de spanningstensor, de deviatorische spanningstensor $\mathcal{T}$, waarvan de Cartesische componenten gegeven worden door

$$t^{ij} = \eta \left(\delta^{ik} \partial_k u^j + \delta^{jk} \partial_k u^i \right). \tag{B.5}$$

De 'divergentie' van dit tensorveld dient over te gaan in het rechterlid van (B.1). Overigens dient hierbij verondersteld te worden dat η constant is. Er geldt

$$(\Delta \mathbf{u})^j = \Delta u^j = \partial_i \delta^{ik} \partial_k u^j, \tag{B.6}$$

daar de coördinaten Cartesisch zijn. Dit brengt ons tot de volgende interpretatie van de divergentie van (B.5):

$$\eta \partial_i \left(\delta^{ik} \partial_k u^j + \delta^{jk} \partial_k u^i \right) \tag{B.7}$$

Merk op dat het tweede stuk hieruit wegvalt als gevolg van de incompressibiliteit ($\mathrm{div}\, \mathbf{u} = \partial_i u^i = 0$), immers

$$\partial_i \delta^{jk} \partial_k u^i = \delta^{jk} \partial_k \partial_i u^i = 0.$$

B.3 De spanningstensor en Stokesvgl'n in willekeurige coördinaten

Beschouw nu willekeurige coördinaten $\{x^i\}$ op Ω. Voor het gemak schrijven we de componenten van $\mathbf{u}$ weer met u^i en die van $\mathcal{T}$ met t^{ij}. Om tensorieel gedrag van de Stokes vergelijkingen af te dwingen, leidt de uitbreiding van (B.3) naar de willekeurige coördinaten tot

$$g^{ij} \partial_j p = \eta \nabla_k g^{kj} \nabla_j u^i, \tag{B.8}$$

met g^{ij} de componenten van het inverse fundamentaaltensorveld. Voorts wordt de uitbreiding van de componenten van de deviatorische spanningstensor naar willekeurige coördinaten gegeven door

$$t^{ij} = \eta \left(g^{ik} \nabla_k u^j + g^{jk} \nabla_k u^i \right). \tag{B.9}$$

We hebben nu voldoende inspiratie opgedaan om de 'gradiënt' van een vector en de 'divergentie' van een $\binom{2}{0}$-tensorveld te definiëren.

Definitie B.3.1 *Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld en schrijf $\mathbf{a} = a^i \partial_i$. De gradiënt van $\mathbf{a}$, notatie $\mathcal{L}\mathbf{a}$, is een $\binom{2}{0}$-tensorveld, gedefinieerd door*

$$\mathcal{L}\mathbf{a} = l^{ij}(\mathbf{a}) \partial_i \otimes \partial_j, \tag{B.10}$$

met

$$l^{ij}(\mathbf{a}) = g^{ik} \nabla_k a^j. \tag{B.11}$$

Definitie B.3.2 *Zij $\mathcal{B}$ een $\binom{2}{0}$-tensorveld en schrijf $\mathcal{B} = b^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$. De divergentie van $\mathcal{B}$, notatie $\mathcal{D}\mathcal{B}$, is een vectorveld, gedefinieerd door*

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = d^j(\mathcal{B})\partial_j, \tag{B.12}$$

met

$$d^j(\mathcal{B}) = \nabla_i b^{ij}, \;\; j = 1, 2, 3. \tag{B.13}$$

In deze tweede definitie is in (B.13) gecontraheerd over de index i. Men zou een tweede divergentie kunnen definiëren door te contraheren over de index j. Indien $\mathcal{B}$ echter symmetrisch is, doet het er niet toe over welke index gesommeerd wordt.

Met behulp van deze twee definities komen we tot de volgende coördinaatvrije uitdrukking voor de deviatorische spanningstensor.

$$\mathcal{T} = \eta\left(\mathcal{L}\mathbf{u} + (\mathcal{L}\mathbf{u})^T\right).$$

Voorts kunnen de Stokes vergelijkingen voor een niet constant viscositeitsveld coördinaatvrij geschreven worden als

$$\text{grad}\, p = \mathcal{D}\left(\eta\left(\mathcal{L}\mathbf{u} + (\mathcal{L}\mathbf{u})^T\right)\right).$$

Merk bovendien op dat we de divergentie en gradiënt zodanig uitgebreid hebben dat

$$\Delta\mathbf{u} = \mathcal{D}\left(\mathcal{L}\mathbf{u}\right),$$

conform de definitie van de Laplace operator voor een scalarveld φ,

$$\Delta\varphi = \text{div grad}\, \varphi.$$

B.4 De uitgebreide divergentie en gradiënt in orthogonale kromlijnige coördinaten

Opmerking vooraf: In dit laatste gedeelte van deze appendix stellen we de Einstein sommatie conventie buiten werking.

Laat $\{x^i\}$ een orthogonaal coördinaten systeem op $I\!R^3$ zijn. Dit betekent dat in ieder punt $X \in \Omega$ de basis, gevormd door de drie vectoren

$$\mathbf{c}_i = \frac{\partial X}{\partial x^i}, \;\; i = 1, 2, 3,$$

een orthogonale basis is van de raakruimte $T_X(\Omega)$. Er bestaan aldus functies h_i zodanig dat de componenten van het fundamentaaltensorveld g_{ij}, gedefinieerd door

$$g_{ij} = (\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j), \;\; i, j = 1, 2, 3,$$

waarbij met $(\cdot, \cdot)$ het Euclidische inproduct bedoeld wordt, voldoen aan

$$g_{ij} = 0, \;\; i \neq j, \text{ en } g_{ii} = h_i^2.$$

De functies h_i heten schaalfactoren. Definieer voorts in ieder punt $X \in \Omega$ de drie vectoren

$$\mathbf{d}_i = \frac{1}{h_i}\mathbf{c}_i.$$

Het stelsel $\{\mathbf{d}_i\}$ vormt dan in ieder punt van Ω een orthonormale basis van de raakruimte $T_X(\Omega)$ (zie ook hoofdstuk 2).

Alvorens de definities B.3.1 en B.3.2 verder uit te werken voor orthogonale coördinaten, drukken we eerst de Christoffelsymbolen uit in de schaalfactoren.

Lemma B.4.1 *De Christoffelsymbolen, behorende bij de orthogonale coördinaten x^i, kunnen berekend worden met behulp van*

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ i\ j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{B.14}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ j \end{matrix} \right\} = -\frac{h_j}{h_i^2}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}, \quad i,j = 1,2,3,\ i \neq j, \tag{B.15}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad i,j,k = 1,2,3,\ j \neq k,\ i \neq j,\ i \neq k. \tag{B.16}$$

Bewijs:
Daar de coördinaten orthogonaal zijn, geldt voor alle i, j en k,

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2h_i^2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right). \tag{B.17}$$

Indien $k = i$, dan volgt

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2h_i^2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} = \frac{1}{2h_i^2}\frac{\partial h_i^2}{\partial x^j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}.$$

Voorts volgt voor $k = j$ en $j \neq i$ dat

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ j \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2h_i^2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2h_i^2}\frac{\partial h_j^2}{\partial x^i} = -\frac{h_j}{h_i^2}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}.$$

Tenslotte, volgens (B.17) is (B.16) triviaal.

□

B.4.1 De uitgebreide gradiënt

Zij $\mathbf{a}$ een vectorveld en noteer de componenten van $\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{c}_i\}$ met a^i, dus $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{c}_i$. De componenten van $\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{d}_i\}$, die we noteren met A^i, worden gegeven door $A^i = a^i h_i$, $i = 1,2,3$. Er geldt immers

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a^i \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^{3} a^i h_i \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^{3} A^i \mathbf{d}_i.$$

Evenzo kunnen componenten b^{ij} en B^{ij} van een $\binom{2}{0}$- tensorveld $\mathcal{B}$ ten opzichte van respectievelijk $\{\mathbf{c}_i\}$ en $\{\mathbf{d}_i\}$ in elkaar uitgedrukt worden met behulp van de schaalfactoren. Er geldt immers

$$\mathcal{B} = \sum_{i,j=1}^{3} b^{ij}\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j = \sum_{i,j=1}^{3} b^{ij} h^i h^j \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j,$$

zodat

$$B^{ij} = h_i h_j b^{ij}, \;\; i,j = 1,2,3.$$

We wensen nu een uitdrukking voor de componenten $l^{ij}(\mathbf{a})$, zie (B.11), in termen van de componenten A^i en de schaalfactoren. Daartoe werken we eerst de covariante afgeleiden $\nabla_k a^j$ uit. Er geldt

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\; l \end{array} \right\} a^l = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{A^j}{h_j}\right) + \sum_{l=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\; l \end{array} \right\} \frac{A^l}{h_l} =$$

$$= \frac{1}{h_j}\frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{A^j}{h_j^2}\frac{\partial h^j}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\; l \end{array} \right\} \frac{A^l}{h_l},$$

zodat

$$l^{ij}(\mathbf{a}) = \frac{1}{h_i^2}\nabla_i a^j = \frac{1}{h_i^2}\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{A^j}{h_j^2}\frac{\partial h^j}{\partial x^i} + \sum_{l=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} j \\ i\; l \end{array} \right\} \frac{A^l}{h_l}\right)$$

en dus

$$L^{ij}(\mathbf{a}) = \frac{h_j}{h_i}\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{A^j}{h_j^2}\frac{\partial h_j}{\partial x^i} + \sum_{l=1}^{3} \left\{ \begin{array}{c} j \\ i\; l \end{array} \right\} \frac{A^l}{h_l}\right),$$

waarbij $L^{ij}(\mathbf{a})$ de componenten van $\mathcal{L}\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j\}$ voorstellen.

Uitgeschreven:

$$
\begin{aligned}
L^{11}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{A^2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{A^3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}\right),\\
L^{21}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^2} - \frac{A^2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial x^1}\right),\\
L^{31}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial A^1}{\partial h_3} - \frac{A^3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}\right),\\
L^{12}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{A^1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}\right),\\
L^{22}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{A^1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial x^1} + \frac{A^3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3}\right),\\
L^{32}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^3} - \frac{A^3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}\right),\\
L^{13}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^1} - \frac{A^1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}\right),\\
L^{23}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{A^2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3}\right),\\
L^{33}(\mathbf{a}) &= \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^3} + \frac{A^1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial x^1} + \frac{A^2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}\right).
\end{aligned}
$$

Dit kan ook geschreven worden als

$$
L^{ij}(\mathbf{a}) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{A^i}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}\right), \quad i \neq j,\ i,j = 1,2,3, \tag{B.18}
$$

$$
L^{ii}(\mathbf{a}) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{3} \frac{A^j}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}\right), \quad i = 1,2,3. \tag{B.19}
$$

B.4.2 De uitgebreide divergentie

Beschouw een gegeven $\binom{2}{0}$-tensorveld $\mathcal{B}$ met componenten b^{ij} ten opzichte van de basis $\{\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j\}$, dus

$$
\mathcal{B} = \sum_{i,j=1}^{3} b^{ij}\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j.
$$

Noteer voorts de componenten van $\mathcal{B}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j\}$ met B^{ij}, dan geldt de relatie

$$
B^{ij} = h_i h_j b^{ij}, \quad i,j = 1,2,3.
$$

De componenten van $\mathcal{DB}$ ten opzichte van $\{\mathbf{d}_i\}$ noteren we met $D^i(\mathcal{B})$, dus $D^i(\mathcal{B}) = d^i(\mathcal{B})h_i$, $i = 1,2,3$. We wensen een uitdrukking voor $D^i(\mathcal{B})$ in termen van de componenten B^{ij} en de schaalfactoren. Er geldt

$$\sum_{i=1}^{3} \nabla_i b^{ij} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial b^{ij}}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3} \left(\left\{ \begin{matrix} j \\ i\,k \end{matrix} \right\} b^{ik} + \left\{ \begin{matrix} i \\ i\,k \end{matrix} \right\} b^{kj} \right) \right),$$

zodat

$$D^j(\mathcal{B}) = h_j \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{B^{ij}}{h_i h_j} \right) + \sum_{k=1}^{3} \left(\left\{ \begin{matrix} j \\ i\,k \end{matrix} \right\} \frac{B^{ik}}{h_i h_k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ i\,k \end{matrix} \right\} \frac{B^{kj}}{h_k h_j} \right) \right) \right). \tag{B.20}$$

Deze uitdrukking laat zich niet eenvoudig schrijven in termen van de schaalfactoren. Indien men een expliciete uitdrukking wenst voor de $D^j(\mathcal{B})$'s, dan is het verstandig om eerst de Christoffelsymbolen te berekenen met behulp van (B.4.1) en vervolgens deze in te vullen in (B.20). Echter, indien $\mathcal{B}$ symmetrisch is, dan is (B.20) om te schrijven naar een eenvoudige uitdrukking in termen van de componenten B^{ij} en de schaalfactoren.

Stelling B.4.2 *Indien $\mathcal{B}$ symmetrisch is, dus $b^{ij} = b^{ji}$ en ook $B^{ij} = B^{ji}$, dan geldt*

$$\begin{aligned}
D^1(\mathcal{B}) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial h_2 h_3 B^{11}}{\partial x^1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1^2 h_3 B^{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1^2 h_2 B^{13}}{\partial x^3} \right) - \frac{B^{22}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{B^{33}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^1}, \\
D^2(\mathcal{B}) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2^2 h_3 B^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial h_1 h_3 B^{22}}{\partial x^2} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1 h_2^2 B^{23}}{\partial x^3} \right) - \frac{B^{11}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{B^{33}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x^2}, \\
D^3(\mathcal{B}) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2 h_3^2 B^{13}}{\partial x^1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1 h_3^2 B^{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial h_1 h_2 B^{33}}{\partial x^3} \right) - \frac{B^{11}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \frac{B^{22}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Bewijs:
Verificatie. □

Appendix C

Speciale relativiteitstheorie volgens Einstein en Minkowski

I. Speciale relativiteitstheorie volgens Lorentz

Het wereldbeeld van Ptolemaeus (150 v. Chr.) gaat uit van een absoluut begrip van boven en onder (platte aarde) en van absolute tijd. Bij Galilei en Newton (17e eeuw) zijn tijd en ruimte nog absoluut en is de zon het middelpunt van de ruimte. De wetten der mechanica, zoals $k = ma$, zijn dezelfde voor coördinatenstelsels die zich ten opzichte van elkaar met een constante snelheid bewegen, m.a.w. zijn invariant bij Galileitransformaties. Bij beweging langs de x-as luiden deze *Galileitransformaties*

$$x' = x - vt, \quad t' = t \, .$$

De vergelijkingen van Maxwell zijn echter niet invariant bij Galileitransformaties (Lorentz, Poincaré).
De snelheid $c \approx 3.10^8$ m/sec van het licht is eindig (Römer 1675), dezelfde voor alle kleuren, en constant. Maar wat meet een waarnemer die zich t.o.v. een andere waarnemer beweegt met een snelheid v? Worden de lichtgolven, net als de geluidsgolven, gedragen door een absoluut medium, de aether?
Michelson (1881) tracht onze snelheid v ten opzichte van de aether te meten. Is een staaf ℓ gericht volgens v dan is de tijd voor een lichtsignaal heen en weer

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c(1-\beta^2)}$$

waarin $\beta = \frac{v}{c}$. Is ℓ loodrecht op v, dan geldt

$$\frac{1}{4}t_2^2c^2 = \frac{1}{4}t_2^2v^2 + \ell^2, \quad t_2 = \frac{2\ell}{c\sqrt{1-\beta^2}} \, .$$

Michelson mat echter geen verscil tussen t_1 en t_2. Lorentz (1895) verklaarde het negatieve resultaat van het experiment van Michelson met de *Lorentzcontractie*:

> Wanneer een staaf zich ten opzichte van een waarnemer beweegt met een constante snelheid v, gericht volgens v, dan meet die waarnemer een kortere lengte dan wanneer dezelfde staaf zich ten opzichte van de waarnemer in rust bevindt.

