TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

TAAL en STRUCTUUR

van de

WISKUNDE

Collegesyllabus geschreven door

Prof. Dr. N.G. de Bruijn

Editie 1984

Technische Hogeschool
Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Taal en Structuur van de Wiskunde

(29650)

collegesyllabus geschreven door prof.dr. N.G. de Bruijn

4 002336 000002
Prijs f.6,50

Inhoudsbeschrijving

TAAL en STRUCTUUR van de WISKUNDE

Editie 1984

JdG, 20 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

TAAL EN STRUCTUUR VAN DE WISKUNDE

(29650)

Collegesyllabus geschreven door

Prof.dr. N.G. de Bruijn

Editie 1984

Overzicht en Inleiding.

1. Overzicht. Het college Taal en Structuur van de Wiskunde probeert uitgangspunten te geven van waaruit kan worden nagedacht over een aantal aspecten van de wiskunde die een rol kunnen spelen bij het onderwijs. Het college wordt gegeven in de eindfase van de studie, en heeft daardoor een aanvullend karakter, want veel stof die onder het hoofd "Taal en Structuur" zou kunnen vallen is al in eerdere studiejaren behandeld.

Van de studenten wordt verwacht dat zij de studie van de op het college gepresenteerde stof aanvullen met het lezen van materiaal dat gekozen kan worden in overleg met de docent. Om een idee te geven van het soort lectuur waaraan gedacht wordt is een korte literatuurlijst bijgevoegd. Naast het college staat er ook een stage op de studieprogramma's. In deze stages leveren de studenten veelal commentaar op bestaande schoolboeken. Gehoopt wordt dat college plus lectuur voor een dergelijk commentaar een goede ondergrond bieden.

Van een aantal onderdelen is een syllabus gemaakt:

Deze stukken hebben grotendeels op de taal betrekking; pas bij V20 komt er iets van de structuur tevoorschijn. Van enkele andere op de studie van de structuur gerichte onderwerpen (zoals getypeerde en ongetypeerde verzamelingsleer) is geen syllabus gemaakt.

De bovengenoemde stukken zijn in verschillende perioden geschreven, en daardoor is er wat overlapping en een zeker gebrek aan systematiek. Ten aanzien van taalaspecten is systematiek gewenst. Ten aanzien van structuuraspecten is het misschien ongewenst of onmogelijk. De in de volgende paragrafen geplaatste opmerkingen over "de structuur van de wiskunde" staan dan ook in betrekkelijk willekeurige volgorde.

2. Historische ontwikkeling. De wiskunde is bepaald door de geschiedenis, en daarbij zien we allerlei veranderingen, in onderwerpen, in doelstelling, in methoden. Onze visie op de wiskunde is er een van onze tijd, is niet altijd zo geweest en zal niet altijd zo blijven. Het is ook niet altijd hetzelfde geweest wàt er tot de wiskunde gerekend werd. En de wiskunde is niet als een eenheid opgezet op een duidelijk van te voren afgesproken basis (zoals vele buitenstaanders wel denken). Het is zo maar ergens in het midden begonnen. Er zijn stukken uit andere gedachtenwerelden aan toegevoegd, die pas veel later met de andere delen verbonden raakten. En er zijn stukken afgesloten door ze tot afzonderlijke disciplines te verklaren. De wiskunde van vandaag is door deze geschiedenis gevormd en sterk bepaald door de mode en de werkgelegenheid van vandaag. Wanneer wij proberen er structuur aan op te leggen is dit kunstmatig. Maar er is terugkoppeling: het ontdekken van structuur en het beschrijven van structuuridealen heeft grote invloed op de smaak en daardoor op de richting waarin de wiskunde zich ontwikkelt.

3. Bestaat er zoiets als "de" structuur? Neen, tenminste nu niet. Men kan proberen een groot schema op te stellen en te zeggen dat het de structuur van de wiskunde aangeeft, en dan proberen alles af te snijden wat daar niet in past (het bed van Procrustes). Als men genoeg medestanders heeft krijgt men op den duur ook nog gelijk, totdat er weer andere inzichten komen. Maar wat men ook probeert, "de" structuur krijgt men niet in handen. Er zijn grote en kleine gestructureerde stukken, er zijn structuuridealen.

Aanbevolen wordt het lezen van wat grote wiskundigen over de structuur gezegd hebben in "Mathematiker über Mathematik" (zie literatuurlijst).

4. Structuurnivo's."Structuur" betekent zoiets als "schema waarin men een grote hoeveelheid materiaal op overzichtelijke wijze kan rangschikken". Dat kan vaak op verschillende nivo's: zoals men bij een bos de structuur van het bos kan zien, die van een boom, die van macroscopische en microscopische delen van een boom.

Men kan proberen voor de wiskunde drie structuurnivo's te onderscheiden: micro, meso en macro. Op het micronivo liggen de kleinste stappen: redeneerpatronen, regels waaraan definities, axioma's en stellingen moeten voldoen, kortom de "taal" van de wiskunde. Op het mesonivo vinden we de grotere stukken: de rol van de verzamelingsleer, en iets daarboven die van algemene algebraische organisatie (studie van wat men ook weer structuren noemt). Op het macronivo vindt men bijv. de relaties van stukken wiskundige theorieën met elkaar en met andere vakgebieden. De gedachte van de nivo's brengt mee dat het micronivo hulpmiddelen levert voor het mesonivo en het mesonivo hulpmiddelen voor het macronivo.

5. Enkele tegenstellingen. Dwars door deze structuurnivo's lopen een aantal polariserende onderscheidingen die door velen (en ook dat is een kwestie van mode) als wezenlijk worden gezien. Wij noemen er enkele:

Zuiver-Toegepast. Dit is een duidelijk zichtbare hoewel niet constante, indeling. Iets kan zowel zuiver als toegepast zijn: denk aan de verfkwast met opschrift "zuiver varkenshaar". Een kwast met zuiver varkenshaar kan misschien beter worden toegepast dan een goedkopere kwast. Zouden er ook kwasten met onzuiver varkenshaar zijn? Het lijkt er meer op dat "zuiver" geen adjectief is bij "varkenshaar" maar slaat op de manier waarop het haar geselecteerd is. Wat hier voor varkenshaar is gezegd geldt ook voor wiskunde (maar daar "wiskunde" niet onzijdig is kan men onderscheiden tussen "zuiver wiskunde" en "zuivere wiskunde").

Abstract-Concreet. Dit is eigenlijk meestal een psychologische onderscheiding: "concreet" duidt hetgene aan waarmee men vertrouwd is. Wat vandaag abstract heet, is morgen misschien concreet. "Abstract" betekent ook: niet alleen handelend over de bekende situaties maar ook over ons nog niet bekende. "Abstraheren" kan betekenen: het weglaten van een aantal details zodanig dat het restant algemener toepasbaar is. Extreem concreet is: alles zeggen over niets. Extreem abstract is: niets zeggen over alles. Men moet dus niet tot het uiterste gaan.

Met de tegenstelling "abstract-concreet" hangt samen de werkmethode waarbij men afwisselend generalizeert en specializeert. Het generalizeren alléén leert ons niets goeds, het specializeren alléén leert ons niets nieuws.

Deductief-Constructief. Hangt nauw samen met de tegenstelling "abstract-concreet". Bij deductief denkt men aan het analyseren van situaties die men niet heeft opgebouwd maar waarvan men enkele eigenschappen bekend onderstelt. Bij "constructief" denkt men aan het zelf opbouwen van de grond af, en bestuderen wat men opgebouwd heeft. Allerlei mengvormen komen voor. Overigens wordt het woord "constructief" ook in andere zin gebruikt, nl. als "constructief-met-beperkte-middelen". Wie een niet-meetbare verzameling opbouwt met behulp van het keuzeaxioma is nog steeds constructief bezig en niet deductief. Anderen zullen alles wat keuzeaxioma gebruikt als niet-constructief beschouwen!

Formeel logisch-Intuïtief. Vaak is dit alleen een verschil in werkmethode:

het verschil verdwijnt wanneer het gebouw klaar is. Doorgaans is het formeel logische aspect het blijvende. Het intuitieve aspect is ervaringsafhankelijk, en zal zich zelfs op den duur aan het formeel-logische apparaat hechten als aan een nieuwe ervaringswereld.

6. Grondslagen van de wiskunde. Een wiskundige die zich in een bibliotheek tot deze rubriek wendt om de grondslagen van zijn vak gewaar te worden slaat de schrik om het hart! Een lawine van lectuur die niet gemakkelijk te overzien valt. Een sterk historisch bepaald gebied. Af en toe een stroom die probeert iets geheel van het begin af op te zetten, dan weer grote wildgroei om zo'n stroom heen. Bijna overal vindt men in grote trekken dezelfde microstructuur als in de wiskunde: dezelfde opbouw met axioma's, stellingen, variabelen, formules, bewijzen, etc. Vaak is deze microstructuur informeler dan in de "echte" wiskunde, maar een volgende generatie van grondslagenonderzoekers haalt deze achterstand snel weer in. Verder ziet men een grote belangstelling voor het extreme, voor de uiterste grenzen van het vakgebied. Uitmaken van wat nèt nog kan en nèt niet méér kan. (Ook de analyse en de topologie hebben zulke perioden gehad, en daar is het weer overgegaan).

Wiskundigen hebben een vaag geloof dat hun bedrijf door de grondslagenonderzoekers wel in orde bevonden is, en vinden het verstandiger "de details maar aan specialisten over te laten". Maar sprekend op het macronivo kan men zeggen dat de wiskundigen (inclusief grondslagenonderzoekers) gefaald hebben in het leggen van een goede voor ieder begrijpelijke grondslag van hun vak.

Gaat "logica" aan "wiskunde" vooraf? Is wiskunde een deel van de logica (zoals Russell zei)? Of is het juist omgekeerd (zoals door L.E.J.Brouwer werd betoogd)? Men is het er tegenwoordig wel over eens dat het (veronderstelde) intuitief aanwezige logische denken niet op een in het brein gelegen logisch computertje berust maar op het rangschikken van opgedane ervaringen, met inbegrip van ontdekte regelmaat in het taalgebruik.

Er is niet zoveel reden meer om "logica" en "wiskunde" als gescheiden disciplines te beschouwen. Er is een gemeenschappelijke onderbouw die bestaat uit de regels voor het hanteren van de taal die men in beide gebieden gebruikt. Het lijkt het verstandigste om een goed beeld te scheppen van deze onderbouw. Natuurlijk is het scheppen van dat beeld wéér een intellectueel proces van min of meer wiskundig-logische aard; men moet dan ook proberen deze discussie eenvoudig te houden, althans onafhankelijk van de inhoud van de bovenbouw!

5

7. Platonisme. Platonisten zeggen dat de wiskundige objecten (zoals getallen, functies) waarover we spreken echt bestaan, en dat dit echte bestaan de basis is voor ons spreken erover. Zeer vele, ook moderne wiskundigen hangen deze gedachte aan. De objecten bestonden ook al vóórdat we begonnen erover te spreken. Wiskundige zaken worden "ontdekt" zoals Columbus Amerika ontdekte.

Wat maakt het eigenlijk voor een verschil of we in dit bestaan geloven of niet? A en B kunnen in volle harmonie een wiskundig gesprek voeren terwijl A een "gelovige" is en B niet. Of men Platonist is of niet is meer een kwestie van gemoedsrust. De een heeft het nodig, de ander niet.

Volgens Wittgenstein's: " Don't ask for the meaning, ask for the use" is Platonisme irrelevant (irrelevant is wat anders dan onjuist!).

Toch heeft Platonisme wel invloed, maar een negatieve. Bijv: Wie denkt dat wiskundige objecten werkelijk bestaan komt licht in de verleiding te denken dat men bij de formele behandeling wel een steekje mag laten vallen! Het gevoel dat sommige dingen er waren vóórdat we erover spraken hangt sterk af van onze vertrouwdheid met de betreffende objecten. Slordig praten over objecten waarmee we vertrouwd zijn wordt niet gauw afgestraft: de vele associaties die we bij zulke objecten hebben houden ons in het goede spoor.

Het "bestaan" in de zin van het Platonisme heeft weinig te maken met de in de wiskunde gebruikte existentiekwantor.

8. Taal. Taal is de belangrijkste basis voor communicatie. Men kan op een onbewoond eiland vrij goed uit boeken wiskunde leren. Het ligt dus voor de hand het filosoferen over wiskunde te verplaatsen naar het filosoferen over de zinnen en formules die wiskundigen zeggen en schrijven ("ask for the use"). Dit standpunt geldt ook voor een breder gebied dan de wiskunde alleen, en kan als een typische visie van de 20ste eeuw worden beschouwd. In 1917 begon in Nederland de Signifische Kring met o.a. Frederik van Eeden, Mannoury, Brouwer, wat later begon de Wiener Kreis waaruit Wittgenstein voortkwam. Een uitspraak uit de Wiener Kreis: "De traditionele vraagstukken der speculatieve wijsbegeerte zijn schijnproblemen en vinden hun oorsprong in onvolkomenheden van de taal of in gebrekkig inzicht in haar logische structuur". (E.W.Beth in Winkler Prins (6^e dr) 18 p. 506). Daarmee werden drieduizend jaar filosofie van de tafel geveegd.

Het taalstandpunt is belangrijker geworden sinds we computers hebben die zinvolle dingen met taal kunnen doen zonder enig idee te hebben van wat de mens ermee denkt te bedoelen.

Degenen die taal centraal stellen zijn eigenlijk bezig met de studie van rijen van zinnen, bestaande uit woorden en andere symbolen, los van interpretaties daarvan. Laat ons deze mensen taalfenomenologen noemen (het woord formalist heeft enkele bijklanken, ook onaangename). Degene die de taal schrijft is een taalgebruiker. De taalfenomenoloog spreekt over wat de taalgebruiker heeft geproduceerd. We stellen ons voor dat ook de taalgebruiker soms denkt te schrijven over iets nl. als hij een Platonist is.

De taalfenomenoloog gebruikt ook weer een taal om zijn gedachten uit te drukken. We zullen die taal de metataal noemen.

Eenzelfde wiskundige zal soms in een taal en soms in een bijbehorende metataal spreken. Hij moet steeds duidelijk maken of hij het een dan wel het ander spreekt. Er ontstaan misverstanden als een in de ene taal geschreven uitspraak wordt opgevat als in de andere taal bedoeld. Een voorbeeld: Achilles probeert de schildpad in te halen. De schildpad begint in P_1. Als Achilles in P_1 is, is de schildpad in P_2 als Achilles in P_2 is, is de schildpad in P_3, enz. Conclusie: "zo kan het eeuwig doorgaan". Bedoeld is de metataaluitspraak: "zo kunnen we eeuwig blijven praten". Ook vele andere paradoxen berusten op verwarring van taal en metataal. En de manier waarop Cantor zijn paradijs bouwde was niet vrij van zulke verwarring.

Soms kan een stukje taal- en metataalvermenging door codificatie in de taal worden goedgemaakt. Men zegt bijv. in de taal "1,2,3", en dan in de metataal "enzovoort". De axioma's van Peano maken het mogelijk in de taal iets uit te drukken wat men eerst alleen in de metataal kon.

9. Wat zijn objecten? Deze vraag komt uit de Platonistische sfeer. Objecten bestaan daar echt. Stukjes taal duiden objecten aan, maar andere stukjes niet. We nemen een voorbeeld:

$$a^2 \geq 0 \text{ en } 1 \text{ is een positief getal, dus } a^2 + 1 > 0 \qquad (1)$$

is een bewijs voor het feit dat $a^2 + 1 > 0$. In de taal zegt men "1 is een positief getal", "a is een reëel getal", maar in de metataal "1 duidt een positief getal aan", "de letter a is een reële variabele" (het is al griezelig om in de metataal te zeggen "a duidt een reëel getal aan", beter zou zijn "in de taal is a een reëel getal").

Volgens Platonistische bijgedachten zijn er objecten die door delen van de zin (1) worden aangeduid, bijv. de met $a, a^2+1, 0$ aangeduide objecten. (Hoe een echte Platonist tegenover variabele objecten als a, a^2+1 moet staan is overigens moeilijk te begrijpen). Maar duidt de hele zin (1) ook iets aan? De taalgebruiker die hiernaar gevraagd wordt gaat even op de metataalstoel zitten en zegt "(1) is een bewijs voor $a^2+1 > 0$". Dit overspringen naar die andere stoel is alleen nodig omdat bewijzen niet als objecten worden gevoeld.

Hetzelfde geldt voor "$a^2+1 > 0$" wat vanaf de metataalstoel een bewering wordt genoemd.

We zullen (zie V17) een grammatica opbouwen met zinnen, substantieven, adjectieven en namen. De taalconstructies die in de metataal namen worden genoemd (zoals in ons voorbeeld a^2+1) zijn de dingen waarvan de Platonist denkt dat ze objecten aanduiden (hoewel hij dat niet in de taal kan zeggen; gelukkig maar, want andersdenkenden moeten hem ook kunnen volgen).

In de AUTOMATH-talen zijn (met een andere syntax) zinnen als "(1) is een bewijs voor $a^2 + 1 > 0$" in de taal zèlf opgenomen. Daarmee zijn dan bewijzen en proposities tot objecten gemaakt. De wiskundige kan zijn objecten door letters voorstellen; in de AUTOMATH-talen kan men proposities en bewijzen tot letters afkorten en ook variabele proposities en bewijzen treden op, Definities zijn er echter geen objecten.

In V17 is ervoor gepleit om (ten aanzien van het voorstellen door letters) zinnen, adjectieven en substantieven op dezelfde manier te behandelen als namen. De rol van variabelen zullen ze niet gaan spelen, zodat het geen echte objecten worden. In AUTOMATH kan men wèl zoiets als variabele zinnen en substantieven hebben.

10. Voordelen van Platonisme. De wiskunde zit vol met isomorfieën. Twee personen A en B kunnen het stelsel $\mathbb{R}$ op verschillende manieren hebben opgebouwd, maar genoeg isomorfie hebben bereikt om in hun verdere gesprekken niet te merken dat ze het over verschillende dingen hebben. De Platonist zegt dan: "zie je wel, ze hebben het beide over dezelfde reële getallen, en er bestaan dus reële getallen".

Het is inderdaad een belangrijk psychologisch argument, dat onnodige ruzie tussen A en B voorkomt, en dat al die moeizame isomorfieterminologie voor ons gevoel overbodig maakt.

De situatie is analoog aan de virtuele beelden in de optica. Als A en B samen de zon in het water zien schijnen is het prettig om te zeggen dat ze hetzelfde zien (nl. dat virtuele beeld). Om zonder dat virtuele beeld de relatie uit te drukken tussen wat A ziet en wat B ziet, is moeizaam. De volgende stap is om te zeggen dat dat virtuele beeld echt aanwezig is. De fysicus doet dat niet: hij hij hoeft het niet als fysisch object te verkopen: hij kan het als een (echt) mathematisch object beschrijven.

11. Nadelen van Platonisme. Een ernstig nadeel van Platonistische opvattingen is dat de vermeende echtheid van objecten alle twijfel aan de juistheid van een theorie schijnt weg te nemen. Bestaat de verzameling $\mathbb{N}$ der gehele getallen echt? Ook als de axioma's van Peano strijdig mochten zijn? Als het

antwoord op de laatste vraag ontkennend is, zou het geloof in de echtheid van N geloof in de contradictieloosheid van de axioma's van Peano betekenen.

Ook is het voor Platonisten moeilijk om de geldigheid van de regel van de dubbele ontkenning ($\neg\neg a \rightarrow a$) te betwijfelen. Alle wiskundige uitspraken zijn nl. uitspraken over echt bestaande objecten, en hoe zouden die iets anders kunnen zijn dan waar of niet waar?

Bestaan de grote kardinaalgetallen (uit het paradijs van Cantor) echt? Ook nog nu bewezen is dat het keuzeaxioma onbeslisbaar is? De doorgewinterde Platonist denkt: al kunnen ze het niet beslissen, één van de twee (keuzeaxioma of ontkenning ervan) is lekker tòch waar. Gezien de historische achtergronden lijkt het waarschijnlijk dat hij op de waarheid en niet op de onwaarheid zou wedden.

12. Interpretaties. De taalfenomenoloog kan naast de door hem bestudeerde taal T nog een tweede taal S beschouwen en proberen een afbeelding te maken van wat in T wordt gezegd naar wat in S wordt gezegd. Zo'n afbeelding noemen we een interpretatie. De taalgebruiker kan deze afbeelding ervaren als het steeds aanwijzen waar hij het over heeft: hij zal het zijn bedoeling noemen.

Vaak is er een systeem van voortplanting van interpretatie: men legt de interpretatie van enkele fundamentele zaken vast en geeft aan hoe daaruit de interpretatie van daarmee opgebouwde zaken voortvloeit. Het prettige gevolg is dat het voor de interpretatie van het slot van een lang stuk tekst het vaak niet nodig is eerst de rest van de tekst te interpreteren.

De zojuist gegeven omschrijving van "interpretatie" is nog erg beperkt. Vaak is er in S niet één "vertaling" van wat in T is gezegd maar een gehele klasse. In T kan bijv. $a+b=c$ staan, en de interpretatie kan de klasse zijn bestaande uit zinnen als $1+2=3$, $2+2=4$ in S. En interpretatie van $1+2=3$ in een volgende taal kan bestaan uit alle relaties $u \cup v = w$ met u,v,w verzamelingen van resp. 1,2,3 elementen.

13. Het programma van Hilbert. Hilbert propageerde (omstreeks 1925) de gehele wiskunde te beschrijven in een formele taal en met een simpele metataal daarover twee fundamentele dingen te bewijzen: consistentie (d.w.z. onafleidbaarheid van contradicties) en volledigheid (d.w.z. elke propositie is beslisbaar).

Beide hebben gefaald zoals Gödel kort na 1930 aantoonde. Maar als men afziet van het bewijzen van consistentie en volledigheid is er geen bezwaar tegen het programma van Hilbert. De wiskundigen zijn ermee doorgegaan; zoals

Bourbaki (partiële formele taal met naïeve metataal) en als een soort eindstation AUTOMATH (1968) (volledig formele taal, zonder enige toelichting automatisch leesbaar en verifiëerbaar).

14. Het intuitionisme. L.E.J.Brouwer probeerde in 1909 met zijn intuitionisme een revolutie in het wiskundig denken teweeg te brengen omdat hij de logische principes van de klassieke wiskunde onbetrouwbaar vond. Het is geen algemeen succes geworden, wegens de ernstige beperkingen die het de technisch werkend wiskundige oplegt, maar ook wel doordat de meeste wiskundigen de zin ervan niet begrepen hebben.

Het is heel moeilijk in kort bestek te zeggen wat het intuitionisme is. Het is niet gemakkelijk in een formeel systeem onder te brengen: de intuitionistische propositie- en predikatenlogica van Heyting beschrijft slechts een deel van de gedachten die bij Brouwer leefden.

Wat het meest opvalt is de afwijzing van de "double negation law" ($\neg\neg a \to a$), van de zwakke disjunctie (d.i. het accepteren van $a \vee b$ ook als van geen van beide een bewijs bekend is), en de met de andere regels samenhangende regel van de uitgesloten derde ($a \vee \neg a$). Brouwer zei dat deze regels acceptabel waren voor bekende vertrouwde objecten zoals eindige verzamelingen maar niet voor niet "echt" bestaande dingen als oneindige verzamelingen (vgl. §11). In een systeem waarin alle vragen beslisbaar zijn kunnen de regels van de klassieke logica geen kwaad doen omdat er geen uitspraken mee kunnen worden bewezen die niet intuitionistisch af te leiden zijn, maar voor de oneindige systemen waar de wiskundige mee werkt is dat anders.

Als objecten niet "echt bestaan" is er toch nog iets dat wel echt bestaat, nl. het spreken erover. Zo verschuift de aandacht van de intuitionist naar de constructies waarmee objecten en bewijzen worden aangeduid, dus naar taalobjecten. Ten aanzien van taalobjecten is men minder argwanend: in een woord wordt de eerste letter gevolgd door een p of niet gevolgd door een p; een derde mogelijkheid is er niet.

We geven een voorbeeld van een bewijs dat niet door intuitionisten aanvaard wordt. De stelling luidt: er bestaan onmeetbare getallen a en b zó dat a^b rationaal is. Bewijs. Als $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ rationaal is, is $a=b=\sqrt{2}$ een voorbeeld. Als __ het irrationaal is dan is $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ een voorbeeld, want dan is $a^b = 2$.

15. Natuurlijke deductie versus Waarheidstafels. In het logische systeem van Boole (dat in feite een voortzetting gaf van het onbekend gebleven werk van Leibniz) wordt van samengestelde uitspraken de waarheidswaarde (waar of onwaar) vastgesteld op grond van de waarheidswaarde van de delen, gebruik makende van de bij de voegtekens (zoals $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) behorende tabellen (waarheidstafels). Een bijzondere rol spelen de tautologiëen, dat zijn samenstellingen die een aantal letters $a_1,\ldots,a_n$ (de propositievariabelen) bevatten en die de waarde "waar" opleveren voor alle 2^n combinaties van waarheidswaarden voor resp. $a_1,\ldots,a_n$. Substitutie van willekeurige uitspraken voor a_1 tot en met a_n levert dan steeds weer een ware uitspraak op.

Dit logische systeem van Boole past zeer goed bij het denken over electronische schakelingen. Er zijn daar een aantal ingangen die met propositievariabelen kunnen worden vergeleken omdat ze, onafhankelijk van elkaar, "aan" of "uit" kunnen staan. En de schakeling moet voor alle mogelijke combinaties van keuzen van "aan" en "uit" een zeker effect op de uitgangen hebben. Dit effect kan worden berekend met behulp van tabellen die voor de afzonderlijke elementen van de schakeling gelden.

Dat echter het systeem van Boole ook zo goed past bij het redeneren in de wiskunde is een misvatting met een hardnekkige traditie. Het wiskundig redeneren wordt daarentegen zeer goed beschreven in de systemen van natuurlijke deductie. In zulke systemen worden afleidingen gegeven met bijhouding van een steeds wisselende context van geldende veronderstellingen. Weliswaar kan men vaak met behulp van waarheidswaarden kwesties van afleidbaarheid van formules in zo'n systeem bestuderen, maar dat is heel wat anders dan het redeneren in het systeem zèlf.

De wiskundige praktijk kan vrij goed worden beschreven door het bijhouden van een gemengde context: de context bestaat gedeeltelijk uit geldende onderstellingen, gedeeltelijk uit geldende variabelen van gespecificeerde soort. Zulke systemen zouden we systemen van mathematische deductie kunnen noemen.

Literatuurlijst.

Bell, E.T.: Men of Mathematics. Dover Publications, 1937.

de Bruijn, N.G.: AUTOMATH, a language for mathematics. A series of lectures by N.G. de Bruijn, at the Séminaire de mathématiques supérieures, Université de Montréal, June 1971. Les Presses de l'Université de Montréal, 1973. Lecture Notes prepared by B.Fawcett.

de Bruijn, N.G.: Set theory with type restrictions. Published in: Infinite and finite Sets, ed. A.Hajnal, R.Rado, Vera T.Sős, Vol. I, pp. 205-314, Colloquia Math.Soc.János Bolyai 10 (1975).

van Dalen, D., Doets, H.C., de Swart, H.C.M.: Verzamelingen - naief, axiomatisch en toegepast. Utrecht, Oosthoek, Scheltema & Holkema, 1975.

Freudenthal, H.: Mathematics as an educational task. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1973. (Er is ook een duitse editie).

Halmos, P.: How to write mathematics. Enseignement Math. (II) 16 (1970), 123-152.

Helmberg, G.: Mathematicus scribens. Rede, T.H. Eindhoven 1966.

Hiele, P.M. van: Begrip en inzicht: werkboek van de wiskundedidactiek. Purmerend, Muusses, 1973.

Lakatos, I.: Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery, Cambridge University Press, 1976.

Nederpelt, R.P.: Bewijsmethoden. (Aansluitend bij Hoofdstuk I van het boek van S.T.M.Ackermans en J.H. van Lint: Algebra en Analyse).

Nederpelt, R.P.: Presentation of natural deduction. Recueil des Travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle Série, tome 2(10), 1977.

Otte, M.: Mathematiker über die Mathematik. (M.Otte ed.) Springer Verlag 1974.

Polya, G.: How to solve it. Princeton, Princeton University Press, 1945.

Polya, G.: Induction and analogy in mathematics. Princeton, Princeton University Press 1954. (Mathematics and plausible reasoning vol. I).

Polya, G.: Patterns of plausible inference. Princeton, Princeton University Press, 1954. (Mathematics and plausible reasoning, vol. II).

Struik, D.J.: Geschiedenis van de wiskunde. Utrecht, Spectrum, 1965. (Aula-boeken; 195).

van den Toorn, M.C.: Nederlandse Grammatica. Groningen, H.D. Tjeenk Willink, 1975. Derde herziene druk.

Langage et Pensée Mathématiques, Coll.Internat.Centre Univ. Luxembourg 1976.

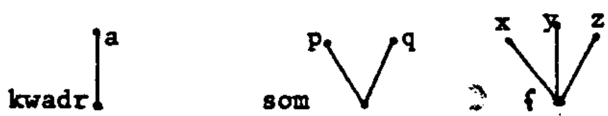
Bijlage bij het college Taal & Struktuur van de Wiskunde.
Februari 1978, N.G. de Bruijn.

Lezen en schrijven van formules.

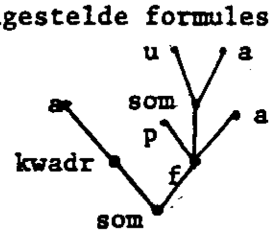
1. Boomstructuur. We gaan uit van de opvatting dat formules in wezen boomvormig zijn, en dat niet-boomvormige schrijfwijzen alleen gekozen zijn terwille van het gemak bij schrijven en drukken.

Bouwstenen van formules zijn figuurtjes van de vorm:

Bij het punt onderaan schrijft men de operator, bij de boveneinden van de opgaande takken de operanden. De operaties heten resp. unair, binair, ternair, etc.: Voorbeelden:



In gebruikelijke notaties worden deze met a^2, p+q, f(x,y,z) aangegeven. Men kan nu ook samengestelde formules bouwen:



a^2 + f(p,u+a,a).

De in de boom voorkomende namen (som, kwadr, a, f, p, u) heten identificatoren. De namen bij knooppunten heten operatornamen.

2. Lineaire presentatie. Er kunnen allerlei afspraken worden gemaakt om als boom bedoelde formules in lineaire vorm (d.i. in de vorm van een rij symbolen) te brengen. De afspraken dienen zó te zijn dat de relatie tussen boom en symboolrij ééneénduidig is. Het terugvinden van de boom uit gegeven symboolrij heet ontleding (engels: parsing). Hetzelfde probleem doet zich bij zinnen in een natuurlijke taal voor.

Een goed systeem is de prefixnotatie. Men schrijft de naam van de operator voorop, daarachter een serie operanden gescheiden door komma's, en de gehele serie staat tussen haakjes. De operanden staan zèlf ook weer in prefixnotatie. Het voorbeeld uit § 1 wordt in prefixnotatie

som(kwadr(a),f(p,som(u,a),a)). (1)

De ontleding geeft geen moeilijkheid, ook niet als (zoals hier) sommige namen met meer dan één letter worden geschreven. Men moet wèl verbieden de operatoren namen te geven waar haakjes of komma's in voorkomen.

Wanneer van elke operator het aantal operanden bekend is kan men alle haakjes en komma's weglaten (mits de identificatoren duidelijk van elkaar gescheiden zijn). In het voorbeeld:

som kwadr a f p som u a a (en niet somkwadrafpsomuaa).

Men noemt dit wel de poolse notatie (Łucasiewicz).

Een ander goed systeem is "reverse polish". De operator komt hier steeds achter de serie operanden, en alle haakjes en komma's blijven weer weg:

a kwadr p u a som a f som

Deze notatie houdt verband met het bijhouden van een stapel bij de numerieke uitvoering van operaties: de identificatoren worden van links naar rechts gelezen en op een stapel geplaatst. Komt een operatornaam bovenop de stapel te liggen (als laatst-ingelezen naam), en vereist die bijv. 2 operanden, dan laat men de operator werken op de twee getallen die eronder liggen, haalt die twee getallen en de operatornaam weg, en legt het resultaat van de operatie bovenop de stapel. Aan het slot ligt er nog slechts één getal op de stapel, en dat is de uitkomst. We laten groei en krimp van de stapel bij ons voorbeeld zien; gemakshalve leggen we de stapels horizontaal:

a kwadr

a^2

a^2 p u a som

a^2 p u+a

a^2 p u+a a f

a^2 f(p,u+a,a)

a^2 f(p,u+a,a) som

a^2 + f(p,u+a,p)

Deze algoritme werd zoëven met berekening geassocieerd, maar men kan hem ook zien als een manier om de prefixnotatie te produceren.

Als operatoren binair zijn past men vaak infixnotatie toe: de operatornaam wordt tussen de operanden geschreven. In het algemeen zijn haakjes daarbij onmisbaar.

Voorbeeld van een infixformule:

$(P \cap (Q \cup R)) \subset (P \cup (R \cap S))$;

15

in reverse polish luidt deze $P\ Q\ \bar{R} \cup \cap\ P\ R\ S \cap \cup \subseteq$.

3. <u>Gemengde notatie</u>. Gewone wiskundige notatie is doorgaans een mengsel van infix en prefix, aangevuld met nog wat fantasienotaties. Wat dat laatste betreft noemen we x^3 (i.p.v. $x \uparrow 3$), het postfix uitroepteken voor de faculteiten, worteltekens met strepen boven de formules i.p.v. haakjes, bovenstreping voor complex conjugeren, notaties als (v,w) voor inproduct, notaties (m,n) en {m,n} voor GGD en KGV, breuknotaties met horizontale breukstreep, letters met indices, intervalnotaties, enz.

Terwille van het snel lezen en schrijven zijn er regels voor het weglaten van haakjes. Zo'n regel is alleen bruikbaar als er ook een algoritme is om de weggelaten haakjes weer terug te vinden, d.w.z. om de boomstructuur te bouwen.

We beperken ons even tot het geval met de 4 arithmetische infixoperaties

$$\times \qquad / \qquad + \qquad -$$

Er zijn twee systemen: "V,D,O&A" en "V&D,O&A". We beschrijven de leesalgorithme bij V,D,O&A: zoek eerst van links naar rechts de symbolen × op en plaats haakjes links van de linker- en rechts van de rechteroperand. Staat er bijv.

$$(a + (b+c) \times d) \times f + g$$

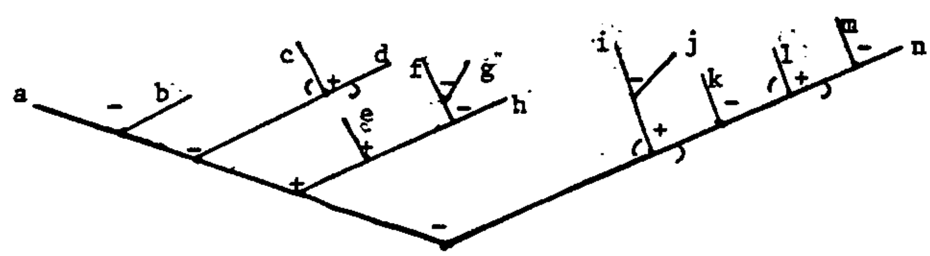
dan is de eerste stap dat om $(b+c) \times d$ haakjes worden gezet; de tweede stap zet haakjes om $(a+((b+c) \times d)) \times f$. Men vindt steeds wat de linkeroperand is door van het ×-teken naar links te gaan en op te houden zodra men evenveel openingshaakjes als sluithaakjes heeft (maar als er direct links van het × - teken een identificator staat houdt men al op na het lezen daarvan). Voor de rechteroperand handelt men analoog. Nadat men dit gedaan heeft doet men hetzelfde met alle tekens /. In de derde ronde neemt men de plussen en de minnen in de volgorde waarin ze staan (dus <u>niet</u> eerst alle plussen en dan pas alle minnen).

Gaat het om numerieke berekening waarbij de gehele formule moet worden afgebroken dan kan men zich de moeite besparen om haakjes bij te plaatsen die tòch weer worden verwijderd. We gaan dan anders te werk. Eerst formuleren we de gedragslijn voor formules zonder haakjes. Dan luidt de regel als volgt: Lees de formule van links naar rechts. Vervang elke combinatie "getal × getal" door het product. Doe het daarna met delingen, en in de derde ronde met O&A. Voor formules mèt haakjes luidt de regel: Kies een combinatie (U), waarbij U een formule zonde haakjes is. Werk U uit, dit levert een getal u. Vervang nu (U) door u. Ga hiermee door tot alle haakjes zijn verdwenen.

Tot nu toe ging het over het lezen van formules met ontbrekende haakjes. De corresponderende regels voor het weglaten van haakjes zijn wat ingewikkelder. Het is ook niet eenduidig: men mag best $(a+b)+c \times d$ schrijven in plaats van $a+b+c\times d$.

(16)

Het gemakkelijkst zegt men: men mag haakjes weglaten mits daarna de leesalgorithme nog het goede resultaat geeft. Gedeeltelijk berust nu de haakjesweglaterij nog op dingen als de associatieve wetten: wegens a+(b+c) = (a+b)+c, a+(b-c) = (a+b)-c mag men a+(b+c) rustig met a+b+c noteren en a+(b-c) met a+b-c. Op grond van deze regels kan men bijv. in een formule als



zich beperken tot het plaatsen van haakjes om knopen die staan op de rechtsopgaande poot van een minteken. Dit is in de figuur gebeurd. Mechanisch oplezende bij het van links af omlopen van de boom komt er

$$a - b - (c + d) + e + f - g - h - (i - j + k - (l + m - n)).$$

Tegenwoordig is er onder angelsaksische invloed (en onder invloed van computertalen, want ook computers komen uit het westen) de neiging om op "V&D,O&A" over te gaan. Dit ligt ons niet zo prettig, we zijn nog steeds gewend om a/bc te lezen als a/(bc). (Zoals gebruikelijk worden alle maaltekens weggelaten).Niemand schrijft overigens a/bc/d/fg, wat volgens "V,D,O&A" betekent ((a/(bc))/d)/(fg) en volgens "V&D,O&A" ((((a/b)c)/d)/f)g.

Volgens de Europese traditie werd bij de schuine streep de linkeroperand iets hoger en de rechter iets lager geschreven. Daardoor was het verschil tussen

$$^{2}/_{3}\ a \qquad \text{en} \qquad ^{2}/_{3a}$$

ook zonder haakjes duidelijk. Waarschijnlijk is de ellende pas goed op gang gekomen toen in de V.S. omstreeks 1925 de zetters van drukwerk meer gingen verdienen dan de lezers en de schrijvers, waardoor men alle wiskundig zetwerk zo lineair mogelijk (d.i. zo goedkoop mogelijk) ging maken.

Machtsverheffing is eigenlijk geen probleem. Bij machtsverheffing is door verschil in niveau direct duidelijk wat er gebeuren moet: de exponent is een afzonderlijk leesbare formule, en het grondtal moet tussen haakjes (behalve wanneer het één identificator is).

De worteltrekking had in het beruchte MVDWOA een lage rang, zodat $\surd ab$ als $\surd(ab)$ moest worden opgevat. Maar de moeilijkheid deed zich niet voor zolang men met wortelstok $\sqrt{ab}$ kon schrijven. En men vermeed de moeilijkheid door toepassing van de commutatieve wet en soortgelijke wiskundige regels: $2(\surd 2)a$ werd $2a\surd 2$, $(\surd p)(\surd q)$ werd $\surd(pq)$ en niet $\surd p \surd q$ (wat volgens MVDWOA $p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}$ betekent). De beste raad is: pas bij het lezen V,D,W,O&A toe maar zet bij het schrijven de uitdrukking achter het wortelteken, steeds tussen haakjes, tenzij het maar één enkele identificator is. En zet de hele uitdrukking met wortelteken en al tussen haakjes wanneer erachter weer V of D komt.

Men kan nog verder gaan en zeggen: schrijf zó dat elke preferentievolgorde bij V,D,W bij lezen hetzelfde resultaat geeft, mits ze maar vóór O&A gaan.

4. Verdere opmerkingen over preferenties. Heeft men een preferentievolgorde gekozen, zoals V,D,O&A dan zegt men dat V sterker bindt dan D, enz., dat O en A sterker scheiden dan D, enz.

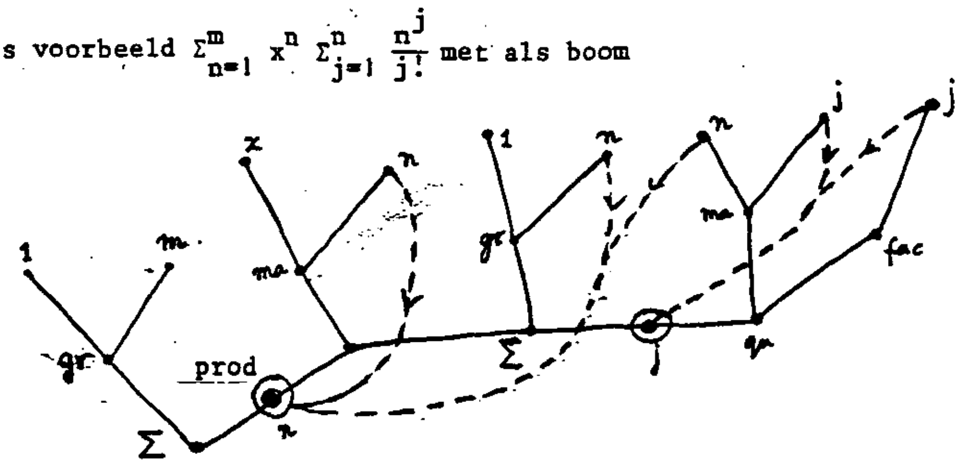
Ook bij verzamelingsleer en logica gebruikt men infixnotaties die om preferentieregels vragen. Men zal $\cap$ en $\cup$ sterker laten binden dan $\subset$, $\in$ en $=$. In de logica wordt de volgorde $\forall$ & $\exists$, $\wedge$ & $\vee$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$ aangetroffen.

Wanneer een infix bewerkingssymbool (laten we als voorbeeld $*$ schrijven) aan de associatieve wet voldoet, kunnen we $a * b * c * d$ zonder haakjes schrijven: er komt tòch altijd hetzelfde uit. In een niet-associatief systeem moet het, als we een met "V,D,O&A" overeenkomende regel toepassen, worden opgevat als $((a * b) * c) * d$. We noemen dit wel de linksassocierende opvatting.

In speciale vakgebieden heeft men afwijkende gewoonten. Men heeft er te maken met speciale formules. Bij integraalvoorstelling van Besselfuncties komt $\cos(x \sin t)$ voor, maar in de goniometrie zelden. In de goniometrie zal men met $\cos x \sin t$ steeds $(\cos x)(\sin t)$ bedoelen. En met $\sin 2x$ bedoelt men niet $(\sin 2)x$, want $\sin 2$ komt daar nooit voor. Van formules waaraan men gewend is gaat een sterke suggestie uit. Niemand zal bijv. denken dat met de constante term in $ax^4+bx^3+cx^3+dx+e$ de basis van de natuurlijke logarithmen bedoeld is!

5. Gebonden variabelen. Formules kunnen letters bevatten die we variabelen noemen. Eenzelfde letter (x bijvoorbeeld) kan op verschillende plaatsen in een formule voorkomen. We staan toe dat één ervan een zeer speciale rol vervult door op een zg. bindingsplaats te staan. We kunnen van elke andere plaats waar x staat een pijl naar die bindingsplaats tekenen. Nadat die pijlen gezet zijn kunnen we zeggen dat de naam van de variabele er niet meer toe doet: het zijn de pijlen waar het op aankomt.

We nemen als voorbeeld $\Sigma_{n=1}^{m}\ x^n\ \Sigma_{j=1}^{n}\ \frac{n^j}{j!}$ met als boom



De pijlen gaan steeds naar een punt lager in de boom. De letters n en j zijn de gebonden variabelen (of dummies). De bindingsplaatsen zijn met een cirkeltje aangegeven. Vanuit de linkertak van een Σ mogen geen pijlen naar de bij deze Σ behorende bindingsplaats gaan, en daarom hebben we de bindingsplaats direct boven Σ in de rechtertak gezet.

Men mag de letters n,j rustig door andere letters vervangen mits die maar tot hetzelfde pijlenschema leiden. Het kan zelfs geen kwaad eenzelfde letter voor verschillende bindingsplaatsen te gebruiken, zoals bij

$$\Sigma_{n=1}^{m}\ n^2 + \Sigma_{n=1}^{m}\ n^{-2},$$

maar men vermijde liever de situatie dat een x twee bindingsplaatsen x onder zich in de boom heeft.

Zoëven waren de pijlen in de boom aangegeven. Misschien verheldert het dit ook eens in de formule te doen.

$$\sum_{\square=1}^{m} x^{\square} \sum_{\square=1}^{\square} \frac{\square^{\square}}{\square!}$$

6. Voorbeelden van binders.

6.1 $\Sigma_{k=1}^{5}\ (k^2+k)$ is waarschijnlijk de oudste.

6.2 $\Pi_{k=1}^{4}\ f(k) = f(1)f(2)f(3)f(4)$. Als de vermenigvuldiging niet commutatief is wordt dit gevaarlijk. Men kan het symbool bijv. niet vervangen door $\Pi_{k\in\{1,2,3,4\}}\ f(k)$ want in $\{1,2,3,4\}$ is geen ordening aangegeven.

6.3 $\mathrm{subst}_{x:=5}\ f(\ldots x\ldots)$ betekent het resultaat van de vervanging van x door 5.

6.4 $\cup_{i=1}^{n}\ S_i$, $\cup_{i\in J}\ S_i$, idem met $\cap$.

6.5 $X_{i=1}^{n}\ A_i$ (cartesisch product; let op volgorde!).

6.6 $\forall_{x\in S}\ P(x)$, $\exists_{x\in S}\ P(x)$.

6.7 $\#_{x\in S}\ P(x)$ (= het aantal x in S met P(x)).

(19)

6.8 $\{x \in S \mid P(x)\}$ (= de verzameling der x in S met P(x); de notatie van de binding wijkt nogal van de andere af; Freudenthal gebruikt $\uparrow_{x \in S}$ P(x)).

6.9 $\downarrow_{x \in S}$ P(x) (gedefiniëerd wanneer er precies één $x \in S$ met P(x) is; het duidt dan die ēne x aan. Met andere woorden: $\downarrow_{x \in S} \ldots$ = jota($\uparrow_{x \in S} \ldots$); jota is Peano's functie die aan het singleton {x} het element x toevoegt).

6.10 $\curlyvee_{x \in S}$ g(f(x,a),x) is de functie met domein S, die wanneer $x \in S$, aan x toevoegt g(f(x,a),x).

6.11 Wanneer men $\curlyvee$ voldoende algemeen opvat (bijv. door als waarden ook proposities toe te laten) kan men de meeste binders daarin uitdrukken door het invoeren van nieuwe unaire operatoren:

$$\Sigma_{n=1}^{m} (n^2 + n) = \text{som}(\curlyvee_{n \in [1,m]} (n^2+n)),$$

$$\forall_{x \in S} P(x) = AL(\curlyvee_{x \in S} P(x)),$$

$$\max_{x \in R} (x - x^2) = \max(\curlyvee_{x \in R} (x - x^2)),$$

$$\uparrow_{x \in \mathbb{R}} P(x) = \tau(\curlyvee_{x \in \mathbb{R}} P(x)), \text{ waarin } \tau(f) = f^{+}(\text{waar}),$$

$$\{x^2 - 1 \mid x \in S\} = \text{beeld}(\curlyvee_{x \in S} (x^2 - 1)).$$

6.12 Freudenthal propageert een <u>vraagbinder</u>, bijv.

$$?_{x \in \mathbb{R}} (x^2 - x - 2 = 0).$$

Een bezwaar ertegen is dat deze uitdrukking wat ver buiten de rest van de wiskundige taal valt. Het kan ook eenvoudig met

$$\uparrow_{x \in \mathbb{R}} (x^2 - x - 2 = 0) \qquad ?$$

(het laatste vraagteken betekent niet "is het waar dat" maar "wat is").

6.13 Een computerprogramma kan misschien wel als een wiskundige formule worden opgevat, maar de variabelen erin spelen een geheel ander spel dan de variabelen in de wiskunde; het zijn een soort projectieoperatoren. Toch is er in syntactische zin sprake van binding: nl. door declaratie:

<u>begin</u> <u>integer</u> n; ......n ...... n ..... <u>end</u>

7. <u>Binding met restrictie</u>. Laat S een verzameling zijn, en laat P(x) een propositie zijn voor elke $x \in S$. Dan is T, gedefiniëerd door

$$T := \{x \in S \mid P(x)\} = \uparrow_{x \in S} P(x) \qquad (1)$$

een deelverzameling van S. Vaak heeft men behoefte om binders als $\forall_{x \in T}$ in te voeren zonder T zelf eerst te definiëren. We kiezen daartoe de constructie

$$\forall_{x \in S \ \mid P(x)} \qquad (2)$$

die wordt uitgesproken als "voor alle $x \in S$ met P(x) geldt" of "voor alle $x \in S$ die aan P(x) voldoen geldt". Heel vaak probeert men het zonder (1) te doen, nl. door

$$\forall_{x \in S}((P(x) \to Q(x)) \qquad (3)$$

te gebruiken i.p.v. $\forall_{x \in S \mid P(x)} Q(x)$. Dit is niet alleen onnatuurlijk maar ook vaak onjuist, nl. in die gevallen dat Q(x) pas gelezen kan worden als P(x) waar is. In die gevallen is $P(x) \to Q(x)$ een gegeneraliseerde en geen gewone implicatie. Het voordeel van (2) blijkt ook wanneer men hetzelfde met existentie doet. De vorm

$$\exists_{x \in S \ \mid P(x)} Q(x)$$

is in overeenstemming met wat men uitspreekt, en

$$\exists_{x \in S} P(x) \wedge Q(x) \qquad (4)$$

is dat niet; bovendien is $P(x) \wedge Q(x)$ vaak geen gewone conjunctie.

Ook bij enkele andere binders is de restrictienotatie plezierig lees- en schrijfbaar. (Alternatieven als (3) en (4) zijn er doorgaans niet, en het invoeren van een extra letter T via (1) is lastig, zeker als de restrictie ergens diep binnen een formule moet gebeuren). Voorbeelden:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N} \ \mid \ i \text{ oneven}} S_i,$$

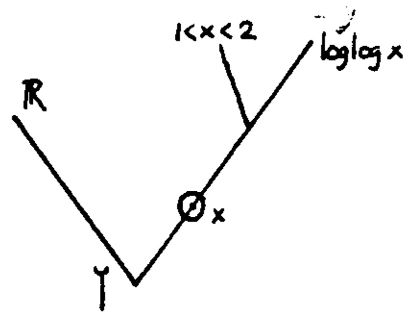
$$\#_{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0} (x^4 - 2x + a = 0),$$

$$\uparrow_{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0} (\log x < 2),$$

$$\downarrow_{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0} (x^2 + x = 5),$$

$$\Upsilon_{x \in \mathbb{R} \ \mid \ 1 < x < 2} \log \log x.$$

Wanneer men zo'n formule in boomvorm brengt moet de restrictie (die de dummy mag bevatten) boven de bindingsplaats komen. In het laatste voorbeeld schematisch.



8. Indexnotatie. Men kan twee opvattingen huldigen:

(i) a_k is een afkorting voor a(k). De afkorting heeft echter het typografische nadeel dat k niet gemakkelijk door een ingewikkelde formule kan worden vervangen. De indexnotatie kan overigens helpen om te ontkomen aan de conditie (zie § 2) dat in operatornamen geen haakjes mogen voorkomen: men heeft liever $f_k(x)$ dan f(k)(x).

(ii) $a_1, a_2, \ldots$ zijn identificatoren die men gebruikt omdat het alfabet uitgeput is, en ook wel omdat het een middel is óm het bij elkaar horen van een stel objecten suggestief aan te duiden. Men kan de hoekpunten van een driehoek nog wel A,B,C of P,Q,R noemen, maar bij de regelmatige zeventienhoek is $P_1, \ldots, P_{17}$ overzichtelijker dan het gebruiken van de eerste 17 letters van het alfabet. Binnen de opvatting (ii) past niet het gebruik van indices waarvan de syntactische vorm verschilt van een in cijfers uitgeschreven natuurlijk getal. Als men zegt dat a_n voor elke $n \in \mathbb{N}$ een letter is, vermengt men taal en metataal. Daarom verdient (i) meestal de voorkeur.

9. Stippeltjes. De notatie

voor $k = 1, \ldots, n$ (1)

is een zeer leesbare afkorting van

voor $k \in \mathbb{N}$ met restrictie $1 \le k \le n$ (2)

mits men dat afspreekt. Zonder afspraak is niet zo duidelijk wat de bedoeling is als n=2 (dan staat er niets op de stippeltjes, en er is een komma teveel), als n=1 (nog erger) en als n < 1(dan valt er van (1) niets meer te maken). De uitdrukking (2) is ten allen tijde duidelijk. Als bijv. n=0 stelt het voor "voor $k \in \emptyset$". (Bij dit laatste terloops de waarschuwing dat het niet betekent "voor geen enkele k").

Bijlage bij college: Taal en Struktuur v.d. Wiskunde.
Juni 1977 - N.G. de Bruijn.

Nederlandse wiskundige zinnen met letters.

1. In WOT(=wiskundige omgangstaal) komen veel zinnen voor waarin een letter grammaticaal de rol van een woord vervult. Bijvoorbeeld "P ligt op de cirkel", "het eenheidselement van G commuteert met alle andere elementen".

Wij gaan uit van een lijst van zulke zinnen, die in §12 is opgesteld. Voor de letter is steeds de letter v gekozen. Ter afkorting in onze huidige discussie zijn de zinnen met $P_1(v),\ldots$ aangeduid.

Wij beperken ons tot zinnen waarin v zou kunnen fungeren als eerder ingevoerde afkorting van een object. Dat wil zeggen dat er voor v gesubstitueerd kan worden. Bijvoorbeeld: "v is een kwadraat" kan door substitutie overgaan in "3^2+4^2 is een kwadraat". Met een zin als "geen enkel geheel getal v heeft een negatief kwadraat" is zoiets niet het geval; daarin is v "gebonden" door de quantificatie "geen enkel".

2. Bij alle zinnen van onze lijst is tussen rechte haken een typering aangegeven. Als er bijvoorbeeld staat

$P_2(v)$ = v heeft een rechte hoek [driehoek]

dan kan men desgewenst lezen "de driehoek v heeft een rechte hoek". In de gevallen waarin v een eerder genoemde afkorting is voor een bepaald object, is deze toevoeging doorgaans overbodig. Wij schrijven de typering er tussen [ ] bij omdat die bij allerlei transformaties van de zin opduikt.

Als het type V is, zullen we de zin een zin over V noemen.

3. Bijzinsinversie. Van elke zin kan men een bijzin maken door er een voegwoord als "dat", "omdat", voor te zetten en de volgorde van de zin aan te passen. Zo'n volgordeverandering heet inversie. Het komt er hier doorgaans op neer dat de persoonsvorm naar achteren verhuist. Wij geven dit met een accent vóór de letter P aan: als bijvoorbeeld

$P(v)$ = deze cirkel snijdt v niet

dan is

$'P(v)$ = deze cirkel v niet snijdt.

Natuurlijk is $'P(v)$ geen goede zin, maar zinnen als

het is niet waar dat $'P(v)$

wij zien nu dat $'P(v)$

zijn het wèl.

De bijzinsinversie kan ook worden toegepast als P(v) zèlf een bijzin bevat. Bijvoorbeeld als P(v) = Uit (1) volgt direct dat v positief is.

4. Constructies met 'P(v). Met "dat 'P(v)" zijn veel wiskundige gedachten uitdrukbaar. Vaak zijn het lelijke, houterige constructies, maar ze zijn wèl veilig, d.w.z. dat ze weinig kans op misverstand geven. Misschien komt dit wel doordat in een vorm als "dat v een rechte hoek heeft" het dat ... heeft als een soort afschermend haakjespaar werkt, zoals begin ... end. We bekijken een aantal van deze constructies.

a) Ontkenning. Als houterige ontkenning van P(v) kan gebruikt worden

Het is niet waar dat 'P(v).

Opgave. Doe dit met alle zinnen van de lijst. Probeer ook mooiere zinnen te bouwen die hetzelfde uitdrukken (i.p.v. "het is niet waar dat v een kwadraat is" zeggen we "v is geen kwadraat"). Merk bijvoorbeeld het verschil tussen $P_{26}(v)$ en $P_{28}(v)$ op.

b) Bindingen. Nu gaan de typeringen een rol spelen. We zullen hier van WOT afwijken door de dubbele punt te gebruiken. Als V een typerend substantief is (bijvoorbeeld "punt") gebruikt men in WOT "elk punt v", "alle punten v", "een punt v". Wij schrijven nu "elke v : V", "alle v : V", "een v : V" waarmee geslachtelijke verschillen worden genegeerd, en niet de moeite wordt genomen om aan V een meervoud te geven.

We geven nu een aantal houterige bindingsconstructies.

(i) voor alle v : V geldt dat 'P(v),
(ii) voor geen enkele v : V geldt dat 'P(v),
(iii) er bestaat een v : V met de eigenschap dat 'P(v),
(iv) niet voor alle v : V geldt dat 'P(v).

Dit zijn zinnen. Het volgende voorbeeld is niet een zin maar naam van een voorwerp.

(v) de verzameling van alle v : V met de eigenschap dat 'P(v).

5. Eenvoudigerconstructies. In vele eenvoudige zinnen kan men (i) vervangen door P(elke v : V). Is bijvoorbeeld

P(v) = -1 is kleiner dan v [positief getal]

dan werkt dit goed (-1 is kleiner dan elk positief getal), maar bij

$P(v) = -1$ is kleiner dan het kwadraat van v [reëel getal]

kan men de mist in gaan.

Als v het onderwerp van P(v) is kan men i.p.v. P(elke v : V) ook P^m(alle v : V) nemen, waarbij P^m de meervoudsvorm van P is.

Wat voor P(elke v : V) *gezegd is geldt ook voor* P(geen enkele v : V). Als v onderwerp is, is ook P(niet elke v : V) vaak een bruikbare constructie.

Zelfs in dat eenvoudige geval dat v onderwerp is loopt het mis wanneer de zin ontkennend is (bijvoorbeeld v is geen kwadraat). Men kan de zin (i) nu wèl vereenvoudigen door van $\neg\exists = \forall\neg$ gebruik te maken ("geen enkele v is een kwadraat), maar dat is een wiskundige regel en geen taalregel.

Opgave. Vorm de bindingen (i) t.e.m. (v) voor alle zinnen uit §12 en probeer vereenvoudigingen te vinden.

6. Uitbreidingen van WOT. We hadden WOT al verrijkt met de typeringsnotatie v : V waarin V een substantief voorstelt.

Er is vaak behoefte om van de naam van een klasse op het bijbehorend substantief over te gaan en omgekeerd. Daarvoor gebruiken we $\downarrow$ en $\uparrow$: als K de naam van een klasse is, is $K^\downarrow$ *als substantief* toegelaten, en als V een substantief is dan is $V^\uparrow$ de klasse van alle V's (Voorbeeld: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\} =$ = (natuurlijk getal)$^\uparrow$, "elke $\mathbb{N}^\downarrow$ is positief" " er is geen enkele $\mathbb{N}^\downarrow$ met ...". (Merk op dat we meer-woordige substantieven toelaten). We zien dat

$$x \in K \quad \text{synoniem is met} \quad x : K^\downarrow$$

en dat

$$x : V \quad \text{synoniem is met} \quad x \in V^\uparrow$$

(*als we even net doen of* "klasse" *hetzelfde is als* "verzameling").