Stel een staaf is in rust t.o.v. een waarnemer $\mathcal{O}'$, en in beweging (met een constante snelheid v en gericht volgens v) t.o.v. een waarnemer $\mathcal{O}$. De hypothese van de Lorentzcontractie zegt:
Als $\mathcal{O}'$ meet lengte ℓ_0, dan meet $\mathcal{O}$ lengte $\ell_0\sqrt{1-\beta^2}$.
Een consequentie hiervan is:
Als $\mathcal{O}'$ meet tijdsinterval Δt_0, dan meet $\mathcal{O}$ tijdsinterval $\Delta t_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Inderdaad, een lichtflits die langs de staaf heen en weer loopt duurt $\Delta t_0 = 2\ell_0/c$ seconden volgens $\mathcal{O}'$, en

$$\frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c-v} + \frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c+v} = \frac{2\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta^2)} = \frac{2\ell_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

seconden volgens $\mathcal{O}$.
Een verdere consequentie is het *klokverschil: Gebeurtenissen op verschillende plaatsen, die gelijktijdig zijn voor $\mathcal{O}'$, zijn niet gelijktijdig voor $\mathcal{O}$.*
Inderdaad, beschouw twee lichtflitsen die uitgaan van het midden M van de staaf, één naar het ene uiteinde K en één naar het andere uiteinde L. Volgens $\mathcal{O}'$ komen de lichtflitsen beide ten tijde $\ell_0/2c$ aan, en is er geen tijdverschil. Volgens $\mathcal{O}$ echter is er tijdsverschil van

$$\frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{2(c-v)} - \frac{\ell_0\sqrt{1-\beta^2}}{2(c+v)} = \frac{\ell_0\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

gemeten in $\mathcal{O}$ seconden.
Tenslotte volgt een afleiding van de *Lorentztransformaties*, die voor hetzelfde evenement het verband geven tussen tijd en plaats $[t,x]$ voor de waarnemer $\mathcal{O}$ en tijd en plaats $[t',x']$ voor de waarnemer $\mathcal{O}'$. Daarbij laten wij $[t,x]=[0,0]$ corresponderen met $[t',x']=[0,0]$.
De weg $x-vt$ in het $\mathcal{O}$-stelsel komt overeen met de weg x' in het $\mathcal{O}'$-stelsel. Volgens de Lorentz–contractie geldt

$$x - vt = x'\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{C.1}$$

$\mathcal{O}'$ plaatst voor hem gelijklopende klokken op de plaatsen O en x', en laat deze klokken na t' seconden een lichtflits uitzenden. Op welke tijdstippen neemt $\mathcal{O}$ deze lichtflitsen waar? Het signaal van de klok in $x'=0$ wordt door $\mathcal{O}$ waargenomen na $t'/\sqrt{1-\beta^2}$ seconden. Het signaal van de klok in x' wordt door $\mathcal{O}$ nog $x'\beta/c\sqrt{1-\beta^2}$ seconden later waargenomen, vanwege het klokverschil. Omdat $[t,x]=[0,0]$ correspondeert met $[t',x']=[0,0]$ geldt

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x'\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{C.2}$$

Uit de betrekkingen (1) en (2) volgen de Lorentz–transformaties

$$x' = \frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad ct' = \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

II. Speciale relativiteitstheorie volgens Einstein en Minkowski

Einstein (1905) formuleerde het *principe der speciale relativiteitstheorie*:

> Waarnemers die zich ten opzichte van elkaar met een constante snelheid bewegen zijn gelijkwaardig. Voor zulke waarnemers zijn de natuurwetten gelijkluidend, bij voorbeeld de wet: lichtsnelheid $= c$. Snelheid t.o.v. de aether is principieel niet meetbaar.

Een ten tijde $t = t' = 0$ uit de oorsprong gezonden lichtgolf plant zich voor twee, zich t.o.v. elkaar met een constante snelheid v bewegende, waarnemers op dezelfde wijze bolvormig voort met een snelheid c;

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

Dit inspireerde Minkowski (1908) tot het volgende wiskundige model.
De *Minkowskiruimte* M_4 is een vectorruimte van dimensie 4 over de reële getallen, voorzien van een *indefiniet* inwendig product $(\underline{a}, \underline{b})$. Dit inwendige product is bilineair, en wordt als volgt gedefinieerd door zijn waarden $g_{\alpha\beta} = (\underline{c}_\alpha, \underline{c}_\beta)$ ten opzichte van een zekere basis $\underline{c}_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3,$:

$$[g_{\alpha,\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

De vector $\underline{x} = x^\alpha \underline{c}_\alpha$ heeft de kwadraatlengte

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Vectoren met kwadraatlengte 0 zijn de vectoren op de kegel

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

Wij interpreteren als volgt. De Minkowskiruimte is het *universum*. De basis $\underline{c}_\alpha$ is een *waarnemer*, die plaats x, y, z en tijd t meet volgens

$$x^0 = ct, \;\; x^1 = x, \;\; x^2 = y, \;\; x^3 = z \; .$$

De vectoren met positieve kwadraatlengte (binnen de kegel) zijn de *gebeurtenissen*, die met $x^0 = ct > 0$ de toekomstige, die met $x^0 = ct < 0$ de historische. Gebeurtenissen zijn voor de waarnemer gelijktijdig wanneer zij dezelfde ct-coördinaat hebben. Het verloop van een gebeurtenis in t heet een *wereldlijn* en wordt weergegeven door een kromme in M_4. Een punt $[0, 0, 0, 0]$ dat t.o.v. de waarnemer in rust is heeft als wereldlijn de ct-as. Een punt $[0, 0, 0, 0]$ dat t.o.v. de waarnemer een constante snelheid v heeft, heeft als wereldlijn $x = vt$, een rechte die met de ct-as de hoek φ met $\tan\varphi = \beta = v/c$ maakt. Een lichtsignaal in $(0, 0, 0, 0)$ heeft als wereldlijn een beschrijvende van de kegel

$$ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

die daarom de *lichtkegel* heet.
Wij zoeken nu alle bases $\underline{c}_\alpha$, waarvoor de componenten van de fundamentaaltensor, en dus ook de kwadraatlengte der vectoren $\underline{x}$, net zo eenvoudig is als hierboven, dus waarvoor

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{voor } \alpha = \beta = 0 \\ -1 & \text{voor } \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

Anders gezegd, wij zoeken alle waarnemers waarvoor een lichtgolf zich op dezelfde wijze voortplant als voor de oorspronkelijke waarnemer. Wij beperken ons tot het zoeken van de gevraagde bases $\underline{c}'_\alpha$, waarvoor

$$\underline{c}_{0'} = p\underline{c}_0 + q\underline{c}_1, \;\; \underline{c}_{1'} = r\underline{c}_0 + s\underline{c}_1, \;\; \underline{c}_{2'} = \underline{c}_2, \;\; \underline{c}_{3'} = \underline{c}_3 \;,$$

De gezochte coëfficiënten p, q, r, s moeten nu voldoen aan

$$p^2 - q^2 = 1, \;\; r^2 - s^2 = -1, \;\; pr - qs = 0 \;.$$

Deze vergelijkingen worden opgelost door

$$p = \cosh\varphi, \;\; q = \sinh\varphi, \;\; r = \sinh\varphi, \;\; s = \cosh\varphi \;,$$

dus

$$\underline{c}_{i'} = A^i_{i'}\underline{c}_i \;, \quad \text{met } \left[\; A^i_{i'} \;\right] = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} ,$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i, \quad \text{met } \left[\; A^{i'}_i \;\right] = \left[\; A^i_{i'} \;\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} .$$

Wanneer wij noemen

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \;\; \sinh\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 \le \beta < 1 \;,$$

dan vinden wij weer de Lorentztransformaties

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \;\; x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \;\; x^{2'} = x^2, \;\; x^{3'} = x^3 \;,$$

die het verband aangeven tussen de coördinaten $x^{0'} = ct', \;\; x^{1'} = x'$, t.o.v. waarnemer $\mathcal{O}'$ en de coördinaten $x^0 = ct, \;\; x^1 = x$, t.o.v. waarnemer $\mathcal{O}$.
Wij lichten het bovenstaande toe met behulp van een Euclidische tekening. Hierin zijn $\underline{c}_0$ en $\underline{c}_1$ *getekend* als Euclidische loodrechte eenheidsvectoren. Voorts zijn $\underline{c}_{0'}$ en $\underline{c}_{1'}$ getekend volgens

$$\underline{c}_{0'} = \underline{c}_0 \cosh\varphi + \underline{c}_1 \sinh\varphi, \;\; \underline{c}_{1'} = \underline{c}_0 \sinh\varphi + \underline{c}_1 \cosh\varphi$$

Volgens de Minkowski metriek zijn zowel $\underline{c}_0$ en $\underline{c}_1$ als $\underline{c}_{0'}$ en $\underline{c}_{1'}$ loodrecht. In de Euclidische tekening zijn $\underline{c}_{0'}$ en $\underline{c}_{1'}$ niet loodrecht; hun Euclidische kwadraatlengte is $\cosh^2\varphi + \sinh^2\varphi > 1$, en hun uiteinden liggen op orthogonale hyperbolen wegens $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$. De

Euclidische hoek tussen $\underline{c}_0$ en $\underline{c}_{0'}$ is, evenals die tussen $\underline{c}_1$ en $\underline{c}_{1'}$, gelijk aan arctan β,
Wij noemen de as door $\underline{c}_1$ de x-as, die door $\underline{c}_0$ de ct-as, die door $\underline{c}_{1'}$ de x'-as, die door $\underline{c}_{0'}$ de ct'-as. Een evenement $\underline{e}$ wordt gegeven door de coördinaten $[ct, x]$ en door de coördinaten $[ct', x']$ volgens

$$\underline{e} = ct\underline{c}_0 + x\underline{c}_1 = ct'\underline{c}_0 + x'\underline{c}_1$$

a) De wereldlijn van $\mathcal{O}'$ is $x' = 0$, dus $x - \beta ct = 0$. Voor de snelheid v van $\mathcal{O}'$ t.o.v. $\mathcal{O}$ geldt dus $v = \beta c$. De wereldlijn van $\mathcal{O}$ is $x = 0$, dus $x' + \beta ct = 0$. De snelheid van $\mathcal{O}$ t.o.v. $\mathcal{O}'$ is dus $-\beta v = -v$.

b) De uiteinden van een lijnstuk ℓ_0 langs de x'-as duiden gebeurtenissen aan die voor $\mathcal{O}'$ gelijktijdig zijn. Voor $\mathcal{O}$ zijn die gebeurtenissen echter niet gelijktijdig. Er is een klokverschil dat wordt bepaald uit

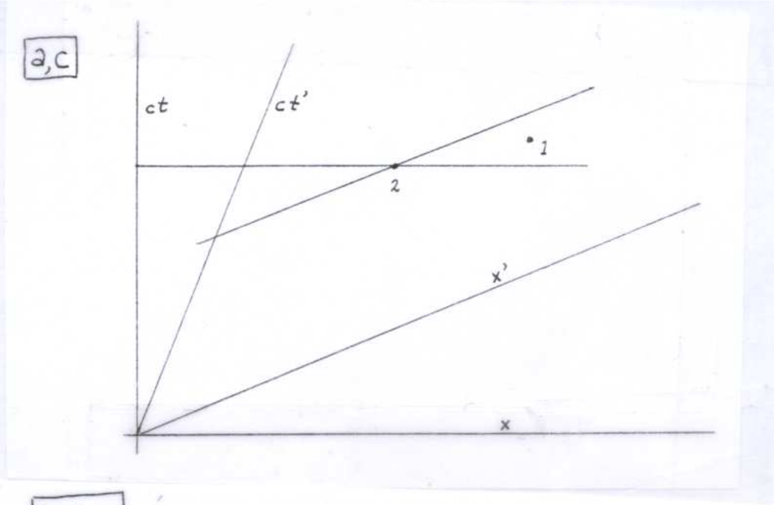
$$x' = \ell_0, \;\; t' = 0, \;\; \text{dus}\; ct = \frac{\beta \ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\;.$$

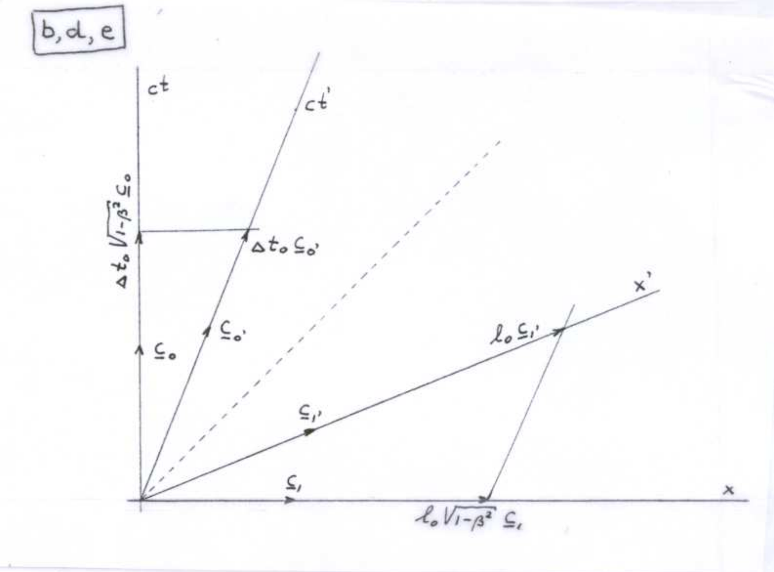
c) Er zijn gebeurtenissen 1 en 2 waarvoor geldt $t_1 > t_2$ en $t'_1 < t'_2$.