Er zijn in WOT sporen aanwezig van een substantief dat men met $S_{v:V}P(v)$ zou willen aangeven. Met

$$S_{v:\text{lijn}} \text{ v gaat door het middelpunt van de cirkel}$$

zou men "middellijn" bedoelen, om zo "v : middellijn" synoniem te maken met "v is een lijn en v gaat door het middelpunt van de cirkel".

Men kan ook zeggen dat $S_{v:V}P(v)$ hetzelfde is als

{de klasse van alle v : V met de eigenschap dat 'P(v)}$^\downarrow$.

Dat we hier wèl $S_{v:V}P(v)$ en niet $\forall_{v:V}P(v)$ e.d. als WOT-uitbreidingen noemden hangt ermee samen dat voor de laatste in WOT wèl constructies bestaan (nl. (i) - (v) in §4), al zijn die wat lang.

Nauw verbonden met het substantief $S_{v:V}P(v)$ is het <u>predikaat</u> $\Upsilon_{v:V}P(v)$ (d.i. een functie die aan elke v een propositie toevoegt). En dan is er nog het <u>adjectief</u> dat van een v : V bedoelt te zeggen dat het aan het predikaat voldoet. Laat ons deze in WOT onbekende constructie door $Adj_{v:V}P(v)$ voorstellen. Neem als voorbeeld

$P(v)$ = v heeft een rechte hoek. [driehoek]

Nu komt $Adj_{v:V}P(v)$ overeen met het woord :rechthoekig" (waaraan men gewoonlijk een definitie wijdt een driehoek heet rechthoekig als...) en $S_{v:V}P(v)$ met het substantief "rechthoekige driehoek". Het predikaat zou men met "rechthoekigheid", "is rechthoekig", "rechthoekig zijn", "de eigenschap rechthoekig te zijn" kunnen betitelen. Grammaticaal worden deze vier op verschillende manieren gebruikt, en er schijnt (in het nederlands) geen duidelijke afspraak te zijn wàt nu eigenlijk het predikaat is.

Wel dient men te bedenken dat de notatie $Adj_{v:V}P(v)$ in zich de kennis van V draagt, en dat zulks bij het vervangen door een enkel woord (zoals "rechthoekig") verduisterd wordt. En inderdaad, als men definiëert "een driehoek is rechthoekig als hij een rechte hoek heeft" is nog niet uitgelegd wat een rechthoekige vierhoek is! (Bijna iedereen zal hier zelfs een <u>andere</u> definitie raden, nl. een vierhoek waarvan alle hoeken recht zijn).

9. <u>Bindingen waarbij de variabele ongenoemd blijft</u>. Laat ons uitgaan van de substantiefconstructie $S_{v:V}P(v)$; maar wat we zullen zeggen kan ook voor andere bindingen worden gebruikt.

Als v onderwerp is van de zin P(v) kan het substantief zonder de letter v worden uitgedrukt, nl. met 'P(V die) (of 'P(V dat) wanneer V onzijdig is). Als bijvoorbeeld

$P(v)$ = v ligt tussen a en b [geheel getal]

dan wordt 'P(V dat) = geheel getal dat tussen a en b ligt.

Als v lijdend voorwerp is in P(v) probeert men de zin eerst om te vormen tot een zin waarvan v wèl onderwerp is ("Q halveert v" wordt "v wordt door Q" gehalveerd). Als v in de zin P(v) een voorzetsel voor zich heeft, kan men doorgaans met "waarin", "waarop", enz. uit de voeten. Bijvoorbeeld als

$P(v)$ = M is het midden van v [lijnstuk]

dan is het substantief

lijnstuk waarvan M het midden is.

Opgave. Probeer op deze wijze substantieven te vormen bij alle zinnen van §12.

Opgave. Transformeer de zinnen van §12 in zinnen van de vorm "v heeft de eigenschap..." waarbij op de stippeltjes geen letter v meer voorkomt; vermijd ook met "hem" of "het" of "die" over v te spreken. (Bijvoorbeeld v heeft de eigenschap een kwadraat te zijn, v heeft de eigenschap dat M er het midden van is, v heeft de eigenschap door deze cirkel gesneden te worden).

10. Meervoudsvormen. Men kan, als a : V, b : V en P(v) een zin over V is, uit de zinnen P(a) en P(b) de zin "P(a) en P(b)" maken. Bijvoorbeeld als

P(v) = het regent in v [stad]

dan is "P(Amsterdam) en P(Rotterdam)" de zin "het regent in Amsterdam en het regent in Rotterdam". Deze probeert men vaak te bekorten tot "het regent in Amsterdam en in Rotterdam" of tot "het regent in Amsterdam en Rotterdam".

In moeilijker zinnen kan dit samentrekken allerlei ongelukken geven. Bijvoorbeeld, bij

P(v) = de diagonalen van v snijden elkaar [vierhoek]

mag P(a) en P(b) niet worden "de diagonalen van a en b snijden elkaar" en bij

P(v) = v heeft een rechte hoek [vierhoek]

mag "P(a) en P(b)" niet worden weergegeven met "a en b hebben rechte hoeken", en evenmin met "a en b hebben een rechte hoek".

Opgave. Bekijk de zinnen van §12.

11. Opmerkingen. Vaak voert men nieuwe termen in om het spreken te vergemakkelijken. Uit het voorgaande is wel gebleken dat taalkundige uitdrukkingen met ontkenningen quantificaties of bijzinnen veel minder plooibaar zijn dan meer directe. Zo is bijvoorbeeld de term "reeks met positieve termen" zo hanteerbaar dat er geen behoefte is aan een samenvattend woord. Die behoefte begint sterker te worden bij het opereren op ingewikkelder constructies zoals op de zin

P(v) = er is maar een Q-cirkel die v omvat en die heeft v tot middelpunt. [punt]

12. Voorbeelden van zinnen.

a. Zinnen met onderwerp v.

$P_1(v)$ =	v is een kwadraat	[getal]
$P_2(v)$ =	v heeft een rechte hoek	[driehoek]
$P_3(v)$ =	v deelt de rechthoek in twee gelijke delen	[lijn]
$P_4(v)$ =	v wordt door deze kromme gehalveerd	[lijnstuk]
$P_5(v)$ =	v is het kwadraat van 3	[getal]
$P_6(v)$ =	v heeft geen reële wortel	[vergelijking]
$P_7(v)$ =	v staat niet loodrecht op w	[vlak]

b. Zinnen met lijdend voorwerp v.

$P_{11}(v)$ =	deze cirkel snijdt v	[lijn]
$P_{12}(v)$ =	deze cirkel snijdt v niet	[lijn]
$P_{13}(v)$ =	deze cirkel snijdt v ten hoogste één keer	[lijn]

c. Zinnen waarin v (met voorzetsel) een bepaling is.

$P_{21}(v)$ =	deze lijn heeft geen snijpunt met v	[kromme]
$P_{22}(v)$ =	M is het midden van v	[lijnstuk]
$P_{23}(v)$ =	P ligt niet op v	[lijn]
$P_{24}(v)$ =	in v ligt geen enkel kwadraat	[verzameling]
$P_{25}(v)$ =	S is het snijpunt van v met w	[kromme]
$P_{26}(v)$ =	de elementen van v zijn rechthoekige driehoeken	[verzameling]
$P_{27}(v)$ =	b is het product van v en s	[getal]
$P_{28}(v)$ =	de diagonalen van v snijden elkaar	[vierhoek]
$P_{29}(v)$ =	de afstand van het middelpunt tot v is positief	[punt]
$P_{30}(v)$ =	het kwadraat van y is gelijk aan v	[getal]
$P_{31}(v)$ =	deze kromme wordt door v gehalveerd	[lijn]

d. Diversen.

$P_{41}(v)$ =	Q is het punt waar de kromme v snijdt (lijdend voorwerp in bijzin)	[lijn]
$P_{42}(v)$ =	er is geen vlak waar v loodrecht op staat (onderwerp in bijzin)	[lijn]
$P_{43}(v)$ =	elk getal dat groter is dan v is ook groter dan het kwadraat van v (dubbel gebruik van de letter v)	[getal]
$P_{44}(v)$ =	elke cirkel die door v wordt gesneden wordt er twee keer door gesneden (verborgen dubbel gebruik)	[lijn]

Bijlage bij college: Taal en Struktuur van de Wiskunde.
Januari 1978 - N.G. de Bruijn.

Nederlandse zinnen met formulaire zinsdelen.

1. Formulaire zinsdelen.

In het stukje "Nederlandse wiskundige zinnen met letters" (V.15, Juni 1977) werden zinnen beschouwd waarin losse letters (met wiskundige betekenis) de rol van een woord spelen. We zullen nu de algemenere gevallen beschouwen waarin ook formules die uit meer dan één letter bestaan in zinnen zijn opgenomen. Soms spelen ze de rol van een woord, maar vaak ook die van een bijzin. We beginnen met een voorbeeld:

Als $x > a + 1$ dan ligt $e^x - 1$ buiten (p,q).

Grammaticaal speelt $x > a + 1$ de rol van een bijzin, maar $e^x - 1$ is onderwerp van een zin, en (p,q) is kern van een bepaling. Wat betekenis betreft kan men zeggen dat $x > a + 1$ een propositie is, en dat $e^x - 1$ en (p,q) objecten zijn.

Zulke stukken $x > a + 1$, $e^x - 1$, (p,q), maar ook losse letters heten formulaire zinsdelen.

2. WOT.

De wiskundige omgangstaal (=WOT) verschilt van gewone taal niet alleen door het opnemen van formulaire zinsdelen, maar ook door de mogelijkheid om via definities nieuwe woorden in te voeren. (Meestal zijn het bestaande woorden die een nieuwe betekenis krijgen, of een scherper omschreven betekenis dan ze in de omgangstaal hadden, maar het mogen ook geheel nieuwe woorden zijn, zoals "hermitisch"). Deze nieuwe woorden (of nieuwe woordgroepen) spelen meestal de rol van substantieven (bijv. "rechthoek", "complex getal", "n-vector"), adjectieven (bijv. "uniform continu", "differentieerbaar"), of werkwoorden. Werkwoorden worden gewoonlijk ingevoerd door een gehele zin te noemen die laat zien hoe dat werkwoord wordt gebruikt, bijv. "we zeggen dat de lijn m evenwijdig loopt met de lijn n als ...."; hier is de nieuwe term "evenwijdig lopen" van een gebruiksaanwijzing voorzien. We zullen dan ook liever niet van het invoeren van een nieuw werkwoord maar van een nieuwe zin spreken, nl. de zin (met parameters) "de lijn m loopt evenwijdig met de lijn n". We zullen niet veel aandacht besteden aan de volgordeinversies die zo'n zin vereist bij later gebruik als bijzin.

3. Woordgroepen.

Wij vestigen er de aandacht op dat vaak woordgroepen gedefinieerd worden waarvan de afzonderlijke stukken geen eigen wiskundige betekenis hebben. Bij "stuksgewijs lineair" is het woord "stuksgewijs" niet afzonderlijk verklaard, en het gaat bij stuksgewijs lineair niet over een bijzondere vorm van lineariteit. We moeten de beide woorden samen als één enkel adjectief behandelen. Bij "complex getal" is "complex" niet een adjectieve toevoeging aan een reeds bekend begrip "getal", de tweewoordscombinatie moet als één substantief beschouwd worden. Bij "convergente rij" kan men de scheiding wèl maken: eerst was "rij" gedefinieerd, en later was gezegd wanneer een rij convergent heet.

4. WOT-zinsdelen.

In afwijking van gangbare grammatica zullen we zinnen in WOT bespreken met gebruik van slechts 4 grammaticale categorieën:

1. zinnen (ook bijzinnen).
2. objectaanduidingen (kortweg namen).
3. substantieven.
4. adjectieven.

Een woordgroep die tot één dezer categorieën behoort zullen we een WOT-zinsdeel noemen. Zo'n WOT zinsdeel kan formulaire delen bevatten, ook in zijn geheel een formule of een losse letter zijn.

Met de genoemde indeling is geen indeling in disjuncte stukken bedoeld: een substantief kan zinnen bevatten, een zin kan bijzinnen bevatten, enz. Voorbeeld:

"Als $x > 1$ dan is $b+1$ het kleinste gehele getal dat door x^2 deelbaar is".

Dit is in zijn geheel een zin, maar ook "$x > 1$" is een zin, en alles wat achter "dan" staat is een zin. Verder is de bijzin "dat door x^2 deelbaar is" een zin. Hierin is x^2 een naam. De groep "geheel getal" is een substantief, evenals de groep "geheel getal dat door x^2 deelbaar is". Hierbij kan "kleinste" als adjectief worden beschouwd, en "het kleinste...." als een naam.

Er zijn een aantal grammaticale regels waarmee uit WOT-zinsdelen weer nieuwe kunnen worden gemaakt. Wij zullen hier zulke regels niet formuleren, en niet verder gaan dan het min of meer intuitief hanteren ervan en op niet geheel systematische manier opmerkingen lanceren.

5. WOT en METAWOT. METAWOT is het taalgebruik waarmee we over WOT spreken. Men kan dus zeggen dat dit artikeltje in METAWOT is geschreven: alleen de voorbeelden staan in WOT. In METAWOT hebben we typeringen even goed als in WOT. In WOT gebruiken we daarvoor de dubbele punt (zie §6); in METAWOT zullen we vier punten (::) gebruiken. Wij schrijven bijvoorbeeld "hond :: substantief". Als variabelen zullen we in METAWOT liefst griekse letters gebruiken en bijvoorbeeld zeggen: "zij θ een substantief", of "zij θ :: substantief". Deze conventies kunnen WOT en METAWOT enigszins onderscheidbaar maken.

Verder gebruiken we het teken $\equiv$ voor "is synoniem met". Zo is bijvoorbeeld vierkant $\equiv$ rechthoekige ruit, ook al was bij de definitie het substantief vierkant anders ingevoerd.

6. Substantieven. Over substantieven is in V15 al het een en ander gezegd, en in het bijzonder dit: als β :: substantief, dan stelt $\beta^{\uparrow}$ de klasse van alle β's voor (dus $\beta^{\uparrow}$ :: naam, $\beta^{\uparrow}$: klasse), en als K :: naam, K : klasse, dan is $K^{\downarrow}$ als bijbehorend substantief te gebruiken. Als β een substantief is en α een naam dan is "α is een β" een zin; een dergelijke zin wordt een typering genoemd en ook door $\alpha : \beta$ voorgesteld. Nu zijn

$$\alpha : \beta \text{ en } \alpha \in \beta^{\uparrow}$$

synoniem, en ook zijn

$$\alpha \in K \qquad \text{en} \qquad \alpha : K^{\downarrow}$$

synoniem. We merken hierbij op dat men het gebruik van $\in$ doorgaans beperkt tot het geval dat de klasse in het rechterlid een verzameling is; het gebruik van de notatie $\alpha : \beta$ is dus algemener. Men kan bijvoorbeeld schrijven S : verzameling maar niet S $\in$ (verzameling)$^{\uparrow}$ omdat de klasse (verzameling)$^{\uparrow}$ geen verzameling is.

Een substantief β met de eigenschap dat $\beta^{\uparrow}$ precies één ding bevat wordt unitair substantief genoemd ($\beta^{\uparrow}$ heet een singleton). Dat ene ding is in navolging van Peano met jota($\beta^{\uparrow}$) aan te duiden, maar is in WOT ook met "de β" of "het β" (afhankelijk van het grammaticale geslacht) aan te geven.

Niet alles wat grammaticaal zelfstandig naamwoord is geldt in WOT als substantief Een WOT substantief is een genererende naam voor een soort, en kan worden gekwantiseerd: hond, een hond, één hond, elke hond, drie honden, alle honden. Met het woord "zuurstof" kan zoiets niet.

7. Schijnobjecten. We zullen niet zeggen dat "een hond" een naam is, hoewel het grammaticaal op eenzelfde plaats zou kunnen staan als bijvoorbeeld "zijn hond". We zullen zinnen waarin "een hond" voorkomt in hun geheel moeten bekijken, want het is niet mogelijk de groep "een hond" een betekenis toe te kennen en dan pas verder te lezen. Bekijk maar de zinnen

(1) Een hond heeft mij gebeten.
(2) Een hond is een huisdier.
(3) Hector is een hond.

In (1) is "één" existentiëel in (2) is het universeel van karakter, in (3) is het geen van beide. Vervangt men in elke zin "een hond" door "de hond van Henk" dan blijkt dat die woordgroep wèl een betekenis heeft die men kan vaststellen vóórdat de rest van de zin wordt gelezen. Merk overigens op dat (1) en (2) meervouden toelaten, waarbij "een hond" in "honden (zonder lidwoord) overgaat.

Naast "een hond" en "honden" is ook "de honden" een schijnobject: "de honden hebben mij gebeten" betekent (althans in WOT) niet "de verzameling der honden heeft mij gebeten" maar "alle honden hebben mij gebeten". Ook "alle honden", "enkele honden", "drie honden" zijn geen namen.

8. Letters.

In WOT kunnen losse letters de rol van namen gaan spelen doordat ze als zodanig worden aangekondigd. Dit kan op twee manieren gebeuren:

(1) door afkorting, zoals: we stellen de waarde van....in het punt..... door q voor.
(2) door opvoering van een variabele; zoals: laat x een reëel getal zijn (algemener: laat x : β (waarin β een substantief is)).

In het geval (2) kan men spreken over het blok van de variabele, d.i. het stuk tekst waarin over die variabele gesproken mag worden. Het is, jammer genoeg, in WOT alleen gebruikelijk het begin van dit blok aan te geven; het eind van het blok wordt slechts vaag gesuggereerd door de indeling van de tekst in alinea's, paragrafen, hoofdstukken, enz.

Vaak ligt het blok van een variabele binnen een WOT-zin, en dan wordt het "laat x een reëel getal zijn" wat korter gemaakt. De overgang van "variabele" naar "dummy" gaat in WOT betrekkelijk ongemerkt (in een formele taal ligt dit veel duidelijker).

Men zie:

Laat x een reëel getal zijn, dan is $x^2 + 1 > 0$.
Als x een reëel getal is dan is $x^2 + 1 > 0$.
Voor elk reëel getal x is $x^2 + 1 > 0$.

Hoewel het geen algemene instemming zal hebben, zullen we elke variabele waarvan het blok binnen een zin valt een gebonden variabele of dummy noemen. Wanneer het blok binnen een formule valt is hier geen verschil van mening over.

9. Transformaties in WOT. Nadat er letterobjecten zijn ingevoerd kunnen er volgens allerlei regels meer complexe zinsdelen worden gebouwd. Gedeeltelijk zijn dit regels over het bouwen van nieuwe formules, gedeeltelijk regels over bouwen van constructies waarin woorden en formules gemengd zijn. Hieronder vallen ook regels over vervoegingen, verbuigingen, zinsinversies, maar met deze dingen zullen we nonchalant omspringen (in het Nederlands dragen ze niet veel informatie). Er zijn verder regels om uit

woorden op automatische wijze nieuwe af te leiden (bijv. "driehoekig" uit "driehoek"). En dan zijn er nog de transformationele regels waarmee met gehele zinsdelen wordt gemanipuleerd om nieuwe te vormen (bijvoorbeeld uit de zinnen α en β maakt men de zin "als α dan β").

Wij bespraken reeds in §6 de transformatie beschreven door

β :: unitair substantief dan de β :: naam

(en "het β" als β onzijdig is). Merk op dat met Peano's jota de volgende synonimiteit geldt:

de β $\equiv$ jota($\beta^{\dagger}$).

De pijl ($\dagger$) geeft zelf ook een transformator. Men kan zeggen

als β :: substantief dan is $\beta^{\dagger}$ :: naam, en wel $\beta^{\dagger}$: klasse

In logisch getinte beschouwingen is er grote behoefte aan een transformator die zinnen omzet in proposities, nl. om ze discutabel te stellen. Men bouwt bijvoorbeeld zinnen "$x > 1$" en "$x > 2$" en wil zeggen "de propositie $x > 2$ is sterker dan de propositie $x > 1$". In de laatste zin staan "$x > 2$" en "$x > 1$" op plaatsen waar men grammaticaal een naam verwacht. We zullen dit soort WOT nu wijzigen door een notatie π in te voeren. We voeren een substantief "propositie" in en stellen vast

als ζ :: zin dan $\pi(\zeta)$ :: naam en wel $\pi(\zeta)$: propositie.

Met de zin "de propositie $\pi(x > 2)$ is sterker dan de propositie $\pi(x > 1)$" bedoelen we nu hetzelfde als we vroeger zonder de π's bedoelden. Het invoeren van deze π dient slechts (en dat heeft het met $\dagger$ gemeen) om het grammaticale systeem consequent te maken. Men kan ook weer een inverse π^{-1} invoeren en constateren dat $\pi^{-1}(\pi(\zeta)) \equiv \zeta$ en net zo iets voor $\pi\pi^{-1}$.

Een paar voorbeelden van het gebruik:

(i) Als ζ_1 :: zin, ζ_2 :: zin dan
als ζ_1 dan ζ_2 $\equiv$ uit $\pi(\zeta_1)$ volgt $\pi(\zeta_2)$.

(ii) Als ζ :: zin dan is

$$\pi^{-1}(\neg\, \pi(\zeta))$$

synoniem met de ontkenning van de zin ζ. (We gaan ervan uit dat $\neg$ op proposities is gedefinieerd en niet op zinnen).

Op velen zullen de operaties $\dagger$ en π de indruk van haarkloverij maken. De keus om ze wèl in te voeren is een algemene gedragslijn: begin formeel en ga later wat losser doen als je weet in welk opzicht je losser gaat doen. Mocht het formele standpunt wéér later essentieel worden dan haal je het uit de ijskast.

Een aantal belangrijke transformaties in WOT bevatten bindingen, die we daarom eerst zullen bespreken.

10. Bindingen.

Laat β een substantief zijn, ζ een zinsdeel, en x een letter die nul of meer keren in ζ mag voorkomen. We voeren nu een naam

$$\Upsilon_{x:\beta}\, \zeta \tag{1}$$

in die we synoniem verklaren met "de afbeelding die aan elke β x ζ toevoegt". De concatenatie doet hier vervelend aan, daarom een voorbeeld: $\Upsilon_{x:\text{cirkel}}$ (het middelpunt van x) $\equiv$ de afbeelding die aan elke cirkel x het middelpunt van x toevoegt.

In het geval dat ζ :: naam (zoals in dit voorbeeld) is (1) een welbekende uitbreiding van WOT (de notatie is voorgesteld door Freudenthal). Wij zullen de ζ's ook zinnen en substantieven laten zijn (aan het geval van adjectief ζ bestaat weinig behoefte).

Als ζ :: zin zullen we zeggen dat $\Upsilon_{x:\beta}\, \zeta$ :: naam, en

$$\Upsilon_{x:\beta}\, \zeta \quad : \quad \text{predikaat op } \beta.$$

Als het linkerlid door ϕ wordt voorgesteld, zeggen we dat ζ de waarde van ϕ in x is. Nu zijn de logische kwantoren te definiëren als afbeeldingen van predikaten naar zinnen. Als ϕ een predikaat is op β dan betekent $\forall\phi$ de zin "voor alle β x (waarde van ϕ in x)"

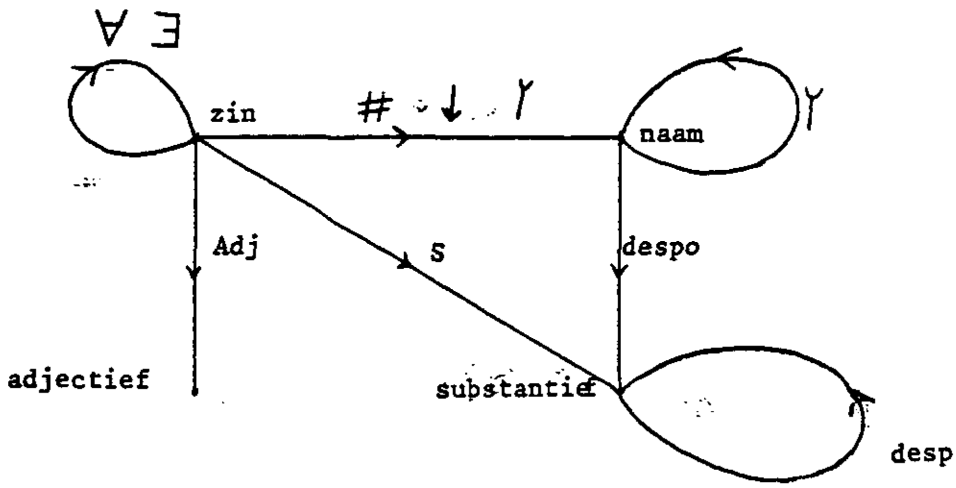
$$\forall(\Upsilon_{x:\beta}\, \zeta) \equiv \forall_{x:\beta}\, \zeta.$$

Analoog kan $\exists$ worden ingevoerd. Zo ziet men dat de ene binder Υ afdoende is, want alle andere kunnen erin worden uitgedrukt. Hetzelfde geldt voor het geval dat ζ :: :: naam. Men kan vastleggen dat bijvoorbeeld

$$\Sigma(\Upsilon_{n:\text{natuurlijk getal}}\, \zeta) \equiv \Sigma_{n:\text{natuurlijk getal}}\, \zeta.$$

We zullen nog een paar bindingen introduceren (zonder alles in Υ's uit te drukken), waarvan in het plaatje een overzicht (het beginpunt van een pijl slaat op de grammaticale categorie van ζ, het eindpunt op de grammaticale categorie van het resultaat van de binding).

(34)



Als ζ:: zin dan is $S_{x:\beta}\zeta$:: substantief in (uitgebreid) WOT. Het is synoniem met "β x waarvoor ζ". Voorbeeld:

$$S_{x:\mathrm{cirkel}}(\text{de straal van } x \text{ is } 1) \equiv$$

$$\equiv \text{cirkel } x \text{ waarvoor de straal van } x \text{ is } 1 \equiv \text{cirkel met straal } 1.$$

Merk op dat

$$(S_{x:\beta}\ \zeta)^{\dagger} \equiv \{x : \beta \mid \zeta\}.$$

Naast het substantief kan men ook het adjectief noteren dat de in de zin ζ uitgedrukte eigenschap van x formuleert. Hier een voorbeeld. Neem $\beta \equiv$ man, $\zeta \equiv$ x loopt hard, dan is

$$\mathrm{Adj}_{x:\mathrm{man}}\ (x \text{ loopt hard}) \equiv \text{hardlopend}$$

$$S_{x:\mathrm{man}}\ (x \text{ loopt hard}) \equiv \text{hardloper} \equiv \text{hardlopende man} \equiv \text{man die hard loopt.}$$

Merk op dat

$$x \text{ loopt hard} \equiv x \text{ is een hardloper} \equiv x \text{ is hardlopend}$$

$$\equiv \quad x \text{ is een hardlopende man.}$$

Als ζ :: zin dan is

$$\#_{x:\beta}\ \zeta$$

het <u>aantal</u> β's x waarvoor ζ. Als dit aantal in het bijzonder de waarde 1 heeft

35

is $\downarrow_{x:\beta}\zeta \equiv$ de β waarvoor ζ. (De notatie $\downarrow_x$ is door Freudenthal voorgesteld).
Merk op dat $S_{x:\beta}\ \zeta$ nu een unitair substantief is (vgl. § 6).

We kunnen ook substantieven vormen door despecificatie. We geven eerst een voorbeeld. Laat n een natuurlijk getal voorstellen en laat het substantief "nulrij vanaf n" als volgt gedefiniëerd zijn: een "nulrij vanaf n" is een rij complexe getallen $a_1, a_2, \ldots$ zó dat $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. We willen nu als substantief invoeren wat we zouden kunnen noemen "nulrij vanaf de een of andere n" of "afbrekende rij" bijvoorbeeld door

$$\text{afbrekende rij} \equiv (\cup_{n:\mathbb{N}}\ (\text{nulrij vanaf } n)^{\uparrow})^{\downarrow}.$$

Algemeen leiden we uit het substantief ζ(dat x kan bevatten) af de despecificatie, vastgelegd door

$$\mathrm{desp}_{x:\beta}\ \zeta \ \equiv (\cup_{x:\beta}\ \zeta^{\uparrow})^{\downarrow}.$$

Een ander soort despecificatie, ter onderscheiding met despo aangeduid, gaat uit van een naam ζ(die x mag bevatten). Hiervan maakt men een substantief als volgt

$$\mathrm{despo}_{x:\beta}\ \zeta \equiv (\cup_{x:\beta}\ \{\zeta\})^{\downarrow}.$$

Voorbeeld:

$$\mathrm{despo}_{x:\mathrm{officier}}\ (\text{vrouw van } x) \equiv \text{officiersvrouw}.$$

In de zin "hij zat op de bank met de vrouw van een officier" is "de vrouw van een officier" geen naam, evenmin als "een officiervrouw" een naam zou zijn in "hij zat op de bank met een officiersvrouw". En ook is "vrouw van een officier" geen unitair substantief, al staat er ook het lidwoord "de" voor.

Soms is despecificatie slechts schijn, bijvoorbeeld in: "laat A een hoekpunt van de een of andere driehoek zijn, en h de hoogtelijn uit A".

11. Universum en subuniversum.

We gaan uit van een universum dat is aangeduid door een substantief β (als het is aangeduid door een klasse-naam, bijvoorbeeld K met $K = \beta^{\uparrow}$ dan zijn slechts futiele wijzigingen vereist). We beschouwen nu een deelklasse van dit universum. Dit kan op 5 manieren beschreven worden, nl. door

(i) een zin ζ met een letter x,
(ii) een adjectief θ,
(iii) een predikaat P,
(iv) een substantief μ,
(v) een klasse-naam S.

In Schema 1 zien we hoe deze 5 in elkaar kunnen worden uitgedrukt.