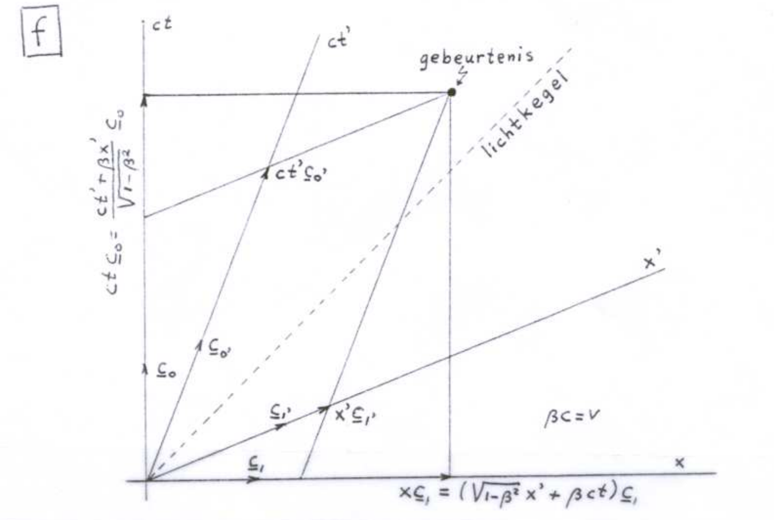
d) De wereldlijn van een zich t.o.v. $\mathcal{O}'$ in rust bevindend punt $[t', x'] = [0, \ell_0]$ is een rechte evenwijdig aan de ct'-as. Snijdt deze rechte met $t = 0$, dan blijkt de door $\mathcal{O}$ waargenomen lengte te zijn $x = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$. Dit is de Lorentzcontractie.

e) Zij Δt_0 een tijdsinterval in het $\mathcal{O}'$-stelsel (langs de ct'-as). In het $\mathcal{O}$ stelsel wordt dit tijdsinterval waargenomen als $\Delta t_0/\sqrt{1-\beta^2}$ (lijn evenwijdig aan de x-as snijden met de ct-as).

f) In de laatste tekenening worden de Lorentztransformaties nogmaals gedemonstreerd:


a,c
ct
ct'
1
2
x'
x


b,d,e
ct
ct'
$\Delta t_0 \sqrt{1-\beta^2}\, \underline{e}_0$
$\Delta t_0\, \underline{e}_{0'}$
$\underline{e}_{0'}$
$\underline{e}_0$
x'
$l_0\, \underline{e}_{1'}$
$\underline{e}_{1'}$
$\underline{e}_1$
x
$l_0 \sqrt{1-\beta^2}\, \underline{e}_1$


f
ct
ct'
gebeurtenis
lichtkegel
$ct\, \underline{e}_0 = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\, \underline{e}_0$
$ct'\, \underline{e}_{0'}$
x'
$\underline{e}_{0'}$
$\underline{e}_0$
$\underline{e}_{1'}$
$x'\, \underline{e}_{1'}$
$\beta c = v$
$\underline{e}_1$
x
$x\, \underline{e}_1 = (\sqrt{1-\beta^2}\, x' + \beta ct)\, \underline{e}_1$

Wanneer twee Lorentztransformaties na elkaar worden uitgevoerd,

$$[ct, x] \xrightarrow{\varphi_1} [ct', x'] \xrightarrow{\varphi_2} [ct'', x''] \,,$$

dan heeft de producttransformatie de matrix

$$\begin{bmatrix} \cosh\varphi_2 & \sinh\varphi_2 \\ \sinh\varphi_2 & \cosh\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi_1 & \sinh\varphi_1 \\ \sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\varphi_1+\varphi_2) & \sinh(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sinh(\varphi_1+\varphi_2) & \cosh(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} .$$

Het product is dus weer een Lorentztransformatie. Daarom vormen de Lorentztransformaties een groep. Met behulp van

$$\cosh\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \,, \quad \cosh\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \,, \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c} \,, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

leiden wij af dat

$$\cosh(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_2^2}{1+\beta_1^2\beta_2^2+2\beta_1\beta_2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} .$$

Voor de bij de producttransformatie behorende β en v volgt dus

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \,, \quad v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} .$$

Dit is de wet volgens welke twee snelheden v_1 en v_2 relativistisch moeten worden gesuperponeerd. Superpositie van twee snelheden $\leq c$ levert nooit een snelheid $> c$ op. Bijvoorbeeld volgt voor

$$v_1 = \frac{1}{2}c \,, \quad v_2 = \frac{1}{2}c \,, \quad \text{dat } v = \frac{4}{5}c \,.$$

Appendix D

Beknopte schets van de algemene relativiteitstheorie

De algemene relativiteitstheorie (ART) is 'slechts' een *op meetkunde gebaseerde gravitatietheorie* en heeft dus weinig van doen met filosoferen over de 'betrekkelijkheid van alle dingen'. We gaan in op enkele aspecten van Einstein's theorie.

I. Ruimte-Tijd als manifold

De ruimte-tijd wordt beschouwd als een 4-dimensionaal manifold M (bijvoorbeeld $S^3 \times \mathbb{R}$), voorzien van een Pseudo-Riemannse metriek van signatuur $(1, -1, -1, -1)$. Hiermee bedoelen we dat op een zekere open omgeving van ieder willekeurig punt $P \in M$ een kaart gemaakt kan worden, zodanig dat in het bewuste punt P de componenten van de fundamentaaltensor gegeven worden door $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. In het algemeen lukt dit niet op de 'volle open omgeving' van P. Als dat wel lukt dan is op dat stuk van de ruimte-tijd de speciale relativiteitstheorie van toepassing. Zie Appendix C.

II. Zwaartekracht als kromming van de Ruimte-Tijd

De componenten g_{ij} van het fundamentaaltensorveld fungeren als 'potentialen' voor de zwaartekracht. Vrijvallende massapunten bewegen zich langs geodeten waarvan de raakvector een *positieve kwadraatlengte* heeft. Noteer de booglengteparametrisering met s. Het tijdsverloop, gemeten met een meegevoerde klok, wordt gegeven door de *eigentijd* $t = \frac{1}{c}s$. Hierin is c de lichtsnelheid.

In elk punt P van een geodeet kan een zodanige orthonormale basis $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in de raakruimte $T_P(M)$ aan het betreffende punt P worden gekozen dat $\mathbf{e}_0$ raakt aan de geodeet en ter plekke geldt $g^{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Zoals gemeld lukt dit in het algemeen niet op een open omgeving van P. In een lichaam met zekere ruimtelijke uitgebreidheid zal elk materiepunt 'graag' zijn eigen geodeet willen volgen. Omdat in een (stuk van een) ruimte met niet-vlakke metriek niet ieder materiepunt zijn eigen geodeet kan volgen zal zo'n lichaam de zogenaamde *getijdenkrachten* ondervinden.

III. Newton als grensgeval van de ART

In de ruimte-tijd beschouwen we een kaartomgeving met daarop een metriek, gegeven door $g_{ij} = H\,\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) = H\eta_{ij}$, met $H(x^0, x^1, x^2, x^3) = 1 + \frac{2\psi}{c^2}$. Dan

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2H}\eta^{kl}\big(\eta_{j\ell}\partial_i + \eta_{\ell i}\partial_j - \eta_{ij}\partial_\ell\big)H \\ &= \frac{1}{2}\big(\delta^k_j\partial_i + \delta^k_i\partial_j - \eta_{ij}\eta^{kl}\partial_\ell\big)\log H \end{aligned}$$

De vergelijkingen voor de geodeten

$$\ddot{x}^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3,$$

worden dan, uitgeschreven voor het onderhavige geval,

$$\begin{cases} \ddot{x}^0 = -\dfrac{1}{H}\dot{x}^0\dot{x}^i(\partial_i H) + \dfrac{\partial_0 H}{2H^2}(H\eta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = \dfrac{\partial_0\psi}{c^2H^2}\big(1 - 2(\dot{x}^0)^2H\big) - \dfrac{2\dot{x}^0}{H}\dfrac{\dot{x}^1\partial_1\psi + \dot{x}^2\partial_2\psi + \dot{x}^3\partial_3\psi}{c^2} \\ \ddot{x}^k = -\dfrac{1}{H}\dot{x}^k\dot{x}^j(\partial_j H) - \dfrac{H\eta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2H^2}\partial_k H = -\dfrac{2}{Hc^2}\dot{x}^k\dot{x}^j(\partial_j\psi) - \dfrac{H\eta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{H^2c^2}\partial_k\psi, \quad 1 \le k \le 3. \end{cases}$$

Veronderstel nu dat ψ niet of nauwelijks van x^0 afhangt, dat $|\psi| << c^2$ en dat voor de begincondities geldt $|\dot{x}^k(0)| = |\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}(0)| << 1$, voor $k = 1,2,3$. Dit houdt in dat $\dot{x}^0(0) \approx 1$. Een en ander betekent 'kleine' energieën en snelheden. Uit de eerste vergelijking volgt, voor s binnen een 'niet al te groot' interval rondom 0, $\ddot{x}(s) \approx 0$, dus $\dot{x}^0(s) \approx$ constant ≈ 1. Dan $x^0(s) \approx x^0(0) + s = x^0(0) + ct$ De tijdsaanduiding van de meegevoerde klok, die door de booglente s bepaald wordt, loopt dan practisch gelijk met de tijdsaanduiding behorende bij de x^0-coordinaat. Met $t = \frac{s}{c}$ luidt de tweede vergelijking

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2}{Hc^2}\dot{x}^k\dot{x}^j(\partial_j\psi) - \frac{H\eta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{H^2}\partial_k\psi, \quad 1 \le k \le 3.$$

Zolang $|\dot{x}^k| << c$, geldt voor de korte termijn, in zeer goede benadering,

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2} + \partial_k\psi = 0, \quad k = 1,2,3.$$

Dit zijn de klassieke Newtonse vergelijkingen voor de beweging van en deeltje in een gravitatiepotentiaal ψ. De Newtonse theorie kan dus, *mathematisch*, als een grensgeval van de Einsteinse ART worden opgevat.
Opmerking: De *physische* interpretatie van de keuze $g_{ij} = H\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ lijkt wat duister......

IV. De Poissonvergelijking als grensgeval van de Einsteinvergelijking

De gravitatiepotentiaal φ in de Newtonse theorie volgt uit de massaverdeling ρ via de *Poissonvergelijking*

$$\Delta\varphi = \kappa\rho.$$

Hierin is de evenredigheidsconstante κ een, experimenteel te bepalen, natuurconstante.
In de ART wordt de Poissonvergelijking vervangen door de *Einsteinvergelijkingen*

$$G_{hi} + \lambda g_{hi} = \theta T_{hi}.$$

Hierin is het rechterlid T de impuls-energietensor die de massa- en energiedichtheid in de ruimte-tijd beschrijft. De evenredigheidsconstante θ ligt vast, en hangt samen met κ, door de eis dat de Poissonvergelijking er als grensgeval uit moet komen. De constante θ hangt dus samen met de klassieke gravitatieconstante. In het linkerlid staat de *Einsteintensor G*, die samenhangt met het krommingstensorveld

$$K^k_{hij} = \partial_h \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} - \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k \\ h\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ i\ j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ h\ j \end{matrix} \right\},$$

van de ruimte-tijd, volgens

$$G_{hi} = K_{hi} - \frac{1}{2} K g_{hi}\,, \quad \text{met} \quad K_{hi} = K^j_{hji} \quad \text{en} \quad K = K_{hi} g^{hi}.$$

Voorts stelt g het fundamentaaltensorveld van de ruimte-tijd voor. De parameter λ is de *cosmologische constante* die door Einstein werd ingevoerd om te verhinderen dat 'zijn' universum zou expanderen.
Merk op dat het linkerlid van de Einsteinvergelijking een buitengewoon gecompliceerde uitdrukking is in g_{hi} , $\partial_k g_{hi}$ en $\partial_k \partial_\ell g_{hi}$. Omdat $\nabla_h T^{ih} = 0$ moet ook $\nabla_h G^{hi} = 0$. Dit beperkte de keuzevrijheid die Einstein had voor het linkerlid van zijn vergelijking in hoge mate. In feite is bovengenoemde keuze met één vrije parameter λ, de enig mogelijke. Het is niet overdreven te stellen dat de differentiaalmeetkunde van de Italiaanse school, uit het laatste kwart van de 19e eeuw, de Einsteinvergelijking mede realiseerde.
We gaan nu heel primitief en brutaal doen. Voor onze (kunstmatige) keuze
$g_{ij} = H\,\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ berekenen we de component G_{00} van de Einsteintensor. Alle niet-lineaire termen in ψ en haar afgeleiden gooien we eruit weg. Met gebruikmaking van de Christoffels van de vorige paragraaf berekenen we

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k\ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \big(\delta^k_j \partial_k + \delta^k_k \partial_j - \eta_{kj} \eta^{kl} \partial_\ell \big) \log H = 2 \partial_j \log H,$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \big(\delta^k_i \partial_i + \delta^k_i \partial_i - \eta_{ii} \eta^{kl} \partial_\ell \big) \log H = \big(\delta^k_i \partial_i - \frac{1}{2} (\eta_{ii} \eta^{kl} \partial_\ell) \big) \log H$$

Met de notatie $\Box$ voor $\eta^{kl} \partial_k \partial_\ell$, de *d'Alembertiaan*, vinden we

$$\partial_j \left\{ \begin{matrix} k \\ k\ j \end{matrix} \right\} = 2 \partial_j \partial_j \log H \qquad \partial_k \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ i \end{matrix} \right\} = \big(\partial_i \partial_i - \frac{1}{2} \eta_{ii} \Box \big) \log H$$

Onder onze veronderstellingen geldt $\log H = \log(1 + \frac{2\psi}{c^2}) \approx \frac{2\psi}{c^2}$. Een en ander leidt, benaderenderwijs, tot

$$K_{ii} \approx \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ k\ i \end{matrix} \right\} - \partial_k \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ i \end{matrix} \right\} = \frac{2}{c^2} \big(\partial_i \partial_i + \frac{1}{2} \eta_{ii} \Box \big) \psi.$$

$$\sum_{i=1}^{4} K_{ii} = \frac{4}{c^2}\big(\partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2 + \partial_3\partial_3\big) = \frac{4}{c^2}\Delta\psi$$

De 00-component van de Einsteintensor

$$G_{hj} = K_{hj} - \frac{1}{2}\big(K_{00} - K_{11} - K_{22} - K_{33}\big)g_{hj},$$

is, onder de genoemde veronderstellingen, bij benadering

$$G_{00} = \frac{1}{2}\big(K_{00} + K_{11} + K_{22} + K_{33}\big) \approx \frac{2}{c^2}\Delta\psi$$

Omdat $T_{00} = \rho c^2$, luidt, voor niet te wilde ψ, de 00-component van de Einsteinvergelijking

$$\frac{2}{c^2}\Delta\psi \approx \theta\rho c^2.$$

Dit IS de Poissonvergelijking! We kunnen nu θ uitdrukken in de klassieke gravitatieconstante

$$\theta = \frac{\kappa}{2c^4}.$$

V. Een exacte oplossing van de Einsteinvergelijking

De Einsteintensor blijkt lineair in $\partial_k\partial_\ell g_{mn}$ te zijn. De coëfficiënten van deze 2e-orde termen in het stelsel Einsteinvergelijkingen hangen echter af van $\partial_k g_{\ell m}$ en $g_{\ell m}$. Het blijkt hier om een quasi-lineair hyperbolisch stelsel te gaan dat, ook theoretisch, erg moeilijk te behandelen is. Gelukkig werd er al spoedig een exacte oplossing gevonden: De Schwarzschild oplossing. Wij zullen hier slechts een bijzonder geval bespreken: Een bolsymmetrische oplossing van de homogene Einsteinvergelijkingen

$$G_{hi} = K_{hi} - \frac{1}{2}K g_{hi} = 0, \quad \text{op} \quad \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}\big).$$

We proberen en oplossing te vinden van de vorm

$$g(\tau, r, \theta, \varphi) = f(r)\,\mathrm{d}\tau \otimes \mathrm{d}\tau - g(r)\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2\,\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta - r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