	ζ	θ	P	μ	S
i	ζ	$Adj_{x:\beta}\ \zeta$	$\Upsilon_{x:\beta}\ \zeta$	β x waarvoor ζ $S_{x:\beta}\ \zeta$	$\{x : \beta \mid \zeta\}$
ii	x is θ x is een $\theta\beta$ de β x is θ	θ	$\Upsilon_{x:\beta}$ x is θ	$\theta\beta$	$(\theta\beta)^{+}$ $\{x:\beta \mid x \text{ is } \theta\}$
iii	P(x)	$Adj_{x:\beta}\ P(x)$	P	$S_{x:\beta}\ P(x)$	$\{x:\beta \mid P(x)\}$
iv	x is een μ	μ - ig	$\Upsilon_{x:\beta}$ x is een μ	μ	μ^{+}
v	$x \in S$	tot S behorend	$\Upsilon_{x:\beta}\ x \in S$	$S^{\dagger}$	S

Schema 1.

Merk op dat P steeds formulair beschreven is. Het spreken over predikaten is niet erg sterk in onze omgangstaal terug te vinden! Onze omgangstaal werkt het prettigst met ζ,θ en μ. Dat zijn ook de dingen die doorgaans in definities worden vastgelegd. Kijk eens naar Schema 2 dat uit Schema 1 onstaat door de rijen en kolommen van P en S weg te laten.

(37)

	ζ	θ	μ
i	ζ	$\mathrm{Adj}_{x:\beta}\ \zeta$	β $\cdot$ x waarvoor ζ $S_{x:\beta}\ \zeta$
ii	x is θ x is een $\theta\beta$ de β x is θ	θ	$\theta\beta$
iv	x is een μ	μ-ig	μ

Schema 2.

De vorm μ-ig is maar in sommige gevallen bruikbaar (bijvoorbeeld driehoek-driehoekig). Soms zijn er andere constructies en vaak helemaal geen. Wel kan men in uitgebreid WOT gebruiken "tot μ^{+} behorend" of $\mathrm{Adj}_{x:\beta}$ (x is een μ).

Uit SCHEMA 2 kan men leren dat het de voorkeur verdient om bij nomenclatuur van het adjectief uit te gaan, de zin en het substantief worden dan gevormd door constructies die goed in het gehoor liggen. Als men bij het substantief begint zijn er vaak moeilijkheden. Het is bijvoorbeeld lastig om uit "fundamentaalrij" of "Cauchy-rij" goede adjectieven te destilleren. Een verder voordeel van het primair stellen van adjectieven is dat er verschillende naast elkaar kunnen worden gebruikt, zoals bij "gelijkbenige rechthoekige driehoek".

We gaan nog even in op enkele bijzondere zinsvormen waarbij productieve taalconstructies bestaan.

(1) Laat x het onderwerp van de zin ζ zijn, en $\zeta =$ x Ωt waarin Ω vrij van x is. (t is de verbuigingsuitgang). Dan is

$$\theta \equiv \Omega\text{-end}, \quad \mu \equiv \beta \text{ die } \Omega t \equiv \Omega\text{-ende } \beta .$$

(2) Is in het bijzonder $\Omega =$ heeft een γ, dus

$$\zeta = \text{x heeft een } \gamma$$

waarin γ een substantief is, dan is

$$\mu \equiv \beta \text{ met een } \gamma$$

(3) Is

$$\zeta = \chi \text{ is de } \eta \text{ van } x$$

waarin χ een naam is, en η een unitair substantief dan is

$$\mu \equiv \beta \text{ met } \eta \ \chi.$$

12. Enkele synoniemen.

We geven een lijstje met een aantal zinsdelen die door ermee synonieme formules kunnen worden vervangen. We gaan uit van een substantief β en een zin ζ met

$$\zeta = x \ \ \Omega t \qquad (1)$$

waarbij Ω vrij is van x, en x het *onderwerp van de zin* ζ *is; t is de verbuigings*-uitgang.

$$\text{elke } \beta \ \ \Omega t \equiv \text{alle } \beta\text{'s } \ \Omega en \equiv \text{de } \beta\text{'s } \ \Omega en \equiv \forall_{x:\beta}\ x \ \ \Omega t$$

$$\text{geen enkele } \beta \ \ \Omega t \equiv \text{er is geen } \beta \text{ die } \ \Omega t \equiv \neg\exists_{x:\beta}\ x \ \ \Omega t$$

$$\text{er is een } \beta \text{ die } \ \Omega t \equiv \exists_{x:\beta}\ x \ \ \Omega t$$

$$\text{de verzameling der } \beta\text{'s die } \ \Omega en \equiv \{x:\beta \mid x \ \ \Omega t\}$$

$$\beta \text{ die } \ \Omega t \equiv \Omega ende\ \beta \equiv S_{x:\beta}\ x \ \ \Omega t$$

$$\Omega end \equiv Adj_{x:\beta}\ x \ \ \Omega t.$$

In gevallen dat de zin ζ niet de vorm (1) heeft kan men met "geldt" uit de voeten.

$$\text{voor elke } \beta \ \ x \text{ geldt } \zeta \equiv \forall_{x:\beta}\ \zeta$$

$$\text{voor geen } \beta \ \ x \text{ geldt } \zeta \equiv \neg\exists_{x:\beta}\ \zeta$$

$$\text{er is een } \beta \ \ x \text{ met } \zeta \equiv \exists_{x:\beta}\ \zeta$$

$$\text{de klasse der } \beta\text{'s } \ x \text{ met } \zeta \equiv \{x:\beta \mid \zeta\}$$

39

13. Vormen van definities.

We onderscheiden vier vormen van definities die dienen om in te voeren resp.

nieuwe substantieven,
nieuwe adjectieven,
nieuwe zinnen,
nieuwe namen.

Voorbeelden:

(1) een ruit is een parallelogram waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
(2) een reeks heet convergent als ...
(3) we zeggen dat de gehele getallen m en n onderling deelbaar zijn wanneer ...
(4) het snijpunt van de diagonalen van een parallelogram noemen we het middelpunt van dat parallelogram.

In deze voorbeelden zien we bij (3) en (4) variabelen optreden. In (3) zijn het m en n, in (4) is er een verstopte variabele, nl. "dat parallelogram". Ook definities van de soorten (1) en (2) kunnen variabelen bevatten. Bijvoorbeeld: "een n-dimensionale vectorruimte is een ...", "een getal heet deelbaar op n als ..." (hier is "deelbaar op n" het nieuwe adjectief). Bovendien kunnen er in definities dummies optreden: bijvoorbeeld bij "een getal k heet deelbaar op n als ..." is k zo'n dummy. In §18 gaan we uitvoeriger op deze zaken in.

14. Substantiefdefinities.

Een nieuw substantief kan worden ingevoerd om een onhandig lang substantief te vervangen. Schematisch is dit weer te geven door

$$\mu := \mu_1 \qquad \text{(met } \mu :: \text{substantief, } \mu_1 :: \text{substantief)}$$

waarin := gelezen wordt als "is gedefiniëerd door". Het kan in woorden een van de volgende vormen hebben

een μ is een μ_1, (1)

μ's zijn μ_1's (2)

een μ_1 wordt μ genoemd. (3)

Vaak is μ_1 gevormd door een subuniversumconstructie (zie § 11) zodat (1) wordt

een μ is een $\underline{\beta\ x}$ met ζ (4)

een $\underline{\beta\ x}$ heet een μ wanneer ζ (5)

de β x heet μ wanneer ζ (6)

of in uitgebreid WOT

$$\mu := S_{x:\beta}\ \zeta \qquad (7)$$

(bijvoorbeeld ruit := $S_{x:\,\text{parallelogram}}$(de diagonalen van x staan loodrecht op elkaar)). In (4) t.e.m. (7) is x een dummy. Vaak worden zulke zinnen gepresenteerd met gemaskeerde dummy, zoals in voorbeeld (1) van §13.

15. Adjectiefdefinitie.

Wezenlijk is dat een adjectief gedefiniërd wordt op een universum. Men definieert bij een substantief β een nieuw adjectief θ meestal door een zin ζ, volgens het schema

$$\theta := \mathrm{Adj}_{x:\beta}\zeta. \qquad (1)$$

In woorden luidt het bijvoorbeeld

"een β x heet θ wanneer ζ". (2)

Ook als men een lang adjectief wil afkorten zoals bij

even := deelbaar door 2

vervalt men weer in de vorm (1), nl.

"een getal x heet even wanneer x deelbaar is door twee"

en nu fungeert "x is deelbaar door twee" weer als ζ.

16. Definitie van een nieuwe zin.

Hier wordt een nieuwe, korte zin gelijkwaardig verklaard met een langere. Het schema is $\zeta := \zeta_1$, waarbij ζ :: zin en ζ_1 :: zin. Bijvoorbeeld

We zeggen dat $x < y$ wanneer er een positief getal z bestaat met $x + z = y$. (1)

Hiermee is de zin $x < y$ (met variabelen x en y) ingevoerd.

17. Naamdefinitie.

Een nieuwe naam kan worden ingevoerd om een onhandig lange naam te vervangen. Voorbeeld:

"we korten $\frac{1}{2}(a+b+c)$ af tot s"

dwz. $s := \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Vaak is de afkorting niet een letter (zoals hier de s) maar een zinsdeel dat woorden bevat. Bijvoorbeeld:

"het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek ABC wordt het zwaartepunt van driehoek ABC genoemd".

Merk op dat hier "het zwaartepunt van..." niet wordt ingevoerd via een unitair substantief "zwaartepunt van...". Men zal ook "het product van a en b" niet invoeren door eerst een substantief "product van a en b" in te voeren en dan te constateren dat het unitair is.

18. Variabelen van verschillende soort.

We beginnen met een voorbeeld. In een hoofdstuk over metrische ruimten, dat in het begin zegt "Zij (R,d) een metrische ruimte", en waarin steeds over R wordt gesproken, wordt gezegd, of niet gezegd maar wel bedoeld, dat het substantief "punt van R" tot "punt" wordt afgekort. Ergens in dit hoofdstuk staat

Definitie Het punt x heet een directe buur van het punt y als voor elk punt z met $z \neq y$ geldt $d(z,y) \geq d(x,y)$.

Uit de plaats waar "heet" in de zin staat leiden we af dat hier het substantief "directe buur van het punt y" wordt gedefiniëerd. De letter x is de dummy zoals die in §14(7) voorkomt:

directe buur van y := $S_{x:\text{punt}}$ (voor elk punt z :..).

De letter z is gebonden door "voor elk punt z met $z \neq y$". Een dergelijke binding van y is niet te vinden. Laten we liever y duidelijk als variabele opvoeren:

42

<u>Definitie</u> Laat y een punt zijn. Dan definiëren we

directe buur van y := $S_{x:\text{punt}}$ (voor elk punt z...).

Nu zien we duidelijker dat later elk gewenste α(met α :: naam, α : punt) voor y gesubstitueerd kan worden, om zo het substantief "directe buur van α" te vormen (ook als α uit een mengsel van woorden en formules bestaat).

We zullen deze y <u>parameter</u> van de definitie noemen. Maar op de achtergrond staat R als <u>gemaskeerde</u> <u>parameter</u>. Onze beschouwingen waren bedoeld voor elke metrische ruimte R te gelden, zodat "directe buur van α" ook kan worden gehanteerd als het over een metrische ruimte R_1 gaat en α een punt van R_1 is. In zulke gevallen zal men dit niet goed kunnen uitdrukken, en zich soms redden met iets als "directe buur van α met betrekking tot R_1". Ook de letter d is eigenlijk een gemaskeerde parameter.

We zien dus gemaskeerde parameters, parameters en dummies, waarbij in ons voorbeeld de x nog een bijzondere rol speelt. De situatie heeft zijn analogon in ALGOL-procedures waar men over globale parameters, formele parameters en lokale parameters spreekt. (Iets als onze x uit de binding $S_{x:\text{punt}}$ of $\text{Adj}_{x:\text{punt}}$ komt daar niet voor).

19. <u>Een hulptaal WOT*</u>.

Men kan zich als doel stellen WOT zó uit te breiden en te verbeteren dat er een taal ontstaat die enerzijds vrij is van onduidelijkheden en dubbelzinnigheden, anderzijds verre blijft van een volledig formele taal. We zullen zo'n taal hier WOT* noemen. Het ligt niet in de bedoeling WOT* hier te definiëren: we gaan niet verder dan een aantal wenselijkheden te formuleren.

Een tekst in volledig formele automatisch leesbare taal (zoals de talen van de AUTOMATH-familie) zal bij alle beweringen volledige documentatie moeten geven van de gronden waarop ze berusten. Bij die documentatie is het niet voldoende namen van gebruikte stellingen te vermelden: ook moet worden aangegeven met welke speciale waarden van de parameters de stellingen worden toegepast, en welke redeneerpatronen er worden gebruikt. Het lijkt niet verstandig om met WOT* zó ver te gaan. WOT* zal juist moeten dienen om een bemiddelende rol te spelen tussen het meer informele WOT enerzijds en de uiterste formalisatie anderzijds. Alleen dan kan de hoop worden gekoesterd dat WOT* kan helpen bij pogingen om het onderwijs in wiskunde te verbeteren en te verhelderen.

We stellen ons voor dat verbetering van WOT naar het nauwkeuriger WOT* op intuitieve wijze geschiedt, berustend op z.g. taalgevoel. In feite komt dit neer op textinterpretatie van WOT. Misschien bedoelt men wel dit soort oefening wanneer men zegt dat zowel taal- als wiskundestudie het logisch denken bevordert!

We noemen enkele punten die bij overgang van WOT naar WOT* zullen moeten worden gepreciseerd.

(1) De constructies van substantief met onbepaald lidwoord (zie §7) waarbij soms "een hond" moet worden omgezet in "elke hond" dan wel "er is een hond".

(2) De zinsontleding moet wellicht duidelijker worden gemaakt door plaatsen van hulptekens zoals haakjes.

(3) Bij definities zal duidelijk moeten worden gemaakt wàt de parameters zijn en wat de typeringen ervan zijn.

(4) Het is gewenst de geldigheidsduur van variabelen en onderstellingen aan te geven. Bij invoering van nieuwe letters kan het gewenst zijn aan te geven of het afkortende symbolen dan wel variabelen betreft.

(5) In WOT worden vaak gebonden variabelen ingevoerd zonder ze met een letter te benoemen (zie ook V15, §9); er wordt dan later over gesproken met behulp van betrekkelijke voornaamwoorden ("waarvan", "dat",....). Het zal wel noodzakelijk zijn zulke constructies in WOT* te vervangen door constructies waarin de variabele door een letter is voorgesteld. Ook in constructies die op het eerste gezicht geen enkele binding bevatten (zoals "laat x een nulpunt van het een of andere polynoom zijn") zal die binding in WOT* expliciet worden gemaakt.

(6) In WOT* zullen zekere dubbelzinnigheden moeten worden vermeden. Wij denken hier bijvoorbeeld aan de constructie "een α is een β" die soms als "α synoniem met β" (bijvoorbeeld in definities of in herinneringen aan definities) en soms als inclusie ("elke α is een β") wordt bedoeld. Een eenvoudig voorstel is: druk $\alpha \equiv \beta$ uit met "een α is een β" en inclusie met "α's zijn β's" of "elke α is een β" of "alle α's zijn β's".

(7) Het hanteren van operatoren als de π uit §8 zal wel onmisbaar zijn. De operatoren $\downarrow$ en $\downarrow$ (§6) lijken, hoewel handig, toch minder noodzakelijk.

(8) Veel WOT is gemengd met een soort METAWOT. Als men bijvoorbeeld spreekt over "de waarde van x" bedoelt men meestal de naam waardoor men x op zeker moment vervangt. Deze stukken METAWOT kunnen niet zonder meer in WOT* worden overgenomen.

(9) Om nog een indruk te geven van WOT-constructies die bij vertaling naar WOT* moeten worden omgewerkt, noemen we "twee evenwijdige lijnen". Hierin is "evenwijdig" geen WOT-adjectief bij het substantief "lijn". Het werkt als adjectief bij "lijnenpaar",

dwz. bij zoiets als "twee lijnen". En dan nog dit: vaak betekent "twee" hier iets in METAWOT: er worden niet twee lijnen maar twee letters bedoeld. Hoe zou men anders ooit ter discussie kunnen stellen of l=m is, terwijl van te voren gezegd is dat het er twee (dus twee verschillende zijn)?

(10) Het is verstandig zich bij het ontwerp van een definitieve WOT* te laten leiden door de eisen die een volledig geformalizeerde taal stelt.

20. Verrijking en verbetering van WOT.

Door het opnemen van steeds meer symboliek heeft WOT zich in de loop van de eeuwen ontwikkeld. Recente (dwz. 20ste eeuwse) toevoegingen zijn het gebruik van symbolen voor klassen, en daaraan gekoppelde verzamelingsterminologie, en het gebruik van logische connectieven en kwantoren. Misschien duiden juist deze toevoegingen op ontevredenheid over het bestaande WOT. Waar dat het geval is, moet het worden betreurd dat men naar zulke middelen heeft gegrepen in plaats van te proberen WOT zèlf een beetje op te knappen. Dit moet zeker overal worden opgemerkt waar verzamelingen alleen worden ingevoerd omdat men dacht dat WOT niet voldeed. Pas daar waar variabelen van het type "verzameling" wezenlijk gebruikt gaan worden, begint het werken met verzamelingen uit te stijgen boven de uit de moderne schoolwiskunde bekende moeizame vertaalarbeid van "slecht WOT" naar "slecht verzamelings-WOT".

WOT zou zeker gebaat zijn bij uitbreidingen in tegengestelde richting, nl. uitbreiding waarbij niet woorden door symbolen worden vervangen maar omgekeerd juist meer woorden in formules worden toegelaten, in het bijzonder adjectieven en substantieven. Dit spaart symboliek uit. Men kan bijvoorbeeld formules toelaten als

$$\forall_{x:\text{punt binnen } C} \cdots$$

$$\forall_{x:\text{even getal} \,|\, x > 3} \cdots$$

Deze formules zijn goed lees- en schrijfbaar. Beter dan bijvoorbeeld "Als $\mathbb{Z}_e$ de verzameling der even getallen voorstelt, is $\forall_{x \in \mathbb{Z}} ((x \in \mathbb{Z}_e \wedge x > 3) \rightarrow \ldots)$".

Het werken met typeringen kan bovendien bewerken dat de schoolwiskunde een achtergrond krijgt van intuïtief begrijpelijk getypeerde verzamelingstheorie i.p.v. de zo moeilijk verteerbare ongetypeerde.

Er is geen bezwaar tegen het naast elkaar handhaven van de "$\in$" en ":" ("ligt in" en "is een"). De notatie f: A → B kan men dan als een typering blijven lezen, mits men "A → B" opvat als het substantief "afbeelding van A naar B".

Het toelaten van substantieven en adjectieven in formules en het hanteren van typeringen met ":" maakt WOT geschikter als kortschrift, juist doordat het zo goed aanpast bij gesproken wiskundige taal.

Een aantal misstanden in het huidige WOT treedt direct aan het daglicht wanneer men probeert zinnen te ontleden. Bijvoorbeeld "voor elke x > 3 is ..." is niet te ontleden. In WOT* zou men moeten schrijven "voor elk reëel getal x met x > 3 is ...", in WOT kan men meestal wel zeggen "voor elke x met x > 3 is ...".

Ook op vele andere plaatsen meent men zich taalbederf te kunnen permitteren om een paar symbolen te sparen. Men schrijft wel "nu is a+1=b+2 het kleinste getal met ..."; acceptabel zou zijn "nu is a+1(=b+2) het kleinste getal met ...". Verfoeilijk is ook de schrijfwijze "A → B → C" waar men bedoelt "A dus B dus C", of eigenlijk: "A, en A → B, dus B, en B → C, dus C".

Het gebruik van "voor elke x ∈ S is ..." zou kunnen worden getolereerd: men kan zeggen dat " ∈ S" hier als "in S" gelezen wordt en de typering van x voorstelt. Men dient echter te waarschuwen tegen het gevaar dat dit via "elke x" leidt tot gebruik van "x" als substantief (bijvoorbeeld "kies twee verschillende x'en").

Het is van groot belang WOT zuiver te houden wanneer men zich tot beginners richt. Het vlottere WOT dat door ervaren wiskundigen wordt gesproken is bijzonder geschikt om toch reeds moeilijke dingen (zoals het leren leven met variabelen) volkomen onverteerbaar te maken.

21. Opmerking over WOT-zinnen. Een WOT-tekst kan allerlei zinnen bevatten waarmee niet volgens de grammaticale regels (zie bijvoorbeeld het slot van §4 en de ζ's in §10-12) nieuwe zinsdelen kunnen worden gevormd. Uitgezonderd moeten worden bijv. de zinnen van beschouwelijke aard (zoals "het is nu duidelijk dat x > y"), maar ook alle definiërende zinnen en zinnen die synonimie uitdrukken. Ook ten aanzien van zekere zinnen die typeringen uitdrukken (nl. degene die niet met adjectieven kunnen worden beschreven) moeten beperkingen worden gemaakt.

22. Bestaat er een ideale WOT?

Misschien wel, maar het zou de dood in de pot zijn. We mogen de wiskunde niet door een te starre taal de nek omdraaien. Maar tegen verbetering, waar maar enigszins mogelijk, kan geen bezwaar zijn.

Bijlage bij het College Taal en Struktuur van de Wiskunde.
Maart 1978 - N.G. de Bruijn.

<u>Opmerkingen over wiskundige taal</u>.

1. <u>Context</u>.

Elke wiskundige mededeling is in een zekere <u>context</u> geplaatst die men moet kennen om de mededeling te kunnen verstaan. De <u>context</u> is een rij van <u>declaraties</u>. Er zijn twee soorten declaraties:

(1) Aankondiging van een variabele van een daarbij genoemd type. Er zijn verschillende zinswendingen in gebruik ("Zij x een reëel getal", "Laat x een reëel getal zijn, "x is een reëel getal", "Zij $x \in \mathbb{R}$"). Met een soort metataal zegt men ook wel "de letter x is een reële variabele", maar het is beter om taal en metataal niet te mengen. Wezenlijk is alleen dat in zinswending of notatie drie dingen tot uiting komen: (a) dat er een variabele wordt ingevoerd, (b) de naam van de variabele, (c) het type ervan, de klasse of de verzameling waarvoor de variabele "loopt".

(2) Aankondiging van een onderstelling.

Ter afkorting zullen we een declaratie van de eerste soort een VD noemen, van de tweede soort een OS.

Een voorbeeld van een context is de volgende rij:

Zij $x \in \mathbb{R}$, met $x \neq 0$. Zij $n \in \mathbb{N}$. Onderstel $x^{-n} > 1$.

Er zijn 4 declaraties, in de volgorde VD-OS-VD-OS, nl. "Zij $x \in \mathbb{R}$", "onderstel $x \neq 0$", "zij $n \in \mathbb{N}$", onderstel $x^{-n} > 1$". Merk op dat in elke OS de reeds eerder ingevoerde variabelen mogen optreden. Ook in het bij een VD genoemde type mag (hoewel het in het voorbeeld niet het geval was) afhangen van de eerder ingevoerde variabelen. Een wat ingewikkelder voorbeeld:

Zij $x \in \mathbb{R}$. Onderstel $x > 1$. Zij $y \in \{\log x, -\log x\}$. Onderstel $|y| > 5$.

De typering van de variabele y bevat de x, maar in zekere zin ook de onderstelling $x > 1$. Zonder die onderstelling kan nl. log x niet gelezen worden.

In het hierna volgende zullen we context wel aangeven met vlaggen, en wel driehoekige voor VD, vierkante voor OS, zoals

$x \in \mathbb{R} \mid x > 0$

$p\!:\!\text{punt} \quad q\!:\!\text{punt} \quad p \neq q$

Achter zo'n rij vlaggen kan men nu bijvoorbeeld een definitie plaatsen, zoals

$p\!:\!\text{punt} \quad q\!:\!\text{punt} \quad p \neq q$ (verbinding (p,q):= de lijn ℓ door p en q).

De letters p en q heten (in de metataal) de <u>formele</u> <u>parameters</u> van de definitie. Ze hebben betrekking op de declaraties van variabelen; het is niet gebruikelijk om referenties naar de onderstellingen (de vierkante vlaggen) erbij op te nemen. (In AUTOMATH gebeurt dat wèl).

In de gangbare WOT is men niet erg consequent in het aangeven van de context. Ook is het niet altijd duidelijk hoe die context in losse declaraties moet worden opgedeeld. Neem eens

Zij x een positief reëel getal (1)

Zij $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. (2)

Moeten we deze interpreteren als VD, nl. als "$x \in \mathbb{R}^+$", of als VD + OS, nl. "zij $x \in \mathbb{R}$", "onderstel $x > 0$". Of is het VD bij (1), VD + OS bij (2)? Zonder duidelijke afspraak kunnen we dit niet beslissen. Erg belangrijk is het niet want het maakt ook in een formele taal niet veel verschil.

2. <u>Referentiepunt</u>. In WOT heeft men vaak de context in twee delen gesplitst. De context begint dan met een stel VD's en OS-en die als zeer vast worden beschouwd en heeft daarachter wat declaraties die als tijdelijker worden aangevoeld. Het taalgebruik sluit zich bij deze indeling aan, bijv.

(1) men bedient zich van woorden als vast, constant

(2) in notaties en definities worden zaken betreffende het vaste contextdeel onvermeld gelaten.

Ten aanzien van (2) wijzen wij op V17 §18, waar de globale parameters in een definitie zich betrekken op het vaste context-deel en de formele parameters op het resterende deel.

In de rij declaraties kan men zich een referentiepunt † denken: links ervan ligt het vaste deel:

$$\lceil_p \quad \lceil_u \quad \lceil_v \quad \lceil_w \quad \dagger \quad \lceil_x \quad \lceil_y \qquad (1)$$

(er kunnen natuurlijk ook $\lceil$'s tussen staan). Soms wil men het referentiepunt verplaatsen. Er zijn allerlei zinswendingen waarmee men dit aangeeft. Wil men het bijv. in (1) een plaats naar rechts schuiven dan zegt men: "we fixeren x", "we kiezen een bepaalde x", "we houden x voorlopig vast". Wil men in (1) het referentiepunt een plaats naar links brengen dan zegt men "we beschouwen nu w als een variabele", of wat onbeholpen "wat we voor dēze w hebben gezegd geldt voor ėlke w".

Men heeft de neiging om variabelen vlak vōōr het referentiepunt <u>parameters</u> te noemen, en variabelen ver links van het referentiepunt als constanten te behandelen, zeker in de gevallen waarin men niet van plan is die context ooit te verlaten. Het zal beoefenaren van getallentheorie doorgaans onverschillig zijn of $\mathbb{N}$ en 1 lang geleden als variabelen dan wel als primitieve constanten zijn ingevoerd. Ook wanneer het oorspronkelijk variabelen waren zal men ze constanten willen noemen.

Men zou ook kunnen proberen taal te analyseren door het erkennen van meer dan ēēn referentiepunt. Men kan bijvoorbeeld referentiepunten plaatsen aan het begin van elk hoofdstuk ēn aan het begin van elke paragraaf ēn aan het begin van elke zin.

3. <u>Typeringen</u>. Ook bij niet-introducerende zinnen komt de aaneengelijmde combinatie typering + bewering voor:

v is een reëel getal met $v > 5$ (1)

Dit kan gelezen worden als

v : reëel getal en $v > 5$ (3)

maar ook als

$$v : S_{w \in \mathbb{R}}\ w > 5 \qquad (4)$$

waarbij "gemakshalve"

v is een reëel getal w met $w > 5$

tot (1) is samengetrokken. Een dergelijke samentrekking ziet men ook bij

$a^2 + b^2$ is een reëel getal met $a^2 + b^2 > 5$. (5)

Als dit gebruikt wordt in een context waar a en b reële getallen zijn, is het niets anders dan een stylistische verlenging van de mededeling "$a^2+b^2 > 5$". Het kan gebeuren terwille van het ritme in de zin, soms ook omdat men even later een stelling wil toepassen waarin gesproken wordt over een reëel getal > 5. Als a en b complexe getallen zijn ligt de zaak wat ingewikkelder. Sommigen hebben er geen bezwaar tegen te schrijven $(1+i)+(1-i) > 0$, hoewel ze $1+i > -(1-i)$ niet zouden willen. Maar in elk geval is "met" in (5) een lelijke samentrekking. Beter zijn

$$a^2+b^2 \text{ is een reëel getal, en } a^2+b^2 > 5 \qquad (6)$$

$$a^2+b^2 \text{ is een reëel getal } w \text{ met } w > 5 \qquad (7)$$

4. Tussentijds ingevoerde binders. Van enkele binders als $\Upsilon, \forall, \exists$ neemt men aan dat ze met de taaldefinitie zijn meegekomen, maar andere worden onderweg ingevoerd. Met de gewone wiskundige taal lukt dat niet goed: men ziet bij de invoering van $\lim_{n\to\infty}$, $\Sigma_{n=1}^{m}$, ook in overigens goede leerboeken, dat de auteur er niet goed raad mee weet. Men wil zoiets zeggen als: laat Z een naam zijn die n mag bevatten en voor elke $n \in \mathbb{N}$ een reëel getal voorstelt. Neem aan dat $\Upsilon_{n\in\mathbb{N}} Z$ voldoet aan de convergentiedefinitie, met convergentie naar ℓ". Dan zeggen we dat $\lim_{n\to\infty} Z = \ell$. "Alles bij elkaar is dit een vreemd mengsel van taal en metataal. Gewoonlijk vergeet men ook om te zeggen dat $\lim_{n\to\infty} Z$ een getal voorstelt: men geeft een zinsdefinitie, schijnbaar met een naam erin zonder eerst die naam te hebben gedefinieerd.

Het is verstandiger in zulke gevallen de invoering van de binder tot het allerlaatst uit te stellen, en die dan min of meer als typografische afkorting aan de man te brengen. Een typografische afkorting is een afkorting waarvan men zich voorstelt dat ze eerst ongedaan wordt gemaakt voordat men de tekst als een tekst in WOT gaat beschouwen.

We hebben dan bovendien het didactische voordeel dat de invoering van de limietnotatie wordt losgemaakt van de invoering van het limietbegrip. Het gaat nu bijv. als volgt:

Definitie. $\mathsf{P}_{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}} (V(f) := \{a \in \mathbb{R} \mid \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R} \mid \varepsilon>0} \exists_{m\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N} \mid n>m} |f(n)-a| < \varepsilon\})$.

Stelling. $\mathsf{P}_{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}} |V(f)| \leq 1$ (met $|S|$ wordt het aantal elementen van S bedoeld).

Definitie. convergent := $\mathrm{Adj}_{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(|V(f)| = 1)$.

Definitie. $\mathsf{P}_{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}}\ \mathsf{P}_{f \text{ convergent}}\ \lim f := \mathrm{jota}(V(f))$.

<u>Typografische afkorting</u>. Als E een uitdrukking is die de letter n bevat dan wordt

$$\lim \curlyvee_{n\in\mathbb{N}} E \qquad \text{afgekort tot} \qquad \lim_{n\to\infty} E.$$

Natuurlijk kan men de definitie ook wel anders inrichten. Men kan bijv. de definitie van "convergent" overslaan en direct zeggen

<u>Definitie</u> $\triangleright_{f\,:\,\mathbb{N}\to\mathbb{R}}\ \sqcap_{|V(f)|\,=1}\ \lim f := \mathrm{jota}(V(f)).$

Heel gebruikelijk is ook om te beginnen met

<u>Definitie</u> $\triangleright_{f\,:\,\mathbb{N}\to\mathbb{R}}\ \triangleright_{a\in\mathbb{R}}\ B(f,a) := \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}|\varepsilon>0}$ enz.

om dan vervolgens op te merken dat er ten hoogste één a met B(f,a) bestaat, enz. Omdat men niet graag wegwerpsymbolen invoert, schrijft men vaak in plaats van B(f,a) (zoals eerder gezegd) $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$, maar dat is bedenkelijker, want pas later blijkt dat het linkerlid als een naam mag worden beschouwd.

Als verder voorbeeld van typografische afkorting noemen we, wanneer de integraal van f over het interval [a,b] door I(f,a,b) is aangeduid, de afkorting van

$$I(\curlyvee_{x\in[a,b]} E,a,b) \qquad \text{tot} \qquad \int_a^b E\,dx.$$

Overigens vallen onder de typografische afkortingen alle afkortingsconventies die in strijd zijn met een reeds aangenomen notatiesysteem. Voorbeelden: (1) inproducten als (v,w) zonder functiesymbool, (2) allerlei notaties voor gewone en partiele afgeleiden, (3) de gebruikelijke notaties voor faculteiten en binomiaalcoefficienten.

5. <u>Voorbeelden van vertaling van WOT naar een sterker geformalizeerde taal</u>. We gebruiken een hoeveelheid symboliek die we tot nu toe hebben ingevoerd, zoals (i) de typering door substantieven, (ii) de overgang met ↑ en ↓ van substantieven naar klassen en v.v., (iii) de binders S_x, Adj_x, $desp_x$, $despo_x$, (iv) de contextvlaggen.

Sommige van de te geven voorbeelden hebben betrekking op bekende wiskundige begrippen, maar andere zijn gefantaseerd.

5.1 Tekst: "Laat K de verzameling van alle halflijnen voorstellen" of "De verzameling van alle halflijnen wordt met K aangegeven." Vertaling: "$K :=$ halflijn$^{\uparrow}$".

5.2 Tekst: "K is dus de verzameling van alle halflijnen". Vertaling: "K = = $\text{halflijn}^{\dagger}$".

5.3 Tekst: "De elementen van K heten halflijnen". Vertaling: "halflijn := $K^{\downarrow}$".

5.4 Tekst: "We wijzen in het vlak een punt aan en noemen dat voortaan de oorsprong". Vertaling: " $\rhd_{0\,:\,\text{punt}}$ de oorsprong := 0" (en voortaan blijven we achter deze vlag).

5.5 Tekst: "Zij $P \in V$". Opmerking: V was al eerder ingevoerd. Vertaling: $\rhd_{P \in V}$.

5.6 Tekst: "Neem aan dat $P \in V$". Opmerking: P en V waren al eerder ingevoerd. Zeg niet "Stel $P \in V$", want dat wordt door sommigen in de zin van 5.5 gebruikt. Vertaling: $\rhd_{P \in V}$.

5.7 Tekst: "Een punt P heet een randpunt van een verzameling V wanneer Z(P,V)". Vertaling:

$$\rhd_{V\,:\,\text{verzameling}}\left(\text{randpunt van } V := S_{P\,:\,\text{punt}}\ Z(P,V)\right)".$$

5.8 Tekst: "Een punt heet inwendig punt van een verzameling wanneer een cirkelschijf met dat punt tot middelpunt geheel tot die verzameling behoort". Kritiek: "een cirkelschijf" zou in een dergelijke zin ook "elke cirkelschijf" kunnen betekenen. En het is beter om tussen "heet" en "inwendig" het lidwoord "een" in te lassen, om duidelijker te maken dat het een substantiefdefinitie is. Tenslotte is dat substantief niet "inwendig punt van een verzameling"!. Vertaling:

$$"\rhd_{V\,:\,\text{verzameling}}\left(\text{inwendig punt van } V := S_{P\,:\,\text{punt}}\ \exists_{\substack{A:\text{cirkelschijf}\\ \text{met middelpunt } P}}\ A \subset V\right)"$$

5.9 Tekst: "<u>Definitie</u>. Een kwadraatrest r van het priemgetal p is een geheel getal zó dat er een $x \in \mathbb{Z}$ is met $x^2 - r \equiv 0 \pmod p$". Vertaling:

"<u>Definitie</u>. $\rhd_{p:\text{priemgetal}}\left(\text{kwadraatrest van } p := S_{r \in \mathbb{Z}}\ \exists_{x \in \mathbb{Z}}\ x^2 - r \equiv 0 \pmod p\right)$".

5.10 Tekst: "Een cirkel is de verzameling van alle punten die eenzelfde positieve afstand r tot een vast punt M hebben". Vertaling:

$$"\text{cirkel} := \text{despo}_{M:\text{punt},\, r \in \mathbb{R}^+}\ \{P : \text{punt} \mid d(P,M) = r\}".$$

5.11 Tekst: "Een bijectie van $\mathbb{N}$ heet idempotent wanneer een macht ervan de identiteit is". Opmerkingen: (i) Als er "een idempotent" had gestaan was het een substantiefdefinitie geweest, (ii) "een macht" drukt niet duidelijk genoeg existentie uit, (iii) bedoeld is natuurlijk een macht met exponent > 1. Vertaling:

$$"\text{idempotent} := \text{Adj}_{p:\text{bijectie van } \mathbb{N}}\ \exists_{k \in \mathbb{N} \mid k > 1}\ p^k = I".$$

5.12 Tekst: "De Besselfunctie J_n heet stabiel als n > 5 is". Opmerking: Dit past niet goed in ons taalsysteem. Als we "stabiel" als een hier gedefiniëerd adjectief opvatten is de moeilijkheid dat het niet bij een substantief maar bij een naam (J_n) hoort. Men kan wèl als volgt te werk gaan: Besselfunctie:= despo$_{n \in \mathbb{N}}$ J_n. Als p : Besselfunctie,dan orde(p) := de n $\in \mathbb{N}$ met p = J_n. Vervang nu de tekst door: "De Besselfunctie p heet stabiel als orde(p) > 5". Vertaling:

"stabiel := Adj$_{\text{p:Besselfunctie}}$ orde(p) > 5".

Een andere uitweg is dat we de oorspronkelijke tekst vervangen door de zinsdefinitie "We zeggen dat de Besselfunctie J_n stabiel is als n > 5". Vertaling:

$$\mathop{\triangleright}_{n \in N} \left(J_n \text{ is stabiel} := n > 5 \right)$$

5.13 Tekst: "De reeks $1+2^{-2}+3^{-2}+\ldots$ is convergent en heeft de som $\pi^2/6$". Opmerking: Het taalgebruik t.a.v. reeksen is traditioneel slecht. Men zegt dat $1+2^{-2}+3^{-2}+\ldots$ convergent en gelijk is aan $\pi^2/6$ maar niet dat $\pi^2/6$ convergent is. Het lukt overigens niet goed om "reeks" als substantief op te vatten. Het is vaak een soort metaterm, zoals "linkerlid", waarmee men spreekt over de expressies die men heeft opgeschreven. Een mogelijkheid om met behoud van het woord reeks samenhangend te spreken is: overgaan op het begrip "reeks van een rij". We beschrijven zoiets in het kort.

rij := afbeelding van $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

$$\mathop{\triangleright}_{r:\text{rij}} \left(\text{de reeks van } r := \mathop{\Upsilon}_{n \in N} (r(1)+\ldots+r(n)) \right)$$

Vertaling van de zin in de aanhef kan nu zijn: s := de reeks van $\mathop{\Upsilon}_n n^{-2}$; s convergent; $\lim(s) = \pi^2/6$".

Men kan overigens tóch wel het substantief "reeks" invoeren door

reeks := despo$_{\text{r:rij}}$ (de reeks van r),

en desgewenst kan men nu voor reeksen de begrippen "convergent" en "som" invoeren, maar de constructies worden nogal gewrongen. Men doet er verstandiger aan de terminologie en notatie op het gebied van reeksen als "typografische afkortingen" te beschouwen.

5.14 Beschouw de volgende 24 teksten (het streepje betekent het lege woord).

"<u>Definitie</u>. $\begin{pmatrix}\text{Een}\\ \text{Het}\end{pmatrix}$ element g van $\begin{pmatrix}\text{de}\\ \text{een}\end{pmatrix}$ groep G heet $\begin{pmatrix}\text{de}\\ \text{een}\\ -\end{pmatrix}$ infiltrant

$\begin{pmatrix}\text{van G}\\ -\end{pmatrix}$ wanneer Z(G,g)."

Opgave. Ga na welke van deze 24 teksten acceptabel zijn en welke van de volgende 36 teksten als vertaling kunnen gelden:

$$\text{"}\underline{\text{Definitie}}.\ \begin{pmatrix}\text{G:groep}\\ -\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\text{de}\\ \text{een}\\ -\end{pmatrix}\ \text{infiltrant}\ \begin{pmatrix}\text{van G}\\ -\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\text{Adj}_{\text{g:elt van G}}\\ \text{S}_{\text{g:elt van G}}\\ \downarrow_{\text{g:elt van G}}\end{pmatrix}\ Z(G,g).$$

Bedenk dat het verschil maakt of G in de context waarin de definitie is geplaatst betekenis of geen betekenis heeft

6. Opmerkingen over adjectieven. Wanneer een adjectief θ gedefinieërd is op het substantief β, bijv. door

$$\theta := \text{Adj}_{x\,:\,\beta}\ \zeta$$

dan kan θ ook gebruikt worden op elk substantief β_1 dat aan $\beta_1^{+} \subset \beta^{+}$ voldoet. Nog steeds is dan

$$x \text{ is een } \theta\beta_1 \equiv \zeta.$$

Als θ_1 en θ_2 adjectieven zijn op β dan kan θ_1 ook gebruikt worden op het substantief $\theta_1\beta$, en het is duidelijk dat

$$\theta_1(\theta_2\beta) \equiv \theta_2(\theta_1\beta).$$

Voorbeeld:

gelijkbenige rechthoekige driehoek ≡ rechthoekige gelijkbenige driehoek.

Wanneer θ_1 in eerste instantie op $\theta_2\beta$ gedefinieërd was lukt dat niet, omdat $\theta_1\beta$ niet zinvol is.

Een situatie die vaak voorkomt is

$$\beta_1 := \text{despo}_{x\in V}\ Z(x)$$

waarbij voor elke $x \in V$ geldt $Z(x) : \beta$. Nu zijn op β ingevoerde adjectieven zonder meer tot β_1 over te halen. Voorbeeld: als we "convergent" op het substantief "rij" hebben vastgelegd, en als "reeks" volgens 5.13 als despo is ingevoerd, dan ligt zonder meer vast wat een "convergente reeks" is.

Een analoge situatie hebben we bij

$$\beta_1 := S_{x:\beta}\ Z(x).$$

Voorbeeld: Een nulpunt van f is een reëel getal x met $f(x) = 0$. Nu is duidelijk wat "een positief nulpunt van f" voorstelt.

7. <u>Variabel aantal variabelen</u>. Bij het zorgvuldig scheiden van taal en metataal moet men vaststellen dat "3 variabelen" niet zonder meer een bijzonder geval van "n variabelen" is. Met 3 variabelen heeft men de context

$$x_1 \in \mathbb{R} \qquad x_2 \in \mathbb{R} \qquad x_3 \in \mathbb{R}\ , \tag{1}$$

maar om

$$x_1 \in \mathbb{R} \ \cdots \ x_n \in \mathbb{R} \tag{2}$$

als context toe te laten zou men een metataalapparaat (t.a.v. de beschrijving van wat een context is) moeten hebben met de mogelijkheid om voor de variabelen een getal te substitueren. Nagenoeg het gehele taalbouwsel zou in de metataal herhaald moeten worden. Op die manier schieten we natuurlijk niet op!

Men kan hetgeen men met (2) had willen bereiken in de wiskundige taal brengen met een <u>vectorvariabele</u>, nl.

$$f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R} \tag{3}$$

en i.p.v. x_i gebruikt men nu $f(i)$. Wanneer men daarna

$$f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$$

met (1) wil identificeren gaat dat niet zonder meer: er komen transformatieregels bij te pas. Of dat zal gebeuren met stellingen of axioma's dan wel met taaltransformatieregels laten we hier in het midden. Iets dergelijks geldt overigens al voor de overgang van

$$x \in X \quad y \in Y \qquad \text{naar} \qquad z \in X \times Y$$

($X \times Y$ is het cartesisch product).

8. <u>Introductie en eliminatie van $\forall$ en $\exists$</u>. De eliminatieregel voor $\forall$ is eenvoudig: als we in een zekere context hebben afgeleid

$$\forall_{x \in S}\, P(x) \qquad \text{en} \qquad a \in S$$

dan mogen we in die context $P(a)$ als afgeleid beschouwen.

De introductieregel voor $\forall$ is analoog met de introductieregel voor $\to$ in natuurlijke deductie. Als in zekere context is afgeleid (door verlenging van de context met één vlag)

55

$$\vdash_{x \in S} P(x)$$

dan mogen we (in de oorspronkelijke context)

$$\forall_{x \in S} P(x)$$

als afgeleid beschouwen.

De introductieregel voor $\exists$ is eenvoudig: Als in de met $\vdash_{x \in S}$ verlengde context $P(x)$ een propositie is, en in de oorspronkelijke context $a \in S$ en $P(a)$ zijn afgeleid, dan mag in de oorspronkelijke context

$$\exists_{x \in S} P(x)$$

als afgeleid beschouwd worden. (bewijs van existentie door middel van een voorbeeld).

Er is (althans in de klassieke logica) nog een tweede middel om existentie te introduceren, nl. via het axioma (of stelling, dat hangt af van de keus van de opbouw) dat uitdrukt dat

$$(\neg \forall_{x \in S} \neg P(x)) \rightleftarrows (\exists_{x \in S} P(x)).$$

Met de eliminatieregel voor $\exists$ is het lastiger. Velen denken dat ze zich op zoiets als de Hilbert-operator ε (zie §9) kunnen beroepen die aan elke niet-lege verzameling een element ervan toewijst. Weet men dan dat $\exists_{x \in S} P(x)$, dan is, met

$$a := \varepsilon(\uparrow_{x \in S} P(x))$$

voldaan aan

$$a \in S \quad \text{en} \quad P(a).$$

Dit is een sterk axioma. Wie het aanhangt kan het keuzeaxioma zonder meer bewijzen!

Een minder sterke eliminatieregel is de volgende: Laat in de een of andere context $\exists_{x \in S} P(x)$ bewezen zijn, en b een propositie zijn. Is nu $\forall_{x \in S}(P(x) \to b)$ ook bewezen dan mag b als bewezen beschouwd worden.

Deze ~~zwakke~~ eliminatieregel komt overeen met het gebruik dat men gewoonlijk van existentie maakt. Het bewijs van $\forall_{x \in S}(P(x) \to b)$ wordt nl. geleverd door in de met

$$\vdash_{u \in S} \quad \vdash_{P(u)} \qquad (1)$$

aangevulde context het bewijs van b te leveren. Men handelt binnen deze context op precies dezelfde manier als degenen die de Hilbert-operator gebruiken. In beide gevallen spreekt men er als volgt bij: "Kies een $u \in S$ die aan P(u) voldoet. dan is ...., dus b".

Als toepassing geven we de redenering die nodig is om uit

$$\exists_{x \in S}\, P(x) \tag{2}$$

$$\forall_{x \in S}\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \tag{3}$$

de propositie b, voorgesteld door

$$b = \exists_{x \in S}\, Q(x) \tag{4}$$

af te leiden. We openen de context (1). Binnen de context gelden $u \in S$ en P(u). Uit (3) volgt door eliminatie van het alsymbool $P(u) \rightarrow Q(u)$. Met modus ponens volgt Q(u). De introductieregel van $\exists$ levert (nog steeds in de context (1)) nu b op. Wegens (2) hebben we (toepassing van de zwakke eliminatieregel) nu ook b <u>buiten</u> de context (1).

Voor de kwantoren met restrictie zoals $\exists_{x \in S | P(x)}\, Q(x)$ behoeven geen afzonderlijke afspraken gemaakt te worden, daar ze per definitie als $\exists_{x \in T}$ zijn op te vatten met $T = \uparrow_{x \in S}\, P(x)$.

9. <u>Hilbert operator en keuzeaxioma</u>. In de vorige paragraaf werden deze dingen genoemd. We gaan er even verder op in.

De Hilbert operator is niet gedefiniëerd op een verzameling (en mag dus geen functie heten) maar op de klasse van alle van $\emptyset$ verschillende verzamelingen. Voor elke verzameling X met $X \neq \emptyset$ is $\varepsilon(X)$ een element van X.

Eén van de vormen van het <u>keuzeaxioma</u> lijkt hier op, nl.:

Bij elke verzameling $M \neq \emptyset$ is er een afbeelding ε_M van $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ in M met de eigenschap dat

$$\varepsilon_M(X) \in X \text{ voor elke niet-leeg deel } X \text{ van } M.$$

Een dubieuze beschrijving hiervan vonden we in een leerboek: "het is mogelijk om uit ~~elke~~ niet-lege deelverzameling X van M een element te kiezen". Het woord "kiezen" is te vaag om de subtiele verschillen uit te drukken die hier een rol spelen. Voor veler gevoel verschilt "kiezen" niet veel van "nemen" bij het invoeren van een variabele. We zeggen doorgaans "kies x" in plaats van "neem x" als we weten dat de collectie waaruit x genomen wordt niet leeg is.

57

10. Telescopen. Vele wiskundige begrippen komen tot ons in de vorm die we kennen van de definitie van "groep": een groep is een verzameling G met een ... en een ..., en op de stippeltjes staan substantieven die G bevatten. Iets eenvoudiger is het begrip "graaf". Als G een verzameling is, is

$$P_2(G) := (\text{deelverzameling van } G \text{ met twee elementen})^{\dagger}.$$

Een graaf is nu een paar (G,Γ) waarin Γ een deel van $P_2(G)$ is. Gaan we over een graaf praten dan nemen we twee vlaggen:

G:verzameling Γ:deel van $P_2(G)$ (1)

Hieraan zien we dat "graaf" niet in de gewone zin een substantief is. Als we een variabele van het type "graaf" zouden invoeren zou dat met één vlag gaan! Eigenlijk moeten we een nieuwe syntactische categorie invoeren, die we telescoop zullen noemen, en zeggen dat "graaf :: telescoop".

Dit is een telescoop met twee segmenten, maar er zijn er ook met méér. Het woord telescoop is afkomstig van de ouderwetse inschuifverrekijker. 

Toch hanteert men "graaf" graag als een gewoon substantief. Men kan dat rustig doen door typeringen te maken als

$$(G,\Gamma) : \text{graaf}$$

wanneer G,Γ volgens (1) zijn gekozen. (We zeggen dan dat (G,Γ) "bij de telescoop past"). Er is verder geen bezwaar tegen om (G,Γ) door één identificator g te vervangen. Er komt dan weer wat taalgebruik bij: men gaat, uitgaande van g spreken over "de eerste component van g" en "de tweede component van g".

Wat voor telescopen van de vorm (1) gezegd is kan met wat wijzigingen herhaald worden voor contexten met een mengsel van VD- en OS-vlaggen. Voorbeeld: bij de invoering van "singleton" heeft men

S : verzameling $|S| = 1$

Er komt nogal wat los bij dit uitgebreide taalgebruik. Eenvoudiger lijkt het om bij telescopen als "graaf" de vlag g:graaf slechts als typografische afkorting voor het vlaggenpaar (1) te beschouwen.

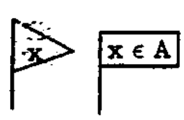
Bijlage bij het college Taal en Struktuur van de wiskunde.
Februari 1978 - N.G. de Bruijn.

Losse opmerkingen over taalgebruik in de wiskunde.

1. Implicaties. Druk de implicatie $A \to B$ niet uit door "B als A". Er is gevaar voor verwarring met equivalentie. In het niet-wiskundige nederlands heeft "B als A" vaak een equivalentiekarakter, en ook in wiskundige definitiezinnen als "een...heet...als..." is sprake van gelijkwaardigheid. Gebruik voor $A \to B$ uitsluitend "als A dan B".

2. Gegeneraliseerde implicatie. Niet alles met de vorm "als A dan B" is een implicatie. Soms kan B pas gelezen worden als de waarheid van A is aangenomen, zoals in: "als $x > 2$ dan is $\log x > 0$". Soms drukt A mede uit dat er variabelen worden opgevoerd: "als x een verzameling is dan is $x \subset x$".

3. "Als $x \in A$ dan...". Vaak was er al eerder een x, waarvan het overlijden niet was afgekondigd. We twijfelen dan tussen de opvoer



(opvoer van variabele en van onderstelling daarover)

en de opvoer

(opvoer van onderstelling over eerder opgevoerde x)

Kies steeds een zinswending die uitsluit wat je niet bedoelt. Zeg bijv. in het eerste geval "voor $x \in A$ is ..." of "voor alle $x \in A$ is..." en in het tweede "als onze x in A ligt dan ..." "als $x \in A$ geldt dan...".

Het is allerminst moeilijk om goede standaard-zinswendingen voor op- en afvoer van variabelen en onderstellingen te ontwerpen. De kunst is om ze algemeen geaccepteerd te krijgen, juist omdat op dit gebied het slechte vaak gemakkelijker schrijft dan het goede. Of het ook gemakkelijker leest wordt niet altijd gevraagd.

Zoëven ging het over opvoer ten gebruike van één enkele zin. Wanneer die opvoer over meer zinnen werkt moet men proberen die zinnen tot één alinea te maken en de eerste zin daarvan aan de opvoer te wijden.

Werkt de opvoer over mēēr alinea's dan wijde men een eigen alinea aan de opvoer.

Schrijf dus niet: "In de onderstelling dat A geldt B. Verder C. En D." als bedoeld is "Onderstel A. Dan B. Verder C. En D."

Wanneer er een afzonderlijke zin aan $\boxed{x}$ $\boxed{x \in A}$ moet worden gewijd is "Zij $x \in A$" een goede mogelijkheid. Voor $\boxed{x \in A}$ kan "Onderstel $x \in A$" gebruikt worden.

4. "Nodig en voldoende". Wie deze woorden gebruikt realiseert zich niet altijd wat dit allemaal in de argeloze lezer zou moeten losmaken. Het staat in verband met de metataaluitdrukkingen "nodige voorwaarde", "voldoende voorwaarde". Zeg in plaats van "Nodig en voldoende opdat A is dat B" liever ""A" is gelijkwaardig met "B"" of "als A dan B en omgekeerd".

Het "dan en slechts dan A wanneer B" is onnatuurlijk omdat de component "slechts dan A wanneer B" lelijk nederlands, en de component "dan A wanneer B" geen nederlands is.

5. Populaire taal. Pas ermee op: populaire taal is vaak minder beveiligd tegen dubbelzinnigheid dan "nette" taal, en het mengsel van beide talen is nōg gevaarlijker.
Schrijf bijvoorbeeld niet "het paar getallen dat..." i.p.v. "de weinige getallen die...".

Ook bij meer officiële taal kunnen zulke dubbelzinnigheden optreden. Bijv: "Deze functies hebben verschillende afgeleiden". Betekent dit het oppervlakkige "ze zijn een stuk of wat keren differentieerbaar"? Zie ook 6.

6. Terminologie kiezen. Wie een adjectief kiest om een wiskundige eigenschap uit te drukken moet niet naar overbelaste woorden grijpen. Er zijn nogal wat adjectieven die ook gebruikt kunnen worden om onze eigen relatie tot een wiskundig object aan te duiden, zoals bij: een gewone functie, een bekende reeks, een lastige betrekking, een triviale oplossing, een gecompliceerde afbeelding, een onbekende constante. Het moet worden afgeraden zulke algemene adjectieven voor ēēn wiskundig begrip te reserveren. Op oningewijden komt dat vaak verkeerd over: een eenvoudige groep, een simpele rij, een gewone differentiaalvergelijking, een bijzondere oplossing, een normale ondergroep, de bekende term.

7. Moeten. Alle waarheid is gedwongen, alleen de leugen is vrij. Het gebruik van het woord "moet" om de waarheid te onderstrepen is dus overbodig (zoals als $x > 5$ is dan moet $x > 0$ zijn"). Soms is het gevaarlijk, omdat het zo dicht komt bij verplichtingen die worden opgelegd aan de lezer en niet aan de

mathematische objecten. "Om de convergentie te bewijzen moeten we ...". In zulke gevallen speelt mee over welke hulpmiddelen we geacht worden te beschikken! Soms staat een slordig gebruik van "moeten" dicht bij het verwarren van een implicatie $A \to B$ met zijn omgekeerde $B \to A$. Zoiets als: "Ik moet B bewijzen. De enige stelling daarover zegt $A \to B$. Wil dus B dan moet A".

8. Mogen. "Wij mogen aannemen dat... ." Dit is een ingewikkelde aangelegenheid. De situatie is als volgt. We willen B bewijzen. Als we nu maar eenmaal $A \to B$ hebben is het een kleinigheid om tot B te komen, ook als we A niet hebben. Meestal kan dit doordat A en B met parameters behept zijn, bijv. $A = A(x)$, $B = B(x)$, en er een eenvoudig argument is om van

$$\forall_x \ (A(x) \to B(x))$$

naar $\forall_x\ B(x)$ te komen.

Overigens: als je zegt dat je iets mag doen zeg je nog niet dat je het doet. Zeg dus liever:"we mogen en zullen aannemen dat...".

9. Betekenen. Een zin als "Dit betekent dat wij schade lijden" is een soort implicatie. Gebruik in de wiskunde het woord "betekenen" liever niet in die zin. Gebruik "A betekent B" in de betekenis "A wordt, is of was gedefinieerd als B", desnoods nog als "$A \Leftrightarrow B$" maar niet als $A \to B$.

10. Ouderwetse taal. In het wat oudere geschreven wiskundig nederlands,(maar ook in het huidige gesproken wiskundig nederlands) vindt men mysterieuze woorden als zeker, bepaald, gegeven, onbepaald, vast, veranderlijk, willekeurig, bekend. Meestal zijn zulke woorden bedoeld om de slecht zichtbare blokstructuur met suggestieve termen te draperen. Als na een lange zin met limietdefinitie achteraan hangt "en hierin is ε willekeurig" dan is wel duidelijk dat er een al-kwantor in had gemoeten, maar de plaats daarvan blijft duister. Iets soortgelijks geldt voor "zekere x" als aanduiding van existentie. De meeste van deze mysterieuze woorden zijn schijnadjectieven: ze zijn gehecht aan bijvoorbeeld een x terwijl ze in feite op een gehele sistuatie slaan. Zo is bijv. de mededeling dat x een gegeven getal is op te vatten als de aanwijzing dat men bij de beantwoording van vragen niet buiten het blok van de variabele x behoeft te treden. M.a.w. het is de opdracht: "druk alles in x uit". Of ook: "beschrijf wat je zou doen als x werkelijk gegeven was".

Een voorbeeld van geheel zinloos gebruik van het woord "gegeven" is: "Stelling. Voor elke rechthoekige driehoek ABC (met rechte hoek in C) is c gegeven door $c = \sqrt{a^2 + b^2}$."

Sommigen zeggen: "geef nu aan x een bepaalde waarde" (zonder te zeggen wèlke). Dit betekent een geruststelling: voorlopig zullen we het x-blok niet uitgaan. Wat ingewikkelder wordt het wanneer eerst een variabele x, dan een variabele y wordt ingevoerd, en dan aan y een bepaalde waarde wordt gegeven.

11. Lopen. Wiskundige taal was vroeger sterk kinematisch gekleurd. Als x een reële variabele was zei men: "x loopt van $-\infty$ naar $+\infty$". In het bijzonder zei men dat van sommatieindices. De moderne wiskundige taal is statischer. Toch blijven er zinswendingen in leven als "Als x naar oneindig gaat, gaat e^{-x} naar nul".

12. Twee. Vaak is niet duidelijk of dit taal dan wel metataal is. "Twee verzamelingen A en B voldoen aan..." bedoelt meestal niet $A=B$ te verbieden! In zulke gevallen is het metataal en betekent: de twee letters A en B laten we verzamelingen voorstellen. "Twee" slaat op het aantal letters en niet op het aantal verzamelingen. In de volgende opgave is het anders bedoeld: "Twee personen A en B verdelen honderd gulden. A krijgt evenveel als B. Hoeveel krijgt A?" Niemand zal rekenen op het antwoord "honderd gulden als $A=B$, en anders vijftig".