Hierin is $\tau = ct$. Voorts staan r, θ, φ voor bolcoordinaten voor het ruimtelijke deel $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$. Schrijf $f(r) = e^{u(r)}$, $g(r) = e^{v(r)}$. In componenten staat er dan

$$g_{ij} = \mathrm{diag}\big(e^{u(r)}, -e^{v(r)}, -r^2, -r^2\sin^2\theta\big).$$

Omdat ver weg de Minkowskimetriek geacht wordt te heersen eisen we $u(r) \to 0$ en $v(r) \to 0$ als $r \to \infty$. Via $\left\{\begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}g^{kh}\big(\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij}\big)$ vinden we

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\,1 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}v', && \left\{\begin{matrix} 3 \\ 1\,3 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{r}, && \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\,2 \end{matrix}\right\} = -re^{-v}, \\
&\left\{\begin{matrix} 3 \\ 2\,3 \end{matrix}\right\} = \cot\theta, && \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0\,0 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}e^{u-v}u', && \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\,2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{r}, \\
&\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1\,0 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}u', && \left\{\begin{matrix} 1 \\ 3\,3 \end{matrix}\right\} = -r\sin^2\theta e^{-v}, && \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3\,3 \end{matrix}\right\} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

De overige Christoffels zijn 0.
ANSATZ: Zoek g_{ij} van bovengenoemde vorm die voor $r > 0$ voldoen aan

$$K_{ik} = K^{\ell}_{ik\ell} = -\partial_\ell \begin{Bmatrix} \ell \\ i\,k \end{Bmatrix} + \partial_k \begin{Bmatrix} \ell \\ i\,\ell \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ell \\ i\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} m \\ \ell\,m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m \\ i\,\ell \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \ell \\ k\,m \end{Bmatrix} = 0$$

We vinden dan, na invulling der $\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}$, het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= 0, \quad \text{als } i \neq j,\\
K_{00} &= e^{u-v}\big(-\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{4}u'v' - \tfrac{1}{4}(u')^2 - \tfrac{u'}{r}\big) = 0,\\
K_{11} &= \tfrac{1}{2}u'' - \tfrac{1}{4}u'v' + \tfrac{1}{4}(u')^2 - \tfrac{v'}{r} = 0\\
K_{22} &= e^{-v}\big(1 + \tfrac{1}{2}r(u'-v')\big) - 1 = 0\\
K_{33} &= \sin^2\theta\, e^{-v}\big(1 + \tfrac{1}{2}r(u'-v')\big) - \sin^2\theta = 0
\end{aligned}$$

Uit $K_{00} = 0$ en $K_{11} = 0$ volgt $u' + v' = 0$. Dus $u = -v$ want $u(\infty) = v(\infty) = 0$. Dit ingevuld in $K_{22} = 0$ en $K_{33} = 0$ geeft in beide gevallen $1 + ru' = e^{-u}$ oftewel $f + rf' = 1$. Met de conditie op ∞ leidt dit tot $f(r) = 1 - \frac{2A}{r}$ en $g(r) = (1 - \frac{2A}{r})^{-1}$, met A een willekeurige integratieconstante. Dus voor een stationair bolsymmetrisch gravitatieveld is het bijbehorende fundamentaaltensorveld

$$g = \big(1 - \frac{2A}{r}\big)\,\mathrm{d}\tau \otimes \mathrm{d}\tau - \big(1 - \frac{2A}{r}\big)^{-1}\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2\,\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta - r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

Opmerking: Het gaat mis met de gevonden oplossing als $r = 2A$, de 'Schwarzschildstraal'. Dat ligt aan de coordinaatkeuze. De singulariteit wordt opgeheven door over te gaan op zgn. Kruskal-Szekeres coördinaten. De Schwarzschildoplossing wordt gezien als een model voor een ZWART GAT als de straal daarvan kleiner is dan de Schwarzschildstraal $2A$.

Een massapunt (planeet in het gravitatieveld van de zon bijvoorbeeld) loopt langs een geodeet volgens

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 1.$$

Uitgeschreven

$$\begin{aligned}
&\ddot\tau + \tfrac{1}{f}f'\dot\tau\dot r = 0,\\
&\ddot r - \tfrac{1}{2f}f'\dot r^2 - fr\dot\theta^2 - fr\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}ff'\dot\tau^2 = 0,\\
&\ddot\varphi + \tfrac{2}{r}\dot r\dot\varphi + 2\cot\theta\,\dot\theta\dot\varphi = 0,\\
&\ddot\theta + \tfrac{2}{r}\dot r\dot\theta - \cos\theta\,\sin\theta\,\dot\varphi^2 = 0,\\
&f\dot\tau^2 - \tfrac{1}{f}\dot r^2 - r^2\dot\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 = 1. \qquad \text{(= lengte raakvector)}
\end{aligned}$$

Aan de 4e vergelijking wordt voldaan door $\theta = \text{constant} = \frac{\pi}{2}$. De beweging speelt zich dus af in één plat vlak. De 3e vergelijking zegt dan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r^2\dot\varphi) = 0$. Dus $r^2(s)\dot\varphi(s) = \text{constant} = B$.
De 1e vergelijking zegt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f\dot\tau) = 0$. Dus $f(r(s))\dot\tau = \text{constant} = a$.
Alles invullen in de 2e vergelijking leidt tot

$$\ddot r - \frac{1}{2f}f'\dot r^2 - fr\big(\frac{B}{r^2}\big)^2 + \frac{f}{2}f'\big(\frac{a}{f}\big)^2 = 0.$$

Hier vullen we in $\dot{r}^2 = a^2 - \frac{B^2 f}{r^2} - f$ en $f(r) = 1 - \frac{2A}{r}$. We blijven zitten met

$$\ddot{r} + \frac{A}{r^2} = \frac{B^2}{r^3}\big(1 - \frac{3A}{r}\big). \qquad (*)$$

Dit resultaat vergelijken we nu met de klassieke mechanica. Daar wordt de planetenbeweging beschreven door

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi = -\frac{\alpha m M}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

met α: gravitatieconstante, m: aardmassa, M: zonnemassa. Opsplitsen in componenten levert

$$mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = L = mr^2(0)\dot{\varphi}(0) = \text{impulsmoment} = \text{constant}, \qquad \text{(leidt tot 'perkenwet')}$$
$$\ddot{r} + \frac{\alpha M}{r^2} = \frac{L^2}{m^2 r^3}.$$

Vergelijken met ART, zie (*), voor grote r, leert ons dat $A = \alpha M$, $mB = L$. Klassiek gesproken is de planetenbaan (als de verstoring door de overige planeten verwaarloosd wordt) een kegelsnede met de zon als brandpunt. Zie Inleiding Mechanica. De ART levert blijkbaar een extra term $\frac{3AB^2}{r^4}$ bij de 'Newtonse' potentiaal. Dicht bij de zon leidt dit tot waarneembare effecten als "de perihelionverschuiving van Mercurius". Dit betekent dat de planetenbaan niet meer zuiver periodiek is. De 'omloopellips', als geheel, wentelt langzaam rond zijn brandpunt (de zon). De wisselwerking met de overige planeten leidt ook al tot perihelionverschuiving, maar verklaarde niet het hele waargenomen effect. Naar verluidt verklaart de ART de discrepantie tussen astronomische observatie en berekeningen die op klassieke mechanica berusten.

Appendix E

Kristalroosters en Reciproke Bases. Piëzo-electriciteit.

Kristalroosters en Reciproke Bases

Niet-orthogonale regelmatige kristalroosters in $3D$ kunnen als volgt worden beschreven met reciproke bases. Neem de oorsprong $\mathbf{0}$ ter plekke van een molecuul en neem de basisvectoren $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ langs belangrijke richtingen. In een regelmatig rooster bevinden de moleculen zich in de eindpunten van de vectoren

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{c}_i \;, \qquad x^i \quad \text{gehele getallen.}$$

We introduceren nu het reciproke rooster

$$\mathbf{y} = y_j \mathbf{c}^j \;, \qquad y_j \quad \text{gehele getallen.}$$

Voor een vaste $\mathbf{y}$, dus voor vaste gehelen y_1, y_2, y_3 onderzoeken we $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Wanneer x^1, x^2, x^3 elk alle gehelen doorlopen, dan doorloopt

$$x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

een verzameling Ω van gehele getallen waarvoor geldt

$$\lambda a \in \Omega, \quad a + b \in \Omega, \qquad \text{voor alle } a,\, b \in \Omega \quad \text{en alle gehele } \lambda.$$

Zij nu d het kleinste positieve gehele getal in Ω, dan bestaat Ω precies uit gehele veelvouden van d. Inderdaad, stel eens dat p het kleinste positieve getal is in Ω dat niet veelvoud is van d. Schrijf $p = qd + r$ met $0 < r < d$, dan zou ook $r = p - qd \in \Omega$. Tegenspraak!
De getallen $y_1 \;, y_2 \;, y_3$ behoren tot Ω en zijn dus veelvouden van d. Anderzijds is iedere gemene deler van $y_1 \;, y_2 \;, y_3$ ook deler van alle getallen van Ω, dus deler van d. Wij concluderen:

$$d = \text{GGD}(y_1 \;, y_2 \;, y_3).$$

Wanneer $y_1 \;, y_2 \;, y_3$ nu GGD=1 zouden hebben, dan zou $x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ precies alle gehele getallen doorlopen.

Voor een vaste $\mathbf{y}$ uit het reciproke rooster, waarvoor GGD$(y_1\ , y_2\ , y_3)\ = 1$, stelt de vergelijking

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n, \qquad \text{met } n \text{ geheel},$$

een vlak loodrecht op $\mathbf{y}$ voor. De punten $\mathbf{x}$ van het kristalrooster liggen dus gelaagd in vlakken loodrecht op $\mathbf{y}$. De afstand tussen twee naburige vlakken is $\frac{1}{|\mathbf{y}|}$, omdat de projectie op $\mathbf{y}$ van alle in één vlak liggende roosterpunten $\mathbf{x}$ gelijk is aan

$$|\mathbf{x}| \cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} = \frac{n}{|\mathbf{y}|}.$$

De getallen $y_1\ , y_2\ , y_3$, de zogenaamde *Millerindices* beschrijven dus het gehele kristalrooster. Het voordeel van het werken met het reciproke rooster, liever dan met het kristalrooster, is dat het reciproke rooster te maken heeft met macroscopische vlakken. De rol van het reciproke rooster is bovendien te zien in zekere Fourierontwikkelingen: De eigenschappen van een kristal met een periodieke structuur laten zich voorstellen als periodieke functies

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{x}, \quad \text{voor alle } \mathbf{x} = x^i \mathbf{c}_i, \quad x^i \text{ geheel}, \quad \text{en zekere } \mathbf{h} = h^i \mathbf{c}_i, \quad h^i \text{ geheel}.$$

Zo'n functie is te schrijven als een Fourierreeks

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} e^{2\pi i (n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3)}.$$

Gesommeerd over alle gehele n_1, n_2, n_3. De exponent is door invoering van de vector $\mathbf{y} = n_j \mathbf{c}^j$ te schrijven als

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x^i \mathbf{c}_i\ , n_j \mathbf{c}^j) = x^i n_j \delta_i^j = x^i n_i.$$

Blijkbaar kan de Fourierontwikkeling geschreven worden als

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} A(\mathbf{y}) e^{2\pi i (\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Hierin wordt gesommeerd over alle $\mathbf{y}$ van het reciproke rooster.

Piëzo-electriciteit. Seignettezout

Sommige materialen deformeren onder invloed van een electrisch veld en produceren, omgekeerd, een potentiaalverschil als ze een deformatie ondergaan. Het kristalelement in een goedkope platenspeler werkt volgens dit principe. We zullen zien dat dit 'Piëzo-electrisch effect' NIET op kan treden bij isotrope materialen. Dat het bij anisotrope materialen WEL op kan treden is een fysische meevaller. Wij kijken in eerste instantie naar een materiaal waarin drie onderling loodrechte assen ('hoofdassen') zijn aan te wijzen, zodat bij een rotatie van $180°$ om elk dezer assen het materiaal overgaat in een exacte copie van zichzelf. Een voorbeeld van zo'n materiaal is, naar verluidt, het 'Seignettezout'. Dit bestaat uit orthorombische kristallen (drie onderling loodrechte assen), die in zichzelf overgaan bij rotatie van $180°$ rond een as. We gaan nu na welke gevolgen het bestaan van deze symmetrieën heeft voor de componenten a_{hij} van de 3-tensor a die het lineaire verband tussen de deformatietensor e_{hi} en de electrische veldvector E^h regelt bij het beschrijven van het verschijnsel der Piëzo-electriciteit:

$$e_{hi} = a_{hij} E^j \;, \qquad a_{hij} = a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Op grond van de veronderstelde symmetrie geldt nu

$$a(\mathbf{e}_{h'}, \mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

wanneer de overgang van de orthonormale basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ op $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ een rotatie over π rond een hoofdas is. Onze bewering is nu dat, ten opzichte van elke basiskeuze LANGS HOOFDASSEN alleen componenten a_{hij}, met drie verschillende indices, ongelijk 0 kunnen zijn. Kies $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ langs de hoofdassen van het kristal en draai, bijvoorbeeld, 180° om de z-as. Dan

$$\mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3.$$

Onze symmetrie-eisen leiden tot

$$\begin{aligned} a_{121} &= a(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = a_{1'2'1'} = a(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1) = -a_{121}, \\ a_{111} &= a(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = a_{1'1'1'} = a(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1) = -a_{111}. \end{aligned}$$

Door de indices cyclisch te wisselen zien we dat onze bewering juist is. De enige componenten, mogelijk $\neq 0$, zijn

$$a_{123} \quad a_{213} \quad a_{312} \quad a_{132} \quad a_{231} \quad a_{321} \qquad (*)$$

<u>OPMERKINGEN TUSSENDOOR</u>

• Veronderstel eens even dat het beschouwde materiaal ook nog in zichzelf overgaat onder de draaiing beschreven door

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_1.$$

Dan zou, hetzelfde type redenering volgend,

$$a_{123} = a_{312} = a_{231}, \qquad a_{132} = a_{213} = a_{321}.$$

• We voegen nog een symmetrieveronderstelling toe. Veronderstel dat het beschouwde materiaal ook nog in zichzelf overgaat bij draaiing over 90° om een van de assen. Zo'n draaiing wordt beschreven door

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3.$$

Dan zou, hetzelfde type redenering volgend,

$$a_{123} = a_{312} = a_{231} = -a_{213} = -a_{321} = -a_{132}.$$

Er blijft dan slechts de 1-dimensionale ruimte van antisymmetrische 3-tensoren over.

• We voegen nog een laatste symmetrieveronderstelling toe. Veronderstel dat het beschouwde materiaal ook nog in zichzelf overgaat bij een spiegeling ten opzichte van de oorsprong, beschreven door

$$\mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = -\mathbf{e}_3.$$

Dan zou, hetzelfde type redenering verder volgend,

$$a_{123} = a_{312} = a_{231} = -a_{213} = -a_{321} = -a_{132} = a_{213} = a_{321} = a_{132}.$$

De enige 3-tensor die invariant is onder willekeurige draaispiegelingen is blijkbaar de 3-tensor die gelijk 0 is.

Terug naar het 'Seignettezout'. Merk eerst op dat a_{hij} symmetrisch moet zijn in de beide eerste indices omdat e_{hi} dat is. Samen met (*) vinden we

$$a_{123} = a_{213}, \quad a_{312} = a_{132}, \quad a_{231} = a_{321}.$$

De beschrijving van het Piëzo-electrisch effect voor een stofje met onderhavige symmetrieën wordt blijkbaar door 3 parameters vastgelegd. We hebben

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0, \quad e_{23} = a_{231}E^1, \quad e_{31} = a_{312}E^2, \quad e_{12} = a_{123}E^3.$$

Het spoor van de deformatietensor $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$. Het betreft dus een vormverandering zonder volumeverandering. Er is geen samendrukking. Neem nu, in het bijzonder, het electrisch veld evenwijdig aan de z-as. Dus neem $E^1 = E^2 = 0$ en $E^3 = E$, dan

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad \text{en} \quad e_{12} = a_{123}E = c.$$

Voor de deformatie beschreven door $u_j = x^i e_{ij}$ betekent dit

$$u_1 = cy, \quad u_2 = cx, \quad u_3 = 0,$$

een vierkant in het $x0y$-vlak wordt gedeformeerd in een ruit. Een electrisch veld langs een hoofdas geeft 'torsie' om die as en vice versa.
Bij Seignettezout, anders dan bijvoorbeeld bij kwarts, kan een electrisch veld langs een willekeurige as geen zuivere samendrukking langs die as veroorzaken. Immers, neem die as als x-as, en als dan $u_1 \neq 0, \;\; u_2 = u_3 = 0$ dan moet $e_{11} \neq 0$ en de overige $e_{ij} = 0$ en dit is niet mogelijk omdat het spoor (bij elke orthonormale basis) gelijk 0 moet zijn. Omgekeerd geeft een zo samengedrukt Seignettekristal geen electrisch veld, dus geen Piëzo-electrisch effect. Alleen torsie kan een electrisch veld opleveren.
(Met dank aan Dr. A.A.F. van de Ven voor een aantal onmisbare/subtiele opmerkingen betreffende de deformatietensor.)

Appendix F

Enkele tensoren uit de Continuumsmechanica

I. Rechter Cauchy-Green tensor = Deformatietensor = Rektensor

<u>UITGANGSPUNT:</u>
• Twee vectorruimten: V en W met $\dim V \leq \dim W$. Beide zijn voorzien van een inproduct.
• Een lineaire afbeelding $\mathcal{F} : V \to W$.
Notaties:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ V & \longrightarrow & W \\ \mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \mathcal{K} \\ V^* & \longleftarrow & W^* \\ & \mathcal{F}^* & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (\mathbf{x}, \mathbf{y})_V & = & < \mathcal{G}\mathbf{x}, \mathbf{y} >_V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_W & = & < \mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} >_W \\ < \mathcal{F}^*\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x} >_V & = & < \hat{\mathbf{w}}, \mathcal{F}\mathbf{x} >_W \end{array}$$

<u>GEZOCHT:</u>
• Een lineaire afbeelding $\mathcal{C} : V \to V$, verband houdend met $\mathcal{F}$, en zodanig dat $\mathcal{C} = \mathcal{I}$ als $\mathcal{F}$ een isometrie is.
<u>OPLOSSING:</u> Neem $\mathcal{C} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{F}^*\mathcal{K}\mathcal{F}$. Inderdaad, voor alle $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in V:
$(\mathcal{C}\mathbf{x}, \mathbf{y})_V = (\mathcal{G}^{-1}\mathcal{F}^*\mathcal{K}\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathbf{y})_V =< \mathcal{F}^*\mathcal{K}\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathbf{y} >_V =< \mathcal{K}\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathbf{y} >_W = (\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{y})_W = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_V$.
Het laatste =teken geldt dan en slechts dan als $\mathcal{F}$ een isometrie is.

Definitie De Lagrange deformatietensor $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathcal{C} - \mathcal{I})$.

Deze beschrijft de 'deformatie' die V moet ondergaan bij gedwongen inbedding in W via $\mathcal{F}$. We hebben $\mathcal{E} = 0$ als $\mathcal{F}$ een isometrie is. We schrijven nu $\mathcal{C}$ in indexnotatie én in matrixnotatie. Zij $\{\mathbf{c}_i\}$ een basis in V en $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ een basis in W. Dan vinden we voor de gemengde componenten van $\mathcal{C}$

$$C_\ell^j = g^{ij} F_i^\alpha K_{\alpha\beta} F_\ell^\beta .$$

In matrixnotatie

$$C = G^{-1}F^T K F.$$

Als $\{\mathbf{c}_i\}$ en $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ beide *orthonormale* bases zijn, dan $G = I$, $K = I$, en

$$C = F^T F.$$

Schrijf nu $\mathcal{F} = \mathcal{J} + \mathcal{U}$ met $\mathcal{J}$ een isometrie en $\mathcal{U}$ willekeurig. Voor de Lagrange deformatietensor uitgedrukt in $\mathcal{U}$ vinden we dan

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{-1}\{\mathcal{J}^*\mathcal{K}\mathcal{U} + \mathcal{U}^*\mathcal{K}\mathcal{J} + \mathcal{U}^*\mathcal{K}\mathcal{U}\}.$$

Ten opzichte van orthonormale bases in V en in W

$$E = \frac{1}{2}\{J^T U + U^T J + U^T U\}.$$

Nog specialer: Neem $\dim V = \dim W$ en orthonormale bases zo dat $\mathcal{J}\mathbf{c}_i = \delta_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha$, dan

$$E = \frac{1}{2}\{U + U^T + U^T U\}.$$

Nóg specialer: Neem $V = W$. Noteer $\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathcal{U}\mathbf{x}$, het *verplaatsingsveld*. De componenten van $\mathcal{U}$ kunnen dan geschreven worden, met 'omlaag halen' van de index

$$U_j^i = U_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_{i,j}\,.$$

Tenslotte

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\{u_{i,j} + u_{j,i} + \sum_{k=1}^{3} u_{i,k}u_{k,j}\}.$$

II. De Spanningstensor als 3-tensor en als 2-tensor

UITGANGSPUNT:

• Een vectorruimte V voorzien van een geörienteerd volume μ. Dit is een antisymmetrische $\binom{0}{3}$-tensor. Zie paragraaf 1.11.

Een lineaire spanningstoestand in V beschrijven we, in eerste instantie en ook op de meest 'natuurlijke' wijze, met een 3-tensor $S \in \mathbf{T}_3^0(V)$. De kracht die werkt op een georienteerd parallelogram, opgespannen door de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, wordt dan gegeven door de covector $S(\cdot, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = S(\mathbf{e}_j, \mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\mathbf{e}}^j$. De arbeid die deze kracht zou verrichten bij verplaatsing langs een vector $\mathbf{r}$ wordt gegeven door het getal $< \hat{\mathbf{e}}^j, \mathbf{r} > S(\mathbf{e}_j, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = S(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Merk op dat dan de kracht op een georienteerde driehoek met zijden $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ gegeven wordt door $\frac{1}{2}S(\cdot, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

BEWERING

Ingeval van krachtenevenwicht is $S(\cdot,\cdot,\cdot)$ *antisymmetrisch* in de 2e en 3e variabele.

Inderdaad, voor *ieder* viervlak, beschreven door de vectoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$, moet op grond van de gemaakte aanname gelden

$$\mathbf{0} = S(\cdot,\mathbf{a},\mathbf{b}) + S(\cdot,\mathbf{b},\mathbf{c}) + S(\cdot,\mathbf{c},\mathbf{a}) + S(\cdot,\mathbf{b}-\mathbf{c},\mathbf{a}-\mathbf{c}) = S(\cdot,\mathbf{a},\mathbf{b}) + S(\cdot,\mathbf{b},\mathbf{a}) + S(\cdot,\mathbf{c},\mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

Vervang $\mathbf{a}$ door $-\mathbf{a}$ en trek af. Dan volgt $S(\cdot,\mathbf{a},\mathbf{b}) = -S(\cdot,\mathbf{b},\mathbf{a})$.

VOORBEELD Laat $\mathcal{R} : V \to V$ een willekeurige lineaire afbeelding zijn. De $\binom{0}{3}$ tensor gegeven door $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \mapsto \mu(\mathbf{x},\mathcal{R}\mathbf{y},\mathcal{R}\mathbf{z})$ is een voorbeeld van een spanningstensor.

In de gangbare literatuur wordt de spanningstensor veelal als een lineaire afbeelding of $\binom{1}{1}$-tensor beschouwd. De volgende bewering geeft het verband tussen de beschrijving van een spanningstoestand als 3-tensor en als 2-tensor.

BEWERING
Er bestaat precies één lineaire afbeelding $\mathcal{S} : V \to V$ zodat voor alle voor alle $\mathbf{x} \in V$ en alle $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ geldt

$$\forall \mathbf{x} \in V\, \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V : \quad \mu(\mathcal{S}\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = S(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v})$$

BEWIJS
• Eerst tonen we aan dat er hoogstens één zo'n $\mathcal{S}$ bestaat. Stel eens dat er een tweede bestaat. Noem die $\mathcal{R}$. Dan zou voor alle $\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}$ gelden $\mu((\mathcal{S}-\mathcal{R})\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Veronderstel dat er een $\mathbf{x} \in V$ is met $(\mathcal{S}-\mathcal{R})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Kies vervolgens $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ zo dat $\{(\mathcal{S}-\mathcal{R})\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ een onafhankelijk stelsel is. Dan zou $\mu((\mathcal{S}-\mathcal{R})\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) \neq 0$. Dit is in tegenspraak met de aanname. Dus geldt $(\mathcal{S}-\mathcal{R})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ voor alle $\mathbf{x} \in V$. Dus geldt $\mathcal{S} = \mathcal{R}$.
• Kies een basis $\{\mathbf{e}_i\}$ zodat $\mu(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 1$ en kies voor $\mathbf{x}$ achtereenvolgens de basisvectoren. Schrijf $\mathcal{S}\mathbf{e}_k = S_k^\ell \mathbf{e}_\ell$. De componenten, gegeven door $S_i^1 = S(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, $S_i^2 = S(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)$, $S_i^3 = S(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, definiëren een lineaire afbeelding $\mathcal{S}$ die voldoet. Voor de verificatie hiervan is (gelukkig) de antisymmetrie van S in de laatste 2 variabelen nodig. □

VOORBEELD Als $S = p\mu$, met $p \in \mathbb{R}$, genomen wordt dan is blijkbaar $\mathcal{S} = p\mathcal{I}$: De spanningstoestand is dan een 'alzijdige druk'.

VOORBEELD Als de $\binom{0}{3}$-tensor S zodanig is dat

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V : \quad S(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) + S(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x}) + S(\mathbf{z},\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,$$

dan is het spoor van de lineaire afbeelding $\mathcal{S}$ gelijk 0. Oftewel, de (hydrostatische) druk p is gelijk 0. Dat is het geval bij een 'zuivere afschuiving'.

VOORBEELD Als de $\binom{0}{3}$-tensor S zodanig is dat

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V : \quad S(\mathbf{x},\mathbf{x}\times\mathbf{y},\mathbf{x}) + S(\mathbf{y},\mathbf{x}\times\mathbf{y},\mathbf{y}) = 0,$$

dan heeft $\mathcal{S}$, ten opzichte van een orthonormale basis, een symmetrische matrix. Dit betekent dat de som van de momenten op bovengenoemd viervlak gelijk $\mathbf{0}$ is.

III. Lineaire Elasticiteitstheorie

Als een materiaal gedeformeerd wordt zal het zich daar, in het algemeen, tegen 'verzetten' door een inwendige spanningstoestand 'op te bouwen'. In het kader van de lineaire elasticiteitstheorie wordt het verband tussen rektensor en spanningstensor lineair verondersteld:

De wet van Hooke. De 2-tensoren op V worden, middels een 4-tensor op V, de *Hooke tensor*, lineair afgebeeld op de 2-tensoren op V. In indexnotatie

$$S_{hi} = H_{hijk} E^{jk}.$$

We gaan nu na hoe dit lineaire verband er uit ziet voor *isotrope* elastische media. In dat geval moeten de componenten van de Hooke tensor dezelfde zijn ten opzichte van iedere willekeurige, rechtsdraaiende, orthonormale basis. Onze eerste observatie is dat dan alle componenten waarin tenminste één der indices precies eenmaal voorkomt, gelijk nul zijn. Inderdaad, neem bijvoorbeeld $\mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \; \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \; \mathbf{e}_{3'} = -\mathbf{e}_3$, dan volgt $H_{1233} = H_{1'2'3'3'} = H(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_{3'}) = H(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_3) = -H_{1233}$. Gevolglijk is $H_{1233} = 0$. Merk op dat dit voor H_{1222} ook zo had uitgepakt.
Onze tweede observatie is dat de overige componenten 'in groepjes' gelijk zijn. Inderdaad, bij de 'cyclische' basisovergang $\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_2, \;\; \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_3, \;\; \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_1$ moet, bijvoorbeeld, $H_{1122} = H_{1'1'2'2'} = H(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{2'}) = H(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = H_{2233}$. En, analoog, $H_{1111} = H_{2222} = H_{3333}$ en ook $H_{1212} = H_{2323} = H_{3131}$ en ook nog $H_{1221} = H_{2332} = H_{3113}$. Uit dit type beschouwing volgt dat, als componenten van de Hooke tensor ten opzichte van een orthonormale basis, ten hoogste 4 verschillende getallen een rol kunnen spelen

$$H_{iijj} = \alpha, \;\; H_{ijij} = \beta, \;\; H_{ijji} = \gamma, \;\; H_{iiii} = \eta, \quad \text{voor} \quad i \neq j \;\text{ uit }\; 1,\; 2,\; 3.$$

Nu beschouwen we de basiswisseling
$\mathbf{e}_{1'} = \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = -\sin t \mathbf{e}_1 + \cos t \mathbf{e}_2.$
Uitschrijven van
$H_{1221} = H_{1'2'2'1'} = H(\cos t\mathbf{e}_1 + \sin t\mathbf{e}_2, -\sin t\mathbf{e}_1 + \cos t\mathbf{e}_2, -\sin t\mathbf{e}_1 + \cos t\mathbf{e}_2, \cos t\mathbf{e}_1 + \sin t\mathbf{e}_2)$
leidt tot

$$-\alpha - \beta + \frac{(\sin^4 t + \cos^4 t) - 1}{2\sin^2 t \cos^2 t}\gamma + \eta = 0,$$

voor alle $t \in I\!R$. Conclusie: $\quad \gamma = 0 \;$ en $\; \eta = \alpha + \beta$. Blijkbaar is de vectorruimte van 2-dimensionale isotrope Hooke-tensoren slechts 2-dimensionaal. Ten opzichte van een *orthonormale basis* zijn ze van de vorm

$$H_{hijk} = \alpha \delta_{hi} \delta_{jk} + \beta \delta_{hj} \delta_{ik}.$$

De willekeurig kiesbare constanten α en β hangen samen met de elasticiteitsmodulus en de glijdingsmodulus. Als $\mathcal{E}$ de rektensor voorstelt, dan volgt voor de spanningstensor $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \alpha \;\text{spoor}(\mathcal{E})\mathcal{I} + \beta\, \mathcal{E}.$$

Bedenk dat bij het verifiëren van deze relatie dat *ten opzichte van orthonormale bases bij een positief-definiete metriek*, de co-, contra-, gemengde componenten van tensoren alle dezelfde getallen zijn.