Minder duidelijk is het bij "twee evenwijdige lijnen".

13. Eenduidig bepaalde objecten. Zeg nooit: "er is een eenduidig bepaalde $x \in A$ met $B(x)$". Dat "eenduidig bepaalde" hoort niet bij x maar bij het predikaat. Zeg liever "de voorwaarde $B(x)$ bepaalt x eenduidig in A". De bedoeling is meestal dat deze x ook verder gebruikt gaat worden. Er gebeuren dan eigenlijk verschillende dingen tegelijk, nl. " $\{y \in A \mid B(y)\}$ heeft precies één element. Noem dat x".

14. Zinsbouw. "Door $x=5$ te nemen blijkt dat $c > 2$". Dit is slecht nederlands. De constructie met "door te..." eist dat het weggemoffelde onderwerp van de eerste zin (we nemen $x=5$) tevens onderwerp van de tweede zin (er blijkt dat $c > 2$) is, en dat is allerminst het geval. Vergelijk: "Door de deur van slot te laten kon de hond ontsnappen". Verbeterde vormen: "Door $x=5$ te nemen zien we in dat $c > 2$" "Doordat de deur van slot gelaten was kon de hond ontsnappen". "Door de deur van slot te laten gaf ik de hond gelegenheid te ontsnappen".

15. Meervoudige interpretaties. Probeer zinnen steeds zo te stellen dat ze alleen op de door de schrijver bedoelde wijze zijn terug te lezen. Een gruwelijk voorbeeld:

"Piet heeft veel ervaring, maar ik ken meer op dit onderwerp gespecialiseerde wiskundigen".

Dit kan betekenen (1) ik ken er meer dan Piet, (2) ik ken er die het meer zijn dan Piet het is, (3) de wiskundigen die ik ken zijn meer op dit onderwerp gespecialiseerd dan de wiskundigen die Piet kent, (4) Piet is een o.d.o.g.w. maar ik ken ook nog andere o.d.o.g.w.'s, (5) Piet kent g.w.'s, maar degene die ik ken specializeerden zich meer o.d.o. (6) ik ken g.w.'s die meer o.d.o. gericht zijn dan Piet dat is.

16. Het grootste deel. "A,B,C verdelen een koek. A krijgt het grootste deel". Het grootste deel van de koek is natuurlijk de hele koek! Maar soms bedoelt men met "het grootste deel" alleen "meer dan de helft". Pas dus op en zeg gewoon "A krijgt het meest".

17. Waarde. In de samenstelling "de (een) waarde van x" is "waarde" geen wiskundig begrip. Het is moeilijk te zeggen wat het wèl is. Meestal is het woord overbodig.

Als een vraagstuk eindigt met "wat is de waarde van x" betekent dat dezelfde opdracht als "hoe groot is x", "wat is x", "bepaal x", "bereken x". Het is niet gemakkelijk te zeggen wat dat betekent. Men dient een betrekking van de vorm x=... af te leiden waarbij in het rechterlid x niet voorkomt. En dat rechterlid dient niet meer de vraag op te werpen "kan je dat niet vereenvoudigen?".

Als we "aan x de waarde 5 geven" bedoelen we dat x door 5 wordt vervangen. Een merkwaardige zaak: de gift doet de ontvanger in het niet verdwijnen!

In de meetkunde gebruikt men het woord "waarde" niet. Als P een puntvariabele is spreekt men over de ligging van P, de plaats van P.

Bij het beantwoorden van "Bepaal P" ligt niet meer zo duidelijk vast wàt de "eenvoudigste uitkomst" is.

18. Slordigheden. Hoe groot is de omtrek van de cirkel met straal 7 als je voor π de waarde 22/7 mag nemen?

Een goed antwoord is -13.

In een schoolboek (Sigma) stond: "De diagonalen van een rechthoek verdelen elkaar in 4 gelijke delen". Deze constructie betekent in het nederlands dat de eerste diagonaal de tweede in 4 gelijke delen verdeelt, en omgekeerd. Men vat "Jan sloeg Piet en Piet sloeg Jan" ook niet samen in "Jan en Piet gaven elkaar twee klappen".

Bijlage bij het college Taal en Struktuur van de wiskunde.
Februari 1978 - N.G. de Bruijn.

Natuurlijke deductie: implicatiecalculus.

1. Inleiding. Een paar voorbeelden laten pijltjesformules zien:

$$(a \to b),\ ((a \to b) \to ((a \to b) \to c)),\ (((b \to a) \to c) \to (a \to c)).$$

Er is een bekende interpretatie: de pijl stelt implicatie voor. De letters zijn propositievariabelen. Voorlopig speelt deze interpretatie geen rol.

2. Syntax. A is een verzameling, $S_n(A)$ de verzameling der n-letterwoorden over A, ε het lege woord. L is een deel van $S_1(A)$. Er liggen in $S_1(A)\setminus L$ nog drie éénletterwoorden die we met zeer ongebruikelijke symbolen zullen noteren, nl.

$$(\qquad\qquad)\qquad \to$$

Het deel F van $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(A)$ is gedefinieerd als de minimale oplossing van de vergelijking

$$F = L \cup \boxed{(\ \boxed{F}\ \to\ \boxed{F}\ )} \tag{1}$$

(zie N53: Notation for concatenation). We noemen de elementen van F pijltjesformules, die van L letters. De letters corresponderen met zekere elementen van A, die we zèlf niet opschrijven. In voorbeelden zullen we elementen van L met a,b,c,... aangeven, en pijltjesformules "ongekamd" noteren. D.w.z. i.p.v. $\boxed{(\boxed{a}\to\boxed{b})}$ schrijven we $(a \to b)$. Ook zullen we de buitenste haakjes weglaten, en gewoon $a \to b$ schrijven. Soms bevatten zulke voorbeelden namen van langere formules. Is bijvoorbeeld $f=a \to b$, $g=b \to a$ dan duidt $(f \to a) \to g$ hetzelfde element van F aan als $(((a \to b) \to a) \to (b \to a))$.

Alternatieve notatie. Met prefixnotatie ($\to$ is een binaire operator) kan men haakjes uitsparen door als syntax te nemen $F^* = L \cup \boxed{\to\boxed{F^*}\boxed{F^*}}$; hetzelfde geldt voor "Reverse Polish" met $F^{**} = L \cup \boxed{\boxed{F^{**}}\boxed{F^{**}}\to}$. Met de formule

$$(((a \to b) \to c) \to (d \to e))$$

uit F correspondeert

$$\to\ \to\ \to a\ b\ c\ \to d\ e$$

uit F^*, en

$$ab \to c \to de \to \ \to$$

uit F^{**}. Voor sommige doeleinden, zoals substitutietheorie, zijn F^* en F^{**} handiger dan F. We houden ons bij F.

Verkorte notatie. We zullen de elementen van F vaak wat korter noteren (zonder F zèlf te veranderen). Als $f_1 \in F$, $f_2 \in F, \ldots$, bedoelen we met $f_1 f_2$ hetzelfde als met $f_1 \to f_2$, $f_1 f_2 f_3$ betekent $(f_1 \to f_2) \to f_3$, $f_1 f_2 f_3 f_4$ betekent $((f_1 \to f_2) \to f_3) \to f_4$, enz. Voorbeeld:

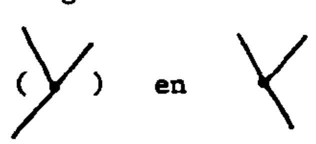
$$a(bcp)(c(pq)(bq(pa)))$$

betekent

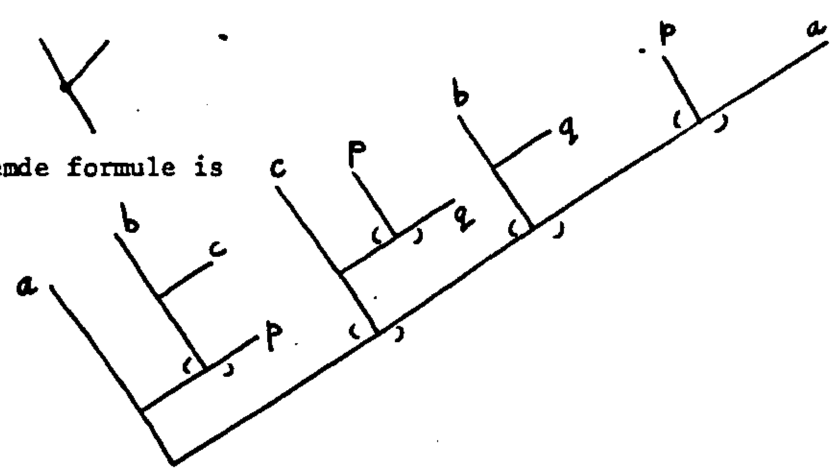
$$(a \to ((b \to c) \to p)) \to ((c \to (p \to q)) \to ((b \to q) \to (p \to a))).$$

Voor de boom betekent deze afkorting dat

worden vervangen door



De boom van bovengenoemde formule is

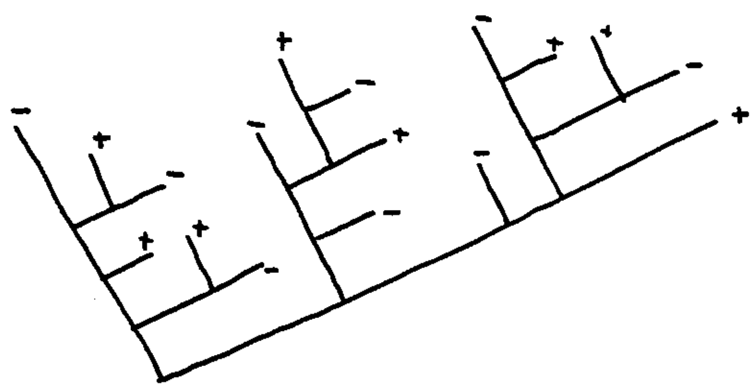


We beschouwen de afgekorte formules als onofficiële afkortingen van de werkelijke pijlformules. Wie van de (volledige) afkortingen zelf een syntax wil geven kan dat doen met

$$G = L \cup \boxed{G\ L} \cup \boxed{G\ (\boxed{G \setminus L})}.$$

3. Positieve en negatieve eindpunten in een boom. Onder boom wordt verstaan: geplante binaire boom. Aan elk punt kennen we een teken toe, nl. $(-1)^m$, waarin m het aantal stappen links omhoog is dat men moet doen vanuit de wortel komende (stap : stap langs één tak van de boom).

65



Zie de gelaagde struktuur die zichtbaar wordt door de afbeelding naar rechts te draaien.

In het eerder gegeven voorbeeld van afgekorte genoteerde pijlformules geven we de tekens aan:

a(b c p) (c (p q)(b q(p a)))
\+ − + −   + + − + − − +

4. Lijnen. We gebruiken het woord "lijn" (engels : line) i.p.v. "regel" omdat dit laatste ook "wet" (engels : rule) betekenen kan. In de laatste betekenis zullen we het woord "regel" gebruiken (bijv. "afleidingsregel"). We voeren een nieuw teken $\circ$ in en spreken af dat een lijn een formule is van het type

$$K \circ f$$

waarbij K een eindig deel van F is, en f een element van F. Interpretatie van $\{f_1,\ldots,f_k\} \circ f$ is: met de onderstellingen $f_1,\ldots,f_k$ is f afgeleid. Het geval $K = \emptyset$ is toegelaten: we schrijven dan $\circ f$.

5. ND-schema's. (ND is afkorting voor "natuurlijke deductie"). Een ND-schema is een rijtje lijnen $\ell_1,\ldots,\ell_n$, waarbij voor elke m ($1 \le m \le n$) de ℓ_m kan worden gekozen uit een (op nog te noemen wijze) door $\ell_1,\ldots,\ell_{m-1}$ bepaalde verzameling. Hieruit volgt: als $\ell_1,\ldots,\ell_n$ een ND-schema is dan is ook $\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}$ een ND-schema.

Het vastleggen van de verzameling der mogelijke ℓ_m's (bij gegeven $\ell_1,\ldots,\ell_{m-1}$) gebeurt met wat we zullen noemen lijntoevoegingsregels (het gaat er immers om, het rijtje lijnen aan de achterkant te laten aangroeien). Voorlopig nemen we slechts drie regels; in de formuleringen stelt $P_e(F)$ de collectie der eindige deelverzamelingen van F voor.

(i) Als $f \in K \in P_e(F)$ dan mag

$$K \circ f$$

als de m^{de} lijn worden toegevoegd (ook als $m=1$).

(ii) Als $1 \leq i < m$, $1 \leq j < m$, $K,N,M \in P_e(F)$, $f,g \in F$, $K \subset N$, $M \subset N$, en als

$$\ell_i = K \bullet f \to g,$$

$$\ell_j = M \circ f,$$

dan mag worden toegevoegd de lijn

$$\ell_m = N \circ g.$$

Deze toevoegingsregel heet <u>Modus Ponens</u> (bij ons verder gecodeerd als MP(i,j)).

(iii) Als $1 \leq i < m$, $K,M \in P_e(F)$, $f,g \in F$, $K \subset M \cup \{f\}$ en als

$$\ell_i = K \circ g,$$

dan mag worden toegevoegd de lijn

$$\ell_m = M \quad f \to g.$$

Deze regel heet <u>pijlintroductie</u>.

6. <u>Voorbeeld van een ND-schema</u>. In het voorbeeld laten we in het linkerlid verzamelingsaccoladen weg; verder staan vóóraan lijnnummers en achteraan de (romeinse) nummers van de toegepaste toevoegregels.

1	$a \to b,\ b \to c$	$\bullet$	$a \to b$	(i)
2	$a \to b,\ b \to c,\ a$	$\bullet$	a	(i)
3	$a \to b,\ b \to c,\ a$	$\bullet$	b	(ii)
4	$a \to b,\ b \to c,\ a$	$\bullet$	$b \to c$	(i)
5	$a \to b,\ b \to c,\ a$	$\bullet$	c	(ii)
6	$a \to b,\ b \to c$	$\bullet$	$a \to c$	(iii)
7	$a \to b$	$\bullet$	$(b \to c) \to (a \to c)$	(iii)
8		$\bullet$	$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$	(iii)

Volgens de interpretatie is de formule in het rechterlid van 8 hiermee (zonder onderstellingen) afgeleid.

7. <u>Blokgestructureerde presentatie</u>. We bekijken ND-schema's waarbij de verzamelingen in het linkerlid in de vorm van rijtjes gesorteerd zijn. In de praktijk zal het rijtje van lijn i een aanzienlijk beginstuk met dat van lijn i+1 gemeen hebben: de rijtjes groeien of krimpen een beetje aan de rechterkant. Het is nu vaak efficient om alleen de veranderingen aan te geven, in een schema als het volgende:

	$\boxed{a \to b}$
	$\boxed{b \to c}$
1	$a \to b$
	$\boxed{a}$
2	a
3	b
4	$b \to c$
5	c
6	$a \to c$
7	$(b \to c) \to (a \to c)$
8	$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$

De lijnen die volgens regel (i) zijn opgesteld (hier lijn 1,2,4) bevatten een herhaling van een "geldige blokopener" (f is een geldige blokopener bij lijn i als lijn i zit in een blok dat met een in een kastje geplaatste f begint). We zullen voortaan die blokopenerherhalingslijnen gewoon weglaten, dus schrijven

	verkort	
$\boxed{a \to b}$		$\boxed{ab}$
$\boxed{b \to c}$		$\boxed{bc}$
$\boxed{a}$		$\boxed{a}$
b		b
c		c
$a \to c$		ac
$(b \to c) \to (a \to c)$		bc(ac)
$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$		ab(bc(ac))

In de interpretatie van deze schema's heeft de implicatie zijn "natuurlijke" klank: "Als f dan g" betekent hetzelfde als "uit f kan g worden afgeleid". De regels (ii) en (iii) dienen om van de ene betekenis in de andere over te gaan en omgekeerd. Er is geen spoor aanwezig van een verband met iets als $(\neg f) \vee g$.

68

8. <u>Afleidbaarheid</u>. Een ND-schema dat $\circ\!-$ f als laatste lijn heeft zullen we een <u>afleiding</u> van f noemen. Als er voor f zo'n afleiding is schrijven we $\vdash$ f. Algemener zal K $\vdash$ f aanduiden dat er een ND-schema bestaat waarin de lijn K $\circ\!-$f voorkomt. Enkele afleidbare formules zijn

aa, a(ba), (a(bc))(ab(ac)),

met afleidingen

```
[a]
| a
aa


[a]
| [b]
| | a
| ba
a(ba)
```

```
1  [a(bc)]
2  | [ab]
3  | | [a]
4  | | |  bc             MP(1,3)
5  | | |  b              MP(2,3)
6  | | |  c              MP(4,5)
7  | |   ac              af(6)
8  |   ab(ac)            af(7)
9  a(bc)(ab(ac))         af(8)
```

In het laatste schema hebben we toepassing van regel (iii) aangegeven met "af" gevolgd door het significante lijnnummer.

Formules als a(bc)(ab(ac)) worden wat onoverzichtelijk, maar de volle vorm $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ is dat ook; we zullen vaak een tussenvorm gebruiken als

$$(a \to (bc)) \to ((ab) \to (ac))$$

met de afspraak dat $(P) \to (Q)$ in de pijlloze notatie P(Q) wordt, en dat $a \to (Q)$ in a(Q) overgaat.

9. <u>Onafleidbare formules</u>. Van de volgende formules kan men (zie §22) bewijzen dat ze niet afleidbaar zijn:

a, ab, abaa, abba.

Met de middelen van de klassieke logica (die met 0-1 waarheidstafels werkt) is abaa (de zg. formule van Pierce) wèl te bewijzen! Kijk maar

a	b	ab	aba	abaa
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

10. Opgaven. Bewijs (door het geven van ND-afleidingen)

1. $\vdash (abba) \rightarrow (abaa)$,
2. $abba \vdash abaa$,
3. $abbb \vdash ab$,
4. $abcde \vdash bcde$,
5. $\{a(bc),\ bce,\ bf\} \vdash a(fc) \rightarrow fce$,
6. $ababab \vdash a(ab)a(ab)a(ab)$,
7. $abb \rightarrow baab \vdash ab$,
8. $baab \rightarrow aba \vdash aba$

Sommige van deze (zoals de laatste) zijn bedriegelijk lastig.

11. Substitutie. We gaan uit van de volledige pijlformules (zie (1)§1). Zij φ een afbeelding van L in F. Dan definiëren we een afbeelding S_φ van F in F recursievelijk door

(i) als $f \in L$ dan $S_\varphi(f) = \varphi(f)$

(ii) als $f = \boxed{(\boxed{g} \rightarrow \boxed{h})}$ met $g \in F$, $h \in F$, dan

$$S_\varphi(f) = \boxed{(\boxed{S_\varphi(g)} \rightarrow \boxed{S_\varphi(h)})}.$$

Voorbeeld. Laat $L = \{a,b,c\}$, en laat $f = a \rightarrow (b \rightarrow c)$, $g_1 = b \rightarrow c$, $g_2 = c$, $g_3 = a \rightarrow c$, $\varphi(a) = g_1$, $\varphi(b) = g_2$, $\varphi(c) = g_3$. Dan is

$$S_\varphi(f) = (b \rightarrow c) \rightarrow (c \rightarrow (a \rightarrow c)) .$$

Het is het effect van <u>simultane</u> substitutie (dus niet eerst alle a's door $b \to c$ vervangen, dan alle b's door c's, enz.). Een veilige manier is om eerst alle letters in g_1, g_2, g_3 van dakjes te voorzien, dan de substitutie uit te voeren (gedurende welke er geen nieuwe a, b, c's ontstaan, en tenslotte de dakjes weer te verwijderen.

12. Stellingen over ND-schema's.

<u>Stelling 1</u>. Als $f, f_1, \ldots, f_n \in F$, $\varphi : L \to F$ en

$$\{f_1, \ldots, f_n\} \vdash f$$

dan is ook

$$\{S_\varphi(f_1), \ldots, S_\varphi(f_n)\} \vdash S_\varphi(f) .$$

<u>Bewijs</u>. Als we in een ND-schema alle formules aan S_φ onderwerpen is het weer een ND-schema.

<u>Voorbeeld</u>. $a \to (b \to a)$ is afleidbaar, dus ook $(b \to c) \to (b \to (b \to c))$.

$\boxed{a}$
  $\boxed{b}$
    a
  $b \to a$
$a \to (b \to a)$

gaat over in

$\boxed{b \to c}$
  $\boxed{b}$
    $b \to c$
  $b \to (b \to c)$
$(b \to c) \to (b \to (b \to c))$

<u>Stelling 2</u>. Als $K, M \in P_e(F)$, $f \in F$, $K \subset M$ en $K \vdash f$ dan is $M \vdash f$.

<u>Bewijs</u>. Een ND-schema dat $K \circ f$ bevat kunnen we tot een nieuw ND-schema maken door elke lijn $K_i \circ f_i$ te vervangen door $K_i \cup (M \setminus K) \circ f_i$. Iedere lijn in dit ND-schema kan op dezelfde manier met een der toevoegingsregels uit §5 worden goedgepraat als de overeenkomstige lijn in het oude schema.

<u>Stelling 3</u>. Als $K, M \in P_e(F)$, $f \in F$, $\varphi : L \to F$, als $K \vdash f$ en voor elke $k \in K$ geldt $M \vdash S_\varphi(k)$ dan geldt ook $M \vdash S_\varphi(f)$.

<u>Bewijs</u>. We demonstreren het geval dat $K = \{k_1, k_2\}$; het algemeen geval gaat analoog. Wegens $K \vdash f$ is $\vdash k_1 \to (k_2 \to f)$. Volgens stelling 1 en de definitie van S_φ is nu $\vdash S_\varphi(k_1) \to (S_\varphi(k_2) \to S_\varphi(f))$. Met $M \vdash S_\varphi(k_1)$ en modus ponens volgt $M \vdash (S_\varphi(k_2) \to S_\varphi(f))$. Met $M \vdash S_\varphi(k_2)$ en modus ponens volgt nu $M \vdash S_\varphi(f)$.

<u>Stelling 4</u>. Laat $f \in F$, $K \in P_e(F)$, $\varphi : L \to F$, $\psi : L \to F$.
Neem aan dat voor elke $a \in L$ die op een positieve plaats in f staat

$$K \vdash \varphi(a) \to \psi(a) \tag{1}$$

en voor elke $a \in L$ op een negatieve plaats in f

$$K \vdash \psi(a) \to \varphi(a) \ . \tag{2}$$

Dan is

$$K \vdash S_\varphi(f) \to S_\psi(f) \ . \tag{3}$$

<u>Bewijs</u>. Inductie naar de opbouw van f. Als $f \in L$ dan staat f op een positieve plaats in f, dus (1) kan worden gebruikt.

Als $f = g \to h$ dan geldt volgens de ~~inductie~~ inductie

$$K \vdash S_\varphi(h) \to S_\psi(h) \ , \tag{4}$$

$$K \vdash S_\psi(g) \to S_\varphi(g) \tag{5}$$

(want wat in g positief staat, staat in f negatief en omgekeerd).

Verder geldt

$$a \to b,\ c \to d \ \vdash (d \to a) \to (c \to b) \tag{6}$$

wegens

$$
\begin{array}{l}
\boxed{a \to b \ \big|\ c \to d} \\
\quad \boxed{d \to a} \\
\quad\quad \boxed{c} \\
\quad\quad\quad d \ \text{(MP)} \\
\quad\quad\quad a \ \text{(MP)} \\
\quad\quad\quad b \ \text{(MP)} \\
\quad\quad\quad c \to b
\end{array}
$$

Kies nu een afbeelding $\theta : L \to F$ met $\theta(a) = S_\varphi(h)$, $\theta(b) = S_\psi(h)$, $\theta(c) = S_\psi(g)$, $\theta(d) = S_\varphi(g)$, en pas stelling 3 toe (met K vervangen door $\{a \to b, c \to d\}$, M door K, f door $(d \to a) \to (c \to b)$, φ door θ).
Deze toepassing vereist $K \vdash S_\theta(a \to b)$ en $K \vdash S_\theta(c \to d)$, en dat is in orde wegens (4) en (5). Het levert op

$$K \vdash S_\theta((d \to a) \to (c \to b))$$

en dat is hetzelfde als (3).

72

13. Toepassingen

1. $\vdash$ abcde $\to$ bcde, want in xcde staat x op een negatieve plaats.
Maak φ,ψ met $\varphi(x) = ab$, $\psi(x) = b$, gebruik $\vdash b \to (ab)$ en pas stelling 4 toe.
2. ababab $\vdash$ a(ab)a(ab)a(ab), want in axaxax staan de x'en op positieve plaatsen.

14. Equivalentie. Laat $K \in P_e(F)$, $f,g \in F$. We schrijven

$$f \equiv g \pmod K$$

als zowel $K \vdash f \to g$ als $K \vdash g \to f$. Als K leeg is schrijven we gewoon $f \equiv g$.

Stelling 5. Als $f \in F$, $K \in P_e(F)$, $\varphi,\psi \in L \to F$, en als voor alle $a \in L$

$$\varphi(a) \equiv \psi(a) \qquad \pmod K$$

dan is ook

$$S_\varphi f \equiv S_\psi f \qquad \pmod K .$$

Bewijs. Direct uit stelling 4: daarin vinden we zowel (1) als (2) voor alle $a,b \in L$, dus zowel (3) als de formule die uit (3) ontstaat door φ en ψ te verwisselen.

15. Toevoeging van afleidingsregels. Met de stellingen 1,2,3,4 hebben we regels om sneller te komen tot formules $K \vdash f$ die we ook met ND-schema's hadden kunnen afleiden, want $K \vdash f$ betekent afleidbaarheid in een ND-schema. Maar we kunnen ook het begrip "ND-schema" zelf uitbreiden door aan de regels van §5 nog nieuwe toe te voegen die de inhoud van de stellingen 1,2,3,4 weerspiegelen. Met stelling 2 correspondeert bijv. de regel:

"Als $K,M \in P_e(F)$, $f \in F$, $K \subset M$, $1 \le i < m$, en als

$$\ell_i = K \circ f$$

dan mag worden toegevoegd de lijn

$$\ell_m = M \circ f" .$$

Deze regels geven wel meer ND-schema's, maar geen uitbreiding van het stel afleidbare formules. Daarom noemt men ze conservatieve uitbreidingen.

73

16. Uitbreiding van de syntax. We voegen een nieuw symbool $\wedge$ toe dat we infix binair gebruiken. In plaats van formele syntax geven we slechts een paar voorbeelden:

$$a \wedge b,\ (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c),\ ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge a)) \wedge c\ .$$

De verzameling van alle zo te vormen formules heet $F^{\wedge}$.

We voegen nu aan (i), (ii), (iii) van §5 (die we voor de gehele $F^{\wedge}$ geldig verklaren) toe de regels

(iv) Als $1 \leq i < m$, $1 \leq j < m$, $K \in P_e(F^{\wedge})$, $f, g \in F^{\wedge}$, en als

$$\ell_i = K \circ f$$

$$\ell_j = K \circ g$$

dan mag worden toegevoegd

$$\ell_m = K \circ (f \wedge g)\ .$$

(v) Als (overigens met dezelfde betekenis der letters)

$$\ell_i = K \circ (f \wedge g)$$

dan mag als ℓ_m zowel $K \circ f$ als $K \circ g$ worden toegevoegd.

Als voorbeeld leiden we nu af $\vdash (a \wedge b)c \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c))$:

$\boxed{(a \wedge b)c}$
$\quad\boxed{a}$
$\quad\quad\boxed{b}$
$\quad\quad\quad a \wedge b$
$\quad\quad\quad c$
$\quad\quad bc$
$\quad a(bc)$
$(a \wedge b)c \rightarrow a(bc)$

17. Equivalentie. We breiden ons equivalentiebegrip van §14 uit: weer betekent $f \equiv g \pmod K$ dat $K \vdash f \rightarrow g$ en $K \vdash g \rightarrow f$, maar er zijn nu meer formules en meer $\vdash$-betrekkingen. (Weliswaar kan men laten zien dat geen nieuwe relaties $K \vdash f$ met $f \in F$ en $K \in P_e(F)$ zijn ontstaan: formules zonder $\wedge$ kunnen, als ze met (i) t/m (v) zijn af te leiden, ook zonder (iv) en(v) worden afgeleid.)

(74)

We doen een aantal uitspraken zonder ons om bewijzen te bekommeren.

1. Als $\{f_1,\ldots,f_n\} \vdash f$ dan $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \vdash f$ en omgekeerd ($f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 = (f_1 \wedge f_2) \wedge f_3$, enz.).

2. Ten opzichte van $\equiv$ is $\wedge$ commutatief en associatief, d.w.z. $f_1 \wedge f_2 \equiv f_2 \wedge f_1$, enz.

3. Bij elke $f \in F^{\wedge}$ is er een eindig stel $f_1,\ldots,f_n$, alle $\in F$, met $f \equiv f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$.

18. Opgaven. We korten af: $ab \wedge ba$ tot $a = b$, $abb \wedge baa$ tot $a \perp b$.

1. $a \perp b,\ c \perp (a \wedge b)$	$\vdash$	$a \perp c$
2. $c \perp a,\ c \perp b$	$\vdash$	$c \perp (a \wedge b)$
3. $c \perp b,\ (a \wedge b)c$	$\vdash$	ac
4. $a \perp b$	$\vdash$	$a \perp cb$
5. $a \perp b$	$\vdash$	$ca \perp cb$

6. $\{(a=b)(a \wedge b \wedge c),\ (b=c)(a \wedge b \wedge c),\ (c=a)(a \wedge b \wedge c)\} \vdash a \wedge b \wedge c$

19. Lindenbaum-algebra. Een element van de Lindenbaum-algebra is een klasse van onderling equivalente elementen van $F^{\wedge}$ (met F en de daarbij behorende equivalentie kan men ook zo iets doen). Als $f_1 \equiv f_2$, $g_1 \equiv g_2$, dan is $f_1 \rightarrow g_1 \equiv f_2 \rightarrow g_2$, $f_1 \wedge g_1 \equiv f_2 \wedge g_2$. Daarom kan men de operaties $\rightarrow$ en $\wedge$ ook op de klassen definiëren, d.w.z. de Lindenbaum-algebra heeft $\rightarrow$ en $\wedge$ als binaire operaties, met zekere relaties (die uit de ND-afleidingscalculus volgen). Het is niet moeilijk wat betrekkingen op te stellen, bijv.