Appendix G

Thermodynamica en Differentiaalvormen

We geven hier een korte wiskundige interpretatie van het gangbare thermodynamica formularium voor *quasistatische* veranderingen in *homogene* systemen. Een standaardverwijzing is

• J. de Boer: Thermodynamica. Hoofstuk 9 in R. Kronig: Leerboek der Natuurkunde. Amsterdam 1962.

Er bestaan heel veel thermodynamicaboeken die volstrekt onleesbaar zijn. Wie zich daarover wil verkneukelen leze de hilarische inleiding in:

• C. Truesdell: Rational Thermodynamics. Springer Berlin 1984.

Onderstaand relaas is als dat van een cultureel anthropoloog die door het observeren van de rituelen van een wilde stam en uit terloopse, soms tegenstrijdige, mededelingen een samenhangend verhaal probeert te schrijven wat in zijn straatje past. Graag kritiek! (JdG)

I. Beschrijving van 'Toestanden' in de Thermodynamica

Wij beschouwen hier homogene fysische systemen die 'energetisch contact' kunnen hebben met de buitenwereld. Een van die energetische contactmogelijkheden moet 'warmtecontact' zijn. In deze eerste paragraaf bespreken we alleen energetische contacten die geen warmtecontacten zijn. Per type energetisch contact zijn, ter beschrijving ervan, twee 'variabelen' nodig, een *arbeidskoppel*. Een arbeidskoppel bestaat uit een *intensiteitsvariabele*, die blijft dezefde als je naar een deelsysteem kijkt, en een *extensiteitsvariabele*, die is kleiner naarmate je naar een kleiner deelsysteem kijkt. Neem bijvoorbeeld een cylinder gevuld met gas en afgesloten door een zuiger. De druk p is dan een intensiteitsparameter en het volume V een extensiteitsparameter. Bij een kleine wijziging van het volume, met ΔV zeg, is de door het gas op de buitenwereld verrichte arbeid ongeveer gelijk aan $p\Delta V$. Andere voorbeelden van arbeidskoppels zijn, in genoemde volgorde, 'mechanisch koppel' en 'hoekverdraaing', 'chemische potentaal' en 'hoeveelheid van zekere stof', 'magnetisch veld' en 'magnetisatie', 'klemspanning' en 'lading' bij een accu.... De meest vooraanstaande intensiteitsvariabele die in geen enkel thermodynamisch systeem ontbreekt,is de *temperatuur*. De hierbij behorende extensiteitsvariabele zal de *entropie* blijken te zijn. Die komt pas aan bod in sectie III. In deze eerste paragraaf zal, vooralsnog, de temperatuur slechts als een 'parameter' optreden.

WISKUNDIG UITGANGSPUNT:

De verzameling van alle mogelijke toestanden $\{\omega\}$ van een homogeen thermodynamisch systeem vormen een $N+1$-dimensionaal ($N = 1,\ 2,\ 3, \cdots$) manifold Ω. Op dit manifold Ω zijn, in eerste aanleg, $2N+1$ functies gedefinieerd, te weten: N stuks intensiteitsvariabelen $X_i\ :\ \Omega \to I\!R,\ \omega \mapsto X_i(\omega),\ 1 \le i \le N$, N stuks extensiteitsvariabelen $Y_i\ :\ \Omega \to I\!R,\ \omega \mapsto Y_i(\omega),\ 1 \le i \le N$, en de temperatuursfunctie $T\ :\ \Omega \to I\!R,\ \omega \mapsto T(\omega)$.
Iedere keuze van $N+1$ functies uit deze $2N+1$ functies kan als kaartafbeelding $\Omega \to I\!R^{N+1}$ fungeren. Een en ander betekent dat de toestand ω vast ligt als je van de $2N+1$ getallen $T\,, X_1\,, Y_1\,, \cdots, X_N\,, Y_N$ er $N+1$ voorschrijft. De overgebleven N getallen liggen dan vast. Aldus worden de overgebleven N variabelen als een functie van de 'uitverkoren' $N+1$ variabelen opgevat.

OPMERKINGEN:

• Het manifold Ω kan 1-1-correspondentie gebracht worden met een $N+1$-dimensionaal oppervlak Ω' in $I\!R^{2N+1}$, beschreven door (een deel van) de oplossingsverzameling van de N vergelijkingen

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(T, X_1, \cdots, X_N\,, Y_1\,, \cdots, Y_N) = 0, \\ \mathcal{F}_2(T, X_1, \cdots, X_N\,, Y_1\,, \cdots, Y_N) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{F}_N(T, X_1, \cdots, X_N\,, Y_1\,, \cdots, Y_N) = 0. \end{cases}$$

Deze vergelijkingen worden *toestandsvergelijkingen* genoemd. De functies $\mathcal{F}_k\ , 1 \le k \le N$ zijn op (een open deel van) $I\!R^{2N+1}$ gedefiniëerd en worden verondersteld voldoende glad te zijn. Ook moet elke $N \times N$ onderdeterminant van de $N \times (2N+1)$-matrix van partiële afgeleiden $\neq 0$ zijn.

• Het is zinnig hier van toestands*vergelijkingen* te spreken omdat in principe, volgens de impliciete functiestelling, elke greep van N variabelen als functie van de overige $N+1$ (locaal) kan worden opgelost. Deze N stuks 'opgeloste' functies van $N+1$ uitverkoren variabelen zou je *toestandsfuncties* kunnen noemen. Deze functies bevatten dezelfde informatie als de toestandsvergelijkingen.

VOORBEELD:

Het ideale gas. Toestandsvergelijking is $pV - RT = 0$. Hierin is R een constante. In dit geval is dus $N = 1$. Het toestandenmanifold Ω is 2-dimensionaal. Het is duidelijk dat elk der variabelen $p\,, V\,, T$ heel expliciet als een functie van de overige 2 kan worden geschreven. Voor niet-ideale gassen zijn deze functies beduidend ingewikkelder. Het *van der Waals gas*, bijvoorbeeld, heeft toestandsvergelijking $\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) - nRT = 0$. Hierin geeft n het aantal 'kilomolen' aan en zijn a en b constanten.

II. De 1e Hoofdwet

Bij elke toestand ω van ons thermodynamisch systeem hoort een bepaalde energie U.
De *functie* $U\ :\ \Omega \to I\!R\ :\ \omega \mapsto U(\omega)$ heet, op z'n fysisch, *calorische toestandsvergelijking*. Deze

functie kan, na keuze van een atlas voor Ω, als een functie van de $N+1$ uitverkoren variabelen worden opgevat. In de volgende paragraaf zal blijken dat we voor de functie U niet zomaar wat kunnen kiezen. De ons door de natuur opgelegde beperkingen zullen aldaar blijken.

OPMERKING:

• Naast de al ingevoerde kaartvariabelen kan ook U als een der (locale) kaartvariabelen gebruikt worden.

De eerste hoofdwet zegt dat de totale toegevoegde 'warmte' aan het systeem gelijk is aan de som van 'de toename van de energie U' en de 'verrichte arbeid'. Stel dat elk der extensiteitsvariabelen (een klein beetje) verandert met, zeg, ΔY_i en dat de energie van het systeem verandert met ΔU, dan geldt voor de toegevoerde warmte ΔQ ongeveer

$$\Delta Q = \Delta U + X_i \Delta Y_i + \cdots X_N \Delta Y_N .$$

WISKUNDIG UITGANGSPUNT:

De balans tussen aan het systeem netto toegevoegde warmte, netto door het systeem op de buitenwereld verrichte arbeid en netto toename van de energie van het systeem wordt beschreven door de differentiaalvorm (= 1-vorm = covectorveld = covariant vectorveld) Θ op het manifold Ω, met

$$\Theta = \mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N .$$

Dit wil zeggen dat bij een proces, beschreven door een geparametriseerde kromme $K : [0,1] \to \Omega : s \mapsto K(s) = \omega(s)$, de netto aan het systeem toegevoegde warmte Q gegeven wordt door

$$\begin{aligned} Q &= \int_K \left\{ \mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N \right\} = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{\mathrm{d}U(\omega(s))}{\mathrm{d}s} + X_1(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_1(\omega(s))}{\mathrm{d}s} + \cdots + X_N(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_N(\omega(s))}{\mathrm{d}s} \right\} \mathrm{d}s = \\ &= U(\omega_1) - U(\omega_0) + \int_0^1 \left\{ X_1(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_1(\omega(s))}{\mathrm{d}s} + \cdots + X_N(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_N(\omega(s))}{\mathrm{d}s} \right\} \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

OPMERKINGEN:

• De differentiaalvorm Θ kan in het algemeen niet geschreven worden als de 'gradient', of liever als de *uitwendige afgeleide*, van een functie op Ω. Dus $\Theta = \mathrm{d}G$, met $G : \Omega \to I\!R$ lukt niet. Nog anders gezegd: Θ is NIET een 'conservatief' covectorveld. In de fysische literatuur wordt dit benadrukt door de đ-notatie te bezigen:

$$đQ = \mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N .$$

Het heet dan dat đQ weliswaar 'infinitesimaal', doch geen 'totale differentiaal' is.

• Blijkbaar speelt bij de formulering van de 1e Hoofdwet het concept *temperatuur* geen enkele rol.

III. De 2e Hoofdwet

De tweede hoofdwet van de thermodynamica stelt dat warmte niet 'vanzelf' van een gebied met lage temperatur naar een gebied met hoge temperatuur stroomt. Zie [Kronig] voor alternatieve formuleringen.

WISKUNDIG UITGANGSPUNT:

Warmte uitwisseling van een thermodynamisch systeem met zijn omgeving wordt beschreven met de intensiteitsvariabele T (de temperatuur) en de, nieuw in te voeren, extensiteitsvariabele S (de entropie). Dus er bestaat een functie $S\ :\ \Omega \to I\!\!R\ :\ \omega \to S(\omega)$, zodat

$$\Theta = T\,\mathrm{d}S \qquad \big(= đQ\big).$$

OPMERKINGEN:

• Ook $S\ :\ \Omega \to I\!\!R\ :\ \omega \to S(\omega)$ is een functie op Ω die als component van een kaartafbeelding kan fungeren.

• De formulering van 1e en 2e hoofdwet gecombineerd luidt

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N.$$

• Het covectorveld $\dfrac{1}{T}\big[\,\mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N\big]$ is conservatief. Onder de stilzwijgende veronderstelling dat Ω enkelvoudig samenhangend is, is dit hetzelfde als de voorwaarde

$$\mathrm{d} \wedge \frac{1}{T}\big[\,\mathrm{d}U + X_1\,\mathrm{d}Y_1 + \cdots + X_N\,\mathrm{d}Y_N\big] = 0.$$

Bij eenmaal gekozen toestandsvergelijkingen betekent het 0 zijn van deze uitwendige afgeleide dat de energiefunctie U niet willekeurig gekozen kan worden.

VOORBEELD:

Neem $N = 1$. Neem voor de kaartvariabelen V en T. We vinden

$$\frac{1}{T}\big(\,\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V\big) = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\,\mathrm{d}T + \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}\,\mathrm{d}V + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}V. \qquad (*)$$

We stellen de uitwendige afgeleide hiervan 0. Dan komt er

$$0 = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}\,\mathrm{d}V \wedge \mathrm{d}T - \frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial V}\,\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}V + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}\,\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}V + \Big(\frac{1}{T}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{p}{T^2}\Big)\,\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}V.$$

Hieruit volgt $\Big(-\dfrac{1}{T^2}\dfrac{\partial U}{\partial V} + \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial p}{\partial T} - \dfrac{p}{T^2}\Big)\,\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}V = 0$. Dus $\dfrac{\partial U}{\partial V} = T\dfrac{\partial p}{\partial T} - p$.

Dit is de *identiteit van Helmholtz*. Beschouw nu het ideale gas, dan $p = \dfrac{RT}{V}$ met R= constant.

Dan blijkt $\dfrac{\partial U}{\partial V} = 0$. Blijkbaar mag, bij een ideaal gas, U alleen een functie van T zijn.

Als U een lineaire functie van T verondersteld wordt, spreekt men wel van een *perfect gas*. Vaak is dit op zekere grote temperatuurintervallen geen slechte benadering omdat de quantummechanica dicteert dat energieopslagmogelijkheden in rotaties en vibraties van moleculen 'abrupt' worden aangesproken. Met $U = CT$ en $pV = RT$ vinden we uit (*) dat $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\ln\big(T^C V^R\big)$. Dit bepaalt de entropiefunctie op een constante na. Die constante kunnen we wegwerken door de entropie bij een referentievolume V_0 en referentietemperatuur

T_0 de entropie gelijk 0 te stellen. Bijkomend voordeel is dat we de logarithme van een 'dimensieloze' grootheid kunnen nemen. Er komt

$$S(V,T) = R\ln\Big[\big(\frac{V}{V_0}\big)\big(\frac{T}{T_0}\big)^{\frac{C}{R}}\Big].$$

In de literatuur wordt C vaak genoteerd als C_V en heet 'soortelijke warmte bij constant volume'.

We gaan het nu, voor het geval $N=1$, nog even hebben over het 'Carnot rendement' bij een kringproces. Dit is de verhouding tussen *toegevoegde* warmte en verrichte arbeid. Uit de 2e hoofdwet zal blijken te volgen dat bij omzetten van warmte in mechanische energie niet alle warmte ten nutte gemaakt kan worden. 'Het koelwater eist zijn deel op'.
Neem $N = 1$ en beschouw een kringproces beschreven door $K : [0,1] \to \Omega : s \mapsto K(s) = \omega(s)$, met $K(0) = K(1)$ en met K voldoende glad en zonder zelfdoorsnijdingen. Dan $\int_K T\,\mathrm{d}S = \int_K\{\,\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V\} = \int_K p\,\mathrm{d}V$. De laatste integraal geeft de (door het gas in de cylinder) verrichte arbeid. De eerste integraal geeft de netto toegevoegde warmte
(= aangevoerde warmte *minus* afgevoerde warmte). De eerste integraal gaan we beschouwen op de kaart gegeven door de functies S en T. Physici noemen die kaart 'ST-diagram'. Het doorlopen proces wordt dan beschreven door de kromme $s \mapsto (\ S(s), T(s)\ )$ op deze kaart. Om niet in ingewikkelde topologische beschouwingen verzeild te raken veronderstellen we, puur uit luiheid, dat de kromme K bestaat uit twee stukken grafiek $S \mapsto T_{\text{onder}}(S)$ en $S \mapsto T_{\text{boven}}(S)$ en, eventueel, een of twee verticale lijnstukken. Breng in het ST-vlak een rechthoek met hoekpunten $(S_1\,,T_1),\ (S_2\,,T_1),\ (S_2\,,T_2),\ (S_1\,,T_2)$ aan die, zo krap mogelijk, om de kromme past. Leg de omloopszin vast door aan te nemen dat op of nabij de plek(ken) waar K, ter hoogte T_2, de rechthoekszijde beroert, geldt $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} \geq 0$. De laatstgenoemde integralen zijn dan gelijk aan de oppervlakte ingesloten door K. Voor onze eenvoudige kromme kan deze oppervlakte geschreven worden als

$$\int_K p\,\mathrm{d}V = \int_{S_1}^{S_2} \{T_{\text{boven}}(S) - T_{\text{onder}}(S)\}\,\mathrm{d}S.$$

Het Carnot rendement van dit proces is dan

$$\frac{\int_K p\,\mathrm{d}V}{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{boven}}(S)\}\,\mathrm{d}S} = 1 - \frac{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{onder}}(S)\}\,\mathrm{d}S}{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{boven}}(S)\}\,\mathrm{d}S} \leq 1 - \frac{T_1(S_2-S_1)}{T_2(S_2-S_1)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Het zijn dus de uiterste temperaturen die het maximaal mogelijke rendement bepalen. Het gelijkteken (maximaal rendement) wordt bereikt door voor de kromme K de rechthoek te kiezen.

<u>OPMERKINGEN:</u>

• Het maximaal haalbare rendement hangt blijkbaar op geen enkele manier van de materiaaleigenschappen af.

• Als we dit proces in omgekeerde richting laten verlopen dan wordt aan het lage temperatuurgebied warmte onttrokken en wordt bij het hogere temperatuurgebied warmte afgevoerd. Dit lukt blijkbaar alleen door mechanische arbeid te verrichten die dan in warmte wordt omgezet en samen met de beneden onttrokken warmte boven wordt afgevoerd. Koelkast! In het geval van het rechthoekige kringproces berekenen we hoeveel arbeid er moet worden geleverd om warmte omhoog te 'pompen':

$$\frac{\int_K p\,\mathrm{d}V}{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{onder}}(S)\}\,\mathrm{d}S} = \frac{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{boven}}(S)\}\,\mathrm{d}S}{\int_{S_1}^{S_2}\{T_{\text{onder}}(S)\}\,\mathrm{d}S} - 1 = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$

IV. Karakteristieke functies en Thermodynamische potentialen

We zullen laten zien dat de collectie van toestandsfuncties aan zekere (zware) eisen moeten voldoen om in een homogeen thermodynamisch systeem als zodanig te kunnen fungeren. Uiteindelijk zal blijken dat het hele systeem kan worden beschreven met (de afgeleiden van) één enkele functie van, geschikt gekozen, variabelen. Functies waarvoor dit lukt heten *karakteristieke functies*, eigenlijk liever *karakteriserende functies*.

WISKUNDIGE UITGANGSPUNTEN:

• Ω is enkelvoudig samenhangend.

• Iedere geordende keuze van $N+1$ stuks functies uit de $2N+2$ stuks toestandsfuncties

$$\begin{cases} T \;:\; \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto T(\omega), \\ S \;:\; \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto S(\omega), \\ X_i \;:\; \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X_i(\omega),\ 1 \le i \le N, \\ Y_i \;:\; \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto Y_i(\omega),\ 1 \le i \le N, \end{cases}$$

kan fungeren als een kaartafbeelding $\Omega \to \mathbb{R}^{N+1}$. (Eventueel op een open deel van Ω.) De toestand van het systeem ligt dan vast door de $N+1$ uitverkoren grootheden getalwaarden te geven. Dat wil zeggen: een punt aanwijzen in het diagram van uitverkoren variabelen. 'Diagram' wil zeggen: Copie van $\mathbb{R}^{N+1}$ met de namen van de uitverkoren variabelen langs de assen.

• De voorafgaande veronderstelling betekent, ondermeer, dat ter plekke $\omega \in \Omega$ elke geordende keuze van $N+1$ stuks uit de covectoren

$$\mathrm{d}T(\omega),\ \mathrm{d}S(\omega),\ \mathrm{d}X_1(\omega), \cdots, \mathrm{d}X_N(\omega),\ \mathrm{d}Y_1(\omega), \cdots, \mathrm{d}Y_N(\omega),$$

een basis vormt voor de coraakruimte ter plekke ω.

• De *aard* van het systeem ligt vast door de overgebleven $N+1$ variabelen te beschrijven als functies van de uitverkoren $N+1$ variabelen, de 'toestandsfuncties'. Door de 'verkaartingsafbeelding' dus.

De volgende stelling legt voorwaarden op aan de verkaartingsafbeelding.

STELLING

Het stelsel van $2N+2$ functies $(T,\,S)$, $(X_1\,,Y_1), \cdots, (X_N\,,Y_N)$ op Ω is precies dan compatibel met de 1e en 2e hoofdwet als geldt

$$\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}S - \mathrm{d}X_1 \wedge \mathrm{d}Y_1 - \cdots - \mathrm{d}X_N \wedge \mathrm{d}Y_N \;=\; 0. \qquad (\dagger)$$

BEWIJS
We laten zien dat (†) equivalent is met de combinatie van 1e en 2e hoofdwet.
• Enerzijds volgt uit

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - X_1\,\mathrm{d}Y_1 - \cdots - X_N\,\mathrm{d}Y_N.$$

de relatie (†) door het nemen van de uitwendige afgeleide $\mathrm{d}\wedge$.
• Anderzijds kan (†) geschreven worden als

$$\mathrm{d}\wedge\big(T\,\mathrm{d}S - X_1\,\mathrm{d}Y_1 - \cdots - X_N\,\mathrm{d}Y_N\big) = 0.$$

De 1-vorm tussen $\big(\,\cdot\,\big)$ is blijkbaar gesloten. Dus ook exact omdat Ω enkelvoudig samenhangend verondersteld is. Er bestaat dan een 'potentiaal' U, op een additieve constante na bepaald, zodanig dat $\big(\,\cdot\,\big) = \mathrm{d}U$. Je kunt U zelfs construeren via de integraal

$$U(\omega)-U(\omega_0) = \int_0^1 \big\{T(\omega(s))\frac{\mathrm{d}S(\omega(s))}{\mathrm{d}s} - X_1(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_1(\omega(s))}{\mathrm{d}s} - \cdots - X_N(\omega(s))\frac{\mathrm{d}Y_N(\omega(s))}{\mathrm{d}s}\big\}\,\mathrm{d}s.$$

De integraal heeft voor elke verbindingskromme tussen het vaste punt ω_0 en het punt ω dezelfde waarde.

□

VOORBEELDEN:
• Neem $N = 1$. De 4 toestandsfuncties op Ω noteren we met $T,\ S,\ p,\ V$. Stel dat we, ter beschrijving van een thermodynamisch systeem, T en S beide als functie van p en V willen geven. De identiteit (†) geeft dan de voorwaarden aan waar deze functies aan moeten voldoen. Uitgeschreven: $\mathrm{d}T\wedge\mathrm{d}S = \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}V$ wordt

$$\big(\frac{\partial T}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial T}{\partial V}\,\mathrm{d}V\big)\wedge\big(\frac{\partial S}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial S}{\partial V}\,\mathrm{d}V\big) \;=\; \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}V.$$

Hieruit volgt de voorwaarde

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial p} = 1.$$

Als je een van de functies, bijvoorbeeld $(p;V)\mapsto T(p,V)$, willekeurig kiest, dan houd je een 1e orde partiële differentiaalvergelijking over waar de andere functie aan moet voldoen.

De inventarisatie wordt wat eenvoudiger als je twee onafhankelijke variabelen kiest die NIET samen een 'warmtekoppel' of 'arbeidskoppel' vormen. Dan kun je met 'potentialen' werken. De volgende voorbeelden gaan daar over.

• **ENERGIE**. Als je U, de 'energie', als functie van S en V weet, dan kunnen T en p, als functie van S en V gevonden worden uit de relatie $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$. Immers, dan is $T(S,V) = \dfrac{\partial U}{\partial S}(S,V)$ en $p(S,V) = -\dfrac{\partial U}{\partial V}(S,V)$. Dus U als functie van S en V fungeert als een soort potentiaal voor de verkaartingsafbeelding van het SV-diagram naar het pT-diagram.

Aldus volgen, bijvoorbeeld, uit $U(S,V) = CT_0\big(\dfrac{V_0}{V}\big)^{\frac{R}{C}}\exp\dfrac{S}{C}$, met $C,\ R,\ T_0\ ,V_0$ constanten, de toestandsvergelijkingen $pV - RT = 0$ en $U = CT$ voor het perfecte gas.

• **VRIJE ENERGIE**. Stel dat je $F = U - TS$, de 'vrije energie', als functie van T en V weet, dan kunnen S en p, als functie van T en V gevonden worden uit de relatie $\mathrm{d}F = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V - \mathrm{d}(TS) = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V$. Immers, dan is $S(T,V) = -\frac{\partial F}{\partial T}(T,V)$ en $p(S,V) = -\frac{\partial F}{\partial V}(T,V)$. Dus F als functie van T en V bevat alle informatie over het systeem en fungeert als een soort potentiaal voor de verkaartingsafbeelding van het TV-diagram naar het Sp-diagram. Het concept vrije energie is nuttig als je, bijvoorbeeld, tijdens een thermodynamisch proces de temperatuur constant houdt. De verrichte arbeid is dan gelijk an de vermindering van de vrije energie.

• **ENTHALPIE**. Stel dat je $H = U + pV$, de 'enthalpie', als functie van S en p weet, dan kunnen T en V, als functie van S en p gevonden worden uit de relatie $\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}(pV) = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}p$. Immers, dan is $T(S,p) = \frac{\partial H}{\partial S}(S,p)$ en $V(S,p) = \frac{\partial H}{\partial p}(S,p)$. Dus de enthalpie H als functie van S en p bevat alle informatie over het systeem en fungeert als een soort potentiaal voor de verkaartingsafbeelding van het Sp-diagram naar het TV-diagram.

• **VRIJE ENTHALPIE**. Stel dat je $G = U - TS + pV$, de 'vrije enthalpie', als functie van T en p weet, dan kunnen S en V, als functie van T en p gevonden worden uit de relatie $\mathrm{d}G = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V - \mathrm{d}(TS) + \mathrm{d}(pV) = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p$. Immers, dan is $S(T,p) = -\frac{\partial G}{\partial T}(T,p)$ en $V(T,p) = \frac{\partial G}{\partial p}(T,p)$. Dus de ook vrije enthalpie G als functie van T en p bevat alle informatie over het systeem en fungeert als een soort potentiaal voor de verkaartingsafbeelding van het Tp-diagram naar het SV-diagram.

• Elk van de vier functies $(S;V) \mapsto U(S,V)$, $(T;V) \mapsto F(T,V)$, $(S;p) \mapsto H(S,p)$, $(T,p) \mapsto G(T,p)$ karakteriseert het beschouwde thermodynamische systeem volledig. Ze heten dan ook *karakteristieke functies*. De keuze die je in voorkomende gevallen maakt hangt af van het beschouwde probleem. Merk op dat bij de keuze van de onafhankelijke variabelen er steeds één toestandsvariabele uit het 'warmtekoppel' (S,T) optreedt en ook één uit het 'arbeidskoppel' (p,V).

<u>STELLING</u> (Thermodynamische potentialen)
Uitgangspunt: Een set van $N+1$ 'uitverkoren' variabelen uit $(T,\ S)$, $(X_1\,,Y_1), \cdots, (X_N\,,Y_N)$, zodanig dat $Z_i = X_i$ óf $Z_i = Y_i$, voor $0 \le i \le N$. Hier is, voor notationeel gemak, $X_0 = T$ en $Y_0 = -S$ gesteld. (De keuze voor X_i of Y_i mag dus per i verschillen!) Bij zo'n keuze definiëren we de 'Kroneckervector' $\underline{\delta}$ door $\underline{\delta} = (\delta_0,\ \delta_1, \cdots, \delta_N)$, met $\delta_j = 0$, als $Z_j = Y_j$ en $\delta_j = 1$, als $Z_j = X_j$.
Bij een rijtje van 0-en en 1-en $\underline{\delta}$ hoort aldus de variabelenkeuze $Z_j = \delta_j X_j + (1 - \delta_j) Y_j$.
Het volgende geldt:

(a) Een thermodynamisch systeem wordt volledig gekarakteriseerd door één voldoend gladde functie van een set van $N + 1$ variabelen van voornoemd type:

$$(Z_0;\ Z_1; \cdots ; Z_N) \quad \mapsto \quad P_{\underline{\delta}}(Z_0,\ Z_1, \cdots, Z_N).$$

Zo'n functie heet *thermodynamische potentiaal*.

(b) In het geval $Z_i = Y_i$ geldt $X_i(Z_0, \cdots, Z_N) = -\dfrac{\partial P_{\underline{\delta}}}{\partial Z_i}(Z_0, \cdots, Z_N)$.

In het geval $Z_i = X_i$ geldt $Y_i(Z_0, \cdots, Z_N) = +\dfrac{\partial P_{\underline{\delta}}}{\partial Z_i}(Z_0, \cdots, Z_N)$.

(c) Bij gegeven Kroneckervector $\underline{\delta}$ wordt de thermodynamische potentiaal , op een constante na, gegeven door

$$P_{\underline{\delta}} = U + \sum_{\ell=0}^{N} \delta_\ell X_\ell Y_\ell \ , \qquad \text{opgevat als functie van } Z_0\ ,\ Z_1\ , \ldots, Z_N.$$

Een thermodynamisch systeem kan dus in principe op 2^{N+1} verschillende manieren met een potentiaal beschreven worden.

BEWIJSSCHETS

Als $\underline{\delta} = \underline{0}$ voldoet $P_{\underline{0}} = U$ aan alle eisen. Zie daartoe het bewijs van de vorige stelling. Als $\underline{\delta} = (1, 0, \ldots, 0)$ dan voldoet $P_{(1,0,\ldots,0)} = U + X_0 Y_0$, opgevat als functie van $(X_0\ , Y_1\ , \ldots, Y_N)$ aan alle eisen: Er geldt dan $\mathrm{d}P_{(1,0,\ldots,0)} = Y_0\,\mathrm{d}X_0 - X_1\,\mathrm{d}Y_1 - \cdots - X_N\,\mathrm{d}Y_N$ en $Y_0\ , X_1\ , \ldots, X_N$ kunnen gevonden worden door partiële afgeleiden van $P_{(1,0,\ldots,0)}$ te nemen naar, respectievelijk, $X_0\ , Y_1\ , \ldots, Y_N$. Langs deze weg kunnen we alle 2^{N+1} mogelijke potentialen bereiken door (een aantal) termen $X_k Y_k$ bij U op te tellen en het resultaat als functie van de bijpassende variabelen te beschouwen.