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) ,$$

(de alfa's stellen klassen voor), maar wat is een uitputtende lijst daarvan? Dit raakt de vraag: hoe kan men vaststellen dat $\alpha_1 \neq \alpha_2$? Hiertoe helpen de valuaties die we zullen bestuderen. We kunnen die op de Lindenbaum-algebra laten werken, maar ook al op $F^{\wedge}$.

20. Topologische valuaties. Laat S een topologische ruimte zijn en C de klasse der gesloten verzamelingen. Een afbeelding

$$v : F^{\wedge} \rightarrow C$$

75

heet een <u>valuatie</u> als voor alle $f,g \in F^{\wedge}$

$$v(f \rightarrow g) = \overline{v(g) \setminus v(f)}$$

$$v(f \wedge g) = v(f) \cup v(g)$$

(de streep betekent <u>afsluiting</u>). Het is duidelijk dat elke afbeelding v van L in C op precies één manier tot een valuatie kan worden voortgezet.

21. <u>Stelling van Stone-Tarski</u>. Laat v een valuatie zijn.

1. Als $f \in F^{\wedge}$ met $\vdash f$, dan is $v(f) = \emptyset$.

2. Als $f_1, f_2 \in F^{\wedge}$ en $f_1 \equiv f_2$, dan is $v(f_1) = v(f_2)$.

<u>Bewijs</u>. Beide beweringen volgen direct uit de volgende:

als $\{f_1,\dots,f_n\} \circ f$ in een ND-schema staat, dan is

$$v(f) \subset v(f_1) \cup \dots \cup v(f_n) \ .$$

We bewijzen dit door de lijntoevoegingsregels te inspecteren, aannemende dat de uitspraak geldt voor de reeds geplaatste lijnen.

(i) (§5). De toevoeging is van de vorm

$$\{f_1,\dots,f_m\} \circ f_j$$

met een j uit $\{1,\dots,m\}$. Duidelijk is $v(f_j) \subset v(f_1) \cup \dots \cup v(f_m)$.

(ii) (§5). Laat ons afkorten $v_K = v(f_1) \cup \dots \cup v(f_m)$ als $K = \{f_1,\dots,f_m\}$. We nemen aan dat $K \subset N$, $M \subset N$, en

$$v(f \rightarrow g) \subset v_K, \quad v(f) \subset v_M$$

en willen bewijzen dat $v(g) \subset v_N$. Dit volgt uit

$$v(g) \subset \overline{v(g) \setminus v(f)} \cup v(f) = v(f \rightarrow g) \cup v(f) \subset v_k \cup v_M$$

en $v_K \subset v_N$, $v_M \subset v_N$.

(iii) (§5). In dezelfde stijl werkende, willen we uit $v(g) \subset v_K$ afleiden dat $v(f \to g) \subset v_M$, wetende dat $K \subset M \cup \{f\}$. We hebben

$$v(g) \setminus v(f) \subset v_K \setminus v(f) \subset (v_M \cup v(f)) \setminus v(f) \subset v_M$$

en daar v_M gesloten is, ook $v(f \to g) \subset v_M$.

(iv) (§16). Uit $v(f) \subset v_K$ en $v(g) \subset v_K$ leiden we af $v(f \wedge g) = v(f) \cup f(g) \subset v_K$.

(v) (§16). Uit $v(f \wedge g) \subset K$ leiden we af $v(f) \cup v(g) \subset K$, dus $v(f) \subset K$ en $v(g) \subset K$.

22. Voorbeelden en opmerkingen.

1. We nemen voor S een singleton. De gesloten verzamelingen zijn $\emptyset$ en S. We krijgen een valuatie door aan elke $x \in L$ een $v(L) = \emptyset$ of S toe te voegen. De v's zijn te berekenen met de volgende tabellen:

Tabel voor $v(f \to g)$

v(f) \ v(g)	S	$\emptyset$
S	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	S	$\emptyset$

Tabel voor $v(f \wedge g)$

v(f) \ v(g)	S	$\emptyset$
S	S	S
$\emptyset$	S	$\emptyset$

Als we S door 0 en $\emptyset$ door 1 vervangen komen de tabellen voor de klassieke logica tevoorschijn.

Van de formules a, ab, abba (zie §8) is nu de onafleidbaarheid aan te tonen. Voor de eerste neemt men $v(a) = S$, voor de tweede $v(a) = \emptyset$, $v(b) = S$, voor de derde $v(a) = S$, $v(b) = \emptyset$ (zodat $v(ab) = \emptyset$, $v(abb) = \emptyset$, $v(abba) = S$).

2. Neem $S = \{1,2\}$ met $\emptyset$, S en $\{1\}$ als gesloten verzamelingen. De verzameling $\{2\}$ is niet gesloten maar heeft als afsluiting S. We kiezen $v(a) = \{1\}$, $v(b) = S$. Nu is $v(ab) = \overline{S \setminus \{1\}} = S$, $v(aba) = \overline{\{1\} \setminus S} = \emptyset$, $v(abaa) = \overline{\{1\} \setminus \emptyset} = \{1\}$. Daar dit niet leeg is, is abaa (formule van Pierce) onbewijsbaar.

(77)

3. Met behulp van topologische valuaties kan men uitzoeken dat er met twee letters 18 verschillende klassen te vormen zijn. Deze worden opgeleverd door de $3 \times 3 \times 2$ combinaties in

$$\begin{pmatrix} & & T & \\ b & a & b & b \\ & b & a & \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} & & T & \\ a & b & a & a \\ & a & b & \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ \\ (a = b)a \end{pmatrix}$$

(de T stelt bijv. aa voor). Met 3 letters zijn het er 623662965552330.

4. Een formule f is in de klassieke logika afleidbaar als en alléén als voor elke valuatie in een éénpuntsverzameling $v(f) = \emptyset$ geldt. Voor afleidbaarheid in ND is dit niet voldoende. Wel geldt: f is afleidbaar als en alleen als elke valuatie in elke eindige topologische ruimte $v(f) = \emptyset$ oplevert. Deze mededeling hier zonder bewijs.

Zie voor verder materiaal: THE-rapport 75 WSK-02 (1975).

23. <u>Falsum</u>. We wijzen in L een ding aan dat we met $\perp$ aanduiden. Het wordt "falsum" of "contradictie" genoemd. Voor implicaties $f \to \perp$ schrijven we ook wel $\neg f$ (uitspr.: non f). Men kan nu bijv. afleiden

$$a \vdash \neg\neg a \; , \; \neg\neg\neg a \vdash \neg a \; ;$$

de afleidingen zijn dezelfde als voor

$$a \vdash abb \; , \; abbb \vdash ab \; .$$

De voor de hand liggende formule $\perp \to a$ is niet afleidbaar. Ook de "double negation law" $a \perp\perp a$ is niet afleidbaar. In beide gevallen is dit in te zien door de valuatie (met singleton S) te nemen met $v(a) = S$, $v(\perp) = \emptyset$. Wel geldt

$$\vdash (a \perp\perp a) \to (\perp a)$$

wegens

$$\begin{array}{l} \boxed{a \perp\perp a} \\ \quad \boxed{\perp} \\ \quad\quad (a \perp)\perp \\ \quad\quad a \end{array}$$

24. ND met axioma's. Laat ons een deel A van $F^\wedge$ aanwijzen en de elementen axioma's noemen. We nemen nu een extra lijntoevoegingsregel, nl.

(vi) Als $K \in P_e(F^\wedge)$, $f \in A$ dan mag $K \circ f$ worden toegevoegd.

De stellingen 1,3,4 (over het effect van substituties) gelden nu niet meer! Men zou er beperking moeten maken tot substituties die alle formules uit A transformeren in afleidbare formules.

Als A eindig is, $A = \{k_1,\dots,k_n\}$, kan men vormen $k_A = k_1 \wedge \dots \wedge k_n$. Nu kan men zeggen: een formule $K \vdash f$ geldt mèt gebruikmaking van A wanneer en alleen wanneer $K \vdash k_A \to f$ zonder gebruikmaking van A geldt. Het gebruik van axioma's is dus te vervangen door het richten van de belangstelling op formules van de vorm $k_A \to f$. Als A oneindig is geldt iets dergelijks, maar iets ingewikkelder.

25. Klassieke logica. We nemen de falsum in L op, en bij elk ander element f van L vormen we het *axioma* $f \perp\perp f$.

Uit $\vdash f \perp\perp f$ en $\vdash g \perp\perp g$ volgt $\vdash h \perp\perp h$ voor zowel $h = f \to g$ als $h = f \wedge g$ (opgave). Men kan nu bewijzen dat $\vdash f \perp\perp f$ voor alle $f \in F^\wedge$, en (zie §22) dus ook $\vdash \perp f$ voor al die f.

Als fundamentele stelling kan men nu (moeiteloos doch niet tijdvrij) afleiden dat een formule f afleidbaar is als en slechts als $v(f) = \emptyset$ voor alle klassieke valuaties. Onder een "klassieke valuatie" wordt hier verstaan een valuatie v in de singleton S met de beperking dat $v(\perp) = S$. (Voor alle andere elementen van L kan v dus vrij uit $\emptyset$, S worden gekozen.)

26. Vergelijking van verschillende stelsels. We beschouwen naast elkaar

(i) het stelsel van de minimale logica (ML): wel falsum aanwezig, maar geen axioma's erover,

(ii) het stelsel van de intuitionistische logica (IL): voor elke letter f het axioma $\perp f$,

(iii) dat der klassieke logica (KL): voor elke letter het axioma $f \perp\perp f$.

Formules die in ML gelden gelden ook in IL, formules die in IL gelden, gelden ook in KL. We vermelden twee stellingen die iets in omgekeerde richting zeggen.

Stelling 1. Als $f \in F^{\wedge}$ en als f klassiek afleidbaar is, dan is $\neg\neg f$ intuïtionistisch afleidbaar.

Stelling 2. Als $\varphi : L \to F^{\wedge}$ gedefinieerd is door $\varphi(\perp) = \perp$, $\varphi(g) = \neg\neg g$ als $g \in L$, $g \neq \perp$ dan geldt:

Als $f \in F^{\wedge}$, en f klassiek afleidbaar, dan is $S_{\varphi} f$ in ML afleidbaar.

Bewijs van stelling 2. Beschouw een klassieke afleiding van f. Deze gebruikt van een aantal letters $a_1, \ldots, a_n$ dat $a_i \perp\perp a_i$. Er is dus een ML-afleiding van

$$\{a_1 \perp\perp a_1, \ \ldots \ , a_n \perp\perp a_n\} \ \vdash f. \qquad (1)$$

Voor elke a geldt $\vdash (\neg\neg a) \perp\perp (\neg\neg a)$ (gemakkelijk in een ND-schema af te leiden). We passen nu §12 st. 3 toe met $K = \{a_1 \perp\perp a_1, \ \ldots \ , a_n \perp\perp a_n\}$, $M = \emptyset$.

Bewijs van stelling 1. (schets). Als $p, q \in F^{\wedge}$, dan kan men gebruik makende van $\perp p$ en $\perp q$ afleiden dat

$$(\neg\neg p) \to (\neg\neg q) \qquad \text{en} \qquad \neg\neg (p \to q)$$

equivalent zijn, en evenzo

$$(\neg\neg p) \wedge (\neg\neg q) \qquad \text{en} \qquad \neg\neg (p \wedge q).$$

Door inductie naar de opbouw van f kan men nu bewijzen dat de $S_{\varphi} f$ uit stelling 2 in de zin van IL equivalent is met $\neg\neg f$.

27. Natuurlijke deductie met variabelen. In § 24 werd erop gewezen dat bij aanwezigheid van axioma's met substitutie moet worden opgepast. We zullen nu een opzet van ND bekijken waarin variabelen kunnen worden opgevoerd. De variabelen worden lokaal als nieuwe elementen aan L toegevoegd, en zijn de enige letters waarvoor mag worden gesubstitueerd. Ook axioma's mogen variabelen bevatten en krijgen daardoor grote kracht: het uitspreken van een axioma mèt variabelen betekent dat de uitspraak geldig is bij elke vervanging van die variabelen door elementen van $F^{\wedge}$.

Oorspronkelijk bevatten onze ND-schema's in het linkerlid verzamelingen van onderstellingen (zie bijv. §6). We zullen deze nu aanvullen met deelverzamelingen van L. In onze beschouwingen zullen we niet overal dezelfde L hebben, en daarom

80

zullen we $F(L)$ schrijven i.p.v. F (zie §1) en analoog $F^{\wedge}(L)$ i.p.v. $F^{\wedge}$ (zie §16).

We beschouwen een vast deel L_0 van L; elementen van L_0 heten constanten.

28. Regels voor NDS-schema's. (NDS slaat op "ND met substitutie"). Een NDS-schema is een rij lijnen van het type

$$E,K \circ f$$

waarin $E \in P_e(L \setminus L_0)$, $K \in P_e(F^{\wedge}(E \cup L_0))$. Een paar (E,K) dat hieraan voldoet heet een context.

De met de regels uit §5 en §16 corresponderende regels zijn

(i) Als (E,K) een context is, en $f \in K$ dan mag

$$E,K \circ f$$

als m-de lijn worden toegevoegd (ook als $m=1$).

(ii) Als $1 \leq i < m$, $1 \leq j < m$, als $(E_1,K_1),(E_2,K_2),(E_3,K_3)$ contexten zijn met $E_3 \supset E_1 \cup E_2$, $K_3 \supset K_1 \cup K_2$ en als

$$\ell_i = E_1,K_1 \circ f \to g$$

$$\ell_j = E_2,K_2 \circ f$$

dan mag

$$\ell_m = E_3,K_3 \circ g$$

worden toegevoegd.

(iii) Als $1 \leq i < m$, als $(E_1,K_1),(E_2,K_2)$ contexten zijn met $E_1 \subset E_2$, $K_1 \subset K_2 \cup \{f\}$ als

$$\ell_i = E_1,K_1 \circ g$$

en dan mag worden toegevoegd de lijn

$$\ell_m = E_2,K_2 \circ f \to g\,.$$

(iv) en (v) zijn de (aangepaste) regels uit §16: als zowel $E,K \circ f$ en $E,K \circ g$ lijnen zijn dan mag $E,K \circ f \wedge g$ worden toegevoegd, en omgekeerd.

(81)

(vi) Regel voor toevoeging van axioma's. Als E,K een context is, en $f \in P_e(F^\wedge(E \cup L_0))$ dan mag de lijn

$$E,K \circ f \qquad (ax)$$

worden toegevoegd.

(vii) Substitutieregel. Als $1 \leq i < m$ en

$$\ell_i = E_1,K_1 \circ f \qquad \text{of} \qquad \ell_i = E_1,K_1 \circ f \text{ (ax)} \quad ,$$

als (E_2,K_2) een context is, en $\phi : L \to F^\wedge(E_2 \cup L_0)$ met de eigenschap dat $\phi(x) = x$ voor alle $x \in L_0$, als tenslotte voor elke $k \in K_1$ geldt dat $S_\phi(k) \in K_2$, dan mag

$$\ell_m = E_2,K_2 \circ S_\phi(f)$$

worden toegevoegd.

We merken op dat in het geval dat er geen axioma's worden ingevoerd, de substitutieregel een conservatieve toevoeging aan de voorafgaande regels is. Wanneer er wèl axioma's zijn maakt de substitutieregel ze tot iets sterkers, nl. axiomaschema's. Het axioma

$$\{a\}, \emptyset \circ a \perp\!\!\!\perp a \qquad (ax)$$

leidt ertoe dat voor elke f nu $\vdash f \perp\!\!\!\perp f$.

29. NDS-schema's in blokgestructureerde vorm. Op de wijze van §7 tewerk gaande hebben we nu twee soorten blokopeners nodig: de met rechthoeken aangegeven onderstellingen (uitbreidingen van K) en de (in het volgende met driehoekjes aangegeven) uitbreidingen van de variabelenvoorraad E.

We presenteren een uitvoerig voorbeeld. Hier treden nog twee nieuwigheden op: (i) in lijn 1 wordt een primitieve constante ingevoerd, waarmee bedoeld is dat de inhoud van L_0 in het schema zèlf wordt medegedeeld, en (ii) in de lijnen 11,22 worden afkortingen ingevoerd die later mogen worden gebruikt.

Zonder veel toelichting zal wel duidelijk zijn dat bijv. in lijn 46

$$E = \{a,b,c\}, \qquad K = \{a \vee b, ac, bc, \neg c, a\}.$$

82

1 Het symbool ⊥ wordt al primitieve constante ingevoerd.
2 a
3 $\boxed{a}$
4 a herhaling
5 a → a af 4
6 $\boxed{a}$
7 $\boxed{a\bot}$
8 ⊥ MP(7,6)
9 a⊥⊥ af 8
10 a → a⊥⊥ af 9 di. a → (¬¬ a)
11 ¬ a := a⊥ (<u>afkorting</u>)
12 a⊥⊥ a (<u>axioma</u>)
13 b
14 $\boxed{a}$
15 $\boxed{b}$
16 a herhaling
17 ba af 16
18 $\boxed{\bot}$
19 a⊥⊥ subst a := ⊥, b:= a⊥ in 17
20 a MP(12,19)
21 b
22 a ∨ b := (¬ a) → b (<u>afkorting</u>)
23 $\boxed{a \vee b}$
24 $\boxed{\neg b}$
25 $\boxed{\neg a}$
26 b MP(23,25)
27 ⊥ MP(24,26)
28 ¬ ¬ a af 27
29 a MP(12,28)
30 b ∨ a af 29
31 $\boxed{a}$
32 $\boxed{\neg a}$
33 ⊥ MP(32,31)
34 b subst a := b in 20, gebruik 33
35 a ∨ b af 34
36 b ∨ a 30, gebruik 35
37 a ∨ (¬ a) subst a := ¬ a in 5

a ∨ b
b ∨ a

a
a ∨ b

a
b ∨ a

83

38	a	
39	b	
40	c	
41	$\boxed{a \vee b}$	
42	$\boxed{ac}$	
43	$\boxed{bc}$	
44	$\boxed{\neg c}$	
45	$\boxed{a}$	
46	c	MP(42,45)
47	$\perp$	MP(44,47)
48	$\neg a$	af 47
49	b	MP(41,48)
50	c	MP(43,49)
51	$\perp$	MP(44,50)
52	$\neg\neg c$	af 51
53	c	MP(subst. a := c in 12,52)
54	$\boxed{a \rightarrow b}$	
55	$\boxed{(\neg a) \rightarrow b}$	
56	b	subst. a:=a, b:=$\neg$a, c:=b in 53, met 37,54,55
57	$\boxed{b}$	
58	babb	subst. a:=b, b:=bab in 17
59	$b \rightarrow babb$	af 58
60	$\boxed{\neg b}$	
61	$\boxed{b}$	
62	$\perp$	MP(60,61)
63	a	20, met 62
64	ba	af 63
65	$\boxed{bab}$	
66	b	MP(65,64)
67	babb	af 66
68	$(\neg b) \rightarrow babb$	af 67
69	babb	subst a:=b, b:=babb in 56, met 59 en 68

gebruiksregel voor disjunctie:

$$\frac{a \vee b,\ a \rightarrow c,\ b \rightarrow c}{c}$$

$$\frac{a \rightarrow b,\ (\neg a) \rightarrow b}{b}$$

57÷69: Voorbeeld van afleiding door gevallenonderscheiding

In ons voorbeeld staan steeds de variabelen vóór de onderstellingen. Nodig is dat niet, men kan toelaten dat ook nà onderstellingen weer variabelen worden opgevoerd. Bij elke lijn (ook bij blokopeningslijnen als 2,3,44,65) eisen we dat (E,K) een context is.

Bijlage bij college: Taal en Struktuur van de Wiskunde.
Mei 1978 - N.G. de Bruijn.

Het onbepaalde lidwoord in wiskundig nederlands.

1. Inleiding.

In dit stuk wordt in het bijzonder de inhoud bekend ondersteld van V.17 (Nederlandse zinnen met formulaire zinsdelen) en V.21 (Opmerkingen over wiskundige taal).

In V.17 §19 werd de raad gegeven om bij vertaling van WOT naar WOT* constructies met onbepaald lidwoord geheel te elimineren. Niettemin is het interessant te zien welke rol het in WOT speelt.

Het onbepaalde lidwoord staat altijd vóór een substantief. We zullen dat in het volgende meestal door β voorstellen. Men moet erop verdacht zijn dat "een β" als meervoud "β's" heeft, waarbij het lidwoord is verdwenen. (Taalkundigen zeggen dat er dan "het nulteken" staat). Ook in constructies met "twee β's", enz. is er iets onbepaalds aan de gang. (zie daarvoor ook V.19 §12).

We zullen een aantal verschillende gebruiksmogelijkheden van het onbepaalde lidwoord aangeven.

2. Opmerking vooraf over context. We maken een opmerking die aanduidt dat men soms zonder bezwaar verschillende vertalingen kan accepteren van eenzelfde tekst. Als $\zeta(x)$ een bewerende zin is dan drukken

$$\forall_{x:\beta}\zeta(x) \qquad \text{en} \qquad \Gamma_{x:\beta}\zeta(x)$$

hetzelfde uit: het is een van de fundamentele taalregels (vgl. introductie en eliminatie van de pijl in natuurlijke deductie) dat men heen en weer kan. Een klein verschil is dat men $\forall$ slechts op één zin kan laten werken en Γ ook op een groter stuk tekst.

Als echter achter $\Gamma_{x:\beta}$ een definitie komt kan men niet meer op $\forall_{x:\beta}$ overgaan. De rol van bijv.

$$\Gamma_{x:\text{positief getal}} \text{ de wortel van } x := \dots \tag{1}$$

is dat men later buiten deze context, als men een positief getal p heeft, over "de wortel van p" kan spreken en die kan identificeren met wat er op de stippeltjes staat met vervanging van x door p. Noemen we die stippeltjes even f(x) dan kunnen we zeggen dat in WOT de regel (1) vaak in de volgende vorm wordt uitgesproken:

<u>Definitie</u>: De wortel van een positief getal is f(dat positievegetal).

3. <u>Gebruik van "een" bij contextaanduiding.</u> Als "een β" in het begin van een zin voorkomt heeft het vaak de bedoeling een contextvlag $\triangleright_{x:\beta}$ vóór de zin te plaatsen, met vervanging van "een β" door x en van alle volgende referenties "die β" door x. Vooral in definities komt het voor. Voorbeeld: "Het zwaartepunt van een driehoek is het snijpunt van de zwaartelijnen van die driehoek". Vertaling:

$$\triangleright_{d:\text{driehoek}}\ \text{het zwaartepunt van } d := \text{het snijpunt van de zwaartelijnen van } d.$$

Een ander voorbeeld (zinsdefinitie): "We zeggen dat een functie op [0,1] aan de randcondities voldoet wanneer zij in beide eindpunten de waarde 0 heeft". Vertaling:

$$\triangleright_{f:\text{functie}}\ f \text{ voldoet aan de randcondities} := (f(0)=f(1)=0).$$

Een beetje ouderwets doet de constructie aan waarbij het contextkarakter van "van een" wordt onderstreept door het voor aan de zin te plaatsen. Voorbeeld: "Van een driehoek ABC is gegeven....." De daarop volgende mededelingen en vragen liggen alle binnen die context ABC, en ook de antwoorden dienen binnen die context gegeven te worden.

4. <u>Universele quantificatie</u>. In §2 werd al gezegd dat dit dicht bij de contextaanduiding staat. (De gevallen met universele quantificatie kunnen ook via contextuitbreiding worden geïnterpreteerd, maar het omgekeerde is niet steeds het geval). Voorbeeld: "Het hoogtepunt van een driehoek ligt op de rechte van Euler van die driehoek". Dit betekent "Voor elke driehoek geldt dat het hoogtepunt...".

We maken zijdelings de opmerking dat hier "het hoogtepunt van een driehoek" niet als despecificatie ("een driehoekshoogtepunt") kan worden opgevat, omdat de zin nog een referentie "die driehoek" bevat.

5. <u>Het gebruik bij typering</u>. "x is een β". In WOT* schrijven we $x : \beta$. Deze typering kan introducerend ("laat x een β zijn") of constaterend zijn (het laatste is vaak ter herinnering, en eigenlijk ten overvloede).

6. <u>Het gebruik bij substantiefdefinitie</u>. We zeggen: een pollepel is een ... . Hierin staat twee keer "een", met verschillende functies. De zin bevat verder geen referenties aan de pollepel (maar misschien wèl aan het substantief dat achter "is een" komt).

7. <u>Het gebruik bij substantiefinclusie</u>. "Een tafel is een meubelstuk". Het eerste "een" betekent "elke". In V17 §19(6) werd reeds voorgesteld deze constructies met "een" te vermijden om verwarring met substantiefdefinitie (of herinnering aan een substantiefdefinitie) te ontgaan.

8. <u>Existentieel gebruik</u>. Als

$$\mathsf{P}_{x:\beta}\ (\zeta(x) :: \text{zin})$$

dan zal vaak de zin

$$\exists_{x:\beta}\, \zeta(x)$$

als

$$\zeta(\text{een } \beta)$$

kunnen worden uitgesproken, maar niet altijd. We geven eerst wat positieve voorbeelden:

$\exists_{x:\beta}$ c ligt op x : c ligt op een β

$\exists_{x:\beta}$ m gaat door het hoogtepunt van x : m gaat door het hoogtepunt van een β.

$\exists_{x:\beta}\ 5 > \log x$: $5 > \log(\text{een } \beta)$

dwz. "5 is groter dan de log van een β".

Maar het gaat <u>niet</u> bij

$$\exists_{x:\beta}\ \log x > 5$$

want "de log van een β is groter dan 5" klinkt als: $\forall_{x:\beta} \log x > 5$, en bij

$$\exists_{x:\beta}(\text{er ligt geen enkel punt op } x)$$

klinkt "er ligt geen enkel punt op een β" als

$\forall_{x:\beta}$(er ligt geen enkel punt op x).

Ook als x het begin van de zin $\zeta(x)$ is gaat het niet:

$\exists_{x:\beta}$ x ligt op c

kan niet vertaald worden in "een β ligt op c" want dat zou als "$\forall_{x:\beta}$ x ligt op c" gelezen kunnen worden. Merkwaardigerwijs wel als we "er" (met volgordeinversie) toevoegen:

"er ligt een β op c".

Iets dergelijks geldt voor

$\exists_{x:\beta}$het hoogtepunt van x ligt op c

met (wat houterige) vertaling

er ligt het hoogtepunt van een β op c.

Een tussenvorm is

$\exists_{x:\beta}$een punt van x ligt op c

(waarin achter de kwantor een existentiele "een" voorkomt. Doordat de mondvol van de kwantor er vóór staat, wordt hier "een punt" niet meer als "elk punt" gelezen. Vertaling

"er ligt een punt van een β op c".

Als de oorspronkelijke zin een inversie ondergaat is het "er" blijkbaar niet meer nodig:

$\exists_{x:\beta}$ op c ligt x

$\exists_{x:\beta}$ op c ligt het hoogtepunt van x

$\exists_{x:\beta}$ op c ligt een punt van x

zijn positieve voorbeelden, en ook het binnenstuk van de laatste zin is al een positief voorbeeld bij

$\exists_{y:\text{punt van } x}$ op c ligt y.

Kortom, een ingewikkelde materie. Veel van deze kwesties (zeker de inversiekwesties) zijn aan het nederlandse taalgebied gebonden. In andere talen ligt het weer anders. Lastig is het overal.

9. <u>Gebruik bij despecificatie</u>. Zoals in V17, §11 werd gezegd, is

$$\left(\text{despo}_{x:\text{officier}}\ (\text{de vrouw van } x)\right) = \text{officiersvrouw},$$

en er is ook een constructie met "een", nl. "de vrouw van een officier", wat synoniem is met "een officiersvrouw". Als dit in een zin voorkomt kan het "een" vaak ook als existentieel gezien worden, want

$$\exists_{x:\text{officier}}\ (\text{hij zat op de bank met de vrouw van } x)$$

is equivalent met

$$\exists_{y:\text{officiersvrouw}}\ \text{hij zat op de bank met } y$$

en in beide gevallen is vertaling met "een" mogelijk ("hij zat op de bank met de vrouw van een officier", en "hij zat op de bank met een officiersvrouw"). Maar de despecificatie kan méér:

"hij zat niet op de bank met een vrouw van een officier"

is niet meer te vertalen met

$$\exists_{x:\text{officier}}\ \text{hij zat niet op de bank met de vrouw van } x.$$

Bij "desp" doen zich overeenkomstige kwesties voor.
Voorbeelden:

"zij sloeg hem met een poot van een tafel".

Hierin is

$$\text{poot van een tafel} \equiv \text{desp}_{t:\text{tafel}}\ (\text{poot van } t) \equiv \text{tafelpoot}$$

en vervolgens is in

"zij sloeg hem met een tafelpoot"

het resterende "een" existentieel. Men kan er ook in zien dat zij hem met een soort telescoop (V21 §10) sloeg: $\exists_{t:\text{tafel}}\ \exists_{p:\text{poot van } t}(\text{zij sloeg hem met p}$

(89)

Het verschil tussen desp en despo is vaak moeilijk: "de vrouw van een officier" gaat met desp, "een kind van een officier" is een despo. In het meervoud verdwijnen alle lidwoorden: "vrouwen van officieren" en "kinderen van officieren", en dan is het verschil niet meer te zien.