SLOTOPMERKING

Een thermodynamisch systeem kan blijkbaar worden opgevat als een speciaal $N{+}1$-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^{2N+2}$.
In de differentiaalmeetkundeliteratuur heet zo'n speciaal oppervlak *Lagrangeoppervlak.*

Appendix H

Electromagnetisme en Differentiaalvormen

I. Electrostatica

In de electrostatica spelen de vectorvelden $\mathbf{E}$, het electrische veld, de diëlectrische verschuiving $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, en het scalarveld q, de ladingsdichtheid, een rol. Hierbij is ε_0 de permittiviteit in vacuüm, die we voor het gemak gelijk aan 1 veronderstellen. De klassieke wetten luiden

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{D} = q. \tag{H.1}$$

Merk op dat in de natuurkundeboeken $\mathbf{E}$ uitsluitend in lijnintegralen optreedt en nooit in oppervlakteintegralen. Met $\mathbf{D}$ is dit precies andersom! Beschouw nu $I\!R^3$ met cartesische coördinaten x, y en z, het gewone inproduct, de gebruikelijke volumevorm en de hierbij behorende Hodge afbeelding $*$. We voeren de volgende differentiaalvormen in:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z, \\
\mathcal{D} &= *\mathcal{E} = E_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + E_y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + E_z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
\mathcal{Q} &= q\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

De klassieke wetten (H.1) kunnen dan geschreven worden in de vorm

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = 0, \quad \mathrm{d} * \mathcal{E} = \mathcal{Q}. \tag{H.2}$$

II. Magnetostatica

In de magnetostatica spelen de vectorvelden $\mathbf{H}$, het magnetische veld, de magnetische inductie $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, en $\mathbf{j}$, de stroomdichtheid, een rol. Hierbij is μ_0 de permeabiliteit in vacuüm, die we voor het gemak gelijk aan 1 veronderstellen. De klassieke wetten luiden

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0. \tag{H.3}$$

Merk op dat in de natuurkundeboeken **H** uitsluitend in lijnintegralen optreedt en nooit in oppervlakteintegralen. Met **B** is dit precies andersom!
We voeren de volgende differentiaalvormen in:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= B_x\,\mathrm{d}x + B_y\,\mathrm{d}y + B_z\,\mathrm{d}z,\\
\mathcal{B} &= *\mathcal{H} = B_x\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z + B_y\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x + B_z\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y,\\
\mathcal{J} &= j_x\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z + j_y\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x + j_z\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

De klassieke wetten (H.3) kunnen dan geschreven worden in de vorm

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \mathcal{J},\quad \mathrm{d}*\mathcal{H} = 0. \tag{H.4}$$

III. Unificatie van electrostatica en magnetostatica

We voeren een 0-de coördinaat t in. Men mag zich deze voorstellen als een tijdscoördinaat. Hiermee vormen we $I\!R^4$, met coördinaten t, x, y en z. In het vervolg zal d de d-operator in $I\!R^4$ voorstellen. We voeren de volgende differentiaalvormen in:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \mathcal{Q} - \mathcal{J}\wedge\,\mathrm{d}t,\\
\mathcal{F} &= \mathcal{E}\wedge\,\mathrm{d}t + \mathcal{B},\\
\mathcal{G} &= -\mathcal{H}\wedge\,\mathrm{d}t + \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

De wetten (H.2) en (H.4) kunnen nu in één geformuleerd worden als

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = 0,\quad \mathrm{d}\mathcal{G} = \mathcal{S}. \tag{H.5}$$

We hebben dus op boekhoudkundige wijze de wetten uit de electrostatica en magnetostatica samengevoegd.

IV.De Maxwell vergelijkingen voor tijdsafhankelijke E-M-velden

Definieer op $I\!R^4$ het Lorentz inproduct en de daarmee corresponderende volume vorm (zie paragraaf 1.12). De hierbij behorende Hodge afbeelding noteren we met $*_4$. Het miraculeuze feit doet zich voor dat

$$\mathcal{G} = *_4\mathcal{F}. \tag{H.6}$$

Ga dit na! We kunnen de vergelijkingen (H.5) met behulp van dit resultaat schrijven als

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = 0,\quad \mathrm{d}*_4\mathcal{F} = \mathcal{S}. \tag{H.7}$$

Dit zijn de volledige tijdsafhankelijke Maxwell vergelijkingen, die we ook kunnen schrijven als

$$\mathrm{d}\mathcal{E}\wedge\,\mathrm{d}t + \,\mathrm{d}\mathcal{B} = 0,\quad -\,\mathrm{d}\mathcal{H}\wedge\,\mathrm{d}t + \,\mathrm{d}\mathcal{D} = \mathcal{S}. \tag{H.8}$$

Merk op dat $\mathrm{d}\mathcal{S} = 0$ en dat dit overeenkomt met de behoudswet

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0. \tag{H.9}$$

De Maxwell vergelijkingen in de vorm (H.5), of in de equivalente vormen (H.8) en (H.7) zijn coördinaat onafhankelijk en gelden aldus in alle denkbare kromlijnige coördinaten systemen op $\mathbb{R}^4$, of op een open deelverzameling daarvan.

V. Enkele andere gedaanten van de Maxwell vergelijkingen

We gebruiken weer de coördinaten t, x y en z met het Lorentz inproduct. Men noemt deze coördinaten in dit geval ook wel Lorentz coördinaten. De componenten van het fundamentaaltensorveld worden gegeven door

$$\left[g^{ij}\right] = [g_{kl}] = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Er geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -E_x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + B_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - B_y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + B_z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\\
\mathcal{G} &= B_x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + B_y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + B_z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + E_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - E_y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + E_z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\\
\mathcal{S} &= q\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - j_x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + j_y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - j_z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Door de Maxwell vergelijking $\mathrm{d}\mathcal{F} = 0$ uit te schrijven worden de klassieke vergelijkingen

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \;\; \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

terug gevonden. Voorts komt de Maxwell vergelijking $\mathrm{d}\mathcal{G} = \mathcal{S}$ overeen met de klassieke vergelijkingen

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \;\; \mathrm{div}\,\mathbf{E} = q.$$

Verder komt de continuïteitsvergelijking (H.9) overeen met $\mathrm{d}\mathcal{S} = 0$, zoals reeds eerder opgemerkt.

We noteren de Lorentz coördinaten nu als $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z$. Schrijf $\mathcal{F} = F_{kl}\,\mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l$, $\mathcal{G} = G_{kl}\,\mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l$ en $*_4\mathcal{S} = S_k\,\mathrm{d}x^k$, met

$$[F_{kl}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \; [G_{kl}] = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$[S_k] = (q, -j_x, -j_y, -j_z)\,.$$

Van de matrices $[F_{kl}]$ en $[G_{kl}]$ en de rij $[S_k]$ halen we de indices omhoog.

$$\left[F^{kl}\right] = \left[g^{ki}g^{lj}F_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[G^{kl}\right] = \left[g^{ki}g^{lj}G_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \left[S^k\right] = (q, j_x, j_y, j_z)^T.$$

De klassieke Maxwell vergelijkingen kunnen nu, nog steeds in Lorentz coördinaten, geschreven worden als

$$\partial_j F^{kj} = S^k, \ \ \partial_j G^{kj} = 0, \tag{H.10}$$

welke in willekeurige kromlijnige coördinaten tensorieel geschreven moeten worden, dus als

$$\nabla_j F^{kj} = S^k, \ \ \nabla_j G^{kj} = 0. \tag{H.11}$$

Merk tenslotte op dat de Maxwell vergelijkingen, geschreven in de vorm met behulp van differentiaalvormen, ook voor willekeurige kromlijnige coördinaten uitgeschreven kunnen worden.

Bibliografie

[AMR] Abraham, R., J.E. Marsden en T. Ratiu,
Manifolds, Tensor Analysis and Applications,
Addison-Wesley Publ. Company, London, 1983.

[CB] Choquet-Bruhat, Y. en C. De Witt-Morette,
Analysis, Manifolds and Physics,
Revised edition. North-Holland Publ. Company. Amsterdam etc, 1982.

[MTW] Misner, C.W., K.S. Thorne en J.A. Wheeler,
Gravitation,
Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[S] Spiegel, M.R.,
Vector Analysis.
Schaum's Outline Series,
McGraw-Hill. New York etc, 1959.

Voor de gevorderde lezer:

[A] Arnold, V.I.,
Mathematical methods of Classical Mechanics,
Springer GTM 60. Berlin etc, 1978.

[B] Burke, W.L.,
Space-time, Geometry, Cosmology.
University Science Books,
Mill Vally. California, 1980.

[BJ] Bröcker, T. en K. Jänich,
Einführung in die Differentialtopologie.
Heidelberger Taschenbücher,
Springer. Berlin etc, 1973.

[Bl] Bleecker, D.,
Gauge Theory and Variational Principles,
Wesley Publ. Company. London etc, 1981.

[D] Dieudonné, J.,
Treatise on Analysis.

De appendices in Vol.I en Vol.III.,
Academic Press. New York, 1972.

[K] Klingenberg, W.,
Eine Vorlesung über Differntialgeometrie.
Heidelberger Taschenbücher,
Springer. Berlin etc, 1973.

[Sch1] Schouten, J.A.,
Tensor Analysis for Physicists,
Oxford Clarendon Press, 1951.

[Sch2] Schouten, J.A.,
Ricci-Calculus,
Springer. Berlin etc, 1954.

[Schr] Schreiber, M.,
Differential Forms. A Heuristic Introduction.
Universitext,
Springer. Berlin etc, 1977.

[Schu] Schutz, B.,
Geometrical methods of Mathematical Physics,
Cambridge University Press, 1984.

[Sp] Spivak, M.,
A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (5 delen),
Publish or Perish inc. Boston, 1970-1975.

[SW] Sachs, R.K. en H. Wu,
General Relativity for Mathematicians,
Springer GTM48. Berlin etc, 1977.

[Sy] Synge, J.L.,
Relativity: The Special Theory,
North-Holland Publ. Company. Amsterdam etc, 1958.

[T] Thorpe, J.A.,
Elementary Topics in Differential Geometry,
Springer UTM. Berlin etc, 1979.

[Th] Thirring, W.,
A Course in Mathematical Physics.
Vol.I en Vol.II,
Springer. New York-Wien, 1978.

[W] Westenholtz, C. von,
Differential Forms in Mathematical Physics,
North-Holland Publ. Company. Amsterdam etc, 1981.

Index

$\binom{0}{0}$-tensor, 24
$\binom{0}{1}$-tensor, 25
$\binom{0}{2}$-tensor, 25
$\binom{1}{0}$-tensor, 25
$\binom{1}{1}$-tensor, 30
$\binom{2}{0}$-tensor, 28
$\binom{r}{s}$-tensor, 24
k-vorm, 62
p-tensor, 24, 38
$\binom{r}{s}$-tensorveld, 61, 63
3-tensor, 32
4-tensor, 34

affiene coördinaten, 59, 64
anti-symmetrizeringsafbeelding, 48
atlas, 111
axiale vector, 44

basis, 8
biduale ruimte, 13
bilineaire functie, 25, 28, 30
binormaal, 90
booglengte, 89

Cartesische coördinaten, 59
Christoffelsymbolen, 70
co-raakruimte, 60
coördinaatkrommen, 59
coördinaten systeem, 58
contractie, 36
contravariant van orde r, 24
contravariant vectorveld, 61
contravariante q-tensor, 42
contravariante 1-tensor, 14
contravariante componenten, 38
    van een $\binom{2}{0}$-tensor, 29
    van een 1-tensor, 25
    van een vector, 8
coraakruimte, 113
cosmologischge constante, 143
covariant van orde s, 24
covariant vectorveld, 61
covariante p-tensor, 42
covariante 1-tensor, 10, 14
covariante afgeleide
    op een oppervlak, 103, 104
    van een covectorveld, 72
    van een vectorveld, 72
covariante componenten, 10, 38
    van een $\binom{0}{2}$-tensor, 27
    van een $\binom{0}{3}$-tensor, 33
    van een 1-tensor, 25
    van een vector, 20
covector, 40
    op een manifold, 113
covectoren, 10
covectorveld, 61

deformatietensor, 151
dichtheid, 66
differentiaalvorm, 62
differentieerbaar, 110
divergentie, 72, 81
duale basis, 11
duale ruimte, 10

eerste fundamentaaltensorveld, 96
eerste hoofdwet, 156
eigentijd, 141
Einstein tensorveld, 119
Einsteintensor, 143
electromagnetisme, 164
electrostatica, 164
enthalpie, 162
entropie, 158
Euclidisch inproduct, 17

formules van Frenet, 91
Frenet-driepoot, 92

functie
  op een manifold, 113
functionaalmatrix, 110
fundamentaaltensor, 26
fundamentaaltensorveld, 65

Gauss-kromming, 119
gemengde $(r+s)$-tensor, 42
gemengde componenten, 38
  van een $\binom{1}{1}$-tensor, 31
  van een $\binom{2}{2}$-tensor, 34
geodeet, 100
geodetische krommen
  van een Riemannse variëteit, 115
geodetische kromming, 100
gradiënt, 80
gradiëntveld, 69
Grammatrix, 17, 18

Hodge afbeelding, 53
holor, 38
hoofdnormaal, 90
Hooke, 153
Hooke tensor, 154
Hooke-tensor, 35

indexgymnastiek, 16
inproduct, 17
isomorfisme, 9

Jacobi determinant, 110

kaart, 111
kaartafbeelding, 58, 111
kaartomgeving, 111
karakteristieke functies, 160, 162
kromlijnig coördinaten systeem
  orthogonaal, 65
kromme
  op een manifold, 112
kromming, 91
kromtestraal, 91
kromtetensor
  van Riemann-Christoffel, 118
kromtevector, 90
Kronecker tensor, 42
Kronecker tensorveld, 64
Kroneckerdelta, 13
Kroneckertensor, 13

Laplace operator
  voor k-vormen, 79
  voor scalarvelden, 73, 81
  voor vectorvelden, 82
Leibniz
  regel van, 103
Lieproduct, 69
lineaire afbeelding, 14
lineaire functie, 10
Lorentz inproduct, 17
Lorentz transformaties, 23

magnetostatica, 164
manifold, 111
Maxwell vergelijkingen, 165
Meusnier, 100
Millerindex, 148
Minkowski ruimte, 23

natuurlijke vergelijkingen
  van een kromme, 92
normaal, 90
normale kromming, 100
normalenvlak, 90

ongelijkheid van Cauchy Schwarz, 19
op-en-neer halen van indices, 38
oppervlak, 95
orthonormale basis, 22
orthonormale groep, 23
osculatievlak, 89
overgangsmatrices, 9

parameterkromme, 95
parametertransformatie, 88
parametervoorstelling
  van een oppervlak, 95
  van een ruimtekromme, 88
parametrizering, 58
permutatie, 44
  even, 44
  oneven, 44
poolcoördinaten, 59
Pseudo-Riemannse metriek, 141
pseudoparallel, 116

raakbundel, 59

raaklijn, 89
raakruimte, 59, 112
raakvector, 113
    aan een manifold, 112
raakvectorveld, 102
raakvlak, 95
reciproke basis, 19
rectificerend vlak, 90
representatiestelling van Riesz, 18
Ricci
    lemma van, 105
richtingsafgeleide, 69, 113
Riemannse variëteit, 114
rotatie, 80
ruimtekromme, 88

scalar, 24, 40
scalarveld, 61
schaalfactoren, 65
signatuur, 22
spanningstensor, 33, 152
standaardbasis
    van $\mathbb{R}^n$, 8
    van $\mathbb{R}_n$, 11
symmetrie, 15
symmetrizeringsafbeelding, 48
symplectische vectorruimte, 17

tensor
    antisymmetrisch, 45
    symmetrisch, 45
tensorieel, 42
tensorproduct, 37
tensorveld
    van een manifold, 114
thermodynamische potentiaal, 162
toestand(thermodynamica), 155
torsie, 91
transformatiegroep, 23
tweede fundamentaaltensorveld, 97
tweede hoofdwet, 158

uitwendige afgeleide, 74

variëteit, 111
vector, 40
vectorruimte, 8
vectorveld, 61
verkaartingsafbeelding, 111
volumebegrip, 51
vrije energie, 162
vrije enthalpie, 162