10. <u>Heeft een</u>. Merk het verschil op:

"Die hond heeft een manke poot". (1)

"Die hond heeft een lange staart". (2)

Het geval (1) doet zich voor in de volgende situatie:

$$\text{functie} := \text{afbeelding van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R},$$

$$\flat_{f:\text{functie}}\left(\text{nulpunt van } f := S_{x \in \mathbb{R}}\, (f(x)=0)\right).$$

Nu is

$$f \text{ heeft een positief nulpunt} \equiv \exists_{x:\text{nulpunt van } f}\; x \text{ is positief}.$$

Algemeen

$$f \text{ heeft een } \theta\beta \equiv \exists_{x:\beta}\, (x \text{ is } \theta).$$

Het geval (2) doet zich voor bij

"Dit prisma heeft een rechthoekige doorsnede"

wat opgevat wordt als

"de doorsnede van het prisma is rechthoekig".

Lastig is het "heeft" met onbepaald meervoud:

"Deze veelhoek heeft scherpe hoeken".

Het beste is al dat onbepaalde te vermijden via

(1) Een der poten van die hond is mank.
(2) De staart van die hond is lang.
(3) Eén der nulpunten van die functie is positief.
(4) De hoeken van deze veelhoek zijn scherp.

11 <u>"De één of andere"</u>. Vaak probeert men het niet-universele karakter van "een" te onderstrepen door er "de één of andere" van te maken. Dit doet men zowel bij existentie als bij despecificatie. Het schijnt weinig nut te hebben.

12. <u>Samengestelde gevallen</u>. Het is een wonder dat ons taalgevoel ons in staat stelt complexe situaties snel te ontrafelen. Voorbeeld (de griekse letters stellen substantieven voor).

(1) "een β van de γ van een δ is gelijk aan de ε van een σ van die δ"

kan door ons ontleed worden ook als we geen steun hebben aan de betekenis van de substantieven.

$$\mathsf{P}_{x:\delta}\ \forall_{y:\beta \text{ van de } \gamma \text{ van } x}\ \exists_{s:\sigma \text{ van } x}\ y \text{ is gelijk een de } \varepsilon \text{ van } s.$$

Men kan even twijfelen of "de γ van een δ" geen despo kan aanduiden, maar het feit dat er aan het slot van de zin een referentie naar "die δ" staat sluit dat uit. Wèl is uit "de ε van een σ van x" een despo te maken, maar dat geeft een iets lastiger vertaling dan de bovenstaande. Als bijzonder geval kan men proberen: "een deler van de orde van een abelse groep is gelijk aan de orde van een ondergroep van die groep". Merk op dat het overdreven klinkt om het adjectief "abelse" te herhalen.

In het voorbeeld:

(2) "een π van een η heet rond als ζ(die π, die η)"

zou men kunnen denken dat eerst (met $y : \eta$) ingevoerd was "de π van y" en dat door despecificatie (zie §9) "een π van een η" is ontstaan. Maar de referenties achterin maken die opvatting onmogelijk, en men kiest voor een geheel andere opzet, door "een η" als contextaanduiding (§3) te zien, en erop te rekenen dat (met $y : \eta$) "π van y" een substantief is (niet noodzakelijk unitair). De vertaling van (2) in WOT* wordt nu

$$\mathsf{P}_{y:\eta}\ \text{rond} := \text{Adj}_{p:\pi \text{ van } y}\ \zeta(p,y).$$

Een wat ingewikkelder voorbeeld:

(3) "een σ heet (een) π van een η als de δ van die η erop staat"

(probeer: σ = steen, π = hoeksteen, η = huis, δ = dak), met vertaling

$$\triangleright_{y:\eta}\ \pi \text{ van } y := S_{s:\sigma} \text{ (de } \delta \text{ van } y \text{ staat op } s).$$

In zulke gevallen van substantiefdefinitie kan het "een" (in (3) tussen haakjes geplaatst) vóór het definiendum worden weggelaten. Nog wat complexer:

(4) "een σ heet een π van een η als die een β draagt waarop die η staat"

met vertaling

$$\triangleright_{y:\eta}\ \pi \text{ van } y := S_{s:\sigma}\, \exists_{b:\beta \mid y \text{ staat op } b}\ s \text{ draagt } b.$$

(5) "een σ heet een π van een η als er een μ waarvan die σ de γ is geheel tot die η behoort"

$$\triangleright_{y:\eta}\ \pi \text{ van } y := S_{s:\sigma}\, \exists_{m:\mu \mid s \text{ is de } \gamma \text{ van } m} \text{ (} m \text{ behoort geheel tot } y).$$

Probeer het maar met σ = punt, π = inwendig punt, η = verzameling, μ = cirkelschijf, γ = middelpunt, zie V21 §5.8.

(6) "een σ heet een π van een η als die een β draagt waarop een μ van die η rust".

Vertaling

$$\triangleright_{y:\eta}\ \pi \text{ van } y := S_{s:\sigma}\, \exists_{b:\beta \mid \text{een } \mu \text{ van } y \text{ rust op } b} \text{ (} s \text{ draagt } b).$$

De zin "een μ van y rust op b" moet hier met existentiële "een" worden opgevat: $\exists_{m:\mu \text{ van } y}$ (m rust op b).

Als voorbeeld van naamsdefinitie geven we

(7) "de μ van een τ is de σ die op een δ staat"

$$\triangleright_{t:\tau}\ \text{de } \mu \text{ van } t := \downarrow_{s:\sigma} (\exists_{d:\delta}\ s \text{ staat op } d)$$

(8) "een σ heet de π van een η als ζ(die σ, die η)"

$$\triangleright_{y:\eta}\ \text{de } \pi \text{ van } y := \downarrow_{s:\sigma} \zeta(s,y).$$

Deze constructies veronderstellen dat achter de verticale pijl een zin komt die s eenduidig vastlegt.

(92)

In het volgende voorbeeld zijn "α van b" en "γ van b" kennelijk unitaire substantieven:

(9) "als het α van een β op de γ van die β ligt dan is die β een δ"

$\vdash_{b:\beta}$ Als (het α van b) ligt op (de γ van b) dan is b : δ.

13. Kunnen we in WOT* onbepaalde lidwoorden tolereren? Uit de voorbeelden in §12 is te zien dat het ongebreidelde gebruik tot grote complicaties leidt, en er is steeds gevaar voor dubbelzinnigheden. In de meeste gevallen zou het gebruik van onbepaalde lidwoorden WOT* niet korter maken. Alleen het existentiële gebruik levert notatiewinst op. Men zou het volgende kunnen afspreken. Als "een β" in een zin voorkomt, en als deze zin de kleinste zin is die dit "een β" bevat, dan is de interpretatie van die zin als volgt: plaats vóór de zin de quantor $\exists_{b:\beta}$, en vervang "een β" door b.

Dit gebruik zou notationeel vele voorbeelden bieden. Een bezwaar is dat sommige van deze onbepaalde lidwoorden terecht kunnen komen op plaatsen waar men gewend is ze universeel en niet existentieel op te vatten. Merk bijv. het gevoelsmatige verschil op tussen

f(een positief getal) $>$ 3 en 3 $<$ f(een positief getal).

In het engels kan men dit existentiële "een" met "some" aanduiden, wat veel veiliger is.

Bijlage bij college: Taal en Struktuur van de Wiskunde. V 28
Februari 1982 - N.G. de Bruijn.

93

Boomrepresentatie van bindingsformules.

1. In V 22, ("Lezen en schrijven van formules"), zijn de bindingsformules niet goed uit de verf gekomen. We zullen nu wat afspraken maken die dit materiaal beter vastleggen, en die ook rekening houden met het verschil tussen typering met substantief (zoals x:V) en typering met verzameling zoals ($x \in K$). Voor deze laatste zaken zij verwezen naar V 17, par. 6 en par. 10.

2. We geven bindingsplaatsen met een dikke punt aan, en daarbij staat de gebonden variabele, of desgewenst een λ gevolgd door die gebonden variabele. Als men naamvrije calculus bedrijft wordt die variabele natuurlijk niet genoemd (vgl. V22, blz. 6).

   De interpretatie van die punt met alles wat erboven staat is "functie zonder typering door domein".

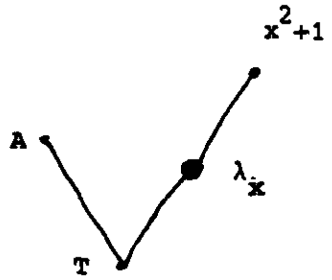
Voorbeelden:

stellen de identieke functie en de constante functie met waarde c voor.

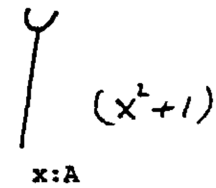
3. We gebruiken de unaire operatoren $\downarrow$ en $\uparrow$ om van verzameling naar substantief resp. van substantief naar verzameling te gaan. Voorbeelden:

stellen resp. het substantief nat en de verzameling $\mathbb{N}$ voor.

4. We gebruiken de binaire knoop T om bij een functie een type aan de variabele toe te kennen. Voorbeeld:

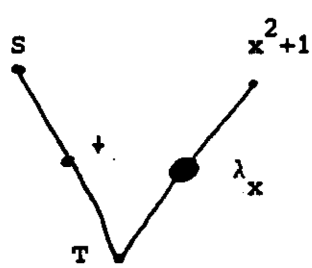


voor

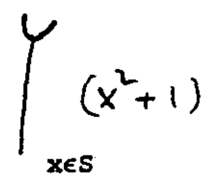


(We hebben niet de moeite genomen om $x^2 + 1$ in boomvorm te brengen.)
Doorgaans staat in de rechterpoot een λ, want we zullen zelden afkortingen invoeren voor ongetypeerde functies.

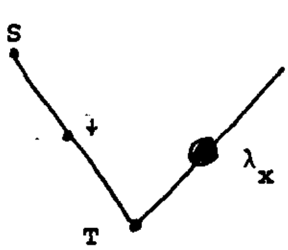
Heel vaak wil men de typering d.m.v. een verzameling uitdrukken, en daarvoor is een neergaande pijl nodig:



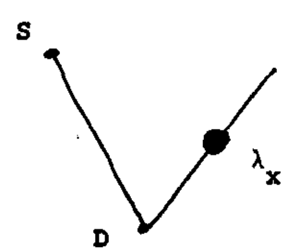
voor



Het ligt voor de hand deze veel voorkomende combinatie af te korten; daartoe wordt voorgesteld



af te korten tot



T is mnemo (d.i. geheugensteun) voor "type", D voor "domein".

5. We voeren nu een aantal unaire operatoren in om allerlei kwantoren in boomvorm te kunnen brengen. In de volgende lijst is aangegeven wat toepassing van de operator oplevert op $\gamma_{x:A}$ R(x), en welke eis daarbij aan R(x) gesteld wordt. De letter A stelt natuurlijk een substantief voor, en in vier gevallen is ook B een substantief. Het substantief set(B) betekent "verzameling van B's". Overal is V hetzelfde als A^{+}.

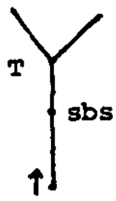
We zeggen nadrukkelijk dat de operatornamen hier terplaatse gefantaseerd zijn. Het is geen voorstel voor definitief gebruik. Ze dienen vooral om ons in staat te stellen onderlinge samenhangen aan te geven.

gangbare notatie	unaire operator	typering of metatypering voor R(x)	typering of metatypering voor $\gamma_{x:A}$ R(x)
$\{x \in V \mid R(x)\}$ $\uparrow_{x \in V}$ R(x)	restrict	:: kernzin	: set (A)
$\{R(x) \mid x \in V\}$ R(V)	collect	: B	: set(B)
$\cup_{x \in V}$ R(x)	union	: set(B)	: set(B)
$\cap_{x \in V}$ R(x)	intersect	: set(B)	: set(B)
$\#_{x \in V}$R(x)	aantal	:: kernzin	: getal
$\downarrow_{x \in V}$ R(x)	jota	:: kernzin	: A
$\Sigma_{x \in V}$ R(x)	som	: getal	: getal
$\forall_{x \in V}$ R(x)	all	:: kernzin	:: kernzin
$\exists_{x \in V}$ R(x)	exist	:: kernzin	:: kernzin
$S_{x \in V}$ R(x)	sbs	:: kernzin	:: substantief
$\text{despo}_{x \in V}$ R(x)	despo	: B	:: substantief
$\text{desp}_{x \in V}$ R(x)	desp	:: substantief	:: substantief
$\text{univ}_{x \in V}$ R(x)	univ	:: substantief	:: substantief

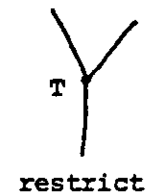
Voor "univ" verwijzen we naar par. 8.

6. Sommige operaties kunnen in andere worden uitgedrukt met behulp van de operatoren ↑ en ↓.

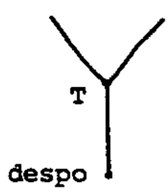
a. Samenhang van "sbs" en "restrict":



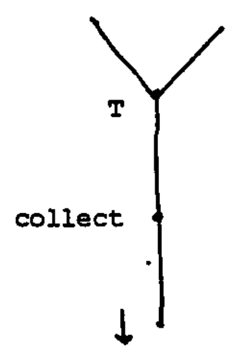
is hetzelfde als



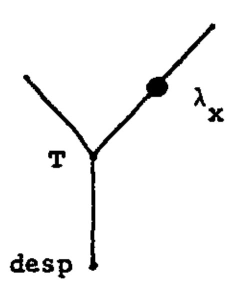
b. Samenhang "despo" en "collect".



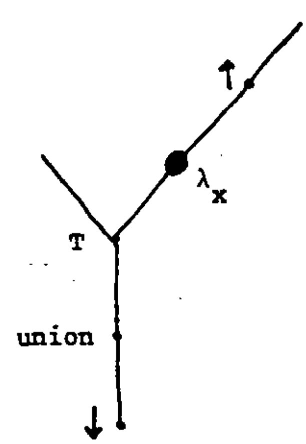
is hetzelfde als



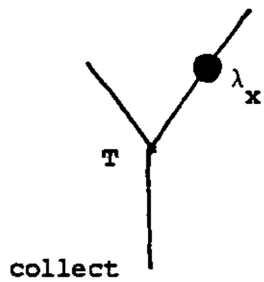
c. Bij de samenhang tussen "desp" en "union" moeten we wat hogerop in de boom kijken:



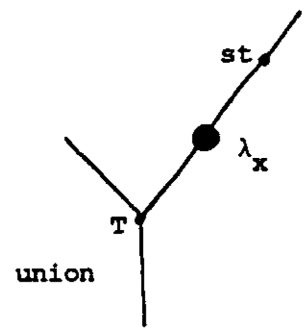
is hetzelfde als



d. Bij gebruik van st(x) (st(x) = {x}; st is mnemo voor singleton) kan "collect" in "union" worden uitgedrukt:



is hetzelfde als



Deze afkortingen gaan op dezelfde manier als overal T door D wordt vervangen.

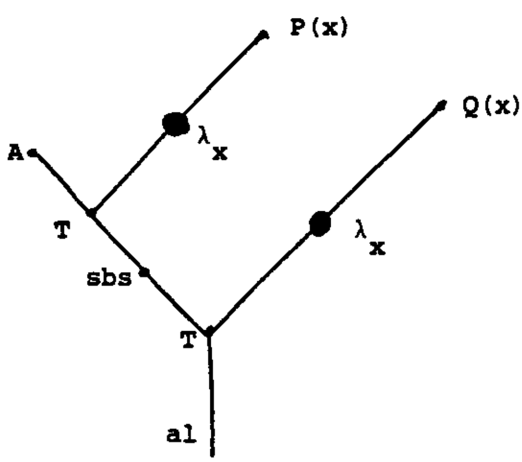
7. Bij "binding met restrictie" (zie V22, par. 7) geven we hier de voorkeur aan de opvatting dat binders met subscript

$$x{:}A \mid P(x)$$

een typering door een nieuw substantief C voorstellen, gegeven door

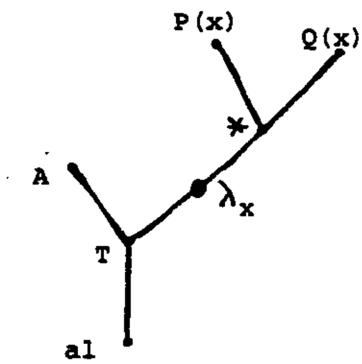
$$C = S_{x:A}\ P(x)$$

Zo tekenen we

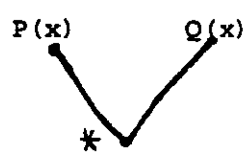


voor $\forall_{x:A|P(x)}\ Q(x)$

Het is jammer dat we twee afzonderlijke λ's krijgen, terwijl in de formule de x:A maar één enkele binding suggereerde. Het lijkt attractief om de figuur af te korten door een nieuw type knoop "$*$" te maken en te tekenen



Zulk "oneigenlijk gebruik" van binders is bedenkelijk omdat aan de subboom



geen eigen betekenis mag worden toegekend. En àls men het zou proberen zou de $*$ in het geval van het alsymbool een andere betekenis krijgen dan in het geval van het existentiesymbool (nl. $\rightarrow$, resp. $\wedge$).

Wat over de binding $x{:}A \mid P(x)$ gezegd is kan met een kleine verandering voor de binding $x \in V \mid P(x)$ gedaan worden. Men vervange de T's door D's, en "sbs" door "restr". Zie de voorbeelden in par. 9.

8. De operator "univ" (mnemo voor "universeel") hadden we nog niet eerder beschouwd. Het is de operator die in substantief-taal met $\cap$ (doorsnede) correspondeert zodat nu het volgende lijstje van paralellen compleet wordt gemaakt:

	verzamelingstaal	substantieftaal
(restrict)	$\{x \in V \mid R(x)\}$	$S_{x \in V}\ R(x)$
(collect)	$\{R(x) \mid x \in V\}$	$\mathrm{despo}_{x \in V}\ R(x)$
(union)	$\cup_{x \in V}\ R(x)$	$\mathrm{desp}_{x \in V}\ T(x)$
(intersect)	$\cap_{x \in V}\ R(x)$	$\mathrm{univ}_{x \in V}\ T(x)$

De dingen uit de rechterkolom kunnen in de gebruikelijke verzamelingstaal als volgt worden uitgedrukt:

$$S_{x \in V}\ R(x) = \{x \in V \mid R(x)\}^{\downarrow}$$

$$\mathrm{despo}_{x \in V}\ R(x) = \{R(x) \mid x \in V\}^{\downarrow}$$

$$\mathrm{desp}_{x \in V}\ T(x) = (\cup_{x \in V}\ (T(x))^{\uparrow})^{\downarrow}$$

$$\mathrm{univ}_{x \in V}\ T(x) = (\cap_{x \in V}\ (T(x))^{\uparrow})^{\downarrow}$$

Omgekeerd:

$$\{x \in V \mid R(x)\} = (S_{x \in V}\ R(x))^{\uparrow}$$

$$\{R(x) \mid x \in V\} = (\mathrm{despo}_{x \in V}\ R(x))^{\uparrow}$$

$$\cup_{x \in V}\ R(x) = (\mathrm{desp}_{x \in V}\ (R(x))^{\downarrow})^{\uparrow}$$

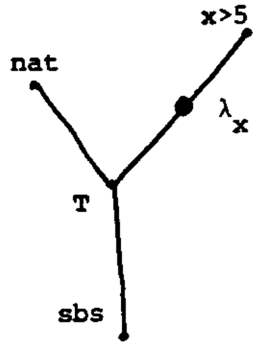
$$\cap_{x \in V}\ R(x) = (\mathrm{univ}_{x \in V}\ (R(x))^{\downarrow})^{\uparrow}$$

Een paar voorbeelden bij "univ":

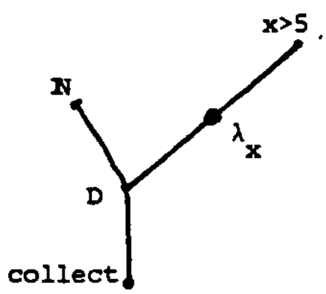
universele schroevendraaier: $= \mathrm{univ}_{x:\mathrm{schroef}}$ (schroevendraaier geschikt voor x)

allemansvriend: $= \mathrm{univ}_{x:\mathrm{man}}$ (vriend van x)

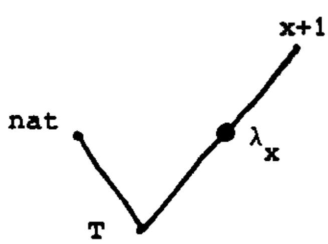
9. We geven nog een aantal voorbeelden van het representeren van formules door bomen.



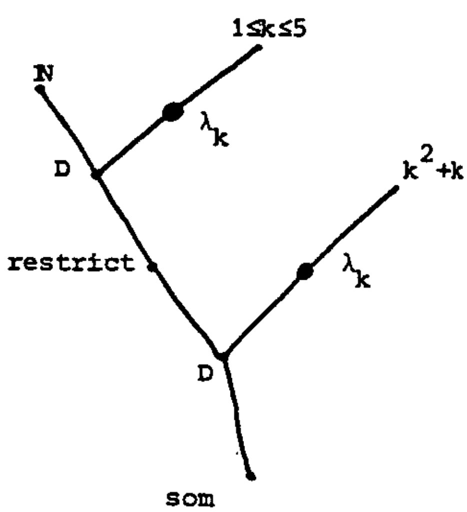
$S_{x:nat}\ (x>5)$



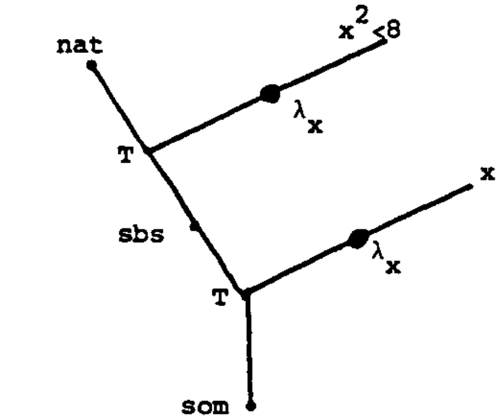
$\uparrow_{x\in N}\ (x>5)$



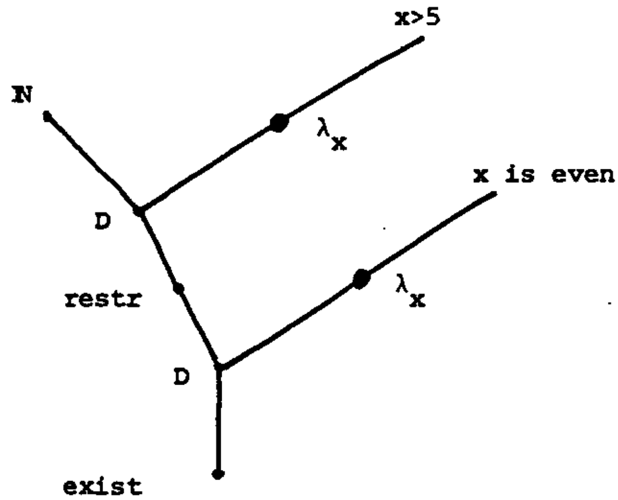
$\curlyvee_{x:nat}\ (x+1)$



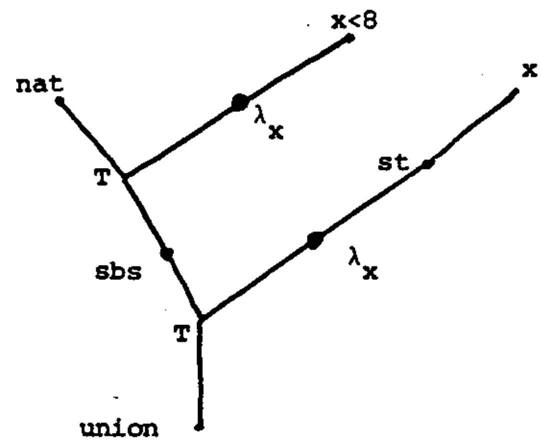
$$\sum_{k=1}^{5} (k^2+k)$$



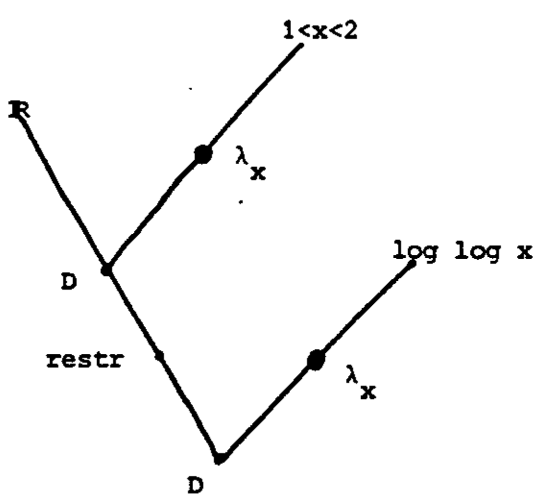
$$\sum_{x:nat|x^2<8} x$$



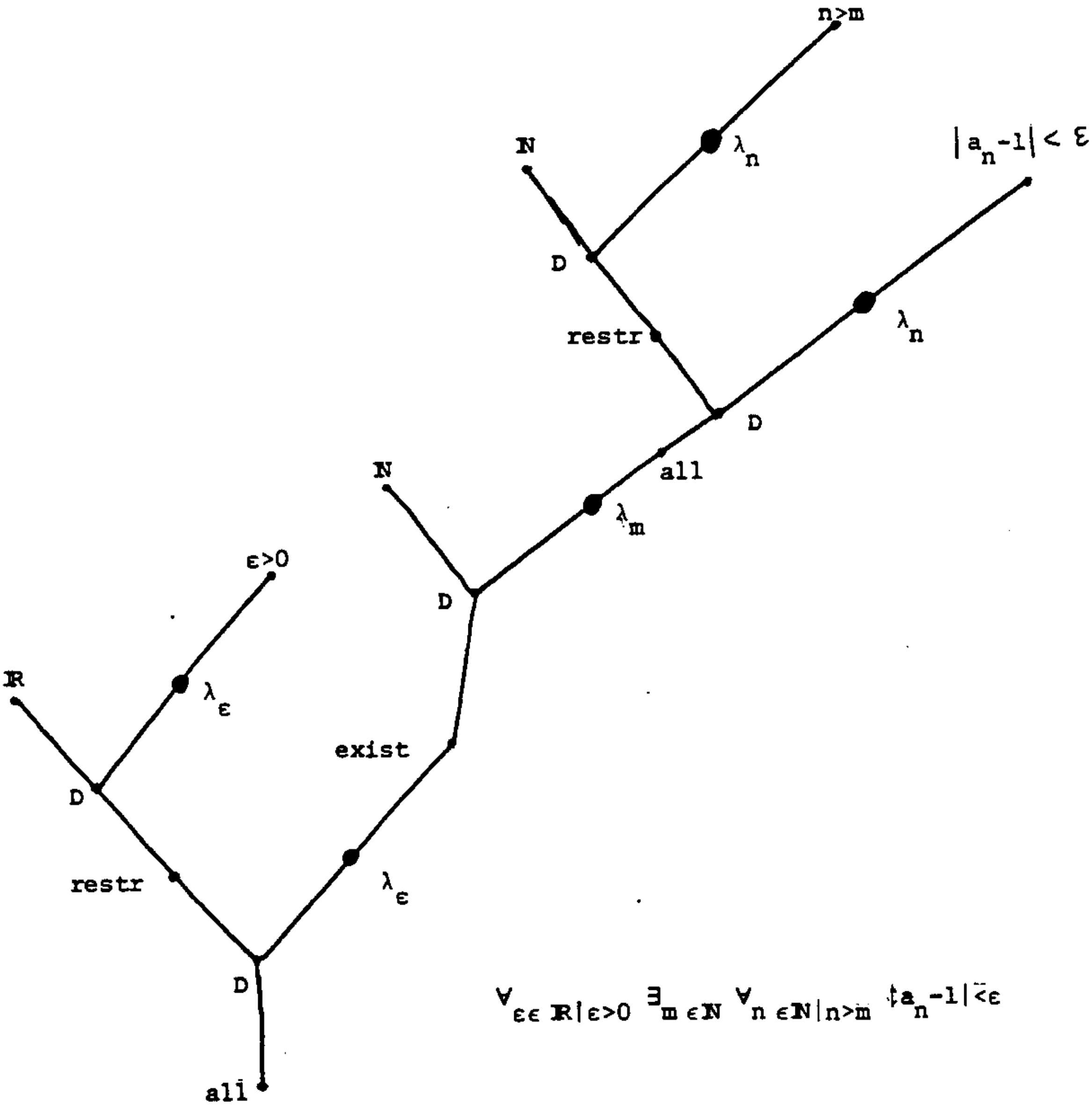
$$\exists_{x\in \mathbb{N}|x>5}(x \text{ is even})$$



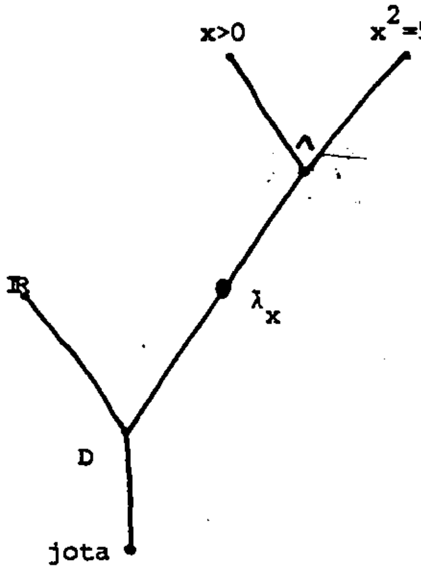
$$\bigcup_{x:nat|x<8}\{x\}$$



$$\Upsilon_{x\in \mathbb{R}|1<x<2} \log\log x$$



$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}|\varepsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}|n>m}\ |a_n-1|<\varepsilon$



$\downarrow_{x\in\mathbb{R}}\ (x>0 \wedge x^2=5)$